

**ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN KESİR
ŞEMALARININ İNCELENMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Yeşim OZANSAK TOPCU

Eskişehir 2019

**ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN KESİR ŞEMALARININ
İNCELENMESİ**

Yeşim OZANSAK TOPCU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin Bahadır YANIK

**Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Temmuz 2019**

*Bu tez çalışması Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri
Komisyonunca kabul edilen 1803E073 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.*

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Yeşim OZANSAK TOPCU'nun "Ortaokul Öğrencilerinin Kesir Şemalarının İncelenmesi" başlıklı tezi 11.07.2019 tarihinde, aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programında, Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Unvanı-Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç.Dr. H.Bahadır YANIK	
Üye	: Prof.Dr. Ali ERSOY	
Üye	: Prof.Dr. Ahmet KÜÇÜK	
Üye	: Prof.Dr. Kürşat YENİLMEZ	
Üye	: Doç.Dr. Tuba ADA	

Prof.Dr. Handan DEVECİ
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Müdür Vekili

ÖZET

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN KESİR ŞEMALARININ İNCELENMESİ

Yeşim OZANSAK TOPCU

Matematik Eğitimi ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Temmuz 2019

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin Bahadır YANIK

Kesir şemaları, kesir kavramı zihinde yapılandırılırken belli bir durum karşısında kesirsel faaliyetlerin deneyimlenmesinden soyutlanmasına kadar olan sürecin olası yol haritalarını temsil eden şematik modellerdir. Bu araştırma ortaokul 5. sınıftan 8. sınıf düzeyine kadar öğrencilerin ne tür kesir şemalarına sahip oldukları ve şemalar kapsamında kesirsel faaliyetleri uygulamada sınıf düzeyleri arasında nasıl bir değişim ve gelişim olduğunu incelemek amacıyla gelişimsel araştırma yöntemi ile tasarlanmıştır. Veriler, uyarlanmış bir yazılı değerlendirme aracı ve yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler aracılığıyla 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinden kesitsel zamanlı olarak toplanmış ve içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Araştırma sonuçlarına göre kesir şemalarının gelişiminde herhangi bir hiyerarşik yapı bulunmasa da en ilkel şemanın aynı anda parçalama şeması (APŞ) olduğu ve bu şemanın 5. sınıftan 8. sınıfa doğru giderek azaldığı görülmüştür. Araştırma kapsamında incelenen şemalardan ikisinin gelişim sürecinin 6. sınıftan 7. sınıfa geçerken hızlandığı, diğer beş şemanın ise gelişim sürecinin 5. sınıftan 6. sınıfa geçerken hızlı bir şekilde arttığı sonucuna ulaşılmıştır. Kesirsel faaliyet kullanımının ise şemalara göre farklı şekilde ortaya çıktığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda kesirsel faaliyetlerin farklı kesir modelleri üzerinde uygulanırken yaşanan güçlük betimlenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Kesir şemaları, Kesirsel faaliyetler, Kesir modelleri, Kesir öğrenimi, Ortaokul matematik öğrencileri.

ABSTRACT
INVESTIGATION OF FRACTION SCHEMES OF MIDDLE SCHOOL
STUDENTS

Yeşim OZANSAK TOPCU

Department of Mathematics and Science Education
Anadolu University, Graduate School of Educational Sciences, July 2019

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin Bahadır YANIK

Fraction schemes are schematic models that represent possible roadmaps of process from the experiencing of the fraction operations to the interiorizing in the face of a particular situation while the concept of fraction is being structured in the mind. This study was designed with the developmental research method in order to examine what kind of fractional schemes students have in grades 5 through 8 and how there is a change and development between grade levels in the application of fraction operations within the schemes. Data were collected cross-sectionally from 5th, 6th, 7th and 8th grade students through an adapted written evaluation tool and semi-structured clinical interviews and analyzed by content analysis. The results of the study showed that although there is no hierarchical structure in the development of fractional schemes, it is seen that the most primitive scheme is the simultaneous partitioning scheme and gradually decreases from grade 5 to grade 8. While in the development process of two different schemes examined, there is a rapid increase in the transition from grade 6 to grade 7; results showed that in the development process of most of the schemes examined, a rapid increase occurred in the transition from 5th grade to 6th grade. Further, some distinctions have been identified regarding the use of fraction operations in the context of fractional schemes. Besides, it was seen that students had difficulty in applying fraction operations on diverse fraction representations.

Keywords: Fraction schemes, Fraction operations, Fraction representations, Fraction learning, Middle school mathematics students.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bütün özverisiyle bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, bu araştırmanın her aşamasında akademik ve manevi anlamda yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen, büyük bir sabırla eksikliklerimi gösterip bana rehberlik eden çok değerli tez danışmanım Doç. Dr. Hüseyin Bahadır YANIK'a;

çalışmamı detaylı bir biçimde okuyarak, tez jürime içtenlikle katılan, değerli görüş ve önerileriyle tezime önemli katkılarda bulunan çok kıymetli hocalarım Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e, Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ'e, Prof. Dr. Ali ERSOY'a ve Doç. Dr. Tuba ADA'ya;

tüm yaşamım boyunca attığım her adımı destekleyen, beni koşulsuz seven ve her zaman candan sevgilerini hissettiren ve emeklerini asla ödeyemeyeceğim canım annem Mehtap OZANSAK'a ve canım babam Yılmaz OZANSAK'a;

onlara her baktığımda zamanın ne kadar kıymetli olduğunu hatırladığım ve birlikte büyüyor olmaktan çok keyif aldığım, özellikle tez sürecimde her yorulduğumda bana el uzatan, tüm nazımı çeken ve bu dünyada beni en çok güldüren canım kardeşlerim Merve OZANSAK'a, Ali Can OZANSAK'a ve Bahar OZANSAK'a;

en az ailem kadar benim için endişelenen ve benimle birlikte mutluluğumu da paylaşan, her ihtiyacım olduğunda yanımda olan ve her zaman beni destekleyen sevgili arkadaşım Özgür Doğa GÖRÜRGÖZ'e;

ve tabi ki her zaman bana inanan ve güvenen, aldığım tüm kararlarımda yanımda olan, özellikle tez sürecimde büyük bir sabır ve anlayışla sonsuz sevgisini hissettiren ve her zaman beni neşelendiren ve kendimi çok şanslı hissettiren en büyük destekçim, yol arkadaşım, canım eşim Uğur TOPCU'ya

bu süreçte bana zaman ayırdıkları ve yanımda olduklarını hissettirdikleri için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yeşim OZANSAK TOPCU

Eskişehir 2019

30.07.2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilmeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Yeşim OZANSAK TOPCU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN KESİR ŞEMALARININ İNCELENMESİ.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar DİZİNİ.....	xii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xv
GÖRSELLER DİZİNİ	xvii
KISALTMALAR DİZİNİ	xx
1. GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	2
1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi	7
1.3. Problem Cümlesi.....	11
1.4. Sınırlılıklar	12
1.5. Tanımlar	12
2. ALANYAZIN	15
2.1. Şema Kavramı ve Faaliyetler (Scheme and Operations)	15
2.2. Kesir Şemaları (Fraction Schemes).....	18
2.2.1. Aynı anda parçalama şeması (APŞ; Simultaneous partitioning scheme).....	19
2.2.2. Parça bütün şeması (PBŞ; Part whole scheme)	21
2.2.3. Eş parçalama şeması (EPŞ; Equi partitioning scheme).....	23
2.2.4. Parçalı birim kesir şeması (PBKŞ; Partitive unit fractional scheme).....	26
2.2.5. Parça kesir şeması (PKŞ; Partitive fraction scheme)	28
2.2.6. Tersinir parça kesir şeması (TPKŞ; Reversible partitive fraction scheme).....	29

2.2.7. Bileşik kesir şeması (BKŞ; Iterative fractional scheme).....	31
2.3. Kesirsel Faaliyetler (Fraction Operations).....	32
2.3.1. Birimleştirme ve birim koordinasyonu (Unitizing and unit coordination).....	33
2.3.2. Parçalama (Partitioning)	38
2.3.3. Yerleşik bütünden ayırma (Disembedding).....	40
2.3.4. Tekrarlama (Iterating)	41
2.3.5. Yinelemeli ayırıştırma (Splitting)	42
2.4. Matematik Öğretim Programlarında Kesirler ile İlgili Kazanımlar	43
2.5. İlgili Literatür	46
3. YÖNTEM.....	53
3.1. Araştırma Deseni	53
3.2. Katılımcılar	54
3.3. Pilot Uygulama ve Veri Toplama Süreci	56
3.4. Veri Toplama Araçları.....	58
3.4.1. Yazılı değerlendirme aracı	59
3.4.2. Yarı yapılandırılmış klinik görüşme	63
3.5. Veri Analizi	65
3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği	70
4. BULGULAR VE YORUM	72
4.1. Öğrencilerin Gelişmiş Kesir Şemalarına Ait Bulgular	73
4.1.1. Parçalara ayırma şemalarına (APŞ ve EPŞ) ilişkin bulgular	76
4.1.1.1. Aynı anda parçalama şemasına (APŞ) ilişkin bulgular	78
4.1.1.2. Eş parçalama şemasına (EPŞ) ilişkin bulgular.....	84
4.1.2. Parça bütün şemasına (PBŞ) ilişkin bulgular	94
4.1.2.1. PBŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması.....	100
4.1.3. Parçalı birim kesir şemasına (PBKŞ) ilişkin bulgular	101
4.1.3.1. PBKŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması.....	109
4.1.4. Parça kesir şemasına (PKŞ) ilişkin bulgular	110

4.1.4.1. PKŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması.....	116
4.1.5. Tersinir parça kesir şemasına (TPKŞ) ilişkin bulgular.....	118
4.1.5.1. TPKŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması.....	122
4.1.6. Bileşik kesir şemasına (BKŞ) ilişkin bulgular	123
4.1.6.1. BKŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması.....	132
4.2. Gelişmekte Olan Kesir Şemaları Kapsamında Kesirsel Faaliyetlerin Farklı Modellere Uygulanmasında Yaşanan Güçlükler Ait Bulgular ...	133
4.2.1. Birimleştirme (unitizing) bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlükler ilişkin bulgular.....	136
4.2.1.1. Birimleştirme bağlamında alan modeli üzerinde yaşanan güçlükler ilişkin bulgular.....	139
4.2.1.2. Birimleştirme bağlamında çubuk modeli üzerinde yaşanan güçlükler ilişkin bulgular.....	141
4.2.1.3. Birimleştirme bağlamında küme modeli üzerinde yaşanan güçlükler ilişkin bulgular.....	143
4.2.1.4. Birimleştirme bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde yaşanan güçlükler ilişkin bulgular.....	146
4.2.2. Parçalama (partitioning) bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlükler ilişkin bulgular.....	148
4.2.2.1. Parçalama bağlamında alan modeli üzerinde yaşanan güçlükler ilişkin bulgular.....	151
4.2.2.2. Parçalama bağlamında çubuk modeli üzerinde yaşanan güçlükler ilişkin bulgular.....	152
4.2.2.3. Parçalama bağlamında küme modeli üzerinde yaşanan güçlükler ilişkin bulgular.....	155
4.2.2.4. Parçalama bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde yaşanan güçlükler ilişkin bulgular.....	157

4.2.3. Yerleşik bütünden ayırma (disembedding) bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular.....	158
4.2.3.1. Yerleşik bütünden ayırma bağlamında alan modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	161
4.2.3.2. Yerleşik bütünden ayırma bağlamında çubuk modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	163
4.2.3.3. Yerleşik bütünden ayırma bağlamında küme modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	164
4.2.3.4. Yerleşik bütünden ayırma bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	166
4.2.4. Tekrarlama (iterating) bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular.....	168
4.2.4.1. Tekrarlama bağlamında alan modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	171
4.2.4.2. Tekrarlama bağlamında çubuk modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	173
4.2.4.3. Tekrarlama bağlamında küme modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	175
4.2.4.4. Tekrarlama bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	177
4.2.5. Yinelemeli ayrıştırma (splitting) bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular.....	180
4.2.5.1. Yinelemeli ayrıştırma bağlamında alan modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	182
4.2.5.2. Yinelemeli ayrıştırma bağlamında çubuk modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	185
4.2.5.3. Yinelemeli ayrıştırma bağlamında küme modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	187
4.2.5.4. Yinelemeli ayrıştırma bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular	190

	<u>Sayfa</u>
5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	192
5.1. Sonuç.....	192
5.1.1. Kesir şemalarına ilişkin sonuçlar	192
5.1.1.1. Parçalara ayırma şemalarına (APŞ ve EPŞ) ilişkin sonuçlar	193
5.1.1.2. Parça bütün şemasına (PBŞ) ilişkin sonuçlar.....	196
5.1.1.3. Parçalı birim kesir şemasına (PBKŞ) ilişkin sonuçlar.....	198
5.1.1.4. Parça kesir şemasına (PKŞ) ilişkin sonuçlar	199
5.1.1.5. Tersinir parça kesir şemasına (TPKŞ) ilişkin sonuçlar.....	200
5.1.1.6. Bileşik kesir şemasına (BKŞ) ilişkin sonuçlar	201
5.1.2. Kesirsel faaliyetlere ilişkin sonuçlar	202
5.1.2.1. Birimleştirme faaliyetine ilişkin sonuçlar	203
5.1.2.2. Parçalama faaliyetine ilişkin sonuçlar	205
5.1.2.3. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetine ilişkin sonuçlar	208
5.1.2.4. Tekrarlama faaliyetine ilişkin sonuçlar	210
5.1.2.5. Yinelemeli ayırıştırma faaliyetine ilişkin sonuçlar.....	212
5.2. Tartışma	216
5.3. Öneriler.....	221
5.3.1. Öğretime yönelik öneriler.....	221
5.3.2. Öğretim programlarına yönelik öneriler	222
5.3.3. Gelecekte yapılacak çalışmalara öneriler	223
KAYNAKÇA	224

EKLER

ÖZGEÇMİŞ

TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 2.1. Aynı anda parçalama şemasının çalışma mekanizması	20
Tablo 2.2. Parça bütün şemasının çalışma mekanizması	23
Tablo 2.3. Eş parçalama şemasının çalışma mekanizması.....	25
Tablo 2.4. PBKŞ ile EPŞ arasında ortaya çıkabilecek farklılıklar	27
Tablo 2.5. Parçalı birim kesir şemasının çalışma mekanizması.....	28
Tablo 2.6. Parça kesir şemasının çalışma mekanizması	29
Tablo 2.7. Tersinir parça kesir şemasının çalışma mekanizması	30
Tablo 2.8. Bileşik kesir şemasının çalışma mekanizması	32
Tablo 2.9. Doğal sayılar ve kesirlerde farklı modellerde kullanılan birim türleri	36
Tablo 2.10. Birim koordinasyonu anlamlandırma seviyeleri	38
Tablo 2.11. Kesirsel faaliyetler	43
Tablo 2.12. İlkokul ve ortaokul matematik öğretim programlarındaki kesirler ile ilgili kazanımlar	44
Tablo 3.1. Araştırma okullarının belirlenen kriterlere göre bilgileri	55
Tablo 3.2. Yazılı değerlendirme aracı uygulanan katılımcı grubu.....	55
Tablo 3.3. Yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen katılımcı grubu.....	56
Tablo 3.4. Yazılı değerlendirme aracına literatürden alınarak eklenen sorular	59
Tablo 3.5. Veri toplama aracında şemalar bağlamında sunulan model türlerinin dağılımı.....	61
Tablo 3.6. Kodların belirlenme ölçütleri.....	66
Tablo 3.7. Kodlama sonucunda verilen puanlara göre şemaların belirlenme ölçütleri..	68
Tablo 3.8. Öğrencilerin sahip oldukları parçalara ayırma şemalarının belirlenme ölçütleri.....	68
Tablo 4.1. PŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları.....	77
Tablo 4.2. APŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı.....	83

Tablo 4.3. EPŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı.....	93
Tablo 4.4. PBŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları	95
Tablo 4.5. PBŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı.....	100
Tablo 4.6. PBKŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları	102
Tablo 4.7. PBKŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı	109
Tablo 4.8. PKŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları.....	110
Tablo 4.9. PKŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı.....	117
Tablo 4.10. TPKŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları	118
Tablo 4.11. TPKŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı	123
Tablo 4.12. BKŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları	124
Tablo 4.13. BKŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı	132
Tablo 4.14. Kesirsel faaliyetleri modeller üzerinde uygulamada öğrencilerin gösterdikleri başarı oranları	135
Tablo 4.15. Birimleştirme faaliyetini uygulamada karşılaşılan güçlükler	138
Tablo 4.16. Birimleştirme faaliyetini alan modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	139
Tablo 4.17. Birimleştirme faaliyetini çubuk modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	141
Tablo 4.18. Birimleştirme faaliyetini küme modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	143
Tablo 4.19. Birimleştirme faaliyetini sayı doğrusu modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	146
Tablo 4.20. Parçalama faaliyetini uygulamada karşılaşılan güçlükler.....	150
Tablo 4.21. Parçalama faaliyetini alan modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	151

Tablo 4.22. Parçalama faaliyetini çubuk modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	153
Tablo 4.23. Parçalama faaliyetini küme modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	155
Tablo 4.24. Parçalama faaliyetini sayı doğrusu modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	157
Tablo 4.25. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini alan modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	161
Tablo 4.26. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini çubuk modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	163
Tablo 4.27. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini küme modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	165
Tablo 4.28. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini sayı doğrusu modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	166
Tablo 4.29. Tekrarlama faaliyetini uygulamada karşılaşılan güçlükler	171
Tablo 4.30. Tekrarlama faaliyetini alan modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	171
Tablo 4.31. Tekrarlama faaliyetini çubuk modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	173
Tablo 4.32. Tekrarlama faaliyetini küme modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	175
Tablo 4.33. Tekrarlama faaliyetini sayı doğrusu modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	177
Tablo 4.34. Yinelemeli ayırıştırma faaliyetini uygulamada karşılaşılan güçlükler	182
Tablo 4.35. Yinelemeli ayırıştırma faaliyetini alan modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	183
Tablo 4.36. Yinelemeli ayırıştırma faaliyetini çubuk modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	185
Tablo 4.37. Yinelemeli ayırıştırma faaliyetini küme modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	188
Tablo 4.38. Yinelemeli ayırıştırma faaliyetini sayı doğrusu modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler	190

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1. Kesirsel bilginin muhtevası	9
Şekil 2.1. Şemanın bileşenleri	16
Şekil 2.2. Aynı anda parçalama şemasından beklenen sonuç örneği	19
Şekil 2.3. Eş parçalama şemasından beklenen sonuç örneği	24
Şekil 2.4. Parçanın orijinal bütüne oranının bulunmasına yönelik problem durumu	27
Şekil 2.5. İki kademeli birim yapısının formu	34
Şekil 2.6. Üç kademeli birim yapısı formu	34
Şekil 2.7. Üç kademeli birim yapılarında geçiş	35
Şekil 2.8. Aynı anda parçalama faaliyeti	39
Şekil 2.9. Eş parçalama faaliyeti	39
Şekil 2.10. Birimlerin tekrarlanması ile yeni tekrarlanabilir bileşik birimlerin oluşturulması	41
Şekil 3.1. Verilerin elde edilmesi süreçleri	56
Şekil 3.2. Kodlama örnekleri	65
Şekil 3.3. Verilerin toplanması ve analiz süreci	70
Şekil 4.1. Bulgular akış şeması	72
Şekil 4.2. Öğrencilerde karşılaşılan gelişmiş kesir şemalarının sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği	74
Şekil 4.3. Öğrencilerde karşılaşılan gelişmekte olan kesir şemalarının sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği	134
Şekil 4.4. Öğrencilerin birimleştirme faaliyetini farklı modellere uygulama performansı grafiği	137
Şekil 4.5. Öğrencilerin parçalama faaliyetini farklı modellere uygulama performansı grafiği	149
Şekil 4.6. Öğrencilerin yerleşik bütünden ayırma faaliyetini farklı modellere uygulama performansı grafiği	160

Şekil 4.7. Öğrencilerin tekrarlama faaliyetini farklı modellere uygulama performansı grafiği	170
Şekil 4.8. Öğrencilerin yinelemeli ayırıştırma faaliyetini farklı modellere uygulama performansı grafiği	181

GÖRSELLER DİZİNİ

Sayfa

Görsel 4.1. APŞ'si gelişmiş Ö5'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1.....	78
Görsel 4.2. APŞ'si gelişmiş Ö5'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-2.....	79
Görsel 4.3. APŞ'si gelişmiş Ö482'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1.....	80
Görsel 4.4. APŞ'si gelişmiş Ö482'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1.....	81
Görsel 4.5. EPŞ'si gelişmiş Ö21'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	85
Görsel 4.6. Ö21 ile görüşme esnasından örnek-1	86
Görsel 4.7. EPŞ'si gelişmiş Ö49'un yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	87
Görsel 4.8. Ö49 ile görüşme esnasından örnek-1	89
Görsel 4.9. EPŞ'si gelişmiş Ö42'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	90
Görsel 4.10. EPŞ'si gelişmiş Ö37'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	91
Görsel 4.11. Ö37 ile görüşme esnasından örnek-1	92
Görsel 4.12. PBŞ'si gelişmiş Ö52'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1.....	95
Görsel 4.13. Ö52 ile görüşme esnasından örnek-1	96
Görsel 4.14. Ö52 ile görüşme esnasından örnek-2	96
Görsel 4.15. PBŞ'si gelişmiş Ö46'nın yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1.....	98
Görsel 4.16. Ö46 ile görüşme esnasından örnek-1	99
Görsel 4.17. PBKŞ'si gelişmiş Ö40'ın yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	102
Görsel 4.18. PBKŞ'si gelişmiş Ö50'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	104
Görsel 4.19. Ö50 ile görüşme esnasından örnek-1	104
Görsel 4.20. PBKŞ'si gelişmiş Ö51'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	105
Görsel 4.21. Ö51 ile görüşme esnasından örnek-1	106
Görsel 4.22. PBKŞ'si gelişmiş Ö8'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	107
Görsel 4.23. PKŞ'si gelişmiş Ö50'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-2	111
Görsel 4.24. Ö50 ile görüşme esnasından örnek-2	112
Görsel 4.25. PKŞ'si gelişmiş Ö23'ün yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	113

Sayfa

Görsel 4.26. Ö23 ile görüşme esnasından örnek-1	114
Görsel 4.27. PKŞ'si gelişmiş Ö36'nın yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	115
Görsel 4.28. Ö36 ile görüşme esnasından örnek-1	116
Görsel 4.29. TPKŞ'si gelişmiş Ö19'un yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	119
Görsel 4.30. Ö19 ile görüşme esnasından örnek-1	120
Görsel 4.31. TPKŞ'si gelişmiş Ö38'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1	121
Görsel 4.32. Ö38 ile görüşme esnasından örnek-1	122
Görsel 4.33. BKŞ'si gelişmiş Ö48'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1.....	125
Görsel 4.34. Ö48 ile görüşme esnasından örnek-1	126
Görsel 4.35. Ö48'e göre $5/2$ kesir büyüklüğünün içerisinde tekrarlanan birimler.....	127
Görsel 4.36. BKŞ'si gelişmiş Ö51'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1.....	128
Görsel 4.37. Ö51 ile yapılan görüşme esnasından örnek-1.....	129
Görsel 4.38. BKŞ'si gelişmiş Ö47'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1.....	130
Görsel 4.39. Ö47 ile yapılan görüşme esnasından örnek-1.....	131
Görsel 4.40. Birimleştirme faaliyetini alan modeline uygularken Ö3'ün yaşadığı güçlük	140
Görsel 4.41. Birimleştirme faaliyetini çubuk modeline uygularken Ö234'ün yaşadığı güçlük	142
Görsel 4.42. Birimleştirme faaliyetini küme modeline uygularken Ö28'in yaşadığı güçlük	144
Görsel 4.43. Birimleştirme faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken öğrencilerin yaşadığı güçlükler	147
Görsel 4.44. Parçalama faaliyetini alan modeline uygularken Ö3'ün yaşadığı güçlük	152
Görsel 4.45. Parçalama faaliyetini çubuk modeline uygularken Ö32 ile Ö388'in yaşadıkları güçlük.....	154
Görsel 4.46. Parçalama faaliyetini küme modeline uygularken Ö33'ün yaşadığı güçlük	156
Görsel 4.47. Parçalama faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken Ö211'in yaşadığı güçlük örneği.....	158

Görsel 4.48. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini alan modeline uygularken Ö360'ın yaşadığı güçlük	162
Görsel 4.49. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini çubuk modeline uygularken Ö236'nın yaşadığı güçlük.....	164
Görsel 4.50. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini küme modeline uygularken Ö28'in yaşadığı güçlük.....	165
Görsel 4.51. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken Ö31'in yaşadığı güçlük.....	167
Görsel 4.52. Tekrarlama faaliyetini alan modeline uygularken Ö413'ün yaşadığı güçlük	172
Görsel 4.53. Tekrarlama faaliyetini çubuk modeline uygularken Ö74'ün yaşadığı güçlük	174
Görsel 4.54. Tekrarlama faaliyetini küme modeline uygularken Ö160'ın yaşadığı güçlük	176
Görsel 4.55. Tekrarlama faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken Ö33'ün yaşadığı güçlük	178
Görsel 4.56. Tekrarlama faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken Ö146 ile Ö64'ün yaşadığı güçlük.....	179
Görsel 4.57. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini alan modeline uygularken Ö26 ile Ö58'in yaşadığı güçlük.....	184
Görsel 4.58. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini çubuk modeline uygularken Ö24 ile Ö444'ün yaşadığı güçlük.....	186
Görsel 4.59. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini küme modeline uygularken Ö136'nın yaşadığı güçlük	189
Görsel 4.60. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken Ö16'nın yaşadığı güçlük.....	191

KISALTMALAR DİZİNİ

MEB	: Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics (Amerika Birleşik Devletleri Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)
TDK	: Türk Dil Kurumu
MÖP	: Matematik Öğretim Programı
PŞ	: Parçalara Ayırma Şemaları (APŞ ve EPŞ)
APŞ	: Aynı Anda Parçalama Şeması
EPŞ	: Eş Parçalama Şeması
PBŞ	: Parça Bütün Şeması
PBKŞ	: Parçalı Birim Kesir Şeması
PKŞ	: Parça Kesir Şeması
TPKŞ	: Tersinir Parça Kesir Şeması
BKŞ	: Bileşik Kesir Şeması

1. GİRİŞ

Son yıllarda kesir konusunun diğer alt öğrenme alanlarıyla olan ilişkisi ve farklı becerileri geliştirmeye yönelik olan etkisi üzerine yapılan araştırmaların sayısı artmaktadır. Kesir kavramının özellikle sayılar ve ölçme alt öğrenme alanları için yalnızca kurala dayalı olmayan matematiksel bilgilerin kavramsallaştırılabilmesi noktasında önemli bir yere sahip olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra kesirler, nesnelerin ölçülebilir bir miktar ve nicelik belirtmesi ile nicelikler arası ilişkilerin çarpımsal ilişki bağlamında kurulabilmesi yani niceliksel muhakeme becerisinin inşası için oldukça önemlidir (Karagöz Akar, 2016; Thompson, 2011). Ayrıca matematik eğitimi alanında dünya çapında önemli bir yere sahip olan NCTM (Amerika Birleşik Devletleri Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi) tarafından belirlenen içerik standartlarına göre okul öncesinden 12. sınıfa kadar bütün öğrencilerin “nesnelerin ölçülebilir özellikleri ile birimleri, sistemleri ve ölçme sistemlerini anlamaları beklenmektedir (Van de Walle, Karp ve Bay Williams, 2014, s. 497). Ortaokul matematiğinde bu amaç doğrultusunda etkili kesir öğretim sürecinin yanı sıra kesir bilgisinin öğrencilerin zihninde nasıl yapılandırıldığı ve bu yapılandırma sürecinde nelerin etkili olduğu araştırmacılar ve öğretmenler tarafından tanınması gerekir.

Literatür incelendiğinde kesir öğreniminde öğrencilerin yaşadıkları güçlükleri ve kavram yanılgılarını incelemek amacıyla yürütülen araştırmaların çoğunlukta olduğu görülmüştür (Altıparmak ve Özudoğru, 2015; Hansen, Jordan ve Rodrigues, 2017; Hiebert, 1984; Kocaoğlu ve Yenilmez, 2010; Mazzocco ve Devlin, 2008; Namkung, Fuchs ve Koziol, 2018; Ni ve Zhou, 2005; Pesen, 2010; Van Dooren, Lehtinen ve Verschaffel, 2015). Bu araştırmalara göre öğrencilerin kesirleri sıralama, karşılaştırma ve sayı doğrusuna yerleştirme gibi kavramsal görevlerde işlemsel görevlere oranla daha çok zorlandıkları görülmüştür. Bununla birlikte literatürde öğrencilerin kesri nasıl anlamlandırdıklarına yönelik yürütülen araştırmalarla da sıklıkla karşılaşmaktadır. Bu araştırmalar öğrencilerin kesir ile bütün arasında büyüklük (*magnitude*) açısından nasıl bir ilişki kurduğunu (Stafylidou ve Vosniadou, 2004; Vamvakoussi ve Vosniadou, 2004) ve kesrin farklı anlamlarını nasıl yorumladıklarını incelemek amacıyla yürütülmüştür (Charalambous ve Pitta Pantazi, 2007; Doyle ve diğerleri, 2016; Shahbari ve Peled, 2017; Van Steenbrugge ve diğerleri, 2014). Öte yandan bazı araştırmaların kesir ile ilgili problem durumlarında sürekli ve ayrık nicelik kullanılmasının kesir öğrenme sürecinde ne tür rollere sahip olduğunu incelemek amacıyla yürütüldüğü görülmektedir (Cramer,

Post ve delMas, 2002; Johanning, 2008; Kellman ve diğerleri, 2008; Kullberg ve Runesson, 2013; Mack, 1990; Yoshida ve Sawano, 2002).

Maalesef ki ulusal ve uluslararası araştırmaların sonuçlarına bakıldığında halen ortaokul öğrencilerinin kesir kavramını anlamlı öğrenemeden mezun oldukları görülmektedir. Matematik eğitiminde göz ardı edilemeyen bu problematik durum, yaklaşık son yirmi yıldır araştırmacıları kesir bilgisinin zihinde yapılandırılma sürecini tanımlamayı, modellemeyi ve tespit etmeyi amaçlayan çalışmalara yönlendirmiştir. Bu bağlamda kesir bilgisinin oluşumu ve gelişimi açısından yapılandırılma sürecinin Piaget'nin yapılandırmacılık anlayışına göre şemalar (scheme) kapsamında incelendiği görülmüştür (Olive, 1999; Steffe, 2002; Tunç-Pekkan, 2016; Zembat, 2016). Ancak kesir bilgisinin zihinde yapılandırılma sürecinin incelenmesini ve bu süreçte öğrenmeyi olumlu veya olumsuz etkileyen durumların ortaya konmasını amaçlayan araştırmalar kısıtlı sayıda olduğundan bu amaç doğrultusunda yürütülecek araştırmaların sayısının artması gerekmektedir. Bu doğrultuda araştırma kapsamında kesir öğrenim sürecinde ortaokul öğrencilerinin kesir şemalarının incelenmesi amaçlanmıştır. Aynı zamanda literatürde 5. sınıftan 8. sınıfa doğru gidildikçe öğrencilerin kesir bilgilerinin gelişimsel sürecinin şemalar ile temsil edilmesine yönelik çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu bağlamda 5., 6., 7. ve 8. sınıfta okuyan 557 katılımcıdan veriler toplanarak kesir kavramının gelişim sürecinin sınıf düzeyleri arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları betimlemek adına öğrencilerin kesir şemaları, farklı kesir modelleri üzerinde uygulanan kesirsel faaliyetler bağlamında incelenmiştir.

1.1. Problem Durumu

Kesirler, ortaokul düzeyinde öğrencilerin zorlandıkları temel alanlardan biridir. Öğrencilerin ilkokul düzeyinde matematik derslerinde yoğun olarak doğal sayılar üzerinde çalışmaları bu durumun başlıca sebeplerindendir. Nitekim Olive ve Steffe (2002) de kesir öğrenimi için öncelikle öğrencilerin zihninde doğal sayıların yapılanması gerektiğini ve süreç içinde doğal sayı bilgilerinin yeniden düzenlenmesiyle kesir öğreniminin gerçekleşebileceğini vurgulamaktadır. Kesir ise içerisinde yapısal ve işlemsel olarak doğal sayılardan farklı karakteristik özellikleri barındıran kapsamlı bir konudur. Ortaokul öğrencilerinin doğal sayılar ve kesirler arasındaki bu farklılıkların ayrımını yapmaları ve ilgili problem durumlarına uygulamaları beklenmektedir. Aksi

takdirde öğrenciler kesrin sembolik gösterimi olan a/b 'yi tek bir sayı olarak algılamakta güçlük çekmekte, farklı anlamları ve değerleri olan birbirinden bağımsız iki doğal sayı (a ve b) olarak yorumlamaktadırlar. Diğer bir deyişle öğrenciler doğal sayılar kümesine ilişkin mevcut bilgi ve becerilerini uyarlama yapmaksızın yeni karşılaştıkları kesir problem durumlarına uygulamaktadırlar. Bu durumu Ni ve Zhou (2005) “doğal sayı yanılışı (whole number bias)” olarak tanımlamıştır. Literatüre bakıldığında doğal sayı yanılışının kesirlerle ilgili hata ve kavram yanılışlarının ortaya çıkmasına sebep olduğunu gösteren araştırmaların olduğu görülmektedir (DeWolf ve Vosniadou, 2011; Siegler, Thompson ve Schneider, 2011; Stafylidou ve Vosniadou, 2004; Vamvakoussi ve diğerleri, 2011).

Siegler, Thompson ve Schneider (2011)'in birleştirilmiş sayı gelişimi teorisine göre (*integrated theory of numerical development*) tüm sayı kümelerinin ($\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z} \dots$) bütün elemanları bireyin zihninde soyut bir sayı doğrusunda temsil edilebilir. Ayrıca Siegler ve Lortie-Forgues (2014) bu sayı doğrusunun gelişiminin aşamalı olarak ilerleyen bir genişleme sürecine tabii olduğunu ileri sürmüştür (s. 144). Bu zihinsel sayı doğrusunun yapılandırılma süreci küçük doğal sayılardan başlayarak daha büyük doğal sayılara doğru olup, kesirlerin sayı doğrusunda temsil edilebilmesi ile devam eder. Nitekim Siegler ve diğerlerine (2013) göre kesirler, *doğal sayılardan* edinilen kazanımlardan ziyade *sayıları* [işlemsel ve kavramsal tüm özellikleriyle sayı kavramını] daha derin bir şekilde anlamayı gerektirir (s. 13). Bununla birlikte Siegler ve diğerleri (2013) yürüttüğü araştırma sonuçlarına göre [kesirlerde] büyüklüğün (*magnitude*) kavramsallaştırılmasının tıpkı doğal sayılardaki gibi diğer matematiksel yeteneklerin de geliştirebilmesi için temel ve kaçınılmaz bir aşama olduğu belirtilmiştir (s. 17). Benzer şekilde Gabriel (2016) de kesir büyüklüğünün anlamlandırılmasını öğrenilmesi en zor kavramlardan biri olarak tanımlamış ve bunu öğrenmek için öğrencilerin doğal sayılar ile kesirler arasındaki farklı karakteristik özellikleri anlamaları gerektiğini vurgulamıştır (s. 36). Burada Olive ve Steffe'nin hipotezine uygun olarak Siegler ve diğerlerinin de asıl anlatmak istedikleri öğrencilerin bilişsel olarak yapılandığı *doğal sayılar şemasının* ardından *kesir şemalarını* inşa etmelerinin gerekli olduğudur. Çünkü bu durum zamanla genişleyerek oluşacak *sayılar şemasına* zemin hazırlamaktadır.

Öte yandan Siegler ve diğerleri (2013) öğrencilerde farklı kesir bilgilerinin ortaya çıkmasında rol oynayan en önemli iki bileşen üzerine vurgu yapmıştır. Bunlardan birisi kavramsal ve işlemsel bilgi iken, diğeri ise sembolik ve sembolik olmayan bilgidir. Bu

bağlamda ortaokul öğrencilerinin kesir kavramsallaştırabilmesi için işlemsel bilginin yanı sıra kavramsal bilgiyi de yetkin olarak kullanabilmeleri beklenir. Bu sayede kesir kavramına ait sembolik bilgileri de farklı problem durumlarında farklı kesir yorumlarınca uygulayabileceklerdir.

Literatürde şimdiye kadar kavramsal bilgi bağlamında öğrencilerin kesir büyüklüğünü nasıl anlamlandırdıklarını ölçmeye yönelik bazı görevler üzerinde durulmuştur. Bu görevler kesrin özelliklerini tanıma, sıralama, karşılaştırma, sayı doğrusuna yerleştirme, farklı yorumları temsil etme gibi problem durumlarından oluşmaktadır. Bununla birlikte kesrin işlemsel bilgisi ise kesirlerin sadeleştirilmesi, genişletilmesi ve akıcı bir şekilde aritmetik işlemler yapılması gibi görevlerle değerlendirildiği görülmektedir. Bu anlamda literatürde ortaokul öğrencilerinin kavramsal bilgi gerektiren problem durumlarında işlemsel bilgi gerektiren problem durumlarına kıyasla daha düşük performans sergilediklerini gösteren birçok araştırma sonucuyla karşılaşmıştır (Aksu, 1997; Haser ve Ubuz, 2002; Kılıç ve Özdaş, 2010; Kocaoğlu ve Yenilmez, 2010; Yazgan ve Altun, 2010). Oysa Yanık'a (2016) göre öğrencilerin kesir kavramını tüm bileşenleriyle zihinsel olarak inşa edebilmeleri için hem kavramsal bilgileri hem işlemsel bilgileri birbiriyle uyumlu ve anlamlı öğrenmeleri gerekmektedir (s. 109). Ancak öğretmen adaylarıyla birlikte yürütülen araştırmalar dikkate alındığında, katılımcıların kavramsal bilgiden ziyade kuralla dayalı işlemsel bilgi performanslarında daha başarılı olduklarını gösteren araştırmaların olduğu gözlenmiştir (Iuculano ve Butterworth, 2011; Van Steenbrugge ve diğerleri, 2014; Zembat, 2007). Dolayısıyla bu araştırma sonuçlarıyla birlikte öğrencilerin ilköğretim ve ortaöğretim düzeylerinde kesir kavramını anlamlı öğrenmeden mezun oldukları ve kesirler konusunun sonraki öğrenmeler için halen bir tehdit oluşturduğu görülmektedir. Bu bağlamda kesir öğretim süreçlerinin tasarlanmasında kesir büyüklüğünün anlamlı öğrenimine yönelik literatürde daha çok araştırmaların yürütülmesine her zaman ihtiyaç duyulmaktadır.

Freudenthal'a (1986) göre kesirler, rasyonel sayıların hiçbir zaman tükenmeyen fenomenolojik kaynağıdır (s. 134). Her ne kadar literatürde kesir ile rasyonel sayı kavramlarının tanımlamalarına ilişkin farklı görüşler olsa da matematik eğitimcileri arasında öğrencilerin öncelikle kesirleri, ardından tamsayılar ve rasyonel sayıları öğrenmelerinin uygun olduğu kabul edilen bir görüştür. Dolayısıyla matematik öğrenme ve öğretim süreçlerinde kesir büyüklüğünün anlamlandırılması, rasyonel sayılara

genelleme ve tekrarlama süreci için büyük önem taşıdığı göz ardı edilemez. Çünkü kesirlerin rasyonel sayılara genellenmesi ve tekrarlanması sürecinin ardından, rasyonel sayılar zihinsel sayı doğrusuna yerleştirilir ve sayılar kümesinin genişletilmesi sağlanabilir.

Ancak incelenen literatür kapsamında ortaokul öğrencilerinin doğal sayılardan rasyonel sayıların öğrenimine geçerken bilişsel bir boşluğa maruz kaldıklarından dolayı kesir büyüklüğünü kavramsallaştıramadıkları görülmektedir. Bu bağlamda ortaya konan araştırma sonuçları ışığında matematik eğitimi alanında yeni bakış açılarıyla yeni araştırma problemleri ortaya çıkmıştır. Bu sebeple ortaokul matematiği için kesir kavramının bilişsel olarak öğrencilerin zihninde yapılandırılma sürecinin tanımlanması ve modellenmesi matematik eğitimcileri için son yıllarda büyük önem kazanmıştır. Bu sayede kesir öğrenimine farklı bir yaklaşım ile bakıldığında kesir öğretimi süreci ile öğretim programlarının yeniden gözden geçirilmesi söz konusu olabilir.

Kesir kavramının zihindeki yapılandırılma sürecini incelemek amacıyla, son yirmi yıldır birlikte çalışan Olive ve Steffe yürüttükleri çeşitli araştırmalarda öğrencilerin hem doğal sayı hem de kesir öğrenmelerini Piaget'nin yapılandırmacı anlayışına göre şemalarla modellemeye çalışmışlardır. Olive ve Steffe bugüne kadar doğal sayı ve kesir öğrenimine ilişkin çok sayıda kesir öğrenme modellerini/şemalarını ortaya koymuşlardır (Olive, 1999; 2000; Olive ve Steffe, 2002; Steffe, 2002; Steffe ve Olive, 2010). Olive ve Steffe öğrencilerin zihninde gerçekleşen farklı öğrenmeleri modellerken Ernst von Glasersfeld'in (1991) -Piaget'den yorumladığı- "*şema teorisi (scheme theory)*" kavramsal çerçevesini kullanmışlardır. Bu öğrenme modelleri (buradan itibaren şemalar) öğrencilerin farklı problem durumlarını nasıl özümseyebileceğine, uyarlayabileceğine ve durumun nasıl bir sonuç doğurabileceğine dair bilgileri içermektedir. Bunun yanı sıra Steffe ve Olive (2010) şema kavramını araştırmacılara rehberlik eden ve öğrencilerin kullandığı matematiksel dili ve kesirsel faaliyetleri analiz etmeye yarayan birer kavramsal araç olarak tanımlamışlardır. Steffe ve Olive'in tanımladığı şema kavramını benimseyen Norton ve McCloskey (2008) ise şemaların, öğrencilerin eylemlerini açıklayabildiği ve tahmin edebildiği müddetçe öğrenciye yordayabileceğini ileri sürmüştür. Bunun yanı sıra Norton ve McCloskey (2008) şemaları, öğrencinin farkında olmadan oluşturduğu eylemler aracılığıyla problem çözme yollarını tanımlamaya yardımcı olsa da başlı başına birer öğrenme stratejisi olarak da görülmemesi gerektiğinin altını çizmiştir (s. 49).

Kesir öğrenimine yeni bir yaklaşım kazandıran Steffe ve Olive'in kesir şemaları kavramsal çerçevesine göre öğrenciler kesir ile nicelikler (sürekli veya ayrık) arasında kurdukları ilişkiye bağlı olarak farklı problem durumlarına farklı kesirsel faaliyetler gerçekleştirirler. Öğrenci belli bir durumla karşılaştığında (somut olarak) bazı faaliyetler gerçekleştirir ve aynı problem durumuyla yeniden karşılaştığında deneyimlediği faaliyeti tekrarlar ve tekrarlama süreci sonunda ise aynı durum karşısında ortaya çıkabilecek sonucun öncekilerle aynı olacağını (soyut olarak) bilir ve bundan sonra durum karşısında hep aynı sonucu bekler. Bu sürecin rutin hale gelerek tekrarlanması kesirsel faaliyetlerin içselleştirilmesini tanımlar. Bu bağlamda belli bir durumun tanınması ve durum karşısında belirli faaliyetlerin içselleştirilmesiyle durumun ne ile sonuçlanacağını önceden bilerek/farkında olarak harekete geçmek şemaların çalışma mekanizmasını açıklar. Eğer herhangi bir şema beklenilenden farklı bir şekilde sonuçlanırsa, bireyin durum karşısında kullandığı faaliyetleri değiştirmesi ve yeni deneyimler yaşaması gerekebilir. Bu bağlamda öğrenmenin gerçekleşebilmesi için, farklı durumlar karşısında bilgiyle ne yapılması gerektiğini ve sürecin sonucunda neler olabileceğine dair soyutlanmış deneyimleri içeren farklı şemaların bireyin zihninde oluşması beklenir.

Kesir şemaları kapsamında Steffe ve Olive (2010) şimdiye kadar ilkökul ve ortaokul düzeyindeki öğrencilerle birlikte birçok öğretim deneyi araştırmaları yürütmüş ve yaklaşık yirmi tane şemayı inceleyerek betimlemişlerdir. Bu araştırmalara göre öğrencilerin sahip oldukları kesir şemaları, kullanılan kesirsel faaliyetlerin gelişmişliğine göre farklılık göstermektedir. Bununla birlikte bazı kesirsel faaliyetlerin diğerlerine göre daha gelişmiş kesirsel faaliyetleri barındırdığı göz önüne alındığında kesir şemaları arasında da gelişmişlik düzeyi açısından bir farklılığın olduğu söz konusudur. Ancak literatürde kesir şemaları arasında hiyerarşik bir yapı olup olmadığını inceleyen kısıtlı sayıda araştırmaların olduğu görülmüştür (Norton ve Wilkins, 2012; Wilkins ve Norton, 2011). Yine de kesir şemaları ve kesirsel faaliyetler arasındaki gelişmişlik düzeyine veya gelişim sırasına ilişkin henüz literatürde kabul edilmiş bir görüş bulunmamaktadır. Ancak bu konuda Steffe ve Olive (2010)'in de belirttiği gibi öğrencilerin öncelikle basit kesirler, ardından bileşik kesirler üzerinde çalışmayı gerektiren şemaları inşa etmelerinin beklenmesi literatürde kabul edilen bir görüştür.

Ulusal (Aydın ve diğerleri, 2017; Taylan ve diğerleri, 2016; Toluk, 2002; Tunç-Pekkan, 2015) ve uluslararası (Boyce ve Norton, 2016; Eliustaoğlu, 2016; Norton ve Deater-Deckard, 2014; Tunç-Pekkan, 2015; Wilkins, Norton ve Boyce, 2013) literatür

incelendiğinde kesir öğreniminin yukarıda bahsedilen kavramsal bilgi görevlerinden farklı olarak, kesirsel faaliyetler aracılığıyla kesir şemaları kapsamında yürütülen araştırmaların kısıtlı sayıda olduğu görülmektedir. Ayrıca bu araştırmaların çoğunda karşılaşılan sınırlılığın sadece bir sınıf düzeyiyle yürütülmüş olması dikkat çekmiştir. Hali hazırda kesir şemalarının gelişim ve değişim sürecini takip etmek oldukça zordur. Dolayısıyla bu araştırma ortaokul 5., 6., 7. ve 8. sınıf düzeyindeki öğrenciler ile yürütülmesi yönüyle literatürdeki diğer araştırmalardan ayrılmaktadır. Bununla birlikte hem kesir bilgisinin inşasında zamanla ortaya çıkan değişimi hem de kesir şemaları arasında (varsa) nasıl bir gelişmişlik düzeyi olduğunu incelemek amacıyla yürütülen bu araştırma literatürde kesir bilgisinin gelişim sürecine dair önemli bir eksikliği doldurmaya katkı sağlayabilecek niteliktedir.

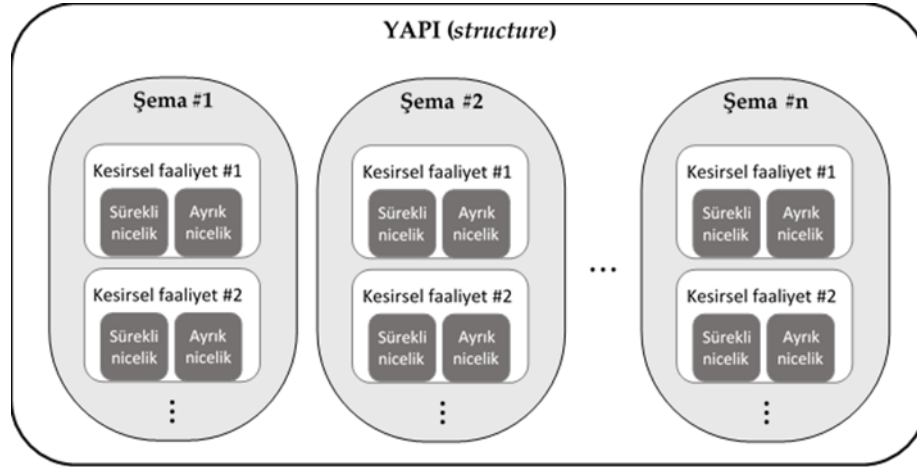
1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Piaget'e göre bilgi faaldir (*operative*) ve birey ile nesneler arasındaki etkileşimin bir ürünüdür (Zembat, 2016, s. 480). Kesir bilgisinin oluşum ve gelişim sürecinde ise bireyin kesir modelleri üzerinde gerçekleştirdiği kesirsel faaliyetler (*operations*) etkilidir. Kesirsel faaliyetler öğrencilerin nicelikler (sürekli ve ayrık) üzerinde gerçekleştirdiği birtakım fiziksel etkileşimlerin soyutlanmış ürünüdür. Belli bir nicelik ile kesirsel faaliyet gerçekleştiren öğrenci üzerinde çalıştığı durumu tanır ve tanınan durumla her karşılaştığında önceden deneyimlediği kesirsel faaliyetleri tekrarlama ve genelleme sürecine girer. Bu süreç artık öğrenci için belli bir durum karşısında yapılması gerekeni bildiği ve yapacağı faaliyetlerin sonucunu önceden tahmin ettiği şemaların tamamlanma sürecini temsil eder.

Kesirler öğretim sürecinde öğrenciler farklı nicelikler üzerinde çalışması gereken farklı problem durumları ile yüzleştirilir. Herhangi bir problem durumu ile ilk kez karşılaşan öğrenci fiziksel olarak bazı faaliyetler gerçekleştirir ve bir sonuç ortaya çıkar. Bu sonuç, öğrencinin isteklerini karşılamış ise öğrenci bu problem ile yeniden karşılaştığında aynı faaliyetleri gerçekleştirmeye devam edecektir. İlerleyen süreçte öğrencinin tanıdığı bu problem durumu karşısında uygulayacağı faaliyetler ve bunlardan ortaya çıkacak sonuç artık öğrenci tarafından içselleştirilerek soyutlanır ve bu sonucu zihinsel olarak aktiviteden önce tahmin eder. Ancak öğrenci deneyimlediği dışında farklı bir durum ile karşılaşarsa yeni bir durumu tanıma, yeni faaliyetler gerçekleştirme ve yeni

sonucu önceden tahmin etme süreçlerini tekrarlayarak zamanla farklı bir şemanın gelişim sürecini tamamlar. Dolayısıyla bilişsel bilginin inşasında etkili olan şemaların tamamlanma sürecinde birey tarafından gerçekleştirilen faaliyetlerin (*operations*) problemle örtüşen ve şema ile uyumlu nitelikte olması gerekmektedir.

Kesir kavramı şema ve faaliyet arasındaki ilişki açısından ele alındığında öğrencilerin çeşitli kesirsel faaliyetler gerçekleştirdikleri görülmektedir (Steffe ve Olive, 2010). Bu kesirsel faaliyetler, üzerinde çalışılan nicelik türüne (sürekli ve ayrık) ve kullanım biçimlerine göre kesir şemalarının gelişim sürecini doğrudan etkilemektedir. Öte yandan kesir problemlerinde sunulan kesir modellerinin (alan, küme vs.) de kesir şemalarının gelişim sürecini dolaylı olarak etkilemesi söz konusudur. Nitekim öğrenciler belli bir problem durumunda belli bir kesir modeli üzerinde kesirsel faaliyetleri uygulayarak sonuca ulaşırken; aynı problem durumu farklı bir kesir modeli ile sorulduğunda öğrenciler önceden deneyimlediği problem durumuna aynı kesirsel faaliyetleri uygularken problemi çözmekte zorlanabilirler. Oysaki kesir kavramının anlamlı öğrenilebilmesi için öğrencilerden farklı problem durumlarında ve farklı temsiller üzerinde çalışabilmeleri beklenir. Nitekim Piaget'nin genetik epistemoloji teorisine göre bilginin gelişimi ve anlamlı öğrenme için, herhangi bir kavram ile ilişkili tüm bilgilerin bireyin zihninde yapılar (*structure*) halinde oluşması beklenir. Bu yapılar sayesinde birey herhangi bir bilginin hangi durumlarda, ne zaman ve nasıl kullanılması gerektiğini bilir ve bilgiyi beceriye dönüştürerek öğrenme gerçekleşmiş olur. Yapıların (*structure*) en basit formuna ya da tekrarlanan ve genelleştirilen eylemlere şema (*action scheme*) denir (Zembar, 2016). Dolayısıyla yapılar şemaların tamamlanmasıyla inşa edilir ve yapıların oluşma süreci ile farklı durumlar bağlamında farklı şemaların oluşum süreçlerinin paralel olarak ilerlemesi beklenir. Zembar (2016), Piaget'nin bilginin muhtevasını ve gelişim sürecini şematik bir model ile görselleştirmiştir (s. 481). Zembar'ın düzenlediği bu şematik model araştırma kapsamında kesirler konusuna göre uyarlanmış ve kesir bilgisinin muhtevasını oluşturan yapı, şema, kesirsel faaliyet ve nicelik arasındaki ilişki Şekil 1.1.'deki gibi özetlenmiştir.



Şekil 1.1. Kesirsel bilginin muhtevası (Zembat, 2016, s. 481)'dan uyarlanarak hazırlanmıştır.)

Bu bağlamda ele alındığında kesir bilgisinin yapılar halinde inşası için farklı kesir şemalarının tamamlanması gerekir. Farklı kesir şemaları, kesirsel faaliyetlerin soyutlanarak farklı durumlara uygulanmasını gerektirir. Kesirsel faaliyetler ise her durum karşısında bir tekrarlama ve genelleme sürecinin ardından içselleştirilerek; bilgilerin becerilere dönüşmesi noktasında birer köprü görevini üstlenir. Burada asıl önemli olan kesir kavramı ile ilgili tüm bilgilerin beceriye dönüşmesi için bireyin *her* durum karşısında farklı modeller (sürekli ve ayrık nicelikler) üzerinde problemle örtüşen, şema ile uyumlu ve etkili kesirsel faaliyetleri gerçekleştirmesidir. Kısacası birey ne kadar çok farklı şemayı tamamlarsa o kavrama ilişkin o kadar çok farklı durum problemleriyle başa çıkabilir.

Literatür incelendiğinde ortaokul matematiğinde öğrencilerin genellikle çubuk ve alan modeli ile sunulan kesir problemleriyle karşılaştırıldığı görülmektedir. Bu durumla birlikte çubuk ve alan modelinin sıklıkla kullanılması ile öğrenme ortamlarında öğrencilerin parça bütün yorumu dışındaki diğer kesir yorumlarını anlamlandırmakta zorlandıkları görülmektedir. Bu sebeple öğrenciler kesir büyüklüğünü yalnızca 0 ile 1 arasında olacak şekilde düşünmektedirler. Elbette ki öğrencilerin kesrin parça bütün yorumuna da hâkim olmaları gerekmektedir. Ancak öğrenciler kesrin farklı yorumları ve farklı modeller ile yeteri kadar yüzleştirilmezse kesir kavramı zihinlerinde tam ve doğru olarak yapılanamayacaktır. İncelenen literatürde öğrencilerin çoğunun kesirleri parça bütün olarak yorumlamalarına rağmen, belirli bir bütünü eşit ve özdeş parçalara

ayıramadıkları görülmüştür (Norton ve Wilkins, 2009a; Pothier ve Sawada, 1983; Wilkins, Norton ve Boyce, 2013). Bunun asıl sebebi ise öğrencilerin parça bütün yorumunda parçanın büyüklüğünden ziyade parçaların sayısına odaklanmasından kaynaklanmaktadır. Steffe ve Olive'in kuramsal çerçevesine göre *parça bütün şemasına* sahip öğrencilerin kesir büyüklüğüne dair bilgi ve deneyim eksikliği, kesrin niceliğinden ziyade birbiriyle olan ilişkisine bakılmaksızın pay ve paydaya mevcut doğal sayı bilgileri doğrultusunda anlam yüklemelerine sebep olmaktadır. Dolayısıyla kesrin büyüklüğünün anlaşılmaması bütünden büyük olan bileşik kesirler kavramını anlamlandırmak için de engel teşkil etmektedir. Bu sebeple araştırma kapsamında ortaokul öğrencileri bütünün 1'den büyük olduğu problem durumlarıyla da karşılaştırılmış ve sınıf düzeyleri arasında nasıl bir değişim olduğu da kesir şemaları ve kesirsel faaliyetler ile incelenmek istenmiştir.

Ayrıca kesrin tüm farklı yorumlarının aktif olarak kullanılması için birim kesir kavramının öğrenci tarafından üretilmesi beklenir. $\frac{1}{n}$ birim kesri n parçadan 1'i, 1'in n 'e bölümü, 1'in n 'e oranı, $\frac{1}{n}$ 'nin işlemci rolü ve $\frac{1}{n}$ 'lik bir ölçü birimi anlamlarından herhangi birini temsil edebilir. Bu bağlamda birim kesir kavramının üretilmesi için ise birimleştirme (*unitizing*) kesirsel faaliyetinin nicelikler ile ilişkilendirilmesi, aktif bir şekilde kullanılması ve öğrenci tarafından deneyimlendikten sonra soyutlanması gerekir. Araştırma kapsamında öğrencilerin farklı kesir nicelikler üzerinde birimleştirme faaliyetinin yanında parçalama (*partitioning*), yerleşik bütünden ayırma (*disembedding*), tekrarlama (*iterating*), yinelemeli ayırıştırma (*splitting*) kesirsel faaliyetleri uygulamaları da incelenmiştir. Bu bağlamda hem farklı kesir modelleri hem de farklı kesirsel faaliyetler bağlamında araştırmalara literatürde ihtiyaç duyulmaktadır.

Araştırma kapsamında öğrencilerin kesir bilgileri alan (daire ve noktalı zemin üzerinde dikdörtgen), çubuk, küme ve sayı doğrusu olmak üzere sürekli ve ayrık modeller üzerinde incelenmiştir. Bu modeller öğrencilerin yaş grubuna göre ince motor becerilerinin gelişim açısından düzey farklılıkları da göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır. Literatürde araştırma kapsamında incelenen farklı kesir modellerinin çoğunlukla kesrin farklı yorumları ile ilişkilendirilerek ele alındığı görülmüştür. Özellikle sayı doğrusu modelinin başta kesrin ölçme yorumu olmak üzere tüm kesir yorumları için son derece önemli bir model olduğu tüm matematik eğitimcileri tarafından bilinen bir gerçektir. Bu bağlamda Tunç-Pekkan (2015) kesir şemaları kapsamında sayı doğrusu ve

alan modelini incelemiş ve sayı doğrusu modelinin diğer modellere göre tersinir (iki taraflı çevrilebilir: parçadan bütüne ve bütünden parçaya) düşünme becerisi için daha faydalı olabileceği sonucuna ulaşmıştır (s. 437). Dolayısıyla bu araştırmada sayı doğrusu modelinin sıralama görevlerinden ziyade hem kesirsel faaliyetler hem de tersinir düşünme becerisi bağlamında incelenmesi literatürdeki diğer araştırmalardan ayrılan diğer bir özelliğidir.

Özetlemek gerekirse nitel olarak tasarlanan bu araştırmanın öğrencilerin kesir öğrenme süreçlerini tanımlamaya yarayan şemalar çerçevesinde hem farklı kesir modelleri üzerinde uygulanan kesirsel faaliyetlerin incelenmesi hem de katılımcı grubun kesir bilgisinin gelişim sürecini takip eden şekilde seçilmesi literatüre araştırma alanında önemli katkılar sağlayacak niteliktedir. Araştırmanın katılımcı grubu 5., 6., 7. ve 8. sınıfta okuyan 557 öğrenciden oluşmaktadır. Veriler iki aşama ile (yazılı değerlendirme aracı ve yarı yapılandırılmış klinik görüşme) toplanmış ve iki aşama sonunda da içerik analizleri yapılmıştır. Toplanan veriler doğrultusunda ortaokul öğrencilerinin kesir şemalarının betimlenmesi ve kesir bilgisinin gelişim sürecinde farklı kesir modelleri üzerinde kesirsel faaliyetlerin uygulanmasında öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerin tespit edilmesi amaçlanmıştır.

1.3. Problem Cümlesi

Bu çalışmanın amacı ortaokul öğrencilerinin kesir şemalarının incelenmesidir. Bu amaç doğrultusunda öğrencilerin gelişmiş ve gelişmekte olan kesir şemaları kapsamında farklı kesir modelleri (alan, çubuk, küme, sayı doğrusu) üzerinde kullandıkları kesirsel faaliyetler ele alınmıştır. Araştırma kapsamında belirtilen amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

- 1 Ortaokul öğrencileri (5., 6., 7. ve 8. sınıf) ne tür gelişmiş kesir şemalarına sahiptir?
 - 1.1 Ortaokul öğrencileri her sınıf düzeyinde ne tür gelişmiş kesir şemalarına sahiptir?
 - 1.2 Ortaokul öğrencileri her sınıf düzeyinde gelişmiş kesir şemaları kapsamında ne tür kesirsel faaliyetlerde bulunmaktadır?

- 2 Ortaokul öğrencileri (5., 6., 7. ve 8. sınıf) gelişmekte olan kesir şemaları kapsamında farklı kesir modelleri (alan, çubuk, küme, sayı doğrusu) bağlamında kesirsel faaliyetleri uygularken ne tür güçlükler yaşamaktadırlar?

1.4. Sınırlılıklar

Bu araştırma için aşağıda belirtilen sınırlılıklar söz konusudur:

1. Araştırma; 2017-2018 eğitim-öğretim yılında İstanbul ili Avrupa yakasında MEB’e bağlı üç ortaokulun 5., 6., 7. ve 8. sınıflarında okuyan ve yazılı değerlendirme aracı uygulanan toplam 557 katılımcı ile sınırlıdır.
2. Araştırma, katılımcılara uygulanan yazılı değerlendirme aracı ve yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerden elde edilen verilere dayanmaktadır.
3. Araştırma; belirlenen üç ortaokuldan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak farklı sınıf düzeylerinden seçilen ve yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen toplam 52 katılımcı ile sınırlıdır.
4. Araştırmanın veri toplama araçları kesir modellerinden alan (daire ve dikdörtgen), çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri ile hazırlanan kesir problemlerini içermektedir.
5. Araştırmada, ortaokul öğrencilerinin kesir şemaları aynı anda parçalama şeması (simultaneous partitioning scheme), eş parçalama şeması (equi partitioning scheme), parça bütün şeması (part whole scheme), parçalı birim kesir şeması (partitive unit fractional scheme), parça kesir şeması (partitive fraction scheme), tersinir parça kesir şeması (reversible partitive fraction scheme), bileşik kesir şeması (iterative fractional scheme) bağlamında incelenmiştir.
6. Araştırmada, ortaokul öğrencilerinin kesirsel faaliyetleri birimleştirme (unitizing), parçalama (partitioning), tekrarlama (iterating), yerleşik bütünden ayırma (disembedding) ve yinelemeli ayırıştırma (splitting) bağlamında incelenmiştir.

1.5. Tanımlar

Araştırmaya konu olan kesir şemaları ve kesirsel faaliyetler ile ilgili ulusal literatürde çok az sayıda çalışma yürütüldüğünden bazı önemli ifade ve terimlerin Türkçe açıklamaları ile literatürdeki İngilizce tanımları da aşağıda verilmiştir.

Şema (scheme): Şemaların üç bileşenden oluşur. Bunlardan ilki, çocuğun önceki deneyimlerine göre algıladığı veya tasarladığı harekete geçirici bir durumun (assimilated situation) varlığını belirtir. İkincisi çocuğun bu durumla ilişkili özel birtakım aktivite, eylem veya prosedürler (associated activity) gerçekleştirdiğini söyler. Üçüncüsü ise çocuk tarafından üretilen aktivitenin çocuğun önceki deneyimlerine göre beklenen/muhtemel bir sonucu (expected result) doğurduğunu ifade eder.

“Schemes are composed of three elements: (1) an initial experiential item or configuration (functionally linked to what the observer would categorize as "trigger" or "stimulus"), (2) an activity the subject has associated with it, and (3) a subsequent experience associated with the activity as its outcome or result.” (von Glasersfeld, 1991, s. 17).

Faaliyet (mental action/operation): Çocukların zihinsel olarak yapamadıkları şeyleri önce (fiziksel) faaliyet halinde yapabilirler. Bu (deneyimlenen) faaliyetlerin içselleştirilmesi yansıtıcı soyutlama sürecidir.

“That is to say that children may do things in action first what they are not yet able to do mentally. The interiorization of activity is a process of reflective abstraction.” (von Glasersfeld, 1995’den aktaran Olive, 2000, s. 4)

Birimleştirme (unitizing): Birimleştirme, bir ölçü biriminin belirli bir miktara bilişsel olarak atanmasıdır.

“Unitizing is the cognitive assignment of a unit of measurement to a given quantity.” (Lamon S. J., 1996, s. 170)

Parçalama (partitioning): Parçalama, miktar üreten bir faaliyettir; rasyonel sayıları oluşturma sürecinde bir çocuğun adil paylaşım hakkındaki informal bilgisine bağlı deneyime dayalı ve sezgisel bir faaliyettir.

“Partitioning is an operation that generates quantity; it is an experience-based, intuitive activity that anchors the process of constructing rational numbers to a child's informal knowledge about fair sharing.” (Lamon S. J., 1996, s. 171)

Tekrarlama (iterating): Tekrarlama, orijinalin özdeş kopyalarını üretmek için bir parçanın yinelenmesini içerir. Bu kopyalar yeni bir sürekli kesir oluşturmak için ilişkilendirilebilir.

“Iterating involves repeating a part to produce identical copies of the original. These copies might be connected to form a new continuous fraction.” (Norton ve McCloskey, 2008, s. 50)

Yerleşik bütünden ayırma (disembedding): Bütünden ayırma, bir öğrenci bütünün tamamı içindeki bazı parçaların kopyalarını çıkarırken, bütünü bozmadan sağlam bir şekilde bırakır.

“Disembedding occurs when a student imagines pulling out copies of some number of parts within the partitioned whole, while leaving the whole intact.” (Norton ve McCloskey, 2008, s. 50)

Yinelemeli ayırıştırma (splitting): Yinelemeli ayırıştırma faaliyeti parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin bir birleşimidir. Bu durum parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin sırayla değil, aynı anda uygulanmasını gerektirir.

“Splitting operation regards a split as a composition of partitioning and iterating. This requires the operations of partitioning and iterating to be implemented simultaneously rather than sequentially.” (Olive ve Steffe, 2002, s. 423)

2. ALANYAZIN

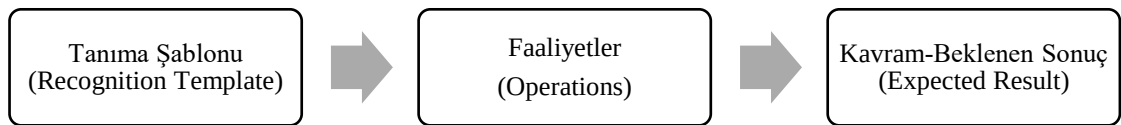
Bu bölümde araştırmaya konu olan şema kavramına, kesir şemalarına ve kesir şemaları kapsamında kullanılan kesirsel faaliyetlere ilişkin açıklamalara örneklerle yer verilmiştir. Ayrıca ortaokul öğrencilerinin kesir şemalarının incelenmesi amacıyla yürütülen bu araştırmanın konusuyla ilgili literatür özetlenmiştir.

2.1. Şema Kavramı ve Faaliyetler (Scheme and Operations)

Piaget'nin yapılandırmacılık anlayışına yönelik öğrenme teorisine göre özümseme (*assimilation*) ve uyarlama (*accomodation*) bileşenleri arasında öğrenci tarafından oluşturulan denge bilginin gelişimini etkiler (Zembat, 2016). Bilginin gelişmesi ise bireyin içinde bulunduğu düzenli etkileşimlerin ürünü olarak zihinde belli bir yapının (*structure*) oluşmasıyla gerçekleşir. Bunun yanı sıra Piaget'ye göre yapıların oluşması bilişsel bir süreç olmakla birlikte, yapılar birden fazla şemayı (*scheme*) içinde barındırır. Bu şemalar ise belli bir kavrama dair bilgilerin zihinde yapılandırılması sürecinde, bireyin yaşantılarından hareketle farklı durumlara göre içselleştirdiği faaliyetleri tanımlar.

Glaserfeld (1991) ise Piaget'nin şema teorisini yorumlamış ve şemaların üç bileşenden oluştuğunu belirtmiştir (s. 17). Bunlardan ilki, çocuğun önceki deneyimlerine göre algıladığı veya tasarladığı harekete geçirici bir durumun (*assimilated situation*) varlığını belirtir. İkincisi çocuğun bu durumla ilişkili özel birtakım aktivite, eylem veya prosedürler (*associated activity*) gerçekleştirdiğini söyler. Üçüncüsü ise çocuk tarafından üretilen aktivitenin çocuğun önceki deneyimlerine göre beklenen/muhtemel bir sonucu (*expected result*) doğurduğunu ifade eder. Burada beklenen sonuç diye kastedilen, çocuğun belli bir durum karşısında önceki deneyimlerinde gerçekleştirdiği aktivitelerden ortaya çıkan sonuçtur. Çocuk, geçmişte yaşadığı benzer bir durumla karşılaştığında aynı aktiviteleri gerçekleştirir ve sonuç beklediği veya tahmin ettiği şekilde ortaya çıkarsa bu durum belli bir şema ile tanımlanır. Ancak çocuk beklediğinden başka rutin olmayan bir sonuçla karşılaşırsa mevcut durumu yeni ortama uyarlamalı ve öncekilerden farklı aktiviteler gerçekleştirmelidir; ki bu durum yeni şemaların ortaya çıkması demektir. Bu sayede çocuk farklı durumlara göre farklı aktiviteleri gerçekleştirdiği şemaları (*scheme*) düzenli/rutin hale getirerek herhangi bir kavram ya da bilgiye dair bilişsel yapıları (*structure*) oluşturabilir.

Steffe (2002), şemanın ilk bileşeni olan belli bir *durumun* varlığına ilişkin zihinde belli bir yerde belli bir bütünün içinde herhangi bir yapının var olmadığını ileri sürmüştür (s. 268). Steffe'ye göre belli bir yapının oluşmasından ziyade, öğrencinin önceki deneyimlerinden kaydettiği eylemler ve faaliyetler bir *tanıma şablonu* (*recognition template*) üretir. Böylece gelecekte benzer durumlarla karşılaşıldığında üretilen şablonlara göre faaliyetler gerçekleştirilebilir. Steffe'ye göre şemanın ikinci bileşenini ise önceki deneyimlere dayalı olarak gerçekleştirilen *faaliyetler* (*operations*) oluşturmaktadır. Öğrenci tarafından gerçekleştirilen faaliyetler, Grobecker (1997) tarafından “*düşünce yapıları* olarak anılan döngüsel biçimde düzenlenmiş zihinsel eylemlerin canlı sistemleri” şeklinde tanımlanmıştır (s. 317). Buradan deneyimlere dayalı gerçekleştirilen faaliyetlerin her zaman farklı durumlara göre yenilenebileceğini, uyarlanabileceğini veya (kullanımının) sönebileceğini söylemek mümkün olabilir. McCloskey ve Norton (2009) ise faaliyetleri “çeşitli durumlarda kullanıma hazır hale getirmek için deneyimlerden soyutlanmış zihinsel eylemlerdir” şeklinde bir tanımlamada bulunmuştur (s. 46). Öte yandan Hackenberg (2013) de faaliyetleri içselleştirilmiş fiziksel aktiviteler olarak özetlemiştir (s. 539). Özetlemek gerekirse faaliyetler, belli bir amaca yönelik yapılan fiziksel aktivitelerin (yeniden fiziksel olarak gerçekleştirilmek zorunda kalmadan) zihinsel olarak gerçekleştirilebilmesi için öğrenci tarafından içselleştirilen işlemler ve eylemler bütünüdür. Daha açık bir ifadeyle belli bir durum karşısında bir faaliyetin içselleştirilmesi, o faaliyetin fiziksel olarak tekrar gerçekleştirilmesinden önce faaliyetin zihinde canlanması demektir. Steffe ve Olive'in ileri sürdüğü şema kavramının teorik çerçevesini benimseyen Norton ve McCloskey (2008), şemayı oluşturan bileşenleri Şekil 2.1.'deki gibi görselleştirmiştir. Verilen diyagramdan şemaların sadece faaliyetlerden ibaret olmadığı anlaşılmaktadır.



Şekil 2.1. Şemanın bileşenleri (Norton ve McCloskey, 2008, s. 49)

Ayrıca McCloskey ve Norton (2009), şemaların öğretmenler ve araştırmacılar tarafından öğrencilerin bilişsel yapılarını modellemek için kullanıldığını belirtmişlerdir (s. 46). Bunun yanı sıra McCloskey ve Norton şemalar ile stratejilerin genellikle

karıştırıldığından dolayı şema kavramının yanlış yorumlanmaması gerektiğine dikkat çekmişlerdir. Bu sebeple öğrencilerin problem çözme süreçlerinde yer alan öğretmen ve araştırmacılar için, şemalar ile stratejiler arasında farklılık gösteren üç özelliği aşağıdaki gibi belirtmişlerdir:

- Şemalar, genellikle öğrencilerin farkında olmadan ortaya çıkan işlemlerin yollarını açıklar.
- Şemalar ardışık-yöntemsel bir usulden ziyade birden/bir kerede etkinleştirilir.
- Şemalar öğretici yapılarıdır; öğretmenler şemaları öğrencilerin faaliyetlerini (sözlü ifadeler dahil) açıklamak ve tahmin etmek için ve bu şekilde öğretim hakkında bilgi sağlamak için kullanır (McCloskey ve Norton, 2009, s. 46; Norton ve McCloskey, 2008, s. 49).

Hali hazırda Steffe ve Olive (2010) de şemaları, araştırmacılar için öğrencilerin kullandığı matematiksel dili ve eylemlerini analiz etmek için kullanılan birer kavramsal araç olarak gördüklerini açıklamışlardır (s. 18).

Öte yandan Grobecker (1997) öğrencilerin düşüncelerine göre şemalar kapsamında gerçekleştirilen faaliyetlerde bazı gruplaşmaların ve farklılaşmaların olduğunu ve buna bağlı olarak zihinsel faaliyet formlarının genişlediğinden [çeşitliliğinden] bahsetmiştir (s. 318). Hackenberg (2010) de bu durumu destekler nitelikte şemaların bireyin farkında olmadan geçmiş deneyimlerinin kişiye özel imgelerle yeniden temsil edildiğini vurgulamıştır (s. 386). Daha açık bir ifadeyle Grobecker ve Hackenberg'e göre, bir şemanın içerdiği zihinsel faaliyetler geçmiş yaşantıların etkisiyle kişiden kişiye bazı farklılıkları gösterebilir. Bu bağlamda Hackenberg şemadan beklenen sonucun, bireyin beklentilerine dayandığının altını çizmiştir. Hackenberg'e göre şemanın her bölümü bireyin amaçları doğrultusunda inşa edilir ve uygulanır. Hackenberg (2010) bu amaçların bireyin isteklilik / isteksizlik ve tercihlerine göre olması durumunu, şemaların belli bir hedefe yönelik doğasının varlığının göstergesi olarak savunmuştur (s. 386). Bu amaç doğrultusunda Hackenberg (2010)'ün belirttiği gibi öğrencinin belli bir durumu özümsemek için hangi faaliyetleri kullandığını belirlemek, öğrencinin sonraki faaliyetlerinin nasıl olacağını anlamak için önemli olabilir.

Özet olarak Steffe'ye göre şema kapsamında ele alındığında, karşılaşılan bir durum öncelikle tanıma şablonu aracılığıyla karşılaştırılır, durum tespit edilirse önceki deneyimlere dayalı zihinsel faaliyetler etkinleştirilir ve beklenen sonuç ortaya çıkar. Ancak karşılaşılan durum yeni bir durumsa ve öğrencinin mevcut deneyimlerine göre

birtakım faaliyetler gerçekleştirirse de beklenen sonuca ulaşamıyorsa, bireyin yeni durumu kendi yaşantılarıyla özümsemesi beklenir. Ardından mevcut deneyimlerini uyarlayarak yeni faaliyetler uygulamalı ve ortaya çıkacak yeni *beklenen sonuçların* zihinde yerleşmesiyle yeni şemalar oluşturması gerekir. Hackenberg (2013) bireylerin farklı şemalar sonucunda ortaya çıkan şema sonuçlarının belli bir “kavram” ile ilgili bilgiler bütünü oluşturduğunu savunmuştur (s. 539). Bu bağlamda “kavram”ı insanların içselleştirdiği şemaların sonucu olarak ifade etmiştir. Diğer bir deyişle öğrencilerin bir konu hakkındaki sahip oldukları bilgiler, herhangi bir *kavram* elemanları olarak deneyimledikleri bir dizi zihinsel eylemler ve faaliyetler sonucunda inşa edilir. Dolayısıyla şema, bir kavramı birtakım eylemler ve faaliyetler ile ilişkilendirerek anlamlandırma düzeneğidir. Buradan hareketle şemaların kavramlar ile ilgili, o kavrama yüklenen anlamları temsil etmekte olduğu söylenebilir. Daha açık bir ifadeyle şemalar, bilginin nasıl kullanıldığına dair kavramsal sistemlerdir.

Bu araştırma kapsamında şemalar, kesir kavramına ilişkin farklı durumlarda farklı faaliyetlere göre ortaya çıkan sonuçlar bağlamında; öğrenciler tarafından bilginin nasıl kullanıldığını temsil eden şematik modellemeler olarak ele alınmıştır. Araştırmaya konu olan kesir şemalarına ve şemalara ait kesirsel faaliyetlere bir sonraki bölümde detaylı olarak yer verilmiştir.

2.2. Kesir Şemaları (Fraction Schemes)

Steffe ve Olive (2010) kesir şemaları, kesir şemalarına geçiş şemaları ve bu şemalarla iç içe geçmiş olan doğal sayı dizileri şemaları (*number sequences schemes*) olmak üzere farklı şemalar kapsamında öğretim deneyi çalışmaları yürütmüştür. Steffe ve Olive’in üzerinde çalıştığı yaklaşık yirmi farklı şema arasından ortaokul matematik öğretim programı da göz önüne alınarak bu araştırmanın yedi farklı şema kapsamında yürütülmesi uygun bulunmuştur. Bu yedi şemadan aynı anda parçalama şeması (APŞ-*simultaneous partitioning scheme*) ile eş parçalama şeması (EPŞ-*equi partitioning scheme*) doğal sayı bilgilerinin bir niceliğin eş parçalara ayrılması veya paylaştırılması görevlerini kapsayan ve kesirsel faaliyetlerle doğal sayı bilgilerinin beceriye dönüşmesi için önemli bir yere sahip oldukları için araştırma kapsamında incelenmesi uygun görülmüştür. Bu iki şemanın dışında araştırma kapsamında incelenen diğer beş şema ise eş parçalara ayırma görevleri dışında farklı kesir problemleri durumlarında öğrencilerin

kesir bilgisini nasıl kullandığını temsil ettiği düşüncesiyle seçilmiştir. Bu şemalara ilişkin detaylı bilgiler aşağıda sunulmuştur.

2.2.1. Aynı anda parçalama şeması (APŞ; Simultaneous partitioning scheme)

Steffe ve Olive (2010) sürekli bir niceliği paylaşırma durumu ile karşılaştığında öğrencilerin kullandığı kesirsel faaliyetlere göre zihinde oluşan şemaları aynı anda parçalama şeması (APŞ; *simultaneous partitioning scheme*) ve eş parçalama şeması (EPŞ; *equi partitioning scheme*) olarak tanımlamıştır.

APŞ sürekli bir niceliğin n kişi arasında paylaşılması veya n 'e eşit olarak bölünmesi durumunda bütünün içerisindeki tüm parçaların birbiriyle eşit olduğundan emin olmaksızın nicelik üzerinde yapılan özenli ve ardışık kesme işlemleriyle parçalama (*partitioning*) kesirsel faaliyetini gerektirir (Steffe ve Olive, 2010, s. 95). Aynı zamanda Steffe ve Olive'e (2010) göre APŞ'de bütünden parça üretmeye hizmet eden birimleştirme (*unitizing*) kesirsel faaliyeti de gereklidir (s. 63). APŞ'de birimleştirme, bütünü birimleştirmeye (*unitizing whole*) yönelik bir faaliyet olup bileşik bütün (*composite whole*) algısının öğrenci tarafından algılanmasını sağlar. Benzer şekilde Norton ve McCloskey (2008) de APŞ için bütünü birimleştirme ve bileşik birim (*composite unit*) olarak algılanan bir bütünü parçalama kesirsel faaliyetlerini barındırdığını belirtmiş ve buradaki birimleştirme faaliyetini “bir nesneyi veya nesneler topluluğunu bir birim veya bir bütün olarak ele almak” şeklinde tanımlamıştır (s. 49). İncelenen literatür doğrultusunda bir öğrencinin APŞ kapsamında gerçekleştirebileceği paylaşırma girişimi örneği Şekil 2.2.'de verilmiştir.



Şekil 2.2. Aynı anda parçalama şemasından beklenen sonuç örneği

Şekil 2.2.'de sürekli lineer bir niceliğin altı kişi arasında paylaşılması etkinliği karşısında APŞ kapsamında gerçekleştirilen kesirsel faaliyetlerin ardından ortaya çıkabilecek sonuç görülmektedir. APŞ kapsamında dikkat edilmesi gereken iki durum söz

konusudur. Bunlardan birisi (bütünü) birimleştirme faaliyetinin yalnızca bütünün altı parçadan oluşacağına yönelik öğrenciler tarafından içselleştirilmiş zihinsel eylem olduğudur. Diğeri ise APŞ şemasına adını veren aynı anda parçalama faaliyeti kapsamında sürekli nicelik üzerinde ya göz kararı bir büyüklük seçilerek (bkz. Şekil 2.2. Yanıt a)) ya da ardışık/sıralı kesme işlemleriyle birbirleriyle eşit büyüklükte oldukları doğrulanmaksızın art arda (bkz. Şekil 2.2. Yanıt b)) parçalar üretilmesi durumudur.

Öte yandan literatüre bakıldığında sadece sürekli nicelik değil aynı zamanda ayrık nesneler üzerinde de parçalama faaliyetinin uygulamaları incelenmiştir (Eliustaoğlu, 2016). Bu bağlamda parçalama faaliyeti ayrık nesneler üzerinde uygulandığında nesnelerin toplam sayısı paydadaki sayı ile aynı ise bütünün 1'er tane nesneden oluşacak şekilde parçalandığı görülmüştür. Eğer nesnelerin toplam sayısı paydadaki sayı ile aynı değil ise; denk kesirlerden faydalanılarak paydadaki sayının nesnelerin toplam sayısına eşitlendiği, ardından yine bütünü 1'er tane nesneden oluşacak şekilde parçalandığı görülmüştür. Literatür incelendiğinde aynı anda parçalama şemasının çalışma mekanizması, öğrenci tarafından etkinleştirilebileceği durum ve kullanılabilecek kesirsel faaliyetler bağlamında Tablo 2.1.'de özetlenmiştir.

Tablo 2.1. Aynı anda parçalama şemasının çalışma mekanizması

Problem durumu	APŞ kapsamında gösterilen kesirsel faaliyetler	Açıklama
Bir niceliğin n kişi arasında paylaşılması	Bütünü birimleştirme	-Sürekli nicelikten parça üretmek amacıyla bütünü birim olarak algılama -Ayrık nesneler üzerinde paydadaki sayıya göre nesneleri bütün olarak algılama
	Aynı anda parçalama	-Sürekli nicelik üzerinde göz kararı bir büyüklüğü seçerek parça üretme -Sürekli nicelik üzerinde ardışık kesme işlemleriyle birbirleriyle eşit büyüklükte olduğunu doğrulamaksızın parçalar üretme -Ayrık nesneleri paydadaki sayıya göre 1'er nesne olacak şekilde parçalar üretme

Tablo 2.1.'de özetlenen bilgiler doğrultusunda APŞ kapsamında sürekli bir nicelik ardışık kesme işlemleriyle aynı anda (düşünmeden, anlık bir şekilde) parçalandığında, oluşan parçaların büyüklükleri birbirleriyle özdeş olabilir. Ancak Steffe ve Olive bu

durumun tesadüfen ve sebebi anlaşılmaz bir şekilde olabileceğini vurgulamıştır (s. 93, 317). Çünkü APŞ şemasında öğrencilerde tekrarlanabilir birim kavramının eksikliği mevcuttur; dolayısıyla herhangi bir parçadan orijinal bütünün yeniden oluşturulabileceği düşüncesi henüz kazanılmamıştır.

2.2.2. Parça bütün şeması (PBŞ; Part whole scheme)

Parça bütün şeması (PBŞ; *part whole scheme*) birim kesirlerden ziyade parça kesirler (birim kesir olmayan basit kesirler) üzerinde çalışmayı gerektiren durumlarda ortaya çıkar. Parça kesir üzerinde çalışma durumları bu şema kapsamında sadece belli bir parçanın bütündeki parçalara olan oranı şeklindeki durumlardır.

Aynı zamanda PBŞ'nin amacı *parçadan bütüne* olan ilişkinin kurulmasıdır. Bu ilişki kurulurken, parçalanmış olan yerleşik bütünden parça ayırabilir ve bütün dışına çıkarılabilir (*disembedding*). Ayrıca Steffe ve Olive (2010) öğrenciler tarafından kurulan bu ilişkide bütündeki parçaların tekrarlanabilir birim olarak yapılandırılmadığını belirtmişlerdir. Nitekim Steffe ve Olive'e (2010) göre parça ile bütün arasındaki ilişki kurulurken, bütün sürekli bir nicelik olsa bile bütün ve parçalar ayrı büyüklükler olarak değerlendirilir (s. 323). Daha açık bir ifadeyle Steffe ve Olive parça bütün şemasının aynı anda parçalama şemasına dayandığını belirterek parçaların büyüklükleri eşit olmasa da doğal sayılar gibi bütünün ayrı birimlerden oluşan bileşik birim olarak algılandığını vurgulamıştır. Örnek olarak 10 parçaya ayrılmış bir bütün içinde parçalar 1, 2, 3, ..., 10 şeklinde ayrı olarak tanımlanır. Bu anlamda öğrenci kesir gösterimini kısıtlı olarak kullanmaktadır. Özellikle PBŞ'ye sahip olan öğrencilerde "bütün, paydadaki sayı ve katı kadar parçadan oluşur" düşüncesi hakim olduğundan öğrenci $1/n$ şeklinde gösterilen kesirlerin tekrarlanabilir birim kesir olduğunun farkındalığını henüz kazanmamıştır. Nitekim Steffe ve Olive'e (2010) göre bu şema kapsamında bahsedilen parça ile bütün arasındaki ilişki bütünden ayrılan (*disembed*) parçanın büyüklüğünden veya birim kesrin tekrarlanabilir özelliğinden söz etmez (s. 323). Tunç-Pekkan (2016) da parça bütün ilişkisi için tekrarlanabilir birim kavramının göz ardı edildiğini vurgulamış ve $1/10$ kesri için öğrencilerin 1'i başlı başına bir büyüklük olarak algılamadığını ancak 1'i 10'un bir parçası olarak gördüklerini belirtmiştir (s. 499).

Öte yandan parça bütün ilişkisinin yanı sıra McCloskey ve Norton (2009) parça bütün şeması kapsamında *birimleştirme*, *parçalama* ve *yerleşik bütünden ayırma* kesirsel

faaliyetlerinin kullanıldığını belirtmiştir (s. 47). Ancak Steffe ve Olive’e (2010) göre PBŞ’de birleştirme bütünün içerisindeki ayrı parçaların sayısına bağlıdır. Bütün ise pay veya paydadaki sayıya göre parçalara ayrılır, ancak bu parçalama faaliyeti *aynı anda parçalama* faaliyetidir. Çünkü PBŞ’ye sahip bir öğrenci bütündeki parçaların birbirinin özdeşi olduğunu göz ardı eder. Daha ziyade parçaların özdeş büyüklükte olması amacı, istenilen sayı kadar parça üretmek amacına kıyasla arka planda kalmaktadır. Bu durum PBŞ kapsamında özdeş parçaların üretilmeyeceği anlamına gelmez. Nitekim incelenen literatüre göre PBŞ kapsamında öğrencilerin dışardan gelen yardımla uyarılması ve desteklenmesi sayesinde parça ile bütünün büyüklüğünü *tekrarlama* kesirsel faaliyeti ile kıyaslayabildikleri ve özdeş parça oluşturmayı amaçlayabildikleri görülmüştür (Hackenberg, 2013; Steffe ve Olive, 2010; Tunç-Pekkan, 2016).

Ayrıca McCloskey ve Norton (2009) yerleşik bütünden ayırma (*disembedding*) kesirsel faaliyetini de PBŞ kapsamında değerlendirmiştir. Aslında Steffe ve Olive (2010) yerleşik bütünden ayırma kesirsel faaliyetini bütünü bozmadan bütünden herhangi bir parçanın dışarı çıkarılması veya parçanın kopyasının dışarıya çizilmesi şeklinde belirtmişlerdir. Steffe ve Olive’e göre bu kesirsel faaliyet gerçekleştirilirken bütünde yerleşik olan parça çıkarılsa dahi bütünün büyüklüğünün her zaman korunacağı ve eksilmeyeceği bilinir. Çünkü hem parçalar hem bütün kendine göre tanımlanan bir büyüklüğe sahiptir. Ancak McCloskey ve Norton (yerleşik) bütünden ayırma (*disembedding*) kesirsel faaliyetini “bütünden seçilen bir parçanın nasıl görüldüğünü zihinde canlandırmak” şeklinde yorumlamışlardır. Bunun yanı sıra parçaların ve bütünün büyüklüklerinin korunması gerektiğine yönelik bir vurguda bulunmamışlardır. Halbuki Hackenberg (2013) yerleşik bütünden ayırma kesirsel faaliyeti ile çarpımsal muhakeme becerisi arasında yakından bir ilişki olduğunun altını çizmiştir. Özellikle Hackenberg (2013), hem bütünün büyüklüğünün değişmezlik özelliği hem de bütünü bozmadan/yok etmeden yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin birlikte kullanılmasının [bütündeki tüm parçaların] alt birimlerin tekrarlanabileceği ve orijinal bütünün yeniden oluşturulabileceği düşüncesinin kazandırılmasına yardımcı olduğunu vurgulamıştır (s. 540). Bu bağlamda incelenen literatür doğrultusunda parça bütün şemasının çalışma mekanizması Tablo 2.2.’de özetlenmiştir.

Tablo 2.2. *Parça bütün şemasının çalışma mekanizması*

Problem durumu	PBŞ kapsamında gösterilen kesirsel faaliyetler	Açıklama
Herhangi bir nicelikten birim kesir olmayan parça kesirler üretme	Bütünü ve parçayı birleştirme	Bütünü ayırık parçalardan oluşur şeklinde algılama ve bütüne toplam parça sayısı olarak birim ölçüsü atama
	Aynı anda parçalama	-Sürekli nicelik üzerinde göz kararı bir büyüklüğü seçerek parça üretme -Sürekli nicelik üzerinde ardışık kesme işlemleriyle birbirleriyle eşit büyüklükte olduğunu doğrulamaksızın parçalar üretme
		Ayrık nesneleri paydadaki sayıya göre 1'er nesne olacak şekilde parçalar üretme
	Yerleşik bütünden ayırma	Parçalanmış nicelikten paydaki sayı kadar parçayı fiziksel veya zihinsel olarak bütünden ayırma

Tablo 2.2.'ye göre PBŞ'nin çalışma mekanizması şema kapsamında gösterilen kesirsel faaliyetler üzerinden herhangi bir niceliğin 7/10'unun gösterilmesi istendiğinde öğrencilerin kesir bilgisinin şu şekilde ortaya çıkması beklenmektedir: 7/10 kesir büyüklüğü, öğrenciler için on parçaya ayrılmış bir bütünün on eşit parçasından çıkarılan yedi parçayı temsil etmektedir. Ancak çıkarılan yedi parçanın uzunluğuyla ilgili veya yedi parçanın 1/10'lik birim kesrin yedi kez yinelenmesiyle üretildiğine dair bir düşünce söz konusu değildir. Bu sebeple çıkarılan yedi parçanın birbirine eşit olduğu söylene bile; tüm parçaların birbirinin özdeşi olduğu düşüncesi ancak 1/10'lik parçaların tekrarlanabilir birim kesir olarak temsil edildiği daha gelişmiş şemalarda oluşabilir (Steffe ve Olive, 2010, s. 323). Bunların yanı sıra Steffe ve Olive'e (2010) göre PBŞ kapsamında bahsedilen *parça bütün* ilişkinin daha gelişmiş şemalarda birim kesirlerin doğru yorumlanabilmesi için değişmesi gerekir. Bu değişim birim kesirler ile bütün arasındaki çarpımsal ilişkinin kurulması için hem *parçadan bütüne* olan ilişkinin hem de *bütünden parçaya* olan ilişkinin zamanla geliştirilmesi yönünde olmalıdır (s. 323).

2.2.3. Eş parçalama şeması (EPŞ; Equi partitioning scheme)

APŞ gibi eş parçalama şeması (EPŞ; *equi partitioning scheme*) da bir niceliğin n kişi arasında paylaştırılması veya n 'e eşit olarak bölünmesi durumlarında çalışır. Steffe ve Olive'e (2010) göre şemanın amacı ve şemadan beklenen sonuç sürekli bir niceliğin birbirleriyle özdeş büyüklükte parçalar üretmektir. Steffe ve Olive (2010) bu şema

kapsamında *birimleştirme* ve *parçalama* kesirsel faaliyetlerinin etkinleştirilmesi gerektiğini belirtmektedir. Burada birimleştirme faaliyeti hem bütüne parçalardan oluştuğuna yönelik bir ölçü birimi atanmasını hem de her bir parçanın (bütünün en küçük birimi) başlı başına bir büyüklük olarak tanınmasını gerektirir. Ayrıca bu şema kapsamında öğrenci bütünden oluşturulan parçaların özdeş olması gerektiğini bilir ve her bir parçanın birbiriyle eşit büyüklükte olduğunu doğrulama ihtiyacı duyar. Bu sebeple Steffe ve Olive’e (2010) göre eş parçalama şeması bütündeki yerleşik bütünden ayırma (*disembedding*) ve ayırdığı parçayı tekrarlama (*iterating*) faaliyetlerini de kullanır (s. 95). EPŞ kapsamında sürekli bir niceliğin altı kişiye paylaştırılması etkinliği karşısında öğrencinin ortaya koyabileceği sonuç Şekil 2.3.’te örneklendirilmiştir.

Soru:	Çubuğun $1/7$ 'sini gösteriniz.
Yanıt a)	
Yanıt b)	

Şekil 2.3. Eş parçalama şemasından beklenen sonuç örneği

Eş parçalama şeması kapsamında sürekli lineer bir niceliğin altı kişi arasında paylaştırılması durumunda öğrenci birimleştirme faaliyetine uygun olarak parçalama faaliyetini kullanır. Ardından Şekil 2.3. Yanıt a)’da görüldüğü gibi bütünde yerleşik olan bir parça ayrılır ve kopyası fiziksel veya zihinsel olarak bütün dışına taşınır (*disembedding*). Böylece bütünden fiziksel olarak ayrılan parça Şekil 2.3. Yanıt b)’deki gibi 6 kez tekrarlanarak (*iterating*) uç uca eklenir ve hem parçaların eşit büyüklükte olduğu hem de bütünün büyüklüğünün korunduğu doğrulanır. Bunun yanı sıra yerleşik bütünden ayırma kesirsel faaliyeti Şekil 2.3.’te görülenin yanı sıra fiziksel değil aynı zamanda zihinsel olarak da gerçekleştirilebilir. Daha açık bir ifadeyle sürekli nicelik üzerinde göz kararı büyüklükte oluşturulan parça bütün boyunca tekrarlanır. Eğer ki parçaların uç uca eklenmesiyle bütünün büyüklüğünü aşarsa veya bütünün büyüklüğünü tamamlamazsa, buna bağlı olarak göz kararı oluşturulan parçanın büyüklüğünde değişiklik yapılır. Bu durum bütünün büyüklüğü korunana dek devam eder ve öğrenci parçaların büyüklüğünün özdeşliğinden emin olur. Diğer bir deyişle bütünden yerleşik

parçanın özenle seçilerek ayrılması ve her bir parçanın başlı başına büyüklüğe sahip olması zihinsel olarak soyutlanmış demektir. Dolayısıyla paylaşırma durumlarında eş parçalama şemasından beklenen sonuç birbirleriyle özdeş tekrarlanabilir parçalar oluşturulması ve doğrulanmasıdır. Bunun yanı sıra Eliustaoğlu (2016) öğrencilerin parçalama faaliyetini ayırık nesnelerden oluşan bir nicelik üzerinde gerçekleştirirken, dağıtma veya gruplandırma yöntemini kullandıklarını göstermiştir. Bu sayede öğrenciler, ayırık nesnelerin sayısı paydadaki sayıdan farklı olduğunda dahi bir grup nesneye işlemsel birim atayarak parçalayabilmişlerdir. Örneğin, 10 nesneden oluşan bir bütünün $1/5$ 'i bulunması istendiğinde her 5 nesneyi işlemsel birim olarak algılayıp oluşan iki gruptan her birini 5 eşit parçaya ayırmak veya her 2 nesneyi işlemsel birim olarak algılayıp bütünü 2'şerli 5 eşit parçaya ayırmak, bütün üzerinde özdeş parçalar üretildiğinin göstergesidir. Bu bağlamda incelenen literatür doğrultusunda eş parçalama şemasının çalışma mekanizması Tablo 2.3.'te özetlenmiştir.

Tablo 2.3. *Eş parçalama şemasının çalışma mekanizması*

Problem durumu	EPŞ kapsamında gösterilen kesirsel faaliyetler	Açıklama
Bir niceliğin n kişi arasında paylaşılması	Bütünü ve parçayı birleştirme	Sürekli ve ayırık niceliklerde bütünü tek başına bir büyüklük olarak algılama Her bir parçanın bütüne ait ve başlı başına bir büyüklük olduğunun farkında olma
	Parçalama	Sürekli nicelik üzerinde referans alarak (yarım, çeyrek, parmak vs.) seçtiği büyüklüğe göre parça üretme Ayrık nesneler üzerinde gruplandırarak veya dağıtarak parça üretme
	Yerleşik bütünden ayırma	Sürekli nicelik üzerinde üretilen parçanın büyüklüğünü fiziksel veya zihinsel olarak bütünden ayırma Ayrık nesneler üzerinde oluşturduğu her gruptan bir parçayı fiziksel veya zihinsel olarak bütünden ayırma
	Tekrarlama	Üretilen parçaların özdeşliğinden emin olmak için bütünden ayrılan parçayı orijinal bütünü yeniden oluşturuncaya dek n kez yineleme

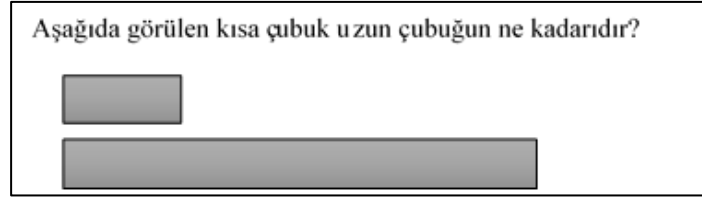
Bunların yanı sıra Steffe ve Olive'in (2010) teorisine göre Şekil 2.3. Yanıt b)'de görülen şekil dışında öğrencinin yeniden oluşturduğu bütün orijinal bütünden biraz daha kısa veya uzun olabilir (s. 316). Aslında bu durum öğrencilerin ince-motor becerilerinin

gelişim farklılıkları da söz konusu olduğunun göstergesidir. Bu durumda Steffe ve Olive'in asıl anlatmak istedikleri EPŞ kapsamında öğrencilerin yaptığı faaliyetlerin aynı zamanda öğrencilerin sayı bilgisi hakkında araştırmacılara rehberlik edebileceğidir. Şekil 2.3.'teki örnek ele alındığında Tunç-Pekkan (2016) da Steffe ve Olive gibi 6 sayısının öğrenciler tarafından nasıl algılandığı ve parçalama sürecinde nasıl kullanıldığı hakkında araştırmacılara bilgi verdiğini belirtmiştir (s. 499). Daha açık bir ifadeyle öğrenciye göre 6 sayısı, 6 birimlik (6x1) tekrarlı bir sayıyı temsil etmektedir. Bu sayede öğrenci, EPŞ'yi takip eden daha gelişmiş şemaları oluştururken basit kesirlerin n tane birim kesir barındırdığını daha kolay anlamlandırabilecektir.

2.2.4. Parçalı birim kesir şeması (PBKŞ; Partitive unit fractional scheme)

Parçalı birim kesir şeması (PBKŞ; *partitive unit fractional scheme*) bir parçanın orijinal bütüne oranının bulunması durumlarında çalışır. Bütün ile bütünün bir parçası arasındaki kesirsel büyüklüğün kıyaslanmasını gerektirir. Bu bağlamda Steffe ve Olive'e (2010) göre PBKŞ kesir dili kullanımının inşası için büyük önem taşır (s. 100).

Steffe ve Olive (2010) PBKŞ kapsamında *birimleştirme*, *parçalama*, *tekrarlama* ve *yerleşik bütünden ayırma* kesirsel faaliyetlerinin kullanıldığını ve bu şemanın aslında eş parçalama şeması ile aynı kesirsel faaliyetleri içerisinde barındırdığını belirtmişlerdir. Ancak PBKŞ şeması kesir dilinin kullanımı ile EPŞ'den farklılık gösterir. Bu bağlamda Norton ve McCloskey (2008) ise PBKŞ'yi EPŞ'nin yeniden düzenlenmesine dayalı bir şema olarak tanımlamış ve içerisinde yalnızca *tekrarlama* faaliyetini barındırdığını ileri sürmüşlerdir (s. 52). Bunun yanı sıra bu iki şemanın beklenen sonuçlara göre de farklılık gösterdiği belirtilmiştir. Bu anlamda Norton ve McCloskey (2008) EPŞ'nin amacının “bütünden özdeş parçalar oluşturmak” iken; PBKŞ'nin amacının ise “parçanın tekrarlanmasıyla bütünü yeniden oluşturmak” olduğu üzerinde durmuşlardır (s. 52). Bu duruma örnek olarak Şekil 2.4.'teki problem durumu karşısında sadece EPŞ ile sadece PBKŞ şemaları kapsamında öğrencilerde ortaya çıkabilecek farklılıklar kesirsel faaliyetler ve kesir dili kullanımı açısından Tablo 2.4.'te sunulmuştur.



Şekil 2.4. Parçanın orijinal bütüne oranının bulunmasına yönelik problem durumu

Aslında Şekil 2.4.'te verilen problem durumu parçalı birim kesir (PBKŞ) şemasının çalışmasını gerektirecek bir problem durumudur. Ancak PBKŞ şemasını henüz oluşturmamış ve sadece EPŞ şemasına sahip bir öğrenci bu problem durumu karşısında parça ile bütün arasındaki karşılaştırmayı kesirsel büyüklük bağlamında yapamayacağı belirtilmiştir (Steffe ve Olive, 2010, s. 101). Bu sebeple sadece PBKŞ ve sadece EPŞ şemalarına sahip birer öğrenci olsaydı; bu öğrencilerin verebileceği yanıtlar ve kesirsel faaliyetleri kullanma durumları Tablo 2.4.'teki gibi olurdu.

Tablo 2.4. PBKŞ ile EPŞ arasında ortaya çıkabilecek farklılıklar

	PBKŞ	EPŞ
Öğrenci yanıtı	Bir bölü dört veya dörtte biri kadardır.	Bütün parçanın 4 katıdır.
Birimleştirme	Bütün 1-birim büyüklüğündedir. Parça $\frac{1}{4}$ birim büyüklüğündedir.	Parça bir birim büyüklüğündedir. Bütün 4 birim büyüklüğündedir.
Parçalama	Bütünden parçanın büyüklüğünce özdeş 4 parça üretir.	Bütünden özenli bir şekilde özdeş 4 parça üretir.
Yerleşik bütünden ayırma	Parçanın kesir büyüklüğünü fiziksel veya zihinsel olarak 1-biriminden (b/b) ayırır.	Ürettiği parçanın büyüklüğünü fiziksel veya zihinsel olarak bütünden ayırır.
Tekrarlama	Bütünün büyüklüğünü yeniden oluşturmak için parçayı 4 kez tekrarlar.	Ürettiği parçaların özdeşliğinden emin olmak için ayırdığı parçayı bütünün büyüklüğünü yeniden oluşturuncaya dek 4 kez tekrarlar.

Tablo 2.4. incelendiğinde tekrarlanabilir birim kavramının hem PBKŞ'de hem de EPŞ'de etkin bir role sahip olduğu aşıkardır. Ancak tekrarlanabilir birim kesrin kullanım amacı yukarıda bahsedildiği gibi bu iki şemanın farklılığını göstermektedir. Bu bağlamda literatür incelendiğinde PBKŞ şeması kapsamında genel itibariyle *birimleştirme* ve *tekrarlama* kesirsel faaliyetlerinin temel faaliyetler olduğu görülmüştür. PBKŞ şemasının çalışma mekanizması Tablo 2.5.'te özetlenmiştir.

Tablo 2.5. *Parçalı birim kesir şemasının çalışma mekanizması*

Problem durumu	PBKŞ kapsamında gösterilen kesirsel faaliyetler	Açıklama
Bütün ile birimin karşılaştırılması, oranının bulunması ve birim parçaların tekrarlanmasıyla orijinal bütünün yeniden oluşturulması	Birimleştirme	Parçaları birim kesir, bütünü ise n tane birim kesir olarak algılama
	Tekrarlama	Parça büyüklüklerini tekrarlayarak özdeş kopyalar oluşturma
		Birim kesri bütün içerisinde n kez tekrarlama

Öte yandan Steffe ve Olive parçalı birim kesir şeması için parça ile parçalanmış bütün arasında tekilden çokluğa (*one-to-many*) bir ilişkinin kurulduğunu ve bu ilişkinin uygun kesir dili aracılığıyla belirgin bir şekilde ifade edildiğini vurgulamıştır (Steffe, 2002, s. 292; Steffe ve Olive, 2010, s. 102). Steffe’e göre bu durum şöyle açıklanabilir: Bir çubuğun *onda biri* ifadesinin ve *onda birlik* kesir büyüklüğünün tekrarlanabilir birim kesri temsil ettiği ve bütünün birim kesrin on kez tekrarlanması ile oluştuğu öğrenci tarafından bilinir. Burada bahsedilen tekilden çokluğa olan çarpımsal ilişki için Hackenberg (2007; 2013) parçalı birim kesir şemasına sahip olan öğrencilerin aynı zamanda bileşik birimleri iki kademeli birimler olarak koordine edebileceğini belirtmiştir. Diğer bir ifadeyle bir öğrenci aktivite öncesinde on eş parçaya ayrılmış bir bütünün içerisinde 10 tane *onda birlik* birim olduğunu ve *onda birlik* birimlerin 10 kez tekrarlanmasıyla bütünün yeniden oluşturabileceğinin farkındadır. Bu sebepten ötürü PBKŞ’de *parçadan bütüne* bir ilişki söz konusudur.

2.2.5. Parça kesir şeması (PKŞ; Partitive fraction scheme)

Steffe ve Olive (2010) Parça kesir şeması (PKŞ; *partitive fraction scheme*) kapsamında birim kesirlerin yanı sıra *birim kesir olmayan parça kesirler* üretilbildiğinden dolayı, bu şemanın PBKŞ’nin genişletilmiş hali olduğunu belirtmişlerdir (s. 101). Nitekim incelenen literatürde de parça kesir şemasının genel tanımı için bu yönde bir görüş mevcuttur. Ancak Boyce ve Norton (2016, s. 13) *parça kesir şemasını parçalı birim kesir* (PBKŞ) ve *parça bütün* (PBŞ) şemalarının bir birleşimi olarak gördüklerini belirtmişlerdir.

Steffe ve Olive’e göre parça kesir şemasında *birimleştirme*, *parçalama*, *yerleşik bütünden ayırma* ve *tekrarlama* kesirsel faaliyetlerinin hepsi bütünden parça kesir

üretmek amacıyla aktif olarak kullanılmaktadır. Bu bağlamda parça kesir şemasının çalışma mekanizması Tablo 2.6.'da özetlenmiştir.

Tablo 2.6. *Parça kesir şemasının çalışma mekanizması*

Problem durumu	PKŞ kapsamında gösterilen kesirsel faaliyetler	Açıklama
Bütün ile birim kesir olmayan parçanın karşılaştırılması, oranının bulunması veya parça ile bütünün oranı verildiğinde orijinal bütünün yeniden oluşturulması	Birimleştirme	Parçaları birim kesir olarak, parça kesir ile bütünü ise “ $m, n...$ ” tane birim kesir olarak algılama
	Parçalama	Sürekli nicelik üzerinde referans alarak (yarım, çeyrek, parmak vs.) seçtiği büyüklüğe göre parça üretme
		Ayrık nesneler üzerinde gruplandırarak veya dağıtarak parça üretme
	Yerleşik bütünden ayırma	Birim kesir ve parça kesir büyüklüğünü fiziksel veya zihinsel olarak bütünden ayırma
	Tekrarlama	Parça büyüklüklerini tekrarlayarak özdeş kopyalar oluşturma
		Tekrarlanabilir birim kesir kavramı

Öğrenciler bu şema kapsamında PBKŞ'deki gibi her bir parçayı *beşte bir* gibi birim kesir büyüklüğünde ve bütünü *beşte beş* gibi beş tane *beşte birlik* birim olarak algılayabilirler. Buna ek olarak *beşte üç* gibi parça kesirleri de üç tane *beşte birlik* birim olarak tasarlayabilirler. Bu sebepten ötürü Steffe ve Olive (2010) PKŞ kapsamında kullanılan kesir bilgisinin sadece *parçadan bütüne* değil aynı zamanda *bütünden parçaya* olan bir ilişkiyi temsil ettiği belirtilmiştir (s. 219, 324). Diğer bir ifadeyle bu şemada kapsamında *beşte üç* kesri sadece *beşte birliğin* üç kez tekrarlanması ile değil, aynı zamanda *beşte beş*in üç parçası olarak üretilir. Bu sebeple Steffe (2002) kesir kavramının anlamlandırılmasına büyük katkıda bulunduğu için *parça kesir şemasını* ilk gerçek şema olarak nitelendirmektedir (s. 305).

2.2.6. Tersinir parça kesir şeması (TPKŞ; Reversible partitive fraction scheme)

Parça kesir şeması (PKŞ), bütünün verilmediği ve birim kesri belli olmayan parça kesirlerin kullanıldığı durumlarda faaliyetlerin tersine çevrilemezliği ile sınırlıdır (Boyce ve Norton, 2016, s. 13). Diğer bir ifadeyle bütünün ve birim kesrin belli olmadığı

durumlarda parçalanmamış parça kesir büyüklüğünden bütünü oluşturmak için tersinir parça kesir şeması (TPKŞ; *reversible partitive fraction scheme*) inşa edilmelidir.

Steffe ve Olive'e (2010) göre TPKŞ kapsamında niceliği verilen bir parça kesirden hareketle bütünün büyüklüğünün oluşturulması durumunda *parçalama*, *yerleşik bütünden ayırma*, *tekrarlama* ve *yinelemeli ayırıştırma (splitting)* kesirsel faaliyetlerinin kullanılması gerekir. Literatüre bakıldığında Tunç-Pekkan (2016, s. 502) da Steffe ve Olive ile aynı görüşte iken; McCloskey ve Norton (2009) TPKŞ kapsamında yalnızca *yinelemeli ayırıştırma* kesirsel faaliyetini ele aldığı görülmektedir. İncelenen literatür doğrultusunda tersinir parça kesir şemasının çalışma mekanizması Tablo 2.7.'de özetlenmiştir.

Tablo 2.7. *Tersinir parça kesir şemasının çalışma mekanizması*

Problem durumu	TPKŞ kapsamında gösterilen kesirsel faaliyetler	Açıklama
Bütünün ve birim kesrin belli olmadığı ancak herhangi bir parça kesir büyüklüğünden orijinal bütünün oluşturulması	Yinelemeli ayırıştırma	Zihinde canlandırılan bütün ile verilen parça büyüklüğü arasında eş zamanlı olarak parçalama ve tekrarlama faaliyetleri kullanma
	Parçalama	Yinelemeli ayırıştırma faaliyetinden sonra nicelik üzerinde somut olarak parçalama
	Tekrarlama	Yinelemeli ayırıştırma faaliyetinden sonra nicelik üzerinde somut olarak tekrarlama

Tablo 2.7. incelendiğinde TPKŞ kapsamında parçalama ve tekrarlama kesirsel faaliyetlerinin zihinde eş zamanlı olarak çalışması gerektiği görülmektedir. Bununla beraber öğrencilerin TPKŞ bağlamında yinelemeli ayırıştırma (splitting) faaliyetinin ardından parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini nicelikler üzerinde somut olarak uygulamaları gerçekleşebilir. Nitekim parça kesir büyüklüğünden parçalama faaliyeti ile birim kesir büyüklüğünün üretilmesi ve birim kesrin n kez tekrarlanarak bütün somut olarak nicelik üzerinde oluşturulabilir. Bu durumda önemli olan belirtilen kesirsel faaliyetlerin gerçekleştirilebilmesi için öğrencinin *yinelemeli ayırıştırma* becerisine sahip olması gerektiğidir. *Yinelemeli ayırıştırma* ise parçalama ve tekrarlama kesirsel faaliyetlerinin eş zamanlı olarak çalışmasını ve aktivite öncesinde öğrenci zihninde canlanmasını gerektirir. Örneğin $3/5$ olarak verilen bir niceliğin temsil ettiği bütünün büyüklüğünün oluşturulması istendiğinde, öğrenci zihninde derhal $3/5$ kesrinin hem $1/5$

kesrinin 3 kez tekrarlanmasıyla oluştuğu hem de $5/5$ kesrini $1/5$ kesrini tekrarlayarak oluşturabileceği durumu canlanmalıdır. Bu sayede bütün büyüklüğünün oluşturulması için öncelikle birim kesir büyüklüğünün bulunması gerektiğinin farkındalığıyla hareket edecektir. Bu bağlamda tersinir parça kesir şeması tekrarlama ile parçalama faaliyetleri arasındaki ilişkinin tersinir olduğunun bilincine varır. Ayrıca incelenen literatür doğrultusunda en gelişmiş kesirsel faaliyet olan *yinelemeli ayırıştırma* faaliyetinin aktif kullanımı açısından parça kesir şemasının çözemediği diğer parça kesir problemlerini de çözebileceği görülmüştür.

Bunların yanı sıra Boyce ve Norton (2016) bu şema kapsamında her ne kadar en gelişmiş kesirsel faaliyet olan yinelemeli ayırıştırma (*splitting*) faaliyetinin aktif olarak kullanıldığı bir şema olsa da henüz üç kademeli bileşik birim kullanımını içermediğini belirtmişlerdir (s. 13). Daha ziyade bu şema kapsamındaki bileşik birimlerin kullanımı parça kesir şemasındaki (PKş) gibi iki kademelidir.

2.2.7. Bileşik kesir şeması (BKş; Iterative fractional scheme)

Bileşik kesir şeması (BKş; *iterative fractional scheme*) bütünün 1’den büyük olduğu yani bileşik kesir büyüklükleri ile çalışıldığı durumlarda çalışır. Boyce ve Norton (2016) kesir bilgisinin anlamlı öğrenimi için “ $1/5$ ile $3/5$ ” ve “ $1/5$ ile 1” arasındaki ilişkinin ğrenci tarafından içselleştirilmesinin yeterli olmayacağını belirtmiştir (s. 13). Nitekim Tunç-Pekkan (2016) da gerçek anlamda kesirlerin “sayı” mertebesine ulaşması için bileşik kesirlerin öğrenciler tarafından kavramsallaştırılması gerektiğini belirtmiştir (s. 505).

BKş kapsamında TPKş’deki gibi *parçalama*, *yerleşik bütünden ayırma*, *tekrarlama* ve *yinelemeli ayırıştırma* (*splitting*) kesirsel faaliyetlerinin kullanılması gerekir. Ancak bu faaliyetler bütünün büyüklüğü dışındaki kesir büyüklüklerini (m/n , $m>n$) oluşturmak için kullanmak gerekir. Bileşik kesir şemasının çalışma mekanizması Tablo 2.8.’de özetlenmiştir.

Tablo 2.8. *Bileşik kesir şemasının çalışma mekanizması*

Problem durumu	BKŞ kapsamında gösterilen kesirsel faaliyetler	Açıklama
Bileşik kesir ile temsil edilen bir parça büyüklüğünden orijinal bütünün yeniden oluşturulması	Yinelemeli ayrıştırma	Zihinde canlandırılan bütün ile verilen parça büyüklüğü arasında eş zamanlı olarak parçalama ve tekrarlama faaliyetleri kullanma
	Parçalama	Yinelemeli ayrıştırma faaliyetinden sonra nicelik üzerinde somut olarak parçalama
	Tekrarlama	Yinelemeli ayrıştırma faaliyetinden sonra nicelik üzerinde somut olarak tekrarlama

Öte yandan incelenen literatüre göre diğer kesir şemalarının aksine *bileşik kesir şeması* (BKŞ) kapsamında üç kademeli birimlerin koordine edilmesi gerektiği belirtilmiştir (Boyce ve Norton, 2016, s. 13; Hackenberg, 2007, s. 30; Norton ve Wilkins, 2012, s. 563; Steffe ve Olive, 2010, s. 200). Bu bağlamda Hackenberg (2007) öğrencilerin üç kademeli birimleri parça kesir şemalarında (PKŞ ve TPKŞ) “aktivite esnasında” koordine ettiklerini; bileşik kesir şemasında (BKŞ) ise “aktiviteden önce” koordine etmeleri gerektiğini vurgulamıştır. Bunun yanı sıra Hackenberg (2007), bileşik kesirlerin “başlı başına birer sayı olarak” inşa edilmediği takdirde birçok durumda öğrencilerin matematiksel aktivitelerinin sınırlı kalacağını belirtmiştir (s. 28). Daha açık bir ifadeyle parça kesir şemaları tüm kesirsel faaliyetleri bir bütün içerisinde ve bütüne bağlı olarak gerçekleştirir. Ancak BKŞ kapsamında bütünün dışına çıkılacak şekilde birim kesirlerin tekrarlanmasıyla kesir sayı dizisi oluşturulur. Kesir sayı dizisi ise “tüm” kesir birimlerinin -örneğin *beşte birliklerin-* sayı doğrusuna yerleştirilmesi ile ($1/5$, $2/5$, ..., $5/5$, $6/5$, $7/5$, ...) sayıların bağlanabilirliği ve sürekliliği hissi ile inşa edilir (Hackenberg, 2007, s. 28). Bu kesir sayı dizisinin oluşması için öğrencilerin parça kesir ve bütünün yanı sıra bileşik kesirlerle de çalışması gerekmektedir. Bu durum kesir sayı dizisinin inşası için son derece önemlidir.

2.3. Kesirsel Faaliyetler (Fraction Operations)

Bu bölümde araştırma kapsamında ele alınan kesir şemaları kapsamında kullanılması gereken kesirsel faaliyetlerle ilgili bilgiler detaylı olarak verilmiştir. Literatürde bu faaliyetlerin dışında daha gelişmiş kesir şemaları için daha gelişmiş kesirsel faaliyetlerinin olduğu görülmektedir. Ancak ortaokul matematiği göz önüne

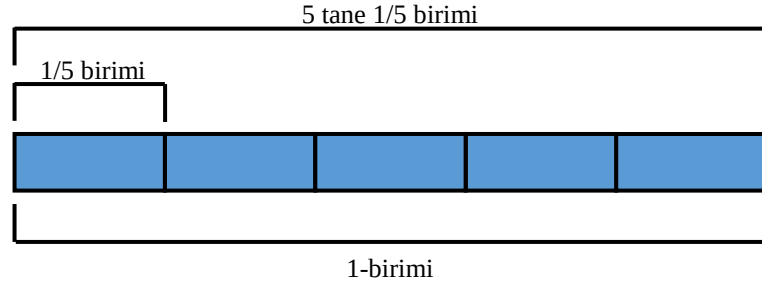
alındığında öğrencilerin kullanması gereken en temel kesirsel faaliyetler seçilerek detaylı olarak sunulmuştur.

2.3.1. Birimleştirme ve birim koordinasyonu (Unitizing and unit coordination)

Birim, belli bir niceliği veya nesneler topluluğunu ölçmek için aynı cinsten alt elemanların her birine tanımlanan nitelikli ölçüdür. Lamon'a (1999) göre *birimleştirme* faaliyeti ise belli bir miktara ya da nesneler topluluğuna bilişsel olarak ölçü birimi atadıktan sonra, birim üzerinde yapılacak işlem adımlarını oluşturmaya ve önceden tahmin etmeye dayalı bilişsel bir süreçtir (s. 42). Tobias, Roy ve Safi (2015) ise birimleştirme faaliyetinin birimleri anlama yolu olarak iki türlü olabileceğini belirtmiştir: Bunlardan birisi tekrar edilebilir birimlerin bir bütün olarak düşünülmesi, diğeri ise yeni bir nicelik oluşturmak için birimin bir miktar olarak ele alınmasıdır (s. 4).

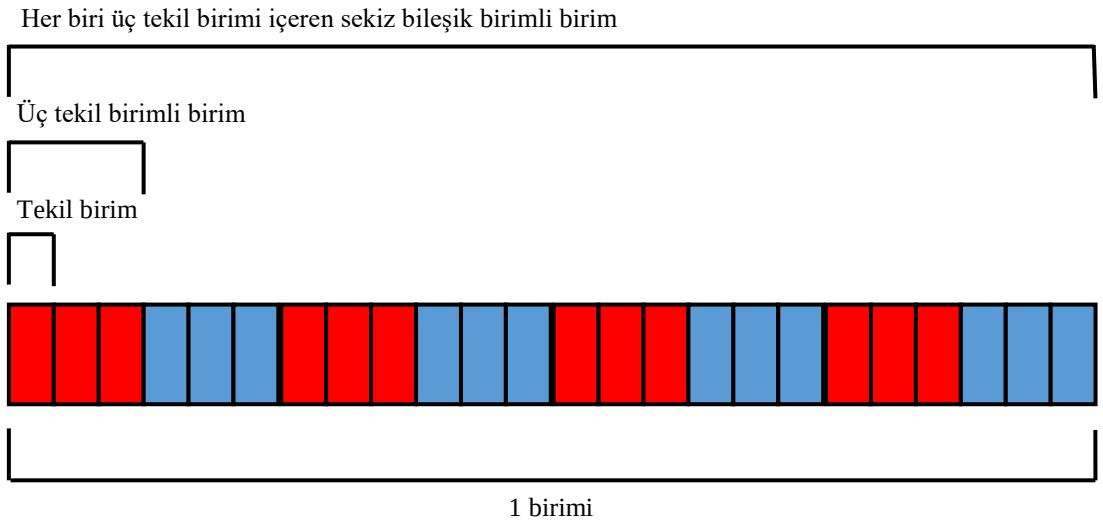
Birimler temsil ettikleri ölçü birimlerine göre tekil birim (*singleton unit*) ve bileşik birim (*composite unit*) olarak tanımlanır. Tekil birimler, belli bir durumda belli bir nicelik veya nesneler topluluğu için tanımlanan en küçük ölçü birimidir. Tekil birimlerin tekrarlanması ile bütün veya başka birimler oluşturulabilir. Doğal sayılar kümesinin tekil birimi bellidir ve en küçük pozitif sayı olan 1'dir. 1'den büyük olan doğal sayılar da "1" biriminin toplamsal veya çarpımsal işlemler sürecinin sonunda üretilir. 5'in "1" biriminin 5 kez tekrarlanmasıyla oluşması bu duruma örnektir. Ancak kesirlerde belli bir en küçük birim yoktur. Verilen durum bağlamında kesirlerde tekil ve bileşik birimler oluşturulur. Ortaokul öğrencileri kesirler konusunda her farklı durumda farklı birimleştirme yapamadıkları için zorlanmaktadırlar.

Bileşik birimler ise birden fazla tekil birimden oluşan birimlerdir. Zihinsel olarak birimleştirme yapabilen ortaokul öğrencileri bileşik birimin hem içerisinde tekil birimleri barındırdığının hem de bu yapının tek başına birim olduğunun farkındadır (Ulrich ve Wilkins, 2017, s. 3). Literatürde bileşik birimler temsil edilen bütünün barındırdığı farklı alt birim sayısına göre iki veya üç kademeli birim olarak değerlendirilmektedir (Boyce ve Norton, 2016; Hackenberg, 2007; 2013; Hackenberg ve Lee, 2015; Olive ve Çağlayan, 2008). Bütünün kendisi tekrarlanabilir bir birim özelliği taşımakla birlikte, *yalnızca bir* parçalama işlemi ile en küçük ölçü birimine ulaşıyorsa bütün iki kademeli bileşik birimdir (bkz. Şekil 2.5.).



Şekil 2.5. İki kademeli birim yapısının formu (Boyce ve Norton, 2016, s. 13)

Şekil 2.5.'te görüldüğü gibi iki kademeli bileşik birimler tekil birimlerden oluşan birimlerdir ve tek bir parçalama faaliyeti ile en küçük ölçü birimi olan tekil birime ulaşılabilir. Bu şekilde olan iki kademeli bileşik birimler aynı zamanda literatürde *tekil birimli birim (birimlerin birimi-a unit of units)* olarak anılmaktadır. Ancak Şekil 2.6.'da verilen bazı durumlarda tekil birime ulaşmak için birden fazla parçalama faaliyetine ihtiyaç duyulabilir. Diğer bir deyişle bütün, daha küçük alt birimlere parçalanabiliyor ve bu birimler de farklı alt birimlere ayrılarak tekil birime ulaşılıyorsa, bu durumda bütün üç kademeli bileşik bir birim olarak temsil edilir. Literatüre bakıldığında ise üç kademeli bileşik birimler, *bileşik birimli birim (birimlerin biriminin birimi-a unit of units of units)* şeklinde karşımıza çıkmaktadır.



Şekil 2.6. Üç kademeli birim yapısı formu (Boyce ve Norton, 2016, s. 12)

Ayrıca üç kademeli bileşik birimler (*bileşik birimli birim*) ile çalışabilen öğrenciler, üç kademeli yapılar arasında esnek bir şekilde geçiş yapabilir (Norton ve Deater Deckard, 2014, s. 659). Yani Şekil 2.7.’deki gibi her biri dört tane tekil birim içeren altı tane bileşik birimli birim olan çubuğu (üstte), her biri altı tane tekil birim içeren dört tane bileşik birimli birim (altta) olarak değiştirerek üç kademeli birimler arasında geçiş sağlayabilir. Bu şekilde öğrencilerin üç kademeli bileşik birimlerle çalışarak birim koordinasyonu kesirsel faaliyetini gerçekleştirebilmeleri daha üst biliş becerilere sahip olduklarını gösterir. Bu araştırma kapsamında Steffe ve Olive’e göre üç kademeli bileşik birimlerin koordinasyonu faaliyetini gerektiren şemalardan yalnızca bir tanesi incelenmiş olup, bu şema bileşik birimlerle çalışmayı gerektiren bileşik kesir şemasıdır (BKŞ).



Şekil 2.7. Üç kademeli birim yapılarında geçiş

Literatür incelendiğinde ortaokul öğrencilerinin birim kavramını birim türlerine göre anlamlandırmaları gerektiği görülmüştür. Ancak ortaokul düzeyine gelinceye kadar öğrencilerin birim kavramı için oluşturduğu *tanıma şablonu* çoğunlukla doğal sayılar kümesinde tekil birim olan “1” birimi üzerine kurulur. Dolayısıyla kesirlerde farklı durumlar için özellikle zihinsel olarak birim atamak ve birimler arası çarpımsal ilişkiyi kurmak öğrencilere zor gelmektedir. Bu durumun diğer sebebi ise verilen her durumla birlikte kesirlerde birimin değişmesinin yanı sıra kullanılan modelin de değişmesidir. Tablo 2.9.’da doğal sayı ve kesirlerde sürekli ve ayırık model bağlamında tekil ve bileşik birim kullanımına ilişkin örnekler verilmiştir. Tablo 2.9. incelendiğinde bütünler, bir nesneden fazla veya eşit parçalar olarak alt birimlere parçalanabilen bileşik birimlerden oluşabilmektedir. “1” birimi doğal sayılarda tekil birimi temsil ederken, kesirlerde bütünü temsil etmektedir. Özellikle kesirlerde birimleştirmenin esnek ve aktif olarak kullanımı için “1” biriminin kavranması oldukça önemlidir. Çünkü kesirlerde “1” birimi aynı zamanda alt birimlerden oluşan bileşik bir birimdir. Özellikle kesir şemalarının oluşum sürecinde öğrencilerin birimleri tekrarlaması, bileşik birimleri alt birimlere parçalaması veya birimler arası çarpımsal ilişkileri kurmaları beklenmektedir.

Tablo 2.9. Doğal sayılar ve kesirlerde farklı modellerde kullanılan birim türleri

Konu alanı	Birim türü	Ayrık model	Sürekli model
Doğal sayılar	Tekil birim 1×1		
	Bileşik birim (tek kademeli) 3×1 (1-biriminin tekrarlanması)		
	Bileşik birim (iki kademeli) $1 \times (3 \times 1)$ (1-biriminin tekrarlanması ve 3'ün tek başına birim hali)		
	Bileşik birim (üç kademeli) $1 \times (2 \times (3 \times 1))$ (iki kademeli birimin tekrarı ile oluşan yeni tekrarlanabilir bileşik birim)		
Kesirler	Tekil birim $1 \div 6$		
	Bileşik birim (tek kademeli) $3 \times (1 \div 6)$ (Tekil birimin tekrarlanması)		
	Bileşik birim (tek kademeli) $6 \times (1 \div 6)$ (Tekil birimin tekrarlanması)		
	Bileşik birim (iki kademeli) $6 \times (1 \div 6)$ (Tekil birimin tekrarı ile oluşan yeni tekrarlanabilir bileşik birim)		
	Bileşik birim (üç kademeli) $4 \times (6 \times (1 \div 6))$ (iki kademeli birimin tekrarı ile oluşan yeni tekrarlanabilir bileşik birim)		

Not: Tabloda 1-biriminin önemini göstermek için “1” kalın yazılmıştır.

Steffe (2002) öğrenci tarafından bileşik birimler arası ilişkilerin anlamlandırıldığı ve kademeli birimler arasında geçişlerin soyutlanabildiği durumları *birim koordinasyonu* kesirsel faaliyeti olarak tanımlamıştır (s. 279). Ayrıca bu kesirsel faaliyetin seviyelerine göre öğrencilerden tekrarlama yapmaları da beklenir. Bu tekrarlama faaliyeti aktivite

esnasında somut olarak keşfedilebilir veya aktivite öncesinde zihinsel olarak gerçekleşebilir. Diğer bir deyişle birim koordinasyonu faaliyeti için öğrencilerin hem beşte üçlük bir parça kesri birim kesrin üç kez (somut/soyut) tekrarı hem de bütünü birim kesrin beş kez (somut/soyut) tekrarı şeklinde koordine etmeleri beklenir (Norton ve McCloskey, 2008, s. 53).

Bileşik birimlerin yapısından anlaşılacağı gibi, birim koordinasyonu faaliyeti çarpımsal akıl yürütme becerisi gerektirir. Hiebert ve Behr (1988) toplamsal akıl yürütmeden çarpımsal akıl yürütme becerisine geçiş için birim kavramının yeniden kavramsallaştırılması gerektiğini vurgulamıştır. Çarpımsal akıl yürütme becerisi ise ortaokul düzeyine kadar kazanılması beklenen bir durumdur. Kesirler için çarpımsal akıl yürütme becerisi tekil ve bileşik birimler arasındaki ilişkiyi anlamlandırma eylemi olarak düşünülebilir. Bu sebeple Tablo 2.9.'da birimlerin çarpımsal ilişkisi aritmetik işlemlerle gösterilmek istenmiştir. Literatürde de daha üst biliş beceri gerektiren birim koordinasyonu kesirsel faaliyeti ile çarpımsal muhakeme becerisine yönelik yapılan araştırmaların olduğu görülmektedir (Hackenberg, 2007; Norton ve diğerleri, 2015; Tillema, 2014). Bu araştırmalar incelendiğinde birim koordinasyonu kesirsel faaliyetinde birimlerin eşgüdümlü olarak koordine edilmesi gerektiğine vurgu yapıldığı görülmektedir. Daha açık bir ifadeyle öğrenciler daha üst kademeli birimleri *aktivite esnasında* koordine edilebilir. Ancak bu araştırmalarda bahsedilen birim koordinasyonu *aktiviteden önce* olması gerektiği yönündedir. Bu durum sonucunda öğrencilerin kademeli birimleri anlamlandırma farklılığı sebebiyle birim koordinasyonu seviyelerinde de farklılıklar oluşmaktadır.

Norton ve Deater-Deckard (2014) öğrencilere kısa, orta ve uzun olacak şekilde uzunlukları farklı üç çubuk vererek; orta çubuğun içerisine üç tane kısa çubuğun sığdığını ve uzun çubuğun içerisine ise dört tane orta çubuğun sığdığını söylemiştir (s. 659). Ardından uzun çubuğun içerisine kaç tane kısa çubuğun sığabileceğini belirlemeleri istenmiştir. Bu problem karşısında Norton ve Deater-Deckard (2014) öğrencilerin birim koordinasyon seviyelerine göre verebilecekleri tipik yanıtları Tablo 2.10.'daki gibi özetlemiştir.

Tablo 2.10. Birim koordinasyonu anlamlandırma seviyeleri (Norton ve Deater-Deckard, 2014, s. 659)

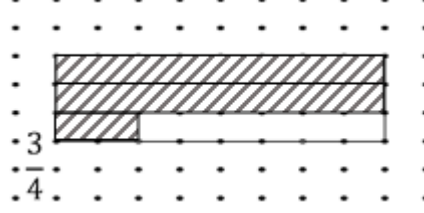
	Öğrencilerin birim yapıları	Öğrencilerin çubuk problemi üzerindeki muhakemeleri
Seviye 1	Öğrenciler, sunulduğu gibi tek kademeli birimleri algılayabilirler ve aktivite esnasında iki kademeli birimleri koordine edebilirler.	Öğrenciler kısa çubuğu zihinsel olarak tekrarlar, uzun çubuğun içerisine kaç tane kısa çubuk sığabileceğini hayal eder. Öğrencinin başını sallaması veya kısık sesle sayması bu aktiviteye işaret olarak gösterilebilir.
Seviye 2	Öğrenciler, sunulduğu gibi iki kademeli birimleri (bileşik birimleri) algılayabilirler ve aktivite esnasında üç kademeli birimleri koordine edebilirler.	Öğrenciler orta çubuğu her bir tekrar 3'ü temsil edecek şekilde dört kez zihinsel olarak tekrarlar. Öğrencinin “3, 3, 3, ve 3; 12” şeklinde sesli ifadesi bu aktiviteye işaret olarak gösterilebilir.
Seviye 3	Öğrenciler, sunulduğu gibi üç kademeli birimleri (bileşik birimli birim) algılayabilirler ve bu yüzden üç kademeli yapılar arasında esnek bir şekilde geçiş yapabilirler.	Öğrenciler uzun çubuğun içerisinde dört tane üçlük olduğunu hemen anlarlar. 12'nin dört tane 3'ten oluştuğu argümanının desteğiyle “12” cevabının hemen verilmesi görevin özümlediğine işaret olarak gösterilebilir.

Tablo 2.10.'da görüldüğü gibi birim koordinasyonu için en üst seviye öğrencilerin aktivite öncesinde üç kademeli birimler arasında esnek bir şekilde geçiş yapabilmeleridir. Aynı zamanda birimlerin koordinasyonunun eşgüdümlü olarak aktiviteden önce verildiği gibi soyutlanması oldukça önemlidir. Literatürde bahsedilen diğer şemaların yanı sıra bu araştırma kapsamında birim koordinasyonunun üçüncü seviyede kullanılmasının yalnızca bileşik kesir şemasında (BKŞ) mümkün olduğuna yönelik görüşler mevcuttur.

2.3.2. Parçalama (Partitioning)

Bu araştırma kapsamında literatürde *partitioning* kelimesi ile kullanılan kesirsel faaliyet kullanım biçimine göre iki farklı kesirsel faaliyet olarak ele alınmıştır. Bu doğrultuda *aynı anda parçalama* (simultaneous partitioning) faaliyeti bir bütünü özdeş parçalara ayırma zorunluluğu olmaksızın parçalara ayırma işlemidir; bu parçalar eşit parçalar da olabilir. Ancak bu parçalardan herhangi birinin tekrarlanmasıyla ile bütün yeniden oluşturulamaz. Dolayısıyla parçalama faaliyeti temel düzeyde uygulanabilir. *Eş parçalama* faaliyeti ise bütünün belli bir ortak özelliğe göre sınıflanarak parçalara ayrılmasını ve parçaların birbirine özdeş olduğunu ifade etmektedir. Şekil 2.8.'de aynı anda parçalama faaliyetinin nasıl gerçekleştirilebileceğine ilişkin bir örnek sunulmuştur. Bu örnek incelendiğinde alan modelinin noktalı zemin üzerinde tekil birimlerin örtük verilmesi sebebiyle toplamda 24 birimkarelik alandan oluşan model üzerinde 3/4'ü temsil edecek şekilde 18 birimkarenin sıralı bir şekilde oluşturulabileceği de parçaların eşit

ancak birimlerin özdeş olmadığı şekilde aynı anda parçalama faaliyeti kapsamında değerlendirilebilir.



Şekil 2.8. Aynı anda parçalama faaliyeti

Şekil 2.8.'de verilen örneğe göre aynı anda parçalama faaliyeti sonucunda oluşan parçaların özdeş olmadığı ve tekrarlanabilir birim özelliğini de taşımadığı görülmektedir. Dolayısıyla öğrenci tekrarlanabilir birim kavramını henüz kazanmadığından ne bileşik birimleri alt birimlerine ayırabilir ne de birimleri tekrarlayarak yeni birimler oluşturabilir. Şekil 2.9.'da ise aynı anda parçalama faaliyetinin daha gelişmiş hali olan eş parçalama faaliyetinin aynı soru bağlamında nasıl gerçekleştirilebileceğine ilişkin bir örnek sunulmuştur.



Şekil 2.9. Eş parçalama faaliyeti

Şekil 2.9.'da görüldüğü gibi eş parçalama faaliyetinde özdeş alt birimler oluşturulabilir. Aynı zamanda bu birimlerin tekrarlanabilir birimler olması farkındalığı ile bütün yeniden oluşturulabilir.

Pothier ve Sawada (1990) kesirler bağlamında eş parçalama faaliyetini bir nesneyi veya nesneler topluluğunu eşit parçalara bölme yeteneği olduğunu belirterek, bu faaliyetin tanımlanan birimlere göre değişiklik gösterdiğini vurgulamıştır (s. 12). Bunun yanı sıra Pothier ve Sawada'ya (1983) göre eş parçalama becerisi aşamalı bir gelişim süreci sonunda kazanılır. Bu aşamalı süreçte öğrenciler önce 2 ve katlarına, sonra 3 ve 5 gibi tek ve asal sayı katlarına eş parçalama faaliyetini uygulayabilirler. Lamon (1996) da

eş parçalama faaliyetinin bilişsel bir süreç olduğunu belirtmiştir. Lamon'a (1996) göre eş parçalama, öğrencinin *adil paylaşım* hakkındaki formal olmayan temel bilgileri üzerine rasyonel sayıları inşa ederken gerçekleşen deneyimlere dayalı sezgisel aktivitelerdir (s. 171).

Ayrıca Lamon (1996) birimleştirme ve eş parçalama faaliyetlerinin rasyonel sayılar için temel süreçler olduğunu ve rasyonel sayıları anlamadan önce bunların gelişmesi gerektiğini belirtmiştir (s. 171). Steffe ve Olive'e göre ise öğrenciler önce adil paylaşım amacıyla lineer nesneleri 2'ye sonra 3'e parçalama; ardından 5'e veya daha fazla sayıya parçalama amacıyla girişimlerde bulunurlar. Bu parçalama girişimleri zamanla niceliği koruma ve tekrarlanabilir birim kavramlarının gelişmesiyle *eş parçalama* faaliyetine dönüşür.

2.3.3. Yerleşik bütünden ayırma (Disembedding)

Yerleşik bütünden ayırma (*disembedding*) kesirsel faaliyeti, fiziksel veya zihinsel olarak bir bütünü yok etmeden ve bozmadan, parçalanmış bütünde yerleşik olan herhangi bir parçayı dışarı çıkarmaktır (Eliustaoğlu, 2016; McCloskey ve Norton, 2009; Steffe ve Olive, 2010). Örneğin, bir bütünün beş eşit parçaya ayrıldıktan sonra beşte birinin veya beşte üçünün nasıl görüneceğini zihinsel olarak canlandırmaktır. Burada bütünün bozulmaması çok önemlidir. Verilen bir uzunluk modelinde beşte üçlük bir parça kesir bütünden ayrılırken, üç parça seçilip geriye iki parçanın kaldığı düşünülmemelidir. Daha ziyade öğrenci üç tane parçayı yerleşik bütünden ayırırken, beş parçayı halen bir birim olarak korumalıdır.

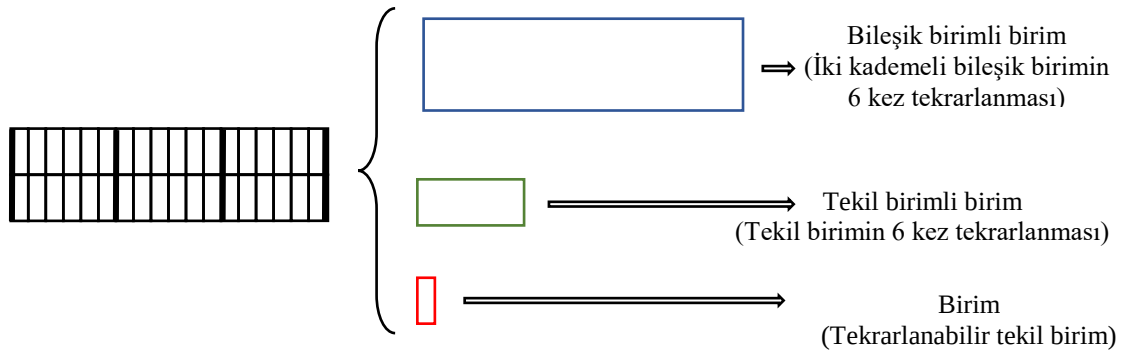
Bu kesirsel faaliyet aslında parça ile bütün arasındaki niceliksel ilişki için önemlidir. Aksi takdirde öğrencilerden bir çubuğun beşte üçünü göstermesi istendiğinde bütünün büyüklüğünden veya biriminden bağımsız olarak, herhangi üç parça gösterebilir veya çizebilir. Diğer bir deyişle parçaların büyüklüğünden ziyade parçaların sayısına odaklanılırsa problem doğru yorumlanamaz. Bu sebeple bütünde yerleşik parçayı ayırma faaliyeti çarpımsal ve orantısal muhakeme becerilerini de gerektirir.

Hackenberg (2013) bu kesirsel faaliyeti çarpımsal muhakeme bağlamında ele almış ve bu faaliyeti doğru bir şekilde gerçekleştiren öğrencilerin, bütünü *tekil birimli birim* (*birimlerin birimi*) şeklinde iki kademeli bileşik birim olarak düşünebildiklerini belirtmiştir. Bunun yanı sıra bütünden doğru parçayı ayırabilen öğrencilerin, bütünün

değişmezlik özelliğinin farkında olduğunu belirtmiş ve bu sayede alt birimleri tekrarlayarak bütünü yeniden oluşturabileceklerini vurgulamıştır (s. 540). Yerleşik parçayı ayırma kesirsel faaliyeti niceliği koruma düşüncesi ile yapılırsa *parça kesir şemasının* (PKŞ) varlığı söz konusudur. Aksi takdirde niceliğe bakmaksızın sadece bütünden parça sayısının ayırıldığı durumlarda *parça bütün şeması* (PBŞ) ortaya çıkar.

2.3.4. Tekrarlama (Iterating)

Kesirler bağlamında tekrarlama (iterating), bir bütünü veya miktar açısından daha büyük kesirleri oluşturmak için bir parçanın büyüklüğüne özdeş kopyalar üreten bir kesirsel faaliyettir (Eliustaoğlu, 2016; Hackenberg ve Tillema, 2009; McCloskey ve Norton, 2009; Steffe ve Olive, 2010). Daha basit bir tanımla birimlerin tekrarlanması denilebilir. Özellikle iki veya üç kademeli bileşik birimlerin oluşturulmasında ve birimlerin koordine edilmesinde tekrarlama faaliyeti oldukça önemlidir. Dolayısıyla tekrarlama faaliyeti sadece tekil birimlerle değil, Şekil 2.10.'da görüldüğü gibi bileşik birimlerle de yapılabilir.



Şekil 2.10. Birimlerin tekrarlanması ile yeni tekrarlanabilir bileşik birimlerin oluşturulması

Şekil 2.10. incelendiğinde tekrarlama faaliyeti ile yeni tekrarlanabilir birimlerin oluşturulması mümkündür. Bunun yanı sıra birimlerin anlamlandırılarak kesir büyüklükleri ile temsil edilmesi ise tekrarlanabilir birim kesri kavramını doğurur. Bu doğrultuda “ $1/n$ ” kesir büyüklüğü tekil birim olarak algılanır ve tekrarlanmasıyla bileşik birimler oluşturulabilir. Dolayısıyla bu durum birim kesirlerden basit kesirlerin ve bileşik kesirlerin çarpımsal ilişki kurularak oluşturulabileceğini gösterir.

2.3.5. Yinelemeli ayrıştırma (Splitting)

Steffe (2002) yinelemeli ayrıştırma (*splitting*) kesirsel faaliyetini, parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin birleşimi ve bileşik kesir kavramının inşasına açılan kapı olarak tanımlamaktadır (s. 288). Ayrıca Steffe (2002) yinelemeli ayrıştırma faaliyeti için, parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin ardışık/sıralı gerçekleşmesinden ziyade eş zamanlı olarak aktive edildiği bir zihinsel kesirsel faaliyet olduğunun altını çizmiştir. Sadece parçalama veya sadece tekrarlama faaliyetinin yetersiz kaldığı durumlarda öğrencinin daha karmaşık olan yinelemeli ayrıştırma kesirsel faaliyetini içselleştirmesi gerekir. Bu kesirsel faaliyetin nasıl çalıştığını anlamak için literatürde şu örnek soruya atıf yapılmaktadır: (Belli bir niceliğe sahip herhangi bir çubuk gösterilerek) Bu benim çubuğumsa ve benim çubuğum senin çubuğunun beş katı kadar büyüklükteyse senin kendi çubuğunun nasıl olduğunu gösterir misin? Verilen bu soruda “*beş katı büyük*” ifadesi öğrencinin zihninde tekrarlama faaliyetine işaret etse de öğrenciler gösterilen çubuğu beş kez tekrarlayıp yeni bir şekil üretmesiyle problemi yanlış yorumlayabilir. Ancak yinelemeli ayrıştırma kesirsel faaliyeti bu ve benzeri problemler için bilişsel olarak birim ölçülerini atamış ve bununla ilişkili olarak parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlı olarak aktive etmiş olmalıdır.

Bu duruma ek olarak literatürde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini gerçekleştirebilen öğrencinin parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin birbirinin tersi eylemler olduğuna dair farkındalığa sahip olduğuna ilişkin görüşler mevcuttur. Aynı zamanda literatürde yinelemeli ayrıştırma kesirsel faaliyetinin üç kademeli bileşik birimlerle çalışmayı da gerektirdiğini gösteren çalışmalar görülmüştür. Bu bağlamda yinelemeli ayrıştırma kesirsel faaliyetini içselleştirebilen öğrencilerin “1” biriminin tekrarı ile bileşik kesir oluşturması ve bileşik kesirlerde birimleştirme ve birim koordinasyonu faaliyetlerini de daha aktif bir şekilde gerçekleştirmesi beklenmektedir.

Araştırma kapsamında incelenen kesirsel faaliyetlere ilişkin bilgiler ve aktifleştirildiği beklenen durumlar Tablo 2.11.’de verilmiştir.

Tablo 2.11. Kesirsel faaliyetler

Kesirsel faaliyetler	Açıklama	Faaliyetin aktifleştirildiği duruma örnek
Birimleştirme	Bir nesne veya nesneler topluluğunu bir birim veya bütün olarak düşünmek	İki altıgenin bir bütün olarak ele alınması (örüntü bloklarında olduğu gibi)
Birim koordinasyonu	Bileşik birimler arası ilişkileri anlamlandırmak ve aktivite öncesinde veya esnasında kademeli birimler arasındaki geçişleri sağlamak	Beşte üçlük bir parça kesri birim kesrin üç kez tekrarı şeklinde düşünüldüğünde aynı zamanda bütünün de birim kesrin beş kez tekrarı olduğu düşüncesinin koordine edilmesi
Parçalama	Aynı anda parçalama	Bir pizzanın dört kişi arasında paylaşılması
	Eş parçalama	Üç farklı pizzanın dört kişi arasında paylaşılması (herkesin farklı pizzalardan birer dilim alması)
Yerleşik bütünden ayırma	Fiziksel veya zihinsel olarak bütünü yok etmeden ve bozmadan, parçalanmış bütünden yerleşik herhangi bir parçanın bütün dışına çıkarmak ve nasıl görüldüğünü zihinde canlandırmak	Pizza dört parçaya eşit veya özdeş olarak ayrıldıktan sonra, pizzanın dörtte üçünün nasıl görüneceğinin hayal edilmesi
Tekrarlama	Bir parçanın özdeş kopyalarını üretmek için parçayı tekrarlamak	Beşte üçlük bir parça kesrini belirlemek için (kesir çubuklarında olduğu gibi) beşte birlik parçanın üç kez yinelenmesi
Yinelemeli ayırıştırma	Parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlı kullanma	“Bu çubuk, başka bir çubuğun beş katı kadardır. Diğer çubuğu çiz.” probleminde olduğu gibi eş zamanlı olarak parçalama ve yineleme faaliyetlerini zihinsel olarak aktifleştirmek

Not: “Using Students’ Mathematics Using Steffe’s Fraction Schemes,” (McCloskey ve Norton, 2009, s. 46) çalışmasının genişletilmiş halidir.

2.4. Matematik Öğretim Programlarında Kesirler ile İlgili Kazanımlar

Kesir şemalarının gelişimi ile matematik öğretim programlarındaki kesir ile ilgili kazanımlar yakından ilişkilidir. Dolayısıyla araştırma 2017-2018 eğitim öğretim yılında yürütülmesine karşın yenilenen ve yenilenmeden önce kullanılan olmak üzere, ilkökul matematik öğretim programları (2015 ve 2018) ile ortaokul matematik öğretim programları (2013 ve 2018) bir arada incelenmiştir. Bu kapsamda ilkökul 1. sınıftan ortaokul 8. sınıfa kadar olan kesirlerle ilgili kazanımlara Tablo 2.12.’de yer verilmiştir.

Tablo 2.12. İlkokul ve ortaokul matematik öğretim programlarındaki kesirler ile ilgili kazanımlar

	2015 MÖP (İlkokul 1., 2., 3. ve 4. sınıflar için) ve 2013 MÖP (Ortaokul 5., 6., 7. ve 8. sınıflar için)	2018 MÖP (İlkokul ve ortaokul 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7. ve 8. sınıflar için)
1. sınıf	M1.1.22. Bütün, yarım ve çeyreği modeller üzerinde gösterir; bütün, yarım ve çeyrek arasındaki ilişkiyi açıklar.	M.1.1.4.1. Bütün ve yarımı uygun modeller ile gösterir, bütün ve yarım arasındaki ilişkiyi açıklar.
2. sınıf	M2.1.25. Verilen bütün, yarım ve çeyrek modellerinin kesir gösterimlerini kullanır. M2.1.26. Pay, payda ve kesir çizgisini, kullanılan örnekler üzerinden açıklar.	M.2.1.6.1. Bütün, yarım ve çeyreği uygun modeller ile gösterir; bütün, yarım ve çeyrek arasındaki ilişkiyi açıklar.
3. sınıf	M3.1.28. Bir bütün eş parçalara ayırarak eş parçalardan her birinin birim kesir olduğunu belirtir. M3.1.29. Pay ve payda arasındaki ilişkiyi açıklar. Pay ve payda arasındaki parça-bütün ilişkisi vurgulanır. M3.1.30. Nesne topluluklarının birim kesrini tanır ve bulur. M3.1.31. Payı paydasından küçük kesirler elde eder. M3.1.32. Paydası 10 ve 100 olan kesirlerin birim kesirlerini gösterir.	M.3.1.6.1. Bütün, yarım ve çeyrek modellerinin kesir gösterimlerini kullanır. M.3.1.6.2. Bir bütün eş parçalara ayırarak eş parçalardan her birinin birim kesir olduğunu belirtir. M.3.1.6.3. Pay ve payda arasındaki ilişkiyi açıklar. M.3.1.6.4. Paydası 10 ve 100 olan kesirlerin birim kesirlerini gösterir. M.3.1.6.5. Bir çokluğun, belirtilen birim kesir kadarını belirler. M.3.1.6.6. Payı paydasından küçük kesirler elde eder.
4. sınıf	M4.1.27. Basit, bileşik ve tam sayılı kesri tanır ve modellerle gösterir. M4.1.28. Birim kesirleri karşılaştırır ve sıralar. M4.1.29. Bir çokluğun belirtilen bir basit kesir kadarını belirler. M4.1.30. Paydaları aynı ya da birbirinin katı olan en çok üç kesri karşılaştırır. M4.1.31. Paydaları eşit kesirlerle toplama ve çıkarma işlemi yapar. M4.1.32. Kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerini gerektiren problemleri çözer.	M.4.1.6.1. Basit, bileşik ve tam sayılı kesri tanır ve modellerle gösterir. M.4.1.6.2. Birim kesirleri karşılaştırır ve sıralar. M.4.1.6.3. Bir çokluğun belirtilen bir basit kesir kadarını belirler. M.4.1.6.4. Paydaları eşit olan en çok üç kesri karşılaştırır. M.4.1.7.1. Paydaları eşit kesirlerle toplama ve çıkarma işlemi yapar. M.4.1.7.2. Kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerini gerektiren problemleri çözer.
5. sınıf	5.1.3.1. Birim kesirleri sıralar. 5.1.3.2. Birim kesirleri sayı doğrusunda gösterir. 5.1.3.3. Tam sayılı kesrin, bir doğal sayı ile bir basit kesrin toplamı olduğunu anlar ve tam sayılı kesri bileşik kesre, bileşik kesri tam sayılı kesre dönüştürür. 5.1.3.4. Bir doğal sayı ile bir bileşik kesri karşılaştırır. 5.1.3.5. Sadeleştirme ve genişletmenin kesrin değerini değiştirmeyeceğini anlar ve bir kesre denk olan kesirler oluşturur. 5.1.3.6. Paydaları eşit veya birinin paydası diğerinin katı olan kesirleri sıralar. 5.1.3.7. Bir çokluğun istenen basit kesir kadarını ve basit kesir kadarı verilen bir çokluğun tamamını birim kesirlerden yararlanarak hesaplar.	M.5.1.3.1. Birim kesirleri sayı doğrusunda gösterir ve sıralar. M.5.1.3.2. Tam sayılı kesrin, bir doğal sayı ile bir basit kesrin toplamı olduğunu anlar ve tam sayılı kesri bileşik kesre, bileşik kesri tam sayılı kesre dönüştürür. M.5.1.3.3. Bir doğal sayı ile bir bileşik kesri karşılaştırır. M.5.1.3.4. Sadeleştirme ve genişletmenin kesrin değerini değiştirmeyeceğini anlar ve bir kesre denk olan kesirler oluşturur. M.5.1.3.5. Payları veya paydaları eşit kesirleri sıralar. M.5.1.3.6. Bir çokluğun istenen basit kesir kadarını ve basit kesir kadarı verilen bir çokluğun tamamını birim kesirlerden yararlanarak hesaplar. M.5.1.4.1. Paydaları eşit veya birinin paydası diğerinin paydasının katı olan iki kesrin toplama ve çıkarma işlemini yapar ve anlamlandırır.

Tablo 2.12. (Devam) *İlkokul ve ortaokul matematik öğretim programlarındaki kesirler ile ilgili kazanımlar*

5. sınıf	5.1.4.1. Paydaları eşit veya birinin paydası diğerinin katı olan iki kesrin toplama ve çıkarma işlemini yapar ve anlamlandırır. 5.1.4.2. Paydaları eşit veya birinin paydası diğerinin katı olan kesirlerle toplama ve çıkarma işlemleri gerektiren problemleri çözer.	M.5.1.4.2. Paydaları eşit veya birinin paydası diğerinin paydasının katı olan kesirlerle toplama ve çıkarma işlemleri gerektiren problemleri çözer ve kurar.
6. sınıf	6.1.4.1. Kesirleri karşılaştırır, sıralar ve sayı doğrusunda gösterir. 6.1.4.2. Kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapar. 6.1.4.3. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır. 6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır. 6.1.4.5. Bir doğal sayıyı bir birim kesre ve bir birim kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır. 6.1.4.6. Bir doğal sayıyı bir kesre ve bir kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır. 6.1.4.7. İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır. 6.1.4.8. Kesirlerle yapılan işlemlerin sonucunu tahmin eder. 6.1.4.9. Kesirlerle işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer.	M.6.1.5.1. Kesirleri karşılaştırır, sıralar ve sayı doğrusunda gösterir. M.6.1.5.2. Kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapar. M.6.1.5.3. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır. M.6.1.5.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır. M.6.1.5.5. Bir doğal sayıyı bir kesre ve bir kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır. M.6.1.5.6. İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır. M.6.1.5.7. Kesirlerle yapılan işlemlerin sonucunu tahmin eder. M.6.1.5.8. Kesirlerle işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer.
7. sınıf	7.1.2.1. Rasyonel sayıları tanır ve sayı doğrusunda gösterir. 7.1.2.2. Rasyonel sayıları ondalık gösterimle ifade eder. 7.1.2.3. Devirli olmayan ondalık gösterimleri rasyonel sayı olarak ifade eder. 7.1.2.4. Rasyonel sayıları karşılaştırır ve sıralar. 7.1.3.1. Rasyonel sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapar. 7.1.3.2. Rasyonel sayılarla çarpma ve bölme işlemlerini yapar. 7.1.3.3. Rasyonel sayıların kare ve küplerini hesaplar. 7.1.3.4. Rasyonel sayılarla çok adımlı işlemleri yapar. 7.1.3.5. Rasyonel sayılarla işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer.	M.7.1.2.1. Rasyonel sayıları tanır ve sayı doğrusunda gösterir. M.7.1.2.2. Rasyonel sayıları ondalık gösterimle ifade eder. M.7.1.2.3. Devirli olan ve olmayan ondalık gösterimleri rasyonel sayı olarak ifade eder. M.7.1.2.4. Rasyonel sayıları sıralar ve karşılaştırır. M.7.1.3.1. Rasyonel sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapar. M.7.1.3.2. Rasyonel sayılarla çarpma ve bölme işlemlerini yapar. M.7.1.3.3. Rasyonel sayılarla çok adımlı işlemleri yapar. M.7.1.3.4. Rasyonel sayıların kare ve küplerini hesaplar. M.7.1.3.5. Rasyonel sayılarla işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer.
8. sınıf	8.1.3.4. Gerçek sayıları tanır, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir.	M.8.1.3.8. Gerçek sayıları tanır, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir.

Not: Yenilenen matematik öğretim programı (MEB, 2018), 2017-2018 eğitim öğretim yılında yalnızca 1., 5. ve 9. sınıflarda taslak olarak uygulanmış; 2018-2019 yılından itibaren ilköğretim ve ortaokulun tüm sınıf düzeylerinde uygulanmaya başlanmıştır.

Tablo 2.12. incelendiğinde ilkököl ve ortaoköl matematik öğretim programları kesirler bağlamında incelendiğinde eski ve yeni programlar arasında belirgin bir farka rastlanılmamıştır. Ancak genel olarak 1. sınıftan bütün, yarım ve çeyrek gibi büyüklükler ile başlanarak, ilk kez 4. sınıfta bileşik kesir ve birim kesirlerin anlamlandırılmasına yönelik kazanımlara yer verildiğı görölmektedir. 5. sınıftan itibaren ise sayı doğrusu kullanımının vurgulandığı ancak kesrin daha çok parça bütün yorumuna odaklanıldığı görölmüştür. Bunların yanı sıra 6. sınıfta kesirler üzerinde aritmetik işlemlerin; 7 sınıfta ise rasyonel sayılar üzerinde aritmetik işlemlerin yoğunlaştığı dikkat çekmiştir. Öte yandan eski ve yeni programlarda da 8. sınıf öğrencilerinden rasyonel ve irrasyonel sayıları ilişkilendirmeleri beklendiğı görölmektedir. Dolayısıyla ortaoköl öğrencilerinin araştırma kapsamında farklı modeller ile sunulan birim kesir, basit kesir ve bileşik kesirlere yönelik kesir problemlerine doğru yanıt vermeleri beklenmektedir.

2.5. İlgili Literatür

Araştırmaya konu olan kesir şemalarına ve kesir şemaları bileşenleri olan kesirsel faaliyetlere ilişkin literatürde kısıtlı araştırmaların olduğı saptanmıştır. Halihazırda literatürde olan çalışmalar kesir şemalarının kavramsal çerçevesini oluşturacak yönde olup bir önceki bölümde kavramsal çerçeve bağlamında araştırmacıların görüşleri ve araştırma sonuçlarına yer verilmiştir. Dolayısıyla bu bölümde kesir şemaları ve kesirsel faaliyetler kapsamında kısıtlı sayıdaki çalışmalardan ziyade araştırma konusu ile ilişkili olan ve kesir öğrenim sürecine yönelik yürütölen literatürdeki diğeri çalışmalara yer verilmiştir.

Araştırmanın kavramsal çerçevesini oluşturan Steffe ve Olive yirmi yılı aşkın bir süredir birlikte öğrencilerin kesir bilgilerinin zihinde nasıl oluştüğünü ve geliştiğini kesir şemaları ile modellemeye çalışmışlardır. Öğrencilerin kesir şemalarını üç yıl süren bir periyotta boylamsal çalışarak 3. sınıftan 5. sınıfa kadar öğretim deneyleri gerçekleştirerek sonuçlarını kitap haline getirerek yayınlamışlardır (Steffe ve Olive, 2010). Steffe ve Olive'in asıl hipotezleri kesir şemalarının öğrencilerin sayı dizileri (*number sequences*) şemalarının yeniden düzenlenmesiyle oluştğı yöndedir. Bu bağlamda öğrencilerin sayı dizileri geliştikçe kesir şemalarının da daha gelişmiş halde yapılandığı ve daha gelişmiş kesir problemlerini çözebildiğini belirtmişlerdir. Aynı zamanda bu süreçte şemaların bileşenleri olarak kesirsel bilginin yapılandırılmasında etkili olan kesirsel faaliyetlerin

(*mental actions/operations*) kesir şemalarının gelişiminde nasıl rol aldıklarına dair sonuçları matematik eğitimi alanına yeni bir bakış açısı kazandırmıştır.

Bu doğrultuda alana kazandırılan bu yeni bakış açısıyla birlikte uluslararası literatürde kesirler konusunda Steffe ve Olive'in kavramsal çerçevesine dayanarak benzer yöntemlerle ve benzer araştırma sorularıyla yürütülen çalışmaların (Boyce ve Norton, 2016; Hackenberg, 2007; McCloskey ve Norton, 2009; Norton, 2008) artığı görülse de halen kısıtlı olduğu ve literatürde daha fazla araştırmaya ihtiyaç olduğu görülmüştür. Nitekim Steffe ve Olive öğretim deneylerini JavaBars isimli bir yazılım aracıyla gerçekleştirmişlerdir ve literatürde diğer araştırmacıların çoğunun da bu yazılımı kullandıkları görülmekte ve öğretim deneylerinde kullanılan kesir problemlerinin de genellikle aynı olduğu tespit edilmiştir. Aslında Steffe ve Olive'in kavramsal çerçevesine göre öğretim deneylerinde kullandıkları problemlerin sürekli nicelikler üzerinde olması ve öğrencilerin sayı dizisi şemalarının sürekli nicelikler üzerinden kesir bilgisinin oluşmasına yardımcı olduğu ileri sürülmektedir. Bu doğrultuda literatür incelendiğinde sürekli nicelikler dışında ayırık olan küme modeli (Eliustaoğlu, 2016) ve sayı doğrusu modeli ile (Tunç-Pekkan, 2015) öğrencilerin kesir şemalarını ve kesirsel faaliyetlerini inceleyen kısıtlı araştırmaların olduğu görülmüştür. Nitekim kesir kavramının anlamlı öğrenimi için öğrencilerin hem farklı nicelikler üzerinde kesir problemlerini çözebilmeleri hem de kesir temsilini aynı zamanda birer sayı olarak anlamlandırmaları gerekmektedir. Dolayısıyla bu araştırma kapsamında sürekli modellerin yanı sıra hem küme modeli hem de sayı doğrusu modeli ile kesir şemalarının ve kesirsel faaliyetlerin incelenmesi literatürdeki ihtiyacı gidermeye katkı sağlayacak niteliktedir.

Kesir şemalarına kıyasla literatürde kesirsel faaliyetlere ilişkin yürütülen çalışmaların daha fazla olduğu görülmektedir. Özellikle birimleştirme (*unitizing*) ve parçalama (*partitioning*) faaliyetleri ile ilgili çalışmaların çok uzun yıllardır yürütüldüğü ve bu faaliyetlerin kesir ile rasyonel sayıları anlamlandırma sürecindeki rollerinin ileri sürüldüğü araştırma sonuçlarının literatüre önemli katkılar sağladığı görülmüştür. Bu bağlamda Lamon'a (1996) göre rasyonel sayıları anlamaya yönelik iki farklı temel aşama vardır; bunlardan biri birimleştirme süreci diğeri ise parçalama sürecidir (s. 171). Lamon'a göre kesir şemasının inşası için gerekli olan önemli kesirsel faaliyetlerden biri olan birimleştirme işlemi (*unitizing*), belli bir miktara ya da nesneler topluluğuna bilişsel olarak ölçü birimi atamayı gerektirir. Bu bağlamda Lamon (1996) birimleştirme için hem paylaşırma sürecinin öncesinde, esnasında veya sonrasında ortaya çıkan ölçü birimini

belirleyen bilişsel bir görev olduğunu hem de bilişsel bir süreci tanımladığını ifade etmiştir. Nitekim NCTM'in (2000) yayınladığı standartlara göre 3-5. sınıf öğrencilerinden beklenen birimleştirme faaliyeti, ortaokul düzeyindeki kesir şema oluşum sürecinde önemli olan diğer kesirsel faaliyetler için bir ön koşul görevi üstlenmektedir (s. 392). Diğer yandan Lamon'a (1996) göre öğrenciler kesirlerin karakteristik özelliklerini ve farklı yorumlarını bileşik birim oluşturarak veya bileşik birimleri parçalayarak anlayabilirler (s. 192). Bu bağlamda parçalama faaliyetinin ise farklı kesir yorumlarını üretme sürecinde her zaman önemli bir role sahip olduğunu vurgulamıştır. Öğrencilerin bu süreçte kesrin birimini esnek bir şekilde kullanmayı ve belirlenen niceliğe ve birimlere göre parçalama faaliyetini gerçekleştirmeleri gerekir. Nitekim öğrencilerden bu faaliyetleri uygularken verilen durumun sürekli veya ayrık modellere göre yahut basit veya bileşik kesirlere göre uyarlamaları ve problemin bağlamına uygun stratejiler seçmeleri beklenir. Ancak Behr ve diğerleri (1983) *Rational Number Project* kapsamında yürüttükleri araştırmaların sonuçlarına göre ortaokul öğrencilerinin özellikle sürekli ve ayrık modellerde birimleştirme yapmanın ayırma varamadıkları ve birden fazla nesnenin ayrık halde birim olarak verildiği durumlarda zorlandıkları tespit edilmiştir.

Literatür incelendiğinde parçalama faaliyetinin de farklı kesir yorumlarını üretme sürecinde her zaman önemli bir role sahip olduğu vurgulanmaktadır (Charalambous ve Pitta Pantazi, 2007; Izsák, 2008; Izsák, Tillema ve Tunç-Pekkan, 2008). Bilhassa kesrin parça bütün, bölüm ve ölçme yorumları bağlamında kesir şemasının oluşum sürecinde birimleştirme ve parçalama faaliyetlerinin önemli olduğu görülmektedir. Öğrencilerin farklı kesir yorumlarında kesrin birimini esnek bir şekilde kullanmaları ve belirlenen birime göre parçalama faaliyetini gerçekleştirmeleri gerekir. Bu işlemleri uygularken verilen durumun sürekli veya ayrık modellerle kullanılması ile basit veya bileşik kesirlerle olmasına göre dikkat edilmeli, problemin bağlamına uygun stratejiler seçilmesi gerekmektedir. Hackenberg (2007)'un öğrencilerin bileşik kesri yapılandırabilmeleri için üç kademeli birim kavramını (birimin biriminin birimi) içselleştirmeleri gerektiği aksi takdirde 1'den büyük kesirlerle işlem yapabilseler bile bileşik kesir kavramını üretmediklerine dair bulguları bu durumu desteklemektedir. Nitekim Steffe ve Olive (2010) de birimleştirme ve parçalama faaliyetlerinin birbirleriyle yakından ilişkili olduğunu ve parçalama girişimlerinin öğrencilerin parçalara yükledikleri birim ölçüleri dikkate alınarak yapıldığını vurgulamıştır (s. 75). Dolayısıyla öğrencilerin bileşik

kesirleri yapılandırma süreçlerinde etkili olan birimleştirme ve parçalama faaliyetlerinin şemalar bağlamında nasıl ve ne ölçüde ortaya çıktığının incelenmesi literatüre katkı sağlayacak yöndedir.

Literatürde kesir şemaları ve kesirsel faaliyetlerin yanı sıra kesir öğretim süreçlerinde kullanılan kesir modelleri bağlamında yürütülen araştırmaların da olduğu görülmüştür. Araştırmalarda kesir problem durumlarının sıklıkla alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri bağlamında sunulduğu görülse de farklı modellerin farklı kesirsel faaliyetler bağlamında ele alındığı araştırmaların az sayıda olduğu görülmektedir. Deliyianni ve diğerleri (2008) ortaokul öğrencilerinin farklı modeller üzerinde kesirlerde toplama işlemi ve problem çözme becerilerini incelemek amacıyla yürüttükleri bir araştırmada sayı doğrusunun, kesirlerle çalışırken diğer modellerin de üstesinden gelmek için farklı bir bilişsel süreci etkinleştirdiği, bunun yanında kesirlerde toplama işlemi için de önemli bir model olduğu sonucuna ulaşmışlardır (s. 405). Tunç-Pekkan (2015) ise ortaokul öğrencilerinin üç farklı model (*daire, dikdörtgen, sayı doğrusu*) ile birlikte verilen kesir problemlerine verdikleri yanıtları incelemiştir. Bu araştırma sonucunda öğrencilerin daire ve dikdörtgen alan modeli ile verilen sorulara benzer şekilde (daireyi de dikdörtgen gibi yorumlayarak) parça bütün yorumunu kullandıkları; ancak sayı doğrusu ile verilen sorularda diğer modellere göre daha düşük performans gösterdikleri ortaya konmuştur. Oysa ortaokul öğrencileri kavram düzeyi olarak daha üstbiliş beceri gerektiren kesir şemalarını inşa etmeleri için, çoğunlukla parça bütün yorumuyla yaklaşıldığı alan ve uzunluk modellerinden ziyade ölçme yorumunun da kazandırılabilceği sayı doğrusu gibi modeller üzerinde çalışmaları da gerekmektedir. Bu durumu destekler nitelikte Behr ve diğerleri (1983) *Rational Number Project* kapsamında yürüttükleri araştırmalarda öğrencilerin parça bütün yorumunu en kolay kesir yorumu anlamlandırırken; ölçme yorumu ise kesir en zor yorumunu şeklinde algıladıkları sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca Eliustaoğlu (2016) 6. sınıfların kesir şemalarını alan, uzunluk ve küme modeli olmak üzere üç farklı model bağlamında incelemiştir. Araştırmasının bulgularından birisi alan ve küme modelleri öğrencilerin doğal sayılar bilgilerinin kullanımını geliştirmekteyken, uzunluk modeli öğrencilerin kesir şemalarının yapılanması sürecinde bir sıçrama rolü üstlendiği yönündedir.

Öte yandan Yanık, Holding ve Flores'in (2008) birimleştirmenin kesrin ölçme yorumuna ilişkin önemini sayı doğrusu modeli ile incelemek amacıyla yürüttükleri araştırmanın sonucuna göre, birimleştirme faaliyetinin gerçekleştirilemediği durumlarda

öğrenciler kesirleri sayı doğrusu üzerine yerleştirmekte de güçlük yaşamamışlardır. Bunun sebebi (0-1) aralığı haricinde başka aralıklarda verilen (örn.0-3) sayı doğrusunun da öğrenciler tarafından “bütün” (1-birim) olarak görülmesi ve problem çözümüne uzunluk modeli gibi parça bütün yorumu ile yaklaşımlarıdır. Burada önemli olan bir başka mesele ise birimin 1’den büyük olabileceği fikrinin öğrenciler tarafından fark edilmemesidir. Dolayısıyla böyle bir durumda öğrenciler hem kesrin yorumları hem bileşik kesir üretme hem de sayı doğrusu modeli ile çalışma gibi kesirler için son derece önemli olan bu konularda problem yaşıyorlar demektir. Dolayısıyla bu araştırma kapsamında ortaokul öğrencilerinin kesir problemlerinde kesirsel faaliyetleri farklı kesir modelleri üzerindeki -özellikle sayı doğrusu modeli- uygulamalarının öğrencilerin kesir şemalarını nasıl ve ne ölçüde etkilediğinin ortaya konması literatürde ihtiyaç duyulan diğer bir konudur.

Ayrıca Stafylidou ve Vosniadou (2004) öğrencilerin kesir kavramını öğrenmede neden zorlandıklarını incelemek amacıyla yürüttükleri bir çalışmada öğrencilerin a/b kesir büyüklüğüne a ve b birbirinden bağımsız iki doğal sayıyı temsil edecek şekilde anlam yükledikleri ve bunun sebebinin doğal sayılar kümesi ile kesirler arasındaki bazı yapısal ve işlemsel farklılıkların olduğunu ortaya koymuşlardır (s. 505). Özellikle kesirlerdeki sembolik gösterim farklılığı, doğal sayılardaki ayrıklık özelliğine karşı kesirlerdeki yoğunluk özeliği (iki sayı arasında sonsuz sayı olma durumu), doğal sayılarda tekil birimin en küçük sayı olan “1”e karşı kesirlerde belirli bir birimin olmaması gibi anlamlandırılması zor yapısal farklılıkların olduğunu belirtmiştir. Bunun yanı sıra kesirlerde aritmetik işlemlerin uygulanmasında doğal sayılar gibi belirli bir düzenin olmaması (çarpma işlemi hep daha büyük sayı elde eder) gibi işlemsel farklılıkların da olduğu belirtilmiştir. Stafylidou ve Vosniadou’nun araştırma sonuçlarına göre doğal sayılar ile kesirler arasındaki bu yapısal ve işlemsel farklılıkların anlaşılabilmesi durumunda öğrencilerin doğal sayı kümesine ait mevcut bilgilerini kesir problemleri üzerine uyguladıkları ve doğal sayı yanılıgına sahip oldukları ortaya konmuştur. Bu bağlamda Stafylidou ve Vosniadou öğrencilerin doğal sayılar kümesine ilişkin mevcut bilgilerini kavramsal değişim (*conceptual change*) bağlamında yeniden düzenlemeleri gerektiğini ileri sürmüştür. Nitekim bu çalışmada kullanılan kavramsal çerçeveye göre kesir kavramına ilişkin bilgilerinin oluşumu ve gelişimi de öğrencilerin doğal sayılara ilişkin mevcut sayı dizilerinin (*number sequences*) yeniden

düzenlenmesiyle zihinde şemalar aracılığıyla yapılandırılma süreciyle gerçekleşebileceği yöndedir.

Van Hoof ve diğerleri ise (2013) ilköğretim eğitimini tamamlamış, ortaöğretim öğrencilerinin hala doğal sayı yanlışlığına sahip olup olmadıklarını incelemek amacıyla her bir soruda iki kesir verilmek üzere toplamda 190 sorunun öğrenciler tarafından karşılaştırma yapılmasını istemişlerdir (s. 160). Bu iki kesirden birisi doğal sayı bilgisiyle çözülebilecek ve karşılaştırılması doğal sayılarla uyuşan kesir iken; diğer kesir yalnızca doğal sayı bilgisiyle çözülemeyecek olup karşılaştırılması doğal sayılarla uyuşmayan kesirdir. Araştırmanın sonuçlarına göre uyuşan kesirlere verilen doğru yanıtlar, uyuşmayan kesirler için yapılan doğru karşılaştırmalara göre daha yüksek başarı yüzdesine sahip olduğu ve öğrencilerin uyuşmayan kesirler için ayırdıkları sürenin diğer sorulara göre daha fazla olduğu gözlemlenmiştir.

Benzer şekilde DeWolf ve Vosniadou (2011; 2015) yürüttükleri çalışmalarda öğretmen adaylarının kesir bilgilerini, birbirine yakın ve uzak olarak verilen uyuşan ve uyuşmayan kesirler üzerinde çalışmaları ile kesirlerde aritmetik işlemleri uygulamaları açısından incelenmişlerdir. Yapılan incelemelere göre araştırma sonuçları, öğretmen adaylarının birbirine yakın olan iki kesrin karşılaştırılmasında daha düşük performans sergilediklerini ve yetişkinlerde bile doğal sayı yanlışlığının kesirlerde aritmetik işlemlerin uygulanmasında kısıtlamaya sebep olduğunu ortaya koymuştur. Bunun yanı sıra öğretmen adayları ile yürütülen diğer araştırmalarda öğretmen adaylarının birim ile ilgili sıralama, karşılaştırma gibi durumlarda işlemsel performans başarısına sahip olsalar da birimi tanımlama, birimleştirme, kompozit birim oluşturma gibi birim kavramına ilişkin bilgi ve beceri gerektiren durumlarda kavramsallaştırmalarının kısıtlı olduğu sonucunu ortaya koymaktadır (Olanoff, Lo ve Tobias, 2014; Rosli, Gonzalez ve Capraro, 2011; Tobias, 2013; Tobias, Roy ve Safi, 2015). Ulusal literatürde ise Eroğlu (2012) Türkiye’de öğrencilerinin akademik başarısının oldukça yüksek olduğu üniversitelerden birinde öğretmen adayları ile yürüttüğü bir araştırmada öğretmen adaylarına ortaokul öğrencilerinin kesir sorulara verdikleri yanıtlar gösterilmiş ve öğrencilerin yaptıkları hatalar ile altında yatan sebepleri açıklamaları istenmiştir. Ancak öğretmen adaylarının yalnızca birkaç öğrencilerin yaptıkları hataların kaynağını, hangi bilginin eksik olduğunu açıklayabilmiştir.

Özetlemek gerekirse literatür incelendiğinde ilköğretimden yükseköğretime kadar olan süreç boyunca öğrencilerin kesir kavramını öğrenmede güçlük çektikleri

görülmektedir. Kesir kavramının öğrenilmesinde yaşanan güçlüklerin işlemsel bilgilerden ziyade kavramsal bilgilerin eksikliğinden kaynaklandığı görülmektedir. Öte yandan kesir bilgisinin kavramsal olarak anlamlandırılmasında bilhassa sayı doğrusu olmak üzere farklı kesir modelleri üzerinde yapılan uygulamaların incelenmesine yönelik araştırmaların sayısının artması gerekmektedir. Nihayetinde öğrencilerin kesirlerden rasyonel sayıları inşa etmeleri için sayı doğrusu modelinin tüm özelliklerinin hem doğal sayılar hem de kesirler ile ilişkilendirilmesi gerekmektedir. Literatüre bakıldığında kesrin kavramsal bilgi anlamında değerlendirilmesinde genellikle sayı doğrusu modelinde sıralama ve karşılaştırma görevlerinin verildiği görülmüştür. Bunun yanı sıra kesirsel faaliyetler bağlamında sayı doğrusu modelini inceleyen sadece bir tane araştırmaya rastlanılmıştır. Dolayısıyla bu araştırmada kesirsel faaliyetlerin sayı doğrusu modeli üzerindeki uygulamalarının incelenmesi kesir öğrenimi konusunda matematiik eğitimi alanında bu konudaki eksikliği giderebileceği düşünülmektedir. Bununla beraber bu araştırma kesirsel bilgisinin oluşumu ve gelişimi sürecinde şemalar bağlamında kesirsel faaliyetlerin farklı modeller üzerindeki yansımalarının incelenmesi kesir öğrenme ve öğretme süreçlerinde literatürdeki son yıllarda kazanılan yeni yaklaşımlar doğrultusunda farklı bir bakış açısı kazandırabilecek niteliktedir. Aynı zamanda bu araştırmanın ortaokuldaki tüm sınıf düzeyleri ile kesirsel gelişim araştırmaları yöntemiyle yürütülmesi araştırma sonuçlarının öğretim süreçleri dışında ortaokul öğretim programlarının tasarlanma süreçlerinde faydalı olabilir.

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırma deseni, katılımcılar, araştırmada kullanılan veri toplama araçları, pilot uygulama, veri toplama süreci ve elde edilen verilerin analizine yönelik detaylı açıklamalar yer almaktadır.

3.1. Araştırma Deseni

Bu çalışma gelişimsel araştırma (developmental research) türlerinden kesitsel araştırma (*cross-sectional*) ile desenlenmiş olup, çalışma kapsamında ortaokul öğrencilerinin 5., 6., 7. ve 8. sınıf düzeylerinde geliştirdikleri ve geliştirmekte oldukları kesir şemalarının incelenmesine odaklanılmıştır.

Şahin (2014) gelişimsel araştırmaların genellikle bireylerin veya grupların yaşa bağlı olarak değişen ve gelişen duygu, düşünce ve davranış değişikliklerini incelenmek amacıyla yürütülen çalışmalarda kullanıldığı belirtmiştir (s. 316). Çepni (2014) ise gelişimsel araştırmaları incelenen bir olgunun süreç içerisinde belirli zaman diliminde nasıl değiştiğine veya geliştiğine vurgu yapan ve “ne idi - ne oldu” gibi soruları yanıtlamaya fırsat sunan betimsel bir yöntem olarak tanımlamıştır (s. 80). Dolayısıyla gelişimsel araştırmaların asıl amacı belli bir olgunun doğal ortamda zamanla ortaya çıkması beklenen gelişim sürecinde öne çıkan karakteristik özellikleri betimlemektir. Ayrıca gelişimsel araştırmalar yaşa bağlı olarak bireylerde kavramların nasıl yapılandırıldığı ve öğrenmenin nasıl gerçekleştiği ile ilgili bilgiler verebildiğinden, literatürde bu yöntemin öğretim programlarının içeriklerinin hazırlanmasında araştırmacılara ve öğretmenlere ışık tutacağına inanılmaktadır (Campbell ve Thompson, 2007; Şahin, 2014; Şahin, İpek ve Ayas, 2008).

Gelişimsel araştırma türlerinden kesitsel araştırmalarda (*cross-sectional*) birbirine paralel olan farklı gruplar aynı zaman diliminde incelenirken; boylamsal araştırmalarda (*longitudinal*) ise aynı grup gelişim sürecinin farklı zaman dilimlerinde incelenir. Bu araştırma zaman, maliyet ve risk açısından boylamsal araştırmaya göre daha çok avantaj sağlayan kesitsel araştırma kapsamında yürütülmüştür. Kesitsel araştırmalar, belli bir zaman dilimi içerisinde mevcut bir durum hakkında anlık (*snapshot*) bilgi vermesinin yanı sıra araştırmacıya hem geçmişe dönük verileri hem de ileriye dönük verileri elde etme fırsatı sunmaktadır (Şahin, 2014, s. 318). Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin farklı sınıf düzeylerinde anlık durum tespiti yapılmak hedeflenmiştir. Böylelikle

öğrencilerin mevcut durumları hakkında fikir sahibi olunabileceği gibi sınıf düzeyleri arasında karşılaştırma yapma fırsatı elde edilmiştir.

Öte yandan Karasar (2009) kesitsel araştırma ile elde edilen sonuçların sanki aynı gruptan alınmış gibi yorumlanabileceğini ve gelişimin sürekliliğini yansıtabileceğini belirtmiştir (s. 80). Mann (2003) ise kesitsel araştırmaların belli bir olgu bağlamında yaygınlığı belirlemenin en iyi yolu olduğunu ve buna bağlı olarak gelecekteki deneysel araştırmalarda kullanılabilecek ilişkilerin daha titiz bir şekilde betimlenmesi noktasında yararlı olduğunu vurgulamıştır (s. 57).

3.2. Katılımcılar

Araştırmaya dahil edilen katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Patton'a (2018) göre amaçlı örneklemin mantığı ve gücü, derinlemesine çalışmak için bilgi bakımından zengin durumların seçilmesinde yatar (s. 230). Araştırma kapsamında incelenmek istenen kesir bilgisinin gelişim sürecinin öğrencilerde ortaya çıkması beklenen sınıf düzeyleri temel ölçüt alınarak belirlenmiştir. Bu bağlamda 2017-2018 yılında Türkiye'de kullanılan matematik dersi öğretim programında (MEB, 2013) belirlenen kazanımlar ve ilgili literatüre göre araştırmanın ortaokul 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencileriyle yürütülmesi uygun görülmüştür. Bu sayede kesir bilgisinin gelişim süreçleri açısından ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde (5., 6., 7. ve 8. sınıf) ortaya çıkan benzerliklerin ve farklılıkların karşılaştırılarak öne çıkan karakteristik özellikleriyle betimlenmesine olanak sağlanmıştır. Bu sebeple kesir bilgisinin gelişim süreçlerindeki karakteristik özelliklerin ortak örüntülerle betimlenerek yaygınlığının belirlenmesi amacıyla araştırmaya dahil edilen katılımcı sayısının fazla olmasına özen gösterilmiştir. Bu bağlamda Patton (2014) büyük farklılıklardan ortaya çıkan herhangi bir ortak örüntünün özellikle ilgi çekici ve bir ortamın veya fenomenin ortak boyutlarını ve temel deneyimlerini yakalamak adına değerli olduğunu belirtmiştir (s. 235).

Araştırmanın katılımcıları İstanbul ilinin Avrupa yakasında yer alan MEB'e bağlı üç ortaokuldan seçilmiştir. Okulların birbirine yakın nitelikte olması amacıyla okullardaki öğrenci sayısının derslik sayısına oranı (ortalama sınıf mevcudu) ve öğretmen sayısının öğrenci sayısına oranı okul seçme kriterleri olarak belirlenmiştir. Araştırmaya dahil edilen okulların belirlenen kriterlere göre mevcut bilgileri Tablo 3.1.'de verilmiştir.

Tablo 3.1. *Araştırma okullarının belirlenen kriterlere göre bilgileri*

	Öğretim şekli	Öğrenci sayısı	Derslik sayısı	Öğretmen sayısı	Ortalama sınıf mevcudu	Öğretmen / öğrenci oranı
A Okulu	İkili öğretim	964	14	36	34	%4
B Okulu	İkili öğretim	1779	23	73	39	%4
C Okulu	Tam gün	1224	31	54	39	%4

Araştırmanın veri toplama araçlarından yazılı değerlendirme aracı ilk aşama olarak üç ortaokulun 5., 6., 7. ve 8. sınıfta okuyan toplamda 770 öğrenciye uygulanmıştır. Yazılı değerlendirme aracındaki tüm soruların %70'inin altında bir oranla cevap veren öğrenciler araştırmaya dahil edilmemiştir. Bunun yanı sıra toplanan ilk verilerden elde edilen ön bulgulara göre herhangi bir şemaya sahip olmayan öğrenci verileri de araştırmaya dahil edilmemiştir. Verilerin ön değerlendirilmesinin ardından geriye kalan ve yazılı değerlendirme aracı uygulanan toplam 557 öğrenciden oluşan katılımcı grubuna ait bilgiler Tablo 3.2.'de verilmiştir.

Tablo 3.2. *Yazılı değerlendirme aracı uygulanan katılımcı grubu*

	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf	Toplam
A Okulu	39	49	59	34	181 (%33)
B Okulu	39	42	50	36	167 (%30)
C Okulu	43	60	46	60	209 (%37)
Toplam	121 (%22)	151 (%27)	155 (%28)	130 (%23)	557 (%100)

Araştırmanın ikinci aşamasında ise yazılı değerlendirme aracı ile toplanan veriler içerik analizine tabii tutulmuş ve araştırmanın ön bulguları elde edilmiştir. Elde edilen ön bulgulara göre araştırmanın verilerini çeşitlemek, desteklemek ve daha derinlemesine inceleme yapabilmek için ikinci veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış klinikler görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Maxwell'e (2018) göre araştırma sorularını en iyi şekilde cevaplandırmaya olanak sağlayacak en verimli ilişkilerin kurulabileceği grupların veya katılımcıların seçilmesi gerekir (s. 99). Bu bağlamda yarı yapılandırılmış klinik görüşmelere dahil edilen katılımcılar, araştırma kapsamında incelenen şemalardan en az biri hakkında daha derinden ve daha detaylı bilgiler sunabileceği ve farklı sınıf düzeylerindeki bilişsel gelişimi yansıtabileceği düşünülen kişilerden seçilmiştir. Ölçüt

örnekleme yöntemiyle seçilerek yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen toplamda 52 kişilik katılımcı grubuna ilişkin bilgiler Tablo 3.3.'te görülebilir.

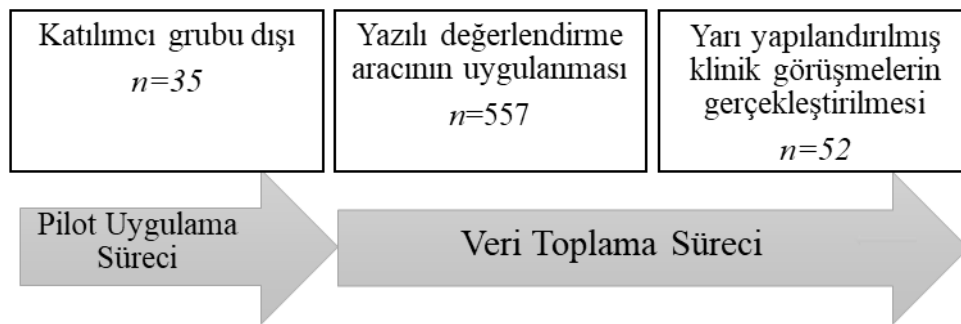
Tablo 3.3. Yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen katılımcı grubu

	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf	Toplam
A Okulu	5	6	5	5	21 (%40)
B Okulu	3	3	4	3	13 (%25)
C Okulu	4	5	5	4	18 (%35)
Toplam	12 (%23)	14 (%27)	14 (%27)	12 (%23)	52 (%100)

Yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen katılımcı grubunun, yazılı değerlendirme aracı uygulanan katılımcı grubuna oranı ise %9'dur. Ayrıca bulgular bölümünde verilerden alıntılar yapılırken öğrenciler Ö1'den Ö557'e kadar kodlanarak kullanılmıştır. Bu katılımcılardan yalnızca Ö1'den Ö52'ye kadar olanlar ile yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

3.3. Pilot Uygulama ve Veri Toplama Süreci

Araştırmaya dahil edilen veriler iki ayrı süreç sonunda elde edilmiştir. Şekil 3.1.'de görüldüğü gibi ilk süreç pilot uygulama, ikinci süreç ise asıl verilerin toplanması sürecidir.



Şekil 3.1. Verilerin elde edilmesi süreçleri

Pilot uygulamanın amacı veri toplama araçlarının nihai halinin belirlenmesi ve verilerin analizinde kullanılacak olan ilk kodların oluşturulmasıdır. Pilot uygulamada araştırmanın katılımcı grubu dışındaki benzer bir ortaokulun 5., 6., 7. ve 8. sınıfta okuyan rastgele seçilen toplam 35 öğrenciye 20 tane açık uçlu soru içeren yazılı değerlendirme

aracı uygulanmıştır. Pilot uygulamada kullanılan yazılı değerlendirme aracında alan (daire), çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri olmak üzere dört farklı model bağlamında kesir problemlerini içermektedir. Bu süreçte toplanan pilot veriler ışığında öğrencilerin birleştirme ve parçalama gibi kesirsel faaliyetlerini daha kapsamlı değerlendirmek amacıyla yazılı değerlendirme aracında kullanılan dört kesir modelinin yanında yeni bir model eklenmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu süreçte uzman görüşünden yararlanılmış ve noktalı zemin üzerinde dikdörtgensel alan modelinin yazılı değerlendirme aracına eklenmesi konusunda görüş birliğine varılarak, toplamda 25 açık uçlu sorudan oluşan yazılı değerlendirme aracının nihai hali belirlenmiştir. Bu sayede öğrencilerin parçalanmış/parçalanmamış veya birimi örtük/birimi aşık olarak verilen bütün üzerinde gerçekleştirecekleri kesirsel faaliyetleri diğer alan modeli (daire) ile karşılaştırarak daha anlaşılır biçimde incelemeye, yorumlamaya ve betimlemeye fırsat yaratılmıştır. Öte yandan pilot uygulamadan elde edilen veriler hem yazılı değerlendirme aracının dilsel açıdan iyileştirilmesine hem de araştırmanın içerik analizinde kullanılmak üzere ilk kodların oluşturulmasına katkı sağlamıştır.

Araştırmanın asıl verilerinin toplanması sürecinin ilk aşamasında yazılı değerlendirme aracından, ikinci aşamasında ise yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerden yararlanılmıştır. İlk aşamada araştırmanın katılımcı grubunu oluşturan üç ortaokulun 5., 6., 7. ve 8. sınıfta okuyan toplam 770 öğrencisine 25 tane açık uçlu sorudan oluşan yazılı değerlendirme aracı uygulanmıştır. Araştırmaya katılan öğrenciler yazılı değerlendirme aracını yaklaşık 40-50 dakika içerisinde tamamlamışlardır. 25 soruluk yazılı değerlendirme aracıyla verilerin toplanmasının ardından içerik analizi yapılarak sınıf düzeylerine göre öğrencilerin ne tür gelişmiş ve gelişmekte olan kesir şemalarına sahip oldukları bulgusuna ulaşılmıştır. Elde edilen ilk bulgular doğrultusunda her şema kapsamında öğrencilerin hangi kesirsel faaliyetleri aktif olarak kullandıkları ve hangi kesir modellerine doğru yanıt verdikleri incelenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin kesir şemaları hakkında daha detaylı ve derinlemesine bilgiler edinmek amacıyla yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler için öğrenci seçme işlemi gerçekleştirilmiştir. Görüşme yapılacak öğrenciler seçilirken gelişmiş ve gelişmekte olan şemalar, aktif/pasif kullanılan kesirsel faaliyetler, kesirsel faaliyetlerin kesir modellerine doğru/yanlış uygulamaları kriter olarak belirlenmiştir. Belirlenen bu kriterler doğrultusunda ilk bulgulara göre ağırlıklı olarak karşılaşılan her farklı durum ve her farklı sınıf düzeyinden öğrenciler ile görüşülmeye çalışılmıştır.

Veri toplama sürecinin ikinci aşamasında ise seçilen öğrenciler ile birebir olarak yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Yarı yapılandırılmış klinik görüşmede kullanılan sorular, yazılı değerlendirme aracındaki sorular ile aynı olmakla birlikte ihtiyaç duyulduğunda araştırmacı tarafından öğrencilere başka sorular da yöneltmiştir. Piaget'nin öncülük ettiği klinik görüşme tekniği, bilgi yapısının biçimini ve akıl yürütme sürecini araştırmak için kullanılır (Clement, 2000, s. 547). Araştırma kapsamında yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler aracılığıyla öğrencilerin kesir kavramına ilişkin düşünme biçimleri ve kesir problemlerini çözme sürecinde kullandıkları kesirsel faaliyetler kesir modelleri bağlamında daha derinden irdelenmeye çalışılmıştır. Ayrıca yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler ortalama 35 dakikalık zaman dilimlerinde, öğrencilerin düşüncelerini rahatça ifade edebilecekleri bir ortamda video kamera cihazı ile ses ve görüntüler kayıt altına alınarak gerçekleştirilmiştir.

Veri toplama sürecinin planlanmasında tüm sınıf düzeylerinin matematik öğretim programları dikkate alınmıştır. Her sınıf düzeyi için kesirler konusu ile ilgili tüm kazanımlara yönelik derslerin sınıflarda işlenmiş olmasına özen gösterilmiştir. Bu sebeple yıllık planların ve okullardaki öğretmenlerin rehberliğinde verilerin tamamı, 2017-2018 eğitim öğretim yılının bahar döneminde kesirler ile ilgili ünitelerin bitişinin ardından toplanmaya başlanmıştır. Araştırmaya dahil edilen üç farklı ortaokulda yazılı değerlendirme aracının uygulanması ile yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerin gerçekleştirilmesi şeklinde yürütülen veri toplama süreci yaklaşık üç ay sürmüştür.

Veri toplama süreci başlamadan önce ilgili kurumlardan gerekli izin ve etik kurul onayı alınmıştır (bkz. Ek 1, Ek 2). Bununla beraber verilerin toplanması için gönüllülük ve gizlilik esasları vurgulandıktan sonra gönüllü olan katılımcılar araştırmaya dahil edilmiştir. Ayrıca araştırmanın amaç ve öneminden bahsedildikten sonra katılımcıların diledikleri zaman çalışmayı yarıda bırakabilecekleri sözlü ve gönüllü katılım formu ile belirtilmiştir (bkz. Ek 3).

3.4. Veri Toplama Araçları

Araştırmanın amacı doğrultusunda nitel yaklaşımlar benimsenmiş ve veriler çoklu yöntemler kullanılarak iki aşamada toplanmıştır. İlk aşamada ortaokul öğrencilerine yazılı değerlendirme aracı uygulanarak; ikinci aşamada ise yarı yapılandırılmış klinik

görüşmeler gerçekleştirilerek veriler toplanmıştır. Bu bölümde veri toplama araçlarının tanımı ve kullanım amaçlarına yer verilmiştir.

3.4.1. Yazılı değerlendirme aracı

Ortaokul öğrencilerinin kesir şemalarını derinlemesine incelemek amacıyla yürütülen bu araştırma kapsamında öncelikle literatür desteğiyle daha önceden uygulanmış veri toplama araçlarındaki sorular bir araya getirilmiştir. Ardından bu sorular ilgili kesir şemaları, kesirsel faaliyetler ve kullanılan kesir modelleri bağlamında incelenmiştir. Araştırmanın amacına uygun olarak literatürden değişiklik yapılmadan alınan veya literatür desteğiyle uyarlanan soruların bir araya getirilmesiyle yazılı değerlendirme aracı oluşturulmuştur. Yazılı değerlendirme aracı 17'si literatürdeki kaynaklardan alınmak üzere basit ve bileşik kesir problemlerini içeren toplamda 25 açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Yazılı değerlendirme aracına literatürden değişiklik yapılmadan alınan sorulara ilişkin bilgiler Tablo 3.4.'te sunulmuştur.

Tablo 3.4. Yazılı değerlendirme aracına literatürden alınarak eklenen sorular

İncelenen şema bağlamı	Model türü	Kaynak
Parçalara ayırma şemaları	Alan modeli (Daire)	Wilkins ve Norton (2011)
1. Aynı anda parçalama şeması (APŞ)	Alan modeli (Dikdörtgen)	Eliustaoğlu (2016)
2. Eş parçalama şeması (EPŞ)	Çubuk modeli	Norton ve Wilkins (2010)
	Küme modeli	Eliustaoğlu (2016)
Parça bütün şeması (PBŞ)	Alan modeli (Dikdörtgen)	Eliustaoğlu (2016)
	Çubuk modeli	Norton ve McCloskey (2008)
	Küme modeli	Eliustaoğlu (2016)
Parçalı birim kesir şeması (PBKŞ)	Alan modeli (Daire)	Wilkins ve Norton (2011)
	Alan modeli (Dikdörtgen)	Eliustaoğlu (2016)
	Çubuk modeli	Norton ve McCloskey (2008)
	Küme modeli	Eliustaoğlu (2016)
Parça kesir şeması (PKŞ)	Alan modeli (Daire)	Norton ve Wilkins (2010)
	Çubuk modeli	Norton ve McCloskey (2008)
Tersinir parça kesir şeması (TPKŞ)	Alan modeli (Dikdörtgen)	Eliustaoğlu (2016)
	Küme modeli	Eliustaoğlu (2016)
Bileşik kesir şeması (BKŞ)	Alan modeli (Daire)	Norton ve Wilkins (2010)
	Çubuk modeli	Tunç-Pekkan (2015)

Tablo 3.4.'te görüldüğü üzere yazılı değerlendirme aracındaki soruların çoğu literatürdeki araştırmalardan herhangi bir değişiklik yapılmadan yalnızca Türkçeye çevrilerek kullanılmıştır. Bununla birlikte pilot uygulama sayesinde literatürden alınan ve

Türkçeye çevrilen soruların anlaşılabilirliği önceden test edilerek yazılı değerlendirme aracında dilsel açıdan bazı düzenlemeler yapılmıştır. Aynı zamanda pilot uygulamadan elde edilen ön bulgular, nitel verilerin içerik analizi için ilk kodların oluşturulmasına yardımcı olmuştur.

Ayrıca araştırma kapsamında kesir şemalarının ve kesirsel faaliyetlerin incelenmesi açısından öğrencilerin yazılı değerlendirme aracındaki farklı modellerle (alan, çubuk, küme, sayı doğrusu) sorulan nicelikler üzerinde bazı çizimleri ve kesme (çizik atmak vs.) işlemlerini kullanma biçimleri oldukça önemlidir. Öğrenci çizimlerinin doğru yorumlanması ve hataların en aza indirgenmesi araştırmanın sonuçlarının geçerlik ve güvenilirliği ile yakından ilişkilidir. Bu bağlamda pilot uygulamada yazılı değerlendirme aracında alan modeli olarak yalnızca daire modeli kullanılırken toplamda 20 açık uçlu soruyu içermekteydi. Ancak pilot uygulamadan sonra öğrencilerin bazı kesirsel faaliyetleri nicelikte örtük birimin olup olmaması (parçalanmış, parçalanmamış) durumunda nasıl kullandıklarını incelemek amacıyla yazılı değerlendirme aracına noktalı zemin üzerinde dikdörtgen alan modeli ile sunulan 5 tane soru eklenmiştir. Nitekim pilot uygulama sonucunda ortaokul sınıf düzeylerinin farklılıklarından oluşan öğrencilerin ince motor becerilerinin gelişim seviyelerinde farklılık olduğu görülmüştür. Bu sebeple öğrencilerin modeller üzerindeki faaliyetlerini daha kolay ilişkilendirebilmek adına pilot uygulamada kullanılan yazılı değerlendirme aracına *noktalı zemin üzerinde dikdörtgen modeli* ile sunulan 5 tane açık uçlu sorunun da eklenmesine karar verilmiştir. Bu sayede aynı anda parçalama şeması (APŞ), eş parçalama şeması (EPŞ), parça bütün şeması (PBŞ), parçalı birim kesir şeması (PBKŞ), parça kesir şeması (PKŞ), tersinir parça kesir şeması (TPKŞ) ve bileşik kesir şeması (BKŞ) bağlamında kesirsel faaliyetlerin alan (daire ve dikdörtgen), çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerindeki uygulamalarının incelenmesine yönelik toplamda 25 tane açık uçlu soruyu içeren yazılı değerlendirme aracının son hali oluşturulmuştur. Veri toplama aracındaki soruların hangi şema bağlamında ve hangi model türleri ile sunulduğuna dair dağılımı ise Tablo 3.5.'te görülebilir.

Tablo 3.5. *Veri toplama aracında şemalar bağlamında sunulan model türlerinin dağılımı*

Soru numarası	Model türü	İncelenen şema
1. soru	Çubuk	Parçalara ayırma şemaları (APŞ ve EPŞ için ortak)
3. soru	Sayı doğrusu	
6. soru	Alan (daire)	
12. soru	Alan (dikdörtgen-noktalı zemin)	
13. soru	Küme	
2. soru	Alan (daire)	Parça bütün şeması (PBŞ)
4. soru	Alan (dikdörtgen-noktalı zemin)	
5. soru	Küme	
11. soru	Sayı doğrusu	
18. soru	Çubuk	
7. soru	Sayı doğrusu	Parçalı birim kesir şeması (PBKŞ)
9. soru	Çubuk	
14. soru	Alan (daire)	
17. soru	Küme	
25. soru	Alan (dikdörtgen-noktalı zemin)	
16. soru	Sayı doğrusu	Parça kesir şeması (PKŞ)
19. soru	Çubuk	
20. soru	Alan (daire)	
8. soru	Küme	Tersinir parça kesir şeması (TPKŞ)
10. soru	Alan (dikdörtgen-noktalı zemin)	
15. soru	Çubuk	Bileşik kesir şeması (BKŞ)
21. soru	Alan (dikdörtgen-noktalı zemin)	
22. soru	Küme	
23. soru	Sayı doğrusu	
24. soru	Alan (daire)	

Veri toplama aracında sayı doğrusu modeli ile sunulan sorular literatürdeki kesir şemaları ve sayı doğrusu ile ilgili araştırmaların sonuçları ışığında, şemalarla ilişkili kesirsel işlemler temel alınarak araştırmacı tarafından oluşturulmuştur. Sayı doğrusu modelinin veri toplama aracına eklenmesinin nedeni, literatür incelendiğinde diğer modeller ile sunulan kesir problemlerinin daire, dikdörtgen ve çubuk modellerinde bütünün çoğunlukla 1-birimi olarak kullanıldığının görülmesidir. Oysaki araştırma kapsamında bütünün 1'den büyük olduğu durumlarda öğrencilerin kesir kavramını ne tür kesirsel işlemlerle anlamlandırdığı da araştırma kapsamında incelenmektedir. Dolayısıyla [0-1] aralığının dışında farklı aralıklarla sayı doğrusu modeli ile sunulan problemlere özellikle birimleştirme kesirsel işlemi açısından öğrencilerin nasıl cevap verdikleri incelenmek istenmiştir.

Öğrencilerin parçalama ve bölümleme işlemleri öncelikle lineer nesneler üzerinde gerçekleşirken zamanla diğer nesneleri eşit ve/veya özdeş parçalara ayırabilecek şekilde gelişmektedir (Lamon S. J., 1996; Pothier ve Sawada, 1983; 1990). Bu sebeple çubuk modeli parçalama ve bölümleme işlemleri için önemli bir modeldir. Çubuk modeli

üzerinde öğrencilerin ince-motor becerilerinden kaynaklanabilecek farklılıklar dikkate alındığında, parçaların eşit veya özdeş olmasına yönelik yapılan öğrenci eylemlerini değerlendirirken destek olması amacıyla noktalı zemin üzerinde dikdörtgen modelinin sunulması uygun görülmüştür. Çubuk ve dikdörtgen modellerinde bütün genellikle yatay veya dikey kesme işlemleriyle parçalara ayrılır. Ancak daire modelinin, dikdörtgensel alan modellerinden farklı kesim işlemleri gerektirdiğinden veri toplama aracında daire modelinin kullanılması önemli görülmektedir. Burada belirtilen sürekli modellerin yanı sıra araştırmada ayırık bir model olarak küme modeli de tercih edilmiştir. Özellikle kesir bilgisini anlamlandırmak için birimleştirme kesirsel işlemi öğrenci tarafından içselleştirilmeli ve “...nesneler topluluğu...” üzerinde çalışılabilmelidir. Bu sebeple veri toplama aracında küme modeli ile sunulan sorular aracılığıyla öğrencilerin bütünün birden fazla nesneyi içinde barındırdığı durumlarda ne tür kesirsel işlemler ortaya çıkardıkları belirlenmeye çalışılmıştır.

Literatürde kesir şemaları ile yapılan araştırmaların çoğunda aynı anda parçalama şeması (APŞ) ve eş parçalama şeması (EPŞ) “*parçalara ayırma şemaları (partitioning schemes)*” başlığı altında bir arada incelenmiş ve toplanan verilerden elde edilen bulguların da genel olarak *parçalara ayırma şemaları* kapsamında sunulduğu görülmüştür. Nitekim Steffe ve Olive (2010) parçalama kesirsel faaliyetinin zihinsel bir gelişim süreci olduğunu ve öğrencilerin gelişim sürecine bağlı olarak farklı şema sonuçlarıyla (APŞ ve EPŞ) ortaya çıkabileceğini belirtmiştir. Ayrıca literatürdeki veri toplama araçları incelendiğinde parçalara ayırma şemaları için aynı problemin ortak olarak kullanılabileceği görülmüştür. Bunun sebebi eş parçalama şemasının (EPŞ) aynı anda parçalama şemasına (APŞ) göre daha gelişmiş bir şema olduğu ve öğrencinin sahip olduğu şemaya göre verdiği yanıtın farklı olacağıdır. Bu bağlamda EPŞ bağlamında öğrencinin kesir kavramını anlamlandırma düzeyi arttığından öğrencinin eylem ve söylemlerinin daha ikna edici olduğu düşünülmektedir. Bu araştırma kapsamında APŞ ve EPŞ şemaları iki farklı şema olarak ele alınmış ve iki şema arasındaki farklılığı öğrencilerin nasıl ortaya koyduğu incelenmek istenmiştir. Dolayısıyla araştırmanın veri toplama aracında sunulan problem karşısında öğrencinin verdiği yanıtlara, kesir kavramını nasıl anlamlandırıdığına ve kullandığı kesirsel işlemlere göre APŞ veya EPŞ şemalarından hangisine sahip olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Buna bağlı olarak veri toplama aracındaki herhangi bir soru için öğrencilerin parçalara ayırma şemalarından yalnızca birine dair şema sonucu ortaya koyabileceği beklenmiştir. Ancak parçalara

ayırma şemaları bağlamında farklı modeller ile sorulan soruların bazılarına APŞ bazılarına EPŞ bağlamında yanıt verebilecekleri düşünülmüştür. Dolayısıyla bu soruların içerik analizi yapılırken farklı kodlamalar yardımıyla APŞ ve EPŞ için ayrı ayrı veriler düzenlenebilmiştir. Bu durumla ilgili verilerin kodlanması ve alt kategorilere göre sınıflandırılması için nasıl bir yol izlendiğine dair detaylı bilgilere veri analizi bölümünde yer verilmiştir.

Ayrıca Steffe ve Olive (2010) parça kesir şemasını ilk özgün şema olarak tanımlamaktadır (s. 121). *Parça kesir şeması* hem parça kesir kavramının anlamlandırılması hem de birçok kesirsel faaliyetin aynı anda içselleştirilmesi açısından büyük önem taşıyan gelişmiş şemalardan birisidir. Araştırma kapsamında parça kesir şemasında kullanılması beklenen kesirsel faaliyetlerin zihinsel olarak tersine işleyebilecek şekilde anlamlandırıldığı şema olan *tersinir parça kesir şeması* da incelenmek istenmiştir. Ancak araştırma tasarlanırken ele alınan şemaların her biri dört farklı model bağlamında beş farklı soru ile incelenmesi istenmiş olsa da, 5. sınıf öğrencileri göz önüne alındığında çok fazla sorunun açık uçlu olarak sorulması karşısında verilerin niteliğinin azalacağı düşünülmüştür. Bu sebeple tersinir parça kesir şemasının, parça kesir şemasına göre daha gelişmiş olmasının da etkisiyle her biri farklı model ile sunulan üç soru *parça kesir şeması* bağlamında sorulurken iki sorunun da *tersinir parça kesir şeması* bağlamında sorulması uygun görülmüştür.

3.4.2. Yarı yapılandırılmış klinik görüşme

Nitel araştırmalarda çeşitlemeyi destekleme veya tamamlayıcılığı sağlamak amacıyla gözlem, görüşme gibi farklı veri toplama araçlarının birlikte kullanılmasıyla bilgi toplamak oldukça yaygındır. Birçok araştırmacı çeşitlemenin, incelenen durumların farklı yönleri hakkında bilgi verdiğini ve farklı veri toplama araçlarının güçlü ve zayıf yönlerinin birbirini desteklediğini belirtmişlerdir (Büyüköztürk ve diğerleri, 2014, s. 251; Creswell, 2017). Maxwell (2018) ise çoklu yöntemlerin kullanım amacının sadece geniş bir çerçeve veya tek bir yöntemin sonuçlarını doğrulamaktan ziyade, daha *derin* bir kavrayış sağlamak olduğunu belirtmiştir (s. 104).

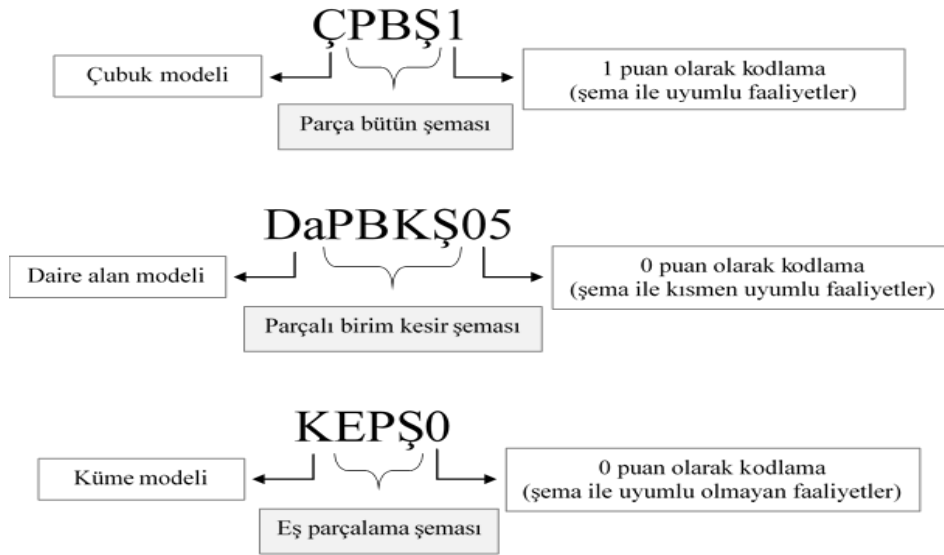
Bu sebeple yazılı değerlendirme aracının yanı sıra çeşitlemeyi sağlamak ve öğrenci yanıtlarından daha derin bir anlayış yakalamak adına yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Yazılı değerlendirme aracındaki sorular aynı zamanda

görüşme sorularını oluşturmaktadır. Klinik görüşmelerde kullanılan soruların, birinci veri toplama aracındaki sorular ile aynı olmasının sebebi, öğrencilerin yazılı değerlendirme aracındaki sorulara verdikleri yanıtların doğruluğunu ve tespit edilebilirliğini kontrol etmeye çalışmaktır. Ersoy (2016), yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerin bir görüşme formu veya program kapsamında yürütüldüğünü, ancak araştırmacının görüşme formu dışında katılımcıların farklılıklarını ortaya koymak için görüşme sürecinde kendiliğinden gelişen başka sorular da sorabileceğini belirtmiştir (s. 85). Yıldırım ve Şimşek (2016) ise görüşme sürecinde katılımcının anlık geliştirdiği yanıtların ve tepkilerin, araştırma problemi hakkında zengin bir bilgi kaynağı olabileceğini vurgulamıştır (s. 134). Bu sebeple yarı yapılandırılmış görüşmelerin sağladığı olanakla yazılı değerlendirme aracındaki soruların yanı sıra kendiliğinden gelişen durumlarda araştırmacı tarafından başka sorular eklenerek daha *derin* bir anlayış yakalanmaya çalışılmıştır. Bu bağlamda zihinsel olarak soyutlanma sürecini gözlemleyemediğimiz öğrencilerin kesir bilgileri, her biri birer öğrenme modeli olan şemalar bağlamında ortaya konan kesirsel faaliyetlerin betimlenmesi ve bunların öğrenciler tarafından nasıl anlamlandırıldığının daha derinden incelenebilmesi amacıyla yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Farklı sınıf düzeylerinden 52 katılımcı ile gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler öğrencilerin kendilerini rahat hissedebileceği bir ortamda gizlilik ve gönüllülük ilkesine dayalı olarak gerçekleştirilmiştir. Yaklaşık 40-50 dakika süren görüşmelerde, video kamera öğrencinin çalışma kağıdını görüntüleyecek şekilde düzenlenerek sesler ve görüntüler kayıt altına alınmıştır. Video kameranın öğrencinin kağıdını görmesinin sebebi ise kesirlerle ilgili özellikle bütünü parçalama, bölümleme gibi kesirsel işlemler gerçekleştirilirken öğrencinin çizgilerinin nereden başladığı, nasıl devam ettiği veya silgiyi kullandıktan sonra neyi değiştirdiği gibi verilerin araştırma kapsamında önemli olmasıdır. Görüşmede, öğrencilerin yazılı değerlendirme aracındaki bazı soruları yeniden çözmeleri veya daha önceki çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Gerekli görüldüğü durumlarda öğrencilere araştırmanın amacına yönelik daha önceden yapılandırılmamış sorular sorulmuş ve öğrenci kademeli olarak sorunun altında yatan asıl problemlere yönlendirilmeye çalışılmıştır.

3.5. Veri Analizi

Araştırmada yazılı değerlendirme aracı ve yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerden toplanan veriler içerik analizi yöntemi kullanılarak hem veri toplama süreci esnasında hem de sonrasında sürekli olarak analiz edilmiştir. İçerik analizi genel olarak, hacimli olan nitel materyali alarak temel tutarlılıkları ve anlamları belirlemeye yönelik herhangi bir nitel veri indirgeme ve anlamlandırma çabası girişimlerini ifade etmek için kullanılır (Patton, 2014, s. 453). Bu araştırma kapsamında araştırma problemleri doğrultusunda iki aşamalı içerik analizi gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın birinci problemi kapsamında öğrencilerin sahip oldukları kesir şemalarının incelenmesi amacıyla ilk aşamada yapılan içerik analizi süreci, pilot uygulamadan toplanan verileri biçimlendirmek amacıyla ilk kodların oluşturulmasıyla başlamıştır. Bununla birlikte veri toplama sürecinde araştırmacının alan notları ile pilot uygulamadan oluşturulan kodların sürekli ilişkilendirilerek nihai kodların geliştirilmesi verilerin analiz süreci tamamlanana dek devam etmiştir. Aşağıda verilen Şekil 3.2.'de oluşturulan kodların kısaltmalarına örnekler verilmiştir.



Şekil 3.2. Kodlama örnekleri

Şekil 3.2.'de görülen kodlar, veri toplama araçlarındaki bir soruya verilen yanıtlar doğrultusunda oluşturulmuştur. Şekilde görülen ÇPBS1 ile başlayan kodlar, parça bütün şeması (PBS) bağlamında incelenen birimleştirme, parçalama ve yerleşik bütünden ayırma faaliyetlerinin çubuk modeli üzerinde şema ile uyumlu bir şekilde uygulandığını

belirtmektedir. DaPBKŞ05 ile başlayan kodlar ise parçalı birim kesir şeması (PBKŞ) bağlamında incelenen birimleştirme ve tekrarlama faaliyetlerinden yalnızca bir kısmının daire alan modeli üzerinde şema ile uyumlu bir şekilde uygulandığını belirtmektedir. Örnek olarak DaPBKŞ051 kodu PBKŞ bağlamında yalnızca birimleştirme faaliyetinin daire alan modeli üzerinde etkili ve doğru uygulandığını gösterirken, DaPBKŞ052 kodu ise PBKŞ bağlamında yalnızca tekrarlama faaliyetinin daire alan modeli üzerinde etkili ve doğru uygulandığını göstermektedir. KEPŞ0 ile başlayan kodlar ise eş parçalama şeması (EPŞ) bağlamında incelenen kesirsel faaliyetlerden hiçbirinin küme modeli üzerinde şema ile uyumlu olmadığını belirtir.

Dolayısıyla öğrencilerin hangi şema bağlamında hangi kesir modeli üzerinde hangi kesirsel faaliyetleri etkili ve doğru uygulayıp uygulamadıkları Şekil 3.2.’de görülen kodlarla analiz edilebilmiştir. Kodların belirlenme ölçütleri ise Norton ve Wilkins’nın (2009) çalışmasındaki ölçütlerden uyarlanarak Tablo 3.6.’da verilen ölçütlere değerlendirilmiştir (s. 156).

Tablo 3.6. *Kodların belirlenme ölçütleri*

Kodlama işlemi belirleyen ölçütler	Kodlama örneği	Puanlama
Öğrencinin kesin kanıt göstergeleri içeren yanıt doğrultusunda model üzerinde uyguladığı kesirsel faaliyetler şema ile uyumludur.	ÇPBŞ1	1
Öğrencinin yanıtı doğrultusunda model üzerinde uyguladığı kesirsel faaliyetlerin bir kısmı şema ile uyumludur.	DaPBKŞ051	0
Öğrencinin yanıtı doğrultusunda model üzerinde uyguladığı kesirsel faaliyetler şema ile uyumlu değildir.	KEPŞ01	0

Tablo 3.6.’da görüldüğü gibi öğrencinin herhangi bir soruya verdiği yanıt doğrultusunda, belli bir şema kapsamında incelenen kesirsel faaliyetlerin tümü şema ile uyumlu gerçekleştirilmiş ve soru doğru yanıtlanmış ise Şekil 3.2.’deki gibi “1” ile başlayan uygun kodlama yapılarak o soruya 1 (bir) puan verilmiştir. Aksi halde şema kapsamında incelenen kesirsel faaliyetlerin bir kısmı şema ile uyumlu gerçekleştirilmiş ve soru yanlış veya eksik yanıtlanmış ise Şekil 3.2.’deki gibi “05” ile başlayan uygun kodlama yapılarak ve o soruya 0 (sıfır) puan verilmiştir. Eğer öğrencinin yanıtı şema bağlamında incelenen kesirsel faaliyetlerin hiçbirisi şema ile uyumlu değil ve alakasız ise Şekil 3.2.’deki gibi “0” ile başlayan uygun kodlama yapılarak ve o soruya 0 (sıfır) puan verilmiştir.

Bu bağlamda ilk aşamada yapılan içerik analizi sürecinde oluşturulan kodlamalar sayesinde öğrenci verileri hem araştırmanın birinci problemi doğrultusunda gelişmiş şemalar hakkında hem de ikinci araştırma problemi kapsamında kullanılan gelişmekte olan şemalar hakkında bilgi verecek şekilde düzenlenmiştir.

İçerik analizinin ilk aşamasında öğrencilerin sahip oldukları şemalar değerlendirilirken, veri toplama aracında her bir şema kapsamında farklı modeller ile sorulan sorular ayrı ayrı incelenmiş ve öğrencilerin aldıkları puanlar dikkate alınmıştır. Örnek olarak bir önceki bölümde verilen Tablo 3.5.'e (bkz. s. 61) göre veri toplama aracındaki 2., 4., 5., 11. ve 18. sorular parça bütün şeması (PBŞ) bağlamında farklı kesir modelleri ile sunulduğunda öğrencilerin yanıtları yukarıda bahsedildiği kodlanarak puanlanmıştır. Tablo 3.6.'da verilen kodların belirlenme ölçütlerine göre öğrencinin her bir sorudan alabileceği puan "1" veya "0" olduğundan beş farklı soru ile incelenen PBŞ şeması bağlamında alabileceği maksimum puan "5"tir. Dolayısıyla bir öğrencinin belli bir şema bağlamında sorulan sorulara verdiği tüm yanıtlar "1" olarak puanlanmış ve öğrenci o şemadan tam puan almış ise öğrencinin o şema bağlamında kesirsel faaliyetleri farklı modellere uygulayabildiği ve şema için gelişim süreci tamamlandığı yönde bir değerlendirme yapılarak "şema gelişmiş" şeklinde nitelendirilmiştir. Ancak öğrencinin belli bir şema bağlamında sorulan sorulara verdiği tüm yanıtları değil de bazı yanıtları "1" olarak puanlanmış ise öğrencinin o şema bağlamında kesirsel faaliyetleri farklı modellere uygulayamadığı dolayısıyla şema için halen gelişim sürecinde olduğu yönde bir değerlendirme yapılarak "şema gelişim sürecinde" şeklinde nitelendirilmiştir. Eğer öğrencinin belli bir şema bağlamında sorulan sorulara verdiği tüm yanıtları "0" olarak puanlanmış ise öğrencinin o şema bağlamında kesirsel faaliyetleri hiçbir modele uygulayamadığı dolayısıyla şemanın varlığına ilişkin göstergelere ulaşamadığı yönde bir değerlendirme yapılarak "şema oluşmamış" şeklinde nitelendirilmiştir. Araştırma kapsamında incelenen şemalar bağlamında yapılan kodlama sonucunda öğrencilerin aldıkları puanlara göre sahip oldukları şemaların belirlenme ölçütleri Tablo 3.7.'de özetlenmiştir.

Tablo 3.7. Kodlama sonucunda verilen puanlara göre şemaların belirlenme ölçütleri

Şemalar	İncelenen soru sayısı	Şema oluşmamış	Şema gelişim sürecinde	Şema gelişmiş
Parçalara ayırma şemaları (APŞ ve EPŞ)	5 soru	0 puan alınmıştır.	[1-4] arasında puan alınmıştır.	5 puan alınmıştır.
Parça bütün şeması (PBŞ)	5 soru	0 puan alınmıştır.	[1-4] arasında puan alınmıştır.	5 puan alınmıştır.
Parçalı birim kesir şeması	5 soru	0 puan alınmıştır.	[1-4] arasında puan alınmıştır.	5 puan alınmıştır.
Parça kesir şeması	3 soru	0 puan alınmıştır.	[1-2] arasında puan alınmıştır.	3 puan alınmıştır.
Tersinir parça kesir şeması	2 soru	0 puan alınmıştır.	[1] arasında puan alınmıştır.	2 puan alınmıştır.
Bileşik kesir şeması	5 soru	0 puan alınmıştır.	[1-4] arasında puan alınmıştır.	5 puan alınmıştır.

Not: Veriler, şemalar bağlamında incelenen soru sayısı aynı zamanda alınabilecek toplam puanlar olup, öğrencilerin sahip oldukları şemalar toplam puan üzerinden aldıkları puanlara göre belirlenmiştir.

Tablo 3.7. incelendiğinde parçalara ayırma şemaları da toplamda 5 puan alındığında şema gelişmiş, 1 ile 4 arasında bir puan alındığında şema gelişim sürecinde olduğu görülmektedir. Ancak özel olarak parçalara ayırma şemalarının aynı anda parçalama şeması (APŞ) ve eş parçalama şeması (EPŞ) olmak üzere iki ayrı şema bağlamında incelenerek veriler analiz edilmiştir. Daha açık bir ifadeyle APŞ ile EPŞ şemalarının aynı durumlarda ortaya çıkması sebebiyle veri toplama aracında bir bütünün eş parçalara ayrılması veya paylaştırılması görevleriyle oluşturulan 5 farklı soru ile parçalara ayırma şemaları bağlamında incelenmiştir. Dolayısıyla bu sorulardan elde edilen veriler kodlanırken kullanılan kesirsel faaliyetlere göre APŞ ve EPŞ için ayrı ayrı kodlanarak Tablo 3.8.’de verilen ölçütlere göre değerlendirilmiştir.

Tablo 3.8. Öğrencilerin sahip oldukları parçalara ayırma şemalarının belirlenme ölçütleri

Parçalara ayırma şemalarından alınan puan	Ölçüt	Sahip olunan şema
5 puan alınmıştır.	Öğrenci aldığı 5 puanı APŞ şeması bağlamında oluşturulan kodlardan almıştır.	APŞ gelişmiş
	Öğrenci aldığı 5 puanı EPŞ şeması bağlamında oluşturulan kodlardan almıştır.	EPŞ gelişmiş
[1-4] arasında puan alınmıştır.	Öğrenci aldığı puanların hepsini APŞ şeması bağlamında oluşturulan kodlardan almıştır.	APŞ gelişim sürecinde
	Öğrenci aldığı puanların en az “1” puanını EPŞ şeması bağlamında oluşturulan kodlardan almıştır.	EPŞ gelişim sürecinde

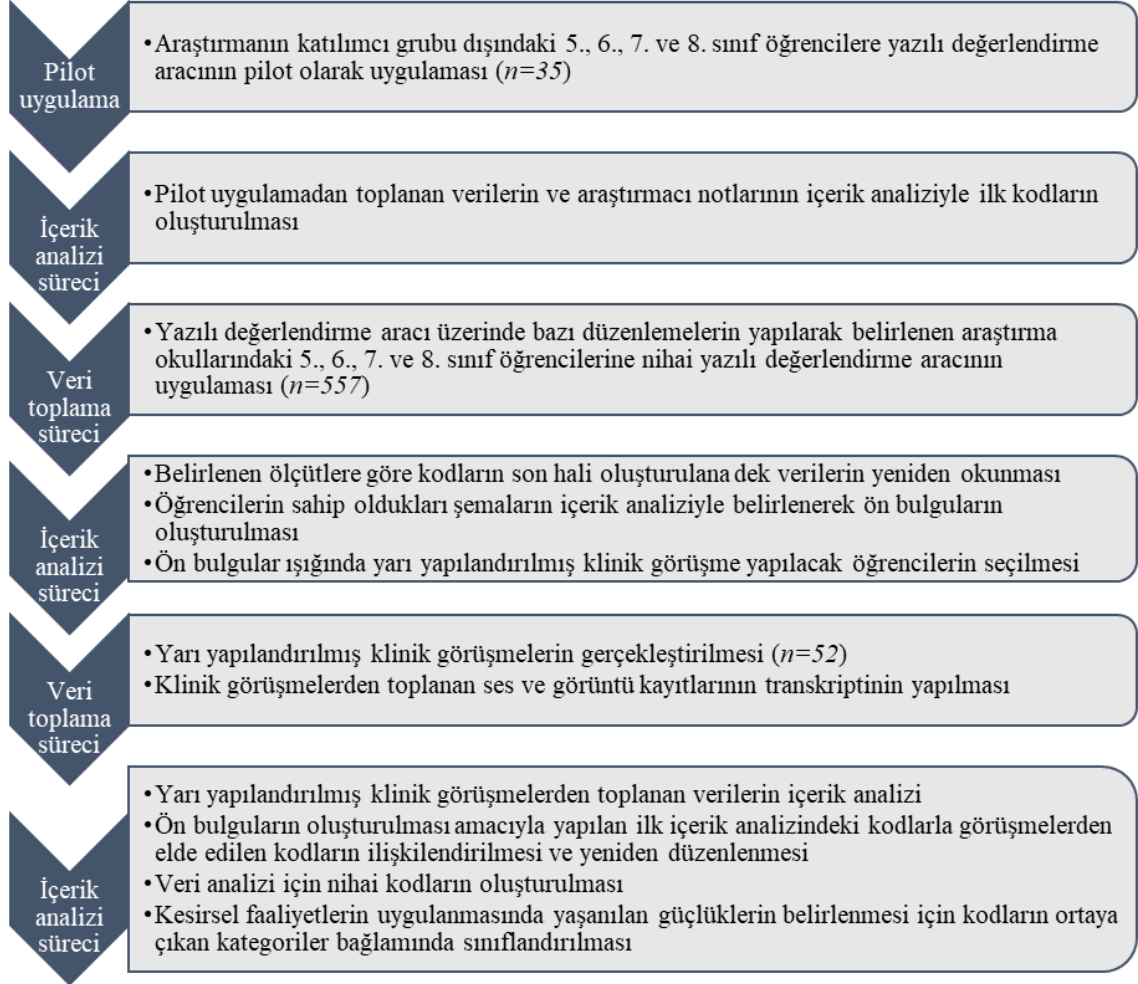
Not: Parçalara ayırma şemaları bağlamında incelenen soru sayısı 5 olup, aynı zamanda alınabilecek toplam puandır.

Tablo 3.8.’de verilerin kodlanmasının ardından öğrencilerin sahip oldukları şemalar incelenirken APŞ ve EPŞ şemalarının diğer şemalardan farklı olarak değerlendirildiği görülmektedir. Tablo 3.8.’e göre veri toplama araçlarındaki parçalara ayırma şemaları ile incelenen 5 sorunun hepsine öğrenci APŞ şeması bağlamında doğru yanıt vermiş ve tüm sorulardan tam puan almış ise “APŞ’si gelişmiş” şeklinde değerlendirilirken, 5 sorunun hepsine EPŞ şeması bağlamında doğru yanıt vermiş ve tüm sorulardan tam puan almış ise “EPŞ’si gelişmiş” şeklinde değerlendirilmiştir. Bu durumun haricinde parçalara ayırma şemaları ile incelenen 5 sorunun hepsine doğru yanıt vermeyip bazılarını doğru yanıtlayan ve parçalara ayırma şemaları gelişim sürecinde olan öğrencilerin verileri ise APŞ ile EPŞ şemalarının gelişmişlik düzeyi göz önüne alınarak analiz edilmiştir. Daha açık bir ifadeyle eş parçalama şeması (EPŞ), aynı anda parçalama şemasından (APŞ) daha gelişmiş kesirsel faaliyetleri barındırdığı için öğrencinin tam puan aldığı sorulardan en az biri EPŞ ile kodlanmış ise öğrenci “EPŞ gelişim sürecinde” değerlendirilirken, öğrencinin tam puan aldığı soruların hepsi APŞ ile kodlanmış ise “APŞ gelişim sürecinde” olarak değerlendirilmiştir.

Öte yandan içerik analizinin ikinci aşamasında araştırmanın diğer problemi doğrultusunda, ilk aşamada oluşturulan kodların yeniden düzenlenmesiyle öğrencilerin farklı kesir modelleri üzerinde kesirsel faaliyetleri uygularken yaşadıkları güçlükler dair öne çıkan karakteristik özellikler incelenerek sınıflandırılmaya çalışılmıştır. Dolayısıyla bu bağlamda yaşanan güçlüklerin belirlenmesi amacıyla yalnızca şemalar ile kısmen uyumlu faaliyetlerin gerçekleştirildiği yönünde oluşturulan kodlar dikkate alınmıştır. Ardından birimleştirme, parçalama, yerleşik bütünden ayırma, tekrarlama ve yinelemeli ayırıştırma faaliyetleri kapsamında incelenen kodlardan alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri bağlamında örüntüler keşfedilmeye yaşanan güçlükler kategoriler ve alt kategoriler altında sınıflandırılmıştır. Bu aşamada yapılan içerik analizinde verilerin sınıflandırılmasında, oluşturulan kategorilerin dışında farklı kategorilere ihtiyaç duyulduğu veya farklı kategoriler içerisinde aynı verilerin yerleştirilebildiği fark edildiği durumlarda kategoriler yeniden düzenlenmiştir.

Sonuç olarak araştırma problemleri doğrultusunda ortaokul öğrencilerinin sahip oldukları kesir şemalarına ve şemalar bağlamında farklı kesir modelleri üzerinde kesirsel faaliyetlerin uygulanmasında yaşanan güçlükler ilişkin bulgulara yazılı değerlendirme aracı, yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerin ses ve görüntü kayıtları, veri toplama sürecinde araştırmacının aldığı notlar aracılığıyla toplanan verilerin içerik analizi ile

ulaşılmıştır. Araştırma kapsamında verilerin toplanması ve analiz sürecine ilişkin aşamalar Şekil 3.3.'te özetlenmiştir.



Şekil 3.3. Verilerin toplanması ve analiz süreci

3.6. Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği

Araştırmanın iç geçerliğinin (inandırıcılık) sağlanması ve doğru verilerin toplanması amacıyla, literatürde daha önceden uygulanmış ve araştırma problemleriyle örtüşen kesir şemaları ve kesirsel faaliyetler ile ilgili soruların bir araya getirilmesiyle veri toplama araçları hazırlanmıştır. Bununla birlikte verilerinin toplanmasında çeşitleme yapılarak birden fazla veri toplama yöntemlerinin kullanılmasıyla yalnızca sonuçların doğrulanmasını değil aynı zamanda daha derin bir anlayışla farklı perspektif kazanılması amaçlanmıştır. Aynı zamanda araştırma kapsamında incelenen kesir şemalarının gelişim evrelerini temsil edebilecek şekilde farklı sınıf düzeylerinden katılımcılarla veri

kaynakları çeşitlendirilmiş ve olabildiğince bütün zenginliğiyle okuyucuya sergilenmeye çalışılmıştır. Bunun yanı sıra araştırmanın problemleri doğrusunda hem kesir şemaları bağlamında kesirsel faaliyetlerin doğru kullanımı hem de şemalar bağlamında kesirsel faaliyetlerin uygulanmasında yaşanan güçlüklerin incelenmesi amacıyla verilerdeki karşıt durumların tespiti ve analizi ile sonuca uymayan verinin göz ardı edilme baskısının ve yanlılığın kontrol altına alınmasını sağlamıştır. Araştırma problemlerinin oluşturulmasından sonuçların raporlaştırılmasına kadar olan süreçlerde uzman görüşüne başvurulmuş ve eleştirel bakışla yapılan geri bildirimler ve öneriler doğrultusunda araştırmanın niteliğinin arttırılması sağlanmıştır.

Araştırmanın dış geçerliğinin (aktarılabirlik) sağlanması amacıyla kullanılan kavramsal çerçeve, araştırma ortamı, katılımcıların özellikleri, veri toplama ve analiz süreçleri detaylı bir şekilde açıklanmış ve elde edilen ham veriler yorum yapılmadan derinlemesine betimlenerek zengin bir şekilde okuyucuya aktarılmış ve sık sık doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Araştırmanın iç güvenilirliğinin (tutarlık) sağlanması için verilerin benzer süreçlerde ve benzer yaklaşımlarla toplanması, kodlanması, analiz edilmesi ve yorumlanması sağlanarak araştırma süreçlerine genel çerçevede bakılmaya çalışılmış ve birbirleriyle tutarlılık gösterip göstermediği kontrol edilmiştir.

Araştırmanın dış güvenilirliğinin (teyit edilebilirliği) sağlanması için ise birden fazla aşamadan oluşan içerik analizi süreçleriyle verilerden ulaşılan bulgular sürekli olarak ham veriler ile karşılaştırılarak teyit edilmiştir.

4. BULGULAR VE YORUM

Araştırma kapsamında ortaokul öğrencilerinin gelişmiş ve gelişmekte olan kesir şemalarının ve şemalar kapsamında kullandıkları kesirsel faaliyetlerin incelenmesi amaçlanmıştır. Şemalar alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu olmak üzere dört farklı kesir modeli üzerinde kesirsel faaliyetlerin uygulanması açısından değerlendirilmiştir. Araştırmanın bulguları araştırma soruları kapsamında kesir şemaları ve kesirsel faaliyetler olmak üzere iki temel unsur üzerinde odaklanılarak iki başlık altında düzenlenmiştir. İlk olarak gelişmiş kesir şemalarına sahip olan ortaokul öğrencilerinin verileri ele alınmış ve bu şemalar kapsamında kesirsel faaliyetlerin farklı modeller üzerinde etkili ve doğru uygulamaları farklı sınıf düzeylerinden öğrenci yanıtlarıyla açıklanmıştır. Ardından kesir şemaları için gelişim sürecinde olan ortaokul öğrencilerinin verileri esas alınmış ve şemaların gelişim sürecinde rol oynayan kesirsel faaliyetlerin farklı modeller üzerinde etkili ve doğru olmayan uygulamalarına odaklanılmıştır. Bu bağlamda kesirsel faaliyetleri farklı modeller üzerinde uygularken öğrencilerin yaşadıkları güçlükler farklı sınıf düzeylerinde örneklerle açıklanmıştır. Araştırma bulgularının akış şeması Şekil 4.1.'de sunulmuştur.



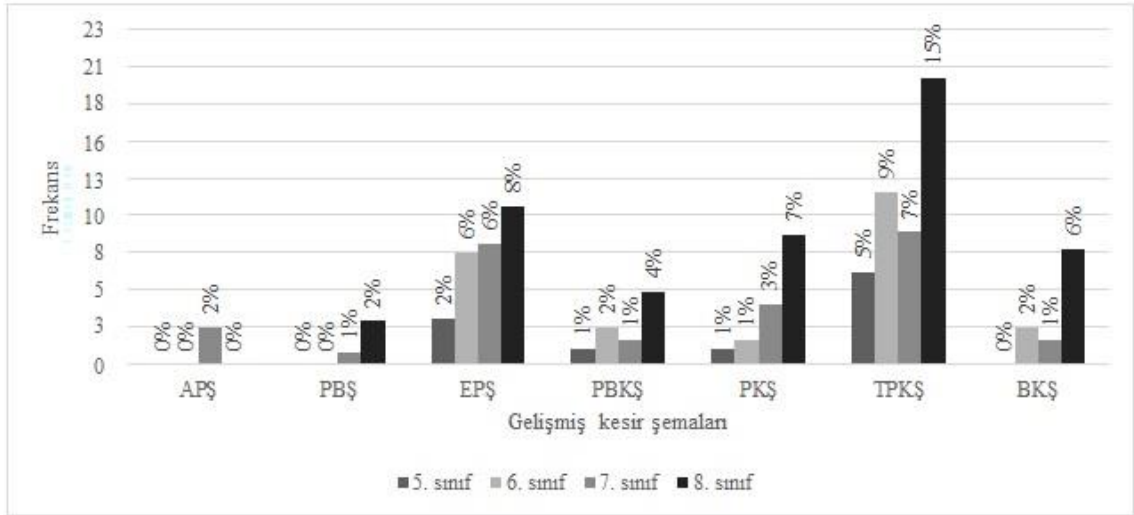
Şekil 4.1. Bulgular akış şeması

4.1. Öğrencilerin Gelişmiş Kesir Şemalarına Ait Bulgular

Bu bölümün amacı Steffe ve Olive'in (2010) kavramsal çerçevesine göre öğrencilerde ortaya çıkan kesir şemalarını ve farklı kesir modelleri üzerinde etkili olarak kullanabildikleri kesirsel faaliyetleri betimlemektir. Yapılan analize göre eğer bir öğrenci, belli bir şema bağlamında kesirsel faaliyetleri kullanmalarına göre farklı modeller ile sunulan bütün sorulara doğru uygulayabilmiş ise öğrencinin o şema için gelişim sürecini tamamladığı yönünde bir değerlendirme yapılmıştır. Aksi halde öğrenciye sunulan kesir modellerinden bazılarına doğru yanıt bazılarına yanlış yanıt vermişse öğrenci o şema için halen gelişim sürecinde yönünde ve sunulan modellerin hiçbirine doğru yanıt verememişse şema henüz oluşmamış şeklinde değerlendirilmiştir.

Araştırma kapsamında ortaokul öğrencilerinin aynı anda parçalama şeması (APŞ), eş parçalama şeması (EPŞ), parça bütün şeması (PBŞ), parçalı birim kesir şeması (PBKŞ), parça kesir şeması (PKŞ), tersinir parça kesir şeması (TPKŞ) ve bileşik kesir şeması (BKŞ) olmak üzere yedi farklı şema incelenmiştir. Araştırmaya dahil olan 557 öğrenciden çoğunun kesir şemalarının halen gelişim sürecinde olduğu ortaya çıkmıştır. Buna karşın eş parçalama şeması (EPŞ), parçalı birim kesir şeması (PBKŞ), parça kesir şeması (PKŞ) ve tersinir parça kesir şeması (TPKŞ) olmak üzere dört şema için tüm sınıf düzeylerinde şeması gelişmiş olan öğrencilere rastlanılmıştır. Ancak aynı anda parçalama şeması (APŞ), parça bütün şeması (PBŞ) ve bileşik kesir şeması (BKŞ) olmak üzere üç şema için bazı sınıf düzeylerinde şeması gelişmiş yani şema kapsamındaki tüm sorulara doğru yanıt veren öğrencilerin olmadığı görülmüştür.

Araştırmanın bulgularına göre öğrencilerde karşılaşılan gelişmiş kesir şemalarının sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği Şekil 4.2.'de sunulmuştur. Grafikte verilen bilgiler 5. sınıf düzeyi için $n = 121$ (%100), 6. sınıf düzeyi için $n = 151$ (%100), 7. sınıf düzeyi için $n = 155$ (%100), ve 8. sınıf düzeyi için $n = 130$ (%100) olmak üzere toplamda 557 kişilik katılımcı grubunun verilerinden oluşturulmuştur.



Şekil 4.2. Öğrencilerde karşılaşılan gelişmiş kesir şemalarının sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği

Şekil 4.2.'ye göre ortaokulun 5., 6. ve 8. sınıf düzeylerinde öğrencilerin aynı anda parçalama şeması (APŞ) için henüz gelişim sürecini tamamlamadıkları görülürken 7. sınıf düzeyindeki öğrencilerin %2'sinin APŞ şemasının gelişmiş olduğu görülmektedir. APŞ şeması birimleştirme ve parçalama kesirsel faaliyetlerini nicelikler üzerinde etkili uygulamayı gerektirmektedir. Ancak yapılan analize göre APŞ bağlamında öğrencilerin birimleştirme ve parçalama kesirsel faaliyetlerini farklı modeller üzerinde uygulamakta zorlandıkları ve APŞ kapsamında sorulan soruların hepsi doğru yanıt veren öğrencilerin çok az sayıda ($f = 3$) olduğu görülmüştür. Örnek olarak bir öğrenci çubuk modeli ile sorulan bir soru üzerinde APŞ ile uyumlu kesirsel faaliyetleri kullanarak doğru yanıtla ulaşırken; alan modeli üzerinde birimleştirme ve/veya parçalama kesirsel faaliyetini uygulamakta zorlandığından doğru yanıtla ulaşamamıştır. Bunun yanı sıra parça bütün şeması (PBŞ) ile uyumlu kesirsel faaliyetler kullanarak ilgili soruların hepsine doğru yanıt veren ve PBŞ'si gelişmiş öğrencilerle yalnızca 7. ve 8. sınıf düzeyinde yine çok az sayıda (sırasıyla $f = 1, f = 3$) karşılaşırlarken, 5. ve 6. sınıf düzeylerinde karşılaşılmamıştır. Benzer şekilde bileşik kesir şeması (BKŞ) bağlamında ise 5. sınıf düzeyinde BKŞ'si gelişmiş öğrencinin olmadığı görülürken, 6., 7. ve 8. sınıf düzeylerinde (sırasıyla $f = 3, f = 2, f = 8$) az sayıda öğrencinin BKŞ'si gelişmiş olduğu ortaya çıkmıştır.

Şekil 4.2. incelendiğinde eş parçalama şeması (EPŞ) ve parça kesir şeması (PKŞ) bağlamında sınıf düzeyleri arttıkça şeması gelişmiş öğrenci oranlarının da giderek arttığı görülmektedir. Ancak parçalı birim kesir şeması (PBKŞ) ve tersinir parça kesir şeması

(TPKŞ) bağlamında şeması gelişmiş öğrenci oranlarına bakıldığında ise 5. sınıftan 8. sınıfa doğru genel bir artış görölse de 6. sınıf düzeyinden 7. sınıf düzeyine geçerken az da olsa bir düşüş olduğu görölmektedir.

Öte yandan Şekil 4.2.'ye göre tüm sınıf düzeylerinde TPKŞ şeması gelişmiş öğrencilerin en fazla olduğu dikkat çekmektedir. TPKŞ şeması parça kesir büyüklüğünden bütünün büyüklüğünü oluşturmayı gerektiren ve tersine işleyen bir şemadır. Bu bağlamda TPKŞ kapsamında öğrencilerin parçalama ve tekrarlama kesirsel faaliyetlerini tersinir bir şekilde ve eş zamanlı olarak uygulamaları beklenmektedir. Literatürde bu şemanın bazı şemalara göre daha gelişmiş bir şema olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Norton ve Wilkins, 2009b; 2012). Ancak bu araştırmada TPKŞ kapsamında sorulan soruların hepsine doğru yanıt veren öğrencilerin diğer şemalar göre daha fazla olduğu ortaya çıktığından bu öğrencilerin verileri özel olarak yeniden incelenmiştir. Yapılan inceleme sonrasında TPKŞ'si gelişmiş 5., 6. ve 7. sınıf düzeylerindeki öğrencilerin ortaokul matematik dersi öğretim programında (MEB, 2013) yer alan bazı kazanımlar doğrultusunda hareket ederek parçadan bütüne ulaşmayı hedefleyen TPKŞ sorularında aritmetik işlemlerden veya kesirleri yüzdelere dönüştürüp yüzdelere faydalanarak sonuca ulaştıkları görölmüştür. Bu bağlamda ortaokul matematik dersi öğretim programında dikkat çeken bazı kazanımlar aşağıda verilmiştir.

“5.1.3.7. Bir çokluğun istenen basit kesir kadarını ve basit kesir kadarı verilen bir çokluğun tamamını birim kesirlerden yararlanarak hesaplar.

6.1.6.2. Bir bütünün iki parçaya ayrıldığı durumlarda iki parçanın birbirine veya her bir parçanın bütüne oranını belirler; problem durumlarında oranlardan biri verildiğinde diğerini bulur.

7.1.5.1. Bir çokluğun belirtilen bir yüzdesine karşılık gelen miktarı bulur; belirli bir yüzdesi verilen çokluğu bulur.” (MEB, 2013)

Yukarıda verilen kazanımlar doğrultusunda öğrencilerin TPKŞ sorularına aritmetik işlemler aracılığıyla doğru yanıt vermeleri ile öğrencilerden beklenen TPKŞ'ye uygun kesirsel faaliyetler uygulamaları karşılaştırmaları olarak incelenmiştir. Nihayetinde parça kesir büyüklüğü ile verilen bir nicelikten bütünün niceliği aritmetik işlemlerle oluşturan öğrencilerin parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini zihinsel olarak içselleştirdiği ve parça ile bütün arasındaki ilişkiyi hem parçadan bütüne hem de bütünden parçaya iki yönlü olarak ve tersine işlenebilecek şekilde inşa ettikleri yönünde bir kanıya varılmıştır. Bu

bağlamda TPKŞ'si gelişmiş olan öğrencilerden 8. sınıflardan ziyade 5., 6. ve 7. sınıf düzeyindeki öğrencilerin çoğunun TPKŞ sorularını aritmetik işlemlerden faydalanarak doğru sonuca ulaştıkları ortaya çıkmıştır. TPKŞ bağlamında aritmetik işlemler haricinde kullanılan kesirsel faaliyetlerin öğrenci yanıtlarına somut olarak yansıdığı örnekler TPKŞ'ye ilişkin bulgular bölümünde detaylı olarak verilmiştir.

Yapılan içerik analizi sonucunda bulgular bölümünün ilk kısmı araştırmanın birinci problemi doğrultusunda ele alınmış ve bu bölümde şemalara ilişkin bulgular yalnızca şeması gelişmiş öğrenci verilerinden oluşturulmuştur. Bu bağlamda şemalar ile uyumlu kesirsel faaliyetlerin farklı modeller üzerindeki etkili ve doğru uygulamalarının betimlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda parçalara ayırma şemaları başlığında APŞ ile EPŞ ve PBŞ, PBKŞ, PKŞ, TPKŞ ve BKŞ şemaları olmak üzere toplamda yedi farklı şemalara ilişkin bulgular ayrı başlıklar halinde düzenlenerek sunulmuştur.

4.1.1. Parçalara ayırma şemalarına (APŞ ve EPŞ) ilişkin bulgular

Parçalara ayırma şemaları herhangi bir bütünün eş parçalara ayrılması veya paylaştırılması durumlarında kullanılır. Bu durumlarda birimleştirme (unitizing) ve parçalama (partitioning) kesirsel faaliyetlerinin kullanımı söz konusu olduğunda aynı anda parçalama şeması (APŞ) aktif olarak çalışırken; birimleştirme, parçalama, tekrarlama (iterating) ve yerleşik bütünden ayırma (disembedding) faaliyetlerinin bir arada kullanımı söz konusu olduğunda ise eş parçalama şeması (EPŞ) aktif olarak çalışır. Bunun yanı sıra APŞ ile EPŞ şemaları öğrencilerin kesirsel faaliyetleri modeller üzerinde uygulama amaçlarına göre farklılık gösterir. APŞ'de öğrencinin amacı parçalar üretmek iken, EPŞ'de öğrencinin amacı özdeş parçalar üretmeyi amaçlar ve bu amaca uygun olarak tekrarlama faaliyetini kullanarak parçaların özdeşliğini doğrular.

Veri toplama araçlarında parçalama ayırma şemaları (APŞ ve EPŞ) öğrencilere dört farklı kesir modeli (alan (daire ve dikdörtgen), çubuk, küme ve sayı doğrusu) beş açık uçlu soru şeklinde sunulmuştur. Elde edilen veriler APŞ ve EPŞ şemaları bağlamında incelenerek ayrı ayrı kodlanmıştır. Bu kodlamalar sonucunda beş farklı soruya EPŞ ile doğru yanıt veren öğrenciler EPŞ'si gelişmiş; beş farklı soruya APŞ ile doğru yanıt veren öğrenciler APŞ'si gelişmiş; beş sorudan hiçbirine doğru yanıt veremeyen öğrenciler ise parçalara ayırma şemaları henüz oluşmamış (PŞ oluşmamış) şeklinde değerlendirilmiştir.

Bununla birlikte beş sorudan en az birini EPŞ ile doğru yanıtlayan ancak tüm sorulara doğru yanıt veremeyen öğrenciler EPŞ'si henüz gelişim sürecinde şeklinde değerlendirilmiştir. Beş sorudan hiçbirinde EPŞ ile uyumlu kesirsel faaliyet kullanmadan ancak beş sorudan bazılarını yalnızca APŞ ile doğru yanıt veren öğrenciler ise APŞ'si henüz gelişim sürecinde şeklinde değerlendirilmiştir. Yapılan içerik analizine göre ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde öğrencilerde ortaya çıkan parçalara ayırma şemalarına (PŞ) ilişkin bulgular Tablo 4.1.'de verilmiştir.

Tablo 4.1. PŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları

		5. sınıf		6. sınıf		7. sınıf		8. sınıf	
		f	%	f	%	f	%	f	%
PŞ oluşmamış		5	%4	12	%8	7	%5	5	%4
PŞ gelişim sürecinde	APŞ gelişim sürecinde	54	%45	41	%27	33	%21	25	%19
	EPŞ gelişim sürecinde	59	%49	89	%59	102	%66	89	%68
PŞ gelişmiş	APŞ gelişmiş	0	-	0	-	3	%2	0	-
	EPŞ gelişmiş	3	%2	9	%6	10	%7	11	%8
Toplam		121	%100	151	%100	155	%100	130	%100

Tablo 4.1. incelendiğinde parçalara ayırma veya paylaşırma durumlarında öğrencilerin çoğunun EPŞ şeması ile uyumlu kesirsel faaliyetler uyguladıkları görülmektedir. Bu bağlamda EPŞ'si halen gelişim sürecinde olan öğrencilerin 5. sınıf düzeyinden 8. sınıf düzeyine doğru sırasıyla %49, %59, %66 ve %68 oranlarıyla giderek arttığı görülmüştür. Benzer şekilde sınıf düzeylerinde seyrek olarak karşılaşılsa da EPŞ'si gelişmiş öğrencilerin de 5. sınıf düzeyinden 8. sınıf düzeyine doğru sırasıyla %2, %6, %7 ve %8 oranlarıyla giderek arttığı ortaya çıkmıştır. Bunun yanı sıra Tablo 4.1'e göre APŞ şeması ile uyumlu kesirsel faaliyetleri dört farklı model üzerine etkili ve doğru bir şekilde uygulayarak APŞ'si gelişmiş olarak değerlendirilen öğrencilere (f = 3) yalnızca 7. sınıf düzeyinde rastlanmıştır. Ayrıca EPŞ'ye göre daha basit uygulamaları içerdiği ve Tablo 4.1.'deki bilgiler göz önüne alındığında, APŞ şeması kapsamında birimleştirme ve parçalama kesirsel faaliyetlerini dört farklı kesir modelinden yalnızca bazıları üzerinde etkili ve doğru bir şekilde uygulayabilen ve APŞ'si halen gelişim sürecinde olarak değerlendirilen öğrencilerin 5. sınıf düzeyinden 8. sınıf düzeyine doğru

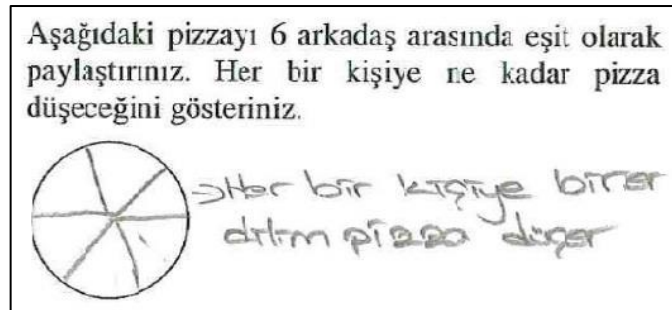
sırasıyla %45, %27, %21 ve %19 oranlarıyla giderek azaldığı dikkat çekmektedir. Özetlemek gerekirse elde edilen bulgular 5. sınıf düzeyinden 8. sınıf düzeyine doğru ilerledikçe APŞ şemasının yerini zamanla EPŞ şemasına bıraktığını göstermiştir.

Araştırmanın veri toplama araçlarında parçalara ayırma ve paylaşırma görevleri sorulduğunda APŞ ve EPŞ şemaları bağlamında etkili ve doğru kesirsel faaliyetleri uygulayarak doğru yanıt veren öğrencilerden elde edilen bulgular ayrı başlıklar altında düzenlenmiştir. APŞ şeması kapsamında birleştirme ve parçalama kesirsel faaliyetlerinin farklı modeller üzerindeki uygulamaları; EPŞ şeması kapsamında ise birleştirme, parçalama ve tekrarlama kesirsel faaliyetlerinin farklı modeller üzerindeki uygulamaları incelenmiştir.

4.1.1.1. Aynı anda parçalama şemasına (APŞ) ilişkin bulgular

Yapılan incelemelere göre belli bir bütünü eş parçalara ayırma ve paylaşırma durumlarında birleştirme ve parçalama faaliyetlerinin aynı anda (anlık) düşünülerek gerçekleştirildiği aynı anda parçalama şeması (APŞ) kapsamında öğrencilere sorulan soruların hepsine doğru yanıt veren yalnızca 7. sınıf düzeyinde üç öğrenci olduğu ortaya çıkmıştır (bkz. Tablo 4.1.). Bu bağlamda APŞ ile uyumlu faaliyetleri farklı kesir modelleri üzerinde gerçekleştiren ve APŞ'si gelişmiş olarak değerlendirilen üç öğrenciden biri ile yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiştir.

APŞ şeması gelişmiş ve yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 7. sınıf öğrencisi Ö5'in APŞ kapsamında alan modeli ile sorulan soruya yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.1.'de verilmiştir.

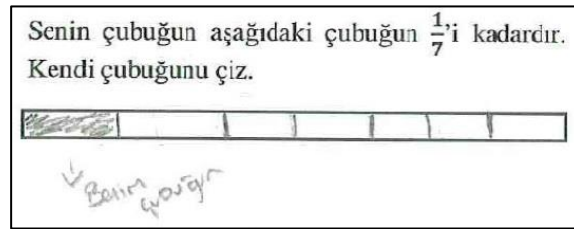


Görsel 4.1. APŞ'si gelişmiş Ö5'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.1.'de görülen soruda öğrencilerden daire alan modeli üzerinde eşit büyüklükte parçalar oluşturması beklenmektedir. Ö5'in hem yazılı değerlendirme

aracında hem de görüşme esnasında kullandığı “her bir kişiye birer dilim düşer” ifadesi öğrencinin APŞ bağlamında birimleştirme faaliyetini bütünün içerisindeki parçaları “1” olarak ve bütünü “6” olarak kullandığının göstergesidir. Ayrıca Ö5’in bu soruda her bir parçanın “1/6”lık kesir büyüklüğünü temsil ettiğini belirtmediği gibi diğer parçalara ayırma görevlerinde de kesir dilini kullanmadığı görülmüştür. Bu doğrultuda öğrencinin parçalara “1” olarak ölçü birimi ataması ve bütünü “6 parça” olarak tanımlaması, birimleştirme faaliyetinde parçaları bütünün birer parçası olarak gördüğünü ancak parçalara 1/6’lık gibi başlı başına bir ölçü birimi atamadığını göstermektedir.

Bununla beraber Görsel 4.1. incelendiğinde Ö5’in alan modeli ile verilen daireyi 6 eş parçaya ayırırken ardışık sıralı kesme/çizme işlemleriyle parçalama faaliyetini uyguladığı görülmektedir. Öğrencinin oluşturduğu parçalar tam olarak özdeş olmasa bile öğrenci tarafından eşit büyüklükte olarak algılanmaktadır. Ö5 ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşme esnasında öğrenciye “sence adil bir paylaşım oldu mu” şeklinde bir soru yöneltildiğinde öğrenci “evet çünkü eşit çizdim” yanıtını vermiştir. Dolayısıyla öğrenci parçalama faaliyetini alan modeline uygularken, ardışık kesme işlemlerini kendisinin eşit büyüklükte olduğuna inandığı ölçüler doğrultusunda gerçekleştirdiğini düşünmektedir. Bunun yanı sıra Ö5 hiçbir şekilde parçaların eşit büyüklükte olduğunun yarım, çeyrek veya açığı gibi ölçülerden faydalanılarak doğrulanabileceğini düşünmemiş dolayısıyla tekrarlama faaliyetini de kullanmamıştır. Ayrıca APŞ şeması gelişmiş Ö5’in çubuk modeli üzerinde de alan modeline benzer şekilde kesirsel faaliyetler uyguladığı görülmüştür. APŞ kapsamında çubuk modeli ile sorulan soruya 7. sınıf öğrencisi Ö5’in yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.2.’de verilmiştir.



Görsel 4.2. APŞ'si gelişmiş Ö5'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-2

Görsel 4.2.’de görülen Ö5’in yazılı ifadesi ve görüşme esnasındaki sözlü ifadeleri doğrultusunda öğrencinin çubuk modeli üzerinde birimleştirme faaliyetini alan modelindeki gibi kullandığı görülmüştür. Aşağıda Ö5 ile yapılan görüşme özetlenmiştir.

Araştırmacı: (Görsel 4.2.'de görülen soruyu yeniden çözmesini ister.)

Ö5: Kendi çubuğumu bulmam gerekiyor. (Çubuk üzerinde ardışık kesme işlemleri gerçekleştirir ve çubuğu yedi parçaya ayırır. Bu süreçte parçaları 1, 2, 3, ..., 7 şeklinde sayılarla eşleştirerek mırıldanır. İlk parçayı gösterir.) Burası benim çubuğum.

A: Peki senin çubuğun bütün çubuğun ne kadardır?

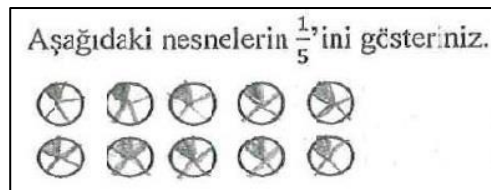
Ö5: 7'de 1'dir.

A: Peki bütün çubuğun tamamı ne kadardır?

Ö5: O da 7 tanedir.

Yukarıda bahsedildiği gibi Ö5'in APŞ kapsamında çubuk modelinde birimleştirme faaliyetini bütünü "7 tane (parça)" olarak tanımlamış ve kendi çubuğu olarak seçtiği bir parçayı da bütünün bir parçası yani "7'de 1'i (7 parçadan 1 parçası)" şeklinde algılamaktadır. Dolayısıyla Ö5'in birimleştirme faaliyeti "bütün paydadaki sayı kadar parçadan oluşur" ve "her bir parça bütüne ait ve bütündeki parçalardan bir tanesidir" şeklinde kullanmıştır. Ayrıca Görsel 4.2.'ye bakıldığında Ö5'in oluşturduğu parçaların birbirine eşit olmadığı görülmektedir. Ancak yapılan görüşme esnasında Ö5'in alan modeli üzerindeki gibi oluşturduğu parçaların eşit büyüklükte olduğuna inanmaktadır. Nihayetinde öğrencinin oluşturduğu parçalar büyüklük açısından birbirine yakın olsa da alan modelindeki gibi parçaların özdeş büyüklükte olduğunu doğrulayamadığı görülmüştür. Zaten Ö5 çubuk modelini parçalara ayırırken herhangi bir parçanın kopyasını tekrarlama faaliyetinde bulunmamış ve APŞ kapsamında yalnızca birimleştirme ve parçalama faaliyetlerini temel düzeyde kullandığı görülmüştür.

Ayrıca APŞ'si gelişmiş 7. sınıf öğrencisi Ö482'nin küme modeli üzerinde yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.3.'te verilmiştir.



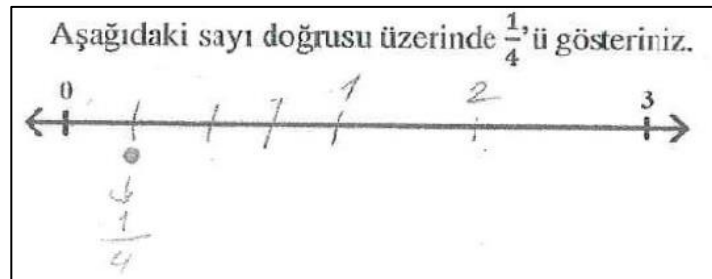
Görsel 4.3. APŞ'si gelişmiş Ö482'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.3. incelendiğinde öğrencinin ayırık nesneler halinde verilen bir bütünü eş parçalara ayıramadığı, onun yerine her bir nesneyi sürekli olan alan modeli gibi

parçalama faaliyetini uyguladığı görülmektedir. Bu sebeple Ö482'nin APŞ bağlamında birimleştirme faaliyetini Ö5 gibi kullandığı görülmüştür. Daha açık bir ifadeyle Ö482 her bir nesne ayrı olarak ele almış ve her bir nesneyi bütün olarak algılamıştır. Buna bağlı olarak bütünü paydadaki sayı kadar parçadan oluşur şeklinde birimleştirmiş ve her bir parçayı da bütünün bir parçası olarak değerlendirmiştir. Aynı zamanda öğrencinin birimleştirme faaliyetini 10 nesnenin her birine ayrı ayrı uygulaması tekrarlama faaliyetini de kullanabileceğinin göstergesi olabilir. Ancak bu durum Ö482 ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilemediği için doğrulanamamış olsa da öğrencinin yazılı değerlendirme aracındaki diğer yanıtları incelendiğinde ne parçaların özdeşliğini doğrulamak için ne de birim kesirleri tekrarlanabilir halde kullanmak için tekrarlama faaliyetini etkili bir şekilde gerçekleştirmediği kanısına varılmıştır.

Öte yandan Ö482'nin küme modeli üzerinde parçalama faaliyetini ayrık modele sürekli modelmiş gibi davranarak ve Ö5'in sürekli modellere uyguladığı gibi parçaların özdeşliğini (kendisine veya başkasına) doğrulamaksızın ardışık/sıralı kesme işlemleriyle uyguladığı görülmektedir. Dolayısıyla 7. sınıf öğrencisi Ö482'nin de Ö5 gibi birimleştirme ve parçalama faaliyetlerini temel düzeyde kullanabildiği görülmüştür.

Bunların yanı sıra parçalara ayırma şemaları bağlamında öğrencilerin sayı doğrusu modeli üzerinde kesirsel faaliyetleri nasıl uyguladıkları incelenmiştir. Bu bağlamda APŞ'si gelişmiş ve üç öğrencinin de birimleştirme ve parçalama faaliyetlerini sayı doğrusu modeli üzerinde temel düzeyde kullanırken, tekrarlama faaliyetini kullanmadıkları görülmüştür. APŞ'si gelişmiş ve 7. sınıf öğrencisi Ö472'nin sayı doğrusu modeli ile sorulan soruya yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.4.'te verilmiştir.



Görsel 4.4. APŞ'si gelişmiş Ö482'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.4.'te (0-3) aralığında verilen sayı doğrusu modeli üzerinde öğrencilerden $\frac{1}{4}$ 'ü yerleştirmeleri istenmiştir. Bu soruda öğrencilerden parçalara ayırma şemaları bağlamında eşit büyüklükte parçalar oluşturmaları beklenmektedir. Ancak Görsel 4.4.'te görüldüğü gibi 7. sınıf öğrencisi Ö472 sayı doğrusu modeliyle sorulan bu soruya APŞ bağlamında yalnızca birimleştirme ve parçalama kesirsel faaliyetlerini kullanarak yanıt vermiştir. Nitekim Ö472 sıra (0-3) aralığında verilen sayı doğrusunu 3 tam sayı büyüklüğünü de içerisinde barındıracak şekilde tanımlamış olsa da birimleştirme kesirsel faaliyetini bütün üzerinde yani (0-1) aralığına göre ve bütünün içerisinde paydadaki sayı kadar parça olur şeklinde gerçekleştirmiştir. Aynı zamanda parçalama faaliyetini de ardışık kesme/çizme işlemleriyle gerçekleştirmiştir. Çünkü Görsel 4.4. incelendiğinde öğrencinin öncelikle 0'dan başlayarak dört parçayı (0-1) aralığında oluşturduğu, ardından sayı doğrusu üzerinde geri kalan kısmı da iki parçaya ayırıp "2" noktasını yerleştirdiği görülmektedir. Eğer ki Ö472 tekrarlama faaliyetini etkili bir şekilde kullanmış olsaydı (0-1), (1-2) ve (2-3) aralıklarının da eşit büyüklükte olması gerektiğinin farkında olur ona göre parçalama faaliyetini uygulardı. Nihayetinde (0-3) aralığında verilen sayı doğrusunda $\frac{1}{4}$ 'ü yerleştirmek için eşit büyüklükte parçaların oluşturulması beklenirken, öğrencilerin de öncelikle tam sayı aralıklarını eşit bir şekilde parçalamaları ardından (0-1) aralığını dört eşit parçaya ayırmaları gerekirdi.

Kısaca özetlemek gerekirse APŞ bağlamında dört farklı model üzerinde birimleştirme ve parçalama faaliyetlerinin uygulanmasıyla APŞ'si gelişmiş olarak değerlendirilen üç öğrencinin verilerinden örnekler verilmiştir. Yapılan içerik analizine göre aynı anda parçalama şemasında birimleştirme ve parçalama kesirsel faaliyetlerinin farklı modeller üzerinde temel düzeyde uygulandığı görülürken, tekrarlama faaliyetinin yoksunluğundan dolayı öğrencilerin parçaları eşit olarak tanımlasalar da özdeşliğini kendilerine veya başkasına doğrulayamadıkları görülmüştür. Ayrıca içerik analizinde yapılan kodlamalara göre öğrencilerin APŞ ile uyumlu faaliyetleri kullanabilseler de farklı modeller üzerinde uygulamakta zorlandıkları görülmüştür. Bir sonraki bölümde öğrencilerin APŞ bağlamında farklı kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarılarla ilişkin bulgular düzenlenmiştir.

4.1.1.1.1. APŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması

Bu bölümde Tablo 4.1.'de görülebileceği gibi APŞ şeması gelişmiş öğrencilerin yalnızca üç kişi olduğu görülmektedir. APŞ'si gelişmiş olan öğrenciler ile parçalara ayırma şemaları bağlamında sorulan soruların bir kısmına şema ile uyumlu faaliyetler uygulayan ve APŞ şeması gelişim sürecinde olarak değerlendirilen öğrencilerin verileri incelenerek farklı kesir modelleri üzerinden aldıkları puanlar oluşturulmuştur. Oluşturulan puanlara göre öğrencilerin APŞ kapsamında kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı yüzdeleri ortaokulun farklı sınıf düzeylerine göre düzenlenerek Tablo 4.2.'de verilmiştir.

Tablo 4.2. APŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı

	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf	Toplam
Alan	%13	%12	%18	%15	%15
Çubuk	%53	%44	%46	%20	%39
Küme	%23	%36	%38	%75	%45
Sayı doğrusu	%15	%13	%11	-	%9

Tablo 4.2.'ye göre aynı anda parçalama şeması (APŞ) gelişmiş ve gelişim sürecinde olan (5. sınıf $n = 54$, 6. sınıf $n = 41$, 7. sınıf $n = 36$ ve 8. sınıf $n = 25$ olmak üzere) toplamda 156 öğrencinin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı yüzdeleri görülmektedir. Burada verilen başarı yüzdeleri öğrencilerin APŞ ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek model bazında aldıkları puanlardan üretilmiştir.

Tablo 4.2. incelendiğinde APŞ kapsamında 5. sınıf düzeyinde 53%, 6. sınıf düzeyinde %44 ve 7. sınıf düzeyinde %46 oranlarıyla en çok başarı gösterilen modelin çubuk modeli olduğu görülürken; 8. sınıf düzeyinde ise %75 oranıyla en başarılı olunan modelin küme modeli olduğu görülmektedir. Ayrıca 5. ve 6. sınıf düzeyindeki öğrencilerin sırasıyla %13 ve %12 oranlarıyla en az başarı gösterdikleri modelin alan modeli olduğu ortaya çıkmıştır. Ayrıca APŞ kapsamında 7. sınıf düzeyinde %11 ile en düşük oranla başarı gösterilen modelin sayı doğrusu modeli olduğu görülürken, 8. sınıf düzeyinde ise sayı doğrusu modeli üzerinde başarılı olamadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

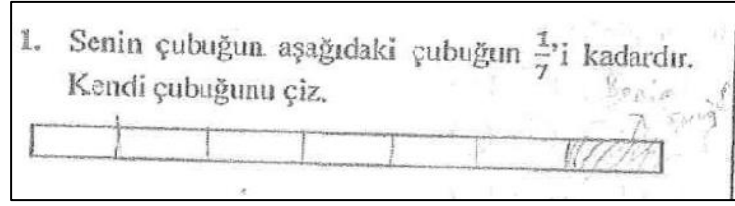
Öte yandan Tablo 4.2.'ye göre küme modelinde APŞ bağlamında 5. sınıftan 8. sınıfa doğru sırasıyla %23, %36, %38 ve %75 oranlarıyla sürekli bir artış olduğu görülmekle birlikte 7. sınıftan 8. sınıfa büyük bir farkla sıçrama olduğu dikkat çekmektedir. Bunun yanı sıra çubuk modelinde ise APŞ bağlamında 7. sınıftan 8. sınıfa geçerken %46 oranından %20 oranına önemli ölçüde bir düşüşün ortaya çıktığı görülmektedir. Nitekim bu düşüşün bir önceki bölümde verilen 8. sınıf düzeyinde APŞ'si gelişim sürecinde olan öğrenci sayılarının düşüşü ile ilişkili olduğu düşünülmektedir (bkz. Tablo 4.1.).

4.1.1.2. Eş parçalama şemasına (EPŞ) ilişkin bulgular

Eş parçalama şeması (EPŞ) birimleştirme (unitizing), parçalama (partitioning), yerleşik bütünden ayırma (disembedding) ve tekrarlama (iterating) kesirsel faaliyetlerini nicelikler üzerinde etkin olarak kullanmayı gerektirir. Ayrıca EPŞ bir bütünün eş parçalara ayrılması veya paylaştırılması durumlarında öğrenciler tarafından etkinleştirilir. Bu şemanın asıl amacı birbirleriyle özdeş parçalar üretmektir.

Yapılan içerik analizine göre belli bir bütünü eş parçalara ayırma ve paylaştırma durumlarında dört farklı model kapsamında sorulan soruların hepsine doğru yanıt vererek eş parçalama şeması (APŞ) ile uyumlu faaliyetler gerçekleştiren ve EPŞ'si gelişmiş olarak değerlendirilen öğrencilere (5. sınıf $f = 3$; 6. sınıf $f = 9$, 7. sınıf $f = 10$ ve 8. sınıf $f = 11$) tüm sınıf düzeylerinde rastlanıldığı bir önceki bölümde verilmiştir (bkz. Tablo 4.1.). EPŞ'si gelişmiş olan bu öğrenciler arasından 5. sınıftan iki, 6. ve 7. sınıftan birer ve 8. sınıftan dört kişi olmak üzere toplamda 8 öğrenci ile yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin yazılı değerlendirme aracındaki sorulara verdikleri yanıtların doğrulanması ve daha derin bir anlayış yakalamak amacıyla yapılan görüşmelerde yazılı değerlendirme aracındaki aynı sorular kullanılmıştır. Ayrıca görüşme esnasında öğrencilerden bazı soruları yeniden çözmeleri istenmiş ve uygun zaman geldiğinde öğrencilere yazılı değerlendirme aracındaki yanıtları kendilerine gösterilerek hangi düşünceyle yanıtladıklarını açıklamaları istenmiştir.

EPŞ şeması gelişmiş ve yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 5. sınıf öğrencisi Ö21'in EPŞ kapsamında çubuk modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.5.'te verilmiştir.



Görsel 4.5. EPŞ'si gelişmiş Ö21'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.5.'te 5. sınıf öğrencisi Ö21'in çubuk modeli üzerinde eş parçalama şeması bağlamında yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt görülmektedir. Bu soruda öğrencilerden çubuk modelini kesir büyüklüğüne göre eş parçalara ayırması beklenmektedir. Aynı zamanda EPŞ kapsamında nicelik üzerinde oluşturulan eş parçaların birbirleriyle özdeş olduğunun farkındalığı çok önemlidir. Bu doğrultuda Görsel 4.5.'e göre Ö21'in çubuğu eş parçalara ayırdıktan sonra, çubuğun $1/7$ 'i olarak sıklıkla tercih edilen ilk parçanın aksine son parçasını seçtiği görülmektedir. Ö21'in EPŞ bağlamında verdiği bu yanıtın kesirsel faaliyetleri nasıl kullandığını daha derin bir anlayışla incelemek için yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Görüşme esnasında öğrenciye yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı gösterilmiş ve ne düşünerek yanıtladığı sorulmuştur. Aşağıda 5. sınıf öğrencisi Ö21 ile yapılan görüşmeden alıntılara yer verilmiştir.

A: Bu soruyu çözerken ne düşündün? Nelere dikkat ettin? Açıklar mısın?

Ö2: (Soruyu yeniden okur.) Kendi çubuğumu bulmam lazım. Bunun için 7'ye böldüm. 1 tanesi de benim oluyor.

A: Peki çubuğu 7'ye bölerken nelere dikkat ettin?

Ö21: 1 bölü 7'yi istemiş. O yüzden hepsi aynı olması gerekiyor.

A: Sence neden hepsi aynı olması gerekiyor?

Ö21: (kısa bir sessizlik) Çünkü hepsi aynı olmazsa hata olur.

A: Peki aynı soruyu burada (görüşme aracında) yeniden yapar mısın?

Ö21: (Çubuk üzerinde çizdiği ilk parçaların büyük olduğunu fark eder, sonra silip daha küçük parçalar oluşturur. Emin olana dek birtakım kesme yerleri belirleyerek ardından çubuğu 7 eşit parçaya ayırır.) Sanırım böyle doğru oldu.

A: Sanırım mı yoksa emin misin?

Ö21: (1-2 saniye şekle yeniden bakar ve üzerinde parmak gezdirir.) Eminim hepsi eşit oldu. Bunlardan biri de benim çubuğum zaten.

A: (Öğrenciye yazılı değerlendirme aracındaki yanıtını yeniden gösterir.) Peki burada 'benim çubuğum' diye gösterdiğin parçayı neye göre seçtin?

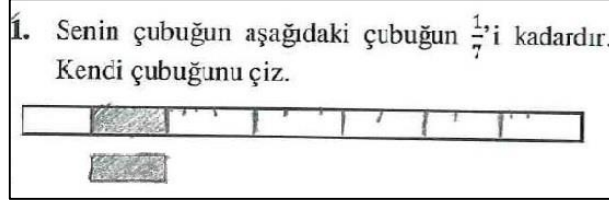
Ö21: Aslında bir şeye göre seçmedim. Öylesine onu seçtim.

A: Peki bunu seçmeseydin hangisini seçerdin? Fark eder miydi senin için?

Ö21: Fark etmezdi. Çünkü hepsi aynı zaten. O yüzden (Çubuğun sonundaki parçasını gösterir.) bunu seçtim.

A: Peki burada (Görüşme aracındaki soruyu gösterir.) hangisini seçeceksin?

Ö21: (Çubuğun baştan ikinci parçasını seçer kopyasını şeklin altına çizer. (bkz. Görsel 4.6.))



Görsel 4.6. Ö21 ile görüşme esnasından örnek-1

Görsel 4.6.'da EPŞ bağlamında parçalanmamış bir çubuğun 1/7'sini bulması istendiğinde 5. sınıfta okuyan Ö21'in yazılı değerlendirme aracında ve görüşme esnasında verdiği yanıtlara yer verilmiştir. Bu bağlamda öğrencinin verdiği yanıtlar EPŞ bağlamında kesirsel faaliyet kullanım açısından irdelenmiştir.

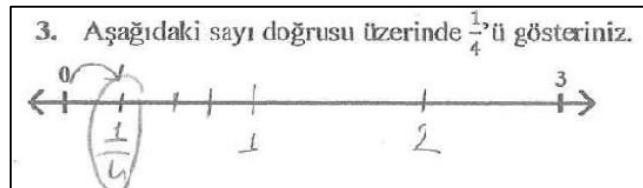
Bir bütünün eş parçalara ayrılması veya paylaştırılması durumlarında ortaya çıkan EPŞ bağlamında Ö21'in kullandığı birimleştirme faaliyeti APŞ şemasındaki kullanılan birimleştirme faaliyetinin daha gelişmiş hali olarak ortaya çıkmıştır. Örneğin, Ö21 çubuğu yedi eşit parçadan oluşan bir bütün olarak birimleştirmiş ve parçaların birbiriyle özdeş olduğunu doğrulamıştır. Dolayısıyla EPŞ kapsamında öğrenci hem bütüne hem de parçaların her birine bir ölçü birimi atamış ve bu birimlerin varlığını kabul etmiştir. Ayrıca Ö21 "[parçaların] hepsi aynı olmazsa hata olur" ifadesini kullanarak hem parçaların büyüklüğünün bütünün büyüklüğünü oluşturduğunu hem de parça ile bütün arasında çarpımsal bir ilişki olduğunu hissederek farkındalıkla yanıt vermiştir. Aynı zamanda bu durum tekrarlanabilir birim kavramının varlığına da işaret etmektedir. Ancak APŞ'de parçaların bütüne ait olduğu düşüncesi olsa da her bir parçanın başlı başına birer büyüklük olabileceği düşüncesinin genellikle göz ardı edildiği görülmüştür. Öte yandan yukarıda örneği verilen ve EPŞ bağlamında kesirsel ifade ile sorulan bu soruda Ö21'in de APŞ'deki gibi doğal sayı anlamında temsil edilerek birim atadığı dikkat çekmiştir. Yani çubuk üzerinde oluşturduğu her bir parça *yedide birlik* gibi kesir büyüklüğüyle tanımlanmaktan ziyade *yedi taneden bir tanesi* şeklinde birimleştirilmiştir.

Ayrıca Görsel 4.5. ve Görsel 4.6.'ya göre EPŞ'si gelişmiş Ö21'in parçalama kesirsel faaliyetlerini de PBS'ye göre daha özenli gerçekleştirdiği görülmüştür. Çünkü bu şemayı kullanmasının amacı özdeş parçalar oluşturmak olup parçalama faaliyeti aynı zamanda yanıtının doğrulanmasını da sağlamaktadır. Dolayısıyla Ö21 EPŞ bağlamında APŞ'deki gibi ardışık/sıralı kesme işlemleriyle bütünü parçalamaktan ziyade, hem parça büyüklüğünü ölçmede tahmin yeteneğini kullanmış hem de doğru tahmin etmediği durumlarda parçalama faaliyetini nasıl değiştirmesi gerektiği konusunda yönlendirme olmadan kendi eylemlerini uygun bir şekilde düzenleyebilmiştir (ilk çizdiği parçanın büyük olduğunu anlaması ve ardından küçültmesi).

Öte yandan Ö21'in EPŞ kapsamında bütünün bir birimi olarak oluşturduğu parçayı bütünün büyüklüğünce çubuk üzerinde tekrarladığı görülmektedir. Bu bağlamda öğrencinin tekrarlama faaliyetini kullanmasının amacı parçaların özdeşliğinin sağlanması ve parçaların büyüklüklerinin toplamının bütünün büyüklüğüne eşit olması gerektiği ile doğrudan ilişkilidir.

Ayrıca Görsel 4.6. incelendiğinde, öğrencinin yerleşik bütünden parça ayırma faaliyetini herhangi bir parçanın bütün dışında kopyalanmasının yanı sıra zihinsel olarak gerçekleştirdiği görülmüştür. Çünkü öğrenci parçaların özdeş olup olmadığı kontrol etme ve parçalama girişimlerini yeniden düzenleme sürecinde, oluşturduğu her parçanın büyüklüğünü zihinsel olarak bütünden ayırmış ve parçanın büyüklüğünü zihinde canlandırması sonucunda çubuk üzerine her defasında kesme işaretleriyle yeniden belirlemiştir. Sonuçta bu durum, öğrencinin zihninde parçanın büyüklüğü ile bütünün büyüklüğü arasındaki niceliksel ilişkinin mevcut olduğunun göstergesidir.

Tablo 4.1.'de görülen EPŞ şeması gelişmiş 6. sınıfta okuyan dokuz öğrenciden biri ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Görsel 4.7.'de öğrencilerin kesir büyüklüğüne göre belli bir aralıktaki sayı doğrusu modeli üzerinde EPŞ bağlamında kesirsel faaliyetlerin nasıl kullanıldığını incelemek amacıyla sorulan soruya diğer öğrencilerde de sıklıkla görülen 6. sınıf öğrencisi Ö49'un yanıtı görülmektedir.



Görsel 4.7. EPŞ'si gelişmiş Ö49'un yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.7. incelendiğinde öğrencinin (0-3) aralığında verilen sayı doğrusunu bir bütün olarak algıladığı ve bütünü (0-1), (1-2) ve (2-3) aralıkları olmak üzere üç parçaya ayırdığı görülmektedir. Bunun yanı sıra öğrenci (0-1) aralığını yani bir *tamı* kesir büyüklüğüne göre dört parçaya ayırarak bütünü iki kademeli olarak birimleştirebilmiştir. Bu soru için Ö49 gibi diğer sınıf düzeylerindeki öğrencilerde de sıklıkla görülen bu yanıt çerçevesinde, öğrencilerin genellikle (0-1) aralığını alt birimlere ayırdığı halde (1-2) ve (2-3) aralığını alt birimlerine ayırmadığı görülmüştür. Bu bağlamda Ö49 ile gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış klinik görüşmede öğrenciden bu soruyu yeniden sesli düşünerek çözmesi istenmiş ve görüşmeden alıntılar aşağıda özetlenmiştir.

A: Bu soruyu yeniden sesli düşünerek çözebilir misin?

Ö49: Hocam 3 tane varsa bunları 1 ve 2 diye ayırıyorum. (Sayı doğrusunu üç eşit parçaya ayırarak 1 ve 2'yi yerleştirir.) Sonra bunun paydası 4 olduğu için bunu ((0-1) aralığını) da 4 parçaya ayırdım. ((0-1) aralığını 4 eşit parçaya ayırır.) Buna bakarak da sonucu buldum. (Aralıktaki parçaları 1, 2, 3, 4 şeklinde sayar ve $1/4$ 'ü sayı doğrusu üzerinde doğru bir şekilde yerleştirir.)

A: Peki neden 4'e kadar saydın açıklar mısın?

Ö49: Çünkü paydası 4. O yüzden 4 tane olması gerekiyor.

A: 4'ten fazla sayabilir misin ya da 4'ten fazlasını sayma durumunda ne olur sence?

Ö49: (Kısa bir sessizlik) Bilmiyorum. Ama olmaz galiba. Çünkü hep paydası kadar parçaya ayırıyoruz.

A: Pekala o zaman ((1-2) ve (2-3) aralıklarını gösterir.) bu aralıkları da parçalara ayırman gerekse ne yapardın?

Ö49: Aslında bunları da 4 parçaya ayırabilirim. Öğretmenimiz öğretmişti. ((1-2) ve (2-3) aralıklarını da 4 eşit parçaya ayırır.) Ama şimdi bunlarda $1/4$ olmaz, '1 tam $1/4$ ve 2 tam $1/4$ ' olur. Ama bize $1/4$ 'ü sormuş. Ben o yüzden [bu aralıkları parçalara] ayırmamıştım.

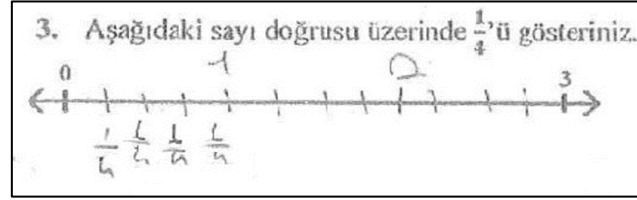
A: Peki bir şey daha soracağım. (Öğrenciye Görsel 4.7.'deki yanıtını gösterir.) Burada sayı doğrusu üzerinde 0'dan $1/4$ 'e bir ok işareti yapmışsın. Bunu neye göre yaptın? Ne düşünmüştün? Yani ben $1/4$ 'ü gösteriniz sorusu için senin buradaki cevabına göre $1/4$ 'ün tam olarak nereyi gösterdiğini anlamak istiyorum.

Ö49: ((0-1) aralığına yerleştirdiği üç noktadan ilkinin gösterir.) Hocam aslında burası $1/4$. (Noktaları sırasıyla göstermeye devam eder.) Burası $2/4$, burası $3/4$, burası da $4/4$ yani 1 tam. Ama aslında 0'dan buraya kadar ($1/4$ yerleştirdiği noktayı gösterir.) olan yer de $1/4$.

A: Nasıl yani? Açıklar mısın?

Ö49: Hocam mesela bir ipin çeyreğini alırsak bu kadarını almış oluruz. Öğretmenimiz göstermişti. Hatta diğerleri arasında olan yerler de $1/4$ olur. ((0-1) aralığındaki dört eş

parçanın hepsini $1/4$ olduğunu gösterir (bkz. Görsel 4.8.). Çünkü ipi elimizde ya da cetvelin etrafında dolarsak hepsi aynı oluyor. Ama noktalar 2, 3, 4, ... diye devam eder.



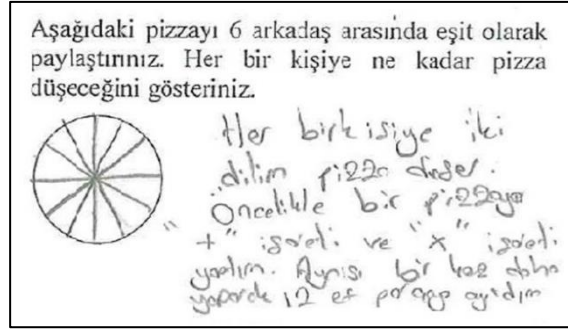
Görsel 4.8. Ö49 ile görüşme esnasından örnek-1

6. sınıf öğrencisi olan Ö49 ile yapılan görüşme ve içerik analizine göre öğrencinin EPŞ kapsamında birimleştirme, parçalama, yerleşik bütünden ayırma ve tekrarlama kesirsel faaliyetlerini kullandığı görülmüştür. EPŞ'si gelişmiş olan Ö49 birimleştirme faaliyetini hem bütünü üç birim oluşacak şekilde hem de her birimi 4 alt birimden oluşacak şekilde iki kademeli olarak kullanmıştır. Dahası öğrenci $1/4$ 'ün kesirsel büyüklüğün yanı sıra ölçme anlamında herhangi bir niceliğin büyüklüğünü (çeyreği) de temsil ettiğinin farkındadır. Yani Ö49 $1/4$ kesir büyüklüğünü hem bir sayı olarak sayı doğrusuna yerleştirmede hem de sayı doğrusu üzerinde oluşturduğu diğer aralıkların büyüklük ölçüsünü temsil ettiğinin farkındadır. Aslında bu durum EPŞ kapsamında birim kesir ile bütün arasındaki niceliksel ilişkinin farkındalığının göstergesidir. Bu bağlamda Ö49 tekrarlanabilir birim kavramıyla yalnızca parça büyüklüğünün özdeşliğini doğrulamak değil, aynı zamanda tekrarlanabilir birim kesir kavramıyla başka kesir büyüklüklerinin de oluşturmak amacıyla tekrarlama faaliyetini aktif olarak sayı doğrusu modeli üzerinde kullanmıştır (bkz. Görsel 4.8.). Aynı zamanda Görsel 4.7.'ye ve görüşme örneklerine bakıldığında öğrenci $(0-1/4)$ aralığının büyüklüğünü zihinsel olarak yerleşik bütünden ayırarak, $(0-1/4)$ aralığı ile diğer aralıklar arasında niceliksel büyüklük açısından ilişki kurarken birimlerin ve bütünün büyüklüğünü de korumuştur.

Ayrıca Ö49 Görsel 4.7.'de görülen yazılı değerlendirme aracındaki soruda sayı doğrusunda öncelikle *tamları* (1 ve 2) yerleştirdiğini, ardından her tam aralığını dört eşit parçaya ayırdığını belirtmiştir. Dolayısıyla öğrenci ardışık/sıralı kesme işlemlerini değil, özenli ve özdeşliğinden emin olarak birbirine eşit parçalar üreterek parçalama kesirsel faaliyetini gerçekleştirmiştir.

Araştırmada yapılan analize göre oluşturulan Tablo 4.1. incelendiğinde EPŞ'si gelişmiş 7. sınıfta okuyan 10 öğrenci olduğu görülmektedir. Bu öğrencilerden biri olan

Ö42 ile yarı yapılandırılmış klinik görüşme yapılmıştır. Ö42'nin EPŞ kapsamında daire alan modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de sıklıkla görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.9.'daki gibidir.



Görsel 4.9. EPŞ'si gelişmiş Ö42'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.9.'da öğrencilere EPŞ bağlamında alan modeliyle sunulan parçalanmamış bir bütünün 6 kişi arasında paylaşılması durumu sorulduğunda 7. sınıf öğrencisi olan Ö42'nin yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt görülmektedir. Elde edilen bulgulara göre öğrencilerin EPŞ bağlamında daire ve dikdörtgen alan modeli olarak sunulan sorularda dikdörtgen modelinde daire modeline kıyasla daha yüksek başarı gösterdikleri görülmüştür. Zaten bu sorunun sorulma amacı öğrencilerin paylaşma girişimlerini daire alan modelinde uygularken nasıl faaliyetler gerçekleştirdiklerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda Ö42 Görsel 4.9.'da görüldüğü gibi daireyi önce "+" kesme işlemiyle çeyreklere ayırmış, ardından çeyrekleri de "x" kesme işlemleriyle doğrusal olarak eş parçalara ayırmıştır.

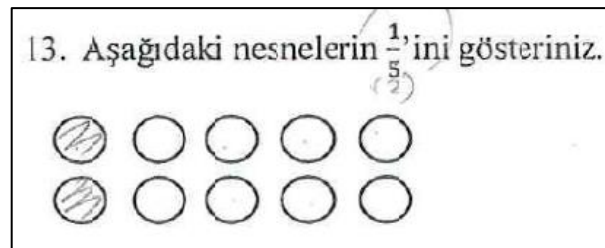
Yapılan içerik analizine göre 7. sınıf öğrencisi Ö42'nin hem bütünü 12 eş parçadan oluşan bir birim hem de eş parçalardan her birini başlı başına bir birim olarak tanımladığı görülmüştür. Aynı zamanda bütünün 6 kişi arasında paylaşılmasıyla her bir kişiye 2 dilim düşeceğini belirtmiştir. Dolayısıyla öğrenci her iki dilimi bir birim ve bütünün de bu birimlerden altı tane içerdiğini vurgulamıştır. Bu bağlamda ele alındığında Ö42 hem bütünü iki kademeli olarak birimleştirebilmiş hem de birimler arası geçiş (unit coordination) $(1 \times (12 \times 1) = 6 \times (2 \times 1))$ yapabilmıştır. Aynı zamanda Ö42 bütünü içerisindeki 12 eş parçadan her birini "1 bölü 12" şeklinde tanımladığı görülmüştür. Daha önemlisi görüşme esnasında "Herkes 2 tane $1/12$ " düşer." ifadesini kullanmıştır. Dolayısıyla 6. sınıf Ö49'dan sonra 7. sınıf Ö42 de *tekrarlanabilir birim kesir* kavramının

varlığına ilişkin faaliyetlerde bulunmuştur. Bu durum öğrencinin EPŞ bağlamında tekrarlama faaliyetini hem parça büyüklüğünü hem de birim kesir büyüklüğünü bütün içerisinde yineleme açısından etkin olarak kullandığının göstergesidir.

Ayrıca Görsel 4.9.'a göre Ö42'nin parçalama faaliyetini daire modeli üzerinde doğrusal kesme işlemleriyle gerçekleştirdiği görülmektedir. Öğrenciye kendi yanıtı görüşme esnasında gösterilmiş ve pizzanın adil paylaşılmasından nasıl emin olduğu sorulmuştur. EPŞ'si gelişmiş Ö42 ise "Çünkü dairenin açıları hepsinde aynıdır." ifadesini kullanarak yanıt vermiştir. Bununla birlikte daire modelinde parçalama faaliyetinde açılardan faydalanma durumunun diğer gelişmiş şemalara sahip olan öğrencilerde de ağırlıklı olarak ortaya çıktığı görülmüştür.

Öte yandan Ö42 Görsel 4.9.'da görülen yanıtına göre herkese ne kadar/kaçta kaç pizza düşer diye sorulduğunda öğrenci öncelikle daireden bir çeyreği bütün dışına çizmiş ve üç eş parçaya ayırdıktan sonra "(çeyreği göstererek) Bu parçanın üçte ikisi kadar düşer." ifadesini kullandığı görülmüştür. Dolayısıyla öğrenci bütünü bozmadan bütün ile parçalar arasındaki niceliksel ilişkiye göre yerleşik bütünden parçayı kesir büyüklüğü olarak ayırabilmiştir.

Tablo 4.1. incelendiğinde EPŞ'si gelişmiş olanların diğer sınıf düzeylerine kıyasla en çok öğrenci sayısı ile 8. sınıf düzeyinde ortaya çıktığı görülmüştür. Bu bağlamda 8. sınıfta okuyan 8 öğrencinin EPŞ bağlamında sorulan tüm modellere doğru yanıt vermişlerdir. Ayrıca bu öğrencilerden 4'ü ile yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. EPŞ'si gelişmiş 8 öğrencinin neredeyse birbirleriyle yanıtları aynı olup küme modeli üzerinde 8. sınıf öğrencisi Ö37'nin EPŞ bağlamında yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.10.'daki gibi $\frac{1}{5}$ kesrinin 2 ile genişletilmesi yardımıyla bulunmuş ve görseldeki gibi ilk iki nesnenin alt alta işaretlendiği görülmüştür.



Görsel 4.10. EPŞ'si gelişmiş Ö37'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.10.'da görülen soru öğrencilerin küme modeli üzerinde eş parçalara ayırma durumunda kesirsel faaliyetleri nasıl kullandıkları incelenmek amacıyla sorulmuştur. Bu bağlamda Görsel 4.10.'da görülen yanıt ve yapılan görüşmeye göre 8. sınıf öğrencisi Ö37'nin seçtiği (taradığı) parçaya “10 tane parçadan 2 parçası” şeklinde birim atadığı görülmüştür. Ardından öğrenciye “Çarpma işlemi yapmaksızın bu soruyu çözmeni istesem nasıl yapardın?” şeklinde bir soru yöneltilmiştir. Bunun üzerine Ö37 ile yapılan görüşmeden alıntılar aşağıda özetlenmiştir.

A: Nesnelerin $\frac{1}{5}$ 'ini çarpma işlemi yapmadan nasıl bulabilirsin? (kısa bir sessizlik) Yani 1 bölü 5 veya 5'te 1 senin için ne ifade ediyor?

Ö37: 5 tane parça var ve 5 tanesinden 1 parça seçmeliyiz demek.

A: Peki burada bunu nasıl uygularsın?

Ö37: 10 tane parça var ve 2 parçayı seçmeliyiz. (Aslında bunu yine zihninden aritmetik işlem yaparak yanıtlar.)

A: Sanki yine çarpma işlemine göre bu cevabı verdin. Bence başka bir yolu daha olmalı. Sonuçta küçük çocuklar bilyelerle oynarken birbirleri arasında paylaştırabiliyorlar ve bunu yaparken çarpma işlemi yapmayı bilmiyorlar değil mi?

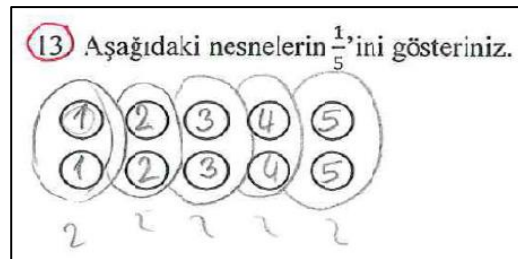
Ö37: Evet bir yolunu buluyorlar. (Birkaç saniye düşünür.) Bence sonuna kadar paylaşıyorlar.

A: Nasıl mesela?

Ö37: 5 kişi var diyelim. Bu 10 tane parçayı (sırasıyla) ona, ona, ona dağıtabilirler. Bitene kadar sırayla herkese 1 tane verirler. Mesela bunu (İlk nesneyi gösterir.) birinci kişiye verse, bunu ikinci kişiye ... bunu beşinci kişiye verse ... Sonra tekrar baştan başlar. 1.'den 5.'ye kadar (Geri kalan nesneleri yeniden numaralandırır.) Sonra zaten bitiyor.

A: Sonra ne yapman gerekiyor.

Ö37: Sonra her kişiye ikişer tane düşmüş oluyor. (Aynı numara verdiği nesneleri bir birim olarak yuvarlak içinde gösterir (bkz. Görsel 4.11.).)



Görsel 4.11. Ö37 ile görüşme esnasından örnek-1

8. sınıf öğrencisi Ö37 diğer 8. sınıf öğrencileri gibi ayırık olan küme modeli ile sorulan soruları aritmetik işlemler yardımıyla çözdükleri görülmüştür. Ö37'nin bu soru için başlangıçtaki “10 parçadan 2 parçası” yanıtı ile öğrencinin bu soruya parça bütün yorumuyla yaklaştığını ve “Bütün veya bütündeki parçaların sayısı paydadaki sayı kadardır.” şeklinde birimleştirme yaptığını göstermektedir. Ancak Ö37 ile yapılan görüşmede öğrencinin bu soruyu aritmetik işlem kullanmadan da çözebileceği görülmüştür. Bu bağlamda öğrenci 10 nesneyi tekrarlı dağıtarak parçalama faaliyetini kullanmış ve sırasıyla 5 kişi arasında paylaşmıştır. Her bir nesneyi bir kişiye dağıtması ile bir kişiye düşen nesneleri gruplaştırarak 10 nesneyi her biri 2 nesne içerecek şekilde 5 gruba ayırmıştır. Aslında öğrenci burada 2’şer nesneden oluşturduğu (birim kesir gruplarını) grupları bütün büyüklüğünce tekrarlamıştır. Nitekim öğrenci “[nesneler] bitene kadar” bu işlemi devam ettireceğini ifade etmiştir. Öte yandan Görsel 4.11.’de görüldüğü gibi kişi başına düşen her 2 nesneyi bir grup olarak belirlediği ve her grubu “1/5” kesir büyüklüğünden ziyade “2” olarak tanımladığı gruplarına altına yazdığından da anlaşılmaktadır. Bu bağlamda oluşturduğu grupları kesir büyüklüğü olarak değil; parça büyüklüğü (2 nesne) şeklinde yerleşik bütünden ayırmıştır.

4.1.1.2.1. EPŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması

Bu başlık altında ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde EPŞ’si gelişmiş ve gelişim sürecinde olan öğrencilerin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı performanslarına ilişkin bulgular karşılaştırmalı olarak özetlenmiştir.

Elde edilen bulgulara göre ortaokul öğrencilerinin EPŞ bağlamında şema ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek farklı kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarılar incelenmek istenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinden aldıkları toplam puanlar değerlendirilmiş ve sınıf düzeylerine göre dağılımı Tablo 4.3.’te verilmiştir.

Tablo 4.3. EPŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı

	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf	Toplam
Alan	%59	%63	%61	%66	%62
Çubuk	%27	%32	%34	%49	%36
Küme	%23	%40	%45	%39	%37
Sayı doğrusu	%3	%15	%16	%16	%13

Tablo 4.3.'e göre eş parçalama şeması (EPŞ) gelişmiş veya gelişim sürecinde olan (5. sınıf $n = 62$, 6. sınıf $n = 98$, 7. sınıf $n = 112$ ve 8. sınıf $n = 100$ olmak üzere) toplamda 372 öğrencinin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı yüzdeleri görülmektedir. Burada verilen başarı yüzdeleri öğrencilerin EPŞ ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek model bazında aldıkları puanlardan üretilmiştir. EPŞ'si gelişmiş öğrenci alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri ile sunulan soruların hepsine birden doğru yanıt verirken; EPŞ'si gelişim sürecinde olan öğrenciler bahsedilen dört farklı modelin hepsine değil bazılarına doğru yanıt vermişlerdir. Bu bağlamda öğrencilerin EPŞ bağlamında hangi kesir modelleri üzerinde daha yüksek başarı gösterdikleri incelenmek istenmiştir.

Tablo 4.3. incelendiğinde sırasıyla 5. sınıf düzeyinde %59, 6. sınıf düzeyinde %63, 7. sınıf düzeyinde %61 ve 8. sınıf düzeyinde %66 olmak üzere en çok başarı gösterilen modelin alan modeli olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra çubuk modeli üzerinde 5. sınıftan 7. sınıfa doğru giderek artan bir başarı yüzdesi görülse de bu oranların birbirine yakın olduğu ve çubuk modeli üzerinde en çok başarı yüzdesinin %49 ile 8. sınıf düzeyindeki öğrencilere ait olduğu görülmektedir. Ayrıca küme modelinde en yüksek başarı gösteren ortaokul düzeyi %45 oranla 7. sınıf iken; bu performans başarısını %40 oranla 6. sınıf, %39 oranla 8. sınıf ve %23 oranla 5. sınıf takip etmektedir. Öte yandan Tablo 4.3.'e bakıldığında ortaokul öğrencilerinin EPŞ bağlamında en çok zorlandıkları modelin sayı doğrusu olduğu görülmektedir. Buna rağmen 5. sınıftan sonra sayı doğrusu modeli için gözle görülür bir farkla başarı yüzdesinin arttığı ve 6., 7. ve 8. sınıf düzeylerinde başarı yüzdelерinin neredeyse aynı oranda olduğu göze çarpmaktadır.

4.1.2. Parça bütün şemasına (PBŞ) ilişkin bulgular

Parça bütün şeması (PBŞ) birimleştirme (unitizing), parçalama (partitioning) ve yerleşik bütünden ayırma (disembedding) kesirsel faaliyetlerini nicelikler üzerinde etkin olarak kullanmayı gerektirir. Aynı zamanda PBŞ bütün içerisinde yerleşik olan bir parçanın bütününe oranına bakmak gereken durumlarda öğrenci tarafından etkinleştirilir.

Veri toplama araçlarında PBŞ kapsamında öğrencilere dört farklı kesir modeli (alan (daire ve dikdörtgen), çubuk, küme ve sayı doğrusu) beş açık uçlu soru şeklinde sunulmuştur. Yapılan içerik analizine göre ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde öğrencilerde ortaya çıkan PBŞ şemasına ilişkin bulgular Tablo 4.4.'te verilmiştir.

Tablo 4.4. PBŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları

	5. sınıf		6. sınıf		7. sınıf		8. sınıf	
	f	%	f	%	f	%	f	%
PBŞ oluşmamış	15	%12	8	%5	4	%2	2	%2
PBŞ gelişim sürecinde	106	%88	143	%95	150	%97	125	%96
PBŞ gelişmiş	0	-	0	-	1	%1	3	%2
Toplam	121	%100	151	%100	155	%100	130	%100

Tablo 4.4.'e göre gelişmiş PBŞ şemasına sahip biri 7. sınıf öğrencisi, üçü 8. sınıf öğrencisi olmak üzere toplamda 4 öğrencinin olduğu ortaya çıkmıştır. Bu öğrencilerden 7. ve 8. sınıf düzeylerinden birer öğrenci ile yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin yazılı değerlendirme aracındaki sorulara verdikleri yanıtların doğrulanması ve daha derin bir anlayış yakalamak amacıyla yapılan görüşmelerde yazılı değerlendirme aracındaki aynı sorular kullanılmıştır. Ayrıca görüşme esnasında öğrencilerden bazı soruları yeniden çözmeleri istenmiş ve uygun zaman geldiğinde öğrencilere yazılı değerlendirme aracındaki yanıtları kendilerine gösterilerek hangi düşünceyle yanıtladıklarını açıklamaları istenmiştir.

PBŞ şeması gelişmiş ve yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 7. sınıf öğrencisi Ö52'nin PBŞ kapsamında alan modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.12.'deki gibidir.



Görsel 4.12. PBŞ'si gelişmiş Ö52'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.12.'de görülen soru için Ö52'ye görüşme esnasında soruyu sesli düşünerek yeniden çözmesi istenmiş ve öğrencinin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı kendisine gösterilmiştir. Bu görüşmede 7. sınıf olan Ö52 ile yapılan görüşmeden alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

Araştırmacı: Bu soruyu nasıl çözmüştün hatırlıyor musun?

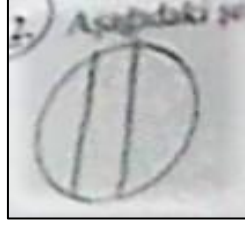
Ö52: Bunu ilk önce 3'e böldüm, bu şekli.

A: Peki nasıl yaptın yani dikkat ettiğin bir şey var mıydı?

Ö52: Eşit olmasına dikkat ettim.

A: Pekala şekil üzerinde yeniden gösterebilir misin?

Ö52: (Öğrenci daire alan modelini 3 parçaya Görsel 4.13.'teki gibi ayırmıştır.)



Görsel 4.13. Ö52 ile görüşme esnasından örnek-1

A: Peki şu an eşit mi?

Ö52: Eşit diyebiliriz. Ben çok iyi çizemem de.

A: Önceden nasıl çizdiğini görmek ister misin?

Ö52: (öğrenci kağıdını görmeden) Hocam aslında orada farklı çizmiştim.

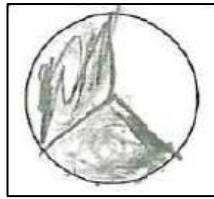
A: (öğrenciye kağıdını gösterir) Neden ikisi farklı? Sana göre hangi çizdiğin doğru?

Ö52: İkisi de bence aynıdır. Yani ikisi de doğru bence.

A: Peki bu şekilde bir bütünü arkadaşlarınla paylaşırken hangisi daha adil olur?

Ö52: O olur (yazılı değerlendirme aracında çizdiği şekli gösterir.) Zaten o ilk aklıma gelmişti.

(Şekil üzerindeki dikey kesimleri siler ve şekli yeniden Görsel 4.14.'teki gibi 3 parçaya ayırır.)



Görsel 4.14. Ö52 ile görüşme esnasından örnek-2

Ö52: Şimdi eşit oldu.

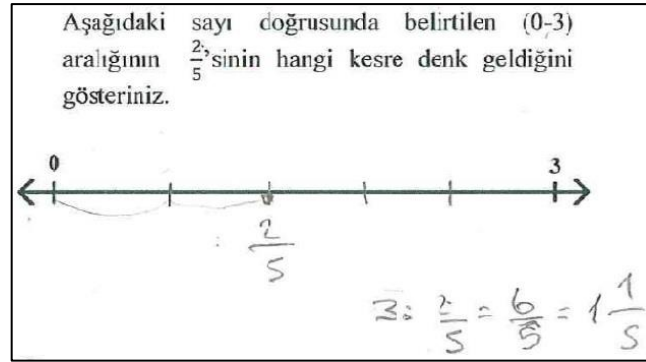
A: Şimdi ne yapman gerekiyor?

Ö52: Üçte ikisini göstermem lazım. O yüzden ikisini boyamam lazım. (bkz. Görsel 4.14.)

Yukarıda görüşme esnasındaki yanıtları örneklendirilen 7. sınıfta okuyan Ö52 daire alan modeliyle sunulan soruya parça bütün şeması ile yaklaşmıştır. Dairenin $\frac{2}{3}$ 'ünü bulması istenen öğrenci bütünü üç eşit parça olarak tanımlamıştır. Nitekim görüşme esnasında öğrencinin daireyi dikey kesmelerle 3 parçaya ayırması ile daire merkezinden dilimlerle 3 parçaya ayırması onun için farklılık gibi görünmemektedir (bkz. Görsel 4.13. ve Görsel 4.14.). Ö52'nin kullandığı birimleştirme kesirsel faaliyeti sadece bütünün üç eşit parçadan oluşması ve parçaların da bütüne ait olduğu yönündedir. Bu durum Ö52'nin $\frac{2}{3}$ kesrine “üç tane parçadan ikisi” şeklinde parça bütün yorumuyla yaklaşmasından anlaşılmaktadır. Ayrıca parçaların *eşit* olması gerektiğine ilişkin düşüncesi öğrencinin fiziksel faaliyetlerine tam anlamıyla nüfuz edememiştir. Çünkü daire üzerinde parçaları oluştururken parçaların eşitliğini doğrulamaksızın göz kararı ardışık kesme/çizme işlemleriyle parçalama kesirsel faaliyetini gerçekleştirmiştir. Ayrıca Ö52 ile yapılan görüşmede parçaların *üçte birlik* kesir büyüklüğü açısından özdeşliklerini yansıtan herhangi bir ifadeye veya temsile rastlanmamıştır.

Öte yandan 7. sınıf öğrencisi olan Ö52'nin $\frac{2}{3}$ 'lük parça kesir büyüklüğünü “üç tane parçadan ikisi” şeklinde ifade etmesi öğrencinin PBS bağlamında yerleşik bütünden ayırma (disembedding) kesirsel faaliyetini bütünde yerleşik olan parçalardan ikisini parça ile bütün arasındaki nicelik ilişkisini kurmadan ayırdığını göstermektedir. Sonuçta öğrenci bütün içerisinde parçaların yerleşik olduğu bilinciyle hareket etmesine ve bütünü bozmamasına rağmen bütünden seçerek ayırdığı parçaların büyüklükleri ile bütünün büyüklüğü arasında ilişki olduğuna dair herhangi bir ifadeye veya temsile rastlanılmamıştır. Ancak bütün içerisindeki iki parçayı seçerek boyamıştır.

Tablo 4.4.'e bakıldığında PBS şeması gelişmiş 8. sınıfta okuyan üç öğrenci olduğu görülmektedir. Bu öğrencilerden biri ile yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. 8. sınıf öğrencisi Ö46'nın PBS kapsamında sayı doğrusu modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.15.'te verilmiştir.



Görsel 4.16. Ö46 ile görüşme esnasından örnek-1

A: Pekala bana çözümünü yeniden detaylı bir şekilde açıklayabilir misin? Soruyu bu şekilde çözerken ne düşündün?

Ö46: Zaten burada bulduk (Sayı doğrusuna yerleştirdiği $\frac{2}{5}$ 'i gösterir.). Bunun yani 2 bölü 5'inin ne kadar yeri gösterdiğini anlamamız gerekiyor. Bu yüzden bu işlemi yapıyoruz. O da $\frac{6}{5}$ oluyor. Yani 3'ün $\frac{2}{5}$ 'i $\frac{6}{5}$ 'e denk geliyor.

Yukarıda örnek verilen görüşme ve öğrenci yanıtlarına göre, Ö46'nın gelişmiş PBS bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde birimleştirme, parçalama ve yerleşik bütünden ayırma kesirsel faaliyetleri kullandığı görülmüştür. Ö46'nın yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıtı göre (0-3) aralığında verilen sayı doğrusu modelinde bütünü üç birim ve bunlardan birini de on birim şeklinde algılayarak iki kademeli birimleştirme faaliyetini kullanmıştır (Görsel 4.15.). Ö46'nın yarı yapılandırılmış klinik görüşmede verdiği yanıtı göre ise (0-3) aralığında verilen sayı doğrusunu "1 birim ($\frac{5}{5}$)" olarak kullandığı görülmektedir (Görsel 4.16.). Ayrıca Ö46'nın Görsel 4.15.'e göre yazılı değerlendirme aracında kullandığı parçalama faaliyeti ardışık/sıralı kesme işlemleriyle yapıldığı düşünülmüştür. Zira öğrenci görüşmede kullandığı parçalama faaliyetinde bütünü eşit birimlere ayırabilmişken (bkz. Görsel 4.16.); yazılı değerlendirme aracında üç birim olarak tanımladığı bütünde (0-1), (1-2) ve (2-3) aralıklarını birbiriyle eşit büyüklükte ayırmadığı ancak (1-2) aralığını (doğruluğundan emin olmaksızın) eşit büyüklükte on parçaya ayırdığı görülmüştür.

Öte yandan yerleşik bütünden ayırma faaliyeti açısından yazılı değerlendirme aracında Ö46'nın bütün olarak tanımladığı 3'ten 1,2'lik parçayı ayırdığı görülmüştür (bkz. Görsel 4.15.). Ayrıca $1 \frac{2}{10}$ şeklinde tam sayılı kesir olarak göstermesi ve iki

kademeli olarak birimleştirdiği bütünden 1 birim (tam) ve 1 birimin 2 alt birimini ($\frac{2}{10}$) yerleşik bütünden ayırması öğrencinin kesir büyüklüğüne odaklandığını göstermektedir. Aynı zamanda Ö46'nın görüşme esnasında “[bütünün] 2/5'inin ne kadar yeri gösterdiğini” bulması gerektiğini söylemesi parça büyüklüğü ile kesir büyüklüğü arasındaki niceliksel ilişkinin varlığını hissettiğinin göstergesidir. Ancak bu ilişkiden çarpımsal bir ilişki olarak söz etmek doğru olmaz. Eğer öğrenci 1/5'inin ne kadarlık yeri temsil ettiği üzerine odaklanmış olsaydı ve ardından bununla ilişkilendirerek 2/5'inin ne kadar olduğunu bulsaydı; bu durum çarpımsal ilişki olarak ele alınabilirdi.

4.1.2.1. *PBŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması*

Bu başlık altında ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde PBŞ'si gelişmiş ve gelişim sürecinde olan öğrencilerin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı performanslarına ilişkin bulgular karşılaştırmalı olarak özetlenmiştir.

Elde edilen bulgulara göre PBŞ bağlamında farklı modeller üzerinde uygun kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek tüm modellere doğru yanıt veren öğrenciler yalnızca 7. ve 8. sınıf düzeylerinde görülse de tüm sınıf düzeylerinde PBŞ bağlamında kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarılar incelenmek istenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinden aldıkları toplam puanlar değerlendirilmiş ve sınıf düzeylerine göre dağılımı Tablo 4.5.'te verilmiştir.

Tablo 4.5. *PBŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı*

	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf	Toplam
Alan	%56	%63	%65	%72	%64
Çubuk	%84	%76	%85	%88	%83
Küme	%34	%51	%60	%80	%57
Sayı doğrusu	-	-	%1	%2	%1

Tablo 4.5.'e göre parça bütün şeması (PBŞ) gelişmiş veya gelişim sürecinde olan (5. sınıf $n = 106$, 6. sınıf $n = 143$, 7. sınıf $n = 151$ ve 8. sınıf $n = 128$ olmak üzere) toplamda 528 öğrencinin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı yüzdeleri görülmektedir. Burada verilen başarı yüzdeleri öğrencilerin PBŞ ile uyumlu kesirsel

faaliyetler gerçekleştirerek model bazında aldıkları puanlardan üretilmiştir. PBŞ'si gelişmiş öğrenci alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri ile sunulan soruların hepsine birden doğru yanıt verirken; PBŞ'si gelişim sürecinde olan öğrenciler bahsedilen dört farklı modelin hepsine değil bazılarına doğru yanıt vermişlerdir. Bu bağlamda öğrencilerin PBŞ bağlamında hangi kesir modelleri üzerinde daha yüksek başarı gösterdikleri incelenmek istenmiştir.

Tablo 4.5. incelendiğinde sırasıyla 5. sınıf öğrencilerin %84'ü, 6. sınıf öğrencilerin %76'sı, 7. sınıf öğrencilerin %85'i ve 8. sınıf öğrencilerin %88'i olmak üzere tüm sınıf düzeylerinde en çok başarı gösterilen modelin çubuk modeli olduğu görülmektedir. Bununla beraber 5., 6. ve 7. sınıf düzeylerinde çubuk modelinden sonra en yüksek başarı gösterilen modelin alan modeli olduğu görülürken; 8 sınıf düzeyinde çubuk modelinden sonra küme modelinde daha fazla performans sergiledikleri ortaya çıkmıştır. Ayrıca ortaokul öğrencilerinin PBŞ bağlamında en fazla zorlandıkları modelin sayı doğrusu modeli olduğu görülmektedir. Nitekim yalnızca 7. ve 8. sınıf düzeyinde çok düşük oranlarla sayı doğrusu modeli üzerinde başarı gösteren öğrencilere rastlanılmıştır.

Öte yandan Tablo 4.5.'e göre alan ve küme modellerinde PBŞ bağlamında 5. sınıftan 8. sınıfa doğru sürekli bir artış olduğu görülmektedir. Özellikle ayırık olan küme modeli için 5. sınıf düzeyinde %34 başarı oranı mevcut iken 8. sınıfta düzeyinde bu oranın %80'e sıçraması gözle görülür çarpıcı bir değişimin söz konusu olduğunu göstermektedir.

4.1.3. Parçalı birim kesir şemasına (PBKŞ) ilişkin bulgular

Parçalı birim kesir şeması (PBKŞ) birimleştirme (unitizing) ve tekrarlama (iterating) kesirsel faaliyetlerini nicelikler üzerinde etkin olarak kullanmayı gerektirir. Ayrıca PBKŞ bütün ile birim kesir arasındaki kesirsel büyüklüğün kıyaslanmasıyla birim parçanın orijinal bütününe oranını bulma veya birim parça ile bütünün oranı verildiğinde orijinal bütünü yeniden oluşturma durumlarında ortaya çıkar.

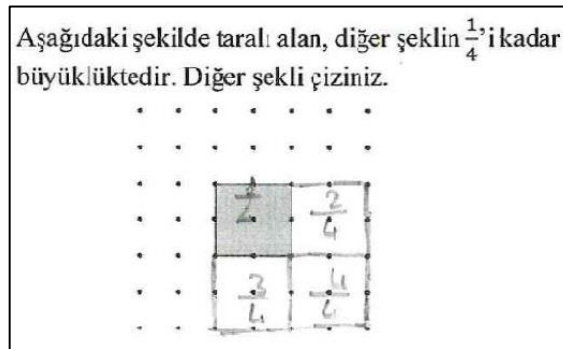
Veri toplama araçlarında PBKŞ kapsamında öğrencilere dört farklı kesir modeli (alan (daire ve dikdörtgen), çubuk, küme ve sayı doğrusu) beş açık uçlu soru şeklinde sunulmuştur. Yapılan içerik analizine göre ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde öğrencilerde ortaya çıkan PBKŞ şemasına ilişkin bulgular Tablo 4.6.'da verilmiştir.

Tablo 4.6. PBKŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları

	5. sınıf		6. sınıf		7. sınıf		8. sınıf	
	f	%	f	%	f	%	f	%
PBKŞ oluşmamış	35	%29	29	%19	28	%18	11	%8
PBKŞ gelişim sürecinde	85	%70	119	%79	125	%81	114	%88
PBKŞ gelişmiş	1	%1	3	%2	2	%1	5	%4
Toplam	121	%100	151	%100	155	%100	130	%100

Tablo 4.6.'ya göre 1'i 5. sınıf, 3'ü 6. sınıf, 2'si 7. sınıf ve 5'i 8. sınıf olmak üzere ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde gelişmiş PBKŞ şemasına sahip toplamda 11 öğrencinin olduğu ortaya çıkmıştır. PBKŞ'si gelişmiş olanlardan 5., 6., 7. ve 8. sınıf düzeylerinden birer öğrenci ile yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin yazılı değerlendirme aracındaki sorulara verdikleri yanıtların doğrulanması ve daha derin bir anlayış yakalamak amacıyla yapılan görüşmelerde yazılı değerlendirme aracındaki aynı sorular kullanılmıştır. Ayrıca görüşme esnasında öğrencilerden bazı soruları yeniden çözmeleri istenmiş ve uygun zaman geldiğinde öğrencilere yazılı değerlendirme aracındaki yanıtları kendilerine gösterilerek hangi düşünceyle yanıtladıklarını açıklamaları istenmiştir.

PBKŞ şeması gelişmiş ve yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 5. sınıf öğrencisi Ö40'ın PBKŞ kapsamında noktalı zemin üzerinde dikdörtgen alan modeli ile sorulan soruya yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.17.'de verilmiştir.



Görsel 4.17. PBKŞ'si gelişmiş Ö40'ın yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.17.'de 5. sınıf öğrencisi Ö40'ın alan modeli üzerinde parçalı birim kesir şeması bağlamında yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt görülmektedir. Bu soruda

öğrencilerden verilen bir parçanın kesir büyüklüğüne göre kıyaslama yaparak orijinal bütünü bulmaları beklenmektedir. Görsel 4.17. incelendiğinde 5. sınıf öğrencisi olan Ö40'ın verilen parçayı $\frac{1}{4}$ olarak tanımladığı ve orijinal bütünü birbirine özdeş olan 4 tane parçanın büyüklüklerinin toplamı olarak birimleştirdiği görülmektedir. Zira Ö40 Görsel 4.17.'de görüldüğü gibi $\frac{1}{4}$ olarak tanımladığı parça büyüklüğünü 4 kez tekrarlamıştır. Ancak tekrarlayarak ürettiği diğer özdeş parçaları $\frac{1}{4}$ olarak değil; $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ ve $\frac{4}{4}$ gibi sıra sayılarını (birinci, ikinci gibi) belirtecek şekilde göstermiştir. Öğrenci ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeden alıntılar aşağıda özetlenmiştir.

A: (Öğrenciden Görsel 4.17.'deki soruyu yeniden çözmesini ister.)

Ö40: Bundan 4 tane şekil varmış ve bu o 4'ün sadece 1 şekliymiş. O zaman bundan 3 tane daha çizmeliyiz. (Verilen şekli 3 kez tekrarlayarak Görsel 4.17.'deki gibi mevcut şeklin etrafına çizer.)

A: (Öğrenciye Görsel 4.17.'deki önceki yanıtı gösterilir.) Peki burada her parça üzerine birer kesir yazmışsın. Bunlar ne demek?

Ö40: (Verilen şekli gösterir.) Bu zaten 1 bölü 4'müş. Diğer şekil de 4 bölü 4'tür. (Çizdiği parçaları sırasıyla gösterir.) O zaman burası 2 bölü 4, burası 3 bölü 4 ve burası 4 bölü 4 olur.

A: Peki soruda senden diğer şeklin $\frac{3}{4}$ 'ünü bulmanı isteseydi ne yapardın?

Ö40: ($\frac{4}{4}$ yazdığı parçayı gösterir.) O zaman burayı silerdim.

Ö40'ın yazılı veya sözlü olarak vermiş olduğu yanıtlarda tekrarlama faaliyetini alan modeli üzerinde etkin bir şekilde kullandığı görülmektedir. Özellikle PBKŞ bağlamında Ö40'ın soruda verilen dikdörtgen şekli için “4 parçadan sadece 1 parçasıymış” şeklinde düşünerek ifade etmesi öğrencinin parça ile bütün arasında niceliksel bir oran olduğunun farkındalığını gösterir. Burada Ö40 bütünü 4 şekil -ayrıca 4 birimkareden oluşan bir birim- olarak tanımlamış ve orijinal bütünü yeniden oluşturmak için geri kalan 3 şekli de tekrarlama faaliyetinde üretmiştir. Bunun yanı sıra her şeklin üzerine *sıra sayısı* gibi kesir büyüklüklerini yazmış olmasına rağmen Ö40 şekillerin toplam büyüklükleri üzerinden birimleştirme faaliyetini kullanmaktadır. Nitekim görüşme esnasında öğrenciye bu soru için bütünü değil de bütünün $\frac{3}{4}$ 'ünü istemiş olsaydı ne yapacağı sorusu yöneltildiğinde, sondaki (üzerinde $\frac{4}{4}$ yazan) bir parçayı sileceğini belirtmiştir. Bu durum PBKŞ bağlamında 5. sınıf öğrencisinin tekrarlanabilir birim kesir kavramının farkında olsa da öğrenci birimler ile bütün arasında çarpımsal bir ilişkiden ziyade toplamsal bir ilişki kurduğunun göstergesidir. Bunun yerine “4 parçadan herhangi birini silerdim” gibi bir

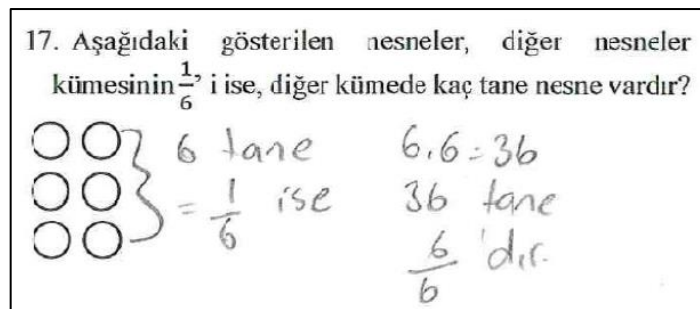
Tablo 4.6.’da görülen PBKŞ şeması gelişmiş 6. sınıfta okuyan üç öğrenciden biri ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 6. sınıf öğrencisi Ö50’nin PBKŞ kapsamında parçalanmamış çubuk modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.18.’de verilmiştir.

Görsel 4.18. PBKŞ'si gelişmiş Ö50'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

104

Görsel 4.19.'da görüldüğü gibi Ö50 öncelikle kısa çubuğun büyüklüğüne kalemin ucu gibi somut bir nesneden faydalananarak ölçü birimi atamıştır. Ardından tanımladığı bu ölçü birimini uzun çubuk üzerinde yani orijinal bütünün büyüklüğü boyunca tekrarlama faaliyetini göstermiştir. Ö50'nin bu soruda PBKŞ bağlamında tekrarlama faaliyetini gerçekleştirmesindeki amaç orijinal bütünü yeniden oluşturmak değil, bütünün büyüklüğünce parçaların özdeşliğinden emin olarak parça ile bütünün oranını bulmaktır. Ayrıca görüşme esnasında öğrencinin bütün için “5/5” kesir büyüklüğünü kullanmadığı, onun yerine “1” ifadesini kullandığı dikkat çekmiştir. Öğrenci uzun çubuğu göstererek “Bu 1 ise, bunun içinde kaç tane kısa çubuk var onu bulmalıyız.” ifadesini kullanarak bütünü “1-birimi” olarak tanımlamıştır. Aynı zamanda görüşme esnasında Ö50'nin “Kısa çubuk, uzun çubuğun 1 bölü 5'i kadardır. ... [parçaların] Hepsi 1/5'i kadar yani aynı olmak zorundadır. ... Uzun çubuğu 5'e böldüğümüzde zaten kısa çubuğu elde ederiz.” ifadelerini kullandığı da görülmüştür. Dolayısıyla 6. sınıf öğrencisi olan Ö50 PBKŞ bağlamında kesir büyüklüğünü ölçme anlamında kullanabilmekte ve bunu kesirsel faaliyetlerine yansıtabilmektedir.

Tablo 4.6.'da görülen PBKŞ şeması gelişmiş 7. sınıfta okuyan iki öğrenciden biri ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 7. sınıf öğrencisi Ö51'in PBKŞ kapsamında küme modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.20.'de verilmiştir.



Görsel 4.20. PBKŞ'si gelişmiş Ö51'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.20.'de görülen sorunun küme modeli ile PBKŞ bağlamında öğrencilere sorulmasının nedeni öğrencilerin ayrık modeller üzerinde birleştirme ve tekrarlama faaliyetlerini nasıl uyguladıklarını incelemektir. 7. sınıf öğrencisi olan Ö51, bu soruda 6 nesneyi 1/6'lık bir ölçü birimi olarak tanımlamış ve 6/6'lık birimin kaç nesneden

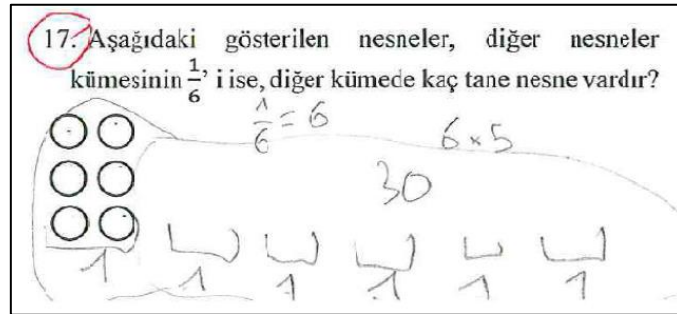
oluşacağını aritmetik işlemle çarparak bulmuştur. Görsel 4.20.'de görüldüğü üzere bu soru için öğrencinin tekrarlama faaliyetini zihninde “6 tane $\frac{1}{6}$ bütünü oluşturur” şeklinde canlandırmış olmalıdır. Ayrıca yapılan içerik analizine göre öğrencilerde çok sık karşılaşılan bu çözüm yönteminde birimleştirme ve tekrarlama faaliyetinin kullanım amacının daha derinden anlaşılması için Ö51 ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiş ve görüşmeden alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

A: Bu soruyu yeniden çözebilir misin?

Ö51: Burada 6'da 1'i 6 [nesne] ise 6'da 6'sını bulmak için 5 tane kısım [eksik] kalıyor. O zaman 5 kısmı ekleyeceğim. (Görsel 4.21.'de görüldüğü gibi Ö51 verilen şeklin yanına nesneleri tekrarlamak yerine ‘kısım’ olarak belirlediği 5 tane işareti tekrarlar.) Evet şimdi 6 tane oldu. Diğer kısım dediği yer şurasıdır (Eklediği 5 kısmı gösterir.). Burada da 30 tane var.

A: Peki 30 tane olduğunu nereden buldun? (Çünkü öğrenci nesneleri çizmemiştir.)

Ö51: Çünkü burada 6 tane var (Şekilde verilen nesneleri gösterir.). Toplamda 36 olması için de 30'u diğer kısımda olmalı.

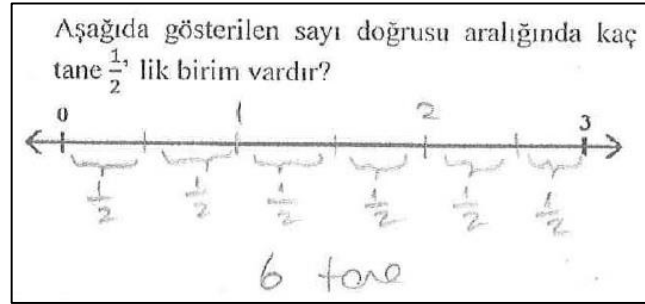


Görsel 4.21. Ö51 ile görüşme esnasından örnek-1

Görsel 4.21.'de 7. sınıf öğrencisi Ö51'in görüşme esnasında PBKŞ bağlamında küme modeliyle sunulan soruya verdiği yanıt görülmektedir. Ö51'in hem yazılı değerlendirme aracındaki hem de görüşme esnasındaki verdiği yanıtlara (Görsel 4.20. ve Görsel 4.21.) göre öğrencinin birimleştirme faaliyetini birim kesir ile parçanın büyüklüğü açısından ilişkilendirdiği görülmektedir. Daha açık bir ifadeyle $\frac{1}{6} = 6 \text{ nesne} \Rightarrow \frac{6}{6} = 36 \text{ nesne}$ şeklinde çarpımsal muhakeme becerisinin kullanılması nicelik ile kesir büyüklüğünün ilişkilendirilebildiğinin göstergesidir. Burada öğrenci yalnızca her 6 nesneye bir birim atamakla kalmamış, aynı zamanda hem 6 nesnenin 6 kez tekrarıyla hem de $\frac{1}{6}$ 'lık birim kesrin 6 kez tekrarlanmasıyla oluşturduğu bütüne de bir birim atamıştır.

Nitekim Görsel 4.21.'de görülen öğrencinin diğer kısım diye eklediği işaret ve bu işaretlerin altına yazdığı "1" ifadesi de bu durumun göstergesidir. Dolayısıyla öğrenci ayırık olan küme modeli üzerinde iki kademeli birimleştirme faaliyetini uygulamakla birlikte, birimler arası geçiş yaparak birim koordinasyonu ilişkisini de kurabilmiştir. Benzer şekilde tekrarlama faaliyetini de orijinal bütünü oluşturmak amacıyla hem birim kesir (6 tane $\frac{1}{6}$) üzerinde hem de nicelik üzerinde (6 tane 6 nesne) gerçekleştirebilmiştir.

Tablo 4.6.'da görülen PBKŞ şeması gelişmiş 8. sınıfta okuyan beş öğrenciden biri ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 8. sınıf öğrencisi Ö8'in PBKŞ kapsamında sayı doğrusu modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.22.'de verilmiştir.



Görsel 4.22. PBKŞ'si gelişmiş Ö8'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.22.'de görülen sorunun sayı doğrusu modeli ile PBKŞ bağlamında öğrencilere sorulmasının nedeni diğer kesir modellerinden farklı olan bu model üzerinde öğrencilerin birimleştirme ve tekrarlama faaliyetlerini parça büyüklüğüne ve kesir büyüklüğüne nasıl uyguladıklarının incelenmesidir. Yapılan içerik analizine göre ortaokul öğrencilerinin sayı doğrusu modeli ile verilen bu soruyu doğru yanıtlayanların sayısının az olduğu görülmektedir. Ancak bu soruya doğru yanıt veren öğrencilerin yanıtlarının Görsel 4.22.'de görülen 8. sınıf öğrencisi Ö8'in yanıtıyla benzer olduğu görülmüştür. Bu bağlamda ele alındığında, Ö8'in sayı doğrusunda verilen (0-3) aralığını bir bütün olarak birimleştirdiği ve $\frac{1}{2}$ 'lik parçanın büyüklüğünü bütün üzerinde tekrarladığı görülmektedir. Ö8'in hangi düşünceyle bu faaliyetleri gerçekleştirdiğini incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiş ve yapılan görüşmeden alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

A: (Öğrenciden bu soruyu sesli düşünerek yeniden çözmesini ister.)

Ö8: Bir kere bu 0 ile 1 arasında değil. Yani önce 1'i ve 2'yi bulmam gerekiyor. ((0-3) aralığını özenli bir şekilde üç eşit parçaya ayırarak 1 ve 2'yi sayı doğrusu üzerinde yerleştirir.)

A: 1 ve 2'yi doğru yere yerleştirdiğinden nasıl emin olabiliyorsun?

Ö8: Yani beynimde biraz kendim oranlıyorum. Yani mesela oranladığım zaman 0'dan 3'e kadar bunu 3'e bölmem gerekiyor. Eşit bir şekilde 3'e böldüğüm zaman kendi aklımdan, ona göre bu şekilde yerleştiriyorum.

A: Pekala güzel. Devam et bakalım.

Ö8: Önce 1/2'lik birimi bulmamız lazım. 1/2 bir tam sayı değil. O yüzden 0 ile 1 arasında olması lazım. 0 ile 1 arasını da 2'ye bölüyorum. ((0-1) aralığını iki eşit parçaya ayırır ve her iki parçayı göstererek) Yani 0 ile 1 arasında 2 tane 1/2'lik birim var. Bize 0'dan 3'e kadar kaç tane 1/2'lik birim olduğunu sormuş. ((1-2) ve (2-3) aralıklarını da iki eş parçaya ayırır ve her parçayı göstererek) 1'den 2'ye kadar da 2 tane 1/2'lik birim var, 2'den 3'e kadar da 2 tane var. Yani toplamda 6 tane vardır.

A: Peki bu parçaların hepsinin 1/2'lik birim olduğundan nasıl emin oluyorsun?

Ö8: Çünkü en başta 1/2'yi bulduk. Yani bu aynı zamanda bir yarıdır. O yüzden her tamın içinde iki tane yarım vardır. Aslında burada birimden kastı aralık yani. (Sayı doğrusuna yerleştirdiği noktaları gösterir.) Ama bunlar 1/2, 1 tam 1/2 ve 2 tam 1/2'dir. Ama sonuçta 0'dan 1/2'ye kadar 1 birim, 1/2'den 1'e 1 birim vardır.

Yukarıda 8. sınıf öğrencisi Ö8'in görüşme esnasında PBKŞ bağlamında sayı doğrusu modeliyle sunulan soruya verdiği sözlü yanıtlara yer verilmiştir. Ö8'in hem yazılı değerlendirme aracındaki hem de görüşme esnasındaki verdiği yanıtlar incelendiğinde öğrencinin birimleştirme faaliyetini hem (0-3) aralığını üç eş parçadan oluşan birim olarak hem de her parçayı iki eş parçadan oluşan bir alt birim olarak iki kademeli şekilde birimleştirdiği görülmektedir. Ayrıca öğrencinin öncelikle sayı doğrusu üzerinde 1/2'yi yerleştirerek $(0 - \frac{1}{2})$ aralığını birim olarak bulması gerektiği düşüncesi, öğrencinin kesir büyüklüğü ile parça büyüklüğünü çarpımsal olarak ilişkilendirebildiğinin göstergesidir. Nitekim Ö8 öncelikle nicelik üzerinde ölçme anlamında 1/2'lik birimin büyüklüğünü bulmuş, ardından bu büyüklüğü bütün sonuna kadar yani 0'dan 3'e kadar 1/2'lik birimin bütüne oranını bulmak amacıyla tekrarlamıştır. Aynı zamanda Ö8 tekrarlama faaliyetini hem tekrarlanabilir birim hem de tekrarlanabilir birim kesir kavramlarını içselleştirerek gerçekleştirmiştir. Çünkü öğrenci sayı doğrusu modelinin özelliğinden dolayı noktaların $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ ve $2\frac{1}{2}$ kesir büyüklüklerini temsil

ettiğinin ve her bir aralığın da 1/2'lik birim şeklinde birer yarım büyüklüğünü temsil ettiğinin farkındadır.

4.1.3.1. PBKŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması

Bu başlık altında ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde PBKŞ'si gelişmiş ve gelişim sürecinde olan öğrencilerin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı performanslarına ilişkin bulgular karşılaştırmalı olarak özetlenmiştir.

Elde edilen bulgulara göre ortaokul öğrencilerinin PBKŞ bağlamında şema ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek farklı kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarılar incelenmek istenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinden aldıkları toplam puanlar değerlendirilmiş ve sınıf düzeylerine göre dağılımı Tablo 4.7.'de verilmiştir.

Tablo 4.7. PBKŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı

	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf	Toplam
Alan	%22	%25	%29	%31	%27
Çubuk	%83	%89	%94	%91	%90
Küme	%29	%33	%30	%45	%34
Sayı doğrusu	%5	%11	%9	%23	%13

Tablo 4.7.'ye göre parçalı birim kesir şeması (PBKŞ) gelişmiş veya gelişim sürecinde olan (5. sınıf $n = 86$, 6. sınıf $n = 122$, 7. sınıf $n = 127$ ve 8. sınıf $n = 119$ olmak üzere) toplamda 454 öğrencinin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı yüzdeleri görülmektedir. Burada verilen başarı yüzdeleri öğrencilerin PBKŞ ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek model bazında aldıkları puanlardan üretilmiştir. PBKŞ'si gelişmiş öğrenci alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri ile sunulan soruların hepsine birden doğru yanıt verirken; PBKŞ'si gelişim sürecinde olan öğrenciler bahsedilen dört farklı modelin hepsine değil bazılarına doğru yanıt vermişlerdir. Bu bağlamda öğrencilerin PBKŞ bağlamında hangi kesir modelleri üzerinde daha yüksek başarı gösterdikleri incelenmek istenmiştir.

Tablo 4.7. incelendiğinde sırasıyla 5. sınıf öğrencilerin %83'ü, 6. sınıf öğrencilerin %89'u, 7. sınıf öğrencilerin %94'ü ve 8. sınıf öğrencilerin %91'i olmak üzere tüm sınıf

düzeylerinde en çok başarı gösterilen modelin çubuk modeli olduğu görülmektedir. Bununla beraber yine 5. sınıftan 8. sınıfa doğru sırasıyla %29, %33, %30 ve %45 oranlarıyla öğrencilerin çubuk modelinden sonra en çok başarı gösterdikleri modelin küme modeli olduğu görülmektedir. PBŞ ve EPŞ şemalarında olduğu gibi PBKŞ’de de öğrencilerin en az başarı gösterdikleri kesir modeli sayı doğrusu modeli olduğu görülmektedir. Ancak bununla beraber PBKŞ’de 8. sınıf düzeyinde %23 oranıyla diğer sınıf düzeylerine göre gözle görülür bir farkla başarı sergilendiği göze çarpmaktadır.

Öte yandan Tablo 4.7.’ye göre 5. sınıftan 8. sınıfa doğru gidildikçe PBKŞ bağlamında alan modeli ve çubuk modeli üzerinde öğrencilerin başarı yüzdelerinin giderek arttığı görülürken, özellikle 7. sınıf düzeyinde küme ve sayı doğrusu modelinde görülen oranlarda bir düşüşün olduğu dikkat çekmektedir.

4.1.4. Parça kesir şemasına (PKŞ) ilişkin bulgular

Parça kesir şeması (PKŞ), eş parçalama şemasına benzer şekilde ancak daha gelişmiş haliyle birimleştirme (unitizing), parçalama (partitioning), yerleşik bütünden ayırma (disembedding) ve tekrarlama (iterating) kesirsel faaliyetlerini nicelikler üzerinde etkin olarak kullanmayı gerektirir. Ayrıca PKŞ, PBKŞ’nin aksine birim kesirden ziyade birim kesir olmayan parça kesirler (basit kesir- $\frac{3}{5}$ gibi) ile çalışmayı gerektirir. Aynı zamanda bütün ile parça kesir arasındaki kesirsel büyüklüğün kıyaslanmasıyla parçanın orijinal bütününe oranını bulma veya parça ile bütün oranı verildiğinde orijinal bütünü yeniden oluşturma durumlarında ortaya çıkar.

Veri toplama araçlarında PKŞ kapsamında öğrencilere üç farklı kesir modeli (alan (daire), çubuk ve sayı doğrusu) üç açık uçlu soru şeklinde sunulmuştur. Yapılan içerik analizine göre ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde öğrencilerde ortaya çıkan PKŞ şemasına ilişkin bulgular Tablo 4.8.’de verilmiştir.

Tablo 4.8. PKŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları

	5. sınıf		6. sınıf		7. sınıf		8. sınıf	
	f	%	f	%	f	%	f	%
PKŞ oluşmamış	85	%70	104	%69	80	%52	51	%39
PKŞ gelişim sürecinde	35	%29	45	%30	70	%45	70	%54
PKŞ gelişmiş	1	%1	2	%1	5	%3	9	%7
Toplam	121	%100	151	%100	155	%100	130	%100

Tablo 4.8.'e göre 1'i 5. sınıf, 2'si 6. sınıf, 5'i 7. sınıf ve 9'u 8. sınıf olmak üzere ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde gelişmiş PKŞ şemasına sahip toplamda 17 öğrencinin olduğu ortaya çıkmıştır. PKŞ'si gelişmiş olanlardan 5., 6. ve 7. sınıf düzeylerinden birer öğrenci ile, 8. sınıf düzeyinden ise iki öğrenci ile yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin yazılı değerlendirme aracındaki sorulara verdikleri yanıtların doğrulanması ve daha derin bir anlayış yakalamak amacıyla yapılan görüşmelerde yazılı değerlendirme aracındaki aynı sorular kullanılmıştır. Ayrıca görüşme esnasında öğrencilerden bazı soruları yeniden çözmeleri istenmiş ve uygun zaman geldiğinde öğrencilere yazılı değerlendirme aracındaki yanıtları kendilerine gösterilerek hangi düşünceyle yanıtladıklarını açıklamaları istenmiştir.

Tablo 4.8.'de görülen PKŞ şeması gelişmiş 6. sınıfta okuyan iki öğrenciden biri ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 6. sınıf öğrencisi Ö50'nin PKŞ kapsamında daire alan modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.23.'te verilmiştir.



Görsel 4.23. PKŞ'si gelişmiş Ö50'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-2

Görsel 4.23.'te görülen soruda PKŞ kapsamında öğrencilerin daire alan modelinde bütünün bir parçası olarak verilen şeklin hangi kesir büyüklüğünü temsil ettiğini bulmaları beklenmiştir. Bunun için öncelikle bütün ile parça arasındaki niceliksel büyüklüğün bulunması gerekmektedir. 6. sınıf öğrencisi Ö50'nin bu soru için Görsel 4.23.'te görülen yanıt incelendiğinde, öğrencinin parçalama, yerleşik bütünden ayırma, tekrarlama ve birimleştirme kesirsel faaliyetlerini uyguladığı görülmektedir. Bu bağlamda daha detaylı bilgilere ulaşmak amacıyla Ö50 ile yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiş ve görüşmeden alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

A: (Görsel 4.23.'te görülen soruyu gösterir.) Bu soruyu yeniden çözebilir misin?

Ö50: Bütün daire olmalı. (Verilen şekli daireye tamamlar.) Şimdi bunu eşit bir biçimde böleceğim. O yüzden buradan bir çizgi çektim. (Dairenin yarımını çizerek, yarımın dışında kalan parçayı ayırır.)

A: Neden?

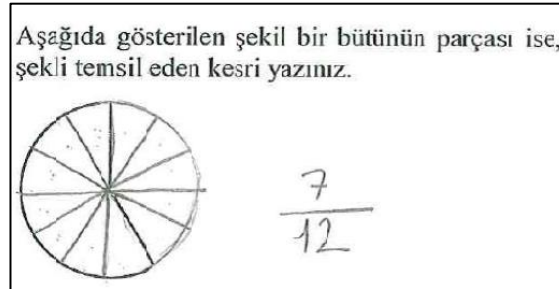
Ö50: Çünkü daireyi ikiye bölüyor. Bir tane daha çizeceğim. (Bu kez daireyi 4 çeyrek oluşacak şekilde yatay olarak da ikiye böler.) Buradan da bölerek çeyrek elde ediyorum. (Yarımdan ayırdığı parçanın merkeze göre simetrisini oluşturur.) Şu kısım kalmasın diye bunu da uzatıp çizmem lazım. (Sonra her bir çeyreği çok özenli bir şekilde üç eş parçaya ayırarak parçalama yapar.)

A: Şu an ne amacıyla çiziyorsun bunları?

Ö50: Hepsinin eşit olması için. Aslında hepsinin şu küçük parçaya (yarımdan ayırdığı) eşit olması için.

A: Hepsi eşit olduysa şimdi ne yapacaksın?

Ö50: Kaç parça olduğunu sayacağım. (12'ye kadar sayar ve kesir çizgisi çizer. Payda kısmına 12'yi yerleştirir.) Şimdi şekilde kaç parça varmış ona bakalım. (7'ye kadar sayar ve pay kısmına 7'yi yerleştirir.) 12'de 7 cevabım.



Görsel 4.24. Ö50 ile görüşme esnasından örnek-2

Ö50'nin görüşme esnasında Görsel 4.24.'te verdiği yanıt, Görsel 4.23.'te görülen yazılı değerlendirme aracındaki yanıtına göre daha özenli görünmektedir. Öğrenci öncelikle verilen parçayı bütüne tamamlamış ve kullanılan modelin özelliğinden faydalanarak daireyi önce çeyrek birimlere ardından her çeyreği üç eşit parçaya ayırarak parçalama faaliyetini kullanmıştır. Aslında burada öğrenci parçalama faaliyetini kullanırken, yarımın dışında kalan parçayı birim kesir parçası olarak tanımlamış ve onu referans almıştır. Zira birim parça olarak belirlediği bu parçayı yerleşik bütünden ayırarak da bütün boyunca tekrarlama faaliyetiyle parçayı 7 eş birim, bütünü ise 12 eş birim olarak tanımlamıştır. Nitekim öğrenciden beklenen yanıt ise parça ile bütün arasında niceliksel büyüklüğün kıyaslanmasıyla parça kesir ile bütün arasındaki oranın bulunmasıydı.

Tablo 4.8.'de görülen PKŞ şeması gelişmiş 7. sınıfta okuyan beş öğrenciden biri ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 7. sınıf öğrencisi Ö23'ün PKŞ kapsamında çubuk modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.25.'te verilmiştir.

Uzun çubuk bir bütünsel, kısa çubuk uzun çubuğun ne kadarıdır?			

$$\frac{3}{4}$$

Görsel 4.25. PKŞ'si gelişmiş Ö23'ün yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.25.'te görülen soruda PKŞ kapsamında öğrencilerin çubuk modelinde bir bütün ve bütünün bir parçası olarak iki çubuğun büyüklüklerinin kıyaslanarak parça ile bütünün oranını bulmaları beklenmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşme esnasında 7. sınıf öğrencisi Ö23'e Görsel 4.25.'te görülen soru gösterilerek yeniden çözmesi istenmiştir. Ö23 ile yapılan görüşme aşağıda özetlenmiştir.

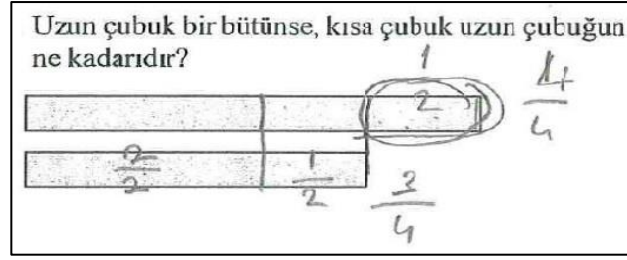
Ö23: Bu iki çubuk arasında (uzun çubuk üzerindeki farkı göstererek) şu kadarlık bir parça kadar fark var. Bu farkı attığımızda bunlar tam oluyorsa demek ki aradığımız mesafe bu [fark]. Yani bu farkın bunların içinde ne kadar olduğunu bulmak lazım.

A: Peki ne kadar var?

Ö23: (Farkı göstererek) Burası 4'te 1'i gibi geliyor. Önce yarısını bulalım bence. (Uzun çubuğun yarısını bulur ve kesme çizgisini alttaki kısa çubuğa kadar uzatır.) Bir de diğer tarafın da yarısını alalım. Zaten bunun yarısı ikisi arasındaki fark kadar. (Görsel 4.26.'daki gibi uzun çubuğun bir yarısının da yarısını yani çeyreğini bulur. Böylece iki çubuk arasındaki farkı ayırmış olur. Fark $\frac{1}{2}$ olacak şekilde uzun çubuğun her iki yarısının $\frac{2}{2}$ olduğunu belirtir.)

A: Sonrasında ne yapmalısın?

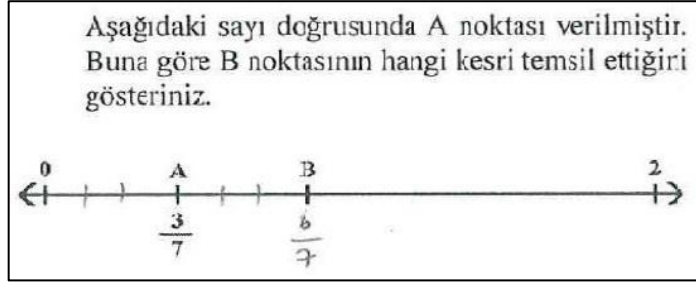
Ö23: Şimdi uzun çubukta 4 tane parça oldu. Yani bu fark uzun çubuk için 4'te 1'lik bir kısımdır. O zaman uzun çubuğa 4'te 4 deyince, kısa çubuk uzun çubuğun 4'te 3'üne denk geliyor.



Görsel 4.26. Ö23 ile görüşme esnasından örnek-1

7. sınıf öğrencisi Ö23 görüşme esnasında PKŞ bağlamında çubuk modeli ile sorulan soruya Görsel 4.26.'daki gibi yanıt vermiştir. Diğer sınıf düzeylerinde de bu soru için sıklıkla görülen bu yanıtla göre öğrenci, öncelikle çubuklar üzerinde tekrarlayabileceği bir parçayı bulma gereksinimi hissetmiştir. Bu parça aslında PKŞ bağlamında her zaman ihtiyaç duyulan tekrarlanabilir birim kavramına işaret etmektedir. Ö23 iki çubuk arasındaki fark kadar olan parçayı dikkate alarak parçalama faaliyetini ona göre tasarlamıştır. Nitekim öncelikle zihninde 4'te 1'i gibi tahmin ettiğini belirtse de önermesini doğrulamak amacıyla uzun çubuğu önce iki yarıma ardından oluşan yarımı da iki yarım parçaya ayırmıştır. Aynı zamanda öğrencinin burada birimleştirme faaliyetini parçalama faaliyetine uygun bir şekilde gerçekleştirdiği dikkat çekmiştir. Sonuç itibarıyla öğrenci başlangıçta iki yarım parçaya ayırma işlemini gerçekleştirdiği için, uzun çubuğun iki parçasının da $\frac{2}{2}$ şeklinde kesir büyüklüğünü temsil ettiğini belirtmiştir. Parçalama faaliyetinin ardından Ö23, parça ile bütün arasındaki oranı bulmak için fark kısmını yerleşik bütünden ayırarak her iki çubuk üzerinde de *farkın* büyüklüğünü tekrarlamıştır. Dolayısıyla tekrarlama faaliyetinden sonra da 7. sınıf öğrencisi olan Ö23 her iki çubuğu belli bir parçanın büyüklüğü üzerinden kıyaslamamanın bir yolunu bulmuş ve sonucunda $\frac{3}{4}$ 'ü kadar olduğu yanıtını verebilmiştir.

Tablo 4.8.'de görülen PKŞ şeması gelişmiş öğrenciler arasında sayı doğrusu modeli ile sunulan soru için sıklıkla görülen yanıt örneklenilmek istenmiştir. Bu doğrultuda yaygın olarak görülen yanıt için yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 8. sınıf öğrencisi Ö36'nın PKŞ kapsamında sayı doğrusu modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.27.'de verilmiştir.



Görsel 4.27. PKŞ'si gelişmiş Ö36'nın yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.27.'de görülen soru için öğrencilerden PKŞ bağlamında sayı doğrusu modeli üzerindeki B noktasının, modelin özelliğinden kaynaklı örtük olarak verilen $1=7/7$ olan bütün ile 0 noktasına olan uzaklıklarının karşılaştırılması ve parça ile bütün oranının bulunması beklenmektedir. 8. sınıf öğrencisi olan Ö36 bu soru için doğru yanıt vermiş olup, PKŞ bağlamında kesirsel faaliyetleri nasıl kullandığına dair daha detaylı bilgilere ulaşmak amacıyla Ö36 ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Görüşme esnasında araştırmacı Görsel 4.27.'deki soruyu öğrenciye göstererek yeniden çözmesini istemiş ve Ö36 ile gerçekleştirilen görüşmeden alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

Ö36: (Sayı doğrusu üzerindeki 2 noktasını gösterir.) Şurası $14/7$ olur. Aslında burayı yani 0 ile 2 arasını 14 parçaya böleceğiz. Daha sonra B noktasının denk geldiği kesri bulmalıyız.

A: Peki göster bakalım.

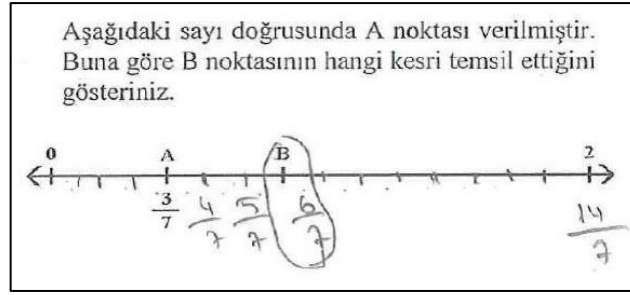
Ö36: (Öncelikle 0'dan A noktasına olan kısmı 3 eşit parçaya ayırır. Sonra bu üç parçanın her birinin uzunluğuna eşit bir parçayı A'dan 2'ye kadar tekrarlarlarken hepsini silip yeniden yapmaya başlar.)

A: Neden sildin?

Ö36: (A noktasından sonraki kısmı gösterir.) Buradaki aralıklar daha kısa oldu. O yüzden yeniden yapacağım. Hepsi eşit olmalı. (Yeniden 0 ile 2 arasını 14 eş parçaya ayırır.) Evet oldu şimdi 14 parçaya böldüm.

A: Peki şimdi ne yapacaksın?

Ö36: Şimdi bizden B'yi bulmamızı istemiş. (A'dan sonraki noktaları sayarak $4/7$, $5/7$ ve $6/7$ kesirlerini yerleştirir.) B noktası $6/7$ kesrine denk geliyor.



Görsel 4.28. Ö36 ile görüşme esnasından örnek-1

8. sınıf öğrencisi olan Ö36'nın PKŞ bağlamında görüşme esnasında verdiği yanıt Görsel 4.28.'de görülmektedir. Bu yanıt doğrultusunda öğrencinin öncelikle (0-2) aralığında verilen sayı doğrusu modelini bir bütün olarak $14/7$ şeklinde tanımlamış ve bu bütün üzerinden işlem yapmıştır. Yapılan analizlere göre PKŞ bağlamında öğrencilerin bu soruya sayı doğrusu üzerinde "1" sayısını yerleştirmeleri ile başladıkları da yaygın olarak görülmüştür. Sonuç itibariyle Ö36 bu soruda hem (0-2) aralığını bütün olarak bir birim hem de her bir $1/7$ 'lik parçayı başlı başına tekrarlanabilir birim olarak tanımlamıştır. Ardından öğrenci 0'dan B noktasına olan uzaklığı temsil eden B kesir büyüklüğünü bulmak için bütün ile kıyaslayacağı bir birim kesir büyüklüğüne ihtiyaç duymuştur. Bu bağlamda öğrenci $3/7$ olarak verilen A noktasının 0 noktasına olan uzaklığını temsil ettiğinin farkındadır. Dolayısıyla birim kesir büyüklüğünü bulmak için 0 ile A noktasını 3 eşit birime ayırarak parçalama faaliyetini gerçekleştirmiştir. Bunun üzerinde $1/7$ 'lik birim kesir büyüklüğünü hem fiziksel hem zihinsel yerleşik bütünden ayırarak sayı doğrusu üzerinde 2 noktasına kadar özenle tekrarlamıştır. Özetle 8. sınıf öğrencisi olan Ö36 parça kesir şeması bağlamında üç farklı model ile sunulan soruların hepsine birden şema ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek doğru yanıt vermiştir.

4.1.4.1. PKŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması

Bu başlık altında ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde PKŞ'si gelişmiş ve gelişim sürecinde olan öğrencilerin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı performanslarına ilişkin bulgular karşılaştırmalı olarak özetlenmiştir.

Elde edilen bulgulara göre ortaokul öğrencilerinin PKŞ bağlamında şema ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek farklı kesir modelleri üzerinde gösterdikleri

başarılar incelenmek istenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin alan (daire), çubuk ve sayı doğrusu modelleri üzerinden aldıkları toplam puanlar değerlendirilmiş ve sınıf düzeylerine göre dağılımı Tablo 4.9.'da verilmiştir.

Tablo 4.9. PKŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı

	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf	Toplam
Alan	%14	%15	%19	%29	%21
Çubuk	%72	%62	%61	%71	%66
Sayı doğrusu	%36	%51	%61	%54	%53

Tablo 4.9.'a göre parça kesir şeması (PKŞ) gelişmiş veya gelişim sürecinde olan (5. sınıf $n = 36$, 6. sınıf $n = 47$, 7. sınıf $n = 75$ ve 8. sınıf $n = 79$ olmak üzere) toplamda 237 öğrencinin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı yüzdeleri görülmektedir. Burada verilen başarı yüzdeleri öğrencilerin PKŞ ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek model bazında aldıkları puanlardan üretilmiştir. PKŞ'si gelişmiş öğrenci alan, çubuk ve sayı doğrusu modelleri ile sunulan soruların hepsine birden doğru yanıt verirken; PKŞ'si gelişim sürecinde olan öğrenciler bahsedilen üç farklı modelin hepsine değil bazılarına doğru yanıt vermişlerdir. Bu bağlamda öğrencilerin PKŞ bağlamında hangi kesir modelleri üzerinde daha yüksek başarı gösterdikleri incelenmek istenmiştir.

Tablo 4.9. incelendiğinde sırasıyla 5. sınıf öğrencilerin %72'si, 6. sınıf öğrencilerin %62'si ve 8. sınıf öğrencilerin %71'i en çok başarı gösterilen modelin çubuk modeli olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra 7. sınıf öğrencilerin en başarılı oldukları kesir modelleri %61 oranıyla çubuk modeli ile aynı orana sahip sayı doğrusu modeli olarak ortaya çıkmıştır. Ayrıca şimdiye kadar ele alınan şemalarda (PBŞ, EPŞ ve PBKŞ) en düşük başarı oranına sahip olan sayı doğrusu modelinin, PKŞ kapsamında ortaokulun tüm sınıf düzeylerinde çubuk modelinden sonra en çok başarı sergilenen kesir modeli olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öte yandan Tablo 4.9.'a göre PKŞ bağlamında tüm düzeylerde en düşük başarı oranına sahip olan alan modelinde sırasıyla %14, %15, %19 ve %29 oranlarıyla 5. sınıftan 8. sınıfa doğru giderken çok büyük farkla olmasa da belli bir artışın olduğu görülmektedir.

4.1.5. Tersinir parça kesir şemasına (TPKŞ) ilişkin bulgular

Tersinir parça kesir şeması (TPKŞ) parçalama ve tekrarlama faaliyetinin eş zamanlı olarak kullanıldığı yinelemeli ayırıştırma (splitting) kesirsel faaliyetini nicelikler üzerinde etkin olarak kullanmayı gerektirir. Bunun yanı sıra TPKŞ bütünün ve birim kesrin belli olmadığı ancak herhangi bir parça kesir büyüklüğünden orijinal bütünün oluşturulması durumlarında ortaya çıkar. Ayrıca TPKŞ, PKŞ gibi parça kesirler üzerinde çalışmayı gerektirir ve PKŞ'nin yeterli olmadığı durumlarda etkinleştirilir.

Veri toplama araçlarında TPKŞ kapsamında öğrencilere iki farklı kesir modeli (alan (dikdörtgen) ve küme) iki açık uçlu soru şeklinde sunulmuştur. Yapılan içerik analizine göre ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde öğrencilerde ortaya çıkan TPKŞ şemasına ilişkin bulgular Tablo 4.10.'da verilmiştir.

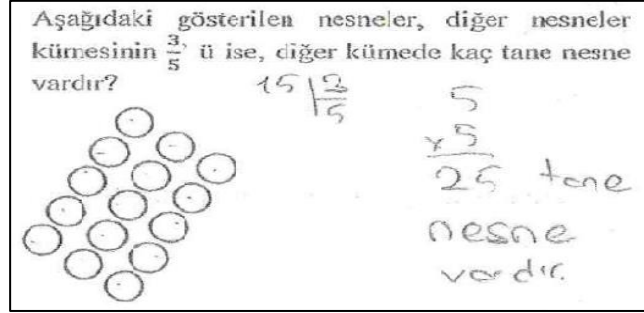
Tablo 4.10. TPKŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları

	5. sınıf		6. sınıf		7. sınıf		8. sınıf	
	f	%	f	%	f	%	f	%
TPKŞ oluşmamış	94	%78	109	%72	111	%72	67	%52
TPKŞ gelişim sürecinde	21	%17	28	%19	33	%21	43	%33
TPKŞ gelişmiş	6	%5	14	%9	11	%7	20	%15
Toplam	121	%100	151	%100	155	%100	130	%100

Tablo 4.10.'a göre 6'sı 5. sınıf, 14'ü 6. sınıf, 11'i 7. sınıf ve 20'si 8. sınıf olmak üzere ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde gelişmiş TPKŞ şemasına sahip toplamda 51 öğrencinin olduğu ortaya çıkmıştır. TPKŞ'si gelişmiş olanlardan 5. sınıf düzeyinden bir öğrenci, 6. sınıf düzeyinden dört öğrenci, 7. sınıf düzeyinden beş öğrenci ve 8. sınıf düzeyinden ise altı öğrenci ile yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin yazılı değerlendirme aracındaki sorulara verdikleri yanıtların doğrulanması ve daha derin bir anlayış yakalamak amacıyla yapılan görüşmelerde yazılı değerlendirme aracındaki aynı sorular kullanılmıştır. Ayrıca görüşme esnasında öğrencilerden bazı soruları yeniden çözmeleri istenmiş ve uygun zaman geldiğinde öğrencilere yazılı değerlendirme aracındaki yanıtları kendilerine gösterilerek hangi düşünceyle yanıtladıklarını açıklamaları istenmiştir.

Tablo 4.10.'da görülen TPKŞ şeması gelişmiş 5. sınıfta okuyan altı öğrenciden biri ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış

klirik görüşme gerçekleştirilen 5. sınıf ğrencisi 19'un TPK kapsamında küme modeli ile sorulan soruya diğerk öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.29.'da verilmiştir.



Görsel 4.29. TPK'si gelimi 19'un yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.29.'da görülen soruda öğrencilerden TPK bağlamında küme modelinde 3/5'lik kesir büyüklüğünde verilen şekilden faydalananarak orijinal bütünü oluşturmaları istenmiştir. Bu bağlamda 5. sınıf ğrencisi olan 19'un Görsel 4.29'daki soruyu aritmetik işlemlerden faydalananarak yanıtladığı görülmektedir. Dolayısıyla yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 19'un TPK bağlamında kesirsel faaliyetleri küme modeli üzerinde nasıl uyguladığı incelenmek istenmiştir. Bu doğrultuda 19 ile yapılan görüşmeye ait alıntılar aşağıda özetlenmiştir.

A: (ğrenciye Görsel 4.29.'da görülen yanıtını gösterir.) Bu soru için verdiğin cevap 25 nesne imiş. Peki bu soruyu nasıl çözdüğünü açıklar mısın?

19: Burada 15 tane daire varmış o yüzden bunu 3'e böldüm, sonuç 5 oldu. Sonra 5 ile çarpım öyle buldum.

A: Peki 15'i neden 3'e bldn?

19: Çünkü buradaki daireler diğerklerinin beşte ym. O yüzden 3'e böldüm. Yani birini bulmak için. 1'inde 5 tane daire varmış onu buldum.

A: Peki ekil üzerinde bunu gösterebilir misin?

19: 5 taneyi mi?

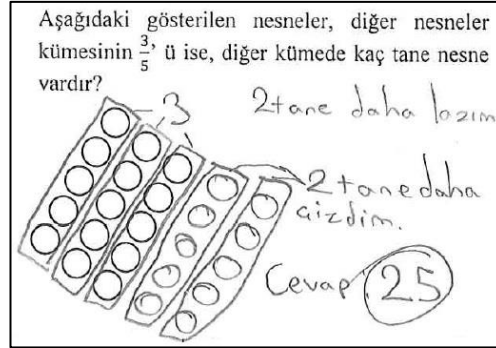
A: Evet lütfen.

19: (ekil üzerinde 5 tane nesneyi gruplar.) Burası be taneden biridir.

A: Devamını da yap lütfen.

19: (Görsel 4.30.'da görüldüğü gibi her 5 nesneyi grupladıktan sonra şeklin yanına 2 tane daha grup ekler ve cevabın 25 olduğunu belirtir.) Soruda bizden hepsini yani beşte beini

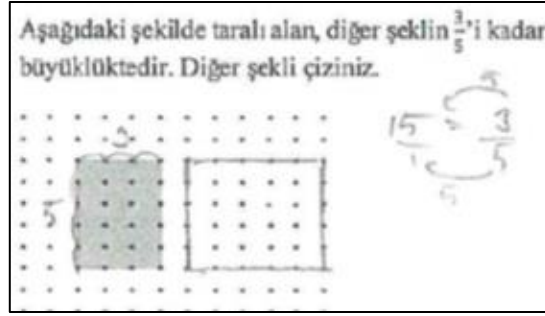
bulmamızı istemiş. Ben burada beşte birini bulmuştum zaten. O da 5 daire imiş. Zaten burada 3 tane var. O zaman 2 tane daha eklersek hepsini buluruz.



Görsel 4.30. Ö19 ile görüşme esnasından örnek-1

Görsel 4.29.'da ve Görsel 4.30.'da 5. sınıf öğrencisi Ö19'un TPKŞ kapsamında verdiği yanıtlar görülmektedir. Öğrenci yazılı değerlendirme aracında aritmetik işlemlerden faydalanarak sonuca ulaştığı görülse de görüşme esnasında kesir dilini doğru ve etkili bir şekilde kullandığı görülmüştür. Ayrıca Görsel 4.30.'da görülen ve görüşme esnasında verdiği sözlü, yazılı ve görsel yanıtları incelendiğinde Ö19'un $\frac{3}{5}$ büyüklüğündeki nesnelerden diğer şeklinde kastedilen bütüne ulaşmak için zihinsel olarak yinelemeli ayrıştırma kesirsel faaliyetini kullandığı görülmektedir. Nitekim bu durum öğrencinin model üzerinde uyguladığı fiziksel faaliyetlerine de yansımıştır. Görsel 4.30.'da Ö19'un öncelikle 15 nesne olarak verilen parça büyüklüğünden ($\frac{3}{5}$ 'lik), birim kesir büyüklüklerini ($\frac{1}{5}$ 'lik) 5'erli 3 ayrı grup halinde oluşturmuştur. Öğrencinin bu faaliyeti somut bir şekilde parçalama faaliyeti olarak düşünülebilir. Ayrıca bu faaliyetin ardından öğrencinin birim kesir büyüklüğünü tekrarlayarak 5'erli 2 ayrı grubu eklemiş ve nihayetinde $\frac{5}{5}$ 'lik orijinal bütünü oluşturmuştur. Aslında öğrencinin nicelik üzerinde parça kesirden bütüne ulaşma durumunda uyguladığı bu fiziksel faaliyetlerden önce öğrencinin zihninde yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin canlandığının göstergesidir. Nihayetinde Ö19 "diğer nesneler kümesinin $\frac{3}{5}$ 'ü" ifadesini bilişsel olarak anlamlandırmadıkça fiziksel olarak parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini gösteremez. Bu sebepten ötürü TPKŞ bağlamında sorulan sorulara aritmetik işlemlerden faydalanarak doğru yanıt verdiği görülen öğrenciler için şema ile uyumlu faaliyetleri gerçekleştirdiği yönünde değerlendirme yapılmıştır.

Tablo 4.10.'da görülen TPKŞ şeması gelişmiş 8. sınıfta okuyan yirmi öğrenciden altısı ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 8. sınıf öğrencisi Ö38'in TPKŞ kapsamında dikdörtgen alan modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.31.'de verilmiştir.



Görsel 4.31. TPKŞ'si gelişmiş Ö38'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.31.'de görülen soruda öğrencilerden TPKŞ bağlamında noktalı zemin üzerinde dikdörtgen alan modelinde $3/5$ 'lik büyüklüğünde verilen şekilden faydalanarak orijinal bütünü oluşturmaları istenmiştir. Bu bağlamda 8. sınıf öğrencisi olan Ö38'in Görsel 4.31.'deki soruyu aritmetik işlemlerden faydalanarak yanıtladığı görülmektedir. Dolayısıyla yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen Ö38'in TPKŞ bağlamında kesirsel faaliyetleri alan modeli üzerinde nasıl uyguladığı incelenmek istenmiştir. Bu doğrultuda Ö38 ile yapılan görüşme aşağıda özetlenmiştir.

A: (Görsel 4.31.'deki soruyu gösterir.) Bu soruyu yeniden çözebilir misin?

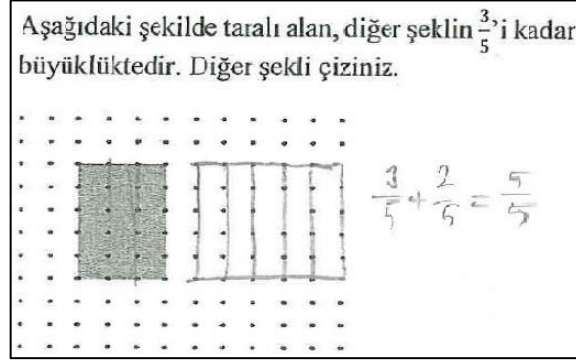
Ö38: Eğer bu 3 bölü 5'i ise her bir kısmı (Görsel 4.32.'deki gibi şekli sütun olarak 3 eş parçaya ayırarak 1'ini gösterir.) $1/5$ 'i oluyor. O zaman bu şeklin yanına 2 sütun daha eklememiz gerekiyor. (Şeklin yanına 5 sütundan oluşan orijinal bütünü çizer.) Evet şimdi diğer şekli bulduk.

A: Peki bu bulduğun şeklin kesir büyüklüğü nedir?

Ö38: Zaten şurası (İlk 3 sütunu gösterir.) $3/5$, $2/5$ 'i de ekledik. Tamamı $5/5$ olur.

A: (Ö38'e Görsel 4.31.'deki yanıtını gösterir.) Peki burada farklı bir yöntemle sonucu bulmuşsun. Burada ne yaptın açıklar mısın?

Ö38: Aslında burada oranladım. Burası 15 (birimkare) imiş. Yani 5'te 3'lük kısmı. O zaman 5'te 5'ini bulmak için oranladım ve diğer şeklin 25 taneden (birimkareden) oluştuğunu buldum.



Görsel 4.32. Ö38 ile görüşme esnasından örnek-1

Görsel 4.31.'de ve Görsel 4.32.'de 8. sınıf öğrencisi Ö38'in TPKŞ bağlamında alan modeli üzerinde verdiği yanıtlar görülmektedir. Ö38'in Görsel 4.31.'de yazılı değerlendirme aracında aritmetik işlemlerden faydalanarak sonuca ulaştığı görülse de görüşme esnasında TPKŞ ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirdiği ve kesir dilini doğru bir şekilde kullandığı görülmüştür. Ayrıca Görsel 4.32.'de görülen ve görüşme esnasında verdiği sözlü, yazılı ve görsel yanıtları incelendiğinde Ö38'in $\frac{3}{5}$ kesrinin temsil ettiği 15 birimkarelik alan ile $\frac{5}{5}$ kesrinin temsil ettiği orijinal bütünün birimkare olarak büyüklüğü arasında *oranlama* yaptığı görülmüştür. Bu durum öğrencinin görmediği orijinal bütünü, kendisine sunulan parça kesrinin büyüklüğünden faydalanarak zihinde canlandırıldığını ve $\frac{3}{5}$ kesri ile bu kesrin temsil ettiği niceliğe yinelemeli ayırtırma faaliyetini uygulayarak yeniden oluşturabileceğinin farkında olduğunu gösterir. Nitekim Ö38'in zihninde aktifleşen bu durum, öğrencinin alan modeli üzerinde uyguladığı fiziksel faaliyetlerine de yansımıştır. Görsel 4.32.'deki gibi öncelikle verilen şekli 3 sütun halinde parçalamış ardından birim kesir olan bir sütunu da tekrarlayarak orijinal bütünü oluşturabilmiştir.

4.1.5.1. TPKŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması

Bu başlık altında ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde TPKŞ'si gelişmiş ve gelişim sürecinde olan öğrencilerin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı performanslarına ilişkin bulgular karşılaştırmalı olarak özetlenmiştir. Elde edilen bulgulara göre ortaokul öğrencilerinin TPKŞ bağlamında şema ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek farklı kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarılar incelenmek istenmiştir. Bu

bağlamda öğrencilerin alan (dikdörtgen) ve küme modelleri üzerinden aldıkları toplam puanlar değerlendirilmiş ve sınıf düzeylerine göre dağılımı Tablo 4.11.'de verilmiştir.

Tablo 4.11. TPKŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı

	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf	Toplam
Alan	%85	%67	%68	%62	%68
Küme	%37	%67	%57	%70	%61

Tablo 4.11.'de tersinir parça kesir şeması (PKŞ) gelişmiş veya gelişim sürecinde olan (5. sınıf $n = 27$, 6. sınıf $n = 42$, 7. sınıf $n = 44$ ve 8. sınıf $n = 63$ olmak üzere) toplamda 176 öğrencinin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı yüzdeleri görülmektedir. Burada verilen başarı yüzdeleri öğrencilerin TPKŞ ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek model bazında aldıkları puanlardan üretilmiştir. TPKŞ'si gelişmiş öğrenci alan ve küme modelleri ile sunulan soruların ikisine de doğru yanıt verirken; TPKŞ'si gelişim sürecinde olan öğrenciler bahsedilen iki farklı modelin birine doğru yanıt vermişlerdir. Bu bağlamda öğrencilerin TPKŞ bağlamında hangi kesir modelleri üzerinde daha yüksek başarı gösterdikleri incelenmek istenmiştir.

Tablo 4.11. incelendiğinde sırasıyla 5. sınıf öğrencilerin %85'inin ve 7. sınıf öğrencilerin %68'inin en çok başarıyı alan modeli üzerinde gösterdikleri görülmektedir. 8. Sınıf öğrencilerin ise %70'inin küme modelinde daha yüksek performans sergiledikleri görülmektedir. Bunun yanı sıra 6. sınıf öğrencilerinin ise %67 oranı ile alan ve küme olmak üzere her iki kesir modeli üzerinde de aynı oranda başarılı oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Öte yandan Tablo 4.11.'e göre %37 oranı ile en düşük başarı yüzdesi, 5. sınıf düzeyinde küme modeli üzerinde başarılı olan öğrencilere ait olduğu görülmüştür. 5 sınıf düzeyinde görülen bu oran 6. sınıfta düzeyinde %67'ye yükselerek gözle görülür bir farkla ortaya çıkan bu artış dikkat çekmiştir.

4.1.6. Bileşik kesir şemasına (BKŞ) ilişkin bulgular

Bileşik kesir şeması (BKŞ), TPKŞ gibi parçalama ve tekrarlama faaliyetinin eş zamanlı olarak kullanıldığı yinelemeli ayrıştırma (splitting) kesirsel faaliyetini nicelikler üzerinde etkin olarak kullanmayı gerektirir. Bunun yanı sıra BKŞ bütünün 1'den büyük olduğu yani bileşik kesir büyüklükleri ile çalışıldığı durumlarda ortaya çıkar.

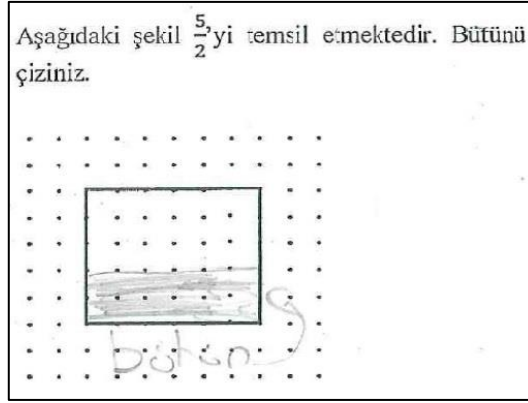
Veri toplama araçlarında BKŞ kapsamında öğrencilere dört farklı kesir modeli (alan (daire ve dikdörtgen), çubuk, küme ve sayı doğrusu) beş açık uçlu soru şeklinde sunulmuştur. Yapılan içerik analizine göre ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde öğrencilerde ortaya çıkan BKŞ şemasına ilişkin bulgular Tablo 4.12.'de verilmiştir.

Tablo 4.12. *BKŞ bağlamında sınıf düzeylerinde karşılaşılan öğrenci sayıları*

	5. sınıf		6. sınıf		7. sınıf		8. sınıf	
	f	%	f	%	f	%	f	%
BKŞ oluşmamış	79	%65	98	%65	63	%41	46	%35
BKŞ gelişim sürecinde	42	%35	50	%33	90	%58	76	%59
BKŞ gelişmiş	0	-	3	%2	2	%1	8	%6
Toplam	121	%100	151	%100	155	%100	130	%100

Tablo 4.12.'ye göre üçü 6. sınıf, ikisi 7. sınıf ve sekizi 8. sınıf olmak üzere ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde gelişmiş BKŞ şemasına sahip toplamda 13 öğrencinin olduğu ortaya çıkmıştır. BKŞ'si gelişmiş olanlardan 6. sınıf düzeyinden iki öğrenci, 7. sınıf düzeyinden bir öğrenci ve 8. sınıf düzeyinden ise üç öğrenci ile yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin yazılı değerlendirme aracındaki sorulara verdikleri yanıtların doğrulanması ve daha derin bir anlayış yakalamak amacıyla yapılan görüşmelerde yazılı değerlendirme aracındaki aynı sorular kullanılmıştır. Ayrıca görüşme esnasında öğrencilerden bazı soruları yeniden çözmeleri istenmiş ve uygun zaman geldiğinde öğrencilere yazılı değerlendirme aracındaki yanıtları kendilerine gösterilerek hangi düşünceyle yanıtladıklarını açıklamaları istenmiştir.

Tablo 4.12.'de görülen BKŞ şeması gelişmiş 6. sınıfta okuyan üç öğrenciden ikisi ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 6. sınıf öğrencisi Ö48'in BKŞ kapsamında dikdörtgen alan modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.33.'te verilmiştir.



Görsel 4.33. BKŞ'si gelişmiş Ö48'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.33.'te görülen soruda öğrencilerden BKŞ bağlamında dikdörtgen alan modelinde $\frac{5}{2}$ 'lik bileşik kesir büyüklüğünde verilen şekilden faydalananarak orijinal bütünü oluşturmaları ile birlikte $\frac{2}{2}$ veya bütün gibi kesin ifadeleri kullanmaları beklenmiştir. Ancak araştırmadan elde edilen ön bulgularda bazı öğrencilerin $\frac{5}{2}$ kesir büyüklüğünü $\frac{2}{5}$ gibi algılayıp parça bütün şeması bağlamında cevapladıkları görülmüştür. Dolayısıyla ilk aşamadaki içerik analizinde yalnızca aritmetik işlem kullanarak “12” yanıtını veren öğrencilerin yanıtları yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerle doğrulanmaya çalışılmıştır. Bunun yanında görüşme gerçekleştirilemeyen diğer öğrencilerin bu soru bağlamındaki yanıtları irdelenirken, öğrencilerin BKŞ bağlamında sorulan diğer sorulara verdikleri yanıtlarıyla ilişkilendirilerek değerlendirilmiştir. Hem görüşme gerçekleştirilemeyen hem de bu soruda yalnızca aritmetik işlemleri kullanan öğrencilerin yanıtları değerlendirmeye alınmamıştır.

Görsel 4.33.'te BKŞ bağlamında yazılı değerlendirme aracında sorulan soruya 6. sınıf öğrencisi olan Ö48'in “bütün” ifadesini kullanarak yanıt verdiği görülmektedir. Aynı zamanda yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilen Ö48'in BKŞ bağlamında bu soruyu yanıtlarken kesirsel faaliyetleri nasıl kullandığı daha detaylı incelenmeye çalışılmıştır. Bu doğrultuda Ö48 ile yapılan görüşme aşağıda özetlenmiştir.

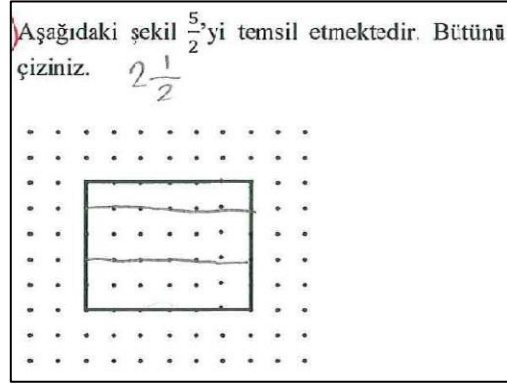
A: (Görsel 4.33.'teki soruyu gösterir.) Bu soruyu sesli düşünerek yeniden çözebilir misin?

Ö48: 2'de 5'i temsil ediyormuş. Bu tam sayılı bir kesir oluyor. Yani “2 tam 2'de 1”.

A: Evet güzel. Peki bütünü bulmanı istiyor. Ne yaparsın?

Ö48: 2'de 5 imiş. O zaman bunun içinde “2 tam bir tane de yarım” var. (Verilen şeklin kenar uzunluklarını sayarak kaç birimkareden oluştuğunu hesaplar. Ardından şekli Görsel

4.34.’teki gibi 2 tam 1 yarım olacak şekilde parçalar.) Bunlar da (tamları göstererek) birer bütün oluyor. Yani 2’de 2.

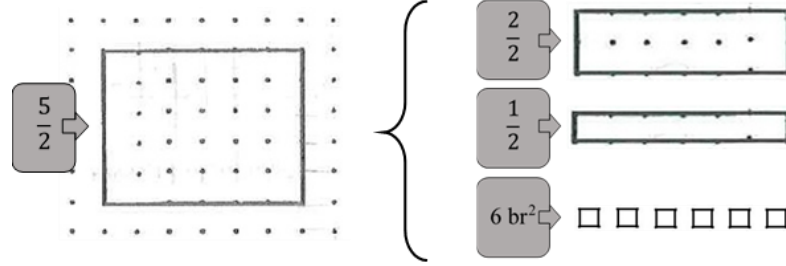


Görsel 4.34. Ö48 ile görüşme esnasından örnek-1

Görsel 4.34.’te görülen BKŞ bağlamında alan modeli ile sorulan soruyu çözmek için 6. sınıf öğrencisi Ö48’in $\frac{5}{2}$ kesir büyüklüğünden yola çıkarak yinelemeli ayrıştırma faaliyetini kullandığı ve parça ile bütün arasındaki ilişkiyi tersine işlediği görülmektedir. Ö48 ile yapılan görüşmede bu soru için kullandığı ilk sözlü ifadenin 2’de 5 olduğu ve aynı zamanda bu kesri “2 tam bir tane yarım” şeklinde ayrıştırdığı göze çarpmaktadır. Bunun yanı sıra Ö48’in bileşik kesirler üzerinde çalışmayı gerektiren BKŞ bağlamında zihninde canlandırarak ayrıştırdığı niceliği model üzerinde oluşturmak için parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini fiziksel olarak gerçekleştirdiği görülmektedir. Nitekim Görsel 4.34. incelendiğinde, Ö48’in verilen niceliği parçalama faaliyeti eş parçalara ayırma faaliyeti olarak değil, birimlere ayırma faaliyeti amacıyla yapılmıştır. Burada öğrenci niceliği “2 tam ve 1 yarım” olarak birimleştirirken, parçalama faaliyetini de “2 tam ve 1 yarım” oluşacak şekilde model üzerinde uygulamıştır. Aslında bu durum tam olarak BKŞ’de yinelemeli ayrıştırma (splitting) faaliyetinin yani parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin eş zamanlı olarak etkin bir şekilde kullanımı açısından önemli bir örnektir. Çünkü Ö48 nicelik üzerinde fiziksel parçalama faaliyetini uygularken, 1 tam içerisinde 1 yarımı da zihinsel olarak ayrıştırmış (splitting) ve şekil üzerinde “5 eş yarım”dan ziyade “2 tam ve 1 yarım” olarak parçalama faaliyetinde bulunmuştur.

Öte yandan Ö48’in bileşik kesir şeması bağlamında nicelik üzerinde kullandığı birimleştirme faaliyeti incelenmiştir. Yapılan analize göre 6. sınıf öğrencisi Ö48’in üç kademeli birimleştirme yapabildiği görülmüştür. Bu bağlamda alan modeli üzerinde

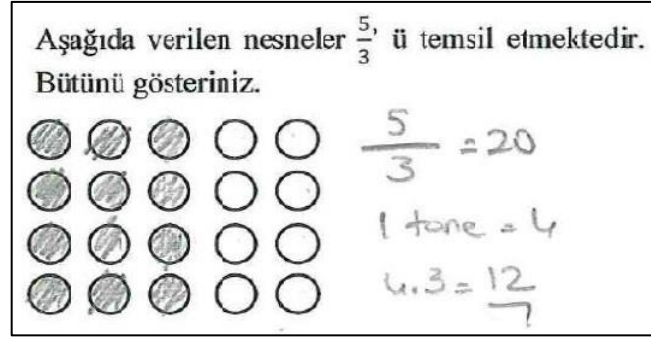
Ö48'e göre $\frac{5}{2}$ kesir büyüklüğü içerisinde tekrarladığı birimler ve bu birimlere tanımladığı temsil ölçüleri Görsel 4.35.'te verilmiştir.



Görsel 4.35. Ö48'e göre $\frac{5}{2}$ kesir büyüklüğünün içerisinde tekrarlanan birimler

Görsel 4.35.'te alan modelinde $\frac{5}{2}$ bileşik kesrini temsil eden bir nicelik verilip bütünü göstermesi istenen 6. sınıf Ö48'in nicelik üzerinde farklı büyüklüklerde üç farklı birim atadığı ve $\frac{5}{2}$ büyüklüğünü bu birimlerin tekrarlamasıyla oluşturduğu görülmektedir. Ö48'in burada nicelik üzerinde uyguladığı üç kademeli birimleştirme faaliyetidir. Çünkü her 6 birimkare (bir satır) $\frac{1}{2}$ 'i, iki tane $\frac{1}{2}$ (iki satır) $\frac{2}{2}$ 'yi, iki tane $\frac{2}{2}$ ve bir $\frac{1}{2}$ ise $\frac{5}{2}$ 'yi oluşturur. Dolayısıyla Ö48'in $\frac{5}{2}$ kesrini "2 tam ve 1 yarım"dan oluşacak şekilde tanımlaması ve birimkarelerin (tekil birim) ötesinde bileşik birimleri ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$ ve $\frac{5}{2}$) aktivite öncesinde zihninde canlandırması öğrencinin üç kademeli birimleri üçüncü seviyede koordine ettiğini gösterir.

Tablo 4.12.'de görülen BKŞ şeması gelişmiş 7. sınıfta okuyan iki öğrenciden biri ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 7. sınıf öğrencisi Ö51'in BKŞ kapsamında küme modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.36.'da verilmiştir.



Görsel 4.36. BKŞ'si gelişmiş Ö51'in yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.36.'da görülen soruda öğrencilerden BKŞ bağlamında küme modelinde $\frac{5}{3}$ 'lük bileşik kesir büyüklüğünde verilen nesnelerden faydalanarak orijinal bütünü oluşturmaları ile birlikte $\frac{3}{3}$ veya bütün gibi kesin ifadeleri kullanmaları beklenmiştir. Ancak araştırmadan elde edilen ön bulgularda bazı öğrencilerin $\frac{5}{3}$ kesir büyüklüğünü $\frac{3}{5}$ gibi algılayıp parça bütün şeması bağlamında cevapladıkları görülmüştür. Dolayısıyla ilk aşamadaki içerik analizinde yalnızca aritmetik işlem kullanarak “12” yanıtını veren öğrencilerin yanıtları yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerle doğrulanmaya çalışılmıştır. Bunun yanında görüşme gerçekleştirilemeyen diğer öğrencilerin bu soru bağlamındaki yanıtları irdelenirken, öğrencilerin BKŞ bağlamında sorulan diğer sorulara verdikleri yanıtlarıyla ilişkilendirilerek değerlendirilmiştir. Hem görüşme gerçekleştirilemeyen hem de bu soruda yalnızca aritmetik işlemleri kullanan öğrencilerin yanıtları değerlendirmeye alınmamıştır.

Görsel 4.36.'da görülen 7. sınıf öğrencisi olan Ö51'in BKŞ bağlamındaki soruya yanıt verirken bileşik kesir ile nicelik büyüklüğü arasındaki orandan faydalandığı görülmektedir. Aynı zamanda yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilen Ö51'in BKŞ bağlamında bu soruyu yanıtlarken kesirsel faaliyetleri nasıl kullandığı daha detaylı incelenmeye çalışılmıştır. Bu doğrultuda Ö51 ile yapılan görüşme aşağıda özetlenmiştir.

A: (Görsel 4.36.'daki soruyu gösterir.) Bu soruyu yeniden çözebilir misin?

Ö51: 5 bölü 3'ü diyor yani buradakilerin hepsi $\frac{5}{3}$ 'e eşit. Bir de burayı (kaç nesne olduğunu) sayalım. 20 tane var o zaman $\frac{5}{3}$ 20'ye eşittir. (Orantı kurarak cevabın 12 olduğunu söyler.)

A: Bu soruyu daha farklı bir şekilde işlem yapmadan çözebilir misin?

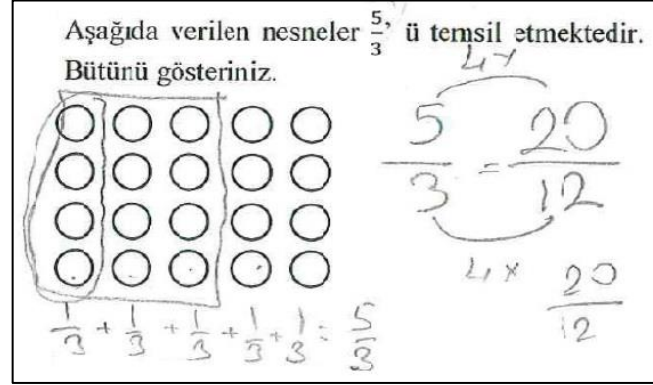
Ö51: Burada bize $\frac{5}{3}$ 'ü diyor. O zaman $\frac{1}{3}$ 'ünü bulursak, bütünü de bulabiliriz.

A: Nasıl bulursun, göster bakalım.

Ö51: Burada dairelerin hepsi 20 tane. Yani $5/3$ 'ü 20'ye eşit. Yani buranın $1/3$ 'ü 4'tür. Yani $5/3$ 'ü 20 ise $1/3$ 'ü de 4'tür. Yani şu 4'ü $1/3$ 'e eşittir. (İlk sütundaki 4 nesneyi gruplandırır. Ardından her bir sütundaki 4'erli nesneleri gruplandırarak $1/3$ olduğunu belirtir ve bunların toplamının $5/3$ olduğunu gösterir.)

A: Peki bütünü gösterebilir misin?

Ö51: Bütünü yani $3/3$ 'ü göstereceğim. (bkz. Görsel 4.37.)

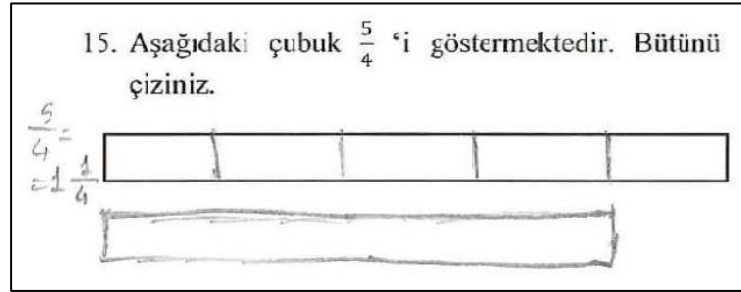


Görsel 4.37. Ö51 ile yapılan görüşme esnasından örnek-1

Görsel 4.37.'de görülen BKŞ bağlamında küme modeli ile sorulan soruyu çözmek için 7. sınıf öğrencisi Ö51'in $5/3$ kesir büyüklüğünden yola çıkarak yinelemeli ayrıştırma faaliyetini kullandığı ve parça ile bütün arasındaki ilişkiyi tersine işlediği görülmektedir. Bunun yanı sıra görüşme esnasında Ö51'in bileşik kesirler üzerinde çalışmayı gerektiren BKŞ bağlamında öncelikle $5/3$ kesrinin 20 tane daireyi temsil ettiğini söylemiştir. Ardından orantı kurarak bütünün büyüklüğünü 12 daire olarak yanıtlamıştır (bkz. Görsel 4.37.). Nihayetinde öğrenci burada zihninde $5/3$ kesir büyüklüğünden $3/3$ 'ü ayrıştırarak bu yolu izlemiştir. Ancak Görsel 4.36.'ya bakıldığında öğrencinin “1 tane=4” diye tanımladığı ölçü birimi aslında $1/3$ kesir büyüklüğünü temsil etmektedir. Dolayısıyla burada Ö51'in aritmetik işlemlerden faydalanması BKŞ bağlamında ayrıştırma ve birimleştirme faaliyetlerini ne yönde yansıttığı incelenmek istenmiştir. Bu yüzden öğrenciye çarpma veya bölme işlemleri yapmadan bu soruyu başka nasıl çözebileceği sorulmuştur. Bu doğrultuda öğrencinin “ $5/3$ 'ü 20 ise $1/3$ 'ü 4'tür.” ifadesini kullanması zihinsel ayrıştırma faaliyetini etkin kullandığını göstermiştir. Bununla birlikte her 4 nesneyi gruplandırması ve her grubu $1/3$ olarak tanımlaması öğrencinin birimleştirme faaliyetini de etkin bir şekilde kullandığının göstergesidir. Ö51'in kullandığı bu birimleştirme faaliyeti her 4 nesne (bir sütun) $1/3$ 'ü, üç tane $1/3$ (üç sütun) $3/3$ 'ü, beş tane

1/3 ise 5/3'ü oluşturacak şekilde üç kademeli olarak etkinleştirilmiştir. Ancak 7. sınıf öğrencisi Ö51'in nicelik üzerinde nesnelerin sayısından ziyade 1/3, 3/3 ve 5/3 gibi bileşik birimleri aktivite esnasında koordine ettiği görüldüğünden öğrencinin üç kademeli birimleri ikinci seviyede koordine ettiği yönünde değerlendirilmiştir.

Tablo 4.12.'de görülen BKŞ şeması gelişmiş 8. sınıfta okuyan sekiz öğrenciden üçü ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen 8. sınıf öğrencisi Ö47'nin BKŞ kapsamında çubuk modeli ile sorulan soruya diğer öğrencilerde de yaygın olarak görülen yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.38.'de verilmiştir.



Görsel 4.38. BKŞ'si gelişmiş Ö47'nin yazılı değerlendirme aracındaki yanıtı-1

Görsel 4.38.'de görülen soruda öğrencilerden BKŞ bağlamında 5/4'lük bileşik kesir büyüklüğünde verilen çubuk modelinden faydalanarak orijinal bütünü oluşturmaları ile birlikte 4/4, 1 tam 1/4 veya bütün gibi kesin ifadeleri kullanmaları beklenmiştir. Ancak araştırmadan elde edilen ön bulgularda bazı öğrencilerin 5/4 kesir büyüklüğünü 4/5 gibi algılayıp parça bütün şeması bağlamında cevapladıkları görülmüştür. Dolayısıyla ilk aşamadaki içerik analizinde yalnızca çubuğu beş eş parçaya ayırıp dördünü gösterenlerin yanıtları yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerle doğrulanmaya çalışılmıştır. Bunun yanında görüşme gerçekleştirilemeyen diğer öğrencilerin bu soru bağlamındaki yanıtları irdelenirken, öğrencilerin BKŞ bağlamında sorulan diğer sorulara verdikleri yanıtlarıyla ilişkilendirilerek değerlendirilmiştir. Hem görüşme gerçekleştirilemeyen hem de bu soruda yalnızca aritmetik işlemleri kullanan öğrencilerin yanıtları değerlendirmeye alınmamıştır.

Görsel 4.38.'de 8. sınıf öğrencisi olan Ö47'nin BKŞ bağlamındaki soruda verilen çubuğu $1 \frac{1}{4}$ şeklinde tanımladığı ve çubuğu beş eş parçaya ayırıp dördünü bütün olarak gösterdiği görülmektedir. Ö47'nin BKŞ bağlamında bu soruyu yanıtlarken kesirsel

faaliyetleri nasıl kullandığı daha detaylı incelenmeye çalışılmıştır. Bu amaç doğrultusunda Ö47 ile yapılan görüşmeden alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

A: (Görsel 4.38.’deki soruyu öğrenciye gösterir.) Bu soruyu yeniden çözebilir misin?

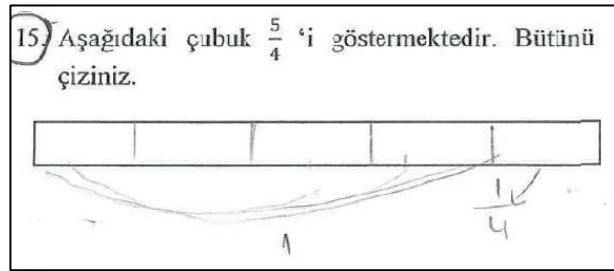
Ö47: (Çubuğu gösterir.) Bunun tamamı 5 bölü 4’ü temsil ediyormuş. O zaman bütün temsil eden kısmı bulmamız lazım.

A: Peki bütünü temsil eden kısmı nasıl bulursun?

Ö47: $5/4$ ’ün içinde 1 ve $1/4$ var. Bunları bulabilirim. (Çubuğu 5 parçaya ayırır.) (ilk 4 parçayı göstererek) Burası 1’dir, (sondaki 1 parçayı göstererek) burası da $1/4$ ’tür. Zaten bize bütünü sormuş, o da 1 (1 diye tanımladığı 4 parçayı gösterir.). (bkz. Görsel 4.39.)

A: Peki çubuğu neden 5’e böldün?

Ö47: Çünkü pay kısmı 5. Yani çubuğun içinde 5 parça (birim) varmış. O yüzden böldüm. Çünkü payda kısmı da 4 olduğu için bir bütünün içinde 4 tane olması gerekiyor. Çünkü bütün olması için payı paydaya eşit olması lazım. O da 1 yapıyor. Yani bütün. Burada çubuk $5/4$ olduğu için 1 tane (birim) de fazla vermişler o yüzden 5’e böldüm.



Görsel 4.39. Ö47 ile yapılan görüşme esnasından örnek-1

Görsel 4.39.’da görülen BKŞ bağlamında çubuk modeli ile sorulan soruyu çözmek için 8. sınıf öğrencisi Ö47’nin $5/4$ kesir büyüklüğünden yola çıkarak yinelemeli ayrıştırma faaliyetini kullandığı ve parça ile bütün arasındaki ilişkiyi tersine işlediği görülmektedir. Daha açık bir ifadeyle $5/4$ kesrinden $1/4$ ’lük birim kesri ve $4/4$ ’lük bütünü eş zamanlı olarak parçalama ve tekrarlama faaliyetleriyle oluşturmuştur. Bunun yanı sıra görüşme esnasında Ö47’nin $5/4$ kesrini “1 ve $1/4$ ” ve içerisinde “5 parça (birim)” barındıran bir büyüklük olarak tanımladığı görülmüştür. Ayrıca payı paydasına eşit olan kesirlerin bir bütünü temsil ettiğini belirtmiştir. Dolayısıyla Ö47’nin çubuğun eş parçalarından birini $1/4$, dördünü $4/4$ ve beşini ise $5/4$ olacak şekilde üç kademeli olarak birimleştirmiştir. Ayrıca bu birimleri herhangi başka bir sayma vb. girişimlerde bulunmadan problemle karşılaşır karşılaşmaz $5/4$ kesrini görür görmez derhal koordine

ettiği için öğrencinin üç kademeli birimleri aktivite öncesinde üçüncü seviyede koordine edebildiği yönünde bir değerlendirme yapılmıştır.

4.1.6.1. BKŞ bağlamında farklı modellerdeki öğrenci başarılarının sınıf düzeyleri arasında karşılaştırılması

Bu başlık altında ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde BKŞ'si gelişmiş ve gelişim sürecinde olan öğrencilerin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı performanslarına ilişkin bulgular karşılaştırmalı olarak özetlenmiştir.

Elde edilen bulgulara göre ortaokul öğrencilerinin BKŞ bağlamında şema ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek farklı kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarılar incelenmek istenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinden aldıkları toplam puanlar değerlendirilmiş ve sınıf düzeylerine göre dağılımı Tablo 4.13.'te verilmiştir.

Tablo 4.13. BKŞ bağlamında modeller üzerinde gösterilen başarının sınıf düzeylerine göre dağılımı

	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf	Toplam
Alan	%31	%39	%35	%46	%39
Çubuk	%45	%51	%46	%52	%49
Küme	%29	%30	%49	%61	%46
Sayı doğrusu	%12	%13	%21	%27	%20

Tablo 4.13.'e göre bileşik kesir şeması (BKŞ) gelişmiş veya gelişim sürecinde olan (5. sınıf $n = 42$, 6. sınıf $n = 53$, 7. sınıf $n = 92$ ve 8. sınıf $n = 84$ olmak üzere) toplamda 271 öğrencinin kesir modelleri üzerinde gösterdikleri başarı yüzdeleri görülmektedir. Burada verilen başarı yüzdeleri öğrencilerin BKŞ ile uyumlu kesirsel faaliyetler gerçekleştirerek model bazında aldıkları puanlardan üretilmiştir. BKŞ'si gelişmiş öğrenci alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri ile sunulan soruların hepsine birden doğru yanıt verirken; BKŞ'si gelişim sürecinde olan öğrenciler bahsedilen dört farklı modelin hepsine değil bazılarına doğru yanıt vermişlerdir. Bu bağlamda öğrencilerin PBKŞ bağlamında hangi kesir modelleri üzerinde daha yüksek başarı gösterdikleri incelenmiştir.

Tablo 4.13. incelendiğinde BKŞ bağlamında 5. sınıf öğrencilerin %45'i ve 6. sınıf öğrencilerin %51'i en çok başarıyı çubuk modeli üzerinde göstermişlerdir. 7. ve 8. sınıf

öğrencilerin ise sırasıyla %49'u ve %61'i olmak üzere en çok başarı puanını küme modeli üzerinden aldıkları görülmektedir. Ayrıca PBŞ, EPŞ ve PBKŞ şemalarında olduğu gibi BKŞ'de de tüm sınıf düzeylerinin en az başarı gösterdikleri kesir modelinin sayı doğrusu modeli olduğu görülmektedir. Buna rağmen sayı doğrusu modelinde 5. ve 6. sınıf düzeylerinde başarı yüzdeleri %12 ve %13 iken, 7. ve 8. sınıf düzeylerinde gözle görülür bir farkla arttığı ve sırasıyla %21 ve %27 olduğu görülmektedir.

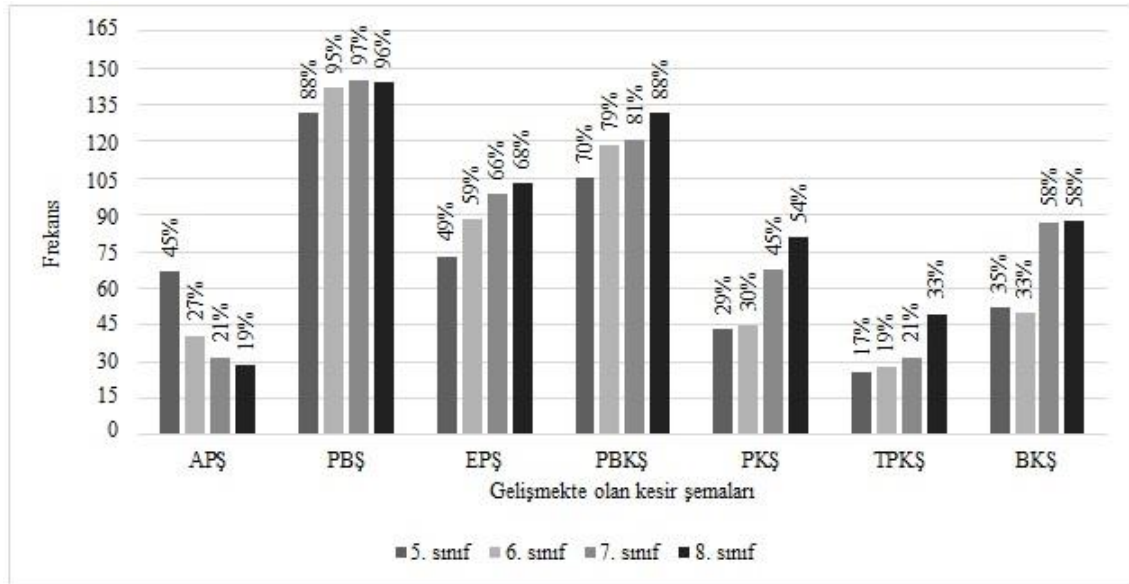
Öte yandan Tablo 4.13.'e göre BKŞ bağlamında 5. sınıftan 8. sınıfa doğru gidildikçe çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde öğrencilerin başarı yüzdelerinin giderek arttığı görülürken, alan modelinde 7. sınıf düzeyindeki başarı oranında az da olsa bir düşüşün olduğu dikkat çekmektedir.

4.2. Gelişmekte Olan Kesir Şemaları Kapsamında Kesirsel Faaliyetlerin Farklı Modellere Uygulanmasında Yaşanan Güçlükler Ait Bulgular

Bir önceki bölümde kesir şemaları bağlamında kesirsel faaliyetlerin farklı sınıf düzeylerinde ve farklı kesir modelleri üzerinde etkin olarak kullanımına ilişkin örneklerin betimlenmesi amaçlanmıştır. Bu bölümde ise birimleştirme (unitizing), parçalama (partitioning), yerleşik bütünden ayırma (disembedding), tekrarlama (iterating) ve yinelemeli ayrıştırma (splitting) kesirsel faaliyetlerini farklı kesir modelleri (alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu) üzerinde uygularken öğrencilerde karşılaşılan güçlüklerin betimlenmesi amaçlanmıştır.

Nitekim problem durumlarında iyi birer problem çözücü olmak işlem esnekliğini yani çözümü başka temsillere de dönüştürmeyi gerektirir. Dolayısıyla öğrencilerin kesir problemlerinde başarılı olabilmeleri için içsel rehberleri olan kesir şemaları bağlamında sadece bir modelde değil farklı kesir modelleri üzerinde kesirsel faaliyetleri etkili bir şekilde kullanmaları beklenir. Bu bağlamda yapılan içerik analizinde öğrenciler belli bir şema bağlamında sorulan *tüm* modellere kesirsel faaliyetleri etkili ve doğru bir şekilde uygulayabilmişlerse kesir şemaları gelişmiş olarak değerlendirilmiştir. Aksi halde şema bağlamında yalnızca bazı kesir modellerinde kesirsel faaliyetleri etkili ve doğru bir şekilde uygulayabilmişlerse, öğrenciler kesir şemaları gelişim sürecinde olarak değerlendirilmiştir. Bu bağlamda bir önceki bölümde görüldüğü gibi, tüm sınıf düzeylerinde incelenen tüm şemalar için gelişim sürecinde olan öğrenci oranlarının gelişim sürecini tamamlamış (gelişmiş) olan öğrenci oranlarından çarpıcı bir farkla fazla

olduğu ortaya çıkmıştır. Bunun sebebinin öğrencilerin farklı kesir modelleri üzerinde kesirsel faaliyetleri uygulamakta zorlanmaları olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Dolayısıyla bu bölümde öğrencilerin kesirsel faaliyetler bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşadıkları güçlükler şemalar için gelişim sürecinde olan öğrencilerin verilerinden üretilmiştir. Araştırmanın bulgularına göre öğrencilerde karşılaşılan halen gelişim sürecinde oldukları kesir şemalarının sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği Şekil 4.3.'te sunulmuştur. Grafikte verilen bilgiler 5. sınıf düzeyi için n=121 (%100), 6. sınıf düzeyi için n=151 (%100), 7. sınıf düzeyi için n=155 (%100), ve 8. sınıf düzeyi için n=130 (%100) olmak üzere toplamda 557 kişilik katılımcı grubunun verilerinden oluşturulmuştur.



Şekil 4.3. Öğrencilerde karşılaşılan gelişmekte olan kesir şemalarının sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği

Şekil 4.3. incelendiğinde tüm sınıf düzeylerindeki öğrencilerin halen gelişim sürecinde olan şemalarının parça bütün şeması (PBŞ) olduğu görülmüştür. Bu durum öğrencilerin parça bütün şeması bağlamında kesirsel faaliyetleri gerçekleştirebilseler de farklı kesir modelleri üzerine uygulamakta güçlük yaşadıklarının göstergesidir. Benzer şekilde APŞ şeması haricindeki diğer şemalarda öğrencilerin 5. sınıftan 8. sınıf düzeyine gittikçe kesirsel faaliyetleri bazı modeller üzerinde uygularken bazı modeller üzerinde uygulamakta zorlandıklarını göstermektedir. Ancak aynı anda parçalama şeması (APŞ) için öğrencilerin 5. sınıftan 8. sınıfa doğru gidildikçe APŞ bağlamında gerçekleştirdikleri

faaliyetlerin modeller üzerinde uygulanma oranlarının azaldığı görülmektedir. Bu durum 5. sınıftan 8. sınıfa doğru gidildikçe APŞ şemasının yerini başka şemaların aldığına göstergesidir.

Araştırmada yapılan analizde kesirsel faaliyetler bağlamında farklı kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlüklerin tespit edilmesi için ilk olarak beş farklı kesirsel faaliyet kapsamında dört farklı kesir modelleri üzerinde öğrencilerin gösterdikleri başarı oranları incelenmiştir. Tablo 4.14.'te görüldüğü gibi genel itibariyle tüm kesirsel faaliyetlerin tüm modeller üzerindeki etkili kullanıldığını gösteren başarı oranlarının 5. sınıftan 8. sınıfa gidildikçe arttığı görülmüştür. Tablo 4.14. incelendiğinde yalnızca parçalama faaliyetinde hem çubuk modeli üzerinde 5. sınıftan 6. sınıfa %1'lik oranla hem de sayı doğrusu modelinde 7. sınıftan 8. sınıfa %2'lik oranla bir düşüş olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra ayırma faaliyetinde de 5. sınıftan 6. sınıfa artmayan ve azalmayan şekilde aynı oranın (%40) değişmediği görülürken, tablo üzerindeki diğer tüm oranların 5. sınıftan 8. sınıfa artış gösterdiği görülmektedir. Ayrıca Tablo 4.14.'e göre incelenen tüm kesirsel faaliyetlerde öğrencilerin en çok zorlandıkları modelin sayı doğrusu modeli olduğu görülmektedir.

Tablo 4.14. Kesirsel faaliyetleri modeller üzerinde uygulamada öğrencilerin gösterdikleri başarı oranları

	Alan				Çubuk				Küme				Sayı doğrusu			
Sınıf	5.	6.	7.	8.	5.	6.	7.	8.	5.	6.	7.	8.	5.	6.	7.	8.
Birleştirme	37%	41%	46%	51%	45%	45%	57%	63%	27%	42%	49%	67%	6%	11%	15%	18%
Parçalama	55%	61%	66%	71%	59%	58%	71%	72%	31%	49%	62%	80%	5%	9%	11%	9%
Ayırma	43%	48%	50%	57%	40%	40%	48%	58%	26%	42%	50%	58%	5%	10%	15%	17%
Tekrarlama	30%	32%	35%	40%	29%	32%	40%	52%	21%	31%	34%	39%	6%	13%	18%	23%
Ayrıştırma	13%	15%	20%	30%	16%	18%	27%	34%	9%	15%	23%	37%	4%	5%	12%	18%
0%-11.9% 12.0%-23.9% 24.0%-35.9% 36.0%-47.9% 48.0%-59.9% 60.0% -71.9% 72.0% +																

Ayrıca Tablo 4.14.'te görülen öğrencilerin başarı oranlarının aritmetik ortalaması %35 olup farklı modelde kesir problemlerine uygun faaliyetlerle yanıt veren öğrencilerin tüm sınıf düzeylerinde çoğunlukla yarısından az olduğu görülmektedir.

Bu bağlamda ortaokul öğrencilerinin kesirsel faaliyetleri modeller üzerinde nasıl uyguladıkları incelenmek istenmiştir. Bu amaç doğrultusunda öncelikle şemaların içerik analizi için oluşturulan kodlar birleştirme (unitizing), parçalama (partitioning), yerleşik bütünden ayırma (disembedding), tekrarlama (iterating) ve yinelemeli ayırıştırma (splitting) kesirsel faaliyetlerinin kullanımına ilişkin kategoriler halinde sınıflandırılmıştır. Ardından her faaliyet için oluşturulan kategoriler kapsamında alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerine uygulanmasına göre alt kategoriler oluşturulmuştur. Bu bölümde kesirsel faaliyetler bağlamında oluşturulan kategoriler ve alt kategoriler kapsamındaki kodların frekans (sıklık) yüzdeleri verilerek bulgular düzenlenmiştir. Ayrıca yaygın olarak görülen alt kategorilere ilişkin bulgular farklı sınıf düzeylerinden öğrenci yanıtlarıyla örneklendirilmiştir.

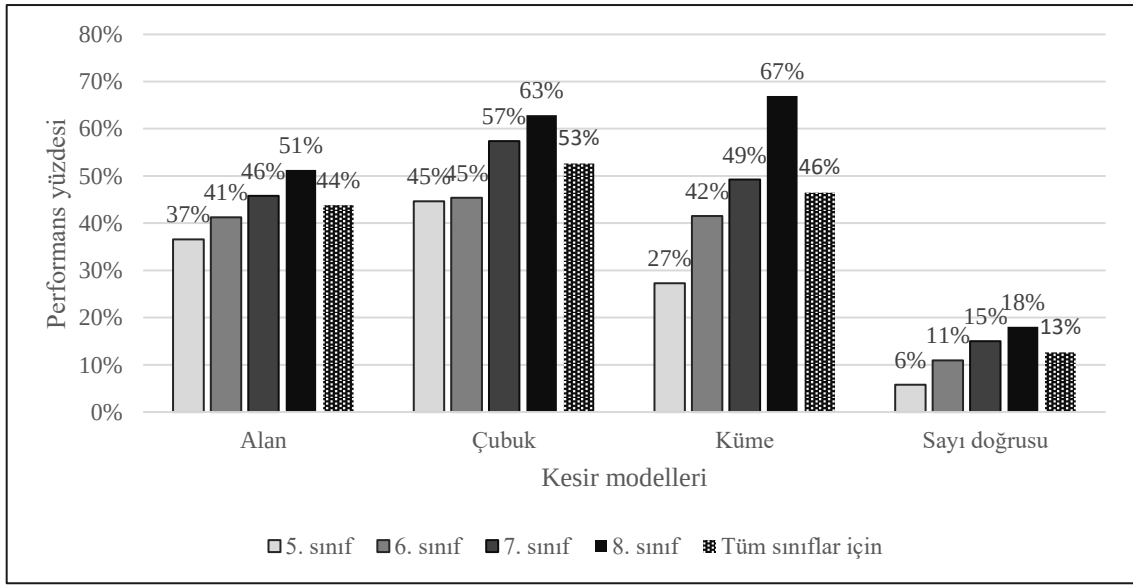
4.2.1. Birleştirme (unitizing) bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Birim, belli bir niceliği veya nesneler topluluğunu ölçmek için aynı cinsten alt elemanların her birine tanımlanan nitelikli ölçüdür. Birleştirme ise herhangi bir temsil ile verilen niceliğe veya nesneler topluluğuna ölçü birimi atama eylemidir. Kesirler bağlamında ele alındığında ise a/b kesir büyüklüğü ile nicelik veya nesneler topluluğu (Buradan sonra nesneler topluluğu da nicelik olarak anılacaktır.) arasındaki ilişkiyi tanımlamak birleştirme faaliyetini gerçekleştirmektir. Örnek olarak 5 birimkareden oluşan bir dikdörtgensel alan modelinde birleştirme faaliyetine göre 1 birimkarelik alan $1/5$ kesir büyüklüğünü temsil eder. Benzer şekilde 10 tane ayrık nesneden oluşan bir küme modelinde birleştirme faaliyeti ise 2 tane ayrık nesne $1/5$ kesir büyüklüğünü temsil eder. Buna bağlı olarak da b/b kesriyle temsil edilen *bütünün büyüklüğüne* de birleştirme faaliyeti uygulanmış olur.

Birleştirme faaliyeti kesir büyüklüğü ile nicelik arasındaki ilişkiye bağlı olduğundan öğrencilerin farklı kesir modellerinde sunulan nicelikleri kesir büyüklükleri ile temsil etmekte zorlandıkları görülmüştür. Bunun sebebinin ise her kesir modelinde bütünün büyüklüğüne atanan ölçü biriminin değişebileceği, dolayısıyla öğrencilerin birleştirme faaliyetini etkinleştirmeleri gerektiği görülmüştür. Örnek olarak daire alan modeli ile verilen niceliklerde bütünün büyüklüğünün genellikle dairenin tamamı olarak algılandığı ve dairenin tamamını b/b kesir büyüklüğü ile temsil ettikleri görülmüştür.

Benzer şekilde (0-1) aralığından farklı aralıklarda verilen sayı doğrusu modelinde de genellikle niceliğin tamamının bütünün büyüklüğü olarak algılandığı ve bütünden büyük olduğu halde sayı doğrusunda verilen niceliğin ((0-3) aralığı gibi) b/b kesir büyüklüğü ile temsil edildiği görülmüştür.

Araştırmaya dahil olan katılımcıların birimleştirme faaliyetini farklı kesir modelleri üzerinde etkili ve doğru uygulamaya ilişkin başarı yüzdelerinin sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği Şekil 4.4.'te verilmiştir.



Şekil 4.4. Öğrencilerin birimleştirme faaliyetini farklı modellere uygulama performansı grafiği

Şekil 4.4. incelendiğinde tüm düzeyler arasında en yüksek başarı performansının çubuk modelinde (%53) sergilendiği görülmektedir. Yine tüm düzeyler için çubuk modelini %46 oranla küme modeli ve %44 oranla alan modeli takip etmektedir. Bunun yanı sıra ortaokul öğrencilerinin birimleştirme faaliyetini en çok sayı doğrusu modelinde verilen nicelikler üzerinde uygulamakta zorlandıkları görülmektedir.

Öte yandan yapılan içerik analizine göre öğrencilerin birimleştirme faaliyetini nicelikler üzerinde uygulamada yaşadıkları güçlükler Tablo 4.15. üç farklı kategoride sınıflandırılmıştır. Bu kategoriler oluşturulurken öğrencilerin a/b kesir büyüklüğü ile model üzerinde tanımlanan nicelik arasındaki ilişkiyi nasıl kullandıkları dikkate alınmıştır. Birimleştirme faaliyetini etkili ve doğru bir şekilde uygulamada beklenen kriter özellikle birim kesir büyüklüğünün (1/b) modelin özelliğine göre tanımlanmış nicelik büyüklüğü (uzunluk ölçüleri, nesne sayıları, sayı doğrusu aralıkları vb.) ile temsil

edilmesidir. Bu duruma paralel olarak tekrarlanabilir birim kavramının uygulanması ve bütünün büyüklüğü (b/b) ile nicelik büyüklüğünün ilişkilendirilmesi beklenmektedir. Bu sayede öğrenci birim kesir ($1/b$), parça kesir (a/b ; $a < b$) ve bileşik kesir (a/b ; $a \geq b$) büyüklüklerini nicelik ile ilişkilendirerek her birine ölçü birimi atama eylemini ve birimleştirme faaliyetini etkili ve doğru bir şekilde gerçekleştirebilecektir.

Tablo 4.15. Birimleştirme faaliyetini uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Kategori	Açıklama
B1	Yalnızca bütün büyüklüğüne (b/b) göre birimleştirir.	Birimleştirme yaparken kesir büyüklüğü ile niceliğin büyüklüğünü ilişkilendirmez.
B2	Nicelik ile bütünü ilişkilendirmekte zorlanır.	Birimleştirmeyi kısmen, bazı durumlar üzerinde etkili uygulayabilir.
B3	Doğal sayı yanılıgısına sahip olduğu için birimleştiremez.	(a/b) kesir büyüklüğünü anlamlandıramaz. a ve b'yi birbirinden bağımsız iki doğal sayı olarak algılar.

(a/b kesir büyüklüğü, $b \neq 0$)

Tablo 4.15.'te görüldüğü gibi öğrencilerin nicelik büyüklüğüyle ilişkilendirmeksizin “yalnızca bütünün büyüklüğüne (b/b) göre birimleştirme (B1)” yaptıkları görülmüştür. Daha açık bir ifadeyle verilen modelin temsil ettiği nicelik büyüklüğü ne olursa olsun öğrenci yalnızca b/b kesrine yani “bütündeki payda (parça) sayısına” odaklanarak birimleştirme yaptığında, kesir büyüklüğünü anlamlandırmakta zorlanır. Örnek olarak öğrencilerden bir çubuğun $1/7$ 'sini bulmaları istendiğinde çubuğun (niceliğin) büyüklüğünü göz ardı ederek, çubuk üzerinde belirli ölçülerde 7 parçayı çubuğun tamamını kullanmadan oluşturabildikleri ve çubuğun geri kalan büyüklüğünü göz ardı ettikleri görülmüştür. Bu duruma ek olarak Tablo 4.15.'e göre öğrencilerin birimleştirme faaliyetinde yaşadıkları diğer güçlük ise “nicelik ile bütünü ilişkilendirme (B2)” durumudur. Aslında bu kategoride öğrencilerin etkili birimleştirme faaliyeti için beklenen kriterlerden bazılarını uygulayabildikleri görülen durumlardan (kodlardan) oluşturulmuştur. Daha açık bir ifadeyle B2 kategorisi, öğrenci birim kesir büyüklüğünü nicelik ilişkisine göre tanımlamış ancak birimlerin tekrarlanabilir ölçüde olması gerektiği düşüncesi henüz olgunlaşmamış gibi birimleştirmenin kısmen uygulandığı durumları kapsamaktadır.

Öte yandan Tablo 4.15.'te görülen ve yapılan içerik analizinde birimleştirme kapsamında sıklıkla karşılaşılan diğer güçlük kategorisi ise “doğal sayı yanılıgısının (B3)”

birimleştirme faaliyetinin etkinleştirilmesini engellemesi durumudur. Aslında doğal sayı yanılışı, nicelik ile kesir büyüklüğünü ilişkilendirmede yaşanan güçlüklerin ötesinde (a/b) kesir büyüklüğünü anlamlandıramamaktan ortaya çıkan bir güçluktur. En basit örneğiyle öğrencilere ayırık veya sürekli model üzerinde belli bir nicelik büyüklüğü verildiğinde ve a/b kesrini nicelik üzerinde göstermeleri istendiğinde, bu kategoride yer alan kodların çoğunda öğrencilerin nicelik üzerinde “pay ve paydadaki sayıların toplamı kadar (a+b)” parçayı seçtikleri/oluşturdukları görülmüştür.

Araştırma verilerinden elde edilen bulgulara göre birimleştirme faaliyetini uygulamada yaşanan güçlükler alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri bağlamında ayrı başlıklar altında düzenlenmiştir.

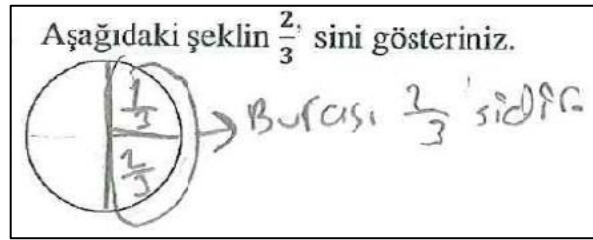
4.2.1.1. *Birimleştirme bağlamında alan modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular*

Birimleştirme faaliyetini alan modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.15.’te verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.16.’da verilmiştir.

Tablo 4.16. *Birimleştirme faaliyetini alan modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler*

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
B1	B1.A1	Bütünü parça sayısına göre birimleştirir. Birimler tekrarlanabilir değildir.	%33	%29	%33	%31
	B1.A2	Bütün dışında başka kesir temsiliyle verilen niceliği birimleştiremez. Niceliği bütündeki parça sayısına göre birimleştirir.	%19	%20	%20	%18
	B1.A3	Bütün dışında başka kesir temsiliyle verilen niceliği birimleştiremez. Niceliğin bir kısmını veya tamamını göz ardı ederek kolayına gelecek şekilde birimleştirme yapar.	%9	%8	%13	%10
Ara toplam			%61	%58	%67	%60
B2	B2.A1	Zihninde niceliğe yinmeli ayırıştırma faaliyetini uygulayamadığı için nicelik ile kesir büyüklüğünü ilişkilendiremez.	%29	%28	%25	%32
B3	B3.A1	Doğal sayı yanılışına sahip olduğu için birimleştiremez.	%9	%14	%9	%9
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.16. incelendiğinde B1 kategorisi üç alt kategoriden, B2 ve B3 kategorileri birer alt kategoriden olmak üzere birimleştirme faaliyetinin alan modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tabloya göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü yaygın olarak B1 kategorisinde birimleştirme yaparken kesir büyüklüğü ile niceliğin büyüklüğünü ilişkilendirmeksizin yalnızca bütünün büyüklüğüne (b/b) göre ölçü birimleri tanımlamak olduğu görülmüştür. B1 kategorisi altında ise yaygın olarak B1.A1 alt kategorisine 5. sınıf düzeyinde %33, 6. sınıf düzeyinde %29, 7. sınıf düzeyinde %33 ve 8. sınıf düzeyinde %31 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin alan modeli üzerinde birimleştirme yaparken “bütünü parça sayısına göre birimleştirir; ancak tanımladığı birimler tekrarlanabilir özellikte değildir.” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Görsel 4.40.’ta parça bütün şeması (PBŞ) kapsamında alan modeli üzerinde birimleştirme faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde en yaygın olarak ortaya çıkan B1.A1 alt kategorisine 7. sınıf öğrencisi Ö3’ün yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.40. Birimleştirme faaliyetini alan modeline uygularken Ö3’ün yaşadığı güçlük

Görsel 4.40.’ta görülen 7. sınıf öğrencisi Ö3’ün yanıtına göre, bütün olarak daire alan modelinin verildiği ve $\frac{2}{3}$ ’ünün bulunması istendiğinde bir bütünü paydadaki sayı kadar yani üç parçadan oluşacak şekilde birimleştirdiği görülmektedir. Ö3’ün yanıtı nicelik büyüklüğü (daire alanı) açısından ele alındığında parçaların büyüklüğü (2 çeyrek ve 1 yarım) tekrarlanabilir birim olarak tanımlanmamıştır. Ö3’ün yanıtı kesir büyüklüğü (a/b) açısından ele alındığında ise bütünün $\frac{3}{3}$ şeklinde tanımlandığı ancak parçaların her birinin çarpımsal ilişki bağlamında $\frac{1}{3}$ kesrini temsil etmesinden ziyade $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$ olarak toplamsal ilişki bazında tanımlanması tekrarlanabilir birim kesir kavramından yoksun olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla öğrencinin kesir büyüklüğü ile nicelik büyüklüğünü ilişkilendirirken zorlandığı ve yalnızca bütünün büyüklüğüne (b/b) göre birimleştirme yaptığı görülmektedir. Burada birimleştirme faaliyetini uygularken de

bütünü parça sayısına (paydadaki sayıya) göre birimleştirdiği ancak ürettiği birimlerin hem nicelik büyüklüğü hem de kesir büyüklüğü açısından tekrarlanabilir birim olarak anlamlandırılmadığı görülmüştür.

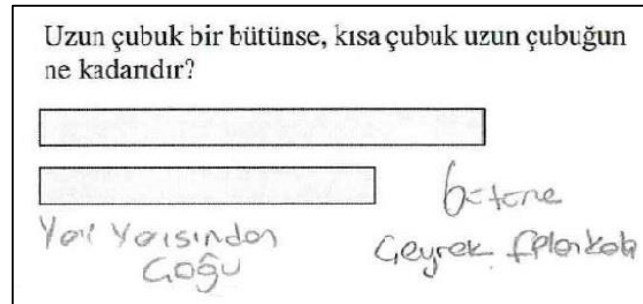
4.2.1.2. Birimleştirme bağlamında çubuk modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Birimleştirme faaliyetini çubuk modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.15.'te verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.17.'de verilmiştir.

Tablo 4.17. Birimleştirme faaliyetini çubuk modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
B1	B1.Ç1	Bütün dışında başka kesir temsiliyle verilen niceliği birimleştiremez. Niceliği bütündeki parça sayısına göre birimleştirir.	%7	%10	%7	%6
	B1.Ç2	Bütünü parça sayısına göre birimleştirir. Niceliğin bir kısmını veya tamamını göz ardı ederek kolayına gelecek şekilde birimleştirme yapar.	%10	%11	%8	%7
	B1.Ç3	Bütünü parça sayısına göre birimleştirir. Birimler tekrarlanabilir değildir.	%6	%10	%7	%14
	B1.Ç4	Bütün dışında başka kesir temsiliyle verilen niceliği birimleştiremez. Niceliğin bir kısmını veya tamamını göz ardı ederek kolayına gelecek şekilde birimleştirme yapar.	%12	%8	%12	%7
Ara toplam			%35	%39	%34	%34
B2	B2.Ç1	İki farklı niceliği göz kararı ilişkilendirir. Birimler tekrarlanabilir değildir.	%21	%22	%29	%23
	B2.Ç2	İki farklı niceliği birbirinden bağımsız parça sayılarına göre birimleştirir. Kesir büyüklüğünde ilişkilendiremez.	%18	%12	%9	%12
	B2.Ç3	Zihninde niceliğe yinmeli ayırıştırma faaliyetini uygulayamadığı için nicelik ile bütünü ilişkilendiremez.	%9	%10	%10	%17
	B2.Ç4	İki farklı niceliği tekrarlanabilir birimlere göre ilişkilendirir. Orantısal muhakeme eksikliğinden kesir büyüklüğünde birimleştiremez.	%3	%6	%6	%6
Ara toplam			%52	%51	%54	%57
B3	B3.Ç1	Doğal sayı yanılgısına sahip olduğu için birimleştiremez.	%13	%10	%12	%9
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.17. incelendiğinde B1 ve B2 kategorileri dörder alt kategoriden ve B3 kategorisi bir alt kategoriden olmak üzere birimleştirme faaliyetinin çubuk modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tablo 4.17.'ye göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğün yaygın olarak B2 kategorisinde birimleştirme yaparken nicelik ile bütünün büyüklüğünü ilişkilendirmekte zorlanmak olduğu görülmüştür. Özellikle çubuk modeli bağlamında ortaya çıkan bu kategori, niceliğin bütünden farklı bir kesir temsili ile verildiği durumlarda ve birden fazla nicelik verilip oranlarının kesir büyüklüğü ile temsil edilmesi istendiği durumlarda ortaya çıkmıştır. B2 kategorisi altında ise yaygın olarak B2.Ç1 alt kategorisine 5. sınıf düzeyinde %21, 6. sınıf düzeyinde %22, 7. sınıf düzeyinde %29 ve 8. sınıf düzeyinde %23 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin çubuk modeli üzerinde birimleştirme yaparken niceliklerin kesir büyüklüğü ile temsil edilmesinde “iki farklı niceliği göz kararı ilişkilendirir, ancak birimler tekrarlanabilir özellikte değildir” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Görsel 4.41.'de parça kesir şeması (PKŞ) kapsamında çubuk modeli üzerinde birimleştirme faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde en yaygın olarak ortaya çıkan B2.Ç1 alt kategorisine 7. sınıf öğrencisi Ö234'ün yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.41. Birimleştirme faaliyetini çubuk modeline uygularken Ö234'ün yaşadığı güçlük

Görsel 4.41.'de görülen 7. sınıf öğrencisi Ö234'ün yanıtına göre bütün olarak uzun çubuk modelinin verildiği ve kısa çubuk ile uzun çubuğun uzunluklarının kesir olarak oranının bulunması istendiğinde uzun çubuğun uzunluğu yani niceliğin büyüklüğünü bütün olarak birimleştirdiği görülmektedir. Bununla birlikte öğrencinin bütüne dört çeyrekten oluşan bir ölçü birimi atadığı görülmüştür. Ayrıca Ö234 parça kesir olarak temsil edilmesi gereken kısa çubuğun büyüklüğüne ise “bütünün yarısından çoğu ve bütüne çeyrek filan kala” şeklinde bir ölçü birimi atamıştır. Ö234'ün yanıtı nicelik

büyükülüğü (daire alanı) açısından ele alındığında parçaların büyükülüğü (1 bütün ve 1 bütüne çeyrek filan kala) doğru bir şekilde zihinde birimleştirilse de atadığı birim ölçülerinin (uzunluklarının) tekrarlanabilir birim düşüncesi henüz olgunlaşmamıştır. Öte yandan Ö234'ün yanıtı kesir büyükülüğü (a/b) açısından ele alındığında ise bütünü zihninde 4/4 şeklinde tanımlanmış ver birim kesir uzunluklarının her birinin çarpımsal ilişki bağlamında 1/4 kesrini temsil ettiğini hissettiği görülse de parçaların (niceliklerin) büyükülüğüne yarım ve çeyrek dışında a/b şeklinde başka bir parça kesir büyükülüğü atayamamıştır. Dolayısıyla öğrencinin tekrarlanabilir birim kesir kavramının da henüz gelişim sürecinde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

4.2.1.3. Birimleştirme bağlamında küme modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

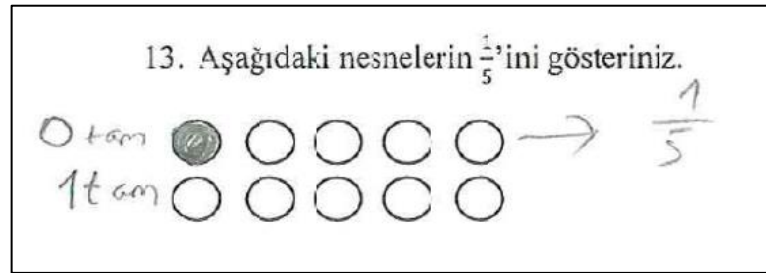
Birimleştirme faaliyetini küme modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.15.'te verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.18.'de verilmiştir.

Tablo 4.18. Birimleştirme faaliyetini küme modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
B1	B1.K1	Bütünü parça sayısına göre birimleştirir. Niceliğin bir kısmını veya tamamını göz ardı ederek kolayına gelecek şekilde birimleştirme yapar.	%41	%37	%30	%20
	B1.K2	Bütün dışında başka kesir temsiliyle verilen niceliği birimleştiremez. Niceliği bütündeki parça sayısına göre birimleştirir.	%28	%30	%36	%48
Ara toplam			%70	%67	%66	%68
B2	B2.K1	Zihninde niceliğe yinmeli ayrıştırma faaliyetini uygulayamadığı için nicelik ile bütünü ilişkilendiremez.	%4	%5	%5	%13
B3	B3.K1	Doğal sayı yanılığına sahip olduğu için birimleştiremez.	%26	%28	%29	%20
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.18. incelendiğinde B1 kategorisi iki alt kategoriden, B2 ve B3 kategorileri birer kategoriden olmak üzere birimleştirme faaliyetinin küme modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tablo 4.18.'e göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü yaygın olarak B1 kategorisinde birimleştirme

yaparken kesir büyüklüğü ile niceliğin büyüklüğünü ilişkilendirmeksizin yalnızca bütünün büyüklüğüne (b/b) göre ölçü birimleri tanımlamak olduğu görülmüştür. B1 kategorisi altında ise yaygın olarak B1.K1 alt kategorisine düzeyler arasında giderek azalan şekilde 5. sınıf düzeyinde %41, 6. sınıf düzeyinde %37, 7. sınıf düzeyinde %30 ve 8. sınıf düzeyinde %20 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin küme modeli üzerinde birimleştirme yaparken “bütünü parça sayısına göre birimleştirir; ancak niceliğin bir kısmını veya tamamını göz ardı ederek kolayına gelecek şekilde birimleştirme yapar” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Görsel 4.42.’de parçalara ayırma şemaları kapsamında küme modeli üzerinde birimleştirme faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde sıklıkla karşılaşılan B1.K1 alt kategorisine 5. sınıf öğrencisi Ö28’in yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.42. Birimleştirme faaliyetini küme modeline uygularken Ö28'in yaşadığı güçlük

Görsel 4.42.’de görülen 5. sınıf öğrencisi Ö28’in yanıtına göre bütün olarak 10 nesneden oluşan küme modelinin verildiği ve 1/5’inin bulunması istendiğinde bir bütünü paydadaki sayı kadar yani 5 nesneden oluşacak şekilde birimleştirdiği görülmektedir. Ö28’in yanıtı nicelik büyüklüğü (nesnelerin sayısı) açısından ele alındığında bütünün büyüklüğü 5 nesne ve parçaların büyüklüğü 1 nesne olmak üzere tekrarlanabilir birim olarak tanımlanmıştır. Ö28’in yanıtı kesir büyüklüğü (a/b) açısından ele alındığında ise bütünün 5/5 şeklinde tanımlandığı ve bir parçayı 1/5 kesrini temsil edecek şekilde tanımlandığı görülmektedir. Zaten Görsel 4.42.’ye bakıldığında Ö28 alttaki 5 nesneyi “1 tam”, üstteki 5 nesneyi “0 tam” ancak üstteki 5 nesneden birini “1/5” şeklinde göstermiştir. Bu şema kapsamında öğrencinin kesir kavramını “1’den büyük olamaz” şeklinde algıladığı görülmektedir. Bunun yanı sıra 5. sınıf öğrencisi Ö28 ile yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilmiş ve Ö28 ile yapılan görüşme aşağıda özetlenmiştir.

A: (Görsel 4.42.'deki soruyu gösterir.) Bu soruyu yeniden çözebilir misin?

Ö28: (Üstteki 5 nesneden ilkinı seçer ve tarar.)

A: Nasıl çözdüğünü açıklar mısın?

Ö28: 5'te 1'ini bulmamızı istemiş. Ona göre buldum.

A: Peki neye göre buradaki 1 nesneyi taradın?

Ö28: Çünkü 1 tamda 5 tane var. Ama bizden 1'ini bulmamızı istemiş.

A: Peki alttaki 5 nesne için bir şey yapman gerekiyor mu?

Ö28: (Kısa bir sessizlik) Hayır.

A: Peki senden 1 tane daha nesneyi taramanı istiyorum.

Ö28: (Üstteki 5 nesneden ikincisini seçer ve tarar.)

A: Şimdi burada verilen nesnelere göre taradığın nesneler kaçta kaçtır?

Ö28: 5'te 2. Ama böyle yanlış olur. Bunu tekrar silmemiz lazım. Çünkü bizden 5'te 1'ini istemiş.

Görsel 4.42.'de Ö28'in yanıtıyla ve yukarıda özetlenen görüşmeyle 5. sınıf düzeyinde %41 oranında görülen B1.K1 alt kategorisinde küme modeli ile verilen niceliklerde birimleştirme yaparken öğrencilerde yaşanan güçlük örneklendirilmiştir. Ö28'in yazılı ve sözlü yanıtları incelendiğinde, öğrenci bütünün büyüklüğünü 5/5 olarak tanımlamış ve nicelik olarak 5 nesne büyüklüğünü bir bütünü tanımlayacak şekilde birimleştirmiştir. Ancak kesir probleminde verilen 10 nesneden geriye kalan 5 nesnenin göz ardı edildiği ve öğrencinin sadece ilk 5 nesne üzerinde çalıştığı görülmektedir. Aynı zamanda görüşme esnasında öğrenciden ekstra 1 nesneyi daha taraması ve verilen nicelik ile ilişkilendirerek yeni bir kesir büyüklüğü ile temsil etmesi istenmiştir. Bu duruma öğrencini verdiği yanıt "2/5" şeklinde olmuştur. Bunun yanı sıra "5'te 1'i, 5'te 2'si, 0 tam, 1 tam" gibi kullandığı ifadeler doğrultusunda öğrencinin bütünü oluşturan birimleri 1/5, 2/5, 3/5... şeklinde toplamsal ilişki bağlamında tekrarlanabilir birim kesir olarak tanımladığı yönde değerlendirilmiştir. Dolayısıyla öğrenci nicelik büyüklüğü ile bütünün büyüklüğü arasındaki ilişkiyi kuramamakla birlikte yalnızca bütünün büyüklüğüne (b/b) odaklanarak birimleştirme faaliyetini uygulamış ve bütündeki (paydadaki sayının) parça sayısının dışında kalan nicelikleri göz ardı ederek verilen küme modelinin bir kısmı üzerinde çalışmıştır.

4.2.1.4. Birimleştirme bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

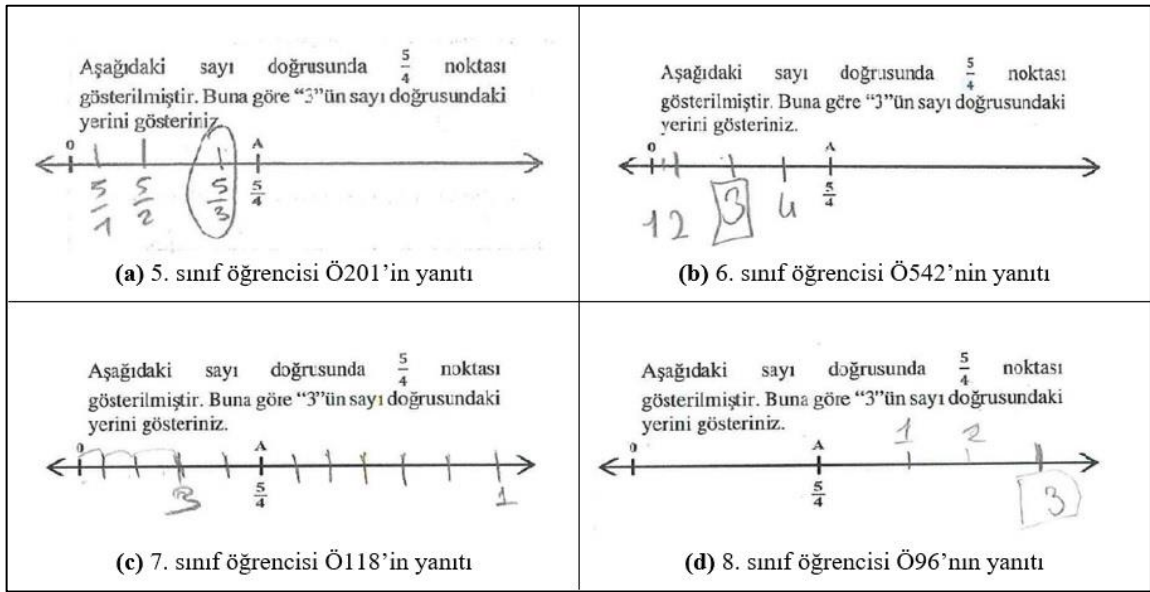
Birimleştirme faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.15.'te verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.19.'da verilmiştir.

Tablo 4.19. Birimleştirme faaliyetini sayı doğrusu modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
B1	B1.Sd1	Bütünü birim kesire göre birimleştirir. Birimler tekrarlanabilir değildir.	%23	%21	%21	%24
	B1.Sd2	Bütünü birim kesire göre birimleştirir. Niceliğin geri kalanını göz ardı eder.	%13	%17	%20	%22
	B1.Sd3	Niceliği bütün olarak tanımlar. Niceliği bütündeki parça sayısına göre birimleştirir.	%22	%6	%8	%14
	B1.Sd4	Bütünü parça sayısına göre birimleştirir. Niceliğin geri kalanını göz ardı eder.	%4	%10	%5	%5
Ara toplam			%62	%54	%53	%65
B2	B2.Sd1	Nicelik ile birim kesiri ilişkilendirir. Birimler tekrarlanabilir değildir.	%5	%8	%16	%11
	B2.Sd2	Niceliği yalnızca tam sayılara göre birimleştirir.	%3	%5	%4	%5
Ara toplam			%8	%13	%19	%16
B3	B3.Sd1	Doğal sayı yanılıgına sahip olduğu için birimleştiremez.	%31	%33	%27	%20
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.19. incelendiğinde B1 kategorisi dört alt kategoriden, B2 kategorisi iki alt kategoriden ve B3 kategorisi bir alt kategoriden olmak üzere birimleştirme faaliyetinin sayı doğrusu modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tabloya göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü yaygın olarak B1 kategorisinde birimleştirme yaparken kesir büyüklüğü ile niceliğin büyüklüğünü ilişkilendirmeksizin yalnızca bütünün büyüklüğüne (b/b) göre ölçü birimleri tanımlamak olduğu görülmüştür. Aynı zamanda Tablo 4.19.'a göre 5., 6. ve 7. sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü en yaygın olarak B3.Sd1 alt kategorisi bağlamında doğal sayı yanılıgından dolayı birimleştirme faaliyetini sayı doğrusu modeli üzerine uygulayamamak olduğu görülmektedir. B3.Sd1 alt kategorisinin düzeyinde %31, 6. sınıf düzeyinde %33, 7. sınıf düzeyinde %27 oranında en çok karşılaşılan güçlük olduğu görülürken, 8. sınıf düzeyinde %20 oranında rastlanılmıştır.

Sayı modeli üzerinde birimleştirme faaliyetinde öğrencilerden beklenen a/b kesir büyüklüklerinin aynı zamanda birer sayı olduğunu anlamlandırmaları ve sayı doğrusu üzerinde verilen belli bir aralığın uzunluğunu nicelik büyüklüğü olarak tanımlamalarıdır. Bu sayede öğrenciler nicelik ile kesir büyüklüğü arasındaki ilişkiyi kurarken aynı zamanda birim kesir, parça kesir ve bileşik kesir gibi temsillere yükledikleri anlamlar üzerinde birimleştirme faaliyetlerini etkili ve doğru bir şekilde ilişkilendirebileceklerdir. Ancak elde edilen bulgulara göre ortaokul öğrencilerinin büyük bir çoğunluğunda sayı doğrusu modeli üzerinde birimleştirme faaliyetini uygulayamadıkları ve a/b kesir büyüklüğünü anlamlandırmakta zorlandıklarını göstermektedir. B3.Sd1 alt kategorisinin ortaya çıkma sıklığına göre sınıf düzeyleri arasında çok büyük bir farklılığa rastlanmamışsa da her düzeyde daha belirgin şekilde görülen öğrenci yanıtları Görsel 4.43.'te verilmiştir.



Görsel 4.43. Birimleştirme faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken öğrencilerin yaşadığı güçlükler

Görsel 4.43.'te bileşik kesir kapsamında (BKŞ) sorulan ve sayı doğrusu üzerinde “0” ve “ $5/4$ ” kesirleri verilmiş ve öğrencilerden “3” tam sayısını yerleştirmeleri istenen soruda, B3.Sd1 alt kategori kapsamında birimleştirme faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin tüm sınıf düzeyinden öğrenci örneklerine yer verilmiştir. Verilen örnekler incelendiğinde öğrencilerin doğal sayı yanılgısına sahip oldukları için hem niceliğe hem de kesir büyüklüğüne doğru bir şekilde birim ölçüsü

atayamadıkları görülmektedir. Görsel 4.43. incelendiğinde özel olarak 5. sınıf düzeyinde a/b kesir büyüklüklerini belli bir birim ölçüsü atamadan 0'dan başlayarak payının sabit kalacak şekilde paydasının giderek arttığı yönünde tanımladıkları ve en azından pay ile payda arasındaki ilişkinin varlığını kabul ettikleri görülmüştür. 6. sınıf düzeyinde ise doğal sayı yanılığının daha baskın şekilde ortaya çıktığı ve a/b kesir büyüklüğünde pay ile paydayı birbirinden bağımsız iki doğal sayı olarak tanımladıkları görülmüştür. 7. sınıf düzeyine bakıldığında ise öğrencilerdeki parça bütün yorumunun etkisinin arttığı ve sayı doğrusu aralığı (niceliği) ne olursa olsun 0 ile 1 arasında bir bütün olarak algıladıkları görülmüştür. Aynı zamanda Görsel 4.43. (c)'e bakıldığında 7. sınıf öğrencisi Ö118'in aslında sayı doğrusunda 0'dan başlayarak 1'e başka sayıların da yerleştirilebileceğini düşündüğü tahmin edilmektedir. Ancak bu sayılar a/b kesir büyüklüklerinden ziyade yine doğal sayı yanılığı sebebiyle doğal sayıları temsil ettiği yönünde olmalıdır. Görsel 4.43. (d)'de ise 8. sınıf öğrencisi Ö96'nın diğer öğrenciler gibi a/b kesir büyüklüğünü göz ardı ederek $5/4$ olarak verilen A noktasını başlangıç noktası yani sıfır şeklinde kabul ettiği ve buna bağlı olarak 0'dan sonraki doğal sayıları artan şekilde yerleştirdiği görülmüştür.

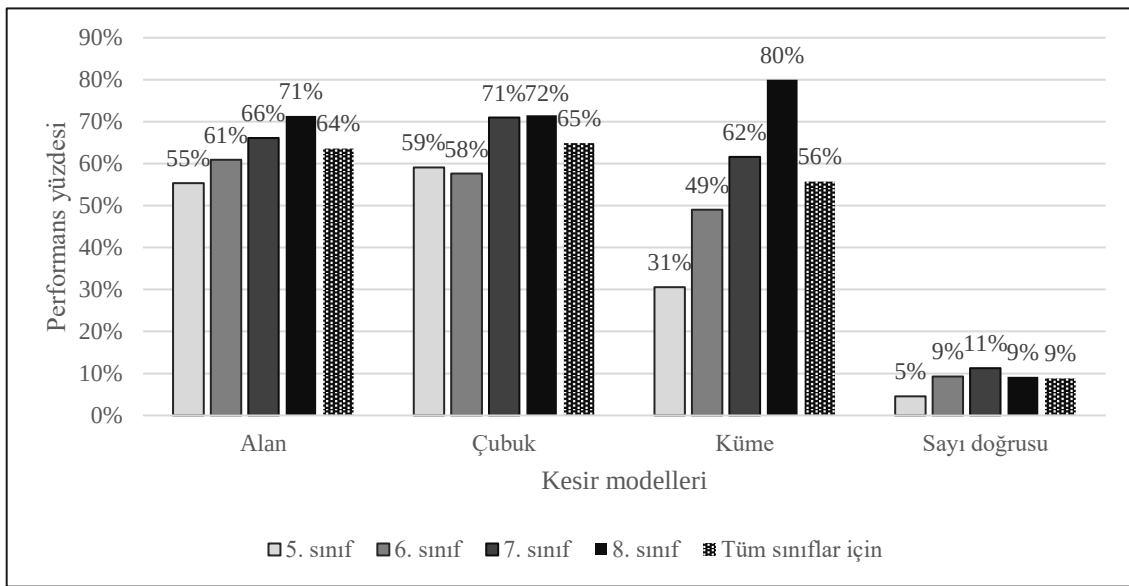
4.2.2. Parçalama (partitioning) bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Parçalama (partitioning) belli bir bütünü veya niceliği parçalara ayırma eylemidir. Ancak parçalama kesir bağlamında ele alındığında nicelikleri kesir büyüklüğüne göre uygun bir şekilde eş parçalara ayırabilme yeteneğidir. Literatüre bakıldığında ise parçalama faaliyetinin sadece bir süreç çıktısı olmadığı aynı zamanda başlı başına bir gelişim sürecini de temsil ettiği görülmektedir. Nitekim küçük çocukların parçalama gelişim süreçleri öncelikle lineer nesneler üzerinde başlar, ardından lineer olmayan nesneler üzerinde uygun parçalama girişimleriyle devam eder. Ayrıca bu gelişim sürecinde öğrencilerin nicelikleri bazı sayılarda parçalama faaliyetlerinde daha başarılı oldukları görülmektedir. Örnek olarak öncelikle lineer nesneleri 2'ye ve katlarına, ardından 3 ve 5 gibi giderek artan asal sayıda parçalara ayırabilmede başarılı olurken, bu süreçten sonra lineer olmayan nicelikler üzerinde de zamanla uygun ve eş parçalar oluşturacak şekilde parçalama faaliyetlerinde bulundukları görülmektedir.

Araştırma kapsamında öğrencilerin parçalama kesirsel faaliyetleri alan (daire ve dikdörtgen), çubuk, küme ve sayı doğrusu kesir modelleri ile verilen farklı nicelikler

üzerindeki uygulamaları incelenmiştir. Elde edilen bulgulara göre öğrencilerin farklı kesir modellerinde sunulan nicelikleri kesir büyüklükleri ile temsil etmekte zorlandıkları görülmüştür.

Araştırmaya dahil olan katılımcıların parçalama faaliyetini farklı kesir modelleri üzerinde etkili ve doğru uygulamaya ilişkin başarı yüzdelerinin sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği Şekil 4.5.'te verilmiştir.



Şekil 4.5. Öğrencilerin parçalama faaliyetini farklı modellere uygulama performansı grafiği

Şekil 4.5. incelendiğinde tüm düzeyler arasında en yüksek başarı performansının çubuk (%65) ve alan (%64) modellerinde sergilendiği görülmektedir. Bunun yanı sıra özellikle ayırık olan küme modelinde 5. sınıf düzeyinde %31, 6. sınıf düzeyinde %49, 7. sınıf düzeyinde %62 ve 8. sınıf düzeyinde %80 başarı oranlarıyla 5. sınıftan 8. sınıfa doğru büyük farklılıklarla giderek artan bir değişimin olduğu gözlenmiştir. Ayrıca alan, çubuk ve küme modellerinde en çok başarı gösteren düzeyin 8. sınıf olduğu görülürken, sayı doğrusu modelinde 8. sınıf öğrencilerin 7. sınıf öğrencilerine göre daha düşük performans sergiledikleri göze çarpmaktadır.

Bu bağlamda yapılan içerik analizine göre öğrencilerin parçalama faaliyetini nicelikler üzerinde uygulamada yaşadıkları güçlükler incelenmiş ve Tablo 4.20.'de görüldüğü gibi iki farklı kategoride sınıflandırılmıştır. Bu kategoriler oluşturulurken öğrencilerin a/b kesir büyüklüğü ile model üzerinde tanımlanan nicelik arasındaki ilişkiyi nasıl kullandıkları dikkate alınmıştır. Örnek olarak modelin özelliğine göre tanımlanmış

nicelik büyüklüğü (uzunluk ölçüleri, nesne sayıları, sayı doğrusu aralıkları, vb.) ile bütünün büyüklüğü (b/b) arasındaki ilişkiyi nasıl kurdukları ve parçalama faaliyetini nicelik üzerinde nasıl uyguladıkları incelenmiştir. Nitekim burada öğrencilerden beklenen nicelik büyüklüğünü birim kesir büyüklüğü ($\frac{1}{b} = 3 \text{ birim gibi}$), parça kesir büyüklüğü $\frac{a}{b} = 5 \text{ nesne gibi}$ ve bütünün büyüklüğü $\frac{b}{b} = 1 \text{ tam sayı aralığı gibi}$ ile uygun bir şekilde ilişkilendirmeleri ve süreç sonunda uygun kesir büyüklüklerinde eş parçalar üretmeleridir.

Tablo 4.20. Parçalama faaliyetini uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Kategori	Açıklama
P1	Nicelik üzerinde uygun olmayan/gelişmemiş parçalama girişimlerinde bulunur.	Nicelik büyüklüğünün tamamını kullansa da yanlış parçalama faaliyetleriyle eş parçalar oluşturamaz.
P2	Niceliğin bir kısmını veya tamamını göz ardı ederek parçalama girişimlerinde bulunur.	Kesir büyüklüğünden veya nicelik büyüklüğünden bağımsız kendi belirlediği ölçülere göre eş parçalar üretebilir.

Tablo 4.20.'de görüldüğü gibi öğrencilerin parçalama faaliyetlerini ya niceliğin tamamını kullanarak yanlış parçalama faaliyetleri yaptıkları (P1) ya da niceliğin büyüklüğünü göz ardı ederek kendi belirledikleri ölçüler üzerinde parçalama girişimlerinde bulundukları (P2) görülmektedir. Bu bağlamda P1 kategorisinde değerlendirilen verilere göre öğrencilerin parçalama gelişim süreçlerini henüz tamamlanmadıkları ancak gelişim sürecinde oldukları görülmüştür. Örnek olarak nicelik üzerinde eş parçalar üretmeleri istendiğinde öğrencilerin lineer olmayan nesneler üzerinde de lineer modelmiş gibi parçalara ayırdıkları görülmüştür. Öte yandan P2 kategorisinde değerlendirilen veriler doğrultusunda ise öğrencilerin aslında birimleştirmek faaliyetinin yoksunluğundan kaynaklı her model üzerinde eş parçalar üretmedikleri görülmüştür. Mesela öğrencilere küme modelinde 10 ayrı nesneden oluşan nicelik, bütün olarak verildiğinde ve bütünün $\frac{1}{5}$ 'ini bulmaları istendiğinde öğrencilerin 5 nesneden yalnızca 1'ini seçtikleri görülmüştür. Daha açık bir ifadeyle P2 kategorisinde öğrencilerin tekil birimlerden oluşan basit modeller üzerinde bütünü eş parçalara ayırabiliyorken, bileşik birimlerden oluşan modeller üzerinde bütünü eş parçalara ayırmakta zorlanmaktadırlar.

Araştırma verilerinden elde edilen bulgulara göre parçalama faaliyetini uygulamada yaşanan güçlükler alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri bağlamında ayrı başlıklar altında düzenlenmiştir.

4.2.2.1. *Parçalama bağlamında alan modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular*

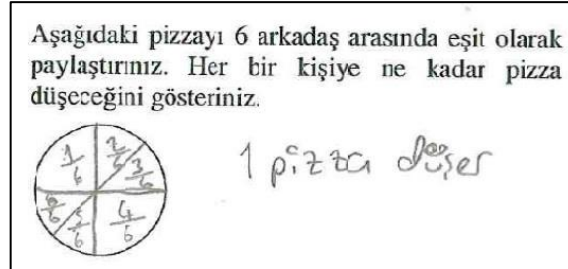
Parçalama faaliyetini alan modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.20.'de verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.21.'de verilmiştir.

Tablo 4.21. *Parçalama faaliyetini alan modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler*

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
P1	P1.A1	Yalnızca yarım veya çeyrek büyüklüklerine göre eşit parçalar üretir.	%50	%45	%53	%31
	P1.A2	Kesir büyüklüğüne göre birbiriyle eşit olmayan parçalar üretir.	%20	%21	%16	%18
	P1.A3	Lineer olmayan nicelikler üzerinde lineer gibi parçalama girişimlerinde bulunur.	%17	%13	%16	%10
	P1.A4	Pay ve payda sayısının toplamı kadar eşit parçalar üretir.	%1	%1	%2	%1
Ara toplam			%87	%80	%87	%83
P2	P2.A1	Kesir büyüklüğünden bağımsız parçalama girişimlerinde bulunur.	%13	%20	%13	%17
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.16. incelendiğinde P1 kategorisi dört alt kategoriden ve P2 kategorisi bir alt kategoriden olmak üzere parçalama faaliyetinin alan modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tabloya göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü yaygın olarak P1 kategorisine göre parçalama faaliyeti için henüz gelişim sürecinin tamamlanmadığı yönünde olduğu görülmüştür. P1 kategorisi altında ise P1.A1 alt kategorisiyle sınıflandırılan güçlüğe yaygın olarak 5. sınıf düzeyinde %50, 6. sınıf düzeyinde %45, 7. sınıf düzeyinde %53 ve 8. sınıf düzeyinde ise %31 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin alan modeliyle sunulan nicelikler üzerinde parçalama faaliyetini uygularken “Yalnızca yarım veya çeyrek büyüklüklerine göre eşit parçalar üretir.” şeklinde hareket ettikleri dolayısıyla nicelikleri 2, 4 ve katları haricinde 3, 5 ve 6 gibi başka sayıda göre eş parçalara ayırmakta zorlandıkları

görülmüştür. Görsel 4.44.'te alan modeli üzerinde parçalama faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde sıklıkla rastlanılan P1.A1 alt kategorisine 7. sınıf öğrencisi Ö3'ün yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.44. Parçalama faaliyetini alan modeline uygularken Ö3'ün yaşadığı güçlük

Görsel 4.44. incelendiğinde parçalama şemaları (APŞ ve EPŞ) kapsamında sorulan soruya yanıt verirken Ö3'ün daire alan modelinde verilen niceliğin tamamında uygun olmayan şekilde henüz gelişmemiş parçalama faaliyetinde bulunduğu görülmektedir. Daire alan modelinde bir pizza verilerek 6 kişi arasında adil paylaşım görevi istendiğinde 7. sınıf öğrencisi Ö3'ün nicelik büyüklüğünü yanlış parçalara ayırması öğrencinin parçalama kesirsel faaliyetinin henüz gelişmemiş olmasından kaynaklanmaktadır. Aynı zamanda yarı yapılandırılmış klinik görüşme gerçekleştirilen Ö3'ün görüşme esnasında bu soruyu yeniden çözmesi istendiğinde öğrencinin daireyi önce eşit büyüklükte 4 çeyrek parçaya ayırdığı görülmüştür. Ardından parçaları sesli olarak saydıktan sonra 4 parçayı 6 parçaya dönüştürmek için dairenin merkezinden diyagonal bir çizgi daha çizerek karşılıklı iki çeyreği de eşit büyüklükte iki parçaya ayırmıştır. Yapılan içerik analizinde Ö3'ün yanıtında görüldüğü gibi alan modeli üzerinde parçalama faaliyetinde yaşadığı bu güçlük tüm sınıf düzeylerinde en sık karşılaşılan durum olarak ortaya çıkmıştır.

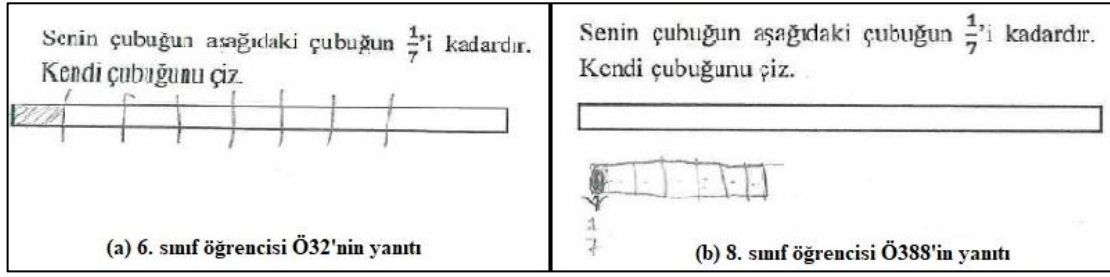
4.2.2.2. Parçalama bağlamında çubuk modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Parçalama faaliyetini çubuk modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.20.'de verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.22.'de verilmiştir.

Tablo 4.22. *Parçalama faaliyetini çubuk modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler*

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
P1	P1.Ç1	Kesir büyüklüğüne göre çoğu birbiriyle eşit parçalar üretir.	%10	%22	%15	%24
	P1.Ç2	Pay ve payda sayısının toplamı kadar eşit parçalar üretir.	%25	%12	%24	%9
	P1.Ç3	Kesir büyüklüğüne göre birbiriyle eşit olmayan parçalar üretir.	%14	%17	%15	%15
Ara toplam			%49	%50,4	%54	%48
P2	P2.Ç1	İstenilen sayıda parçaları oluşturduğunda niceliğin geri kalanını göz ardı eder.	%29	%29	%25	%15
	P2.Ç2	Kesir büyüklüğünden bağımsız parçalama girişimlerinde bulunur.	%12	%15	%14	%15
	P2.Ç3	Nicelikten bağımsız kendi belirlediği başka bir nicelik üzerinde istenilen sayıda parçalar üretir.	%11	%5	%7	%22
Ara toplam			%51	%49,6	%46	%52
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.22. incelendiğinde P1 ve P2 kategorileri üçer alt kategoriden olmak üzere parçalama faaliyetinin çubuk modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tabloya göre yaşanan güçlük bağlamında P1 ve P2 kategorilerinin tüm sınıf düzeylerinde birbirine yakın oranlarda olduğu görülmüştür. Bu bağlamda yaşanan güçlüklerle ilişkin nicelik üzerinde gelişmemiş parçalama girişimlerinde bulunma (P1) ile niceliğin büyüklüğünü göz ardı ederek parçalama girişimlerinde bulunma (P2) kategorilerinde yerleştirilen kod frekanslarına tüm sınıf düzeyleri içinde neredeyse yarı yarıya oranlarda rastlanmıştır. Bunun yanı sıra Tablo 4.22.'ye göre öğrenci yanıtlarında P2 kategorisinde P2.Ç1 alt kategorisi yaygın olarak ortaya çıktığı görülmüştür. P2.Ç1 alt kategorisiyle sınıflandırılan güçlüğü 5. ve 6. sınıf düzeyinde %29, 7. sınıf düzeyinde %25 ve 8. sınıf düzeyinde %15 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin çubuk modeli üzerinde parçalama faaliyetini uygularken “istenilen sayıda parçaları oluşturduğunda niceliğin geri kalanını göz ardı eder.” şeklinde hareket ettikleri ve niceliğin büyüklüğü ile kesir büyüklüğünü ilişkilendirmekte zorlandıkları görülmüştür. Görsel 4.45.'te çubuk modeli üzerinde parçalama faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde yaygın olarak karşılaşılan P2.Ç1 alt kategorisine 6. sınıf öğrencisi Ö32 ile 8. sınıf öğrencisi Ö388'in yazılı değerlendirme aracında verdikleri yanıtlar örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.45. Parçalama faaliyetini çubuk modeline uygularken Ö32 ile Ö388'in yaşadıkları güçlük

Görsel 4.45. incelendiğinde parçalama şemaları (APŞ ve EPŞ) kapsamında sorulan soruya öğrencilerin çubuk modeli ile verilen nicelik büyüklüğünün bir kısmını veya tamamını göz ardı ederek kendi belirledikleri bütün büyüklüğü üzerinde eş parçalar ürettikleri görülmüştür. Görsel 4.45. (a)'da Ö32'nin çubuğun $\frac{1}{7}$ 'ini bulurken çubuk üzerinde 7 tane eş parçayı oluşturduğu an niceliğin geri kalan kısmını göz ardı ettiği görülmektedir. Görsel 4.45. (b)'de ise Ö388'in nicelik büyüklüğünün tamamını göz ardı ederek yeni bir çubuk üzerinde parçalama faaliyetini gerçekleştirdiği görülmektedir. Bunun yanı sıra Ö32 ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiş ve görüşme esnasında öğrenciden bu soruyu yeniden çözmesi istenmiştir. Görüşme esnasında Ö32'nin yanıtının Görsel 4.45. (a)'da görülen yanıtı ile aynı olduğu ve parçalama faaliyetini niceliğin büyüklüğünden bağımsız olarak çubuk üzerinde ardışık/sıralı bir şekilde çizgilerle kesme işlemleri gerçekleştirdiği tespit edilmiştir. Ö32 ile benzer şekilde lineer nicelikler üzerinde ardışık kesme işlemleri gerçekleştirerek parçalama yapan öğrencilerin “bütün içerisindeki parçaların her birinin eşit büyüklükte olması gerektiği” yönünde düşünmedikleri görülmüştür. Daha ziyade “oluşturulan parçaların eşit büyüklükte olması gerektiği” düşüncesine sahip olsalar da bütünün büyüklüğü ile ilişkilendirilmek zorunda hissetmedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda P2 kategorisinde değerlendirilen yanıtlarda birimleştirme faaliyetinin yoksunluğundan kaynaklanmaktadır. Eğer ki öğrenciler bütünü “paydadaki sayı kadar parçadan oluşur” şeklinde tanımlamamış ve niceliğin büyüklüğü ile ilişkilendirmiş olsalardı P2.Ç1 kategorisindeki tüm yanıtlar uygun parçalama faaliyetini gerçekleştirmiş ve doğru olarak kodlanmış olacaktı. Dolayısıyla elde edilen bulgulara göre öğrencilerin parçalama faaliyetini ile birimleştirme faaliyetini nicelikler üzerinde uygun bir şekilde uygulamaları dolaylı olarak birbiri ile etkileşim içinde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

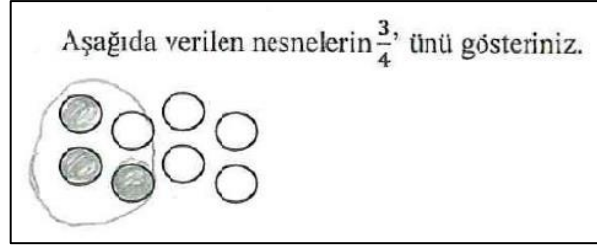
4.2.2.3. Parçalama bağlamında küme modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Parçalama faaliyetini küme modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.20.'de verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.23.'te verilmiştir.

Tablo 4.23. Parçalama faaliyetini küme modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
P1	P1.K1	Pay ve payda sayısının toplamı kadar eşit parçalar üretir.	%2	%5	%8	%16
	P1.K2	Lineer olmayan nicelikler üzerinde lineer gibi parçalama girişimlerinde bulunur. (Ayrık nesnelerin her biri için)	%5	%3	%2	%4
Ara toplam			%7	%8,8	%9,4	%20
P2	P2.K1	İstenilen sayıda parçaları oluşturduğunda niceliğin geri kalanını göz ardı eder.	%81	%82	%73	%60
	P2.K2	Kesir büyüklüğünden bağımsız parçalama girişimlerinde bulunur.	%12	%9	%18	%20
Ara toplam			%93	%91,2	%90,6	%80
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.23. incelendiğinde P1 ve P2 kategorileri ikişer alt kategoriden olmak üzere parçalama faaliyetinin küme modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tabloya göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü yaygın olarak P2 kategorisinde parçalama yaparken niceliğin bir kısmının veya tamamının göz ardı edilerek parçalama girişimlerinde bulunulduğu görülmüştür. P2 kategorisi altında ise ağırlıklı olarak P2.K1 alt kategorisine 5. sınıf düzeyinde %81, 6. sınıf düzeyinde %82, 7. sınıf düzeyinde %73 ve 8. sınıf düzeyinde ise %60 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin küme modeli üzerinde parçalama yaparken “İstenilen sayıda parçaları oluşturduğunda niceliğin geri kalanını göz ardı eder.” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Görsel 4.46.'da küme modeli üzerinde parçalama faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde sıklıkla karşılaşılan P2.K1 alt kategorisine 6. sınıf öğrencisi Ö33'ün yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.46. Parçalama faaliyetini küme modeline uygularken Ö33'ün yaşadığı güçlük

Görsel 4.46. incelendiğinde parça bütün şeması kapsamında (PBŞ) sorulan soruya Ö33'ün küme modelinde verilen nicelik büyüklüğünün bir kısmını göz ardı ederek kendi belirlediği bütün büyüklüğü üzerinde eş parçalar ürettikleri görülmektedir. Küme modeliyle 8 nesneden oluşan ve bütün olarak verilen niceliğin $\frac{3}{4}$ 'ünün bulunması istendiğinde 6. sınıf öğrencisi Ö33'ün bütünü 4 eş parçadan oluşacak şekilde tanımladığı ve bütünü 4 eş parçadan oluşacak şekilde parçaladığı görülürken geriye kalan 4 nesneyi ise göz ardı etmiştir. Eğer ki öğrenci bütüne 4'erli 2 grup veya 2'şerli 4 grup şeklinde birim ölçüsü atamış olsaydı bütünü niceliğin büyüklüğü ile ilişkilendirerek eş parçalara ayırarak parçalama faaliyetini de küme modeli üzerinde doğru bir şekilde uygulamış olacaktı. Öte yandan küme modelinde parçalama görevlerinin verildiği sorulara Görsel 4.46.'da görüldüğü gibi yanıtlayanların tüm sınıf düzeylerinde en yüksek oranlarda olduğu görülse de buradaki frekansların şemalar için gelişim sürecinde olan öğrencilerden oluştuğu unutulmamalıdır. Nitekim bir önceki bölümde Tablo 4.14. (s. 135) üzerinde düzenlenen ve öğrencilerin kesirsel faaliyetler açısından modeller üzerinde gösterdikleri başarı oranlarına bakıldığı zaman en yüksek başarı performansının parçalama kesirsel faaliyetinin küme modeli üzerinde uygulanması kapsamında %80 oranla 8. sınıf öğrencilerine ait olduğu görülmektedir. Yapılan içerik analizine göre bu durumun 8. sınıf öğrencilerinin küme modelinde verilen nesne sayıları ile kesir büyüklüğü arasında aritmetik ve cebirsel işlemlerden veya denk kesirlerden faydalanarak yanıt vermelerinden kaynaklandığı görülmüştür.

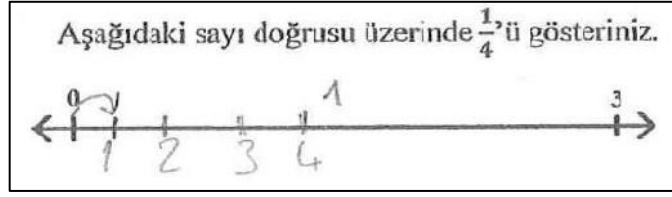
4.2.2.4. Parçalama bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Parçalama faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.20.'de verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelерinin dağılımı Tablo 4.24.'te verilmiştir.

Tablo 4.24. Parçalama faaliyetini sayı doğrusu modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
P1	P1.Sd1	Kesir büyüklüğüne göre birbiriyle eşit olmayan parçalar üretir. Tam sayı aralıkları eşit büyüklükte oluşturulmaz.	%4	%7	%19	%20
	P1.Sd2	Yalnızca niceliğin barındırdığı tam sayılara göre eşit parçalar üretir. Tam sayı aralıklarını birim kesir parçalarına ayıramaz.	%9	%12	%12	%14
Ara toplam			%13	%19	%31	%34
P2	P2.Sd1	0'dan başlayarak paydadaki sayı kadar eşit büyüklükte parçalar üretir ve niceliğin geri kalanını göz ardı eder.	%65	%60	%55	%45
	P2.Sd2	Nicelikten bağımsız/göz kararı birbirleriyle eşit olmayan parçalar üretir.	%22	%21	%15	%20
Ara toplam			%87	%81	%69	%66
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.24. incelendiğinde P1 ve P2 kategorileri ikişer alt kategoriden olmak üzere parçalama faaliyetinin sayı doğrusu modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tabloya göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü yaygın olarak P2 kategorisinde parçalama yaparken niceliğin bir kısmının veya tamamının göz ardı edildiği görülmüştür. P2 kategorisi altında ise ağırlıklı olarak P2.Sd1 alt kategorisine düzeyler arasında gittikçe azalarak 5. sınıf düzeyinde %65, 6. sınıf düzeyinde %60, 7. sınıf düzeyinde %55 ve 8. sınıf düzeyinde ise %45 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin sayı doğrusu modelinde parçalama yaparken “0'dan başlayarak paydadaki sayı kadar eşit büyüklükte parçalar üretir ve niceliğin geri kalanını göz ardı eder.” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Görsel 4.47.'de sayı doğrusu modelinde parçalama faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde sıklıkla karşılaşılan P2.Sd1 alt kategorisine 5. sınıf öğrencisi Ö211'in yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.47. Parçalama faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken Ö211'in yaşadığı güçlük örneği

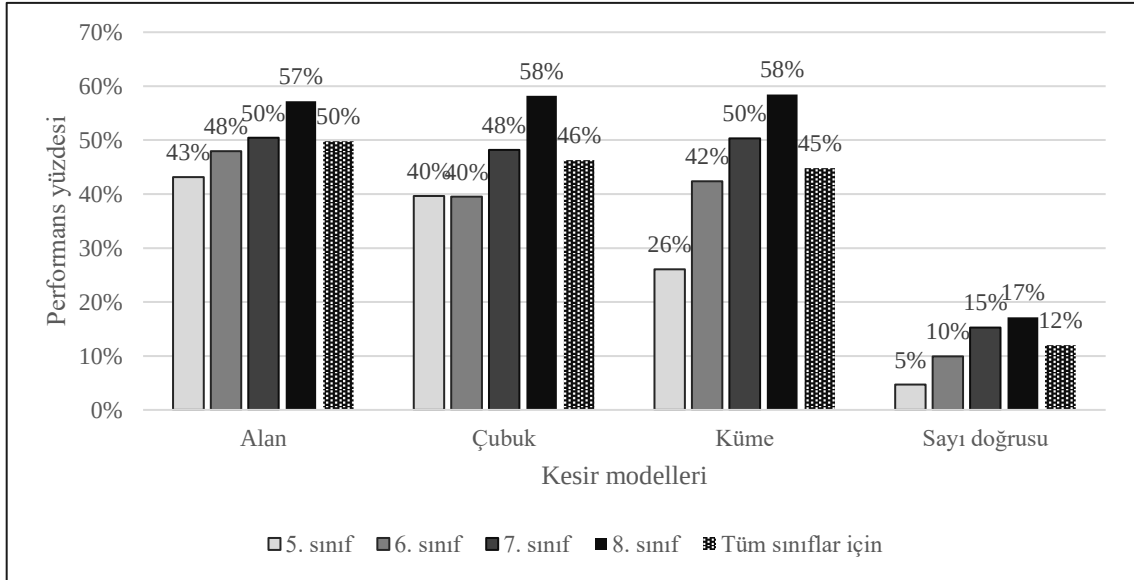
Görsel 4.47. incelendiğinde parçalara ayırma şemaları (APŞ ve EPŞ) kapsamında sorulan soruya 5. sınıf öğrencisi Ö211'in (0-3) aralığında sayı doğrusu modeli ile verilen nicelik üzerinde $\frac{1}{4}$ 'ü göstermeleri istendiğinde nicelik büyüklüğünün bir kısmını göz ardı ederek kendi belirlediği ölçülerde eşit büyüklükte parçalar ürettiği görülmüştür. (Ayrıca analiz sürecinde öğrencilerin ince motor becerilerinin gelişimleri dikkate alınmıştır. Dolayısıyla 5. sınıfta okuyan Ö211 için Görsel 4.47.'de görülen yanıtında eşit parçalar ürettiği yönünde bir değerlendirme yapılmıştır.) Bu bağlamda öğrencinin paydadaki sayıya göre 4 tane eşit büyüklükte parçayı oluştururken, niceliğin büyüklüğü olan (0-3) aralığının uzunluğu ile ilişkilendirmeksizin kendisinin belirlediği ve (0-1) olarak tanımladığı bütün içinde ürettiği görülmektedir. Bununla beraber Ö211'in parçaları kesir gösterimiyle ifade etmediği ancak "4"ün olduğu yere "1" yazdığı görülmektedir. Ancak bu soru kapsamında öğrencilerden (0-3) aralığında verilen nicelik büyüklüğünü dikkate alarak parçalama faaliyetini uygulamaları ve sadece (0-1) aralığında değil tüm nicelik büyüklüğünde özdeş parçalar üretilmeleri beklenmekteydi. Dolayısıyla niceliğin bir kısmını veya tamamını göz ardı ederek parçalama faaliyetine ilişkin P2 kategorisinde yer alan ve burada örneklendirilen öğrencilerin yaşadığı güçlüğü küme modelinde olduğu gibi birimleştirme faaliyetinin yoksunluğu ile dolaylı olarak bağlantılı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumu destekler nitelikte Görsel 4.47.'de görülen Ö211'in yanıtı gibi P2.Sd1 alt kategorisinde yer alan öğrenci yanıtlarında oluşturulan parçaların ya "1, 2, 3, 4" ya da " $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ " şeklinde tanımlandığı görülmüştür.

4.2.3. Yerleşik bütünden ayırma (disembedding) bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Yerleşik parçayı ayırıştırma (disembedding) kesirsel faaliyeti, somut veya soyut olarak bir bütünü yok etmeden ve bozmadan, parçalanmış bütünde yerleşik olan herhangi

bir parçayı dışarı çıkarmayı gerektirir. Diğer bir deyişle bütünün içinde olan birim kesir ($1/b$) veya parça kesir (a/b) parçalarını bütün dışına çıkarabilmektir. Literatürde bu faaliyetin somut olarak uygulanması $5/5$ büyüklüğünde bir bütünün içinden $3/5$ büyüklüğünde bir parçanın bütün dışında kopyalanması veya çizilmesi şeklinde tanımlandığı görülmektedir. Ancak bunun ötesinde yerleşik bütünden ayırma faaliyeti bütün ile parça arasındaki niceliksel muhakemenin kurulması noktasında önemli olup, öğrencinin zihninde herhangi bir bütünden ayrılan parçadan bütünün yeniden oluşturulabileceği fikrinin canlanması gerekmektedir. Örneğin bir öğrenci $5/5$ 'lik bir bütünden $3/5$ 'lik bir parçayı ayırırken zihninde bütünü bozmadan halen $5/5$ büyüklüğünde bir birim olarak korumalıdır. Öte yandan yerleşik bütünden ayırma faaliyetini bir diğer amacı da nicelik üzerinde özdeş parçalar oluşturulduğundan emin olmaktır. Bu sayede öğrenci bütünden ayırdığı birim parçayı tekrarladığında orijinal bütüne yeniden ulaşıyorsa oluşturduğu parçalar birbiriyle özdeş demektir.

Araştırmaya dahil olan katılımcıların yerleşik bütünden ayırma faaliyetleri, veri toplama araçlarında alan (daire ve dikdörtgen), çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri olmak üzere farklı nicelikler ile sunulan hem bütünün büyüklüğünden parça kesir üretme hem de parça kesir büyüklüğünden bütünü yeniden oluşturma görevleri kapsamında incelenmiştir. Elde edilen bulgulara göre öğrencilerin farklı kesir modellerinde sunulan nicelikler üzerinde bütünden ayırma kesirsel faaliyetini uygulamakta zorlandıkları görülmüştür. Araştırmaya dahil olan katılımcıların bütünden ayırma faaliyetini farklı kesir modelleri üzerinde etkili ve doğru uygulamaya ilişkin başarı yüzdelerinin sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği Şekil 4.6.'da verilmiştir.



Şekil 4.6. Öğrencilerin yerleşik bütünden ayırma faaliyetini farklı modellere uygulama performans grafiği

Şekil 4.6. incelendiğinde tüm düzeyler arasında en yüksek başarı performansının alan modelinde (%50) sergilendiği görülmektedir. Yine tüm düzeyler için alan modelini birbirine yakın oranlarla %46 oranla çubuk modeli ve %45 oranla küme modeli takip etmektedir. Bunun yanı sıra ortaokul öğrencilerinin yerleşik birimleştirme ve parçalama faaliyetlerinde olduğu gibi bütünden ayırma faaliyetini en çok sayı doğrusu modelinde verilen nicelikler üzerinde uygulamakta zorlandıkları görülmektedir. Bunun yanı sıra bütünden ayırma faaliyetini dört farklı model üzerinde uygulamada düzeyler arasında 5. sınıftan 8. sınıfa doğru gittikçe artan başarı oranlarına rastlanılsa da araştırmaya dahil olan öğrencilerin nerdeyse yarısının (en yüksek başarı oranı: %58) başarısız olduğu ortaya çıkmıştır. Şekil 4.6. incelendiğinde diğer göze çarpan durum ise bütünden ayırma faaliyetini küme modelinde uygulamada 5. sınıftaki öğrencilerin başarı oranı %26 iken büyük bir sıçramayla 6. sınıftaki öğrencilerin başarı oranının %42'ye ulaşmış olmasıdır.

Yapılan içerik analizine göre öğrencilerin yerleşik bütünden ayırma faaliyetini farklı nicelikler üzerinde uygulamada yaşadıkları güçlükler oluşturulan kodlar bağlamında incelenmiş ve alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu olmak üzere dört farklı kesir modeli kapsamında ayrı ayrı kategorileri oluşturulmuştur. Bu kategoriler oluşturulurken öğrencilerden beklenen farklı modeller ile verilen nicelik büyüklüklerine bağlı olarak birim kesir, parça kesir veya bütün büyüklüklerini yeniden oluşturmalarıdır.

Araştırma verilerinden elde edilen bulgulara göre bütünden ayırma faaliyetini uygulamada yaşanan güçlükler alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri bağlamında ayrı başlıklar altında düzenlenmiştir.

4.2.3.1. Yerleşik bütünden ayırma bağlamında alan modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

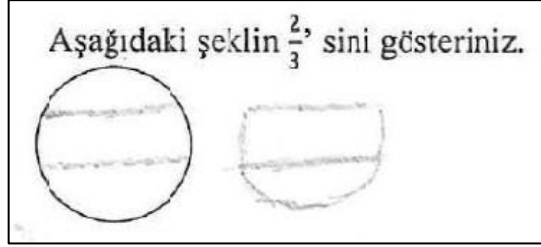
Yerleşik bütünden ayırma (YBA) faaliyetini alan modeline uygularken yaşanan güçlükler kategorilere göre sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerinde karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.25.'te verilmiştir.

Tablo 4.25. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini alan modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
YBA.A1	Parçalama faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.	%64	%68	%61	%64
YBA.A2	Tekrarlanabilir birim kavramının yoksunluğundan dolayı yanlış parçayı ayırır.	%18	%16	%23	%26
YBA.A3	Birimleştirme faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.	%17,6	%16,3	%16	%10
Toplam		%100	%100	%100	%100

Tablo 4.25. incelendiğinde yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin alan modeli üzerinde uygularken yaşanan güçlükler üç kategoride sınıflandırılmıştır. Tabloya göre YBA.A1 kategorisinde yer alan “Parçalama faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.” durumundan kaynaklı yaşanan güçlüğü tüm sınıf düzeylerinde ağırlıklı olarak ortaya çıktığı görülmüştür. YBA.A1 kategorisine 5. sınıf düzeyinde %64, 6. sınıf düzeyinde %68, 7. sınıf düzeyinde %61 ve 8. sınıf düzeyinde %64 oranında rastlanılmıştır. Bunun yanı sıra YBA.A2 kategorisinde tanımlanan “Tekrarlanabilir birim kavramının yoksunluğundan dolayı yanlış parçayı ayırır.” güçlüğüne 5. sınıf düzeyinde %18, 6. sınıf düzeyinde %16, 7. sınıf düzeyinde %23 ve 8. sınıf düzeyinde %26 oranında rastlanılırken; YBA.A3 kategorisinde tanımlanan “Birimleştirme faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.” güçlüğüne ise 5. sınıftan 8. sınıfa gittikçe azalan şekilde sırasıyla %17,6, %16,3, %16 ve %10 oranlarında rastlanılmıştır. Alan modeli üzerinde yerleşik bütünden ayırma faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde en yaygın olarak ortaya çıkan YBA.A1 kategorisine 8. sınıf öğrencisi

Ö360'ın yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.48.'de örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.48. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini alan modeline uygularken Ö360'ın yaşadığı güçlük

Görsel 4.48. incelendiğinde parça bütün şeması (PBŞ) kapsamında daire alan modelinde bütün olarak verilen niceliğin $2/3$ 'ünün gösterilmesi istendiğinde 8. sınıf öğrencisi Ö360'ın verdiği yanıt görülmektedir. Bu soruda öğrencilerden beklenen bütünü bozmadan ve niceliğin büyüklüğü ile ilişkili olarak $2/3$ 'lük bir parça kesri göstermeleridir. Analiz süresince bu bağlamda dikkat edilen şey, parça ile bütün arasındaki ilişkinin niceliksel muhakeme ile kurulup kurulmadığı ile birlikte öğrenci bütünden ayırdığı (yahut nicelik üzerinde taradığı) parça büyüklüğünden yeniden orijinal bütünü oluşturup oluşturamayacağıdır. Görsel 4.48.'de örnek olarak verilen Ö360'ın yanıtına göre öğrencinin parçalama faaliyetleri henüz gelişmemiş olduğundan bütünden ayırdığı parçanın yanlış olduğu görülmektedir. Çünkü öğrencinin yukarıda görüldüğü gibi aynı anda hem dairenin tamamını $3/3$ 'lük hem de dairenin yanına çizdiği şekli $2/3$ 'lük büyüklükte canlandırması söz konusu değildir. Daha doğrusu öğrencinin bu faaliyeti sonucunda ya zihnindeki bütünü bozmuş demektir ya da bütünden hatalı olarak ayırdığı $2/3$ 'lük parçadan orijinal bütünü yeniden oluşturmakta mutlaka zorlanacaktır. Dolayısıyla YBA.A1 kategorisinde değerlendirilen bu yanıt doğrultusunda öğrencilerin alan modelinde verilen nicelik üzerinde hatalı bir şekilde yerleşik bütünden parçayı ayırma faaliyetini uygularken yaşanan en yaygın güçlüğü parçalama faaliyetinin gelişmemiş olduğundan kaynaklandığı sonucuna ulaşmıştır.

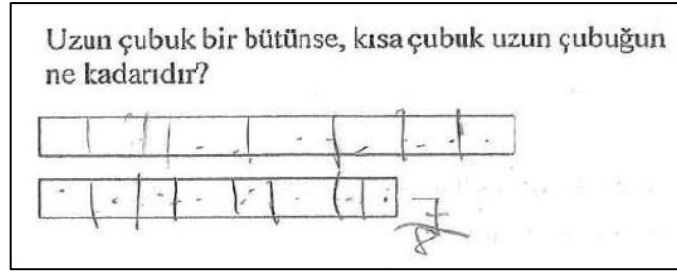
4.2.3.2. Yerleşik bütünden ayırma bağlamında çubuk modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Yerleşik bütünden ayırma (YBA) faaliyetini çubuk modeline uygularken yaşanan güçlükler kategorilere göre sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerinde karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.26.'da verilmiştir.

Tablo 4.26. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini çubuk modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
YBA.Ç1	Tekrarlanabilir birim kavramının yoksunluğundan dolayı yanlış parçayı ayırır.	%44	%37	%50	%36
YBA.Ç2	Birimleştirme faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.	%28	%27	%26	%30
YBA.Ç3	Bütünün büyüklüğünü bozduğundan dolayı yanlış parçayı ayırır.	%21	%21	%15	%16
YBA.Ç4	Parçalama faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.	%7	%15	%9	%18
Toplam		%100	%100	%100	%100

Tablo 4.26. incelendiğinde yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin çubuk modeli üzerinde uygularken yaşanan güçlükler dört kategoride sınıflandırılmıştır. Tabloya göre YBA.Ç1 kategorisinde yer alan “Tekrarlanabilir birim kavramının yoksunluğundan dolayı yanlış parçayı ayırır.” durumundan kaynaklı yaşanan güçlüğü tüm sınıf düzeylerinde ağırlıklı olarak ortaya çıktığı görülmüştür. YBA.Ç1 kategorisine 5. sınıf düzeyinde %44, 6. sınıf düzeyinde %37, 7. sınıf düzeyinde %50 ve 8. sınıf düzeyinde %36 oranında rastlanılmıştır. Çubuk modelinde yaşanan güçlükler bağlamında bu kategoriye takip eden ise “Birimleştirme faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.” şeklinde tanımlanan YBA.Ç2 kategorisidir ve elde edilen bulgulara göre tüm sınıf düzeylerinde (sırasıyla %28, %27, %26, %30) benzer oranlarda karşılaşılmıştır. Çubuk modeli üzerinde yerleşik bütünden ayırma faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde en yaygın olarak ortaya çıkan YBA.Ç1 kategorisine 7. sınıf öğrencisi Ö236’nın yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.49.’da örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.49. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini çubuk modeline uygularken Ö236'nın yaşadığı güçlük

Görsel 4.49. incelendiğinde parça kesir şeması (PKŞ) kapsamında çubuk modelinde uzun olanın bütün kısa olanın ise parça kesri temsilen iki çubuk verildiğinde kısa çubuğun uzun çubuğa olan oranı sorulduğunda 7. sınıf öğrencisi Ö236'nın verdiği yanıt görülmektedir. Bu soruda öğrencilerden beklenen parça ile bütün arasında niceliksel açıdan çarpımsal olarak ilişki kurulması ve bütünü bozmadan yerleşik olan bütünden (uzun çubuktan) verilen parça büyüklüğünün (kısa çubuğu) doğru bir şekilde ayrılarak kesir büyüklüğü ile temsil edilmesidir. Ancak Görsel 4.49.'da görüldüğü gibi çubuk modeline bütünden ayırma faaliyetini uygularken öğrencilerin çoğunda yaşanan bu güçlüğün tekrarlanabilir birim kavramının yoksunluğundan ortaya çıktığı görülmüştür. Çünkü hem birimlerin büyüklüğü açısından hem de birim kesirler açısından tekrarlanabilir düşüncesi bütün ile parçalarındaki niceliksel ilişkinin kurulmasına yardımcı olacaktır. Ancak Görsel 4.49.'a bakıldığında Ö236'nın uzun çubuk içerisine 7 parça yerleştirirken kısa çubuk içerisine 8 parça yerleştirdiği görülmektedir. Dolayısıyla Ö236'nın 7 parçadan oluşan bir bütünden 8 parçayı ayırması da öğrencinin parçaları bütün içerisinde yerleşik olarak düşünmediğinin göstergesidir. Ö236 gibi YBA.Ç1 kategorisinde değerlendirilen diğer öğrenci yanıtlarında da benzer şekilde iki çubuk üzerinde birbirinden bağımsız ölçülerde parçalar yerleştirdikleri görülmüştür.

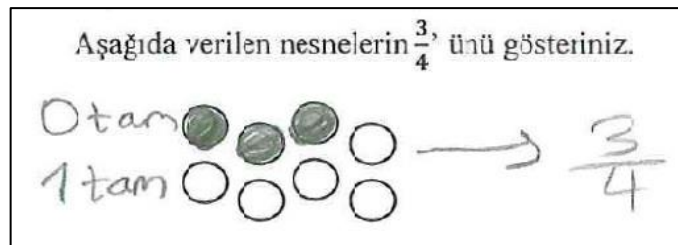
4.2.3.3. Yerleşik bütünden ayırma bağlamında küme modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Yerleşik bütünden ayırma (YBA) faaliyetini küme modeline uygularken yaşanan güçlükler kategorilere göre sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerinde karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.27.'de verilmiştir.

Tablo 4.27. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini küme modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
YBA.K1	Birimleştirme faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.	%70	%71	%59	%56
YBA.K2	Kesir büyüklüğünü anlamlandıramadığı için pay ve paydadaki sayıya göre yanlış parçayı ayırır.	%25	%26	%39	%40
YBA.K3	Parçalama faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.	%5	%3	%2	%4
Toplam		%100	%100	%100	%100

Tablo 4.27. incelendiğinde yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin küme modeli üzerinde uygularken yaşanan güçlükler üç kategoride sınıflandırılmıştır. Tabloya göre YBA.K1 kategorisinde yer alan “Birimleştirme faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.” durumundan kaynaklı yaşanan güçlüğü tüm sınıf düzeylerinde ağırlıklı olarak ortaya çıktığı görülmüştür. YBA.K1 kategorisine 5. sınıf düzeyinde %70, 6. sınıf düzeyinde %71’e yakın oranlarda rastlanılırken, 7. sınıf düzeyinde %59 ve 8. sınıf düzeyinde %56 ile 5. ve 6. sınıf düzeylerine göre daha az oranda rastlanılmıştır. Küme modelinde yaşanan güçlükler bağlamında bu kategoriyi takip eden ise “Kesir büyüklüğünü anlamlandıramadığı için pay ve paydadaki sayıya göre yanlış parçayı ayırır.” şeklinde tanımlanan YBA.K2 kategorisidir ve elde edilen bulgulara göre 5. sınıftan 8. sınıfa doğru sırasıyla %25, %26, %39, %40 şeklinde artan oranlarda karşılaşılmıştır. Küme modeli üzerinde yerleşik bütünden ayırma faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde en yaygın olarak ortaya çıkan YBA.K1 kategorisine 5. sınıf öğrencisi Ö28’in yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.50.’de örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.50. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini küme modeline uygularken Ö28’in yaşadığı güçlük

Görsel 4.50. incelendiğinde parça bütün şeması (PBŞ) kapsamında sorulan soruda küme modelinde 8 ayrı nesnenin bütün olarak verildiği ve 3/4’ünün bulunması

istendiğinde 5. sınıf öğrencisi Ö28'in verdiği yanıt görülmektedir. Bu soruda öğrencilerden beklenen parça ile bütün arasında niceliksel açıdan çarpımsal olarak ilişki kurulması ve bütünü bozmadan yerleşik olan bütünden (8 nesneden) $\frac{3}{4}$ 'lük parça büyüklüğünün doğru bir şekilde yerleşik bütünden ayrılmasıdır. Ancak Görsel 4.50'de görüldüğü gibi küme modeline bütünden ayırma faaliyetini uygularken öğrencilerin çoğunda yaşanan bu güçlüğün birimleştirme faaliyetinin henüz gelişmemiş olmasından kaynaklandığı sonucuna ulaşılmıştır. Çünkü ayrık model ile paydadaki sayıdan daha fazla sayıda nesneden oluşacak şekilde verilen bütünler üzerinde öğrencilerin çoğunluğunun birimleştirme yapamadığı görülmüştür. Dolayısıyla Görsel 4.50.'de görülen Ö28'in yanıtı gibi bütüne yanlış birim ölçüsü atandığında birim kesir ve parça kesir büyüklükleri de yanlış bir şekilde tanımlanmış olacaktır. Eğer ki öğrenci birimleştirme faaliyetini doğru bir şekilde ilişkilendirmiş olsaydı bütünden ayırma faaliyetini de küme modelinde verilen nicelik üzerinde doğru bir şekilde gerçekleştirebilecekti. Ancak bu haliyle öğrencinin zihninde $\frac{4}{4}$ kesri “4 eş parçanın yerleşik olduğu bir bütünü” temsil edecek şekilde yapılandırılmışken, farklı nicelikler üzerinde ve hatta bileşik kesirler üzerinde çalışırken oldukça zorlanacaktır.

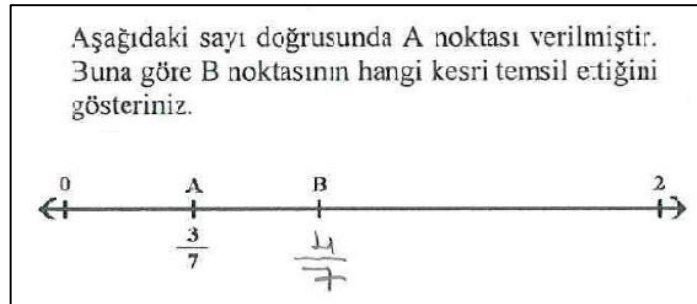
4.2.3.4. Yerleşik bütünden ayırma bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde yaşanan güçlüklere ilişkin bulgular

Yerleşik bütünden ayırma (YBA) faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken yaşanan güçlükler kategorilere göre sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerinde karşılaşılan frekans yüzdelерinin dağılımı Tablo 4.28.'de verilmiştir.

Tablo 4.28. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini sayı doğrusu modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
YBA.Sd1	Tekrarlanabilir birim kavramının yoksunluğundan dolayı yanlış parçayı ayırır.	%54	%72	%66	%65
YBA.Sd2	Bütünün büyüklüğünü bozduğundan dolayı yanlış parçayı ayırır.	%31	%11	%17,3	%26
YBA.Sd3	Birimleştirme faaliyetini doğru uygulayamadığı için yanlış parçayı ayırır.	%15	%17	%16,9	%8
Toplam		%100	%100	%100	%100

Tablo 4.28. incelendiğinde yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin sayı doğrusu modeli üzerinde uygularken yaşanan güçlükler üç kategoride sınıflandırılmıştır. Tabloya göre YBA.Sd1 kategorisinde yer alan “Tekrarlanabilir birim kavramının yoksunluğundan dolayı yanlış parçayı ayırır.” durumundan kaynaklı yaşanan güçlüğün tüm sınıf düzeylerinde ağırlıklı olarak ortaya çıktığı görülmüştür. YBA.Sd1 kategorisine 5. sınıf düzeyinde %54, 6. sınıf düzeyinde %72, 7. sınıf düzeyinde %66 ve 8. sınıf düzeyinde %65 oranında rastlanılmıştır. Sayı doğrusu modelinde yaşanan güçlükler bağlamında bu kategoriye takip eden ise “Bütünün büyüklüğünü bozduğundan dolayı yanlış parçayı ayırır.” şeklinde tanımlanan YBA.Sd2 kategorisidir ve elde edilen bulgulara göre 5.-8. sınıf düzeylerinde sırasıyla %31, %11, %17,3, %26 oranlarında karşılaşılmıştır. Sayı doğrusu modeli üzerinde yerleşik bütünden ayırma faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde en yaygın olarak ortaya çıkan YBA.Sd1 kategorisine 6. sınıf öğrencisi Ö31’in yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.51.’de örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.51. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken Ö31’in yaşadığı güçlük

Görsel 4.51. incelendiğinde parça kesir şeması (PKŞ) kapsamında sorulan soruda (0-2) aralığında sayı doğrusu modelinde $\frac{3}{7}$ 'ye denk gelen bir A noktasının parça kesir olarak verildiği ve başka bir parça kesir olan ($\frac{6}{7}$ olarak sunulan) B noktasının bulunması istendiğinde 6. sınıf öğrencisi Ö31’in verdiği yanıt görülmektedir. Bu soruda öğrencilerden beklenen $\frac{3}{7}$ parça kesir büyüklüğü ile sayı doğrusu üzerinde örtük olarak verilen bütün arasında niceliksel açıdan çarpımsal olarak ilişki kurulması ve bütünü bozmadan yerleşik olan bütünden ((0-1) aralığından) $\frac{6}{7}$ 'ye denk gelen parça büyüklüğünün doğru bir şekilde yerleşik bütünden ayrılmasıdır. Ancak Görsel 4.51. incelendiğinde çubuk modelinde olduğu gibi sayı doğrusu modelinde de bütünden ayırma

faaliyetinin uygulanmasında öğrencilerin yaşadığı güçlüğü yaygın olarak tekrarlanabilir birim kavramının yoksunluğundan ortaya çıktığı görülmüştür. Çünkü öğrencilerde birim kesir, parça kesir ve bütünün büyüklüklerinin nicelik üzerinde ve birbirleriyle olan ilişkilendirilmesini yapmaksızın bütünün içerisinde doğru parçaların yerleşik olmadığı görülmüştür. Daha açık bir ifadeyle Görsel 4.51.'de diğer birçok öğrencinin yanıtında olduğu gibi 6. sınıf öğrencisi Ö31'in $3/7$ olarak verilen A noktasından sonra B noktasını $4/7$ olarak belirledikleri görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin zihninde bütünün başlı başına bir büyüklüğe sahip olması gerektiğini düşünmemekle birlikte, bütünün içindeki parçalara da herhangi bir büyüklük tanımlamadıkları ve bütünün içindeki parçaların birbiri ardına gelen şekilde yerleşik olduğunu algıladıkları görülmüştür. Dolayısıyla öğrenciler bütünün tekrarlanabilir birimlerden oluştuğuna dair bir düşünceye sahip olsalardı özellikle sayı doğrusu modeli üzerinde öncelikle (0-2) aralığının içinde hangi birimlerin tekrarlı biçimde yerleşik olduğunu fark eder ve buna bağlı olarak (0-1) aralığındaki bütünün içinde yerleşik olan parça kesir büyüklüğünü doğru bir şekilde ayırabilirdi.

4.2.4. Tekrarlama (iterating) bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

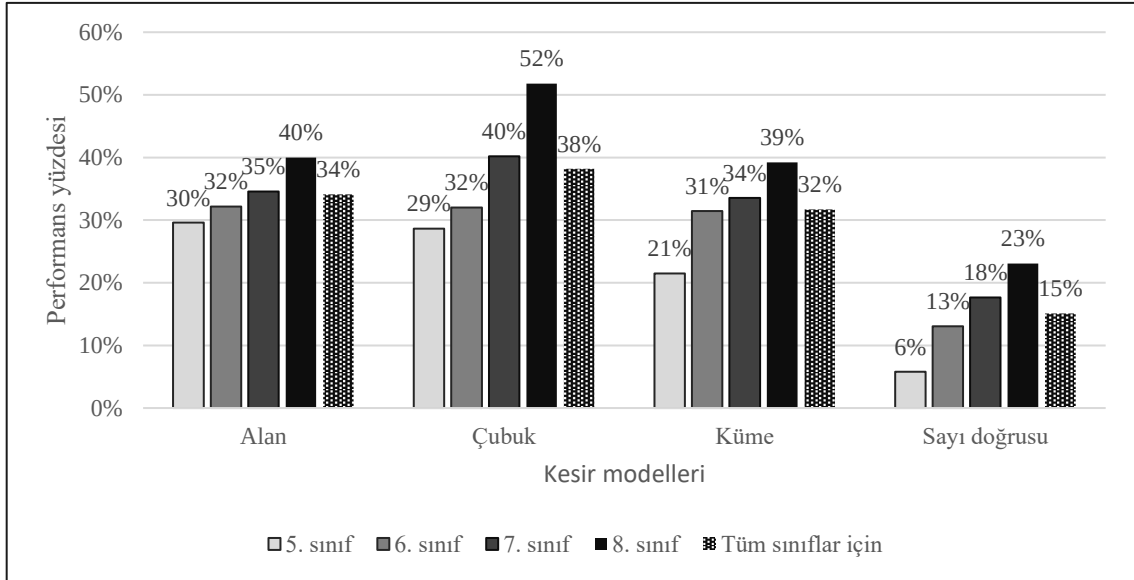
Tekrarlama (iterating) bütün içerisindeki belli bir parçanın büyüklüğüne özdeş parçaların kopyalanması faaliyetidir. Bununla beraber tekil birimlerden bileşik birimler oluşturmak için de tekrarlama kesirsel faaliyetinin kullanılması gerekir. Dolayısıyla özdeş parça büyüklüklerinin oluşturulması ve yeni tekrarlanabilir birimlerin oluşturulması tekrarlama faaliyetinin etkili ve doğru bir şekilde kullanıldığının göstergesidir.

Örnek olarak çubuk modelinde bütün olarak verilen bir niceliğin $1/7$ 'sinin bulunması istendiğinde, öncelikle belli bir miktar parça olarak seçilip ardından seçtiği bu parçanın 7 kez tekrarlanması ile orijinal bütünü oluşturulması beklenir. Eğer öğrenci ilk denemesinde orijinal bütünün büyüklüğünü oluşturamadıysa seçtiği parçanın büyüklüğünü yeniden düzenleyerek bütün içindeki parçaların büyüklüklerinin özdeş olduğuna emin olana dek tekrarlama faaliyetini kullanması beklenir. Bu bağlamda tekrarlama ve parçalama faaliyetlerinin birbirini besleyecek şekilde geliştiği de unutulmamalıdır.

Öte yandan tekrarlanabilir birimlerin oluşturulması noktasında öğrencilerden beklenen ise herhangi bir kesir büyüklüğünün birim kesirlerin tekrarlanmasıyla oluşturulduğunu bilmesi ve bu farkındalık anlayışı ile çarpımsal ilişki bağlamında yeni tekrarlanabilir birimleri üretebilmesidir. Mesela $7/7$ kesir büyüklüğünün 7 tane $1/7$ birim kesirini içinde barındırdığını bilmesi ve birim kesirleri çarpımsal muhakeme becerisiyle tekrarlayarak yeni tekrarlanabilir parça kesirler, bütünler ve bileşik kesirler üretebilmesidir. Burada tekrarlanabilir birimler arasında çarpımsal ilişkinin kurulması bütünden büyük kesir büyüklüklerinin de oluşturulabilmesi için önemlidir. Aksi halde birimler arasında toplamsal bir ilişkinin olduğu düşünülerek sadece bütün içerisinde birimlerin tekrarlanabilir olduğu dolayısıyla bütün dışındaki nicelikler üzerinde çalışmakta zorlanılacağı araştırmanın bulguları arasındadır. Bunun yanı sıra elde edilen bulgulara göre öğrencilerin tekil birimlerden bileşik birimleri oluşturmakta da zorlandıkları tespit edilmiştir.

Araştırma kapsamında öğrencilerin tekrarlama kesirsel faaliyetleri alan (daire ve dikdörtgen), çubuk, küme ve sayı doğrusu kesir modelleri ile verilen farklı nicelikler üzerindeki uygulamaları incelenmiştir. Elde edilen bulgulara göre öğrencilerin farklı kesir modellerinde sunulan nicelikler üzerinde parça büyüklüklerini ve birimleri tekrarlama zorlandıkları görülmüştür.

Araştırmaya dahil olan katılımcıların tekrarlama faaliyetini farklı kesir modelleri üzerinde etkili ve doğru uygulamaya ilişkin başarı yüzdelerinin sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği Şekil 4.7.'de verilmiştir.



Şekil 4.7. Öğrencilerin tekrarlama faaliyetini farklı modellere uygulama performansı grafiği

Şekil 4.7. incelendiğinde tüm düzeyler arasında en yüksek başarı performansının sırasıyla çubuk (%38), alan (%34) ve küme (%32) modellerinde birbirine yakın oranlarda sergilendiği görülmektedir. Bunun yanı sıra tekrarlama faaliyeti bağlamında düzey içinde en yüksek başarı performansının çubuk modelinde 8. sınıf öğrencilerinin %52'si tarafından sergilendiği görülmektedir. Bununla beraber çubuk modelinde 7. sınıf düzeyinde %40 oranında başarı gösteren öğrencilerin 8. sınıf düzeyinde %52 oranında en büyük farkla artış gösterdiği dikkat çekmektedir. Benzer şekilde küme modelinde tekrarlama faaliyetinde ise %21 oranında başarı gösteren 5. sınıf öğrencilerinden 6. sınıf düzeyine geçildiğinde başarı performansının %31'e arttığı görülmüştür. Ayrıca Şekil 4.7.'ye göre tekrarlama faaliyetinde 5. sınıftan 8. sınıfa gidildikçe sırasıyla %6, %13, %18 ve %23 oranlarıyla giderek artsa da diğer modellere göre en az başarı sergilenen modelin sayı doğrusu modeli olduğu ortaya çıkmıştır.

Bu bağlamda yapılan içerik analizine göre öğrencilerin tekrarlama faaliyetini nicelikler üzerinde uygulamada yaşadıkları güçlükler incelenmiş ve Tablo 4.29.'da görüldüğü gibi iki farklı kategoride sınıflandırılmıştır. Bu kategoriler içerik analizinde kullanılan kodlara göre oluşturulmuştur. Kodlama işlemi tekrarlama faaliyetinde yapılırken özdeş parça büyüklüklerinin oluşturulması ve tekrarlanabilir birimlerin anlamlandırılması dikkate alınarak gerçekleştirilmiştir.

Tablo 4.29. *Tekrarlama faaliyetini uygulamada karşılaşılan güçlükler*

Kategori no	Kategori	Açıklama
T1	Parça büyüklüğünü tekrarlama faaliyetinde yaşanan güçlükler	Özdeş parça büyüklüklerini oluşturmakta zorlanır.
T2	Birimleri tekrarlama faaliyetinde yaşanan güçlükler	Tekrarlanabilir birimleri anlamlandırmakta zorlanır.

Tablo 4.29.'da görüldüğü gibi elde edilen bulgulara göre öğrencilerin farklı modeller üzerinde tekrarlama faaliyetini uygularken parça büyüklüklerini tekrarlama ve birimleri tekrarlama kategorilerinde güçlük yaşadıkları görülmüştür. Daha ziyade öğrenci verileri incelenirken öğrencilerin ya T1 ve T2 olarak belirlenen kategorilerden biri ya da T1 ve T2 kategorilerinin ikisi bağlamında tekrarlama faaliyetini etkili ve doğru bir şekilde uygulayamadıkları görülmüştür. Dolayısıyla T1 ve T2 kategorilerine yerleştirilen kodların frekansları her iki kategori için ayrı ayrı düzenlenerek bulgular oluşturulmuştur. Bu bulgulara göre tekrarlama faaliyetini uygulamada yaşanan güçlükler alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri bağlamında ayrı başlıklar altında düzenlenmiştir.

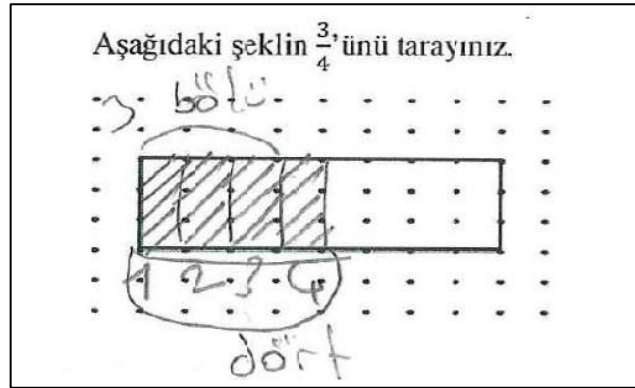
4.2.4.1. Tekrarlama bağlamında alan modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Tekrarlama faaliyetinin alan modeline uygulanmasında yaşanan güçlükler Tablo 4.29.'daki kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.30.'da verilmiştir.

Tablo 4.30. *Tekrarlama faaliyetini alan modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler*

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
T1	T1.A1	Nicelik üzerinde parçaları eşit büyüklükte tekrarlayamaz.	%32	%29	%33	%31
	T1.A2	Yalnızca bütün üzerindeki parçaları eşit büyüklükte tekrarlayabilir. Farklı büyüklükteki nicelikler üzerinden parçaları tekrarlayamaz.	%16	%17	%14	%17
	T1.A3	Bütün üzerinde paydadaki sayı veya pay ile paydanın toplam sayısı kadar parçayı eşit büyüklükte tekrarlar.	%2	%4	%2	%2
T2	T2.A1	Birimleri doğal sayılarla tanımlayarak tekrarlar ve/veya birim kesri tekrarlayamaz.	%47	%45	%45	%47
	T2.A2	Bütün içerisindeki birimleri çarpımsal ilişki kurarak tekrarlayamaz.	%3	%5	%5	%3
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.30. incelendiğinde T1 kategorisi üç alt kategoriden, T2 kategorisi ise iki alt kategoriden olmak üzere tekrarlama faaliyetinin alan modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tabloya göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü yaygın olarak T2 kategorisi kapsamında birimleri tekrarlarken yaşanan güçlüklerle ilişkin T2.A1 alt kategorisinde ortaya çıktığı görülmüştür. T2.A1 alt kategorisine 5. sınıf düzeyinde %47, 6. sınıf düzeyinde %45, 7. sınıf düzeyinde %45 ve 8. sınıf düzeyinde %47 olmak üzere birbirine yakın oranlarda rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin alan modeli üzerinde tekrarlama yaparken “Birimleri doğal sayılarla tanımlayarak tekrarlar ve/veya birim kesri tekrarlayamaz.” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Görsel 4.52.’de alan modeli üzerinde tekrarlama faaliyetini uygularken hem T1.A3 hem de T2.A1 alt kategorilerinde değerlendirilen 5. sınıf öğrencisi Ö413’ün yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.52. Tekrarlama faaliyetini alan modeline uygularken Ö413’ün yaşadığı güçlük

Görsel 4.52.’de parça bütün şeması (PBŞ) kapsamında sorulan soruda noktalı zemin üzerinde dikdörtgen alan modeli ile verilen bir niceliğin $\frac{3}{4}$ ’ünün bulunması istendiğinde tekrarlama faaliyetinde yaşanan güçlükler bağlamında hem T1.A3 hem de T2.A1 alt kategorilerine yerleştirilen 5. sınıf öğrencisi Ö413’ün yanıtı görülmektedir. Ö413’ün tekrarlanabilir birim kavramına yüklediği anlama göre bu alt kategoriye yerleştirilen bu yanıtta bütünün içindeki birimlerin 1, 2, 3, 4 şeklinde doğal sayıların sıralanması bağlamında tekrarlandığı görülmektedir. Bütün içerisindeki birimlerin bu şekilde tekrarlama yanlışı olmamakla birlikte kesirsel faaliyet açısından tekrarlama faaliyetinin henüz gelişmemiş olduğunun göstergesidir. Nihayetinde öğrencilerden kesirleri anlamlı

öğrenmeleri için kesir büyüklüklerini birim kesirlerin tekrarlanmasıyla oluşacağı yönünde temsil etmeleri beklenmektedir. Öte yandan Görsel 4.52. incelendiğinde T1.A3 alt kategorisine göre öğrencinin bütünü “paydadaki sayı kadar parçalardan oluşur” şeklinde birimleştirdiğinden nicelik üzerinde istenilen şekilde eşit büyüklükte parçalar oluşturamamıştır. Buna rağmen her bir parçayı 3 birimkareden oluşan birer sütun şeklinde tanımlamıştır. Bu durum öğrencinin bileşik birimleri (3 birimkare) tekil birimlerden (1 birimkare) oluşacak şekilde tekrarlanabilir birim olarak kullandığını göstermektedir. Dolayısıyla Ö413 özdeş parça büyüklükleri oluşturmak için birimleri tekrarlarsa da birim kesirleri henüz tekrarlanabilir birim olarak anlamlandıramamıştır.

4.2.4.2. Tekrarlama bağlamında çubuk modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

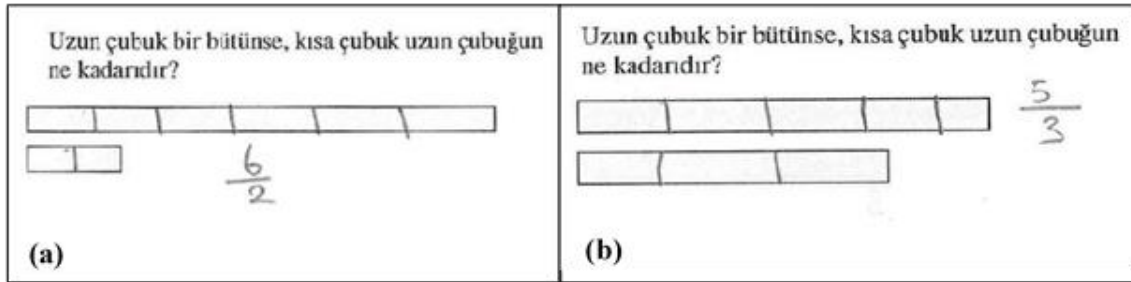
Tekrarlama faaliyetini çubuk modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.29.’da verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.31.’de verilmiştir.

Tablo 4.31. Tekrarlama faaliyetini çubuk modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
T1	T1.Ç1	Nicelik üzerinde parçaları eşit büyüklükte tekrarlayamaz.	%31	%37	%38	%38
	T1.Ç2	Yalnızca bütün üzerindeki parçaları eşit büyüklükte tekrarlayabilir. Farklı büyüklükteki nicelikler üzerinden parçaları tekrarlayamaz.	%15	%10	%8	%9
	T1.Ç3	Bütün üzerinde paydadaki sayı veya pay ile paydanın toplam sayısı kadar parçayı eşit büyüklükte tekrarlar.	%2	%1	%2	%1
T2	T2.Ç1	Bütün içerisindeki birimleri çarpımsal ilişki kurarak tekrarlayamaz.	%25	%25	%33	%28
	T2.Ç2	Birimleri doğal sayılarla tanımlayarak tekrarlar ve/veya birim kesri tekrarlayamaz.	%27	%27	%19	%24
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.31. incelendiğinde T1 kategorisi üç alt kategoriden, T2 kategorisi ise iki alt kategoriden olmak üzere tekrarlama faaliyetinin çubuk modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü yaygın olarak T1 kategorisi kapsamında birimleri tekrarlarken yaşanan

güçlülere ilişkin T1.Ç1 alt kategorisinde ortaya çıktığı görülmüştür. T1.A1 alt kategorisine 5. sınıf düzeyinde %31, 6. sınıf düzeyinde %37, 7. sınıf düzeyinde %38 ve 8. sınıf düzeyinde %38 olmak üzere birbirine yakın oranlarda rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin çubuk modeli üzerinde tekrarlama yaparken “Nicelik üzerinde parçaları eşit büyüklükte tekrarlayamaz.” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Bununla beraber ortaokul öğrencilerinde çubuk modelinde tekrarlama yaparken ağırlıklı olarak görülen diğer güçlük ise T2 kategorisi kapsamında birimlerin tekrarlanmasına ilişkin T2.Ç1 alt kategorisinde belirlenen “Bütün içerisindeki birimleri çarpımsal ilişki kurarak tekrarlayamaz.” şeklinde olduğu görülmüştür. T2.Ç1 alt kategorisine ise kategorisine 5. ve 6. sınıf düzeylerinde %25, 7. sınıf düzeyinde %33 ve 8. sınıf düzeyinde ise %28 oranlarında rastlanılmıştır. Görsel 4.53.’te çubuk modeli üzerinde tekrarlama faaliyetini uygularken hem T1.Ç1 hem de T2.Ç1 alt kategorilerinde değerlendirilen 7. sınıf öğrencisi Ö74’ün yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.53. Tekrarlama faaliyetini çubuk modeline uygularken Ö74’ün yaşadığı güçlük

Görsel 4.53.’te parçalı birim kesir şeması (PBKŞ) kapsamında sorulan soruda bütün olarak verilen uzun çubuk ile kısa çubuk arasında birimleri tekrarlayarak karşılaştırılması istendiğinde tekrarlama faaliyetinde yaşanan güçlük bağlamında hem T1.Ç1 hem de T2.Ç1 alt kategorilerine yerleştirilen 7. sınıf öğrencisi Ö74’ün yanıtı görülmektedir. Ö74’ün T1.Ç1 kapsamında hem uzun çubuk üzerinde parçaları giderek artan büyüklükte tekrarlama hem de kısa çubuk ile uzun çubuk içerisindeki parçaların büyüklüklerinin farklı olmasından dolayı öğrencinin bütün üzerinde parçaları özdeş büyüklükte tekrarlayamadığı yönünde bir değerlendirme yapılmıştır. Nihayetinde tekrarlama faaliyetinin diğer bir amacı parçaların tekrarlanmasıyla orijinal bütünün büyüklüğünün yeniden oluşturulmasıdır. Ancak bu durumda Ö74 gibi yanıt veren öğrencilerin belli bir

kesri temsil eden parçanın büyüklüğünden bütünün büyüklüğünü oluşturmakta zorlanacakları düşünülmüştür. Öte yandan Görsel 4.53. incelendiğinde T2.Ç1 alt kategorisine göre Ö74'ün birimlerin tekrarlanmasına ilişkin “Bütün içerisindeki birimleri çarpımsal ilişki kurarak tekrarlayamaz.” şekilde tekrarlama faaliyetini gerçekleştirdiği görülmektedir. Her ne kadar Ö74 gibi diğer öğrencilerin de bu soruda kesrin oran yorumuna göre yanıt verdikleri düşünülse de soruda uzun çubuğun bir bütün olduğu belirtilmektedir. Dolayısıyla öğrencinin Görsel 4.53. (a) için bütün olarak verilen uzun çubuğu $6 \text{ tane } \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$ ve kısa çubuk olarak verilen parçayı da $2 \text{ tane } \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ şeklinde tanımlayarak bütün içerisindeki birim kesirleri çarpımsal ilişki bağlamında tekrarlaması beklenmekteydi. Benzer şekilde Ö74'ün Görsel 4.53. (b) için yanıtında da öğrencinin bütün içerisinde birimleri çarpımsal ilişki bağlamında tekrarlayamadığından oran yorumunu kullanarak birimleri (parçaları) $\frac{1}{n}$ gibi tekrarlanabilir birim olarak tanımlamamıştır.

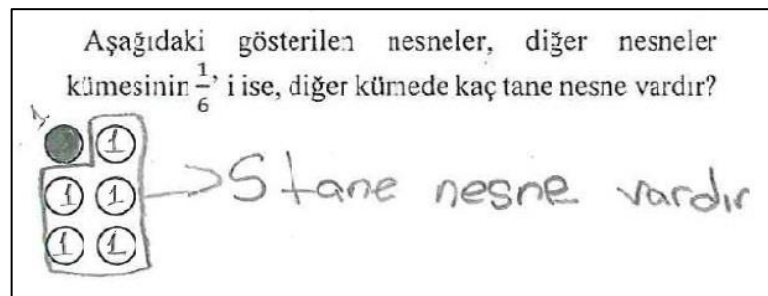
4.2.4.3. Tekrarlama bağlamında küme modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Tekrarlama faaliyetini küme modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.29.'da verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.32.'de verilmiştir.

Tablo 4.32. Tekrarlama faaliyetini küme modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
T1	T1.K1	Yalnızca bütün üzerinde paydadaki sayı kadar tekil birimlerden parçaları tekrarlayabilir. Farklı büyüklükteki nicelikler üzerinden parçaları tekrarlayamaz.	%48,4	%48,2	%47,9	%48,0
	T1.K2	Nicelik üzerinde parçaları eşit büyüklükte tekrarlayamaz.	%2	%2	%1	%1
	T1.K3	Bütün üzerinde paydadaki sayı veya pay ile paydanın toplam sayısı kadar parçayı eşit büyüklükte tekrarlar.	%1	%1	%2	%1
T2	T2.K1	Birimleri doğal sayılarla tanımlayarak tekrarlar ve/veya birim kesri tekrarlayamaz.	%23	%29	%32	%34
	T2.K2	Bütün içerisindeki birimleri çarpımsal ilişki kurarak tekrarlayamaz.	%26	%21	%17	%16
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.32. incelendiğinde T1 kategorisi üç alt kategoriden, T2 kategorisi ise iki alt kategoriden olmak üzere tekrarlama faaliyetinin küme modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü yaygın olarak T1 kategorisi kapsamında özdeş parça büyüklüklerini tekrarlarken yaşanan güçlüklerle ilişkin T1.K1 alt kategorisinde ortaya çıktığı görülmüştür. T1.K1 alt kategorisine 5. sınıf düzeyinde %48,4, 6. sınıf düzeyinde %48,2, 7. sınıf düzeyinde %47,9 ve 8. sınıf düzeyinde %48 olmak üzere neredeyse aynı oranlarda rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin küme modeli üzerinde tekrarlama yaparken “Yalnızca bütün üzerinde paydadaki sayı kadar tekil birimlerden parçaları tekrarlayabilir. Farklı büyüklükteki nicelikler üzerinden parçaları tekrarlayamaz.” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Bununla beraber ortaokul öğrencilerinde küme modelinde tekrarlama yaparken ağırlıklı olarak görülen diğer güçlük ise T2 kategorisi kapsamında birimlerin tekrarlanmasına ilişkin T2.K1 alt kategorisinde belirlenen “Birimleri doğal sayılarla tanımlayarak tekrarlar ve/veya birim kesri tekrarlayamaz.” şeklinde olduğu görülmüştür. T2.K1 alt kategorisine ise 5. sınıf düzeyinde %23, 6. sınıf düzeyinde %29, 7. sınıf düzeyinde %32 ve 8. sınıf düzeyinde ise %34 oranlarında rastlanılmıştır. Görsel 4.54.’te parçalı birim kesir şeması (PBKŞ) kapsamında küme modeli üzerinde tekrarlama faaliyetini uygularken hem T1.K1 hem de T2.K1 alt kategorilerinde değerlendirilen 6. sınıf öğrencisi Ö160’ın yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.54. Tekrarlama faaliyetini küme modeline uygularken Ö160’ın yaşadığı güçlük

Görsel 4.54.’te görülen soruda 6 nesneden oluşan ve belli bir bütünün $\frac{1}{6}$ ’i olarak verilen küme modelinde öğrencilerden birimleri tekrarlayarak bütünü bulmaları istendiğinde tekrarlama faaliyetinde yaşanan güçlük bağlamında hem T1.K1 hem de T2.K1 alt kategorilerine yerleştirilen 6. sınıf öğrencisi Ö160’ın yanıtı görülmektedir.

Ö160'ın T1.K1 kapsamında bütünden farklı bir büyüklükte verilen ayırık nesneler üzeri bütün olarak tanımlamış ve bütün içerisinde de 6 tane nesneyi parça olarak tekrarlamıştır. Görsel 4.54.'e bakıldığında öğrencinin her bir nesneyi “1” olarak belirlemesi de zihninde oluşturduğu bütünün “6 tane 1” şeklinde olduğunu göstermektedir. Öte yandan Görsel 4.53. incelendiğinde T2.K1 alt kategorisine göre Ö160'ın birimlerin tekrarlanmasına ilişkin “Birimleri doğal sayılarla tanımlayarak tekrarlar ve/veya birim kesri tekrarlayamaz.” şeklinde bir faaliyet gerçekleştirdiği görülmektedir. Nitekim Ö160 bütün içerisindeki her bir nesneyi ”1” olarak tanımlayıp, bütünü de “1”lerin tekrarlanması sonucunda oluşturmuştur. Yapılan analize göre küme modeli üzerinde tekrarlama faaliyetinde öğrencilerin çoğunda Ö160 gibi herhangi bir bütünün çarpımsal ilişki bağlamında tekrarlanabilir birim kesirleri içerisinde barındırabileceği düşüncesine maalesef çok az rastlanılmıştır.

4.2.4.4. Tekrarlama bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

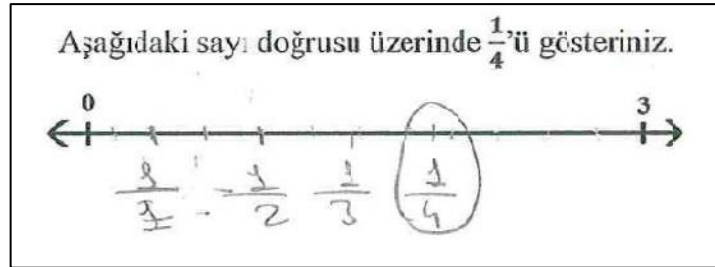
Tekrarlama faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.29.'da verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.33.'te verilmiştir.

Tablo 4.33. Tekrarlama faaliyetini sayı doğrusu modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
T1	T1.Sd1	Nicelikten bağımsız kendi oluşturduğu ölçülerde eşit büyüklükte parçalar tekrarlayabilir.	%29	%39	%34	%33
	T1.Sd2	Yalnızca bütün üzerindeki parçaları eşit büyüklükte tekrarlayabilir. Farklı büyüklükteki nicelikler üzerinden parçaları tekrarlayamaz.	%21	%6	%6	%12
T2	T2.Sd1	Bütün içerisindeki birimleri çarpımsal ilişki kurarak tekrarlayamaz.	%40	%33	%47	%44
	T2.Sd2	Birimleri doğal sayılarla tanımlayarak tekrarlar ve/veya birim kesri tekrarlayamaz.	%10	%23	%14	%11
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.33. incelendiğinde T1 ve T2 kategorileri ikişer alt kategoriden olmak üzere tekrarlama faaliyetinin sayı doğrusu modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. 5., 7. ve 8. sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü sırasıyla

%40, %47 ve %44 olmak üzere en yüksek oranların T2 kategorisi kapsamında birimleri tekrarlarken yaşanan güçlüklerle ilişkin T2.Sd1 alt kategorisinde ortaya çıktığı görülmüştür. Ayrıca T2.Sd1 alt kategorisine 6. sınıf düzeyinde ise %33 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin sayı doğrusu modeli üzerinde tekrarlama yaparken “Bütün içerisindeki birimleri çarpımsal ilişki kurarak tekrarlayamaz.” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Diğer bir ifadeyle tekrarlanabilir birim kesir kavramının yoksunluğu söz konusudur. Bunun yanı sıra Tablo 4.33.’e göre 6. sınıf düzeyinde ise %39 oranında en çok karşılaşılan güçlüğün T1 kategorisi kapsamında özdeş parça büyüklüklerinin tekrarlanmasına ilişkin T1.Sd1 alt kategorisi olduğu görülmektedir. Bu alt kategori kapsamında yaşanan güçlüklerle ilişkin diğer sınıf düzeylerinde karşılaşılan oranları ise 5. sınıf düzeyinde %29, 7. sınıf düzeyinde %34 ve 8. sınıf düzeyinde %33 oranlarındadır. T1.Sd1 alt kategorisine göre ise öğrencilerin sayı doğrusu modelinde tekrarlama yaparken “Nicelikten bağımsız kendi oluşturduğu ölçülerde eşit büyüklükte parçalar tekrarlayabilir.” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Görsel 4.55.’te sayı doğrusu modeli üzerinde tekrarlama faaliyetini uygularken hem T1.Sd1 hem de T2.Sd2 alt kategorilerinde değerlendirilen 6. sınıf öğrencisi Ö33’ün yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.

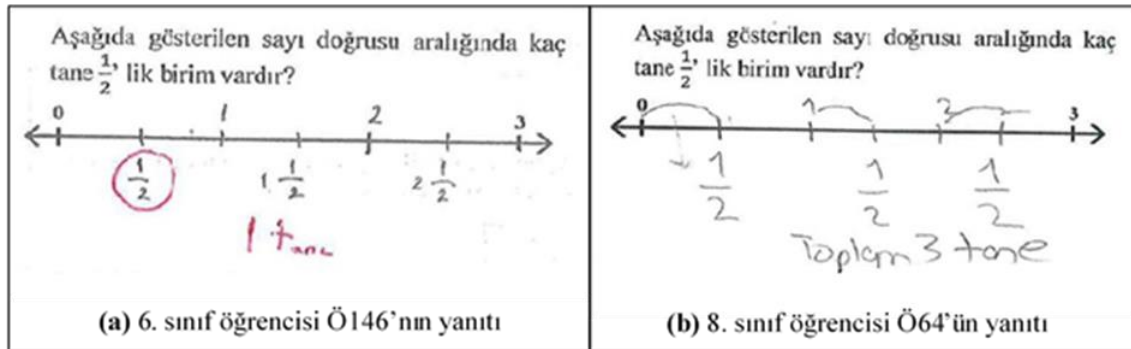


Görsel 4.55. Tekrarlama faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken Ö33’ün yaşadığı güçlük

Görsel 4.55.’te parçalara ayırma şemaları (APŞ ve EPS) kapsamında sorulan soruda sayı doğrusu modeli ile (0-3) aralığında verilen nicelik üzerinde öğrencilerden $\frac{1}{4}$ ’ün yerini göstermeleri istendiğinde tekrarlama faaliyetinde yaşanan güçlük bağlamında hem T1.Sd1 hem de T2.Sd2 alt kategorilerine yerleştirilen 6. sınıf öğrencisi Ö33’ün yanıtı görülmektedir. Ö33’ün yanıtıyla örneklendirilen T1.Sd1 alt kategorisi kapsamında öğrencileri sayı doğrusu modelinde tekrarlama faaliyetinde nicelikten bağımsız bir şekilde parça büyüklüklerini tekrarladıkları görülmüştür. Nihayetinde öğrencinin 0’dan

başlayarak belirlediği bir miktarı parça büyüklüğü olarak 4 kez tekrarlamış ve sayı doğrusunun geri kalan kısmını göz ardı etmiştir. Dolayısıyla kendisinden istenen nicelik üzerinde doğru bir şekilde $\frac{1}{4}$ 'ü yerleştiremeyecektir. Bunun yanı sıra Görsel 4.55.'te görüldüğü gibi 6. sınıf öğrencisi Ö33 parçaları $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ şeklinde sıralamıştır. Dolayısıyla bu durum öğrencinin kesir büyüklüğünü anlamlandıramadığının göstergesidir. Bu yüzden Görsel 4.55.'te görülen Ö33'ün yanıtı aynı zamanda T2.Sd2 alt kategorisi kapsamında “Birimleri doğal sayılarla tanımlayarak tekrarlar ve/veya birim kesri tekrarlayamaz.” şeklinde değerlendirilmiştir. Çünkü öğrencinin zihninde halen kesir büyüklüğünün tekrarlanabilir birim kesirlerden oluşabileceğine yönelik bir bilginin yerleşmediği düşünülmektedir.

Bunun yanı sıra Tablo 4.33.'e göre sayı doğrusu modeli üzerinde tekrarlama faaliyetini uygularken öğrencilerde yaygın olarak görülen diğer güçlük ise Görsel 4.56.'da örneklendirilmiştir.



Görsel 4.56. Tekrarlama faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken Ö146 ile Ö64'ün yaşadığı güçlük

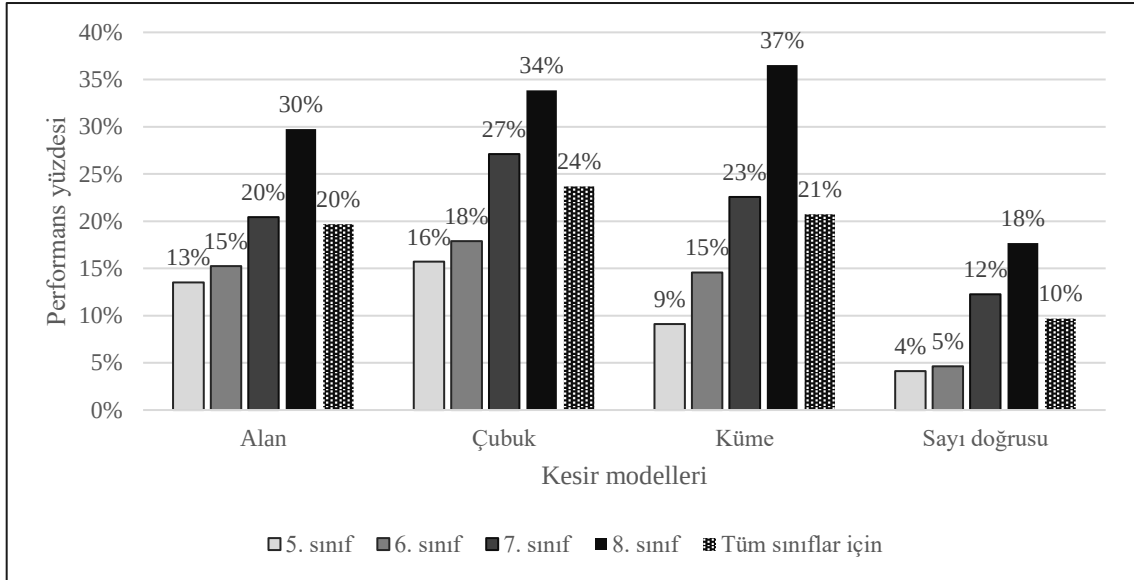
Görsel 4.56.'da sayı doğrusu modeli ile (0-3) aralığında verilen nicelik üzerinde öğrencilerden bu aralık içerisinde kaç tane $\frac{1}{2}$ 'lik birim olduğunu bulmaları istendiğinde tekrarlama faaliyetinde yaşanan güçlük bağlamında T2.Sd1 alt kategorisine yerleştirilen ve yaygın olarak görülen 6. sınıf öğrencisi Ö146 ile 8. sınıf öğrencisi Ö64'ün yanıtları görülmektedir. T2.Sd1 alt kategorisi öğrencilerin tekrarlanabilir birimleri anlamlandırma ve kullanma durumları dikkate alınarak oluşturulmuş ve “Bütün içerisindeki birimleri çarpımsal ilişki kurarak tekrarlayamaz.” şeklinde belirlenmiştir. Görsel 4.56. incelendiğinde her iki öğrencinin de (0-3) aralığından üç tam ve altı yarım şeklinde eş parçalar ürettikleri görülmektedir. Ancak Ö146 ve Ö64 gibi diğer öğrencilerin çoğunda

da (0-3) aralığında kaç tane $\frac{1}{2}$ 'lik birim yani yarım olduğunu bulmaları istendiğinde ya “1 tane” ya da “3 tane” yanıtı ile karşılaşmıştır. Özellikle Görsel 4.56. (a)’daki gibi bu kategoride değerlendirilen öğrenci yanıtlarının çoğunda sayı doğrusu üzerinde tam sayılı kesirleri de gösterdikleri görülmüştür. Dolayısıyla Görsel 4.56.’da verilen her iki örnek incelendiğinde T2.Sd1 alt kategorisinde yer alan öğrencilerin $\frac{1}{2}$ kesrini yalnızca her bütünün içerisinde 1 tane olabilir şeklinde kullandıkları görülmektedir. Bu durum öğrencilerin tam sayılı kesirleri kullansalar dahi bütün içerisindeki birimleri çarpımsal ilişki kurarak $\left(a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}\right)$ tekrarlayamadıklarının yani tekrarlanabilir birim kesir kavramından yoksun olduklarının göstergesidir.

4.2.5. Yinelemeli ayrıştırma (splitting) bağlamında kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Yinelemeli ayrıştırma (splitting) parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin birleşimi olup, bileşik kesirleri anlamlandırmada büyük önem taşımaktadır. Bunun yanı sıra yinelemeli ayrıştırma faaliyeti parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin ardışık/sıralı gerçekleşmesinden ziyade, eş zamanlı olarak aktive edildiği bir zihinsel kesirsel faaliyettir. Aynı zamanda yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin etkili ve doğru bir şekilde içselleştirilmesi parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin birbirinin tersine işleyen eylemleri olduğunun farkında olmayı da gerektirir. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin kullanımını incelemek amacıyla literatürde sıklıkla kullanılan “(herhangi bir nicelik gösterilerek) bu benim çubuğumsa ve benim çubuğum senin çubuğunun beş katı kadar büyüklükteyse senin kendi çubuğunun nasıl olduğunu gösterir misin?” problem araştırmanın veri toplama aracında farklı kesir modelleri ile öğrencilere sunulmuştur. Bunun yanı sıra bileşik kesirler üzerinde çalışmayı gerektiren problem durumları da yinelemeli ayrıştırma faaliyetini değerlendirmek amacıyla veri toplama araçlarına eklenmiştir. Elde edilen bulgulara öğrencilerin yinelemeli ayrıştırma faaliyetini farklı kesir modellerinde sunulan niceliklere uygulamakta zorlandıkları görülmüştür.

Araştırmaya dahil olan katılımcıların yinelemeli ayrıştırma faaliyetini farklı kesir modelleri üzerinde etkili ve doğru uygulamaya ilişkin başarı yüzdelерinin sınıf düzeylerine göre dağılım grafiği Şekil 4.8.’de verilmiştir.



Şekil 4.8. Öğrencilerin yinelemeli ayrıştırma faaliyetini farklı modellere uygulama performansı grafiği

Şekil 4.8. incelendiğinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygulamada tüm düzeyler arasında öğrencilerin sergiledikleri başarı performans yüzdeleri çubuk modelinde %24, küme modelinde %21, alan modelinde %20 ve sayı doğrusu modelinde %10 şeklinde sıralandığı görülmektedir. Elde edilen bulgular sonucunda ortaya çıkan bu oranlara bakıldığında araştırmaya dahil olan öğrencilerin en çok zorlandıkları kesirsel faaliyetin yinelemeli ayrıştırma faaliyeti olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra düzeyler içinde değerlendirildiğinde Şekil 4.8.'e göre alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu olmak üzere tüm modeller üzerinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini doğru bir şekilde uygulayanların oranlarının 5. sınıftan 8. sınıfa doğru artan bir şekilde ilerlediği görülmektedir. Özellikle alan ve küme modellerinde 7. sınıftan 8. sınıfa geçişte; çubuk ve sayı doğrusu modellerinde ise 6. sınıftan 7. sınıfa geçişte gözle görülür artışların olduğu dikkat çekmektedir. Öte yandan araştırma kapsamında incelenen diğer kesirsel faaliyetlerde olduğu gibi yinelemeli ayrıştırma faaliyetinde de öğrencilerin en çok zorlandıkları modelin sayı doğrusu modeli olduğu ortaya çıkmıştır.

Bu bağlamda yapılan içerik analizine göre öğrencilerin yinelemeli ayrıştırma faaliyetini nicelikler üzerinde uygulamada yaşadıkları güçlükler incelenmiş ve Tablo 4.34.'te görüldüğü gibi alan, çubuk ve küme modelleri (Sayı doğrusu modeli için farklı kategoriler ortaya çıkmıştır.) kapsamında iki farklı kategoride sınıflandırılmıştır.

Tablo 4.34. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Kategori	Açıklama
YA1	Nicelik üzerinde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlı kullanamaz.	Nicelik ile kesir büyüklüğünü (yinelemeli) ayrıştıramadığı için parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini ardışık şekilde uygular ve hatalı sonuç elde eder.
YA2	Birimleştirme faaliyetini doğru uygulayamadığı için yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygulayamaz.	Nicelik ile kesir büyüklüğü arasındaki ilişkiyi inşa edemediği için yinelemeli ayrıştırma faaliyetini doğru bir şekilde uygulayamaz.

Tablo 4.34.’te görülen kategoriler oluşturulurken aslında zihinde gerçekleşmesi beklenen yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin öğrencilerin somut eylemlerine nasıl yansıdığı incelenerek oluşturulmuştur. Özellikle ayrıştırma faaliyeti parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin eş zamanlı kullanımını gerektirdiği için, öğrencilerin nicelikler üzerinde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini nasıl uyguladıkları üzerinde odaklanılmıştır. Tablo 4.34.’e göre YA1 olarak sınıflandırılan kategori kapsamında öğrencilerin nicelik ile kesir büyüklüğündeki ilişkiyi zihinlerinde ayrıştıramadıkları için olmaması gereken bir şekilde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlıdan ziyade birbirini izleyen sırada uyguladıklarından sonuca ulaşmakta zorlandıkları görülmüştür. YA2 kategorisi kapsamında ise birimleştirme faaliyetlerini doğru kullanmayan ve bunun sonucunda farklı modeller üzerinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygulamada zorlanan öğrencilerin yanıtları sınıflandırılmıştır.

Araştırma verilerinden elde edilen bulgulara göre yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygulamada yaşanan güçlükler alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri bağlamında ayrı başlıklar altında düzenlenmiştir.

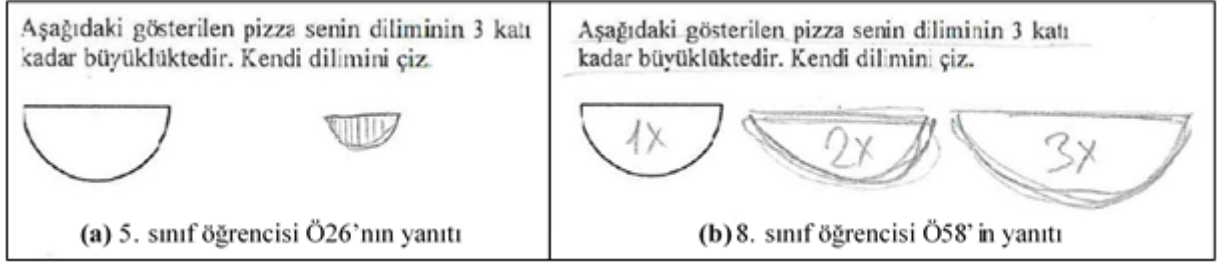
4.2.5.1. Yinelemeli ayrıştırma bağlamında alan modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini alan modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.34.’te verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.35.’te verilmiştir.

Tablo 4.35. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini alan modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
YA1	YA1.A1	Parça büyüklüğünde verilen niceliği ölçeklendirerek büyültür/küçültür.	%34	%33	%25	%34
	YA1.A2	Yalnızca bütün üzerinde işlem yapabilir. Bileşik kesirler üretemez.	%14	%16	%24	%23
	YA1.A3	Parça büyüklüğünde verilen niceliği ayrıştırmadan tekrarlar.	%11	%11	%14	%7
	YA1.A4	Parça büyüklüğünde verilen niceliğin bir kısmını veya tamamını bütün olarak birimleştirir. Parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini ardışık ve tersinir şekilde uygulayarak bileşik kesirleri oluşturabilir.	%13	%6	%7	%8
Ara toplam			%72	%67	%71	%72
YA2	YA2.A1	Parça büyüklüğünde verilen niceliği bütün olarak birimleştirir. Parça bütün yorumunu kullanır.	%23	%26	%24	%22
	YA2.A2	Nicelik üzerinde pay ve paydadaki sayılara göre parça oluşturur.	%5	%8	%5	%6
Ara toplam			%28	%33	%29	%28
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.35. incelendiğinde YA1 kategorisi dört alt kategoriden ve YA2 kategorisi iki alt kategoriden olmak üzere parçalama faaliyetinin alan modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tabloya göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü yaygın olarak YA1 kategorisine göre parçalama ve tekrarlama faaliyetleri eş zamanlı kullanamadıkları yönünde olduğu görülmüştür. YA1 kategorisi altında ise YA1.A1 alt kategorisiyle sınıflandırılan güçlüğü 5. sınıf düzeyinde %34, 6. sınıf düzeyinde %33, 7. sınıf düzeyinde %25 ve 8. sınıf düzeyinde ise %34 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin alan modeliyle sunulan nicelikler üzerinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygularken “Parça büyüklüğünde verilen niceliği ölçeklendirerek büyültür/küçültür.” şeklinde hareket ettikleri dolayısıyla zihinlerinde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlı kullanamadıkları görülmüştür. Görsel 4.57.’de alan modeli üzerinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde sıklıkla rastlanılan YA1.A1 alt kategorisine 5. sınıf öğrencisi Ö26’nın ve 8. sınıf öğrencisi Ö58’in yazılı değerlendirme aracında verdikleri yanıtlar örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.57. Yinelemeli ayırıştırma faaliyetini alan modeline uygularken Ö26 ile Ö58'in yaşadığı güçlük

Görsel 4.57.'de bileşik kesir şeması (BKŞ) kapsamında daire alan modelinde yarım daire şeklinde bir pizza verilip “Bu pizza dilimi senin diliminin 3 katı kadar büyüklükteyse kendi dilimini çiz.” şeklinde bileşik kesir şeması (BKŞ) kapsamında sorulan soruya YA1.A1 alt kategorisine yerleştirilen 5. sınıf öğrencisi Ö26'nın ve 8. sınıf öğrencisi Ö58'in verdikleri yanıtlar görülmektedir. Ö26 ve Ö58'in bu soruda yinelemeli ayırıştırma faaliyetini alan modelindeki niceliğe uygulayamadıkları görülmüştür. Bunun sebebi verilen nicelik ile bulması istenen nicelik arasındaki ilişkiyi kesirsel olarak anlamlandıramaması dolayısıyla parçalama ile tekrarlama faaliyetlerini de eş zamanlı olarak uygulayamamalarıdır. Görsel 4.57.'de görülen ve YA1.A1 alt kategorisi kapsamında değerlendirilen bu yanıtlar özelinde her iki öğrencinin de parçalama ve tekrarlama faaliyetini kullanamadıkları görülmüştür.

Görsel 4.57. (a)'da 5. sınıf öğrencisi Ö26'nın bulunması istenilen kendi çubuğunun büyüklük açısından 3 kat daha büyük olduğunu düşünse de verilen nicelik içerisinde kendi çubuğundan 3 tane olduğunu düşünmeden hareket ettiği görülmektedir. Bu sebeple Ö26 kendi çubuğunu bulmak için verilen yarım daireyi ölçeklendirerek küçültmüştür. Görsel 4.57. (b)'de ise 8. sınıf öğrencisi Ö58'in kendi çubuğunu verilen yarım daire büyüklüğünün “3x” (3 katı) kadar olduğunu belirtmiş ve verilen niceliği ölçeklendirerek büyültmüş olsa da iki farklı niceliğin birbiri içerisinde tekrarlı bir şekilde oluştuğuna dair hiçbir göstergeye diğer yinelemeli ayırıştırma görevlerinde de rastlanmamıştır. Ö26 ile Ö58 gibi aynı şekilde ölçeklendirmeyi (yeniden boyutlandırma) kullanarak yanıt veren öğrencilerin veri toplama aracındaki diğer sorulara verdikleri yanıtlar da göz önüne alındığında bu öğrencilerin parçalama ve tekrarlama kesirsel faaliyetlerini farklı modeller üzerinde uygulamada da genellikle güçlük yaşadıkları görülmüştür. Dolayısıyla parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini nicelikler üzerinde uygun kesir büyüklüklerine

göre uygulamada güçlük çeken öğrencilerin yinelemeli ayrıştırma faaliyetlerinde de zorlandıkları araştırma bulguları arasında dikkat çekmiştir.

4.2.5.2. Yinelemeli ayrıştırma bağlamında çubuk modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

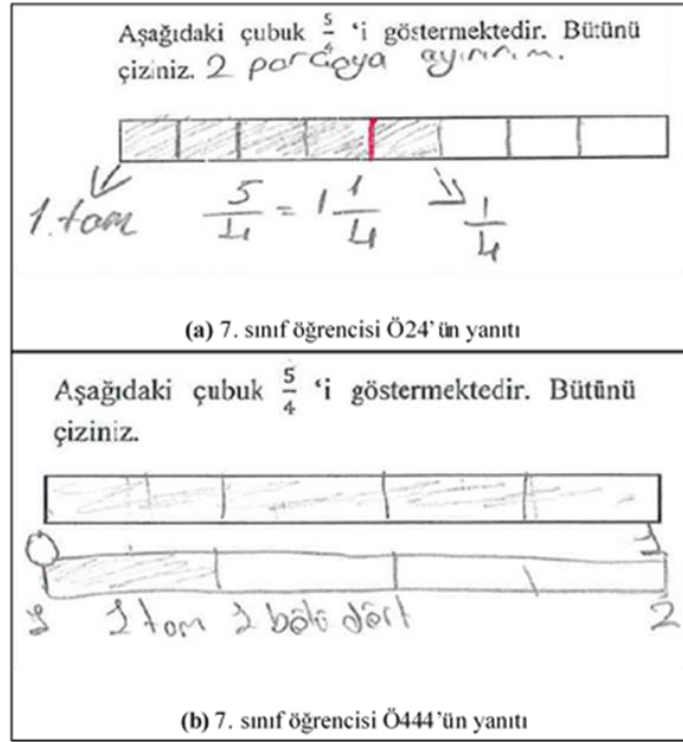
Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini çubuk modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.34.'te verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelерinin dağılımı Tablo 4.36.'da verilmiştir.

Tablo 4.36. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini çubuk modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
YA1	YA1.Ç1	Parça büyüklüğünde verilen niceliğin bir kısmını veya tamamını bütün olarak birimleştirir. Parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini ardışık ve tersinir şekilde uygulayarak bileşik kesirleri oluşturabilir.	%45	%49	%59	%63
	YA1.Ç2	Yalnızca bütün üzerinde işlem yapabilir. Bileşik kesirler üretmez.	%29	%17	%13	%15
Ara toplam			%74	%66	%72	%78
YA2	YA2.Ç1	Parça büyüklüğünde verilen niceliği bütün olarak birimleştirir. Parça bütün yorumunu kullanır.	%19	%32	%18	%15
	YA2.Ç2	Nicelik üzerinde pay ve paydadaki sayılara göre parça oluşturur.	%7	%2	%10	%7
Ara toplam			%26	%34	%28	%22
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.36. incelendiğinde YA1 ve YA2 kategorileri ikişer alt kategoriden olmak üzere yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin çubuk modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tabloya göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğü ağırlıklı olarak YA1 kategorisine göre parçalama ve tekrarlama faaliyetleri eş zamanlı kullanamadıkları yönünde olduğu görülmüştür. YA1 kategorisi altında ise YA1.Ç1 alt kategorisiyle sınıflandırılan güçlüğü giderek artan bir şekilde 5. sınıf düzeyinde %45, 6. sınıf düzeyinde %49, 7. sınıf düzeyinde %59 ve 8. sınıf düzeyinde ise %63 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin çubuk modeliyle sunulan nicelikler üzerinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygularken parça büyüklüğünde verilen niceliğin bir kısmının veya tamamının bütün olarak

birimleştirildiği ve parçalama ile tekrarlama faaliyetlerinin eş zamanlı değil ardışık sıralı şekilde uygulandığı görülmüştür. Görsel 4.58.'de çubuk modeli üzerinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde sıklıkla rastlanılan YA1.Ç1 alt kategorisine 7. sınıf öğrencilerinden Ö24 ile Ö44'ün yazılı değerlendirme aracında verdikleri yanıtlar örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.58. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini çubuk modeline uygularken Ö24 ile Ö44'ün yaşadığı güçlük

Görsel 4.58.'de bileşik kesir şeması (BKŞ) kapsamında çubuk modelinde $\frac{5}{4}$ büyüklüğünde bir niceliğin verildiği ve öğrencilerden bütünü göstermeleri istendiğinde YA1.Ç1 alt kategorisine yerleştirilen 7. sınıf öğrencileri Ö24 ile Ö444'ün verdikleri yanıtlar görülmektedir. Ö24 ve Ö58'in bu soru için yanıtları incelendiğinde öğrencilerin bütün dışında bileşik kesir büyüklüğünde verilen nicelik üzerinde yinelemeli ayrıştırma yapamadıkları görülmektedir. Daha ziyade öğrenciler yalnızca bütün büyüklüğü içerisinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini kullanmışlardır. Ö24 ve Ö444'ün yanıtlarına göre öğrencilerin $\frac{5}{4}$ kesrini hem 1 tam ve $\frac{1}{4}$ 'lük kesir büyüklüğünü içerecek şekilde hem de $\frac{1}{4}$ 'lük birim kesirlerin tekrarlanması şeklinde algıladıkları ve soruda istenen bütünü bulmak için $\frac{5}{4}$ kesir büyüklüğüne yinelemeli ayrıştırma faaliyetini

uygulamışlardır. Ancak $5/4$ kesir büyüklüğünü ayırıştırmanın yanında öğrencilerden çubuk modelinde verilen nicelik büyüklüğüne de yinelemeli ayırıştırma faaliyetini uygulamaları beklenmekteydi. Oysaki her iki öğrencinin de ayırıştırma faaliyetini yalnızca bütün büyüklüğünün niceliği ile ilişkilendirebildikleri görülmüştür. Daha açık bir ifadeyle Görsel 4.58. (a)'ya göre Ö24 öncelikle bileşik kesir olan $5/4$ 'e yinelemeli ayırıştırma faaliyetini uygulamış ve 1 bütünden fazla 2 bütünden küçük olduğunun farkındalığı ile verilen niceliği 2 bütün olarak tanımlamıştır. Öğrencinin bunu yapmasındaki sebep 1 bütün ile 1 tane $1/4$ 'lük kesir parçasını göstermek için 2 bütüne ihtiyacı olduğunu hissetmesi ve bütünün büyüklüğünü zihninde canlandıramamasıdır. Ancak Ö24 bütünü görebildiği ve zihninde canlandırabildiği zaman, öncelikle nicelik üzerinde bütünü parçalayabilmiş ve ardından birim kesir parçalarını tekrarlayarak bütünden bileşik kesir büyüklüğünü oluşturabilmiştir.

Benzer şekilde Görsel 4.58. (b)'ye göre Ö444 kesir büyüklüğünü zihninde ayırıştırabilmiş olsa da Ö24 gibi “bütünü somut olarak görmeden” parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini uygulayamamıştır. Bu yüzden Ö444 verilen niceliği bütün olarak algılamış ve niceliğin büyüklüğüne eş başka bir bütünü de kendisi oluşturarak Ö24 gibi parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini ardışık sıralı şekilde uygulayabilmiştir. Bu bağlamda ortaokul öğrencilerinin yinelemeli ayırıştırma faaliyetini çubuk modeline uygulamada yaşadıkları en yaygın güçlüğü model üzerinde verilmeyen bütünü zihinlerinde canlandıramamalarından kaynaklandığı tespit edilmiştir. Nihayetinde öğrencilerin çoğunda bütün olarak verilen nicelikler üzerinde yinelemeli ayırıştırma faaliyetini gerçekleştirdikleri ve buna bağlı olarak bileşik kesirleri oluşturabildikleri görülmüştür.

4.2.5.3. Yinelemeli ayırıştırma bağlamında küme modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Yinelemeli ayırıştırma faaliyetini küme modeline uygularken yaşanan güçlükler Tablo 4.34.'te verilen kategoriler kapsamında alt kategorilere sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerine göre karşılaşılan frekans yüzdelерinin dağılımı Tablo 4.37.'de verilmiştir.

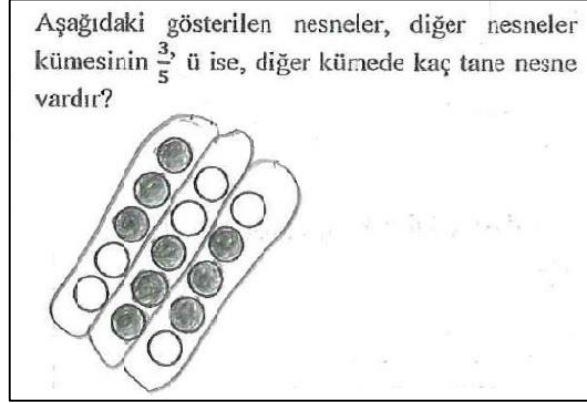
Tablo 4.37. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini küme modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Alt kategori no	Alt kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
YA1	YA1.K1	Parça büyüklüğünde verilen niceliğin bir kısmını veya tamamını bütün olarak birimleştirir. Parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini ardışık ve tersinir şekilde uygulayarak bileşik kesirleri oluşturabilir.	%7	%7	%4	%13
Ara toplam			%7	%7	%4	%13
YA2	YA2.K1	Nicelik üzerinde pay ve paydadaki sayılara göre parça seçer.	%57	%53	%49	%28
	YA2.K2	Parça büyüklüğünde verilen niceliği bütün olarak birimleştirir. Parça bütün yorumunu kullanır.	%20	%25	%38	%53
	YA2.K3	Parça büyüklüğünde verilen nicelik üzerinde paydadaki sayı kadar tekil birimi bütün olarak birimleştirir. Parça bütün yorumunu kullanır.	%15	%15	%9	%7
Ara toplam			%93	%93	%96	%87
Toplam			%100	%100	%100	%100

Tablo 4.37. incelendiğinde YA1 kategorisi bir alt kategoriden ve YA2 kategorisi üç alt kategoriden olmak üzere yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin küme modelinde yaşanan güçlükleri temsil edecek şekilde sınıflandırıldığı görülmektedir. Tabloya göre tüm sınıf düzeylerinde yaşanan güçlüğün ağırlıklı olarak YA2 kategorisine göre birimleştirme faaliyetinin doğru uygulanmamasından kaynaklandığı görülmüştür. YA2 kategorisi altında ise YA2.K1 alt kategorisiyle sınıflandırılan güçlüğe giderek azalan şekilde 5. sınıf düzeyinde %57, 6. sınıf düzeyinde %53, 7. sınıf düzeyinde %49 ve 8. sınıf düzeyinde ise %28 oranında rastlanılmıştır. Bu alt kategoriye göre öğrencilerin küme modeliyle sunulan nicelikler üzerinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygularken nicelik ile kesri büyüklüğü arasındaki ilişkiyi birimleştirmedikleri ve “Nicelik üzerinde pay ve paydadaki sayılara göre parça seçer.” şeklinde hareket ettikleri görülmüştür. Bu durumun diğer kesirsel faaliyetlerinde küme modeli üzerindeki uygulamalarıyla benzer özellikler içermektedir.

Bu durumun yanı sıra ortaokul öğrencilerinde diğer yaygın olarak karşılaşılan güçlüğün ise YA2.K2 alt kategorisi bağlamında ortaya çıktığı görülmüştür. YA2.K2alt kategorisi yine birimleştirme faaliyetinden kaynaklandığı düşünülerek “Parça büyüklüğünde verilen niceliği bütün olarak birimleştirir. Parça bütün yorumunu kullanır.” şeklinde tanımlanmıştır. Bu kategoriye ise 5. sınıf düzeyinden 8. sınıf düzeyine doğru YA2.K1’in aksine giderek artan şekilde sırasıyla %20, %25, %28 ve %53 oranlarında

rastlanılmıştır. Görsel 4.59.'da küme modeli üzerinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde sıklıkla rastlanılan YA2.K2 alt kategorisine 6. sınıf öğrencilerinden Ö136'nın yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.59. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini küme modeline uygularken Ö136'nın yaşadığı güçlük

Görsel 4.59.'da tersinir parça kesir şeması (TPKŞ) kapsamında $\frac{3}{5}$ büyüklüğünde nesneler topluluğunun verilip bütünün bulunması istendiğinde YA2.K2 alt kategorisine yerleştirilen 6. sınıf öğrencisi Ö136'nın verdiği yanıt görülmektedir. Bu soru kapsamında öğrencilerden beklenen $\frac{3}{5}$ kesir büyüklüğünden $\frac{5}{5}$ kesir büyüklüğünü eş zamanlı parçalama ve tekrarlama faaliyetleriyle (yinelemeli) ayrıştırabilmeleri ve nicelik üzerinde ise bu durumu somut olarak gösterebilmeleridir. Ancak Görsel 4.59.'da 6. sınıf öğrencisi Ö136'nın yanıtı incelendiğinde öğrencinin $\frac{3}{5}$ parça büyüklüğünde verilen 15 nesneyi bütün olarak belirlediği ve görseldeki gibi 5'erli olarak oluşturduğu gruplardan 3'er tane nesneyi ayırarak parça bütün yorumunu kullandığı ve bütün dışında verilen nicelik büyüklüğünden bütünün büyüklüğünü ayrıştıramadığı görülmüştür. Elde edilen bulgulara göre parça büyüklüğünden bütün oluşturma ve bileşik kesirlerle çalışmayı gerektiren durumlarda öğrencilerin yinelemeli ayrıştırma faaliyetini hem küme modeli üzerinde hem de ayrık model özelliğinden dolayı birimleştirme yoksunluğundan kesir büyüklükleri üzerinde uygulayamadıkları tespit edilmiştir. Özellikle niceliğin temsil ettiği büyüklüğün göz ardı edilerek küme modelinde genellikle yinelemeli ayrıştırma faaliyeti gibi diğer kesirsel faaliyetleri uygulamada yaşanan güçlüklerin çoğunun ortak olduğu dikkat çekmiştir.

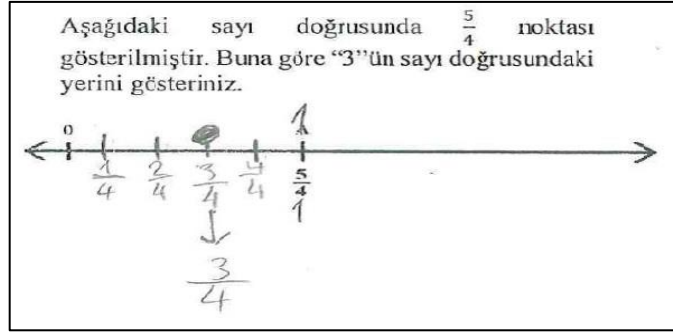
4.2.5.4. Yinelemeli ayrıştırma bağlamında sayı doğrusu modeli üzerinde yaşanan güçlüklerle ilişkin bulgular

Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken yaşanan güçlükler kategorilere göre sınıflandırılmış ve sınıf düzeylerinde karşılaşılan frekans yüzdelerinin dağılımı Tablo 4.38.'de verilmiştir.

Tablo 4.38. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetini sayı doğrusu modelinde uygulamada karşılaşılan güçlükler

Kategori no	Kategori	5. sınıf	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
YA.Sd1	Doğal sayı yanılgısı sebebiyle yinelemeli ayrıştırma faaliyetini bileşik kesir üzerinde uygulayamaz.	%72	%73	%70	%77
YA.Sd2	Parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlı kullanamıyor. Ancak bu iki faaliyeti ardışık ve tersinir şekilde uygulayarak bileşik kesirleri oluşturabilir.	%28	%27	%30	%23
Toplam		%100	%100	%100	%100

Tablo 4.38. incelendiğinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin sayı doğrusu modeli üzerinde uygularken yaşanan güçlükler iki kategoride sınıflandırılmıştır. Tabloya göre YA.Sd1 kategorisinde yer alan “Doğal sayı yanılgısı sebebiyle yinelemeli ayrıştırma faaliyetini bileşik kesir üzerinde uygulayamaz.” durumundan kaynaklı yaşanan güçlüğü tüm sınıf düzeylerinde ağırlıklı olarak ortaya çıktığı görülmüştür. YA.Sd1 kategorisine 5. sınıf düzeyinde %72, 6. sınıf düzeyinde %73, 7. sınıf düzeyinde %70 ve 8. sınıf düzeyinde %77 oranında rastlanılmıştır. Bunun yanı sıra YA.Sd2 kategorisinde tanımlanan “Parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlı kullanamıyor. Ancak bu iki faaliyeti ardışık ve tersinir şekilde uygulayarak bileşik kesirleri oluşturabilir.” güçlüğüne 5. sınıftan 8. sınıf düzeyine sırasıyla %28, 6. sınıf düzeyinde %27, 7. sınıf düzeyinde %30 ve 8. sınıf düzeyinde ise %23 oranında rastlanılmıştır. Öğrencilerin sayı doğrusu modeli üzerinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygularken yaşanan güçlüklerle ilişkin öğrencilerde en yaygın olarak ortaya çıkan YBA.Sd2 kategorisine 6. sınıf öğrencisi Ö16’nın yazılı değerlendirme aracında verdiği yanıt Görsel 4.60.’ta örnek olarak verilmiştir.



Görsel 4.60. Yinelemeli ayırıştırma faaliyetini sayı doğrusu modeline uygularken Ö16'nın yaşadığı güçlük

Görsel 4.60.'ta bileşik kesir şeması (BKŞ) kapsamında üzerinde 0 ile $\frac{5}{4}$ 'ün yerleştirildiği bir sayı doğrusu modelinin verilirken öğrencilerden “3” tam sayısını sayı doğrusu üzerinde göstermeleri istendiğinde 6. sınıf öğrencisi Ö16'nın verdiği yanıt görülmektedir. Bu soru kapsamında öğrencilerden beklenen $\frac{5}{4}$ bileşik kesir büyüklüğünden eş zamanlı olarak bir tam veya bir $\frac{1}{4}$ kesir büyüklüğünün ayırıştırılması ve bu zihinsel süreç sonucunda “3” tam sayısının doğru bir şekilde yerleştirilmesidir. Ancak elde edilen bulgulara göre Ö16 gibi aynı kategoride yer alan öğrencilerin sayı doğrusu modeli üzerinde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlı olarak yapmadıkları ve $\frac{5}{4}$ kesir büyüklüğünden “3” tam sayısını ayırıştırılamadan Görsel 4.60.'taki gibi “ $\frac{3}{4}$ ”ü gösterdikleri tespit edilmiştir. Nitekim yukarıda verilen görsele göre Ö16 bütün içerisinde özdeş parçalar oluşturabilmiş ancak oluşan bu birim parçaları 3 tam sayısına kadar tekrarlayamadığı görülmüştür. Dolayısıyla eş zamanlı bir parçalama ve tekrarlama faaliyeti söz konusu olmamakla birlikte bütünü görmeden veya canlandırmadan da bileşik kesir oluşturamadığı görülmüştür.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırma problemleri bağlamında incelenen kesir şemaları ve kesirsel faaliyetlere ilişkin elde edilen bulgular doğrultusunda ulaşılan sonuçlara maddeler halinde özetlenerek yer verilmiştir.

5.1. Sonuç

5.1.1. Kesir şemalarına ilişkin sonuçlar

Araştırma kapsamında incelenen şemaların gelişim süreçlerinde birbirleriyle iç içe oldukları görülmüştür. Bu durumun sebebinin farklı şemalar bağlamında ortak kesirsel faaliyetlerin kullanılması ve faaliyetlerin farklı modeller üzerine uygulanabilmesindeki gelişim süreçlerinin halen devam etmesi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ancak şemanın gelişmesiyle diğer şemalardan ayrık olarak ortaya çıktığı görülmüştür. Nitekim eş parçalama şeması (EPŞ) gelişen öğrencilerin aynı anda parçalama şemasını (APŞ) kullanmadıkları ve hatta APŞ şeması dahilinde bilgi kullanımının söndüğü söylenebilir. Benzer şekilde parça kesirler üzerinde çalışılan durumlarda daha gelişmiş faaliyetleri içeren parça kesir şeması (PFS) gelişmiş öğrencilerin artık parça bütün şemasını (PBŞ) kullanmadıkları ve parça kesir ile bütünü karşılaştırılması gereken problem durumlarında öğrencilerin artık sadece PFS şemasını kullanarak problemleri çözdükleri sonucuna ulaşılmıştır.

Öte yandan araştırma kapsamında incelenen farklı gelişmişlik düzeylerine sahip olan yedi farklı şema kapsamında farklı kesir modelleri üzerinde çalışabilen öğrencilere yalnızca 7. sınıf düzeyinde rastlanılmıştır. 5 sınıf öğrencilerinin kesirsel faaliyetleri en temel düzeyde uyguladıkları için aynı anda parçalama şeması (APŞ), parça bütün şeması (PBŞ) ve bileşik kesir şeması (BKŞ) bağlamında farklı modeller üzerinde çalışmadıkları ve bu şemalar dahilinde gelişim süreçlerini tamamlayamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. 6. sınıf düzeyinde ise benzer şekilde kesirsel faaliyetleri temel düzeyde uyguladıklarından dolayı aynı anda parçalama şeması (APŞ) ve parça bütün şeması (PBŞ) bağlamında farklı kesir modelleri üzerinde çalışmadıkları için bu şemalar dahilinde gelişim sürecini tamamlayamayan öğrencilerin ağırlıklı olduğu görülmüştür. 8. sınıf düzeyinde ise aynı anda parçalama şeması (APŞ) dahilinde gelişim sürecini tamamlayan öğrencilerin olmadığı ve bu öğrencilerin daha gelişmiş şemalar için gelişim sürecinde olan oranlarla

yer deşiştirdiği dolayısıyla diğer sınıf düzeylerine göre kesirsel faaliyetleri uygulama düzeylerinin geliştiği sonucuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda aynı anda parçalama şeması (APş) haricinde araştırma kapsamında incelenen şemaların 5. sınıftan 8. sınıf düzeyine doğru giderek geliştiği sonucuna ulaşılmıştır. Elde edilen bulgular özel olarak parça bütün şeması (PBş), eş parçalama şeması (EPş), parçalı birim kesir şeması (PBKş) ve tersinir parça kesir şeması (TPKş) bağlamında 5. sınıftan 6. sınıfa geçerken; parça kesir şeması (PKş) ve bileşik kesir şeması (BKş) bağlamında ise 6. sınıftan 7. sınıfa geçerken gelişimin daha hızlı olduğunu göstermiştir.

Ayrıca ğrencilerin TPKş kapsamında sorulan soruları yanıtlarken aritmetik ve cebirsel işlemlerden faydalandıkları takdirde kesirsel faaliyetleri daha kolay uygulayabildikleri görülmüştür. Ancak PKş kapsamında sorulan sorularda bu durumdan faydalanamadıkları görülmüştür. Bunun sebebi öğrencilerin kesirler konusunu ortaokul matematik ğretim programında yer alan kazanımlar doğrultusunda öğrenmeleridir. Özellikle 5. sınıfta “Bir çokluğun istenen basit kesir kadarını ve basit kesir kadarı verilen bir çokluğun tamamını birim kesirlerden yararlanarak hesaplar.” kazanımı doğrultusunda parça kesir büyüklüğünde verilen bir nicelikten yola çıkarak bütünü oluşturmaları TPKş kapsamında istendiğinde öğrencilerin bu şekilde hareket etmelerinin kaçınılmaz olduğu görülmüştür. Bununla birlikte ğrencilerin TPKş bağlamında aritmetik ve cebirsel işlemlerden faydalanmaları durumunun PKş şeması kapsamında ortaya çıkmaması dikkat çekmiştir.

Araştırma kapsamında incelenen aynı anda parçalama şeması (APş) ve eş parçalama şeması (EPş) olmakzere parçalara ayırma şemaları, parça bütün şeması (PBş), parçalı birim kesir şeması (PBKş), parça kesir şeması (PKş), tersinir parça kesir şeması (TPKş) ve bileşik kesir şeması (BKş) olmakzere yedi farklı şemaya ilişkin sonuçlara ayrı başlıklar altında yer verilmiştir.

5.1.1.1. Parçalara ayırma şemalarına (APş ve EPş) ilişkin sonuçlar

- Aynı anda parçalama şeması (APş) kapsamında öğrenciler alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modellerizerinde birimleştirme ve parçalama kesirsel faaliyetlerini temel düzeyde kullanarak uygulayabilmişlerdir.

▪ APŞ kapsamında öğrenciler bütün içerisindeki parça sayısını ölçüt alarak parça ile bütünü birim kesirlerden ziyade doğal sayı birimleriyle tanımlayarak (1, 2, 3 ... 7 veya 7 parçadan 1 tanesi gibi) birimleştirmişlerdir.

▪ APŞ kapsamında değerlendirilen öğrencilerin tekrarlama faaliyetinin yoksunluğundan dolayı birim kesirleri bütün içerisine tekrarlı olarak yerleştirememiş ve kesir dilini etkili bir şekilde kullanmakta zorlanmışlardır. Örneğin, öğrencilerin çoğunda belli bir bütünü eşit parçalara ayırmış olsalar dahi parçaları $(1, 2, 3, 4 \text{ veya } \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ şeklinde tanımladıkları görülmüştür. APŞ'si gelişmiş öğrencilerde ise kesir büyüklüklerini doğru kullansalar dahi a/b kesir büyüklüğünü anlamlandırırken paydayı parçaların toplam sayısı, payı ise parçaların sıra sayısı olarak temsil ettikleri görülmüştür. Örneğin, paydası 4 olan kesir büyüklüklerinde $\frac{1}{4}$ kesri 4 parçadan birinci parçayı, $\frac{2}{4}$ kesri 4 parçadan ikinci parçayı temsil ederken, $\frac{2}{4}$ kesrini $\frac{1}{4}$ kesrinin 2 kez tekrarlanması sonucunda oluşabileceğini anlamlandıramamışlardır.

▪ APŞ kapsamında öğrenciler sürekli kesir modelleri üzerinde parçalar oluştururken ardışık/sıralı kesme işlemleriyle parçalama faaliyetini uygulamışlardır. Aynı zamanda sürekli modeller üzerinde parçalama yaparken ürettikleri parçaların büyüklüklerinin özdeş olduğunu kendilerine veya başkalarına doğrulama ihtiyacı duymamışlardır. Aynı zamanda APŞ kapsamında değerlendirilen öğrencilerin çoğu küme modeli içerisinde ayrıık olarak verilen nesneler üzerinde sürekli modelde kullandıkları parçalama faaliyetlerini uygulamışlardır.

▪ APŞ bağlamında 5., 6. ve 7. sınıf düzeyindeki öğrencilerin neredeyse yarısının en fazla başarı gösterdikleri model çubuk modeli iken; 8. sınıf düzeyindeki öğrencilerin çoğunun en fazla başarı gösterdikleri model ise küme modeli olmuştur. Ayrıca bu şema kapsamında öğrencilerin büyük çoğunluğunun alan ve sayı doğrusu modellerinde zorlandıkları görülmüştür. Bu durumun alan modelinde daire şeklinin kullanılması ve lineer olmayan nesneler üzerinde parçalama faaliyetini uygulamakta zorlanmalarından kaynaklandığı sonucuna ulaşılmıştır. Sayı doğrusu modelindeki durumun ise tekrarlama faaliyetinin yoksunluğu ve birimleştirme faaliyetinin temel düzeyde kullanılmasından kaynaklandığı sonucuna ulaşılmıştır.

▪ Araştırmaya dahil olan 557 katılımcıdan APŞ ile uyumlu birimleştirme ve parçalama faaliyetlerini alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde etkili bir şekilde uygulayarak ilgili soruların hepsine doğru yanıt veren ve APŞ'si gelişmiş olarak

değerlendirilen öğrencilere yalnızca 7. sınıf düzeyinde rastlanılmıştır. APŞ şeması için halen gelişim sürecinde olan öğrencilerin ise 5. sınıftan 8. sınıfa doğru aşamalı olarak ve özellikle 5. sınıftan 6. sınıfa geçerken gözle görülür bir farkla azaldığı görülmüştür.

- Eş parçalama şeması (EPŞ) kapsamında ise öğrenciler alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde birleştirme, parçalama, yerleşik bütünden ayırma ve tekrarlama kesirsel faaliyetlerini etkili ve doğru bir şekilde uygulayabilmişlerdir.

- EPŞ kapsamında öğrenciler birleştirme faaliyetini APŞ'ye göre daha gelişmiş biçimde kullanmışlardır. Nitekim öğrenciler APŞ'de parçaların büyüklüklerini bütünden ayrıca ele alamazken, EPŞ'de yalnızca bütünü değil aynı zamanda bütün içerisindeki her bir parçanın büyüklüğüne de birim ölçüsü atayabilmişlerdir. Örneğin belli bir bütün içerisindeki parçaları 1, 1, 1, 1 şeklinde “1” birimleriyle veya $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ şeklinde birim kesirlerle gösterebilmişlerdir. Bu durumla birlikte EPŞ bağlamında öğrencilerin tekrarlanabilir birim veya tekrarlanabilir birim kesir kavramını anlamlandırdıkları görülmüştür.

- EPŞ bağlamında öğrenciler sürekli modeller üzerinde parçalama faaliyetlerini nicelik büyüklüğünü dikkate alarak aynı anda değil özenli bir şekilde bazen birkaç kez deneyerek gerçekleştirmişlerdir. Ayrıca belli bir bütün üzerinde ürettikleri parçaların büyüklüklerinin özdeş olduğundan emin olmak ve kendi yanıtlarını doğrulamak için kimi zaman uzunluk kimi zaman açı kimi zaman başka bir birim ölçüsünü kullanarak modelin özelliğinden faydalanmışlardır. EPŞ bağlamında öğrenciler küme modeli üzerindeki parçalama faaliyetlerini ise genellikle tekrarlı dağıtma (ayrık nesneler bitene kadar) veya (1/5 kesri için her 5 nesneden 1'i bir grup şeklinde) gruplandırarak ayırma yöntemlerini kullanarak gerçekleştirmişlerdir.

- EPŞ bağlamında öğrencilerin birleştirme ve tekrarlama faaliyetlerini etkili ve doğru kullanmaları sayesinde bütünün içerisinde yerleşik olan parçaları bütünü bozmadan ayırabildikleri ve bütün dışında da başlı başına bir büyüklük olarak tanımlayabildikleri görülmüştür. Örneğin, bazı öğrencilerin model üzerinde 1/7'lik kesir büyüklüğünü gösterirken 7 birimden oluşan bütün içerisinde herhangi birisini seçip bütünden ayırdıkları ve halen bütünü 7 birim olarak korudukları görülmüştür. Aynı zamanda bütünün içerisindeki parçaların özdeş büyüklükte olduğunu doğrulamak amacıyla bütünde yerleşik olan birimlerden birini ayırıp orijinal bütünün büyüklüğünü oluşturan dek tekrarladıkları görülmüştür.

▪ EPŞ bağlamında tüm sınıf düzeylerinde öğrencilerin çoğunun en fazla başarı gösterdikleri modelin alan modeli olduğu görülmüştür. Bununla birlikte EPŞ’de 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin neredeyse yarısı çubuk ve küme modellerinde başarı gösterilirken, 5. sınıf öğrencilerin ise büyük çoğunluğunun bu modellerde zorlandıkları tespit edilmiştir. Bunun sebebinin 5. sınıf öğrencilerinin genellikle tekrarlama ve birleştirme faaliyetlerinin henüz gelişmediğinden veya eksik kullanımlarından kaynaklandığı sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca APŞ gibi EPŞ şemasında da kesirsel faaliyetleri uygulamada en çok zorlanılan modelin tüm sınıf düzeylerinde sayı doğrusu modeli olduğu tespit edilmiştir.

▪ Araştırmaya dahil olan 557 katılımcıdan EPŞ ile uyumlu birleştirme, parçalama, yerleşik bütünden ayırma ve tekrarlama faaliyetlerini alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde etkili bir şekilde uygulayarak ilgili soruların hepsine doğru yanıt veren ve EPŞ’si gelişmiş olarak değerlendirilen öğrencilere tüm sınıf düzeylerinde rastlanılmıştır. EPŞ şeması için halen gelişim sürecinde olan öğrencilerin ise 5. sınıftan 8. sınıfa doğru aşamalı olarak ve özellikle 5. sınıftan 6. sınıfa geçerken gözle görülür bir farkla arttığı görülmüştür.

▪ Ortaokul düzeyinde 5. sınıftan 8. sınıf düzeyine gidildikçe birbirine yakın oranlarla APŞ şemasının yerini EPŞ şemasına bıraktığı görülmüştür. Dolayısıyla araştırmada elde edilen bulgular, parçalara ayırma şemaları bağlamında kesirsel faaliyetlerin gelişmesi ve APŞ şemasının yeniden düzenlenmesi ile ortaokulda APŞ şemasından EPŞ şemasına doğru bir gelişimin mevcut olduğunu göstermiştir.

5.1.1.2. Parça bütün şemasına (PBŞ) ilişkin sonuçlar

▪ Parça bütün şeması (PBŞ) kapsamında öğrenciler alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde birleştirme, parçalama ve yerleşik bütünden ayırma kesirsel faaliyetlerini temel düzeyde kullanarak uygulayabilmişlerdir. Bunun yanı sıra PBŞ şemasının APŞ şemasından farkının birim kesir olmayan parça kesir büyükleri ile çalışabilmeleri ve yerleşik bütünden ayırma faaliyetini temel düzeyde de olsa kullanabilmeleri olduğu tespit edilmiştir.

▪ PBŞ kapsamında öğrenciler birleştirme faaliyetini APŞ’deki gibi yalnızca bütünü parçalardan oluşan bir birim olarak tanımlayarak temel düzeyde kullanmışlardır. Bununla birlikte öğrencilerin çoğunun parçalara başlı başına bir birim ölçüsü atamadan

parçaları bütüne ait ve 1, 2, 3... gibi veya 5 tane parçadan 1'i şeklinde doğal sayılarla tanımlayarak birimleştirdikleri görülmüştür. Bütünün içerisindeki parçaları kesir büyüklükleriyle temsil eden öğrenciler ise her bir parçayı tekrarlanabilir birim kesir şeklinde tanımlamaktan ziyade toplamsal ilişki bağlamında parça sırasını temsil edecek şekilde kullanmışlardır. Örneğin, paydası 5 olan kesir büyüklüklerinde $1/5$ kesri 5 parçadan birinci parçayı, $2/5$ kesri 5 parçadan ikinci parçayı ve ilk iki parçanın toplam büyüklüğünü temsil ederken, $2/5$ kesrini $1/5$ kesrinin 2 kez tekrarlanması sonucunda oluşabileceğini anlamlandıramamışlardır.

- PBŞ kapsamında öğrenciler APŞ'deki gibi sürekli kesir modelleri üzerinde parçalar oluştururken ardışık/sıralı kesme işlemleriyle parçalama faaliyetini uygulamışlardır. Aynı zamanda sürekli modeller üzerinde parçalama yaparken ürettikleri parçaların büyüklüklerinin özdeş olduğunu kendilerine veya başkalarına doğrulama ihtiyacı duymamışlardır. Ayrıca PBŞ kapsamında değerlendirilen öğrencilerin küme modeli üzerinde parçalama faaliyetini uygularken payda bütündeki parça sayısını ve pay seçilecek parça sayısını temsil edecek şekilde hareket ettikleri ve bu yüzden genellikle aritmetik işlemlerden faydalanarak küme modelinde sunulan bütünü parçalara ayırdıkları görülmüştür.

- PBŞ bağlamında öğrencilerin yerleşik bütünden ayırma faaliyetini gerçekleştirirken parça ile bütün arasındaki nicelik ilişkisinin genellikle göz ardı edildiği tespit edilmiştir. Daha ziyade PBŞ bağlamında yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin bütündeki parça sayısından istenen parça sayısının ayrılması şeklinde gerçekleştirildiği, yine de bu süreçte bütünün bozulmadığı ancak bütünden ayrılan parça büyüklüklerinin her zaman korunmadığı görülmüştür.

- PBŞ bağlamında tüm sınıf düzeylerinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun en fazla başarı gösterdikleri model çubuk modeli iken; yine tüm sınıf düzeylerinde en az başarı gösterilen model ise sayı doğrusu modeli olmuştur. Bununla birlikte 5. sınıf düzeyinden 8. sınıf düzeyine gidildikçe öğrencilerin PBŞ bağlamında alan ve küme modellerindeki başarılı uygulamalarının birbiriyle paralel olarak arttığı tespit edilmiştir.

- Araştırmaya dahil olan 557 katılımcıdan PBŞ ile uyumlu birimleştirme, parçalama ve yerleşik bütünden ayırma faaliyetlerini alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde etkili bir şekilde uygulayarak ilgili soruların hepsine doğru yanıt veren ve PBŞ'si gelişmiş olarak değerlendirilen öğrencilere yalnızca 7. ve 8. sınıf düzeylerinde rastlanılmıştır. PBŞ şeması için halen gelişim sürecinde olan öğrencilerin ise 5. sınıftan

8. sınıfa doğru aşamalı olarak ve özellikle 5. sınıftan 6. sınıfa geçerken gözle görülür bir farkla arttığı görülmüştür. Dolayısıyla 5. sınıftan 8. sınıfa kadar öğrencilerin PBŞ şeması ile uyumlu kesirsel faaliyetleri farklı kesir modelleri üzerinde uygulama başarısı artmış olsa da kesir modellerinin hepsinde kesirsel faaliyetleri uygulamada etkili olmadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

5.1.1.3. Parçalı birim kesir şemasına (PBKŞ) ilişkin sonuçlar

- Parçalı birim kesir şeması (PBKŞ) kapsamında öğrenciler alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde birimleştirme ve tekrarlama kesirsel faaliyetlerini kesir dilini aktif ve doğru kullanarak uygulayabilmişlerdir.

- PBKŞ kapsamında öğrenciler birimleştirme faaliyetini hem parçaların büyüklükleri açısından tekrarlanabilir birim, hem de birim kesirler ($1/b$) ile bütün (b/b) arasındaki ilişkisi açısından tekrarlanabilir birim kesir kavramlarını anlamlandırarak modeller üzerinde uygulayabilmişlerdir. Bu bağlamda öğrencilerin hem parçalara hem de bütüne birbirinden ayrı ancak aynı zamanda da birbiriyle ilişkili ölçü birimlerinin atandığı görülmüştür.

- PBKŞ kapsamında tekrarlama faaliyetinin bütünün içerisinde özdeş parçaların üretilmesi ve birim parçalardan orijinal bütünün yeniden oluşturulması amaçlarıyla farklı modeller üzerinde somut olarak uygulandığı görülmüştür. Bununla birlikte birim kesirlerin bütünün büyüklüğü içerisinde tekrarlı bir şekilde yerleştirilmesi de tekrarlama faaliyetinin öğrencilerin zihninde modeli görmeden içselleştirildiği tespit edilmiştir. Nitekim bu durumun en basit göstergesi öğrencilerin “bütünün içinde dört çeyrek veya iki yarım var” şeklindeki ifadeleridir.

- PBKŞ bağlamında öğrenciler birim parçanın bütünün büyüklüğüne oranını bulmak için sürekli kesir modelleri üzerinde ürettikleri parçaların özdeşliğinden emin olmak için parçaların birebir kopyalarını bütünün büyüklüğüne tekrarlamışlardır. Öte yandan PBKŞ’de küme modeli üzerinde ise kimi zaman birim kesir ölçülerini (10 nesnenin $5/5$ ile temsil edildiği bütünde 2’şer nesneden oluşan birimleri $1/5$ ’lik ölçülerde tekrarlama) kimi zaman da parça kesir büyüklüklerini (10 nesnenin $5/5$ ile temsil edildiği bütünde her 5 nesneden 1’inin seçili olduğu 5’erli grupları $5/5$ ’lik büyüklüklerde tekrarlama) nicelik üzerinde tekrarlamışlardır.

▪ PBKŞ bağlamında tüm sınıf düzeylerinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun en fazla başarı gösterdikleri model çubuk modeli iken; yine tüm sınıf düzeylerinde en az başarı gösterilen model ise sayı doğrusu modeli olmuştur. Ancak PBKŞ ile uyumlu faaliyetler göstererek 8. sınıf düzeyindeki öğrencilerin neredeyse çeyreğinin sayı doğrusu modeli üzerinde gösterdikleri başarının APŞ, EPŞ ve PBŞ şemalarının bu model üzerindeki başarıyla kıyaslandığında aralarında önemli bir fark olduğu görülmüş ve sayı doğrusu modelinin PBKŞ şemasının gelişiminde önemli olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sayılar ve ölçme alt öğrenme alanındaki anlamlı öğrenmeler için büyük önem taşıyan sayı doğrusu modeli açısından şemalar arasında ortaya çıkan bu farkın tekrarlama faaliyeti ile tekrarlanabilir birim kesir kavramının içselleştirilmesi sayesinde olduğu düşünülmektedir.

▪ Araştırmaya dahil olan 557 katılımcıdan PBKŞ ile uyumlu birimleştirme ve tekrarlama faaliyetlerini alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde etkili bir şekilde uygulayarak ilgili soruların hepsine doğru yanıt veren ve PBKŞ'si gelişmiş olarak değerlendirilen öğrencilere tüm sınıf düzeylerinde rastlanılmıştır. PBKŞ şeması için halen gelişim sürecinde olan öğrencilerin ise 5. sınıftan 8. sınıfa doğru aşamalı olarak ve özellikle 5. sınıftan 6. sınıfa geçerken gözle görülür bir farkla arttığı görülmüştür.

5.1.1.4. Parça kesir şemasına (PKŞ) ilişkin sonuçlar

▪ Parça kesir şeması (PKŞ) kapsamında öğrenciler alan, çubuk ve sayı doğrusu modelleri üzerinde birimleştirme, parçalama, yerleşik bütünden ayırma ve tekrarlama kesirsel faaliyetlerini etkili ve doğru bir şekilde uygulayabilmişlerdir. PKŞ şeması, EPŞ ile aynı kesirsel faaliyetleri barındırsa da bu şema kapsamında kesirsel faaliyetlerin daha gelişmiş halde modellere uygulandığı görülmüştür. Bunun yanı sıra PKŞ bağlamında kesirsel faaliyetler modeller üzerinde etkili ve doğru biçimde uygulanırken kesir dilinin de öğrenciler tarafından aktif olarak kullanıldığı tespit edilmiştir.

▪ PKŞ şeması kapsamında öğrencilerin parça kesir ile bütünün büyüklüğü arasındaki ilişkiyi tekrarlanabilir birimler ve tekrarlanabilir birim kesirler ile çarpımsal ilişki bağlamında inşa ettikleri ve farklı modeller üzerinde nicelikler ile kesir büyüklüklerini bağdaştırdıkları görülmüştür. Bu noktada PKŞ şemasının, birim kesirler bazında çalışan PBKŞ şemasının genişletilmiş hali olduğu tespit edilmiştir.

▪ PKŞ bağlamında tüm sınıf düzeylerinde öğrencilerin çoğunun en fazla başarı gösterdikleri modelin çubuk modeli olduğu görülmüştür. Bununla birlikte PKŞ’de tüm sınıf düzeylerindeki öğrencilerin neredeyse yarısının çubuk modelinden sonra en fazla başarıyı sayı doğrusu modeli üzerinde göstermeleri dikkat çekmiştir. Ayrıca PKŞ gibi PBKŞ şemasında da kesirsel faaliyetlerin sayı doğrusu modelinde uygulanmasının APŞ, EPŞ ve PBŞ’den daha fazla ortaya çıkmış olması ve sayı doğrusu modeli üzerinde kesir büyüklüklerinin anlamlandırılarak yerleştirilmesi tekrarlanabilir birimlerin ve tekrarlanabilir birim kesirlerin kavramının büyük önem taşıdığını göstermiştir. Öte yandan öğrencilerin PKŞ bağlamında çubuk ve sayı doğrusu modellerine kıyasla alan modelinde zorlandıkları ve alan modeli üzerindeki başarı yüzdelerinin 5. sınıf düzeyinden 8. sınıf düzeyine doğru aşamalı olarak az da olsa bir farkla arttığı ortaya çıkmıştır.

▪ Araştırmaya dahil olan 557 katılımcıdan PKŞ ile uyumlu birimleştirme, parçalama, yerleşik bütünden ayırma ve tekrarlama faaliyetlerini alan, çubuk ve sayı doğrusu modelleri üzerinde etkili bir şekilde uygulayarak ilgili soruların hepsine doğru yanıt veren ve PKŞ’si gelişmiş olarak değerlendirilen öğrencilere tüm sınıf düzeylerinde rastlanılmıştır. PKŞ şeması için halen gelişim sürecinde olan öğrencilerin ise 5. sınıftan 8. sınıfa doğru aşamalı olarak ve özellikle 6. sınıftan 7. sınıfa geçerken gözle görülür bir farkla arttığı görülmüştür.

5.1.1.5. Tersinir parça kesir şemasına (TPKŞ) ilişkin sonuçlar

▪ Tersinir parça kesir şeması (TPKŞ) kapsamında öğrenciler alan ve küme modelleri üzerinde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin eş zamanlı olarak kullanıldığı yinelemeli ayırıştırma (splitting) kesirsel faaliyetini etkili ve doğru bir şekilde uygulayabilmişlerdir. Özel olarak ele alındığında TPKŞ kapsamında sorulan sorularda öğrencilerin sadece parçalama veya sadece tekrarlama faaliyetlerini kullandıklarında kesir problemini doğru yanıtlayamadıkları görülmüştür.

▪ TPKŞ şeması, PKŞ şemasındaki gibi parça kesir ile bütünün büyüklüğünün oranına bakılması durumlarının yanı sıra parça kesir büyüklüğünden bütünün büyüklüğü oluşturma durumlarında etkinleştirildiği görülmüştür. Dolayısıyla TPKŞ şeması bağlamında öğrencilerde yalnızca bütünden parçaya olan ilişki değil aynı zamanda parçadan bütüne olan ilişkinin de çarpımsal ilişki ile inşa edildiği tespit edilmiştir. Bu anlamda TPKŞ şeması kapsamında öğrencilerin parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin

aynı zamanda birbirinin tersine işleyen faaliyetler olduğunun farkındalığıyla hareket etmişlerdir.

- TPKŞ bağlamında tüm sınıf düzeylerinde öğrencilerin yarısından çoğunun en fazla başarı gösterdikleri modelin alan modeli olduğu görülmüştür. Bunun sebebi ortaokul matematik öğretim programında (MEB, 2013) “Bir çokluğun istenen basit kesir kadarını ve basit kesir kadarı verilen bir çokluğun tamamını birim kesirlerden yararlanarak hesaplar.” şeklinde mevcut olan bazı kazanımlardır. Bu yüzden TPKŞ bağlamında sorulan sorulara öğrencilerin neredeyse yarısının aritmetik veya cebirsel işlemlerden faydalanarak orijinal bütünü yeniden oluşturabildikleri görülmüştür. Nihayetinde parça kesir büyüklüğü olarak verilen nicelikten bütünün niceliğini aritmetik işlemlerle oluşturan öğrencilerin parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini zihinsel olarak içselleştirdiği ve parça ile bütün arasındaki ilişkiyi hem parçadan bütüne hem de bütünden parçaya iki yönlü olarak ve tersine işlenebilecek şekilde inşa ettikleri yönünde bir kanıya varılmıştır.

- Araştırmaya dahil olan 557 katılımcıdan TPKŞ ile uyumlu yinelemeli ayırıştırma faaliyetlerini eş zamanlı kullanarak alan ve küme modelleri üzerinde etkili bir şekilde uygulayarak ilgili soruların hepsine doğru yanıt veren ve TPKŞ’si gelişmiş olarak değerlendirilen öğrencilere tüm sınıf düzeylerinde rastlanılmıştır. TPKŞ şeması için halen gelişim sürecinde olan öğrencilerin ise 5. sınıftan 8. sınıfa doğru aşamalı olarak ve özellikle 5. sınıftan 6. sınıfa geçerken gözle görülür bir farkla arttığı görülmüştür.

5.1.1.6. Bileşik kesir şemasına (BKŞ) ilişkin sonuçlar

- Bileşik kesir şeması (BKŞ) kapsamında öğrenciler alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin eş zamanlı olarak kullanıldığı yinelemeli ayırıştırma (splitting) kesirsel faaliyetini bileşik kesirler ile çalışılan durumlarda etkili ve doğru bir şekilde uygulayabilmişlerdir. Özel olarak ele alındığında BKŞ kapsamında sorulan sorularda öğrencilerin sadece parçalama veya sadece tekrarlama faaliyetlerini kullandıklarında kesir problemini doğru yanıtlayamadıkları ve bütünden büyük olan nicelikler veya kesirler üzerinde etkili kesirsel faaliyetleri uygulamakta zorlandıkları görülmüştür.

- BKŞ şeması, PKŞ ve TPKŞ şemalarındaki gibi parça kesir ile bütünün büyüklüğü arasındaki parçadan bütüne veya bütünden parçaya olan ilişkinin haricinde bileşik

kesirlerin birim kesir, parça kesir veya bütün ile olan ilişkilerinin ön planda olduğu durumlarda etkinleştirildiği görülmüştür.

- Öte yandan diğer şemalardan farklı olarak BKŞ'si gelişmiş öğrencilerde bütünün içerisindeki her bir parçanın tekrarlanabilir olduğunun yanı sıra bütünün de başlı başına tekrarlanabilir bir birim olduğunun farkındalığıyla üç kademeli birimleştirme faaliyetini kullandıkları ve birimler arasındaki koordinasyonu da sağlayabildikleri tespit edilmiştir.

- BKŞ bağlamında 5. ve 6. sınıf düzeylerinde öğrencilerin neredeyse yarısının en fazla başarı gösterdikleri modelin çubuk modeli olduğu görülmüştür. Bununla birlikte 7. ve 8. sınıf düzeylerinde öğrencilerin ise neredeyse yarısının en fazla başarı gösterdikleri modelin küme modeli olduğu ve 5. sınıftan 8. sınıfa doğru aşamalı olarak ve özellikle 6. sınıftan 7. sınıfa geçerken gözle görülür bir farkla arttığı ortaya çıkmıştır. Öte yandan BKŞ bağlamında 5. sınıftan 8. sınıfa doğru gidildikçe öğrencilerin alan modeli üzerinde gösterdikleri başarı oranlarının da aşamalı olarak arttığı görülmüştür. Ayrıca BKŞ bağlamında diğer modeller arasında en az başarı gösterilen model sayı doğrusu modeli olsa da ve 5. sınıftan 8. sınıfa doğru aşamalı olarak ve özellikle 6. sınıftan 7. sınıfa geçerken diğerlerinden daha fazla bir farkla arttığı dikkat çekmiştir.

- Araştırmaya dahil olan 557 katılımcıdan BKŞ ile uyumlu yinelemeli ayırıştırma faaliyetlerini eş zamanlı kullanarak alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde etkili bir şekilde uygulayarak ilgili soruların hepsine doğru yanıt veren ve BKŞ'si gelişmiş olarak değerlendirilen öğrencilere 5. sınıf düzeyi haricindeki diğer sınıf düzeylerinde rastlanılmıştır. BKŞ şeması için halen gelişim sürecinde olan öğrencilerin ise 5. sınıftan 8. sınıfa doğru aşamalı olarak ve özellikle 6. sınıftan 7. sınıfa geçerken gözle görülür bir farkla arttığı görülmüştür.

5.1.2. Kesirsel faaliyetlere ilişkin sonuçlar

Araştırma kapsamında kesirsel faaliyetlerin 5., 6., 7. ve 8. sınıf düzeyleri içinde sırasıyla parçalama, birimleştirme, yerleşik bütünden ayırma, tekrarlama ve yinelemeli ayırıştırma şeklinde farklı modeller üzerine uygulanmasında en çok başarı gösterilenden en az başarı gösterilene doğru tüm sınıf düzeylerinde yakın oranlarla karşılaşılmıştır. Bununla birlikte tüm sınıf düzeylerinde kesirsel faaliyetleri uygulamada en çok güçlük yaşanan kesir modelinin sayı doğrusu modeli olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bunun

nedeninin sayı doğrusu modeline genellikle çubuk modeli gibi yaklaşıldığı ve kesir büyüklüğünü anlamlandırmakta zorlandıklarından kaynaklandığı görülmüştür.

Bu bölümde araştırmaya konu olan kesir şemaları bağlamında birimleştirme (unitizing), parçalama (partitioning), yerleşik bütünden ayırma (disembedding), tekrarlama (iterating) ve yinelemeli ayırıştırma (splitting) olmak üzere beş farklı kesirsel faaliyetin farklı modeller üzerinde uygulanması sırasında yaşanan güçlüklerle ilişkin daha detaylı sonuçlara yer verilmiştir.

5.1.2.1. Birimleştirme faaliyetine ilişkin sonuçlar

▪ Birimleştirme (unitizing) faaliyeti farklı şemalar bağlamında incelenmiş ve şemalar arasında birimleştirme faaliyetinin uygulamalarında gelişmişlik düzeyleri açısından bazı farklılıkların olduğu tespit edilmiştir. Aynı anda parçalama şeması (APŞ) ve parça bütün şeması (PBŞ) bağlamında yalnızca bütüne, içerisinde barındırdığı parça sayısına göre ölçü biriminin atanmasıyla birimleştirme faaliyetleri temel düzeyde kullanılırken; eş parçalama şeması (EPŞ), parçalı birim kesir şeması (PBKŞ), parça kesir şeması (PKŞ) ve tersinir parça kesir şeması (TPKŞ) bağlamında bütün ile bütünün içerisinde barındırdığı parçaların her birine ayrı ayrı ölçü birimlerinin atanmasıyla daha gelişmiş halde ortaya çıktığı görülmüştür. Ayrıca bileşik kesir şeması (BKŞ) bağlamında bütün ile bütünün parçalarının her birine ayrı ayrı ölçü biriminin atanmasının yanı sıra bütünden büyük bileşik kesir büyüklüklerine de ölçü biriminin atandığı dolayısıyla incelenen şemalar arasında birimleştirme faaliyetinin en gelişmiş uygulamalarının BKŞ’de ortaya çıktığı görülmüştür.

▪ Araştırmada elde edilen bulgulara göre kesir şemaları henüz gelişim sürecinde olan öğrencilerin birimleştirme faaliyetlerini farklı kesir modelleri üzerinde uygulamada bazı güçlükler yaşamışlardır.

▪ Birimleştirme faaliyetinin uygulanmasında tüm sınıf düzeylerinin en fazla zorlandığı modelin sayı doğrusu modeli olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durumun başlıca sebebinin özellikle 5. ve 6. sınıf düzeyindeki öğrencilerde ağırlıklı olarak görülen doğal sayı yanılgısı olduğu tespit edilmiştir. Doğal sayı yanılgısı literatürde kesir öğrenimi sürecinde öğrencinin önceki doğal sayı ile ilgili mevcut bilgilerini kesirler üzerinde uygulaması, buna bağlı olarak a ve b sayılarını birbirinden bağımsız iki doğal sayı olarak ele alması ve a/b kesir büyüklüğünü tek bir sayı olarak algılamakta güçlük çekmesidir.

Bunun yanı sıra birimleştirme faaliyeti sayı doğrusu modeline uygulanırken öğrencilerde sıklıkla görülen diğer güçlüğün bütün içerisinde birim kesirleri barındıracak şekilde tanımlaması ancak birimlerin tekrarlanabilir özellikte olduğunun farkında olunmaması olduğu sonucu ortaya çıkmıştır. Bu durumda öğrencilerin bütün (b/b) içerisindeki birimleri ($1/b$) yalnızca (0-1) aralığında yani 1 tamın içerisinde tanımladıkları için bütünden büyük bileşik kesirler üzerinde çalışmaları beklenemez. Daha açık bir ifadeyle bu güçlüğü yaşayan öğrencilerde “bütün $\frac{b}{b}$ iken, $\frac{a}{b}$ kesir büyüklükleri a tane $\frac{1}{b}$ 'lerin toplamından oluşur ancak $\frac{1}{b}$ 'lerin tanımladığı nicelik büyüklükleri özdeş olmak zorunda değildir ve a, b'den büyük olamaz” düşüncesinin hakim görülmüştür. Bu sebeple (0-1) aralığı dışında verilen sayı doğrusu modellerinde öğrenciler nicelik büyüklüğü ile kesir büyüklüğünü ilişkilendirmekte ve sayı doğrusunda doğru aralıklara doğru kesirleri yerleştirmekte zorlanmışlardır.

- Birimleştirme faaliyetinin alan modeli üzerinde uygulanmasında tüm sınıf düzeylerinde ağırlıklı olarak karşılaşılan güçlüğün ise nicelik büyüklüğü ile kesir büyüklüğünün ilişkilendirmeksizin bütünün içerisindeki parça sayısına göre bütüne ölçü biriminin atanmasından kaynaklandığı görülmüştür. Örnek olarak öğrenciler bütün içerisinde özdeş birimleri oluşturmaya dahi parçaları “1” birimi olarak ve bütünü de içerisinde barındırdığı parçaların sayısı ile tanımlamalarıdır. Bu durumun en çok parça kesirler ile çalışmayı gerektiren şemalar (PBŞ, PKŞ, TPKŞ) bağlamında sorun teşkil ettiği görülmüştür.

- Benzer şekilde birimleştirme faaliyetinin küme modeli üzerinde uygulanmasında 5. ve 6. sınıf düzeyindeki öğrencilerde en sık karşılaşılan güçlüğün bütünün içerisinde barındırdığı parça sayısına göre tanımlanmasından kaynaklandığı görülmüştür. Böyle bir durumda öğrenciler 10 nesneden oluşan bir küme modelinde $1/5$ 'ini bulmaları istendiğinde sadece 5 nesneyi bir birim olarak tanımlamışlar ve niceliğin geri kalan kısmını göz ardı ederek yalnızca 5 nesneden 1'ini $1/5$ olarak tanımlamışlardır. Dolayısıyla küme modelinde niceliğin içerdiği ayrık nesnelerin sayısı paydadaki sayıdan fazla veya az olduğu zaman öğrenciler küme modeliyle sunulan niceliği birimleştirmekte zorlanmaktadır. Nitekim veri toplama araçlarında küme modeliyle bütünden farklı olarak birim kesir, parça kesir veya bileşik kesir temsilleriyle verilen nicelikler üzerinde özellikle 7. ve 8. sınıf düzeylerindeki öğrencilerin çoğunluğu birimleştirme yapamadığı

ve nesneler topluluğundan oluşan niceliği bütün olarak algılayarak kesir problemlerine yanlış faaliyetleri uygulamışlardır.

- Birimleştirme faaliyetinin çubuk modeli üzerinde uygulanmasında ise tüm sınıf düzeylerinde yaygın olarak yaşanan güçlüğü parçalanmamış çubuk büyüklüklerine birim ölçülerini atamak olduğu görülmüştür. Nitekim daire alan modelinde öğrenciler yarım, çeyrek aç vb. gibi ölçü birimlerinden faydalanabilmektedirler. Ancak çubuk modeli üzerinde öğrencilerin kendi belirledikleri uzunlukları birim ölçüsü olarak tanımlayamadıkları dolayısıyla çubuk modeli üzerinde oluşturulan birim ölçüleri ile kesir büyüklükleri uyuşmadığı durumlarda güçlük yaşamaktadırlar. Örnek olarak herhangi bir uzunlukta bütün olarak verilen çubuğun içerisine kendi belirlediği uzunluklarda 6 parçayı yerleştirdiği varsayalım. Ancak kesir probleminde istenilen çubuk üzerinde 7 eş birimin oluşturulması (bütün:7/7 gibi) için öğrencilerin çoğunda 7. parçayı diğer parçalardan birini parçaladığı veya 7. parçayı diğer parçaların ucuna eklediği dolayısıyla orijinal bütünün uzunluğunu uzatarak bozduğu görülmüştür. Nihayetinde bu durumda öğrenci “bütünü parçaların sayısı kadar parçayı barındırır” şeklinde tanımlamış olsa da tekrarlanabilir birim kavramının öğrenilmesini engellemektedir. Örnek olarak öğrencilerin burada örneklendirildiği gibi nicelik büyüklüğünü göz ardı ederek parçaların özdeşliğini sağlamadığı ve bütünün büyüklüğünü korumadığı için PKŞ kapsamında parça kesir büyüklüğü ile bütünün büyüklüğü arasındaki oranın bulunması görevleri gibi bazı şemalar bağlamında etkili ve uygun birimleştirme yapılmasına engel teşkil etmiştir.

5.1.2.2. Parçalama faaliyetine ilişkin sonuçlar

- Parçalama (partitioning) faaliyeti farklı şemalar bağlamında incelenmiş ve şemalar arasında parçalama faaliyetinin uygulamalarında gelişmişlik düzeyleri açısından bazı farklılıkların olduğu tespit edilmiştir. Aynı anda parçalama şeması (APŞ) ve parça bütün şeması (PBŞ) bağlamında nicelikler üzerinde ardışık/sıralı kesme/çizme işlemleriyle parçalama faaliyetleri temel düzeyde kullanılırken; eş parçalama şeması (EPŞ), parçalı birim kesir şeması (PBKŞ), parça kesir şeması (PKŞ), tersinir parça kesir şeması (TPKŞ) ve bileşik kesir şeması (BKŞ) bağlamında nicelikler üzerinde daha özenli ve özdeş büyüklükte parçalar üretilmesiyle parçalama faaliyetlerinin daha gelişmiş halde ortaya çıktığı görülmüştür.

▪ Bazı şemalar bağlamında daha gelişmiş düzeyde yapılan parçalama faaliyetleri sonucunda nicelik üzerinde üretilen parçaların özdeş olduğunun öğrenciler tarafından doğrulandığı görülmüştür. Bu bağlamda bütün içerisindeki parçaların özdeş büyüklüklerde olması, öğrencilerin parçalar ile bütün arasındaki niceliksel ilişkiyi dikkate alarak doğru birim ölçüleri atamasına yardımcı olduğu kanısına varılmıştır. Aynı zamanda özdeş büyüklükte parçaların üretilmesi, bütün içerisinde oluşturulan birimlerin tekrarlanabilir özellikte olduğunun farkındalığını kolaylaştırmaktadır. Bu sayede özdeş büyüklükteki birimlerin tekrarlanması öğrencilerin birim kesir, parça kesir, bütün ve bileşik kesir büyüklüklerini de diğer öğrencilere kıyasla daha kolay oluşturmuşlardır.

▪ Araştırmada elde edilen bulgulara göre kesir şemaları henüz gelişim sürecinde olan öğrencilerin birimleştirme faaliyetlerini farklı kesir modelleri üzerinde uygulamada bazı güçlükler yaşamışlardır.

▪ Parçalama faaliyetinin uygulanmasında tüm sınıf düzeylerinin en fazla zorlandığı modelin birimleştirme faaliyetinde olduğu gibi sayı doğrusu modeli olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durumun başlıca sebebinin 5. sınıftan 8. sınıf düzeyine doğru en sık karşılaşılan güçlüğü sayı doğrusu modelinde 0'dan başlanarak parçalar üretilmesi ve niceliğin geri kalanının veya tamamının göz edilmesinden kaynaklandığı görülmüştür. Nitekim birim kesirlerin veya parça kesirlerin sayı doğrusu üzerine yerleştirilmesi istendiğinde öğrencilerin çoğunluğu 0'dan başlayarak kendi belirledikleri aralıklarda parçalar üretirken verilen sayı doğrusunun aralığını dikkate almadıkları için 0'a uzak kesirleri sıgdırmakta ve sayı doğrusuna yerleştirmekte zorlanmışlardır. Bu durumun öğrenciler için hem kesirlerin temsil ettiği büyüklükleri hem de kesirlerin yoğunluk özelliğini kavramalarına engel teşkil etmiştir. Bunun yanı sıra (0-1) aralığı dışında verilen sayı doğrusu modeline çubuk modeli gibi davranan ve sayı doğrusunun tamamını "1 birim=1 bütün" olarak tanımlayan öğrencilerin bileşik kesir şeması (BKŞ) başta olmak üzere bazı şemalar bağlamında kendilerine sunulan kesir problemlerine yanlış kesirsel faaliyetleri uyguladıkları ve problemleri doğru yanıtlayamadıkları görülmüştür.

▪ 5., 6. ve 7. sınıf düzeylerinde parçalama faaliyetinin uygulanmasında sayı doğrusu modelinden sonra en çok zorlanılan modelin küme modeli olduğu görülmüştür. Küme modeli üzerinde parçalama faaliyetinin uygulanmasında tüm sınıf düzeylerinde ağırlıklı olarak görülen güçlüğü birimleştirme faaliyetinin eksikliğinden kaynaklandığı kanısına varılmıştır. Çünkü küme modelinde bütün olarak verilen ayrık nesnelerin sayısı, a/b kesir büyüklüğündeki paydada bulunan sayıdan fazla ise öğrencilerin çoğunluğunun paydadaki

sayı kadar nesneler üzerinde işlem yaptığı ve geri kalan nesneleri göz ardı ettiği görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin küme modelinde parçalama faaliyetini uygularken bütünü paydadaki sayı kadar parçadan oluşur şekilden birimleştirmesinden dolayı, yine aynı bütünü paydadaki sayı kadar parçalara ayırabileceğini düşündükleri gözlemlenmiştir.

▪ 5., 6. ve 7. sınıf düzeylerinde parçalama faaliyetinin çubuk modeli üzerinde uygulanmasında yaygın olarak görülen güçlüğün küme modelinde olduğu gibi niceliğin bir kısmının veya tamamının göz ardı edilmesinden kaynaklandığı görülürken; 8. sınıf düzeyinde ise parçalama faaliyetinin çubuk modeli üzerinde uygulanmasında ağırlıklı olarak görülen güçlüğün niceliğin tamamında kesir büyüklüğüne göre üretilen parçalardan çoğunun birbirine eşit olup genellikle son parçaların büyüklüklerinin önceki parçaları ile eşit büyüklükte olmamasından kaynaklandığı görülmüştür. Çubuk modelinde parçalanmamış olarak verilen niceliğin üzerinde parçalar üretilirken bütündeki sayı kadar eşit büyüklükte parçalar olduğu an çubuğun kısaltılıp geri kalanının göz ardı edildiği veya çubuğun tamamının göz ardı edilerek öğrencinin kendi belirlediği ölçülerde nicelikten bağımsız olarak parçaların üretildiği görülmüştür. Bu durumun öğrencilerin PBŞ, PBKŞ, PKŞ, TPKŞ ve BKŞ şemaları bağlamında sorulan kesir problemlerinde zorlanmalarına sebep olmuştur. Öte yandan 8. sınıfta yaygın olarak görülen güçlüğün ise öğrencilerin parçalama faaliyetlerinin gelişim sürecinde olduğunu temsil etmekte olup, çubuk modeli üzerinde ardışık/sıralı ancak özenli yapılan kesme işlemleriyle çubuk parçalanmaya başladığında eşit parçalar oluştururken çubuğun sonlarına yaklaşırken parça büyüklüklerinin giderek küçültülmesi veya büyültülmesi ile bütünü tamamında istenilen sayıda ancak özdeş olmayan parça büyüklüklerinin üretilmesidir. Hatta bu durumun özelinde bütün tek sayıda ($2n + 1$) parçadan oluşuyorsa, öncelikle çubuğun çift sayıda ($2n$) eşit parçalara ayrıldığı ardından son parçanın da diğer parçalardan bağımsız olmak üzere kendi içinde iki eşit parçaya ayrıldığı dikkat çekmiştir. Bu durum söz konusu olduğunda öğrencilerin birim kesir ile bütün arasında karşılaştırılma yapılması gereken PBKŞ gibi şemalar bağlamında tekrarlama faaliyetinin etkili kullanımını zorlaştırdığı görülmüştür.

▪ Parçalama faaliyetinin alan modeli üzerinde uygulanmasında öğrencilerin yaşadıkları güçlüğün çoğunlukla parçalama faaliyetlerinin halen gelişim sürecinde olduğundan kaynaklandığı tespit edilmiştir. Çünkü öğrencilerin basit düzeydeki parçalara ayırma görevlerinde uygun parçalama girişimleriyle başarılı olurken, daha zor düzeydeki

parçalara ayırma görevlerinde uygu olmayan parçalama girişimlerini uyguladıklarından dolayı kesir problem durumlarında başarılı olamamışlardır. Bu bağlamda tüm sınıf düzeylerinde ağırlıklı olarak görülen güçlüğü, alan modeli üzerinde yalnızca yarım ve çeyrek gibi 2'ye, 4'e ve katlarına göre parçalara ayırma görevlerinde başarılı olmaları ve 3'e, 6'ya ve diğer asal sayı katlarına göre nicelikleri eş parçalara ayırma görevlerinde zorlanmalarıdır. Özellikle daire şeklinde verilen alan modelinin 6 kişiye paylaştırılması göreviyle sorulan soruya, öğrencilerin büyük çoğunluğunun nicelik üzerinde öncelikle 4 çeyrek oluşturduğu ardından daire merkezini kullanarak diagonal olarak uyguladığı kesme işlemiyle karşılıklı iki çeyreğin de diğer parçaların büyüklüklerinden bağımsız ancak kendi içerisinde ikiye eşit parçaya ayırdığı ve toplamda 6 parçayı oluşturduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra tüm sınıf düzeylerinde yaygın olarak görülen diğer güçlük ise lineer olmayan nesnelere lineer nesneymiş gibi davranıp yatay veya dikey kesme işlemleriyle eşit olmayan ancak öğrencinin eşit olduğuna inandığı büyüklüklerde parçaların üretilmesi durumudur.

5.1.2.3. Yerleşik bütünden ayırma faaliyetine ilişkin sonuçlar

▪ Yerleşik bütünden ayırma (disembedding) faaliyeti EPŞ, PBŞ ve PKŞ şemaları bağlamında incelenmiş ve şemalar arasında bütünden ayırma faaliyetinin uygulamalarında gelişmişlik düzeyleri açısından bazı farklılıkların olduğu tespit edilmiştir. Parça bütün şeması (PBŞ) bağlamında nicelikler üzerinde yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin çoğunlukla herhangi bir bütünün büyüklüğünden (b/b) birim kesir (1/b) veya parça kesir (a/b) büyüklüklerinin somut olarak bütünden ayrılarak dışarıya kopyalanması şeklinde temel düzeyde kullanılırken; eş parçalama şeması (EPŞ) ve parça kesir şeması (PKŞ) bağlamında yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin birim kesir veya parça kesir ile bütünün büyüklükleri arasında niceliksel ilişki kurularak, zihinde bütünün her zaman korunduğu ve bütünü görmeden/bozmadan parça büyüklüklerinin nasıl olabileceğinin canlandırıldığı şeklinde daha gelişmiş halde ortaya çıktığı görülmüştür.

▪ Araştırmada elde edilen bulgulara göre öğrencilerin alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri üzerinde yerleşik bütünden parçayı etkili ve doğru bir şekilde ayırmada yaşadıkları güçlükler birimleştirme, parçalama, tekrarlama kesirsel faaliyetlerinin eksikliğinden ve bütünün bozulması ile kesir büyüklüğünün (a/b) anlamlandırılmamasından kaynaklandığı sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmada incelenen

farklı kesir modelleri üzerinde bu eksikliklerden kaynaklanan güçlüklerin az da olsa farklılık gösterdiği görülmüştür.

- Tüm düzeylerdeki öğrencilerin yerleşik bütünden ayırma faaliyetini uygulamada en çok zorlandıkları modelin sayı doğrusu modeli olduğu görülmüştür. Öğrencilerin sayı doğrusu modeli üzerinde yerleşik olan bütünden parçayı ayırma faaliyetini uygulamada yaşadıkları ağırlık olarak görülen güçlük tekrarlanabilir birim kavramından dolayı yanlış parçanın bütünden ayrılması durumudur. Çünkü tekrarlanabilir birim kavramı tam olarak anlamlandırılmadığında, bütün içerisinde yerleşik olan parçaların birbirinin tekrarı olduğu ve orijinal bütünün büyüklüğünün ancak bu şekilde yeniden oluşturulabileceği düşüncesi de paralel olarak öğrencilerin zihninde bu bilginin oluşumunu engellediği kanısına varılmıştır. Bu durum sonucunda öğrenci sayı doğrusu modeli üzerinde birimleri tekrarlı ölçülerde yerleştirememekte ve a/b olarak verilen herhangi bir kesir büyüklüğünü bütün içerisinde yanlış olarak ayırmaktadır.

- Yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin küme modeli üzerinde uygulanmasında öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerin ise ağırlıklı olarak birimleştirme faaliyetinin eksik veya yanlış kullanımından kaynaklandığı tespit edilmiştir. Nihayetinde birimleştirme faaliyetinin küme modeli üzerinde yaşanan güçlükler doğrultusunda bütünün paydadaki sayıdan daha fazla sayıda ayırık nesneler topluluğundan oluştuğu niceliklerde öğrencilerin çoğunluğunun yalnızca paydada belirtilen sayı adar nesne üzerinde işlem yaptığı ve geri kalan nesnelerin göz ardı edildiği sonucuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda küme modeli üzerinde birimleştirme faaliyetinin uygulanmasında yaşanan güçlüğü, yerleşik bütünden ayırma faaliyetini küme modeline uygulanmasını zorlaştırdığı görülmüştür. Nitekim öğrenciler küme modeli üzerinde çalışacakları nicelikleri etkili ve doğru bir şekilde birimleştirmiş olsalardı, a/b 'lik kesir büyüklüğünde olan parçayı yerleşik olduğu bütünden ayırmakta güçlük çekmeyecek ve doğru parçayı bütünden somut ve/veya soyut bir şekilde ayırabileceklerdir.

- Elde edilen bulgulara göre yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin çubuk modeli üzerinde uygulanmasında öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerin ise yaygın olarak tekrarlanabilir birim kavramının yoksunluğundan ve birimleştirme faaliyetinin çubuk modeli üzerinde doğru uygulanmamasından kaynaklandığı tespit edilmiştir. Özellikle parça ile bütün büyüklüklerinin karşılaştırılması durumlarını barındıran parça kesir şeması (PKŞ) bağlamında tekrarlanabilir birim kesir kavramının yoksunluğundan öğrencilerin çoğunun özdeş parçaları tekrarlanabilir olarak algılamadığından parça ile

bütün büyüklüğünün niceliksel karşılaştırılması durumunda çubuk modeli üzerinde bütünden doğru parçayı ayırmakta zorlanmışlardır. Öte yandan çubuk modelinin niceliği ile bütünün büyüklüğü (b/b) arasında birimleştirme faaliyetinin etkili ve doğru kullanmadığı durumlarda yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin de çubuk modeli üzerinde etkili ve doğru kullanılmasında öğrencilerin çoğunun güçlük yaşadığı görülmüştür.

- Yerleşik bütünden ayırma faaliyetinin alan modeli üzerinde uygulanmasında tüm düzeylerdeki öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerin ise ağırlıklı olarak parçalama faaliyetinin eksikliğinden kaynaklandığı tespit edilmiştir. Nitekim elde edilen bulgular doğrultusunda alan modeli üzerinde parçalama faaliyetlerini uygularken güçlük çeken ve özdeş parçalar oluşturamayan öğrencilerin, alan modeli üzerinde de parçalar ile bütünün büyüklüğü arasında niceliksel bir ilişkiyi kurması ve bütünü bozmadan yerleşik bütünden parça büyüklüğünü somut ve/veya soyut olarak ayırmasında güçlük yaşadıklarını göstermiştir.

5.1.2.4. Tekrarlama faaliyetine ilişkin sonuçlar

- Tekrarlama (iterating) faaliyetinin şemalar bağlamında iki amaç doğrultusunda öğrenci uygulamalarına yansıdığı görülmüştür. Bunlardan birincisi parçaların büyüklüğü açısından özdeş parçalar üretmek iken, ikincisi bütün içerisinde tekrarlanabilir birimlerin oluşturulmasıdır.

- Tekrarlama faaliyeti EPŞ, PBKŞ ve PKŞ şemaları bağlamında incelenmiş ve şemalar arasında tekrarlama faaliyetinin uygulamalarında gelişmişlik düzeyleri açısından yalnızca bir farklılığın olduğu tespit edilmiştir. Eş parçalama şeması (EPŞ), parçalı birim kesir şeması (PBKŞ) ve parça kesir şeması (PKŞ) bağlamında olmak üzere üç şema durumlarında özdeş parça büyüklükleri üretmek amacının aynı şekilde kullanıldığı görülmüştür. Öğrencilerin çoğunluğunun özdeş parça büyüklüklerini üretirken farklı modellerin özelliklerinden (uzunluk, birimkare, yarım, aç, sayı doğrusu aralığı gibi) faydalanmalarının yanı sıra parmak ucu, silginin kenarı gibi başka nesnelerden de faydalanarak ölçme eylemini kullandıkları görülmüştür. Öte yandan bütün içerisinde tekrarlanabilir birimlerin oluşturulması amacıyla EPŞ bağlamında bütün içerisinde birim kesirlerin tekrarlı yerleştirilmesinin yanı sıra ayrık birim olarak algılanan “1” birimlerinin bütün içerisine tekrarlı bir şekilde yerleştirilebildiği sonucuna ulaşılmıştır. Ancak PBKŞ

ve PKŞ bağlamında ise bütün içerisinde birimlerin çarpımsal ilişki kurularak tekrarlanabilir birim kesir ($1/b$) şeklinde yerleştirildiği görülmüştür.

▪ Tekrarlama faaliyetinin uygulanmasında tüm sınıf düzeylerinin en fazla zorlandığı modelin sayı doğrusu modeli olduğu ortaya çıkmıştır. Ayrıca sayı doğrusu modeli üzerinde tekrarlama faaliyetini uygulamada yaşanan güçlüğü ağırlıklı olarak birimlerin tekrarlanmasına ilişkin yaşanan güçlüklerle ilişki olduğu ortaya çıkmıştır. Daha açık bir ifadeyle öğrencilerin bütün içerisindeki birim kesirleri çarpımsal ilişki kurmaksızın tekrarladığı görülmektedir. Örnek olarak öğrencilere (0-3) aralığında bir sayı doğrusu modeli verilip bu aralıkta kaç tane $1/2$ 'lik birimin olduğu sorulduğunda, öğrencilerin (0-3) sayı doğrusu aralığını özdeş parça büyüklüklerini tekrarlayarak $1/2$ 'lik parçalara ayırsalar da bu aralıkta “yalnızca 1 tane” veya “yalnızca 3 tane” yanıtını veren öğrencilerin çoğunlukta olduğu görülmüştür. Bu bağlamda “yalnızca 1 tane” olduğunu söyleyen öğrencilerin $1/2$ kesir büyüklüğünü yalnızca (0-1) aralığındaki gerçek sayı yerini göstererek yanıt vermekte ve bir bütünün içerisinde 2 tane $1/2$ 'lik tekrarlanabilir birim kesrin olduğunu anlamlandıramadığı görülmüştür. Benzer şekilde “yalnızca 3 tane” yanıtını veren öğrencilerin ise (0-1), (1-2) ve (2-3) olmak üzere her tam sayı aralıklarında yani her bütün içerisinde 1 tane $1/2$ 'nin olduğunu düşünmekte ve yine bir bütün içerisinde çarpımsal ilişki bağlamında n tane $\frac{1}{n}$ 'lik tekrarlanabilir birim kesir büyüklüklerinin yerleşik durumda olduğunu anlamlandıramamışlardır. Bu durumda öğrencilerin bütün içerisindeki birimleri toplamsal ilişki bağlamında $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ şeklinde tekrarlamasına rağmen, şemalar bağlamında birim büyüklüklerini tekrarlayarak basit kesir, bütün ve bileşik kesirleri oluşturabildikleri görülmüştür.

▪ Tekrarlama faaliyetinin küme modeli üzerinde uygulanmasında tüm düzeylerde ağırlıklı olarak görülen ve öğrencilerde yaşanan güçlüğü ise özdeş parçaları oluşturma amacıyla yapılan parça büyüklüklerinin tekrarlanmasından kaynaklandığı tespit edilmiştir. Nitekim elde edilen bu sonuç birimleştirme faaliyetinin küme modeline uygulanmasında yaşanan güçlükler doğrudan ilişkili olup, bütünün paydasından daha fazla sayıda ayrık nesneyi içeren nicelikler üzerinde bazı nesnelerin göz ardı edilmesinden kaynaklı nicelik ile ilişki bir şekilde birimlerin parça büyüklüklerinin yanlış birim ölçülerinde tekrarlandığı görülmüştür.

▪ Tekrarlama faaliyetinin çubuk modeli üzerinde uygulanmasında tüm düzeylerde ağırlıklı olarak görülen ve öğrencilerde yaşanan güçlüğü ise benzer şekilde küme

modelinde olduğu gibi özdeş parça büyüklüklerinin tekrarlanamamasından kaynaklandığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda parçalama faaliyetinin çubuk modeli üzerinde uygulanmasında yaşanan güçlüklerin, çubuk modeli üzerinde özdeş parça büyüklüklerinin oluşturulması ile doğrudan ilişkili olduğu kanısına varılmıştır. Nihayetinde parçalama ve tekrarlama kesirsel faaliyetleri birbirinin tersine işleyen faaliyetler olup, diğer kesir modellerine göre etkisinin daha fazla görüldüğü çubuk modeli üzerinde tekrarlanabilir ve özdeş büyüklükte parçalar oluşturulmasında her iki kesirsel faaliyetin de önemli rolleri olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

- Tekrarlama faaliyetinin alan modeli üzerinde uygulanmasında tüm düzeylerde yaygın olarak görülen ve öğrencilerde yaşanan güçlüğü ise tekrarlanabilir birimleri “1, 1, 1 ... veya 1, 2, 3 ...” şeklinde doğal sayılarla tanımlanarak ayrık olarak algılanması ve birim kesirlerin tekrarlanabilir olduğu düşüncesinin her durumda etkili ve doğru bir şekilde kullanılamamasından kaynaklanmaktadır. Bu durum öğrencilerin özellikle parça kesir ile bütünün büyüklüğünün karşılaştırılması gereken durumları barındıran PKŞ şemasında önemli olduğu ve parça ile bütün büyüklüğünün kesir büyüklüğü ile temsil edilmesini zorlaştırdığı görülmüştür.

5.1.2.5. Yinelemeli ayrıştırma faaliyetine ilişkin sonuçlar

- Yinelemeli ayrıştırma (splitting) faaliyeti tersinir parça kesir şeması (TPKŞ) ve bileşik kesir şeması (BKŞ) bağlamında incelenmiş ve şemalar arasında yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin uygulamalarında kullanım yerine göre gelişmişlik düzeyi açısından yalnızca bir farklılığın olduğu tespit edilmiştir. TPKŞ bağlamında yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin herhangi bir niceliğin parça kesir büyüklüğünde verilip bütünün büyüklüğünün bulunması istendiğinde yalnızca bütünün büyüklüğü içerisinde kullanılırken, BKŞ bağlamında yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin bütünden büyük olan bileşik kesirler üzerinde kullanılırken daha gelişmiş halde ortaya çıktığı tespit edilmiştir.

- Yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin nicelikler üzerinde uygulanmasında öğrencilerin zihninde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin eş zamanlı olarak kullanılmasıyla ortaya çıktığı görülmüştür.

- TPKŞ’si gelişmiş öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen bulgular ışığında öğrencilerin kesir problemiyle karşılaşır karşılaşmaz TPKŞ bağlamında yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin zihninde gerçekleştiği ve görmediği

bütünün büyüklüğünü zihninde canlandırabildiği görülmüştür. Bunun yanı sıra TPKŞ bağlamında yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin öğrencilerin zihninde soyut olarak gerçekleştirilmesinin hemen ardından, bu durumun nicelikler üzerinde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin somut olarak uygulamalarıyla yansıdığı görülmüştür.

- BKŞ bağlamında yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin uygulamalarında öğrencilerin hem bileşik kesirler üzerinde çalışırken hem de üç kademeli birimleri koordine ederken etkili ve doğru bir şekilde kullanıldığı görülmüştür. Bunun yanı sıra BKŞ bağlamında TPKŞ'deki gibi parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin zihinsel olarak eş zamanlı etkinleştirildiği ve öğrencilerin uygulamalarına kimi durumlarda düşünmeden/derhal parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin somut olarak nicelikler üzerinde kullanılması şeklinde yansıdığı görülmüştür.

- Yinelemeli ayrıştırma faaliyeti tüm sınıf düzeylerinde farklı modeller uygulanmasında en çok zorluk yaşanan kesirsel faaliyet olup, bu faaliyetin uygulanmasında tüm sınıf düzeylerinin en fazla zorlandığı modelin sayı doğrusu modeli olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durumun başlıca sebebinin özellikle tüm sınıf düzeylerindeki öğrencilerin yarısından fazlasının a/b kesir büyüklüğünü bütünden büyük bileşik kesirler için anlamlandıramadıklarından kaynaklandığı görülmüştür. Nitekim sayı doğrusu modelinde bileşik kesir olarak $5/4$ kesir büyüklüğünün verildiği ve “3” tam sayısının sayı doğrusuna yerleştirilmesi için öğrencilerden öncelikle bileşik kesir büyüklüğünü zihinlerinde yinelemeli ayrıştırması ve birim kesirleri veya “1” birimlerini yeniden tekrarlayarak “3”e ulaşabileceğini içselleştirmesi beklenmektedir. Ancak elde edilen bulgular öğrencilerin ağırlıklı olarak sayı doğrusu modeli üzerinde “3” sayısını 0 ile $5/4$ arasına ya “3” ya da “ $3/4$ ” şeklinde yerleştirdiklerini göstermişlerdir. Dolayısıyla “3”ü (0- $5/4$) aralığına yerleştiren öğrencilerin doğal sayı yanlışlığına sahip olduğu, 0 ile $5/4$ aralığını ise 5 birim parçaya ayırdıktan sonra bu aralığa $3/4$ kesir büyüklüğünü yerleştiren öğrencilerin ise parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlıdan ziyade art arda kullandıkları görülmüştür.

- Yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin küme modeli üzerinde uygulanmasında 5. sınıf düzeyinden 8. sınıf düzeyine doğru aşamalı olarak azalan oranlarla en çok karşılaşılan güçlüğü ayırık nesneler topluluğuna yanlış birim ölçülerinin atanmasıyla birleştirme faaliyetinin eksikliğinden kaynaklandığı görülmüştür. Bunun yanı yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin küme modeli üzerindeki uygulamalarında 5. sınıf düzeyinden 8. sınıf düzeyine doğru aşamalı olarak artan oranlarla yaygın olarak karşılaşılan diğer güçlük ise

karşılaşılan güçlüğü ise TPKŞ bağlamında bütünün dışında a/b kesir büyüklüğünde nesneler topluğunun verilip bütün büyüklüğünün oluşturulması durumunda, verilen nesnelerin bütün olarak (b/b) algılanması ve nesneler üzerinde a/b'lik kesir büyüklüğünü parça bütün yorumunu kullanarak bulmasından kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla yaşanan bu güçlük bağlamında öğrencilerin a/b kesir büyüklüğünü zihninde yinelemeli ayrıştırma faaliyetine tabii tutamadıkları yani parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin eş zamanlı kullanılmasından ziyade birbirinden ayrı olarak ardışık sırayla kullanılmıştır. Bu sebeple nicelik büyüklüğü ile a/b kesir büyüklüğünün ilişkilendirilmediği ve küme modeli üzerinde yinelemeli ayrıştırma faaliyetini uygulamakta zorlandıkları görülmüştür.

▪ Yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin alan modeli üzerinde uygulanmasında tüm sınıf düzeylerindeki öğrencilerde ağırlıklı olarak yaşanan güçlüğü ise TPKŞ ve BKŞ bağlamında verilen durumlarda yinelemeli ayrıştırma faaliyeti kapsamında parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin eş zamanlı olarak kullanılamamasından kaynaklandığı ve verilen parça büyüklüklerinin ayrıştırılmadan ölçeklendirilerek büyültüldüğü veya küçültüldüğü görülmüştür. Bu bağlamda öğrencilerin parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini farklı modeller uygulamada da güçlük yaşadıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin alan modeli üzerinde uygulanmasında öğrencilerde yaygın olarak görülen diğer güçlük ise küme modelinde yaşanan güçlük ile benzer olup parça büyüklüğünde verilen herhangi bir alan modelini ayrıştırarak bütünün büyüklüğünü oluşturmak yerine, verilen parça büyüklüğünün bütün olarak algılanıp üzerinde parça bütün yorumunu uygulayarak hem a/b kesrini zihinlerinde ayrıştırmadıkları hem de parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlı olarak kullanamadıklarından kaynaklandığı sonucuna ulaşılmıştır.

▪ Yinelemeli ayrıştırma faaliyetinin çubuk modeli üzerinde uygulanmasında 5. sınıf düzeyinden 8. sınıf düzeyine doğru aşamalı olarak artan oranlarla en çok karşılaşılan güçlüğü ise BKŞ bağlamında bileşik kesir büyüklüğünde bir çubuğun verildiği ve bütünü oluşturmaları istendiğinde diğer kesir modelleri üzerinde yaşanan güçlüklerle benzer şekilde verilen parça büyüklüğünün ayrıştırılamaması ve bütün olarak algılanıp üzerinde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerinin eş zamanlı olarak kullanılamamasından kaynaklanmaktadır. Bu durumda öğrencilerin bileşik kesir büyüklüğünde verilen niceliği ayrıştıramamalarına rağmen bileşik kesir büyüklüğünü ($m > n$ olmak üzere) m tane $\frac{1}{n}$ 'lik kesir büyüklüklerine ayrıştırdıkları ancak nicelik üzerinde

bunu uygulayamadıklarından dolayı çubuk modeli üzerinde parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini ardışık ve somut bir şekilde nicelik üzerinde yanlış uygulamamışlardır.

5.2. Tartışma

Uluslararası literatürde kesir şemaları üzerine araştırmalar yürüten neredeyse çoğu araştırmada Steffe ve Olive'in ileri sürdüğü kavramsal çerçevenin benimsendiği görülmektedir. 2000'li yıllarda Steffe ve Olive'in temel hipotezleri öğrencilerin soyut sayı dizilerine (*number sequences*) dayalı olarak gerçekleştirdikleri faaliyetleri yeniden düzenleyerek kesir şemalarını oluşturabilecekleri ve rasyonel sayıları inşa edebilecekleri yönündeydi. Bu hipotez doğrultusunda farklı yaş gruplarından öğrencilerle boylamsal olarak yürüttükleri öğretim deneylerinde kesir bilgisinin gelişiminin özellikle birim kesirlerin inşası, kesirler üzerindeki çarpımsal ilişkiler ve tekrarlanabilir kesirler ile bu kesirler arasındaki etkileşimler ile bağlantılı olarak hem doğal sayıları hem de kesirleri içeren daha kapsamlı yapıların oluşabileceğini araştırma sonuçlarıyla göstermişlerdir (Olive, 2000, s. 5). Bu bağlamda Steffe ve Olive öğrencilerin ilk sayı dizisinde (initial number sequence-INS) “1” haricindeki diğer doğal sayıları zihninde oluşturabildiği ve sayma etkinliklerinde başka sayıların üzerine sayabildiğini (counting on), örtük yuvalanmış sayı dizisinde ise (tacitly nested number sequence-TNS) “1, 2, 3” sayılarını bir grup olarak kabul edip devamında gelen her üç sayıyı da bir grup olarak saydıklarında 12 sayısına geldiğinde üçerli grupların 4 kez sayıldığını bulabileceklerini ve çarpımsal muhakeme becerisi için önemli bir adım olan bileşik birimleri (composite unit) farkında olmadan örtük olarak kullanabildiklerini söylemişlerdir. Bunun yanı sıra açıkça yuvalanmış sayı dizisinde (explicitly nested number sequence-ENS) “1”lerin tekrarlanabilir birim olarak kullanıldığı, bileşik birimlerin parçalanabildiği ve üzerinde çarpımsal muhakeme ile işlemler yapılabildiği ve aktivite esnasında doğal sayı dizileri arasında üç kademeli birim yapılarını kurabildikleri belirtilmiştir. Son olarak da genelleştirilmiş sayı dizisinde (generalized number sequence-GNS) ise öğrencilerin sayı dizilerini aktivite öncesinde üç kademeli birim yapıları olarak zihinsel bir şekilde oluşturdukları ve bununla birlikte gelişen çarpımsal muhakeme becerilerini kesir problem durumlarında uygulanabilmesiyle hipotezlerini destekler nitelikte sonuçlara ulaşılmıştır.

Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin eş parçalama şemaları (EPŞ) kapsamında bütünü bileşik bir birim olarak gördükleri ve bileşik birim olan bütünün parçalarını “1, 1, 1, ...” şeklinde tekrarlanabilir birim olarak açıkça yuvalanmış sayı dizisinden (ENS) faydalanarak birimleştirdikleri görülmüştür. Bunun yanı sıra bazı öğrencilerin ise EPŞ bağlamında ENS’de kullandıkları tekrarlanabilir “1” birimlerini

“1/4” gibi tekrarlanabilir birim kesir kavramı olarak anlamlandırmaları sonucu Steffe ve Olive’in (2010) hipotezini destekler niteliktedir. Ayrıca araştırma sonuçlarına göre APŞ bağlamında öğrencilerin kesir büyüklüğünü anlamlandırmada güçlük yaşadıkları ve ilk sayı dizisi (INS) bilgilerinin kesir bilgilerine yansıdığı görülmüştür. Bu durum bütünün içerisindeki birimlerin tekrarlanabilir birim olarak tanımlanmadığını ve ayırık nesnelerin de sürekli nesne olarak algılanıp tekil birimler arasında herhangi bir gruplama (grupları sayma) şeklinde faaliyet gerçekleştirilmediğinden ortaya çıkmıştır. Nitekim araştırmada öğrencilerde genellikle ayırık nesneler üzerinde niceliğin bir kısmını göz ardı ettikleri ve sürekli modeller üzerinde bütünü tek sayıda parçalara ayırmaları gereken durumlarda tüm parçaları çift sayıda parçalara ayırarak faydalanmak yerine genellikle son parçayı çift sayıda parçaladıkları yani bileşik birimi parçalayamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sebeple APŞ şeması bağlamında öğrencilerin ENS sayı dizisi bilgilerini kullanmadıklarına dair elde edilen araştırma sonucu Steffe ve Olive’in hipoteziyle örtüşmemektedir. Çünkü Steffe ve Olive (2010) öğrencilerin parçalama şemalarında bileşik birim olan bütünleri parçalarken ENS’deki sayı dizisi bilgilerini kullandıklarını ve bileşik birimleri tanımlamalarına göre parçaladıklarını belirtmişlerdir (s. 75, 82). Daha açık bir ifadeyle bütünün 4 tane çeyrek veya 2 tane yarım olarak tanımlandığı bileşik birimlerde öğrenci parçalama faaliyetlerinde çeyrekler veya yarımlar olarak tanımladıkları bu referans ölçülerini (*benchmark*) kullanabilirler. Ancak ortaokul öğrencilerinde parçalara ayırma şemalarından eş parçalama şeması (EPŞ) bağlamında parçalama faaliyetlerine ENS’deki sayı dizisi bilgilerinin yansıdığı görülürken, aynı anda parçalama şeması (APŞ) bağlamında parçalama faaliyetlerine ENS’deki sayı dizisi bilgilerinin yansımaması araştırmanın önemli sonuçlarından.

Öte yandan araştırma sonuçlarına göre eş parçalama şemasının (EPŞ) aynı anda parçalama şemasına göre (APŞ) hem birimlerin daha gelişmiş sayı dizilerine göre tekrarlanabilir biçimde anlamlandırılması hem de daha gelişmiş kesirsel faaliyetlerin kullanılması sebebiyle daha gelişmiş bir şema olduğu gerçeği literatürdeki diğer araştırma sonuçlarıyla örtüşmektedir (McCloskey ve Norton, 2009; Saenz-Ludlow, 1994; Steffe ve Olive, 2010). Bunun yanı sıra eş parçalama şemasının (EPŞ), parça bütün şeması (PBŞ) için ön koşul oluşturduğuna yönelik literatürde çelişkili sonuçların olduğu görülmüştür. Norton (2008) parça bütün şemasında kullanılan parçalama faaliyetlerinin aynı anda parçalama şeması gibi olduğu ve tekrarlama faaliyetinin eksikliğiyle oluşturulan parçaların eşit büyüklükte olsa dahi özdeş olduğu düşüncesinin oluşmadığından dolayı

PBŞ şemasının EPŞ şeması için bir ön koşul oluşturmadığını ileri sürmüştür (s. 406). Eliustaoğlu ise (2016) parça bütün şemasında bütün içerisindeki parçaların nicelik ve kesirsel büyüklüklerinin özdeş olarak algılandığını ileri sürerek EPŞ şemasını yapılandırmayan öğrencilerin PBŞ şemasına sahip olamayacaklarını belirtmiştir (s. 12). Araştırmanın sonuçları ise PBŞ şemasında tekrarlama faaliyetinin eksikliği, parçalama ve yerleşik bütünden ayırma faaliyetlerinin EPŞ'ye göre daha temel düzeyde kullanılması sonucunda özdeş büyüklükte parçaların üretilmemesi nedenlerinden dolayı EPŞ'nin PBŞ için bir ön koşul olmadığını hatta EPŞ'nin PBŞ'ye göre daha gelişmiş bir şema olduğunu göstermekte ve Norton'un (2008) sonuçları ile örtüşmektedir.

Steffe (2010) parça kesir şemasını (PKŞ) öğrencilerin tekrarlanabilir birim büyüklüklerini yapılandırılarak kesir bilgilerinin tam anlamıyla oluştuğu ilk özgün (*genuine*) şema olarak tanımlamıştır (s. 317). Ancak Hackenberg (2010) parça kesir şeması için Steffe'nin ilk özgün şema olarak tanımlamasına karşı çıkarak bu şema kapsamında $\frac{3}{5}$ kesir büyüklüğünün “3 tane $\frac{1}{5}$ ” olarak değil de “5 parçadan 3 tanesi” şeklinde anlamlandırıldığını dolayısıyla PKŞ şemasının çarpımsal bir şema olmadığını ileri sürmüştür (s. 394). Bu durumla ilgili olarak araştırmadan elde edilen bulguların PKŞ bağlamında öğrencilerin hem nicelikler arasında hem de kesir büyüklükleri arasında çarpımsal ilişkiyi kurabildikleri ve kesir büyüklüğünü parça bütün şemasındaki “5 parçadan 3 tanesi” olarak anlamlandırmanın ötesinde bütünün büyüklüğünün görülmediği durumlarda dahi niceliğin büyüklüğü ile ilişkilendirilebildiğini göstermiştir.

Öğrencilerin kesir problemlerinde bileşik kesirler ile baş edebilmeleri, kesir büyüklüğünün öğrenci tarafından anlamlandırıldığının ve bir rasyonel sayı olarak algılandığının en iyi göstergelerinden biridir. Bu bağlamda Tunç-Pekkan (2016) bileşik kesirlerin gerçek anlamda kesirlerin “sayı” mertebesine ulaştığının göstergesi olduğunu belirterek, 5. sınıf düzeyindeki öğrencilerde bileşik kesir şemasının gözlemlenebildiğine vurgu yapmıştır (s. 505). Bu araştırmada ise bileşik kesir şeması (BKŞ) bağlamında şeması gelişmiş öğrencilere 5. sınıf düzeyinde rastlanmamışken; 6., 7. ve 8. sınıf düzeylerinde az sayıda öğrencinin olduğu ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte bileşik kesir şeması bağlamında halen gelişim sürecinde olan öğrencilerin ise 7. ve 8. sınıf düzeylerinde 5. ve 6. sınıf düzeylerindeki öğrencilere göre daha fazla olduğu görülmüştür.

Öte yandan araştırmadan elde edilen bulgular dikkate alındığında öğrencilerin kesir bilgilerinin gelişmemesinin sebebi kesirsel faaliyetlerin geliştirilememesi olduğu ortaya çıkmıştır. Nitekim araştırmanın en önemli sonuçlarından birisi parçalama ve tekrarlama

faaliyetlerinin birbiriyle doğrudan ilişki olduğu ve paralel olarak gelişmediği takdirde kesir büyüklüğünün anlamlandırılmasında güçlük yaşanmasıdır. Bu sebeple sınıf düzeyi arttıkça öğrencilerin daha karmaşık problem durumlarında parçalama ve tekrarlama faaliyetlerini eş zamanlı olarak kullanamadıkları, dolayısıyla birçok araştırmacı (Hackenberg, 2007; 2013; Norton ve Deater-Deckard, 2014; Norton ve Wilkins, 2009b; 2012; Wilkins ve Norton, 2011) tarafından en önemli kesirsel faaliyet olarak tanımlanan yinelemeli ayırıştırma (splitting) faaliyetinin gelişmesine ve kesir bilgisinin zihinde şemalar aracılığıyla yapılandırılmasına engel teşkil ettiğini göstermiştir.

Gabriel (2016) ise kesrin kavramsallaştırılması için somut bilgilerin soyut bilgilere dönüşmesi sürecinde farklı temsillerin bilişsel köprü görevi üstlendiğini belirtmiştir (s. 39). Araştırmada öğrencilerin kesir bilgilerinin bazı kesir temsilleri üzerinde beceriye dönüştüğü görülse de kesirsel faaliyetleri farklı temsiller üzerinde uygulamakta zorlandıkları dolayısıyla kesir bilgisinin soyutlanmasında güçlükler yaşadıklarına dair elde edilen sonuçlar, Gabriel'in belirttiği gibi somut bilgilerin farklı temsiller üzerinde yeteri kadar tekrarlarla deneyimlenmeden genellenemeyeceğini ve soyut bilgiye dönüşmekte engel teşkil ettiğini göstermiştir. Araştırma sonuçları ortaokul öğrencilerinin birimleştirme, parçalama, yerleşik bütünden ayırma, tekrarlama ve yinelemeli ayırıştırma kesirsel faaliyetlerini farklı nicelikler üzerinde uygulamakta zorlandıklarını, dolayısıyla kesir büyüklüğü ile nicelik arasındaki ilişkiyi kurmakta güçlük yaşadıklarını göstermiştir. Bu durumu destekler nitelikte Kocaoğlu ve Yenilmez'in (2010) 5. sınıf öğrencilerle yürüttükleri bir araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin kesir büyüklüğü ile belli bir çokluk/nicelik arasındaki ilişkiyi kuramadıkları dolayısıyla kesirler ile ilgili birtakım kavram yanılgısına düştükleri görülmüştür (s. 84).

Öte yandan ortaokul matematik dersi öğretim programında (MEB, 2013) 5. sınıfların kazanımlarından birisi “Tam sayılı kesrin, bir doğal sayı ile bir basit kesrin toplamı olduğunu anlar ve tam sayılı kesri bileşik kesre, bileşik kesri tam sayılı kesre dönüştürür.” şeklindedir. Ancak araştırma sonuçlarına göre 5. sınıf düzeyinde bileşik kesir şeması gelişmiş öğrenciye rastlanılmamıştır. Bunun sebebinin kazanımda belirtildiği gibi bileşik kesirlerin bir doğal sayı ile basit kesrin toplamından ziyade bileşik kesrin de diğer kesirler gibi çarpımsal ilişki bağlamında “n tane birim kesir”den oluştuğunun vurgulanmaması olduğu düşünülmektedir. Benzer şekilde 5. sınıf düzeyindeki “Birim kesirleri sıralar.” ve “Birim kesirleri sayı doğrusunda gösterir.”

kazanımlarının da öğrencilerin ne birim kesirleri ne birim kesir dışındaki parça kesirleri ne de bileşik kesirleri anlamlandırmaya yetmeyeceği kanısına varılmıştır.

5.3. Öneriler

Araştırmanın sonuçlarına göre öneriler öğretim, öğretim programları ve gelecekte yapılacak çalışmalara yönelik öneriler olmak üzere üç bölümde sunulmuştur.

5.3.1. Öğretime yönelik öneriler

- Araştırma sonuçları 8. sınıf öğrencilerinin çok az bir kısmının kesir bilgisini anlamlandırarak mezun olduklarını göstermiştir. Bu bağlamda özellikle 5. ve 6. sınıf düzeylerinde farklı öğretim yöntem ve teknikleri bir arada kullanılarak kesir öğretim sürecinin daha etkili hale getirilmesine olanak sağlanabilir.

- Kesir büyüklüğünün nicelikler ile ilişkilendirilmesinin özellikle bileşik kesir ile çalışmayı kolaylaştırdığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla öğrenme ortamlarında farklı kesirsel faaliyetlerin kullanımını teşvik edecek farklı niceliklerin sunulduğu problem çözme süreçlerine yer verilmesi önerilir.

- Öğrencilerin a/b kesir büyüklüğünü anlamlandırmakta güçlük çektikleri ve bunun sebebinin genellikle birimleştirme faaliyetinin eksikliğinden kaynaklandığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda kesir öğretim sürecinde öğrencilerin içerisinde bileşik birimleri barındıran sürekli ve ayırık nicelikler ile çalışmalarını gerektiren kesir problemleriyle sıklıkla yüzleştirilmesinin faydalı olacağı düşünülmektedir.

- Matematik, soyut kavramları içerisinde barındıran bir disiplindir. Araştırma sonuçlarına göre kesir bilgisini sürekli ve ayırık nicelikler üzerinde uygulayabilen öğrencilerin kesir büyüklüğünü daha kolay anlamlandırabildikleri ve kesirleri aynı zamanda birer “sayı” olarak sayı doğrusuna yerleştirebildikleri görülmüştür. Bu bağlamda kesir öğretim süreçlerinde farklı temsillerin kullanılmasının faydalı olacağı düşünülmektedir.

- Araştırma sonuçlarına göre öğrencilerin kesir kavramını anlamlı öğrenebilmeleri için tekrarlanabilir kavramının önemli bir role sahip olduğu ortaya konmuştur. Bu bağlamda öğrenme ortamlarında tekrarlama faaliyetlerinin geliştirilmesi için kesir dilinin kullanılmasında “a bölü b” ve “b’de a” ifadelerinin yanı sıra “a tane 1 bölü b” ifadesinin de kullanılması önerilmektedir.

5.3.2. Öğretim programlarına yönelik öneriler

▪ Araştırma verileri 2017-2018 eğitim öğretim yılında toplanmış olup, araştırmanın sonuçları verilerin toplandığı akademik yılda geçerli olan ortaokul matematik dersi öğretim programı ile karşılaştırıldığında (MEB, 2013) kesirler konusu ile ilgili kazanımların öğrencilerin kesir şemalarını kesirsel faaliyetler açısından geliştirecek yönde olmasından ziyade aritmetik işlemler, yüzdeler gibi işlemsel bilgilerin ön planda olduğu dikkat çekmiştir. Araştırma sonuçlarına göre öğrencilerden kesirsel faaliyetleri nicelikler üzerinde uygulamaları beklenen kesir problemlerini doğru yorumlayamadıkları, genellikle soruda verilen kesirler arasında aritmetik veya cebirsel işlemleri kullanmaya çalıştıkları görülmüştür. Dolayısıyla bu durum kesirlerle ilgili kazanımların işlemsel bilgiyi kavramsal bilgiden daha çok desteklediğini göstermiştir. Ayrıca yenilenen ilkökul ve ortaokul matematik öğretim programları (MEB, 2018) incelendiğinde bu hususun pek fazla dikkate alınmadığı görülmüştür. Bu sebeple öğretim programları tasarlanırken özellikle birimleştirme, parçalama ve tekrarlama gibi kesirsel faaliyetlerin nicelikler üzerinde uygulanmasına ve geliştirilmesine yardımcı olacak görevlere vurgu yapılmalı ve kesir konusundaki kazanımlar hazırlanırken bu hususlara dikkat edilmelidir

▪ İlkokul ve ortaokul matematik dersi öğretim programları (MEB, 2013; 2015; 2018) incelendiğinde ise 1. sınıftan 4. sınıfa kadar olan kazanımların farklı modeller ile nicelikler üzerinde çalışmayı destekleyici olduğu; ancak 5. ve 6. sınıf düzeylerinde bu duruma verilen önemin nispeten azaldığı görülmüştür. Araştırma sonuçlarına göre nicelikler ile kesir büyüklüğünü ilişkilendirebilen öğrencilerin kesir kavramını daha kolay anlamlandırdıkları görülmüştür. Dolayısıyla öğretim programları tasarlanırken kesirlerin hem birer büyüklüğü hem de birer sayıyı temsil ettiğini vurgulayacak şekilde kavramsal bilgi bağlamında sürekli ve ayırık niceliklerin kullanımının üzerinde durulması önerilir.

▪ Araştırma sonuçları gerek kesir büyüklüğü gerek nicelik büyüklüğü bağlamında çarpımsal ilişkinin kurulmasının kesir öğreniminde önemli bir yere sahip olduğunu ortaya koymuştur. Bu doğrultuda matematik öğretim programları hazırlanırken çarpımsal ilişkinin kazandırılması ve geliştirilmesi hususunda önem verilmesi önerilmektedir.

5.3.3. Gelecekte yapılacak çalışmalara öneriler

▪ Araştırma kapsamında öğrencilerin kesir bilgileri aynı anda parçalama şeması, eş parçalama şeması, parça bütün şeması, parçalı birim kesir şeması, parça kesir şeması, tersinir parça kesir şeması ve bileşik kesir şeması olmak üzere yedi farklı şema bağlamında incelenmiştir. Steffe ve Olive'in (2010) kavramsal çerçevesine göre farklı kesir problemleri durumlarında ortaya çıkan diğer şemalar bağlamında da çalışmaların yürütülmesi önerilir.

▪ Araştırma kapsamında öğrencilerin birimleştirme, parçalama, yerleşik bütünden ayırma, tekrarlama ve yinelemeli ayrıştırma kesirsel faaliyetlerini farklı modeller üzerinde uygulamaları incelenmiştir. Steffe ve Olive'in (2010) kavramsal çerçevesine göre farklı kesir problemleri durumlarında ortaya çıkan diğer kesirsel faaliyetler bağlamında da çalışmaların yürütülmesi önerilir.

▪ Araştırmada ortaokul düzeyinde aynı anda parçalama şeması, eş parçalama şeması, parça bütün şeması, parçalı birim kesir şeması, parça kesir şeması, tersinir parça kesir şeması ve bileşik kesir şeması bağlamında öğrencilerin kesirsel faaliyetleri nasıl uyguladıkları incelenmiştir. Bu şemaların gelişim süreçlerini etkileyen durumların tespit edilmesi ve detaylı olarak betimlenmesi için uzun süreli deneysel çalışmaların yürütülmesi önerilmektedir.

▪ Araştırmada kesir şemaları bağlamında kesirsel faaliyetlerin uygulamaları alan, çubuk, küme ve sayı doğrusu modelleri ile incelenmiş ve öğrencilerin çoğunlukla sayı doğrusu ile küme modelinde zorlandıkları görülmüştür. Kesirsel faaliyetlerin modeller üzerindeki uygulama başarılarının artırılmasına yönelik öğretim deneyi çalışmaları yürütülebilir.

KAYNAKÇA

- Aksu, M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *The Journal of Educational Research*, 90(6), 375-380.
- Altıparmak, K. ve Özüdoğru, M. (2015). Hata ve kavram yanılgısı: kesir ve parça bütün ilişkisi. *International Journal of Human Sciences*, 12(2), 1465-1483.
- Aydın, U., Tunç-Pekkan, Z., Taylan, R. D., Birgili, B. ve Özcan, M. (2017). Okulda üniversite modeli: beşinci sınıf öğrencilerinin kesir bilgisi gelişiminden yansımalar. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 25(5), 1979-1994.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. and Silver, E. (1983). Rational number projects. In R. Lesh, and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.
- Boyce, S. and Norton, A. (2016). Co-construction of fractions schemes and units coordinating structures. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41(2016), 10–25.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2014). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Pegem Akademi.
- Campbell, M. R. and Thompson, L. K. (2007). Perceived concerns of preservice music education teachers: A cross-sectional study. *Journal of Research in Music Education*, 162-176.
- Charalambous, C. Y. and Pitta Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293–316.
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: foundations and model viability. *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, 547-589.
- Cramer, K. A., Post, T. R. and delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111-144.
- Creswell, J. W. (2017). *Araştırma deseni: nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları*. (Çev: S. B. Demir). Ankara: Eğiten Kitap.
- Çepni, S. (2014). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (5. baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık.
- Deliyianni, E., Panaoura, A., Elia, I. and Gagatsis, A. (2008). A structural model for fraction understanding related to representations and problem solving. In O.

- Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano and Sepúlveda (Eds.). *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, pp. 399-406. Morelia, México.
- DeWolf, M. and Vosniadou, S. (2011). The whole number bias in fraction magnitude comparisons with adults. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 33(33), pp. 1751-1756.
- DeWolf, M. and Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, 37, 39-49.
- Diriwächter, R. and Valsiner, J. (2006). Qualitative developmental research methods in their historical. *Forum Qualitative Sozialforschung/Forum: Qualitative Social Research*, 7(1).
- Doyle, K. M., Dias, O., Kennis, J. R., Czarnocha, B. and Baker, W. (2016). The rational number sub-constructs as a foundation for problem solving. *Adults Learning Mathematics*, 11(1), 21-42.
- Eliustaoğlu, E. (2016). *Investigation of fraction schemes and models as a means to understand how sixth grade students make sense of fractions*. Doktora Tezi. Ohio: Kent State University.
- Eroğlu, D. (2012). *Examining prospective elementary mathematics teachers' knowledge about students' mistakes related to fractions*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Ankara: Orta Doğu Teknik Üniversitesi.
- Ersoy, F. (2016). Fenomenoloji. A. Saban ve A. Ersoy (Editörler), *Eğitimde nitel araştırma desenleri içinde* (s. 51-109). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
- Gabriel, F. (2016). Understanding magnitudes to understanding fractions. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 21(2), 36-40.
- Grobecker, B. A. (1997). Partitioning and unitizing in children with learning differences. *Learning Disability Quarterly*, 20(4), 317-335.
- Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: a revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 27-47.

- Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, 28(4), 383-432.
- Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2013), 538– 563.
- Hackenberg, A. J. and Lee, M. Y. (2015). Relationships between students' fractional knowledge and equation writing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(2), 196-243.
- Hackenberg, A. J. and Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: a critical constructive resource for fraction composition schemes. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(2009), 1-18.
- Hansen, N., Jordan, N. C. and Rodrigues, J. (2017). Identifying learning difficulties with fractions: A longitudinal study of student growth from third through sixth grade. *Contemporary Educational Psychology*, 50(2017), 45-59.
- Harel, G. and Behr, M. (1990). Understanding the multiplicative structure. In G. Booker, P. Cobb and T. N. de Merlodicutti (Eds.). *Proceedings of the PME XIV Conference*, Vol 3, pp. 27-34. Mexico: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia, Gobierno del Estado de Morelos.
- Haser, Ç. ve Ubuz, B. (2002). Kesirlerde kavramsal ve işlemsel performans. *Eğitim ve Bilim*, 27(126), 53-61.
- Hiebert, J. (1984). Children's mathematics learning: the struggle to link form and understanding. *The Elementary School Journal*, 84(5), 496-513.
- Hiebert, J. and Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the major themes. In J. Hiebert, and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 1-18). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Iuculano, T. and Butterworth, B. (2011). Understanding the real value of fractions and decimals. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 64(11), 2088-2098.
- Izsák, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and Instruction*, 26(1), 95-143.
- Izsák, A., Tillema, E. and Tunç-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 33-62.

- Johanning, D. I. (2008). Learning to use fractions: examining middle school students' emerging fraction literacy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 281-310.
- Karagöz Akar, G. (2016). Nicel muhakeme ve nicel muhakeme ile kesirler üzerinden gerçek sayıların inşası. E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Editörler), *Matematik eğitimde teoriler içinde* (s. 117-133). Ankara: Pegem Akademi.
- Karasar, N. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (20. baskı). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Kellman, P. J., Massey, C., Roth, Z., Burke, T. Z., Zucker, J., Saw, A., Agüero, K. E. and Wise, J. A. (2008). Perceptual learning and the technology of expertise: Studies in fraction learning and algebra. *Pragmatics & Cognition*, 16(2), 356-405.
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-149). Washington: National Institute of Education.
- Kılıç, Ç. ve Özdaş, A. (2010). İlköğretim 5. sınıf öğrencilerinin kesirlerde karşılaştırma ve sıralama yapmayı gerektiren problemlerin çözümlerinde kullandıkları temsiller. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 18(2), 513-530.
- Kocaoğlu, T. ve Yenilmez, K. (2010). Beşinci sınıf öğrencilerinin kesir problemlerinde yaptıkları hatalar ve kavram yanlışları. *Dicle University Journal of Ziya Gokalp Education Faculty*, 14(2010), 71-85.
- Kullberg, A. and Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal*, 25(4), 547-567.
- Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 170-193.
- Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16-32.
- Mann, C. J. (2003). Observational research methods, research design II: cohort, cross sectional, and case-control studies. *Emergency Medicine Journal*, 2003(20), 54-60.

- Maxwell, J. A. (2018). *Nitel araştırma tasarımı etkileşimli bir yaklaşım*. (Çev: M. Çevikbaş). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.
- Mazzocco, M. M. and Devlin, K. T. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, 11(5), 681-691.
- McCloskey, A. V. ve Norton, A. H. (2009). Using Steffe's advanced fraction schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(1), 44-50.
- MEB. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5-6-7-8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Yayınları.
- MEB. (2015). *İlkokul matematik dersi (1., 2., 3. ve 4. sınıflar) öğretim programı*. Ankara.
- MEB. (2018). *Matematik dersi öğretim programları (ilkokul ve ortaokul 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7. ve 8. sınıflar)*. Ankara.
- Namkung, J. M., Fuchs, L. S. ve Koziol, N. (2018). Does initial learning about the meaning of fractions present similar challenges for students with and without adequate whole-number skill? *Learning and Individual Differences*, 61(2018), 151-157.
- Ni, Y. ve Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.
- Norton, A. (2008). Josh's operational conjectures: abductions of a splitting operation and the construction of new fractional schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 401-430.
- Norton, A. H. and McCloskey, A. V. (2008). Modeling students' mathematics using steffe's fraction schemes. *Teaching Children Mathematics*, 15(1), 48-54.
- Norton, A. and Deater-Deckard, K. (2014). Mathematics in mind, brain, and education: a neo-Piagetian approach. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(3), 647-667.
- Norton, A. and Wilkins, J. L. (2009a). A comparison of part-whole and partitive reasoning with unit and non-unit proper fractions. In S. L. Swars, D. W. Stinson and S. Lemons-Smith (Eds.). *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 5, pp. 748-756. Atlanta, GA: Georgia State University.

- Norton, A. and Wilkins, J. L. (2009b). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 150-161.
- Norton, A. and Wilkins, J. L. (2010). Students' partitive reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), 181-194.
- Norton, A. and Wilkins, J. L. (2012). The splitting group. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(5), 557-583.
- Norton, A. and Wilkins, J. L. (2013). Supporting students' constructions of the splitting operation. *Cognition and Instruction*, 31(1), 2-28.
- Norton, A., Boyce, S., Ulrich, C. and Phillips, N. (2015). Students' units coordination activity: a cross-sectional analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39(2015), 51-66.
- Olanoff, D., Lo, J. J. and Tobias, J. M. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: a focus on fractions. *The Mathematics Enthusiast*, 11(2), 267-310.
- Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic: a reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(4), 279-314.
- Olive, J. (2000). Children's number sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator*, 11(1).
- Olive, J. and Çağlayan, G. (2008). Learners' difficulties with quantitative units in algebraic word problems and the teacher's interpretation of those difficulties. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(2), 269-292.
- Olive, J. and Steffe, L. P. (2002). The construction of an iterative fractional scheme: the case of Joe. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(4), 413-437.
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel çalışma tasarımı*. (Çev: M. Bütün ve S. B. Demir). Ankara: Pegem Akademi.
- Patton, M. Q. (2018). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri*. (Çev: M. Bütün ve S. B. Demir). Ankara: Pegem Akademi.
- Pesen, C. (2010). Öğrencilerin kesirlerle ilgili kavram yanılgıları. *Eğitim ve Bilim*, 32(143), 79-88.
- Post, T. R., Behr, M. J., Lesh, R. and Wachsmuth, I. (1985). Selected results from the rational number project. In L. Streefland (Ed.). *Proceedings of the Ninth*

- International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 1, pp. 342-351. The Netherlands: Antwerp.
- Pothier, Y. and Sawada, D. (1983). Partitioning: the emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(5), 307-317.
- Pothier, Y. and Sawada, D. (1990). Partitioning: an approach to fractions. *The Arithmetic Teacher*, 38(4), 12.
- Rosli, R., Gonzalez, E. G. and Capraro, M. M. (2011). A case study of three preservice teachers on the units and unitizing of fractions. *Proceedings of the 33rd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 1682-1689. Reno, NV: University of Nevada.
- Saenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 50-85.
- Shahbari, J. A. and Peled, I. (2017). Modelling in primary school: constructing conceptual models and making sense of fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(2), 371-391.
- Siegler, R. S. and Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. *Child Development Perspectives*, 8(3), 144-150.
- Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H. and Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 13-19.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A. and Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273-296.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77(1), 20-26.
- Soylu, Y. ve Soylu, C. (2005). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki öğrenme güçlükleri: kesirlerde sıralama, toplama, çıkarma, çarpma ve kesirlerle ilgili problemler. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 7(2), 101-117.
- Stafylidou, S. and Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction* (14), 503-518.

- Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 267-307.
- Steffe, L. P. and Olive, J. (1996). Symbolizing as a constructive activity in a computer microworld. *Journal of Educational Computing Research*, 14(2), 113-138.
- Steffe, L. P. and Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. London: Springer Science & Business Media.
- Steffe, L. P. and Tzur, R. (1994). Interaction and children's mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematical education* (pp. 26-50). Bristol: Falmer Press,.
- Subaşı, M. ve Okumuş, K. (2017). Bir araştırma yöntemi olarak durum çalışması. *Atatürk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 21(2), 419-426.
- Şahin, Ç. (2014). Gelişimsel araştırma. M. Metin (Ed.), *Kuramdan uygulamaya eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri* içinde (s. 313-336). Ankara: Pegem Akademi.
- Şahin, Ç., İpek, H. and Ayas, A. (2008). Students' understanding of light concepts primary school: a cross-age study. *Asia Pasific Forum on Science Learning and Teaching*, 9(1), 1-19.
- Şimşek, A. (2012). Araştırma modelleri. A. Şimşek (Ed.), *Sosyal bilimlerde araştırma yöntemleri* içinde (s. 80-107). Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.
- Taylan, R. D., Tunç-Pekkan, Z., Birgili, B. ve Aydın, M. (2016). Beşinci sınıf öğrencilerinin kesir bilgisinin sayı doğrusu üzerinde gösterimi ile ilgili düşünüş biçimlerinin araştırılması. *12. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- The National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In S. Chamberlin, L. L. Hatfield and S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education: papers from a planning conference for WISDOM* (pp. 33-57). Laramie, Wyoming: University of Wyoming.
- Tillema, E. S. (2014). Students' coordination of lower and higher dimensional units in the context of constructing and evaluating sums of consecutive whole numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36(2014), 51-72.

- Tobias, J. M. (2013). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(2), 85-103.
- Tobias, J. M., Roy, G. J. and Safi, F. (2015). Prospective elementary teachers' conceptions of unitizing with whole numbers and fractions. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*.
- Toluk, Z. (2002). İlkokul öğrencilerinin bölme işlemi ve rasyonel sayıları ilişkilendirme süreçleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 19(2), 81-101.
- Toluk-Uçar, Z. ve Bozkuş, F. (2016). İlkokul ve ortaokul öğrencilerinin orantısal durumları orantısal olmayan durumlardan ayırt edebilme becerileri. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi (KEFAD)*, 17(3), 281-299.
- Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 419-441.
- Tunç-Pekkan, Z. (2016). Steffe'nin doğal sayılar ve kesir bilgilerinin yapılandırılmasına yönelik öğrenme modeli. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Editörler), *Matematik eğitiminde teoriler içinde* (s. 489-507). Ankara: Pegem Akademi.
- Türk Dil Kurumu [TDK]. (tarih yok). *Büyük Türkçe Sözlüğü*. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5b5c835246c339.49976147. (Erişim tarihi: 28.07.2018)
- Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 390-416.
- Ulrich, C. and Wilkins, L. M. (2017). Using written work to investigate stages in sixth-grade students' construction and coordination of units. *International Journal of STEM Education*, 4(1).
- Vamvakoussi, X. and Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14(2004), 453-467.
- Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L. and Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction*, 21(5), 676-685.

- Van de Walle, J. A., Karp, K. S. and Bay Williams, J. M. (2014). *İlkokul ve ortaokul matematiği: gelişimsel yaklaşımla öğretim*. (Çev: S. Durmuş). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.
- Van der Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. *Design approaches and tools in education and training* (pp. 1-14). Dordrecht: Springer.
- Van Dooren, W., Lehtinen, E. and Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, 37(2015), 1-4.
- Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. and Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education*, 15(2), 154-164.
- Van Steenbrugge, H., Lesage, E., Valcke, M. and Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers' knowledge of fractions: A mirror of students' knowledge? *Journal of Curriculum Studies*, 46(1), 138-161.
- von Glasersfeld, E. (1991). Abstraction, re-presentation, and reflection: an interpretation of experience and Piaget's approach. In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 45-67). New York, NY: Springer.
- von Glasersfeld, E. (1995). Sensory experience, abstraction, and teaching. L. P. Steffe and J. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 369-383). Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum.
- Wilkins, J. L. and Norton, A. (2011). The splitting loope. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 386-416.
- Wilkins, J. L., Norton, A. and Boyce, S. J. (2013). Validating a written instrument for assessing students' fractions schemes and operations. *The Mathematics Educator*, 22(2), 31-54.
- Yanık, H. B. (2016). Kavramsal ve işlemsel anlama. E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Editörler), *Matematik eğitiminde teoriler içinde* (s. 101-116). Ankara: Pegem Akademi.
- Yanık, H. B., Holding, B. and Flores, A. (2008). Teaching the concept of unit in measurement interpretation of rational numbers. *İlköğretim Online* (7), 693-705.
- Yazgan, Y. ve Altun, M. (2010). Dört ve beşinci sınıf öğrencilerinin kesir kavrayışlarının matematiksel başarılarına göre incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23(1), 81-98.

- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yoshida, H. and Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Research*, 44(4), 183-195.
- Zembat, İ. Ö. (2007). Working on the same problem-concepts; with the usual subjects-prospective elementary teachers. *Elementary Education Online*, 6(2), 306-312.
- Zembat, İ. Ö. (2016). Piaget'nin merceğinden yapılandırmacılık ve zihinsel düzenekler. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Editörler), *Matematik eğitiminde teoriler içinde* (s. 475-487). Ankara: Pegem Akademi.

EKLER

Ek 1 İstanbul Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü onay yazısı

Ek 2 Anadolu Üniversitesi bilimsel araştırma ve yayın etiği kurulu kararı

Ek 3 Gönüllü katılım formu

Ek 1 İstanbul Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü onay yazısı



T.C.
İSTANBUL VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 59090411-44-E.6883069
Konu: Anket Araştırma İzni

04.04.2018

ANADOLU ÜNİVERSİTESİNE
Genel Sekreterlik
Yazı İşleri Müdürlüğü

İlgi: a) 13.03.2018 tarih ve 33898 sayılı yazınız.
b) Valilik Makamının 02.04.2018 tarih ve 6719475 sayılı oluru.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü yüksek lisans öğrencisi Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü yüksek lisans Öğrencisi Yeşim OZANSAK'ın "Ortaokul Öğrencilerinin Kesir Şemalarının İncelenmesi" konulu araştırma çalışması hakkındaki ilgi (a) yazınız ilgi (b) valilik onayı ile uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve araştırmacının söz konusu talebi; bilimsel amaç dışında kullanmaması, uygulama sırasında bir örneği müdürlüğümüzde muhafaza edilen mühürlü ve imzalı veri toplama araçlarının kurumlarımıza araştırmacı tarafından ulaştırılarak uygulanması, katılımcıların gönüllülük esasına göre seçilmesi, araştırma sonuç raporunun müdürlüğümüzden izin alınmadan kamuoyuyla paylaşılması koşuluyla, gerekli duyurunun araştırmacı tarafından yapılması, okul idarecilerinin denetim, gözetim ve sorumluluğunda, eğitim-öğretimi aksatmayacak şekilde ilgi (b) Valilik Onayı doğrultusunda uygulanması ve işlem bittikten sonra 2 (iki) hafta içinde sonuçtan Müdürlüğümüz Strateji Geliştirme Bölümüne rapor halinde bilgi verilmesini arz ederim.

M. Nurettin ARAS
Müdür a.
Müdür Yardımcısı

EK:1- Valilik Onayı
2- Ölçekler

Ek 2 Anadolu Üniversitesi bilimsel araştırma ve yayın etiği kurulu kararı

Evrak Kayıt Tarihi: 15.02.2018

Protokol No: 20017

Tarih: 26.02.2018



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERÎ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU
KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	BAP Projesi-Yüksek Lisans Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	Ortaokul Öğrencilerinin Kesir Şemalarının İncelenmesi
PROJE/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Doç. Dr. H. Bahadır YANIK
TEZ YAZARI:	Yeşim OZANSAK
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu
Prof.Dr. Coşkun BAYRAK (Başkan-Eğitim Fak.)	
Prof.Dr. F. Volkan YÜZER (Başkan Yardımcısı-Açıköğretim Fak.)	Prof.Dr. Esra CEYHAN (Eğitim Fak.)
Prof.Dr. Münevver ÇAKI (Güzel Sanatlar Fak.)	Prof.Dr. M. Erkan ÜYÜMEZ (İkt. ve İdari Bil. Fak.)
Prof.Dr. Handan DEVECİ (Eğitim Fak.)	Prof.Dr. Emel ŞIKLAR (İkt. ve İdari Bil. Fak.)

Ek 3 Gönüllü katılım formu

GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

Bu çalışma, “Ortaokul Öğrencilerinin Kesir Şemalarının İncelenmesi” başlıklı bir yüksek lisans tez çalışması olup, ortaokul 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin kesirlerle ilgili zihinsel eylemlerinin ve şemalarının incelenmesi amacını taşımaktadır. Çalışma, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü’nde yüksek lisans yapmakta olan Yeşim OZANSAK tarafından yürütülmekte ve sonuçları ile ortaokul öğrencilerinin kesirlerle ilgili şemalarının gelişimine dair ışık tutulacağı düşünülmektedir.

- Bu çalışmaya katılımınız gönüllülük esasına dayanmaktadır.
- Çalışmanın amacı doğrultusunda, öncelikle yazılı değerlendirme aracındaki 20 tane açık uçlu soruya vereceğiniz yanıtlar, ardından ses ve görüntü kaydı altında gerçekleşecek olan yarı-yapılandırılmış klinik görüşmenin video kayıtları sizden toplanacak verileri oluşturacaktır.
- İsmınızı yazmak ya da kimliğinizi açığa çıkaracak bir bilgi vermek zorunda değilsiniz/araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak, araştırmanın amacı dışında ya da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde, sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde sizden toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Sizden toplanan veriler araştırma sonuna kadar korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecek veya imha edilecektir.
- Veri toplama sürecinde/süreçlerinde size rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de katılımınız sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederseniz çalışmadan istediğiniz zamanda ayrılabilirsiniz. Çalışmadan ayrılmanız durumunda sizden toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Gönüllü katılım formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı İstanbul Aydın Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden Arş. Gör. YEŞİM OZANSAK’a yöneltebilirsiniz.

Araştırmacı

Adı: Arş. Gör. Yeşim OZANSAK
Adres: İstanbul Aydın Üniversitesi
Beşyol Mahallesi, İnönü Cd. No:38, 34295
Küçükçekmece/İstanbul

E-Posta : yesimozansak@anadolu.edu.tr
Cep Tel : 05XXXXXXXXX

Bu çalışmaya tamamen kendi rızamla, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabileceğimi bilerek verdiğim bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını kabul ediyorum.

(Lütfen bu formu doldurup imzaladıktan sonra veri toplayan kişiye veriniz.)

Katılımcı Ad ve Soyadı:

İmza:

Tarih: