

**MEKÂNSAL EKONOMETRİK MODELLER:
MEKÂNSAL HATA MODELİ İÇİN
ROBUST TAHMİNLEME**

**Doktora Tezi
Vural YILDIRIM
Eskişehir, 2018**

**MEKÂNSAL EKONOMETRİK MODELLER:
MEKÂNSAL HATA MODELİ İÇİN
ROBUST TAHMİNLEME**

Vural YILDIRIM

DOKTORA TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yeliz MERT KANTAR

**Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Ağustos 2018**

Bu tez çalışması BAP Komisyonunca kabul edilen 1601F038 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Vural YILDIRIM'ın “Mekânsal Ekonometrik Modeller: Mekânsal Hata Modeli İçin Robust Tahminleme” başlıklı tezi 09/08/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği”nin ilgili maddeleri uyarınca, İstatistik Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Yeliz MERT KANTAR	
Üye	: Prof. Dr. Semra GÜNAY AKTAŞ	
Üye	: Prof. Dr. Zeki YILDIZ	
Üye	: Doç. Dr. İlhan USTA	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Y. Murat BULUT	

Prof.Dr. Ersin YÜCEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

MEKÂNSAL EKONOMETRİK MODELLER: MEKÂNSAL HATA MODELİ İÇİN ROBUST TAHMİNLEME

Vural YILDIRIM

İstatistik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ağustos 2018

Danışman: Prof. Dr. Yeliz MERT KANTAR

Bu tez çalışmasında, öncelikle mekânsal istatistik, komşuluk matrisleri, mekânsal ekonometrik modeller ve modellerin klasik tahminleme yöntemleri incelenmiştir. Klasik tahminleme yöntemlerinin veri setinde aykırı değerler olduğunda, bunlardan oldukça etkilendiği görülmüştür. Çok kullanılan mekânsal ekonometrik modellerden biri olan, mekânsal hata modeli (SEM) için M-tahminlemenin ψ fonksiyonları yardımıyla robustlaştırılan olabilirlik eşitliklerine dayalı bir tahminci önerilmiştir. Robust maksimum olabilirlik (RMLE) olarak ifade edilen tahmincinin performansı farklı hata dağılımları ile Monte Carlo simülasyonu yardımıyla araştırılmıştır. Simülasyon sonuçları göstermiştir ki SEM için RMLE veri setinde aykırı değerler olması durumunda klasik tahmincilere göre daha küçük hata kareler ve yan değeri sağlamaktadır ve normal dağılım durumunda ise etkinlik kaybı oldukça küçüktür. Ayrıca, gerçek hayattan alınan bir uygulama üzerinde, aykırı değerli ve aykırı değersiz veri seti yardımıyla RMLE'nin iyi performansı gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Mekânsal istatistik, Mekânsal ekonometri, Mekânsal hata modeli, Tahminci, Robustluk.

ABSTRACT

SPATIAL ECONOMETRIC MODELS: ROBUST ESTIMATION FOR SPATIAL ERROR MODEL

Vural YILDIRIM

Department of Statistics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, August 2018

Supervisor: Prof. Dr. Yeliz MERT KANTAR

In this thesis, firstly spatial statistics, neighborhood matrices, spatial econometric models and their classical estimation methods have been investigated. It has been seen that classical estimation methods for spatial regression models can be influenced by the presence of outliers in the data and thus, a robust estimator based on robustified likelihood equations by means of ψ functions of M-estimation for spatial error model (SEM), which is the one of commonly-used spatial models, is proposed. The performance of the estimator, called as robust maximum likelihood estimator (RMLE), is investigated via Monte Carlo simulation under the different error distributions. The results of the simulation study show that RMLE for SEM provides small bias and mean squared errors compared to the classical methods when there are outliers in the dataset, and also efficiency loss of RMLE is very small in the case of normal distribution. In addition, good performance of RMLE is demonstrated on a real-life application with and without outliers.

Keywords: Spatial statistics, spatial econometrics, spatial error model, estimator, robustness.

ÖNSÖZ

Mekânsal istatistik ve mekânsal ekonometri 20. yüzyılın ortalarında ortaya çıkmaya başlamış fakat 21. yüzyılda bilgisayar yazılımlarının da desteğiyle hızla gelişme göstermiştir. Klasik regresyonun varsayımlarından biri olan gözlemlerin birbirinden bağımsızlığı gerçek hayatta ihlal edilebilmektedir. Bu tür durumlarda mekânsal ekonometri kullanılmalıdır. Özellikle günümüzdeki teknolojik gelişmelerin de katkısıyla bölgeler arasındaki iletişimin, ulaşımın ve dolayısıyla etkileşimin hızla gelişmesiyle beraber bazı veriler belli bölgelerde kümelenme gösterebilmekte ve birbirlerinden etkilenebilmektedir. Bu veriler ekonomik, demografik, sosyolojik, sağlıkla veya eğitimle ilgili, coğrafi, tarımsal veya çevresel olabilmektedir. Örneğin, çevre bölgedeki kirliliğin bir bölgedeki etkisini veya komşu bölgelerdeki ticaretin bir bölgedeki etkisini hesaba katarak modelleme yapmak istenilebilir. Mekânsal ekonometrik modeller bu etkilerin hesaba katılmasına imkân sağlamaktadır.

Literatürde çeşitli mekânsal ekonometrik modeller mevcuttur. Bu tez çalışmasında mekânsal hata modeli için veri setindeki aykırı değerlerden etkilenmeyen robust en çok olabilirlik tahmincisi önerilerek performansı simülasyon ve gerçek hayattan alınan bir uygulama yardımıyla incelenmiştir. Ayrıca bu tez çalışmasında temel mekânsal ekonometrik kavramlar ve yöntemler tanıtılmış ve örneklerle açıklanmıştır.

Bu çalışmanın konusunun belirlenmesinde ve hazırlanma sürecinin her aşamasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Yeliz MERT KANTAR'a, konuların araştırılmasında ve tamamlanmasında bilgilerini, tecrübelerini ve değerli zamanlarını esirgemeyerek bana her fırsatta yardımcı olan değerli hocalarım Prof. Dr. Semra GÜNAY AKTAŞ ve Doç. Dr. İlhan USTA'ya moral ve motivasyonumu en üst seviyede tutarak çalışmalarımın her zaman zevk almamı sağladıkları için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın tamamlanmasında bilgilerini ve zamanını esirgemeyerek bana yol gösteren değerli hocalarım Prof. Dr. Zeki YILDIZ ve Dr. Öğr. Üyesi Y. Murat BULUT'a, doktora sürecimde desteklerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. Arzu ALTIN YAVUZ ve Dr. Öğr. Üyesi Şükrü ACITAŞ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Akademik alışmalar yapmayı bana sevdiren, bilgi birikiminden faydalanarak simülasyon kodlarını rahatlıkla yazabilecek seviyeye gelmememde emeği olan değerli hocam Prof. Dr. Birdal şENOĞLU'na, bana sorgulama yeteneği kazandırarak matematik bilgimin gelişmesinde önemli katkıları olan değerli hocam Prof. Dr. Aladdin şAMİLOV'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimimin kesintiye uğramaması için gerekli desteği sağlayan ve hoşgörüsünü hiçbir zaman esirgemeyen başta değerli şube müdürüm Sn. Arzu ÇELİK olmak üzere geçmiş ve şimdiki tüm daire başkanlarıma, kendilerini tanımaktan ve aynı ortamda birlikte çalışmaktan mutluluk duyduğum değerli iş arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Vural YILDIRIM

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Vural YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLolar DİZİNİ.....	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
1. GİRİŞ	1
2. MEKÂNSAL EKONOMETRİ.....	8
2.1. Mekânsal Etkiler	8
2.1.1. Mekânsal heterojenlik	8
2.1.2. Mekânsal bağımlılık	9
2.2. Mekânsal Komşuluklar	16
2.2.1. Sınıra dayalı komşuluklar.....	16
2.2.1.1. Kale (Rook) komşuluk matrisi	17
2.2.1.2. Fil (Bishop) komşuluk matrisi	17
2.2.1.3. Vezir (Queen) komşuluk matrisi.....	18
2.2.1.4. Paylaşılan sınır uzunluğu komşuluk matrisi	18
2.2.2. Uzaklığa dayalı komşuluklar	19
2.2.2.1. k_{nn} -en yakın komşuluk	19
2.2.2.2. Radyal (eşik) uzaklık komşuluk	21
2.2.2.3. Güç uzaklık komşuluk	21
2.2.2.4. Üstel uzaklık komşuluk	22
2.2.2.5. Çift – güç uzaklık komşuluğu	22

2.2.2.6. Farklı uzaklık ölçüleri.....	22
2.2.3. Sınır ve uzaklık bileşimli komşuluk matrisi.....	23
2.2.4. Yüksek dereceli komşuluklar (high order neighbors).....	24
2.3. Mekânsal Ağırlık Matrisleri.....	25
2.3.1. Satır standartlaştırma	25
2.3.2. Sütun standartlaştırma	26
2.3.3. Özdeğer standartlaştırma	27
2.3.4. Satır toplam matrisi yardımıyla standartlaştırma	27
2.4. Komşuluk ve Ağırlık Matrisleri Varsayımları	28
2.5. Mekânsal Ekonometrik Modeller	31
2.5.1. Genel yuva mekânsal model (general nesting spatial model, GNS)	35
2.5.2. Mekânsal ardışık bağımlı birleşik model (spatial autoregressive combined model, SAC)	36
2.5.3. Mekânsal Durbin model (spatial Durbin model, SDM)	36
2.5.4. Mekânsal Durbin hata modeli (spatial Durbin error model, SDEM)	37
2.5.5. Mekânsal ardışık bağımlı model (spatial autoregressive model, SAR).....	37
2.5.6. Mekânsal X gecikmeli model (spatial lag of X model, SLX).....	38
2.5.7. Mekânsal hata modeli (spatial error model, SEM)	39
2.6. Mekânsal Parametre Uzayı Varsayımları	40
2.7. Moran I Testleri	47
2.7.1. Global Moran I testi	47
2.7.2. Lokal Moran I_i testi (local indicators of spatial association, LISA)	51
2.7.3. Moran saçılım (scatter) grafikleri.....	55
2.7.4. Correlogram grafikleri	59

2.8. Lagrange Çarpan Testi.....	62
2.9. Direk ve Dolaylı (Spillover) Etkiler	65
3. MEKÂNSAL HATA MODELİ İÇİN TAHMİN YÖNTEMLERİ	74
3.1. SEM için OLS Tahmincileri ve Bu Tahmincilerin Sınırları	74
3.2. En Çok Olabilirlik Tahmincisi (Maximum Likelihood Estimator, MLE)	77
3.3. MLE Hesaplama Yöntemleri	91
3.3.1. Concentrated log-likelihood.....	91
3.3.2. Log-determinant hesaplamaları	93
3.3.3. Fisher scoring algoritması.....	95
3.4. Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi (Generalized Method of Moments, GMM)	96
4. SEM İÇİN ROBUST EN ÇOK OLABİLİRLİK TAHMİNCİSİ (RMLE).100	
5. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	109
6. UYGULAMA	122
7. SONUÇ ve ÖNERİLER	134
KAYNAKÇA.....	135
ÖZGEÇMİŞ	

TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 2.1. <i>BES örneği için OLS artıklarının normallik ve değişen varyans testleri</i>	16
Tablo 2.2. <i>Mekânsal etkileşimler</i>	34
Tablo 2.3. <i>BES örneği için BES katılımcı oranı, İGE ve artıkların Moran I istatistikleri</i>	51
Tablo 2.4. <i>LM test sonuçları</i>	65
Tablo 2.5. <i>Direk etkiler ve dolaylı (spillover) etkiler</i>	68
Tablo 4.1. <i>M-tahmincilerde kullanılan bazı $\psi(\cdot)$ fonksiyonları</i>	108
Tablo 5.1. <i>Normal dağılım için λ parametresinin yanlılık ve MSE sonuçları</i>	110
Tablo 5.2. <i>Student $t(4)$ dağılım için λ parametresinin yanlılık ve MSE sonuçları</i>	111
Tablo 5.3. <i>Karma Normal $(0,90*N(0, 1)+0,10*N(0, 10))$ dağılım için λ parametresinin yanlılık ve MSE sonuçları</i>	112
Tablo 5.4. <i>Karma Normal $(0,80*N(0, 1)+0,20*N(0, 10))$ dağılım için λ parametresinin yanlılık ve MSE sonuçları</i>	113
Tablo 5.5. <i>Karma Normal $(0,90*N(0, 1)+0,10*N(0, 20))$ dağılım için λ parametresinin yanlılık ve MSE sonuçları</i>	114
Tablo 5.6. <i>Aykırı değer durumu için λ parametresinin yanlılık ve MSE sonuçları</i>	115
Tablo 5.7. <i>Normal dağılım için SEM'in eğim katsayısının yanlılık ve MSE sonuçları</i>	116
Tablo 5.8. <i>Student $t(4)$ dağılım için SEM'in eğim katsayısının yanlılık ve MSE sonuçları</i>	117
Tablo 5.9. <i>Karma Normal $(0,90*N(0, 1)+0,10*N(0, 10))$ dağılım için SEM'in eğim katsayısının yanlılık ve MSE sonuçları</i>	118
Tablo 5.10. <i>Karma Normal $(0,80*N(0, 1)+0,20*N(0, 10))$ dağılım için SEM'in eğim katsayısının yanlılık ve MSE sonuçları</i>	119
Tablo 5.11. <i>Karma Normal $(0,90*N(0, 1)+0,10*N(0, 20))$ dağılım için SEM'in eğim katsayısının yanlılık ve MSE sonuçları</i>	120
Tablo 5.12. <i>Aykırı değer durumu için SEM'in eğim katsayısının yanlılık ve MSE sonuçları</i>	121
Tablo 6.1. <i>Normallik ve değişen-varyans testleri sonuçları</i>	130
Tablo 6.2. <i>Moran I testi sonuçları</i>	131
Tablo 6.3. <i>Lagrange testi sonuçları</i>	131

Tablo 6.4. <i>Log-olabilirlik, AIC ve R^2 değerleri</i>	132
Tablo 6.5. <i>Parametrelerin tahminleri</i>	133

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Mekânsal bağımlılık grafikleri	9
Şekil 2.2. Lesage 7 bölge haritası	11
Şekil 2.3. Ulaşım zamanı gölgelendirme haritası	12
Şekil 2.4. Yoğunluk (üsteki) ve uzaklık (alttaki) gölgelendirme haritaları	12
Şekil 2.5. OLS artıkları gölgelendirme haritası	13
Şekil 2.6. (a) BES katılımcı oranı, (b) İGE, (c) OLS artıkları için gölgelendirme haritaları	14
Şekil 2.7. Sınır komşuluk türleri	17
Şekil 2.8. Türkiye il bazında (a) $k_{nn}=4$ ve (b) Queen için komşulukları gösteren haritalar	20
Şekil 2.9. Lesage'in 7 bölgeli haritasında R2'nin birinci derece komşuları	24
Şekil 2.10. Lesage'in 7 bölgeli haritasında R1'in ikinci derece komşuları	24
Şekil 2.11. Bağımlı değişken değerleri arasındaki mekânsal ilişkiler	32
Şekil 2.12. Bağımlı değişken ve bağımsız değişken arasındaki mekânsal ilişkiler	33
Şekil 2.13. Hata terimi değerleri arasındaki mekânsal ilişkiler	33
Şekil 2.14. Mekânsal Ekonometrik Modeller (Elhorst, 2014)	34
Şekil 2.15. BES katılımcı oranı LISA haritası	54
Şekil 2.16. İGE LISA haritası	54
Şekil 2.17. OLS artıkları için LISA haritası	55
Şekil 2.18. Moran saçılım grafiği	56
Şekil 2.19. BES katılımcı oranı Moran saçılım grafiği	57
Şekil 2.20. İGE Moran saçılım grafiği	58
Şekil 2.21. OLS artıklarının Moran saçılım grafiği	59
Şekil 2.22. Lesage seyahat süresi Correlogram grafiği	60
Şekil 2.23. BES katılımcı oranı Correlogram grafiği	60
Şekil 2.24. İGE Correlogram grafiği	61
Şekil 2.25. OLS artıkları Correlogram grafiği	61
Şekil 2.26. Lagrange çarpan testi karar diyagramı	64
Şekil 2.27. Elhorst 3 bölgeli haritası	71

Şekil 6.1. (a) toplam yaş bağımlılık oranı, (b) yaşam endeksi, (c) OLS artıkları için gölgelendirme haritaları	123
Şekil 6.2. Toplam yaş bağımlılık oranı LISA haritası	124
Şekil 6.3. Yaşam endeksi LISA haritası	125
Şekil 6.4. OLS artıkları LISA haritası	125
Şekil 6.5. Toplam yaş bağımlılık oranı Moran saçılım grafiği	126
Şekil 6.6. Yaşam endeksi Moran saçılım grafiği	127
Şekil 6.7. OLS artıkları Moran saçılım grafiği	127
Şekil 6.8. Toplam yaş bağımlılık oranı Correlogram grafiği.....	128
Şekil 6.9. Yaşam endeksi Correlogram grafiği	129
Şekil 6.10. OLS artıkları Correlogram grafiği.....	129

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

k_{nn}	: k-en yakın komşuluk
LM	: Lagrange Çarpan
GNS	: Genel Yuva Mekânsal Model
SAC	: Mekânsal Ardışık Bağımlı Birleşik Model
SDM	: Mekânsal Durbin Model
SDEM	: Mekânsal Durbin Hata Modeli
SAR	: Mekânsal Ardışık Bağımlı Model
SLX	: Mekânsal X Gecikmeli Model
SEM	: Mekânsal Hata Modeli
OLS	: En Küçük Kareler
ML	: En Çok Olabilirlik
MLE	: En Çok Olabilirlik Tahmincisi
STSLs	: Mekânsal İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi
GMM	: Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi
MSE	: Hata Kareler Ortalaması

1. GİRİŞ

“Her şey, her şey ile ilişkilidir, fakat yakın şeyler uzak olanlardan daha fazla ilişkilidir” ifadesi Tobler’in (1970) coğrafyanın ilk kuralı olarak bilinmektedir. Bu ilişki, verilerin analizinde mekânın dikkate alınması gerekliliğini ortaya koymaktadır. Çünkü genellikle bir bölgedeki olumlu veya olumsuz bir gelişme komşu bölgeleri de benzer yönde etkilemektedir. Bu gerçek, mekânsal istatistik ve mekânsal ekonometrinin gelişmesinin sebebidir.

Mekânsal ekonometride veriler uzayda belli bölgelerde veya noktalardaki gözlemlerden elde edilirler ve doğal olarak her bir gözlemin bir de coğrafi koordinatları olur. Klasik regresyon modellerinde gözlemlerden elde edilen değerlerin birbirinden bağımsız olduğu varsayımı vardır. Mekânsal ekonometri, bu varsayımın ihlal edilmesi durumunda klasik regresyon yöntemleri uygun olmayacağı için birbiriyle coğrafi olarak ilişkili verilere modelleme yapmak amacıyla geliştirilmiştir.

Literatür çalışması:

Mekânsal istatistik ve ekonometrik veri analizleri ilk olarak 1940’ların sonu ile 1950’lerin başında Moran (1948), Geary (1954) ve Whittle (1954) tarafından başlamıştır (Cialdea vd., 2014). Üç istatistikçi, Moran (1948), Iyer (1949) ve Geary (1954) mekânsal bağıllığın (spatial autocorrelation) matematiksel ifadelerini ilk kez ortaya koymuşlardır. Bu üç istatistikçi nominal verileri olasılığa dayalı olarak bir bölgedeki aynı tiptekilerin (siyah veya beyaz) oranının mekânsal komşularının etkisiyle değişimlerini araştırmışlardır. Daha sonra onların çalışmaları aralıklı veri için genişletilmiştir. Geary en küçük kareler (ordinary least squares, OLS) artıklarını haritalandırma ve bağımsızlık özelliklerini gösterme üzerinde durmuştur (Getis, 2008).

Mekânsal otokorelasyon kavramı Seattle’daki Washington Üniversitesi’nde 1950’lerin sonunda Michael F. Dacey’in prensipleriyle William L. Garrison ve Edward Ullman’ın çalışmalarına dayanarak doğmuştur. Garrison ve Ullman, alman ekonomik coğrafyacı Walter Christaller’ın 1930’lardaki çalışmalarından çok etkilenmişlerdir. Bu iki coğrafyacı daha sonradan mekânsal analist olacak Michael F. Dacey, Brian Berry, William Bunge, Duane Marble, Richard Morrill, John Nystuen gibi birçok öğrenci yetiştirmiştir ve öğrencilerinden birisi de Waldo Tobler’dir. Böylece “Washington

Okulu” coğrafik manada mekânsal kavramları temellendiren disiplin olarak tanımlanmıştır (Getis, 2008).

1960’ların ortasında, Cliff ve Ord birlikte çalışarak mekânsal otokorasyonu literatüre kazandırmışlardır (Getis, 2008).

Dacey (1968), bölgelerin şekillerinin, büyüklüklerinin ve sınırlarının olası etkilerinin farkına vararak (buna topolojik invaryans demiştir) analizlerinin sonuçlarıyla mekânsal otokorelasyon kavramının ortaya çıkarılmasına yardımcı olmuştur. Dacey çalışmalarında Moran, Krisna Iyer ve Geary’den bahseden ilk coğrafyacıdır (Getis, 2008).

1968’e kadar mekânsal otokorelasyon, “mekânsal bağıllık”, “mekânsal ilişki”, “mekânsal etkileşim”, “mekânsal iç-bağımlılık,” terimleri ile ifade edilmiştir. 1968’den sonra, Cliff ve Ord (1968) “mekânsal otokorelasyon” terimini kullanmışlar ve böylece bu terim mekânsal analizciler tarafından da kullanılmaya başlanmıştır.

Brian Berry ve Duane Marble (1968) yılında Dacey ve Geary’nin çalışmalarından etkilenerek “*Spatial Analysis: A Reader in Statistical Geography*” kitabını yazmışlardır.

“Mekânsal Ekonometri” kavramı ise ilk kez Paelinck (1974) tarafından kullanılmış ve bu nedenle de Paelinck “mekânsal ekonometrinin babası” olarak anılmıştır (Le Gallo ve Chasco, 2015). Paelinck, mekânsal ekonometriyi çok boyutlu ekonometrik problemlerin etkisinde tahminleme ve test problemleri olarak ele almıştır. Daha sonra Leo H. Klaassen ile 1979 yılında “spatial econometrics” isimli kitabı yazmışlardır (Getis, 2008).

Anselin (2010), mekânsal ekonometri için başlangıç tarihini 1979 olarak almıştır. Çünkü o yılda başta Paelinck ve Klaassen’in (1979) “Spatial econometrics” kitabı olmak üzere, Bartels ve Ketellapper (1979) “Exploratory and explanatory analysis of spatial data”, Bennett (1979) “Spatial time series” kitaplarıyla birlikte Hordijk’in (1979) “the Papers of the Regional Science Association on ‘Problems in Estimating Econometric Relations in Space’ ” makalesi yayınlanmıştır.

Paelinck ve Klaassen (1979) “Spatial Econometrics” adlı eserlerinde mekânsal ekonometrinin tanımını vermemişlerdir fakat mekânsal ekonometrinin formüllerini oluşturacak beş önemli prensibi açıklamışlardır (Anselin, 2010). Bu prensipler,

- (i) Mekânsal birbirine bağıllığın önemi,
- (ii) Mekânsal ilişkiler arasındaki asimetri,
- (iii) Diğer bölgelerdeki açıklayıcı faktörün etkisi,
- (iv) Etkileşimin gerçekleşmeden önce ve sonra arasındaki farklılaşma,
- (v) Mekânsal modellerdeki bölgelerin (topolojinin) modellenmesinin açık olması.

1988 yılında Luc Anselin, Walter Isard’ın etkilemesiyle “Spatial Econometrics: Methods and Models” kitabını yazmıştır. Bu kitap mekânsal ekonometrinin başyapıtlarından biri olmuştur. Böylece bu kitap, teorik araştırmacıların ve uygulamacıların kavramlardaki ince farkları daha iyi anlayarak yazılımların gelişmesi üzerinde büyük etkisi olmuştur (Anselin, 2010).

Anselin (1988b) mekânsal etkileri, mekânsal bağıllık ve mekânsal heterojenlik olarak ikiye ayırmıştır.

Ord (1975) bağımlı değişken ve hata teriminde mekânsal bağımlılık olması durumunda mekânsal ekonometrik modeli önermiştir. Fakat bu model Cliff ve Ord (1981) ile popülerlik kazanmıştır (Anselin, 2010). Bu modelde ikinci dereceden komşuluk için Brandsma ve Ketellapper (1979), daha yüksek dereceli komşuluklar için Blommestein (1983, 1985) çalışmalarda bulunmuştur (Ullah ve Giles, 1998). İki farklı mekânsallığa (iki farklı komşuluk ve iki farklı mekânsallık parametresi) sahip bağımlı değişken (biparametric model) için Brandsma ve Ketellapper (1979) çalışmalarda bulunmuştur. Burridge (1981), hem bağımlı değişken hem de bağımsız değişkende mekânsallığın bulunduğu Durbin’in zaman serileri modelini, mekânsal model olarak uyarlamıştır. Haining (1978) mekânsal hareketli ortalamalar modeli üzerinde çalışmıştır. Mekânsal heterojenlik üzerinde Casetti (1972, 1986) çalışmalarda bulunmuştur (Anselin, 2010). Bağımlı değişkende, bağımsız değişkende ve hata teriminde mekânsal bağımlılığın olduğu modeller üzerine Manski (1993) çalışmalar yapmıştır.

Ord (1975), mekânsal ekonometrik modeller için en çok olabilirlik tahmincisini (MLE) geliştirirken, Anselin (1980) araç değişkenler (Instrumental Variables, IV) ve Kelejian ve Prucha (1998, 1999) genelleştirilmiş momentler yöntemini (GMM) geliştirmişlerdir. Daha sonraları Kelejian ve Prucha (2007, 2010) hem mekânsal bağıllığın hem de mekânsal heterojenliğin aynı anda olması durumundaki modeller için çalışmalar yapmışlardır. Bu modellerin tahmincileri üzerine LeSage ve Pace'in (2009) de çalışmaları bulunmaktadır.

Cliff ve Ord (1972) OLS artıkları ile Moran *I* testini önermişlerdir. Sonraları Hordijk (1974) ile Bartels ve Hordijk (1977) Moran *I* üzerinde çalışmaya devam etmiştir. En çok olabilirliğe dayalı Wald, olabilirlik oran ve Lagrange çarpanları testleri üzerinde BurrIDGE (1980), Anselin (1988a), Bera ve Yoon (1992) çalışmalar yapmıştır (Anselin ve Florax, 1995).

Kelejian ve Robinson (1992) Moran *I* ile benzer fakat modelin lineer olması ve hataların normal dağılması varsayımını gerektirmeyen bir test önermişlerdir (Ullah ve Giles, 1998)

Anselin (1995) lokal Moran *I* ve lokal Geary' C istatistiğini geliştirerek “hot spots” kavramını çıkarmıştır. Bu istatistiklere Mekânsal ilişkinin yerel göstergesi (Local Indicators of Spatial Association, LISA) adını vermiştir.

Mekânsal stokastik süreçler ile ilgili çalışmalar ilk olarak Whittle'in (1954) sonuçları ile başlamış sonraları Besag (1974), Besag ve Moran (1975), Ord (1975) ve Ripley (1981)'in çalışmaları ile devam etmiştir (Anselin, 2010).

Mekânsal ekonometrik tekniklerin gelişmesiyle birlikte bazı kitaplarda da mekânsal ekonometri bölümüne yer verilmeye başlanmıştır. Örneğin Ullah ve Giles (1998) “The Handbook of Applied Economic Statistics”, Baltagi (2001a) “A Companion to theoretical econometrics”, Mills ve Patterson (2006) “Palgrave handbook of econometrics”, Matyas ve Sevestre (2008) “The Econometrics of Panel Data” yazdıkları kitaplarında mekânsal ekonometri konularına yer vermişlerdir (Anselin, 2010).

Mekânsal ekonometrik yazılım alanındaki gelişmeler 1990'larda daha çok yoğunluk kazanmıştır. Anselin (1992) tarafından SpaceStat yazılımı yayınlanana kadar

mekânsal ekonometrik analizler bazı istatistiksel yazılımların içine ya bir makroyla ya da bir script ile eklenmesi mümkün oluyorken, Anselin'den sonra, Kaluzny vd. (1996) S+Spatialstats ticari ürününü tek bir yazılım olarak çıkarmışlardır. MATLAB için LeSage (1999), Pace (1998) mekânsal toolbox geliştirmişlerdir. R programında, mekânsal ekonometrik analizler için Roger Bivand (2002) ve ekibi “spdep” paketini oluşturarak yayınlamışlardır. 2003 yılında Luc Anselin GeoDa markası altında mekânsal paket programını kurmuştur. GIS yazılımlarından ESRI ArcGIS, 2006 yılında yayınladığı 9.2 versiyonuna mekânsal toolbox koymuştur (Anselin, 2010).

Mekânsal veriler ve analizlerle ilgili farklı alanlarda da çalışmalar yapılmıştır. Mekânsal analizlerin gelişmesine katkı sağlayan coğrafya alanındaki ilk kitaplar Berry ve Marble (1968), Curry (1970), Gould (1970) ve Tobler (1970) tarafından yazılmıştır. Mekânsal verilerle ilgili jeolojide Davis (1973), ekolojide Kershaw (1964), meteorolojide Dixon ve Spackman (1970), ekonometride Fisher (1971) ve Struyk (1970) ve yine ekonomide Granger (1969, 1974) ilk geniş çaplı çalışmalarda bulunanlardır (Unwin ve Hepple, 1974, Anselin, 2010). Isard (1960), Paelinck ve Nijkamp (1975), Hordijk ve Paelinck (1976) bölgesel bilim alanında, mekânsal etkiler konularını işlemişlerdir (Anselin, 2010).

Panel mekânsal ekonometrik modellerle ilgili Baltagi (2001b, 2008), Elhorst (2001, 2003), Elhorst ve Zeilstra (2007), Kapoor vd. (2007), Fingleton (2008), Lee ve Yu (2010) çalışmalarda bulunmuşlardır (Anselin, 2010).

Mekânsal gizil (latent) değişkenlerde modeller konuları özellikle de mekânsal probit ve mekânsal tobit modeller üzerinde Case (1992), McMillen (1992, 1995), Brock ve Durlauf (1995), Pinkse ve Slade (1998), LeSage (2000), Kelejian ve Prucha (2001), Beron vd. (2003), Fleming (2004) ve Smith ve LeSage (2004)'in çeşitli çalışmaları bulunmaktadır (Anselin, 2010).

Akış modellerinde mekânsal ilişkiyi test etmede ve modellemede Chun (2008), Fischer ve Griffith (2008), LeSage ve Pace (2008), LeSage ve Polasek (2008), ve Griffith (2009) çalışmalar yapmışlardır (Anselin, 2010).

Mekânsal modellerde direk ve dolaylı etkiler üzerine LeSage ve Pace (2009), Elhorst (2010, 2014), Elhorst ve Vega (2013, 2017) ve Vega ve Elhorst (2015) çalışmalar yapmıştır.

Çalışmanın amacı ve kapsamı:

Mekânsal hata modelinin klasik tahmincileri, veri setinde aykırı değer olmaması durumunda iyi sonuçlar vermektedir. Fakat gerçek hayatta hatalı kayıt tutulması, beklenmedik ani olayların gelişmesi vb. sebeplerle gözlemlerde aykırı değerler bulunabilmektedir. Bu çalışma kapsamında, mekânsal hata modeli (SEM) için veri setinde aykırı değerler bulunması durumunda bunlardan etkilenmeyen veya az etkilenen robust bir tahminci önerilmiştir. Bu tahminci, ψ fonksiyonları yardımıyla robustlaştırılan olabilirlik eşitliklerine dayalıdır. Robust maksimum olabilirlik (RMLE) olarak ifade edilen tahmincinin performansı farklı hata dağılımları altında ve aykırı değerler durumunda Monte Carlo simülasyonu yardımıyla araştırılmıştır. Simülasyon sonuçları göstermiştir ki RMLE veri setinde aykırı değerler olması durumunda klasik tahmincilere göre daha küçük hata kareler ortalaması (MSE) ve yan (bias) değeri sağlamaktadır ve normal dağılım durumunda ise etkinlik kaybı oldukça küçüktür. Ayrıca, gerçek hayattan alınan bir uygulama üzerinde, aykırı değerli ve aykırı değersiz veri seti yardımıyla RMLE'nin iyi performansı gösterilmiştir.

İkinci bölümde, mekânsal ekonometri konusu anlatılmış ve çeşitli örnekler yardımıyla incelenmiştir. Bu bölümde mekânsal etkiler, mekânsal komşuluklar ve ağırlık matrisleri ile bunların varsayımları incelenerek mekânsal ekonometrik modeller tanıtılmış ve mekânsal bağımlılık parametresinin varsayımları ispatlanmıştır. Daha sonra mekânsal ekonometrik testler ve direk ve dolaylı etkiler açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde mekânsal hata modeli için klasik tahminleme yöntemleri anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, Huggins (1993), Sinha ve Rao (2009) ve Schmid ve Münnich (2014) tarafından önerilen yöntem, SEM'e adapte edilmiş ve aykırı değerlere karşı robust bir tahminci elde edilmiştir.

Beşinci bölümde önerilen tahmincinin klasik yöntemlere karşı performansı yan ve MSE kriterlerine göre Monte Carlo simülasyonu yardımıyla karşılaştırılmış ve tablolar halinde verilmiştir.

Altıncı bölümde, gerçek hayattan alınan bir uygulama üzerinde, aykırı değerli ve aykırı değersiz veri seti yardımıyla robust tahmincinin performansı araştırılmıştır.

Sonuç ve öneriler bölümünde ise çalışmanın değerlendirmesi, bulguları ve önerileri sıralanmıştır.

2. MEKÂNSAL EKONOMETRİ

Mekânsal ekonometri çalışmalarında, gözlemler uzayda belli bölgelerde ölçülürler ve birbirlerinden etkilenirler. Anselin (1988b) bu etkileri ikiye ayırmıştır. Mekânsal etkilerin incelenebilmesi, komşulukların tanımlanmasıyla başlayan bir süreçtir. Bu nedenle literatürde çeşitli komşuluk türleri tanımlanmıştır. Fakat mekânsal ekonometrik modellerde standartlaştırılmış komşuluklarla çalışıldığından bu komşuluklar, ağırlık matrisine dönüştürülmüştür. Mekânsal bağımlılığın bulunduğu değişkene bağlı olarak farklı modeller tanımlanmıştır. Bu çalışma kapsamında mekânsal bağımlılığın hata terimi üzerinde olması durumu daha detaylı incelenecektir. Mekânsal bağımlılık testleri değişkenlerin bağımlılığı ile ilgili bilgi edinmeyi sağlamaktadır. Bu konular sırasıyla alt başlıklarda anlatılacaktır.

2.1. Mekânsal Etkiler

Mekânsal ekonometri, mekânsal etkilerin dikkate alındığı modelleri ve modellerin tahminlerini kapsayan bir alandır. Anselin (1988b) bu etkileri mekânsal bağımlılık (spatial autocorrelation) ve mekânsal heterojenlik olacak şekilde iki başlıkta incelemiştir. Bu iki özellik bir arada mekânsal etkiler olarak adlandırılmaktadır (Can, 1990).

Mekânsal bağımlılık: Bir bölgenin coğrafi konumu itibariyle komşu bölgelerden etkilenmesidir.

Mekânsal heterojenlik: Alan üzerinde ilişkilerdeki değişkenliği ifade etmektedir (Lesage, 1999).

Zaman serilerinde sadece tek yönlü bir ilişki varken (geçmiş-gelecek), mekânsal ekonometride tüm bölgelerin birbirini etkilemesinden dolayı çok yönlü bir ilişki vardır ve bu noktada zaman serilerinden ayrılmaktadır (Whittle, 1954).

2.1.1. Mekânsal heterojenlik

Mekânsal heterojenlik iki şekilde ortaya çıkmaktadır:

- Hatalarda sabit olmayan (değişen) varyans (spatial heteroscedasticity)
- Katsayılarda değişkenlik (spatial regimes)

İlk durum için robust standart hatalar kullanmak alternatif bir çözüm olabilir. İkinci durum için ise coğrafi ağırlıklandırılmış regresyon (geographical weighted regression – GWR) veya değişen katsayı modeli (varying coefficient model – VCM) kullanılabilir. Fakat her iki durum ortaya çıktığında ise uygun model geliştiren çalışmaların sayısı oldukça azdır. OLS'nin varsayımlarından birisi de hataların varyansının sabit olması olduğuna göre mekânsal heterojenlik durumunda bu varsayım ihlal edilmiş olacaktır.

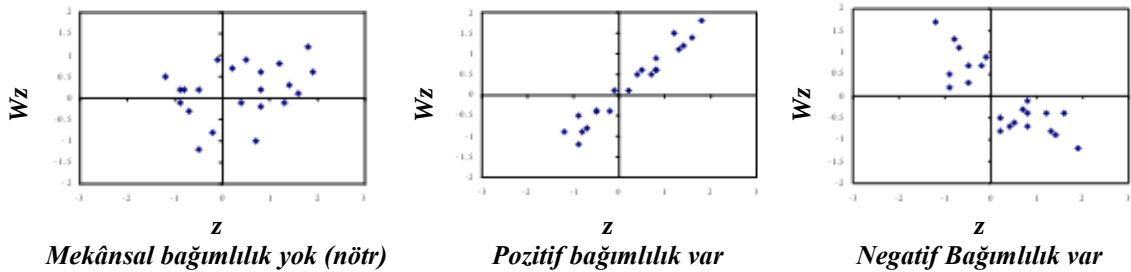
Anselin'e (1988b) göre mekânsal heterojenliğin iki sebebi vardır:

- Model uygun şekilde kurulamamıştır.
- Modelde eksik değişkenler vardır.

2.1.2. Mekânsal bağımlılık

Mekânsal bağımlılık, en genel tanımıyla gözlemlerin, uzayda bulundukları komşu noktalardan veya komşu bölgelerden etkilenmesidir. Bu durum genellikle coğrafi bölgelerde gözlenen verilerde görülmektedir. Tobbler'in tanımlamış olduğu coğrafyanın ilk kuralı olan her şey birbiriyle ilişkilidir ama yakın olanlar daha çok ilişkilidir sözü tam da bu durumu açıklamaktadır.

Mekânsal etkileşim (bağımlılık) bir değişkenin uzay boyunca kendisiyle olan ilişkisidir. Birbirine yakın komşuların arasındaki bağımlılık pozitif, negatif veya nötr (sıfır) olabilir. Şekil 2.1'de her hangi bir z değişkeni için bu 3 durum gösterilmiştir,



Şekil 2.1. Mekânsal bağımlılık grafikleri

Örneğin bir bölgedeki ev fiyatları, komşu bölgelerdeki ev fiyatlarından etkilendiği için mekânsal bağımlılığın ortaya çıkması doğaldır. Yani ev fiyatı yüksek olan bölgenin

komşuluğundaki evlerin fiyatları da diğer bölgelere göre yüksek olmaktadır. Ev fiyatlarını etkileyen diğer faktörlerden birisi de ticaret merkezleri, okul, hastane vb. merkezlere olan yakınlıklarıdır. Mekânsal modelde bağımlı değişken ev fiyatları, bağımsız değişken de ticaret merkezlerine olan uzaklık olarak alınabilir. Gerçek hayatta ticaret merkezlerinin bulunduğu bölgelerin de birbirinden etkilendikleri görülmektedir yani bir bölge ticaret merkezi ise komşu bölgelerdeki ticaret merkezleri de diğer bölgelere göre daha fazla gelişme göstermektedir. Dolayısıyla bir mekânsal etkileşim söz konusudur. Ayrıca ev fiyatlarını açıklayan diğer değişkenler ise binanın yaşı, oda sayısı, daire sayısı vb. dir. Bunlar modelde bağımsız (açıklayıcı) değişken olarak yer almaz ise hata teriminde ifade edileceklerdir. Binaların kat sayısı ise komşu bölgelerdeki kat sayılarına benzerlik göstermektedir dolayısıyla hata teriminde de bir mekânsal korelasyon görülmesi olasıdır. Burada ev fiyatları örneğinin sadece konuyu açıklamakta kullanıldığı ve gerçek hayatta ise daha detaylı bağımsız değişkenlerle detaylı hesaplamaların yapılması gerektiği unutulmamalıdır.

Verilen örnek üzerinden mekânsal bağımlılık çeşitleri aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

- Bağımlı değişkende mekânsal bağımlılık: Bir bölgedeki ev fiyatları, komşu bölgedeki ev fiyatlarından etkilendiği için bağımlı değişkende mekânsal bağımlılık vardır.
- Bağımsız değişkende mekânsal bağımlılık: Ticaret merkezleri komşu bölgedeki ticaret merkezlerinden etkilendiğinden bağımsız değişkende mekânsal bağımlılık vardır.
- Hata teriminde mekânsal bağımlılık: Çeşitli nedenlerle toplanamayan verilerden dolayı ve bu verilerin bazılarının (kat sayısı gibi) mekânsal ilişkiye sahip olmasından dolayı hata teriminde mekânsal bağımlılık vardır.

Mekânsal bağımlılığı Lesage (Lesage ve Pace, 2009) kendi tasarladığı özel bir örnekle açıklamıştır. Lesage bir düzlemi Şekil 2.2. verildiği gibi yedi bölgeye ayırmış ve en ortadaki bölgeye de Merkezi İş Alanı (Central Business District, CBD) adını vermiştir. Bu bölgeler birbirine komşu olacak şekilde ve CBD'den geçen tek bir otoyolla birbirlerine bağlanmışlardır. Bu yol harici herhangi ikinci bir yol yoktur. Bölgelerden üçü, CBD'nin batısında üçü de doğusunda yer almaktadır.

R1	R2	R3	R4 CBD	R5	R6	R7
Otoyol						
R1	R2	R3	R4 CBD	R5	R6	R7
Doğu						Batı

Şekil 2.2. Lesage 7 bölge haritası

Mekânsal ilişkiyi açıklayabilmek için bağımlı değişken olarak seyahat süresi kullanılmış ve bu süre günlük ortalama olarak dakika bazında alınmıştır. Bağımsız değişkenler ise nüfus yoğunluğu (her birim kareye düşen kişi sayısı) ve bölgelerin CBD'ye olan mil olarak uzaklıklarıdır.

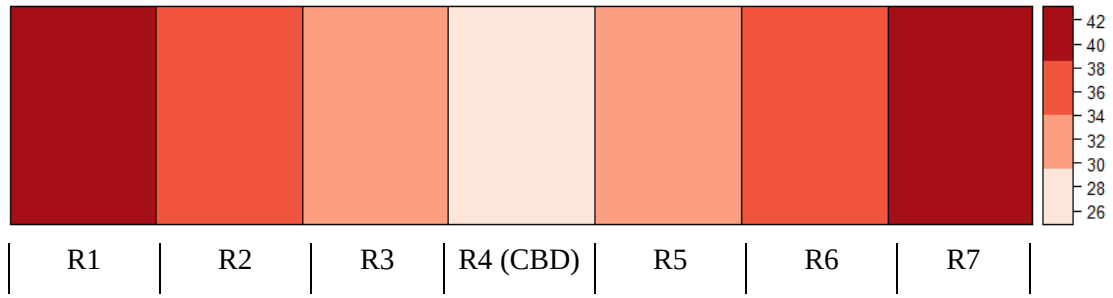
$$y = \begin{pmatrix} \text{Seyahat süresi} \\ 42 \\ 37 \\ 30 \\ 26 \\ 30 \\ 37 \\ 42 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \text{Yoğunluk} & \text{Uzaklık} \\ 10 & 30 \\ 20 & 20 \\ 30 & 10 \\ 50 & 0 \\ 30 & 10 \\ 20 & 20 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R1 & \text{Kent dışı bölge} \\ R2 & \text{Uzak banliyö} \\ R3 & \text{Yakın banliyö} \\ R4 & \text{CBD} \\ R5 & \text{Yakın banliyö} \\ R6 & \text{Uzak banliyö} \\ R7 & \text{Kent dışı bölge} \end{pmatrix}$$

Uzak bölgelerin (R1, R7) seyahat süresi yakın bölgelere (R3, R5) göre daha fazla olduğu örnekten görülmektedir. Ayrıca uzaklıklara göre bölgelerin seyahat süreleri birbirine eşittir (R1, R7 gibi). Buradan da görüleceği üzere bağımsızlık bu veri seti için ihlal edilmiş olmaktadır. Burada CBD için uzaklık 0 mil olmasına rağmen seyahat süresi 26 dakika alınmıştır. Bu süre bölgenin kendi içindeki ortalama seyahat süresidir. Bir bölgeye ulaşmak için başka bölgelerden geçilmektedir, geçilen bölgenin kendi trafik yoğunlukları da seyahat sürelerine dâhil edilmiştir. Buradaki veriler günlük ortalama verilerdir ve simülasyon ile hesaplanmışlardır. Bu nedenle yoğun saatlere göre sürede farklılık görülebilir.

Mekânsal Gölgeleme (Choropleth) haritaları

Gölgeleme (Choropleth) haritaları, verileri aralıklara göre renk tonlarında ifade ederler. Aralıklar standart sapma, doğal kırılımlar ve çeyreklikler gibi yöntemlerle belirlenir (Günay, 2008).

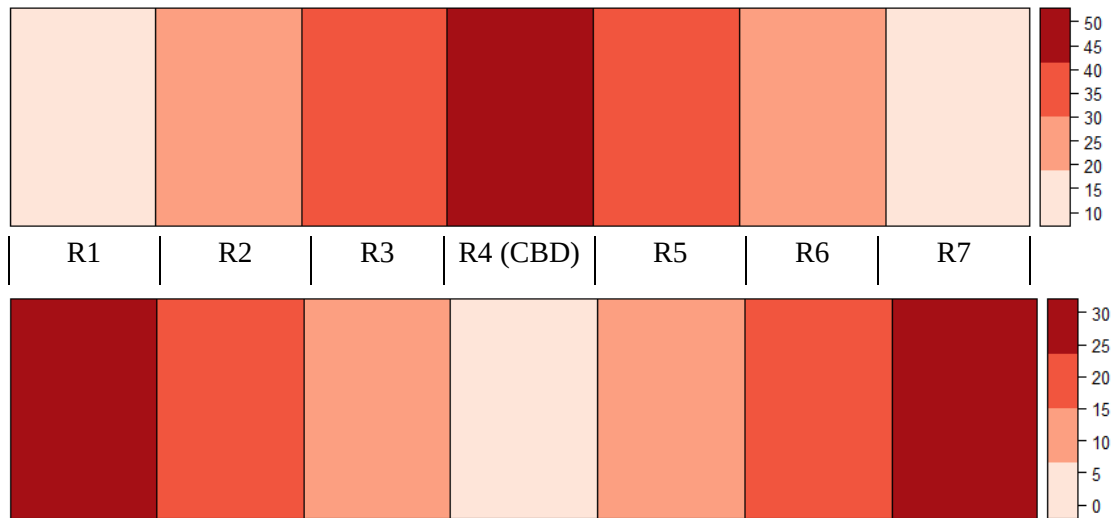
Lesage'in örneği için gölgeleme haritaları Şekil 2.3-2.5'de verilmiştir.



Şekil 2.3. Ulaşım zamanı gölgeleme haritası

Bağımlı değişken ulaşım zamanı için gölgeleme haritasında görüldüğü üzere doğudaki ve batıdaki aynı uzaklıktaki bölgelerin CBD'ye ulaşım süreleri aynı olduğundan renkleri de aynı çıkmıştır ve merkeze doğru simetrik bir şekilde azalma görülmektedir. Ulaşım süreleri merkeze doğru benzer yapılarda olduğu ve komşularından etkilendiği, yani mekânsal etkinin varlığı haritadan görülebilmektedir.

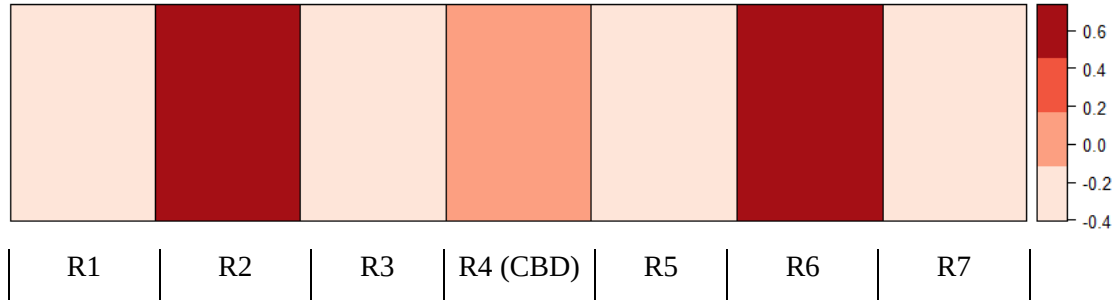
Bağımsız değişkenler için gölgeleme haritası Şekil 2.4'de verilmiştir.



Şekil 2.4. Yoğunluk (üstteki) ve uzaklık (alttaki) gölgeleme haritaları

Haritalardan görüldüğü üzere renkler arasında düzenli örüntü vardır ve dolayısıyla da bölgeler arasında ilişki vardır. Bu durumda da bağımsız değişkenler arasında mekânsal etkileşimin olduğu söylenebilir.

OLS artıkları için Gölgeleme harita ise Şekil 2.5’de verilmektedir.



Şekil 2.5. OLS artıkları gölgeleme haritası

Haritada renklerin düzenli geçişi dikkate alındığında bölgeler arasında artıklar bakımından mekânsal ilişkinin varlığı görülebilir.

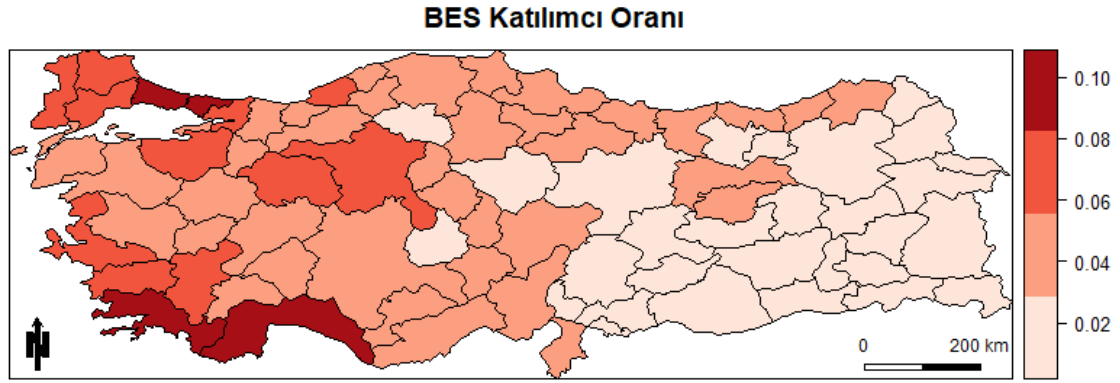
Bireysel Emeklilik Sistemi (BES) örneği

Mekânsal etkileri gerçekçi bir örnek üzerinde göstermek için Türkiye’de 2013 yılında Bireysel Emeklilik Sistemi’ne (BES) katılanların oranları ve bu oranı etkileyen bazı bağımsız değişkenler il bazında alınarak incelenmiştir. Burada bağımlı değişken olarak BES’e katılanların il nüfusuna oranı alınmıştır. Bağımsız değişken olarak ise İnsani Gelişim Endeksi (İGE), işgücü, işsizlik, şehirlilik, bankalarda kişi başına düşen mevduat oranı, ilkokul mezunlarının oranı ve okuma yazma bilmeyenlerin oranları alınmıştır.

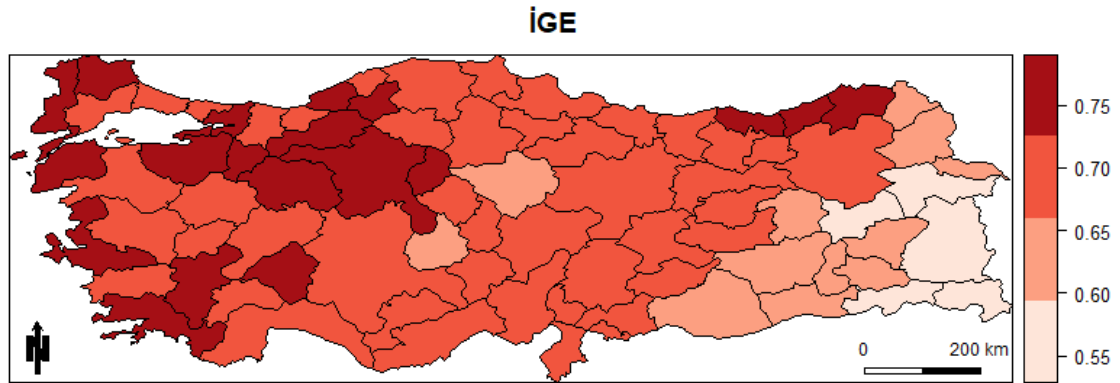
Değişkenler farklı kurumlar tarafından yayınlanmaktadır. Bireysel Emeklilik Sistemi’ne (BES) ait rakamlar Emeklilik Gözetim Merkezi tarafından düzenli olarak tutulmaktadır. İnsani Gelişim Endeksi’ni (İGE) Türkiye Ekonomi Politikaları Araştırma Vakfı (TEPAV) Birleşmiş Milletler Kalkınma Programı’nı baz alarak ölçmüş ve yayınlamıştır. İnsani Gelişim Endeksi (İGE) 0 ile 1 arasında değer almaktadır. Bankalarda kişi başına düşen mevduat oranı verisi Türkiye Bankalar Birliği’nden alınmıştır. Diğer değişkenler ise TÜİK tarafından açıklanmaktadır.

BES katılımcı oranı örneği için mekânsal gölgelendirme haritaları

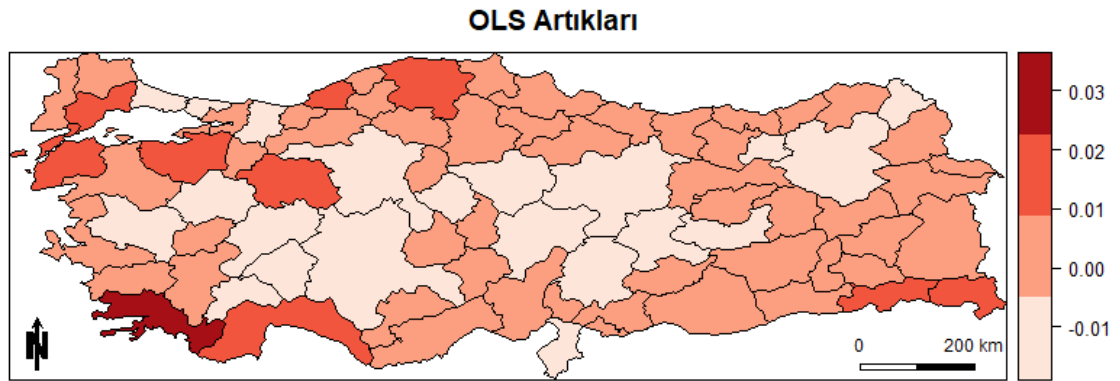
İlk olarak BES katılımcı oranı örneğinde mekânsal bağımlılığın var olup olmadığını görmek için gölgelendirme haritaları oluşturulmuş ve Şekil 2.6'da verilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 2.6. (a) BES katılımcı oranı, (b) İGE, (c) OLS artıkları için gölgelendirme haritaları

Haritalar oluşturulurken veriler 4 gruba ayrılmış ve farklı renklerle tanımlanmışlardır.

Gölgelendirme haritaları, bağımlı değişken BES katılımcı oranı, bağımsız değişkenlerden İGE, ve OLS artıkları baz alınarak oluşturulmuştur. Bu haritalarda dikkat edilmesi gereken husus benzer renk tonlarının kümelenmiş olup olmadığıdır. Belirli bölgelerde kümelenme varsa bu durum global mekânsal bir korelasyon varlığına işarettir.

Haritalar genel olarak incelendiğinde, benzer veriler belli bölgelerde yan yana gruplandığından global mekânsal bir korelasyon varlığından söz edilebilir.

BES katılımcı oranı dikkate alındığında bölgelerde mekânsal bir dokunun olduğu görülmektedir. Örneğin doğu ve güneydoğu Anadolu bölgesi aynı renge dolayısıyla aynı grup veriye sahipken orta Anadolu'nun büyük kısmı ve Karadeniz bölgesi de kendi içinde aynı grup veriye sahiptir. Ayrıca harita incelendiğinde BES katılımının İç Anadolu'nun batısı, Marmara, Ege ve Batı Akdeniz bölgesindeki bazı şehirlerde daha gelişmiş olduğu görülmektedir. Doğu ve Güneydoğu Anadolu Bölgesi'nde ise BES katılımı oldukça düşük orandadır. BES katılım oranının en yüksek olduğu il 0,102 ile Muğla olurken, en düşük olduğu il 0,008 ile Muş olmuştur.

İGE haritası incelendiğinde, BES katılımcı oranı haritasıyla örtüştüğü görülmektedir. Endeks değeri Trakya, Ege, orta kuzey batı Anadolu ve doğu Karadeniz bölgelerindeki birçok şehirde en yüksek grupta yer almaktadır. İGE değeri en yüksek 0,7743623 ile Eskişehir'de olurken, en düşük 0,5443289 ile Ağrı olmuştur.

OLS artıkları haritasında ise durum farklıdır. Orta Anadolu'nun büyük kısmı aynı renk kümesi içindeyken Anadolu'nun kıyı kesimleri ile doğu-güneydoğu bölgesinin büyük kısmı da kendi içinde aynı renk kümesi içerisindedir.

BES katılımcı oranı örneği için normallik ve değişen varyans testleri

Mekânsal bağımlılık, hatalarda normal dağılıma sahip olmama ve değişen varyansa sebep olabilmektedir. Bu nedenle BES katılımcı örneği için normallik testi ve değişen varyans testine bakmak gerekir.

OLS artıkları için yapılan normallik ve değişen varyans test sonuçları aşağıdaki Tablo 2.1. de verilmiştir.

Tablo 2.1. *BES örneği için OLS artıklarının normallik ve değişen varyans testleri*

Test	Test istatistiği değeri	<i>p</i> olasılık değeri
Jarque-Bera (Normallik testi)	39,7929	2,286e-09
Breusch-Pagan (Değişen Varyans testi)	18,3428	0,01052

Tablo 2.1 incelendiğinde, %5 anlamlılık düzeyinde Jarque-Bera testine göre hataların normal dağılıma sahip olmadığı, Breusch-Pagan testi sonuçlarına göre de değişen varyans olduğu görülmektedir.

2.2. Mekânsal Komşuluklar

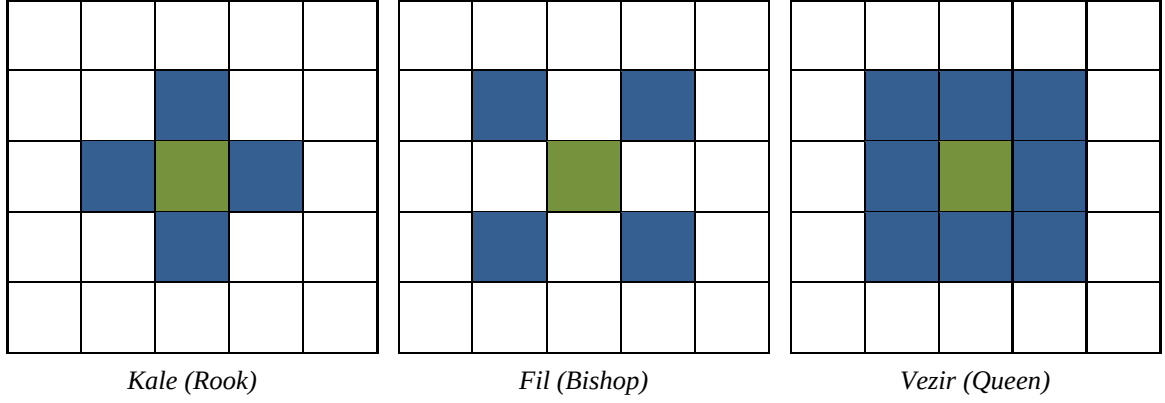
Mekânsal ilişkiyi analiz etmede, bölgeler arasındaki ilişkileri ifade etmek için komşuluk matrisleri kullanılır. Mekânsal komşuluklar sınıra dayalı, uzaklığa dayalı ve hem sınıra hem de uzaklığa dayalı olacak şekilde oluşturulmaktadır.

Sınıra dayalı komşuluklarda her iki bölge de birbirinin komşusu olacağından komşuluk matrisi simetriktir fakat uzaklığa dayalı komşuluk matrisi her zaman simetrik olmayabilir.

n bölge olduğunda C komşuluk matrisi $n \times n$ boyutludur ve sınıra dayalı komşuluklarda 0 ve 1 değerini alırken, uzaklığa dayalı komşuluklarda tanımlanan uzaklığın birim cinsinden değerini alır.

2.2.1. Sınıra dayalı komşuluklar

Anselin (1988b), sınır komşuluğunu satranç oyununa benzeterek farklı komşuluk tanımları geliştirmiştir. Bunlar kale (rook) , fil (bishop) ve vezir (queen) komşuluğudur. Bu komşuluk türü ortak sınırlara dayandığı için komşuluk matrisleri simetrik olmaktadır. Bu komşuluklar Şekil 2.7’de gösterilmiştir.



Şekil 2.7. *Sınır komşuluk türleri*

Şekil 2.7’de görüldüğü üzere eğer iki bölge birbirleriyle kale veya fil komşuluğa sahipse aynı zamanda vezir komşuluğa da sahip olmaktadır.

i ve j bölgeleri göstermek üzere, n toplam bölge sayısı olduğunda, $n \times n$ boyutlu C komşuluk matrisi elemanları c_{ij} olmak üzere, en çok kullanılan sınıra dayalı komşuluk matrislerinden alt başlıklarda kısaca bahsedilecektir.

2.2.1.1. Kale (Rook) komşuluk matrisi

Kale komşuluğuna göre, i ve j bölgeleri ortak bir kenarı paylaşıyorlarsa komşulardır, yani

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ ve } j \text{ ortak bir kenarı paylaşıyorsa} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.1.2. Fil (Bishop) komşuluk matrisi

Fil komşuluğuna göre ise, bölgeler ortak bir köşeyi paylaşıyorlarsa komşulardır, yani

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ ve } j \text{ ortak bir köşeyi paylaşıyorsa} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.1.3. *Vezir (Queen) komşuluk matrisi*

Vezir komşuluğunda ise bölgeler ortak bir kenarı veya köşeyi paylaşırlar, yani

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ ve } j \text{ ortak bir köşeyi veya kenarı paylaşıyorsa} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Lesage'in seyahat süresi örneği için Queen komşuluk matrisi

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde. Bu matris şu şekilde yorumlanabilir, 1. Satıra bakıldığında R1 bölgesi sadece R2 ile komşu olduğundan sadece R2 de 1 değerini almıştır ve diğer elemanları sıfırdır. Benzer şekilde 2. satıra bakıldığında R2 bölgesinin komşuları da R1 ve R3 olduğu için sadece bu bölgelerde 1 değerini almıştır. Benzer yorumlar diğer satırlar için yapılabilir.

2.2.1.4. *Paylaşılan sınır uzunluğu komşuluk matrisi*

Gerçek uygulamalarda bölgelerin birbiriyle sınır uzunlukları farklılık gösterebilmektedir. Bazı durumlarda veriler bölgelerin birbiri arasındaki sınır uzunluklarıyla orantılı şekilde etkileşime sahip olabilir.

Eğer paylaşılan sınır uzunluğunun oranının etkisi olduğu bir komşuluk matrisi kullanılmak istenirse, bu komşuluk kullanılabilir. c_{ij} , C komşuluk matrisinin elemanları olmak üzere,

$$c_{ij} = \frac{I_{ij}}{I_i} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada I_{ij} i ve j bölgeleri arasında ortak sınır uzunluğu ve I_i i . bölgenin toplam sınır uzunluğudur.

2.2.2. Uzaklığa dayalı komşuluklar

Bu bölümdeki komşuluk matrisleri i . ve j . bölgeler arasındaki merkezi bir d_{ij} uzaklığına dayanmaktadır. Bölgeler arasındaki uzaklık arttıkça aralarında mekânsal etkileşim de azalmaktadır. Bu nedenle de azalan fonksiyonlar yardımıyla ifade edilmektedirler.

2.2.2.1. k_{nn} -en yakın komşuluk

Her bir mekânsal i . bölgenin j . bölgeye merkezi uzaklığı $i \neq j$ olmak üzere $d_{ij(1)} \leq d_{ij(2)} \leq \dots \leq d_{ij(n-1)}$ şeklinde sıralansın, daha sonra $k = 1, 2, \dots, n - 1$ olmak üzere i 'ye en yakın $N_k(i) = \{j(1), j(2), \dots, j(k)\}$ şeklinde k birimlik set oluşturulsun. Buradan hareketle verilen her bir k için k -en yakın komşuluk matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur. Böylece c_{ij} aşağıdaki gibi değer alır:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in N_k(i) \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.5)$$

k -en yakın komşuluk matrisi simetrik matris olmayabilir. Matrisin simetrik olması için aşağıdaki form kullanılabilir:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in N_k(i) \text{ veya } i \in N_k(j) \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.6)$$

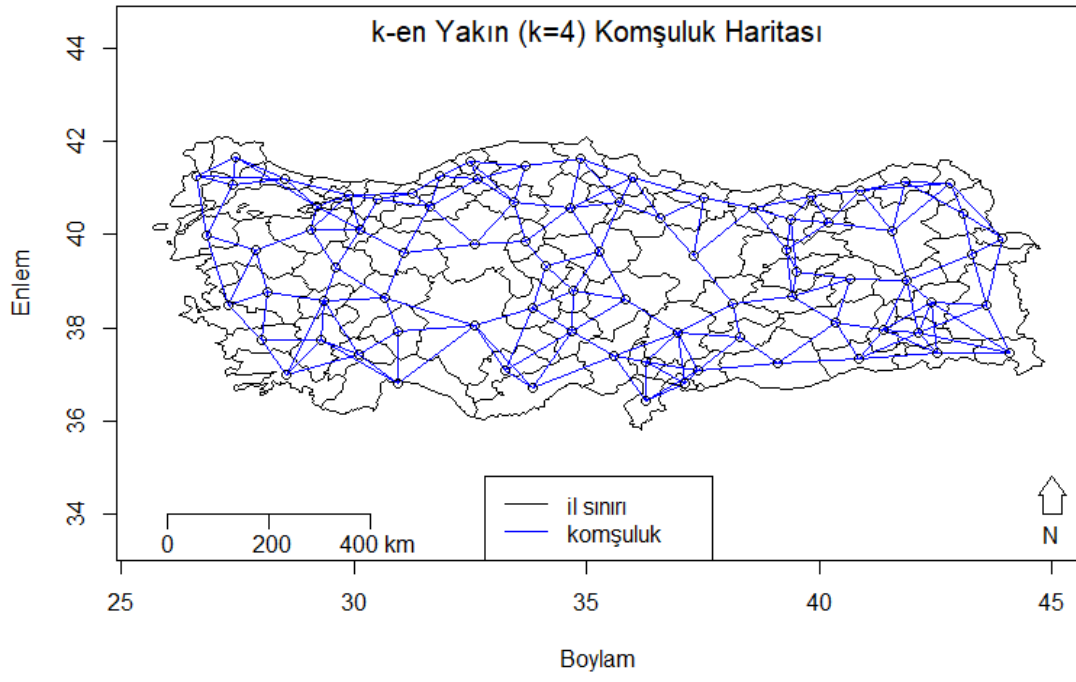
Bu ağırlık matrisinin hesaplanmasında k 'nın seçimi önemlidir. Uygulamalarda genellikle 4 alınmaktadır.

Her bir bölgenin k tane komşusu olacağı için komşuluk matrisinde nk tane sıfır olmayan elaman olacaktır. Böylece komşuluk matrisinin sıfır olmayan elemanlarının oranı $\frac{nk}{n^2} = \frac{k}{n}$ olacaktır (Pace ve Barry, 1997).

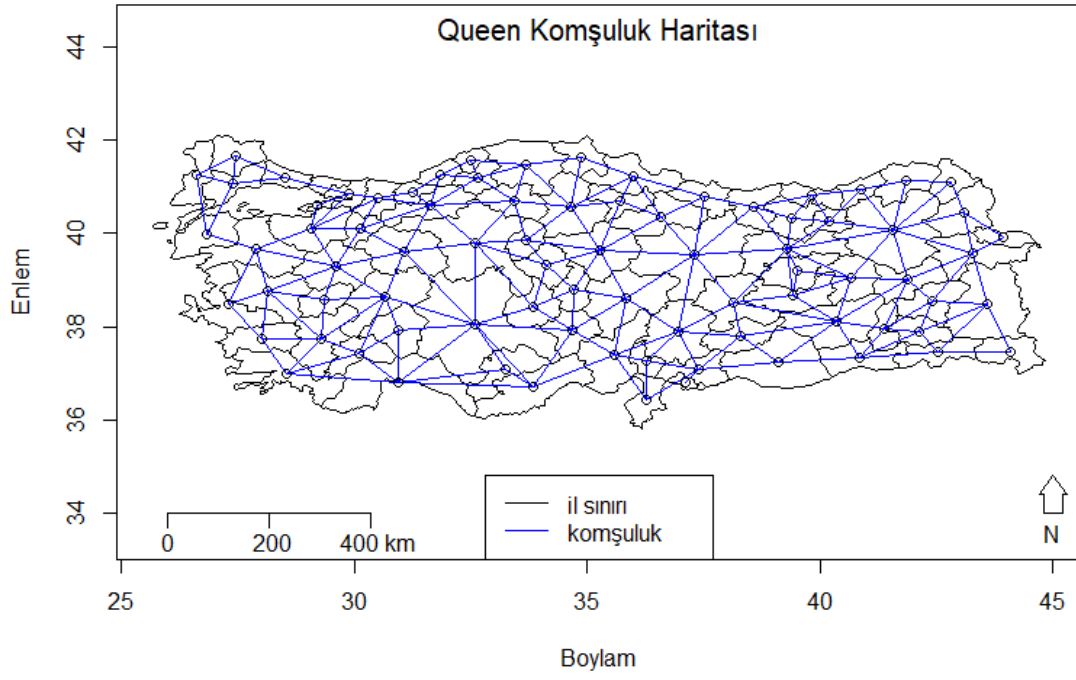
Bu komşuluk türünde her bir bölgenin komşusu k olacağından komşuluk matrisinin satır toplamaları hep aynı ve k olacaktır.

Türkiye il bazında sınır komşuluk için haritalar

Türkiye haritası üzerinde k_{nn} -en yakın komşuluk ($k = 4$ için) ve Queen komşuluk grafikleri R programında elde edilmiş ve Şekil 2.8'de verilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 2.8. Türkiye il bazında (a) $k_{nn}=4$ ve (b) Queen için komşulukları gösteren haritalar

Şekil 2.8 incelendiğinde Türkiye’de sınır komşusu sayısı 4’den fazla olan iller mevcuttur. Örneğin Eskişehir $k_{nn}=4$ için Konya ile komşu değilken Queen baz alındığında komşu olmuşlardır. Sivas ve Kayseri arasında da benzer bir durum söz konusudur. $k_{nn}=4$ için bu iki il komşu değilken Queen için komşu olmuşlardır.

Şekil 2.8 incelendiğinde Queen komşuluğun simetrik olduğu görülürken $k_{nn}=4$ komşuluğun simetrik olmadığı görülmektedir. Bu duruma Eskişehir-Konya ve Sivas-Kayseri illeri için $k_{nn}=4$ ve Queen komşulukları örnektir.

Şekil 2.8 incelendiğinde Iğdır ilinin iki sınır komşusu varken bu durum Queen komşuluk için 2 olarak görülürken $k_{nn}=4$ komşuluk için 4 komşuluğu olduğu görülmektedir. Çünkü $k_{nn}=4$ komşuluk uzaklık baz alınarak oluşturulur ve en yakın 4 ili komşu olarak alır. Bu nedenle k_{nn} komşuluklarda aynı zamanda sınır olarak komşu olmak gerekmez.

2.2.2.2. *Radyal (eşik) uzaklık komşuluk*

Bölgelerin birbirine uzaklığı maksimum bir d^* uzaklığı baz alınarak mekânsal etki araştırılmak istenirse bu durumda radyal uzaklık komşuluğu kullanılabilir. Bu komşulukta, iki bölgenin aynı zamanda sınır komşusu olma şartı yoktur. Radyal uzaklık komşuluğunda, iki bölgenin komşu olabilmesi için tanımlanan kritik bir d^* uzaklığına eşit veya daha küçük olması gereklidir. Radyal uzaklık komşuluğu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & 0 \leq d_{ij} \leq d^* \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2.2.3. *Güç uzaklık komşuluk*

Uzaklıkla mekânsal etkileşim arasında azalan bir etki olduğu durumlarda azalan bir güç fonksiyonu yardımıyla oluşturulan komşuluk matrisi kullanılabilir. Güç uzaklığı aşağıdaki gibidir:

$$c_{ij} = d_{ij}^{-\alpha} \quad (2.8)$$

$\alpha = 1, 2, \dots$ gibi mekânsal etkileşimin azalma hızına göre farklı pozitif değerler alabilir.

2.2.2.4. Üstel uzaklık komşuluk

Güç uzaklık komşuluğuna alternatif bir komşuluk türüdür, yani

$$c_{ij} = \exp(-\alpha d_{ij}) \quad (2.9)$$

veya

$$c_{ij} = \exp\left(-\frac{d_{ij}}{\alpha}\right) \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada α pozitif değerler almalıdır.

2.2.2.5. Çift – güç uzaklık komşuluğu

Belli bir d uzaklığı için daha esnek olan bir yöntem de çift-güç uzaklık komşuluktur. d maksimum yarıçap (radius) olmak üzere komşuluk matrisi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$c_{ij} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{d_{ij}}{d}\right)^k\right]^k, & 0 \leq d_{ij} \leq d \\ 0, & d_{ij} > d \end{cases} \quad (2.11)$$

burada c_{ij} , C komşuluk matrisinin elemanları olmak üzere, k genellikle 2, 3 ve 4 gibi tam sayı değerleri alır. c_{ij} ağırlıkları d 'ye kadar sıfıra doğru gider d 'den sonra sıfır olur.

2.2.2.6. Farklı uzaklık ölçüleri

Bazen uzaklık ölçüsü olarak uzaklığın kendisi değil de farklı bir fonksiyonu kullanılmak istenilmektedir. Literatürde çeşitli uzaklık fonksiyonları vardır. Bunlardan bazıları bu başlıkta verilecektir.

x : boylam koordinatı

y : enlem koordinatı

olmak üzere (x_i, y_i) i . bölgenin enlem ve boylam koordinatları, (x_j, y_j) j . bölgenin enlem ve boylam koordinatları ise i . ve j . bölge arasındaki d_{ij} farklı uzaklık ölçüleri kullanılarak aşağıda verilen çeşitli uzaklıklar hesaplanabilir.

Minkowski Uzaklık:

$$d_{ij}^p = (|x_i - x_j|^p + |y_i - y_j|^p)^{1/p} \quad (2.12)$$

Öklid Uzaklık:

$$d_{ij}^p = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (2.13)$$

Manhattan Uzaklık:

$$d_{ij}^p = |x_i - x_j| + |y_i - y_j| \quad (2.14)$$

Büyük Halka (Great Circle) Uzaklık:

$$d_{ij}^{cd} = r \times \arccos^{-1}[\cos|x_i - x_j| \times \cos y_i \times \cos y_j + \sin y_i \times \sin y_j] \quad (2.15)$$

burada r dünyanın yarıçapıdır. Arc uzaklığı mil cinsinden $r = 3959$ veya kilometre cinsinden $r = 6371$ dir (Goetschalckx, 2011).

2.2.3. Sınır ve uzaklık bileşimli komşuluk matrisi

Genelleştirilmiş komşuluk olarak adlandırılan bu komşulukta farklı tanımlanmış çeşitli komşuluk türleri vardır. Fakat en bilineni Cliff ve Ord komşuluğudur. Cliff ve Ord (1973, 1981) ikili komşuluk matrisini geliştirerek, iki mekânsal bölge arasında potansiyel etkileşimin genel bir ölçüsünü basit bir şekilde ortaya koyarak iki mekânsal bölge arasındaki uzaklık (ters uzaklık veya negatif üstel uzaklık) ile ortak sınır uzunluğunun bir kombinasyonu aşağıdaki şekilde önermişlerdir (Anselin, 1988b),

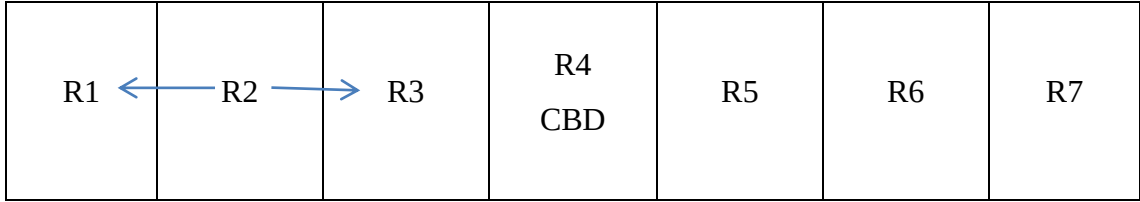
$$c_{ij} = d_{ij}^{-a} l_{ij}^b \quad (2.16)$$

burada, c_{ij} , C komşuluk matrisinin elemanları olmak üzere, d_{ij} i . ve j . bölge merkezleri arasındaki uzaklık, l_{ij} i . ve j . bölgenin ortak sınır uzunluğunun i . bölgenin tüm sınırlarına oranı, a ve b ise parametrelerdir. Bu komşuluk türü asimetriktir ve iki bölge arasındaki uzaklık arttığında etkileşimi azaltırken sınır uzunluğu arttığında etkileşimi artmaktadır.

2.2.4. Yüksek dereceli komşuluklar (high order neighbors)

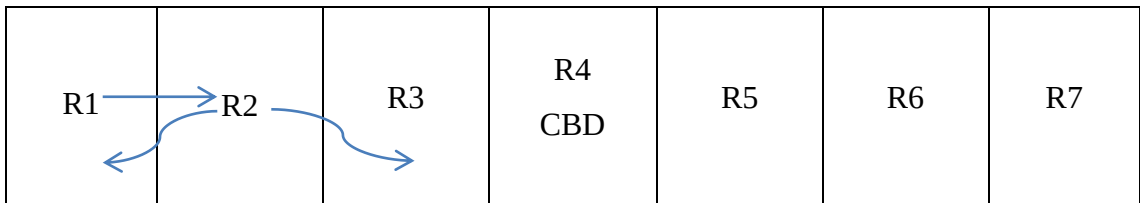
Mekânsal ekonometride komşulukların bir derecesi vardır ve birinci derece komşuluk, ikinci derece komşuluk, üçüncü derece komşuluk vb. şekilde ifade edilirler. Aşağıda birinci, ikinci ve üçüncü derece komşuluklar Lesage'in örneği yardımıyla madde madde açıklanmıştır.

- Birinci derece komşuluk her bölgenin kendi komşuluğudur. Lesage'in tasarladığı 7 bölgeli harita baz alındığında R1'in birinci derece komşusu R2 idi (sınır komşuluk için). Benzer şekilde R2 bölgesinin komşusu da R1 ve R3 şeklindedir (bakınız Şekil 2.9).



Şekil 2.9. Lesage'in 7 bölgeli haritasında R2'nin birinci derece komşuları

- İkinci derece komşuluk, bir bölgenin komşusunun komşusu olarak tanımlanır. Burada ince bir ayrıntı vardır, bir bölgenin komşusunun komşularından biri yine kendisi olabileceği için her bölge kendisinin ikinci dereceden komşusu olabilir. Sınıra dayalı komşuluk matrisleri simetrik olduğundan bu durum sınıra dayalı komşuluklarda her zaman geçerlidir. Lesage'in tasarladığı 7 bölgeli harita baz alındığında R1'in komşusu R2 idi, R2'nin komşuları ise R1 ve R3'dür. Dolayısıyla R1'in ikinci dereceden komşuları R1 ve R3 olmaktadır. Görüldüğü üzere R1 kendisinin ikinci dereceden komşusu olmuştur (bakınız Şekil 2.10).



Şekil 2.10. Lesage'in 7 bölgeli haritasında R1'in ikinci derece komşuları

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Üçüncü derece komşuluk, bir bölgenin komşusunun komşusunun komşusu olarak tanımlanır. Lesage'in tasarladığı 7 bölge harita baz alındığında R1'in ikinci dereceden komşuları R1 ve R3 idi. R1'in komşusu R2, R3'ün komşuları ise R2 ve R4'dür. Dolayısıyla R1'in üçüncü dereceden komşuluğu R2 ve R4 olmaktadır.

Derece sayıları artıkça bu tanım paralel yönde genişletilir. Tüm bölgeler için derece sayıları komşulukları var olduğu sürece artırılabilir.

2.3. Mekânsal Ağırlık Matrisleri

Mekânsal ekonometrik modellerin tahminleme süreçleri standartlaştırılmış ağırlık matrisleri üzerine kurulmuştur (Kelejian ve Prucha, 1999). Bu nedenle analiz yapabilmek için komşuluk matrislerinin standartlaştırılması gerekmektedir. Komşuluk matrisinin standartlaştırılmış hali, ağırlık matrisi olarak ifade edilir. Bu ağırlıklar etkileşimin (interaction) veya yayılmanın (spillover) bir ölçüsünü gösterir (Zeren, 2010). Matris elemanları w_{ij} i . bölgenin (veya konumun) j . bölge ile (konumunla) arasındaki etkileşimi gösterir.

Literatürde çeşitli standartlaştırma yöntemleri mevcuttur. Bunlardan bazıları alt başlıklarda verilmiştir.

2.3.1. Satır standartlaştırma

En yaygın kullanılan satır standartlaştırma yöntemidir. Bu standartlaştırma yöntemi ağırlık matrisinin satır toplamalarını 1 yapacak şekilde satır komşu elemanlarının ortalamasına dayanır.

$$w_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

Yani komşuluk matrislerini ağırlık matrislerine çevirirken aşağıdaki şekilde bir standartlaştırma yapılmaktadır:

$$w_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sum_{j=1}^n c_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

Bu durum sınıra dayalı ve uzaklığa dayalı komşuluklar için aşağıdaki gibi görülebilir:

Komşuluk matrisleri için: i . bölgenin komşu sayısı n_i olmak üzere eğer i . bölge ile j . bölge komşu ise,

$$w_{ij} = 1/n_i$$

olur, komşu değilse

$$w_{ij} = 0$$

olur.

Uzaklık matrisleri için: i . bölge ile j . bölge arasındaki uzaklık d_{ij} olmak üzere eğer i . bölge ile j . bölge komşu ise,

$$w_{ij} = \frac{1/d_{ij}}{\sum_{j=1}^{n_i} (1/d_{ij})}$$

olur.

2.3.2. Sütun standartlaştırma

Ağırlık matrisi W sütun toplamalarını 1 yapacak şekilde yapılan standartlaştırılmalarıdır.

$$w_j = \sum_{i=1}^n w_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

2.3.3. Özdeğer standartlaştırma

Komşuluk matrisinin her bir elemanının komşuluk matrisinin özdeğerine bölünmesidir.

$$W = C/v_{max} \quad (2.20)$$

Burada v_{max} komşuluk matrisinin en büyük özdeğeridir.

2.3.4. Satır toplam matrisi yardımıyla standartlaştırma

Komşuluk matrisinin satır toplamları köşegen D matrisi olarak tanımlansın $D = diag(sum(C))$. Ağırlık matrisi ise

$$W = D^{-1/2}CD^{-1/2}$$

ile elde edilir.

Örnek: Lesage'in 7 bölge örneği için Queen komşuluk matrisi için satır standartlaştırılmış ağırlık matrisi aşağıdaki gibidir:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ağırlık matrisleri incelendiğinde R1 bölgesinin komşusu sadece R2 olduğu için ağırlığı da 1 olmuş dolayısıyla sadece R2 den etkilenmektedir. R2 bölgesi ise 1/2 oranı ile R1 ve R3 bölgelerinden etkilenmektedir. Bağımlı değişken için yazılırsa,

$$Wy = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_2 \\ (y_1 + y_3)/2 \\ (y_2 + y_4)/2 \\ (y_3 + y_5)/2 \\ (y_4 + y_6)/2 \\ (y_5 + y_7)/2 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

görüldüğü üzere satır standartlaştırma aslında komşu bölgelerin ağırlıklandırılmış ortalamalarının bir ifadesidir. Daha sonra, Wy bazı ekonometrik modellerde bağımsız değişken olarak düşünülecektir.

2.4. Komşuluk ve Ağırlık Matrisleri Varsayımları

- $n \times n$ boyutlu C komşuluk ve W ağırlık matrisleri pozitif ve sabitlerden oluşmuştur.
- Her bölge kendisinin komşusu olmadığı için C ve W 'nin köşegen elemanları sıfırdır ($c_{ii} = 0, w_{ii} = 0$).
- Hiçbir bölge diğer bölgelerin sayısından büyük komşuluğa sahip olamaz. Yani eğer n bölge varsa, bir bölgenin maksimum $n - 1$ komşusu olur. Bu durum sınır komşuluklar için aşağıdaki gibi gösterilebilir,

$$\max_i \sum_j c_{ij} < n - 1 \quad (2.21)$$

$$\max_j \sum_i c_{ij} < n - 1 \quad (2.22)$$

- C Komşuluk matrisleri satır ve sütun toplamaları $n \rightarrow \infty$ giderken mutlak değerce düzgün sınırlandırılmalıdır. Yani W ağırlık matrisinden önce oluşturulan komşuluk matrisinin satır ve sütun toplamaları sonsuza gitmemeli veya örneklem büyüklüğü n 'den daha küçük olmalıdır (sınır komşuluk için).

$$\max_i \sum_j |c_{ij}| \leq \alpha < \infty \quad (2.23)$$

$$\max_j \sum_i |c_{ij}| \leq \alpha < \infty \quad (2.24)$$

Eğer bir matris satır ve sütun toplamaları bakımından mutlak değerce düzgün sınırlandırılmışsa o matrisin elamanları da mutlak değerce düzgün sınırlandırılmıştır,

$$|c_{ij}| \leq \alpha < \infty \quad (2.25)$$

- W ağırlık matrisi negatif olmadığı için ağırlıklar 0-1 arasında olacaktır.

$$w_{ij} \in [0,1], i = 1,2, \dots, n, j = 1,2, \dots, n \quad (2.26)$$

Bunu açıklamak için iki bölgeyi bir model düşünülürse, ağırlık matrisi 2x2 boyutlu olacaktır. Bir bölge kendisiyle komşu olamayacağı için köşegen elemanları 0 olacak köşegen harici ise sadece kendileriyle komşu oldukları için 1 değerini alacaktır. Böylece ağırlık matrisleri minimum 0 maksimum 1 değerini almaktadırlar.

- Komşuluk matrisleri uzaklığa veya komşuluk ilişkilerine göre oluşturulduğu için rassal değillerdir bu nedenle ağırlık matrisleri de rassal olmamaktadır.
- Satır standartlaştırılmış bir ağırlık matrisinde w_{ij} , j . bölgenin i . bölge üzerindeki etkisini ifade ederken sütun normalleştirmede ise tam tersi geçerlidir. Satır normalleştirme her bir bölge diğer bölgelerden ne kadar etkilendiğini gösterirken, sütun standartlaştırma her bir bölgenin diğer bölgeler üzerindeki etkisini ifade etmektedir.
- Satır standartlaştırılmış ağırlık matrisiyle bir değişkenin çarpımı ağırlıklı ortalama manasına gelmektedir. Örneğin Wy için j . bölgedeki bağımlı değişkenin almış olduğu değerlerin i . bölge için ağırlıklı ortalamasıdır.
- W matrisinde ele alınan komşuluk kavramı yalnızca ilişkinin varlığı veya yokluğu üzerine kuruludur. İlişkinin yönü ise dikkate alınmamaktadır (Corrado ve Fingleton 2012'den aktaran Tuzcu, 2016, s. 405).
- Simetrik ağırlık matrislerinin karakteristik kökleri reel iken, asimetrik ağırlık matrislerinin karakteristik kökleri karmaşık olabilir. (Elhorst, 2014)
- Elhorst (2014)'a göre asimetrik ağırlık matrislerinde iki durum ortaya çıkar. Komşuluk matrisi olarak uzaklığın tersi kullanılırsa ve ağırlık matrisi satır standartlaştırılmışsa aşağıdaki iki durum daha iyi anlaşılabilir,

- i . bölgenin j . bölge üzerindeki etkisiyle j . bölgenin i . bölge üzerindeki etkisi aynı değildir.
- Uzak ve yakın bölgeler kendi komşuluklarından bağımsız olarak aynı etkiye sahip olabilirler.
- Elhorst (2014), komşuluk matrisleri için aşağıdaki iki durumun sağlanması gerektiğini söylemiştir.
 - a. Komşuluk matrislerinin satır ve sütun toplamalarının mutlak değerce düzgün sınırlandırılmış olması (Kelejian ve Prucha, 1998, 1999).
 - b. Komşuluk matrislerinin satır ve sütun toplamalarının örneklem büyüklüğüne oranı, $n \rightarrow \infty$ iken 1'e eşit veya daha büyük olamaz.

Her iki koşul da mekânsal bağımlılığın derecesinin limitidir ve uzaklık sonsuza gittikçe bölgeler arasındaki korelasyonun sıfıra gittiğini ifade eder. Bu iki koşulu sağlayan örnekler aşağıdaki gibi açıklanabilir, p kadar bölgenin olduğu bir ağırlık matrisi düşünölsün ve q da bir bölgenin kendisi hariç komşu olduğu bölgeleri ifade etsin. Bu durumda bir bölge kendisinin komşusu olamayacağı için maksimum $n - 1$ bölgeyle komşu olacağından a koşulu sağlanır. Sınır komşuluklarda a koşulu her zaman sağlanır. Dolayısıyla b koşulu da sağlanmış oldu çünkü n belirli olduğundan $\frac{n-1}{n} < 1$ olmaktadır. (Elhorst, 2014).

Uzaklığa dayalı komşulukta ise durum farklıdır. Her biri d birim uzaklığa sahip birbirine sağ ve sol taraftan sınır sonsuz bölge olsun. Bu durumda birinci dereceden bölgeler d , ikinci dereceden bölgeler $2d$ vs. uzaklığa sahip olurlar.

$$\dots R1 \xleftarrow{d} R2 \xleftarrow{d} R3 \xrightarrow{d} R4 \xrightarrow{d} R5 \dots$$

Komşuluk matrisleri de uzaklığın tersi d_{ij}^{-1} şeklinde oluşturulursun. Satır toplamaları ise,

$$1/d + 1/d + 1/2d + 1/2d + 1/3d + 1/3d + \dots = 2(1/d + 1/2d + 1/3d + \dots)$$

şeklinde sonlu olmayan bir seri olur ve a koşulu sağlanmamış olur. Bu nedenle mekânsal çalışmalarda bir d^* kesme noktası kullanılarak eğer $d_{ij} > d^*$ ise $c_{ij} = 0$ ve $w_{ij} = 0$ kabul edilir. Fakat $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{2(1/d + 1/2d + 1/3d + \dots)}{n} \rightarrow 0$ gider ve b koşulu sağlanmış olur. Böylece uygulamalarda d^* kesme noktası

kullanılmasının gerekliliği b koşulu bakımından ortadan kalkabilir ama a koşulu sağlanmamış olur (Elhorst, 2014).

Tam tersi durumda tüm bölgelerin birbiriyle komşu olduğu varsayıldığında her birinin ağırlığı eşit olduğunda ortaya çıkar. Yani $i \neq j$ için komşuluk matrisinin her bir elemanı $c_{ij} = 1$ olduğundan komşuluk matrisinin satır ve sütun toplamı $n - 1$ olur ve $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$ olur. Diğer bir ifadeyle komşuluk matrisinin köşegen olmayan elamanları birbirine eşit olacağından satır standartlaştırma yapıldığında ağırlık matrisi elamanları $i \neq j$ için $w_{ij} = \frac{1}{n-1}$ olur ve tutarlılığın sebebi ihmal edilebilir. Böylece ne a koşulu sağlanabilir ne de b koşulu sağlanabilir (Elhorst, 2014).

2.5. Mekânsal Ekonometrik Modeller

Klasik doğrusal regresyon modelinin OLS tahmincileri, hata teriminin sabit varyanslı ve ilişkisiz olması durumunda en küçük varyanslı ve yansız olma (BLUE) özelliğine sahiptir. Dolayısıyla regresyon modelindeki değişkenlerde ve hata teriminde her hangi bir mekânsal bağımlılık olmadığında lineer model için OLS tahmincisi kullanmak en uygundur. Klasik regresyon modeli

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (2.27)$$

şeklinde dir. Burada y $nx1$ bağımlı değişken vektörü, X nxk boyutlu bağımsız değişken matrisi, β $kx1$ parametre vektörü ve ε $nx1$ boyutlu hata terimidir. Burada OLS varsayımı olarak $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ dağılmaktadır ve ε_i 'ler birbirlerinden bağımsızdır. Böylece,

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j) = 0$$

olur.

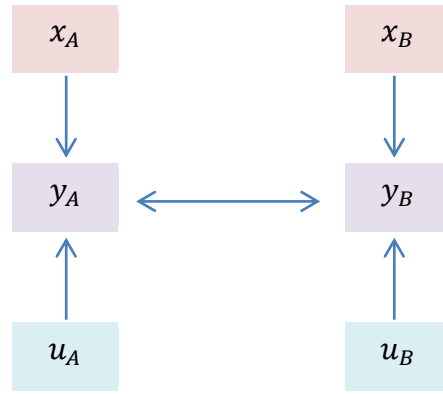
Klasik regresyon modelinin varsayımlarından biri olan gözlemlerin birbirinden bağımsızlığı, mekânsal bağımlıktan dolayı ihlal edilmesi durumunda klasik yöntemlerle çalışılması uygun olmamaktadır. Bu bağımlılığın kaynağı, bağımlı değişken ve/veya bağımsız değişken ve/veya hata teriminin belirli bir bölgedeki (konumdaki, noktadaki,

mekândaki) değerinin yakınındaki bölgelerdeki değlerinden etkilenmesi durumudur. Bu tür durumlarda, bağımlı değişken, bağımsız değişken ve hata terimi arasındaki mekânsal bağımlılığı dikkate alan mekânsal ekonometrik modellerle çalışılması daha uygun olacaktır.

Mekânsal regresyon modelleri, bölgelerin birbirleri üzerindeki etkilerini barındıran modellerdir. Bu etkiler de modelde mekânsallık parametreleriyle ifade edilirler.

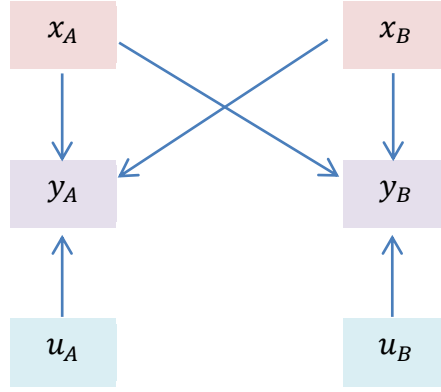
Mekânsal bağımlılık en basit haliyle üç şekilde ortaya çıkar, bağımlı değişkende, bağımsız değişken/değişkenlerde ve hata teriminde olacak şekildedir. Bu durumlar Şekil 2.11, Şekil 2.12, Şekil 2.13’de gösterilmiştir.

İç etkileşim etkisi (Endogenous interaction effect, $\rho W y$): Örneğin, A bölgesinin bağımlı değişkeni y_A ile B bölgesinin bağımlı değişkeni y_B arasındaki mekânsal ilişkidir. Bu durum Şekil 2.11’de gösterilmiştir.



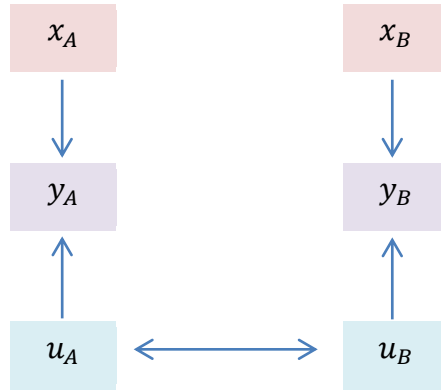
Şekil 2.11. Bağımlı değişken değerleri arasındaki mekânsal ilişkiler

Dış etkileşim etkisi (Exogenous interaction effects, $WX\theta$): Örneğin, A bölgesinin bağımsız değişkeni x_A ile B bölgesinin bağımlı değişkeni y_B arasındaki mekânsal ilişki veya tam tersi ilişkidir. Bu durum Şekil 2.12’de gösterilmiştir.



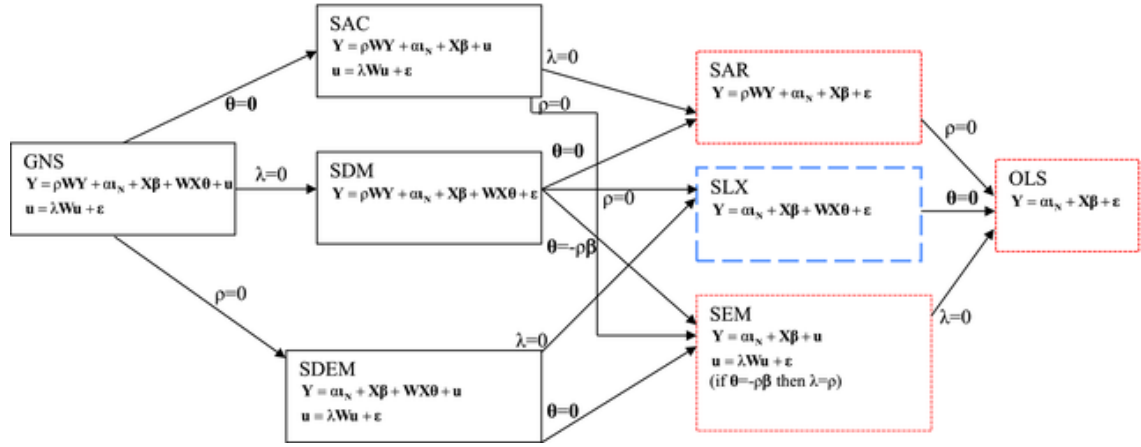
Şekil 2.12. Bağımlı değişken ve bağımsız değişken arasındaki mekânsal ilişkiler

Hata terimleri arasında etkileşim etkisi (Interaction effect among error terms λWu): A bölgesinin hata terimi u_A ile B bölgesinin hata terimi u_B arasındaki mekânsal ilişkidir. Bu durum Şekil 2.13’de gösterilmiştir.



Şekil 2.13. Hata terimi değerleri arasındaki mekânsal ilişkiler

Mekânsal etkileşimler tek bir değişkende veya hata teriminde olabileceği gibi iki değişkende veya bir değişken ve hata teriminde de olabilir veya hem bağımlı değişken hem bağımsız değişken hem de hata teriminde de olabilir. Ayrıca bu 3 etkileşimin tümü aynı anda çıkabileceği gibi farklı kombinasyonları şeklinde de olabilir. Bu nedenle mekânsal etkileşimin türüne göre farklı mekânsal ekonometrik modeller söz konudur. Olabilecek tüm etkileşim türlerini ve buna bağlı olarak ortaya çıkan mekânsal modelleri gösteren şema Şekil 2.14’de verilmiştir.



Şekil 2.14. Mekânsal Ekonometrik Modeller (Elhorst, 2014)

Şekil 2.14’de GNS mekânsal genel yuva modeli, SAC mekânsal ardışık bağımlı birleşik model, SDM mekânsal Durbin modeli, SDEM mekânsal Durbin hata modeli, SAR mekânsal ardışık bağımlı model, SLX mekânsal X gecikmeli model, SEM mekânsal hata modeli ve OLS klasik lineer regresyon modelidir.

Şekil 2.14’deki her bir model ayrı ayrı başlık halinde alt bölümlerde verilecektir. Bu grafikten görüldüğü üzere mekânsal modeller parametrelere bağlı olarak birbirleriyle ilişkilidir.

Mekânsal etkileşimleri gösteren özet bilgiler Tablo 2.2’de verilmiştir.

Tablo 2.2. Mekânsal etkileşimler

Model	Mekânsal Etkileşim Etkisi (Spatial Interaction Effects)	Toplam Etkileşim Etkisi Sayısı	Mekânsal Parametreler
OLS	-	0	-
SAR	Wy	1	ρ
SEM	Wu	1	λ
SLX	WX	k	θ
SAC	Wy, Wu	2	ρ, λ
SDM	Wy, WX	$k+1$	ρ, θ
SDEM	WX, Wu	$k+1$	θ, λ
GNS	Wy, WX, Wu	$k+2$	ρ, θ, λ

2.5.1. Genel yuva mekânsal model (general nesting spatial model, GNS)

Manski (1993) üç farklı mekânsal etkileşimden söz etmiştir:

- (i) İç etkileşim (endogenous interaction) etkisi, bağımlı değişkenin diğer bölgelerdeki bağımlı değişkenlerden etkilenmesi (Wy);
- (ii) Dış etkileşim (exogenous interaction), bağımlı değişkenin diğer bölgelerdeki bağımsız değişkenlerden etkilenmesi (WX);
- (iii) İlişkili etkiler (correlated effects), gözlemlenemeyen etkilerin diğer bölgelerle benzer olması (Wu).

Bu nedenle, bu model *Manski Model* olarak da anılmaktadır. Bu model Manski'nin (1993) açıkladığı tüm mekânsal etkileşimleri içeren bir modeldir ve formu aşağıdaki şekildedir:

$$y = \rho Wy + X\beta + WX\theta + u \quad (2.28)$$

$$u = \lambda Wu + \varepsilon. \quad (2.29)$$

burada W , $n \times n$ boyutlu pozitif ağırlık matrisidir ve bölgeler arasındaki bağımlılığın yapısını gösterir. Wy bağımlı değişkenler arasındaki içsel (endogenous) etkileşimi ifade ederken, WX ise bağımsız değişkenler arasındaki dışsal (exogenous) etkileşimi ifade etmektedir. Wu ise farklı gözlemlerin hata terimleri arasındaki etkileşimi ifade eder. ρ, λ, θ ise sırasıyla y , u ve X 'deki mekânsal ilişki katsayılarıdır. Aynı zamanda bu parametreler mekânsal korelasyon veya mekânsal bağımlılık parametreleri olarak da isimlendirilir. Burada ρ mekânsal ardışık bağımlılık katsayısıdır (spatial autoregressive coefficient). Görüldüğü üzere, modelde mekânsal etkileşim hem bağımlı değişkende hem bağımsız değişkende hem de hata terimindedir. Mekânsallığın olduğu değişkene bağlı olarak mekânsallık katsayıları $[0,1)$ aralığında değer alır. Bu model $\rho = 0$, $\theta = 0$ ve $\lambda = 0$ olması durumunda klasik doğrusal regresyon modeline dönüşür.

GNS farklı bir şekilde yazılırsa,

$$y - \rho Wy = X\beta + WX\theta + u$$

$$(I_n - \rho W)y = X\beta + WX\theta + u$$

$$y = (I_n - \rho W)^{-1}(X\beta + WX\theta + u)$$

$$y = (I_n - \rho W)^{-1}(X\beta + WX\theta + (I_n - \lambda W)^{-1}\varepsilon) \quad (2.30)$$

elde edilir.

2.5.2. Mekânsal ardışık bağımlı birleşik model (spatial autoregressive combined model, SAC)

GNS’de $\theta = 0$ olması durumunda oluşan modeldir ve formu aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$y = \rho W y + X\beta + u, \quad (2.31)$$

$$u = \lambda W u + \varepsilon. \quad (2.32)$$

Görüldüğü üzere bu modelde mekânsal etki bağımlı değişken ve hata terimindedir.

Literatürde SAC, aynı zamanda Cliff-Ord tipi model olarak da bilinir (Drukker vd., 2011). Cliff ve Ord (1975, 1981) tarafından önerilmiştir (Anselin, 2010). Kelejian ve Prucha’nın bu model üzerinde çeşitli çalışmaları vardır.

SAC farklı bir şekilde yeniden yazılırsa,

$$y = (I_n - \rho W)^{-1}(X\beta + u)$$

$$y = (I_n - \rho W)^{-1}(X\beta + (I_n - \lambda W)^{-1}\varepsilon) \quad (2.33)$$

elde edilir.

2.5.3. Mekânsal Durbin model (spatial Durbin model, SDM)

GNS’de $\lambda = 0$ olması durumunda oluşan modeldir ve formu aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$y = \rho W y + X\beta + WX\theta + \varepsilon \quad (2.34)$$

Görüldüğü üzere bu modelde mekânsal etki, bağımlı ve bağımsız değişken üzerindedir. Burridge (1981) tarafından önerilmiştir (Anselin, 2010).

SDM farklı bir şekilde yeniden yazılırsa,

$$y = (I_n - \rho W)^{-1}(X\beta + WX\theta + \varepsilon) \quad (2.35)$$

elde edilir.

2.5.4. Mekânsal Durbin hata modeli (spatial Durbin error model, SDEM)

GNS'de $\rho = 0$ olması durumunda oluşan modeldir ve formu aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$y = X\beta + WX\theta + u \quad (2.36)$$

$$u = \lambda Wu + \varepsilon \quad (2.37)$$

Görüldüğü üzere bu modelde mekânsal etkileşim bağımsız değişken ve hata terimi üzerindedir.

Farklı bir şekilde yeniden yazılırsa,

$$y = X\beta + WX\theta + (I_n - \lambda W)^{-1}\varepsilon \quad (2.38)$$

elde edilir.

2.5.5. Mekânsal ardışık bağımlı model (spatial autoregressive model, SAR)

GNS'de $\theta = 0$ ve $\lambda = 0$ veya SAC'de $\lambda = 0$ veya SDM'de $\theta = 0$ olması durumunda oluşan modeldir ve formu aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$y = \rho Wy + X\beta + \varepsilon \quad (2.39)$$

burada, Wy bağımsız değişken, ρ mekânsal autoregressive parametresidir ve bağımlı değişkenler arasındaki ilişkinin derecesini gösterir. Literatürde LAG model olarak da isimlendirilir.

Görüldüğü üzere mekânsal etki sadece bağımlı değişken üzerindedir. Bu modelde, bağımlı değişken yalnızca bağımsız değişkenle açıklanmaz aynı zamanda komşu bölgelerdeki bağımlı değişkenlere de ihtiyaç duyar. Bu nedenle de yeni bir değişken olarak modele eklenir.

Eğer ağırlık matrisi sınır komşuluğu olarak alınırsa $(Wy)_i$ i . bölgenin komşularının ağırlıklı ortalaması olacaktır.

SAR farklı bir şekilde yeniden yazılırsa,

$$y = (I_n - \rho W)^{-1}(X\beta + \varepsilon) \quad (2.40)$$

elde edilir. Burada $|\rho| < 1$ için *Leontief açılımı* yapılırsa (bu açılım bağımsız değişkenin ve hata teriminin tüm bölgelerdeki değerini göstermektedir),

$$y = (I_n + \rho W + \rho^2 W^2 + \dots)X\beta + (I_n + \rho W + \rho^2 W^2 + \dots)\varepsilon \quad (2.41)$$

şeklinde olur.

Bu açılım, iki etkinin tanımlanmasına izin vermektedir,

Multiplier effect: bağımsız değişkenlere etki

Spatial diffusion effect: hata terimlerine etki

Bu açılım ile bağımlı değişkenin i . bölgedeki değerinin, yalnızca komşularındaki bağımsız değişkenlere değil aynı zamanda komşu olmayan diğer bölgelerdeki bağımsız değişkenlere de bağıllığını göstermektedir.

$(I_n + \rho W + \rho^2 W^2 + \dots)$ dikkate alındığında *Multiplier effect* uzaklık arttıkça azalmaktadır.

Bu açılım ile hata terimi dikkate alındığında i . bölgedeki değişim yalnızca kendi bölgesindeki bağımlı değişkeni etkilemiyor aynı zamanda diğer bölgeleri de etkiliyor. Bu yayılma (diffusion) etkisidir ve uzaklıkla ters orantılıdır.

Tüm bu etkiler Anselin (2003) tarafından tanımlanan *global* etkidir.

2.5.6. Mekânsal X gecikmeli model (spatial lag of X model, SLX)

GNS'de $\lambda = 0$ ve $\rho = 0$ veya SDM'de $\rho = 0$ veya SDEM'de $\lambda = 0$ olması durumunda oluşan modeldir ve formu aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$y = X\beta + WX\theta + \varepsilon \quad (2.42)$$

Görüldüğü üzere mekânsal etki sadece bağımsız değişken üzerindedir.

2.5.7. Mekânsal hata modeli (spatial error model, SEM)

GNS'de $\rho = 0$ ve $\theta = 0$ veya SDEM'de $\theta = 0$ veya SAC'de $\rho = 0$ olması durumunda oluşan model mekânsal hata modeli (SEM) dir. Uygulamada en çok karşılaşılan modellerden biridir. Bu modelde, mekânsal bağımlılık veya otokorelasyon hata terimindedir ve mekânsal bağımlılık farklı yapılarda olabilmektedir.

$$y = X\beta + u \quad (2.43)$$

Hata teriminde olan mekânsal otokorelasyonun yapısı aşağıdaki gibi olabilir:

Otoregresif model-AR model (Autoregressive model veya Autocorrelated Model):

$$u = \lambda Wu + \varepsilon \quad (2.44)$$

Hareketli ortalama modeli-MA model (Spatial Moving Average model,): Cliff ve Ord (1981) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} u &= \xi W\varepsilon + \varepsilon \\ E(uu') &= \sigma^2(I_n - \xi W)(I_n - \xi W') \\ &= \sigma^2[I_n + \xi(W + W') + \xi^2 WW'] \end{aligned} \quad (2.45)$$

Mekânsal ARMA modeli:

$$u = \lambda Wu + \xi W\varepsilon + \varepsilon \quad (2.46)$$

Hata bileşimli model (Error Components Model): Kelejian and Robinson (1993) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$u = W\varepsilon + v \quad (2.47)$$

burada ε ve v sabit varyanslı (homoscedastic) ve bağımsızdır.

$$\begin{aligned} E(uu') &= \sigma_v^2 I_n + \sigma_\varepsilon^2 WW' \\ &= \sigma_v^2(I_n + \varphi WW') \end{aligned}$$

burada $\sigma^2 = \sigma_v^2 > 0$ ve $\varphi = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_v^2$ dir.

Görüldüğü üzere mekânsal etkileşim sadece hata terimi üzerindedir. Bu nedenle de klasik regresyonun varsayımlarından birisi olan hataların bağımsız ve türdeş dağılması (iid) varsayımı ihlal edilmiş olmaktadır.

Eğer bu model uygun model ise bazı küçük dışsal ve açıklanamayan mekânsal etkileşimlerin süreçte varlığı söz konudur. Örneğin coğrafi değişkenlerle yanlış tanımlamalar, düşük öneme sahip komşuluk karakteristiklerinin atılması, artan uzaklıkla azalan etkilerin sonuçları vb. (Osland, 2010).

En yaygın kullanılan ve bu çalışmada da kullanılan hata terimi formu AR (Autoregressive) modelidir. Böylece, SEM AR için farklı bir şekilde yeniden yazılırsa,

$$y = X\beta + (I_n - \lambda W)^{-1}\varepsilon \quad (2.48)$$

elde edilir.

2.6. Mekânsal Parametre Uzayı Varsayımları

Mekânsal modellerin çözümü için mekânsal model parametreleri (ρ, θ, λ) bazı varsayımlara dayanmaktadır. Bu varsayımlar tüm mekânsal parametreler (ρ, θ, λ) için genelleştirilebileceğinden burada hepsi λ ile ifade edilecektir.

Mekânsal modellerde en önemli problem, $(I - \lambda W)^{-1}$ için çözüm olmamasıdır. Bu nedenle varsayımlar $(I - \rho W)^{-1}$ veya $(I - \lambda W)^{-1}$ için tekil olması ve olmaması ile ilgilidir. Buradan hareketle de mekânsal parametreler (ρ, θ, λ) için tanımlı olduğu aralık belirlenecektir

- Öyle bir W ağırlık matrisi vardır ki $|\lambda| < 1$ olduğunda $(I - \lambda W)^{-1}$, in çözümü vardır yani I birim matrisi n boyutlu olmak üzere $(I - \lambda W)^{-1}$ tekil olmayan matristir.
- W ağırlık matrisi satır-standartlaştırılmış ve $\lambda = 1$ olmuş ise $(I - \lambda W)$ tekil olmaktadır.

İspat: Bu durumu Kelejian ve Piras (2017) şu şekilde ispatlamışlardır,

$(e_n = (1, 1, \dots, 1)'_{n \times 1})$ olduğu varsayılın ve $\lambda = 1$ olmak üzere

$(I - W)e_n = e_n - We_n = e_n - e_n = 0$ olmaktadır. Bu nedenle mekânsal katsayıların parametre uzayı hiçbir zaman 1'i içermez.

- $\lambda = 0$ için $(I - \lambda W)$ tekil olmayan bir matristir.

İspat: $I - 0 = I$

- Ord (1981), W ağırlık matrisinin özdeğerleri v olmak üzere $\lambda \in (v_{min}^{-1}, v_{max}^{-1})$ olduğunu göstermiştir. Ağırlık matrisi satır-standartlaştırılmış olsun ve tüm özdeğerleri reel olsun. v_{max} ve v_{min} sırasıyla ağırlık matrisinin en büyük ve en küçük özdeğerleri olsun. Tüm özdeğerleri reel olduğundan $v_{max} > 0$ ve $v_{min} < 0$ varsayımı altında $(I - \lambda W)$ aşağıdaki aralıkta tekil olmayan bir matristir.

$$v_{min}^{-1} < \lambda < v_{max}^{-1} \quad (2.49)$$

İspat: Bu durumu Kelejian ve Piras (2017) şu şekilde ispatlamışlardır, W ağırlık matrisini üçgen yapan öyle bir Q matrisi olsun ki,

$$QWQ^{-1} = D_v = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

şekline getirebilsin. Bu işlem determinanta uygulanırsa,

$$|I - \lambda W| = |QQ^{-1}(I - \lambda W)| \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} &= |Q(I - \lambda W)Q^{-1}| \\ &= |I - \lambda D_v| \\ &= (1 - \lambda v_1) \dots (1 - \lambda v_n) \end{aligned} \quad (2.52)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer $\lambda \neq 0$ olursa,

$$|I - \lambda W| = (1 - \lambda v_1) \dots (1 - \lambda v_n) \quad (2.53)$$

olur ve böylelikle $\lambda \notin \{v_1^{-1}, \dots, v_n^{-1}\}$ için $(I - \lambda W)$ tekil olmayan bir matristir. Eğer özdeğerlerden herhangi biri (v_i) negatif ise $v_i^{-1} \leq v_{min}^{-1}$ ve eğer v_i pozitif ise $v_i^{-1} \geq v_{max}^{-1}$ olur. Böylece,

$$v_i^{-1} \notin (v_{min}^{-1}, v_{max}^{-1}) \quad (2.54)$$

olur ve aşağıdaki koşulda $(I - \lambda W)$ tekil olmaz,

$$\lambda \in (v_{min}^{-1}, v_{max}^{-1}) \quad (2.55)$$

yani,

$$\lambda^{-1} > v_{max} \text{ ise } \lambda < v_{max}^{-1} \quad (2.56)$$

$$\lambda^{-1} < v_{min} \text{ ise } \lambda > v_{min}^{-1} \quad (2.57)$$

olduğundan $v_{min}^{-1} < \lambda < v_{max}^{-1}$ koşulu sağlanmış olur.

Eğer λ köklerin birinden tersine eşit değilse $v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots, v_N^{-1}$ veya λ^{-1} köklere eşit değilse $v_1, v_2, \dots, v_N$ yani $\lambda^{-1} < v_{min}$ veya $\lambda^{-1} > v_{max}$ ise $(I - \lambda W)$ tekil değildir.

- W ağırlık matrisi satır-standartlaştırıldığında ve $|\lambda| < 1$ olduğunda $(I - \lambda W)^{-1}$ tekil değildir.

İspat:

Bunun ispatı için Gershgorin teoreminden yararlanılacaktır.

Gershgorin teoremi:

Elemanları a_{ij} olan bir A matrisi olsun ve A matrisinin satır toplamı R_i , sütun toplamı da C_j ile gösterilsin,

$$R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \quad (2.58)$$

$$C_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N |a_{ij}| \quad (2.59)$$

Gershgorin teoremi matris elamanı ile her bir özdeğerinin farkının mutlak değerce ilgili satır veya sütun toplamından küçük olduğunu ifade eder. A matrisinin özdeğerleri μ olmak üzere,

$$|\mu - a_{ii}| \leq R_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.60)$$

$$|\mu - a_{jj}| \leq C_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.61)$$

dir. Bu durum, mekânsal model için ağırlık matrisine uyarlanırsa ve $w_{ii} = 0$ olduğunu dikkate alınır,

$$r = \max_i \sum_j |w_{ij}| = \max_i R_i \quad (2.62)$$

$$c = \max_j \sum_i |w_{ij}| = \max_j C_j \quad (2.63)$$

W ağırlık matrisinin özdeğerleri v_i olsun. Gershgorin teoremi dikkate alındığında,

$$|v_i - w_{ii}| \leq R_i \quad (2.64)$$

$$|v_i - 0| \leq R_i \quad (2.65)$$

olduğundan v_i aşağıdaki koşulu sağlamalıdır,

$$|v_i| \leq r, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.66)$$

$$|v_i| \leq c, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.67)$$

$$|v_i| \leq \min\{r, c\} = m \quad (2.68)$$

Eğer W satır-standartlaştırılmışsa her zaman $r = 1$ olacağından $m = r = 1$ olacaktır ve böylece $|v_i| \leq 1$ olur.

$|I - \lambda W|$ özdeğerler yardımıyla yazılırsa,

$$|I - \lambda W| = (1 - \lambda v_1) \dots (1 - \lambda v_n) \neq 0$$

olur. Burada $|\lambda| < 1$ için $|\lambda v_i| < |\lambda| < 1$ olacağından $(I - \lambda W)^{-1}$ tekil olmayan bir matris olacaktır.

- Eğer ağırlık matrisi satır-standartlaştırılmamışsa $(I - \lambda W)$ bazı $|\lambda| < 1$ değerlerinde tekil bir matris olmaktadır. Bu durumda tekil olmayı ortadan kaldırmak için yeni parametre uzayı şu şekilde tanımlanır,
 $m = \min(r, c)$ olmak üzere tüm $|\lambda| < 1/m$ için $(I - \lambda W)$ tekil olmayan bir matristir.

İspat:

Eğer $\lambda = 0$ ise $(I - \lambda W)$ tekil olmayan bir matristir. Eğer $\lambda \neq 0$ olursa $|I - \lambda W| = 0$ olması demek,

$$\left| \frac{1}{\lambda} I - W \right| = 0 \quad (2.69)$$

veya

$$\left| W - \frac{1}{\lambda} I \right| = 0 \quad (2.70)$$

olması demektir. Böylece eğer burada $\frac{1}{\lambda}$ ağırlık matrisinin köküne eşitse $(I - \lambda W)$ tekil bir matris olur. Yani tekil olmayan bir matris olması için

$$\frac{1}{\lambda} \notin \{v_1, \dots, v_n\} \quad (2.71)$$

olmalıdır. Bu durumda da

$$|v_i| \leq \min(r, c) = m \quad (2.72)$$

olduğu dikkate alınırsa, aşağıdaki koşul sağlandığında $(I - \lambda W)$ tekil olmaz,

$$\left| \frac{1}{\lambda} \right| \leq \min(r, c) = m \quad (2.73)$$

veya

$$|\lambda| < \frac{1}{\min(r, c)} = \frac{1}{m} \quad (2.74)$$

- W ağırlık matrisi satır-standartlaştırılmamışsa $(I - \lambda W)$ matrisinin tekil olmayan bir matris olması için alternatif bir yöntemde $\lambda^* = m\lambda$ ve $W^* = m^{-1}W$ şeklinde almaktır.

İspat:

m daha önce belirlenmişti,

$$r^* = \max_i \sum_j |w_{ij}^*| = r/m \quad (2.75)$$

$$c^* = \max_j \sum_i |w_{ij}^*| = c/m \quad (2.76)$$

Bu durumda da

$$\begin{aligned}
 m^* &= \min(r^*, c^*) \\
 &= \min\left(\frac{r}{m}, \frac{c}{m}\right) \\
 &= \frac{1}{m} \min(r, c) \\
 &= \frac{1}{m} m \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

olur. Böylece $|\lambda^*| < \frac{1}{m^*} = 1$ için $(I - \lambda^* W^*)$ tekil olmayacaktır ve ayrıca $(I - \lambda^* W^*)^{-1}$ çözülebilir olacaktır.

NOT: Burada m , n 'ye bağlı olduğu için, λ^* ve W^* 'da n 'ye bağlıdır.

- Elhorst (2014) ağırlık matrisi ve mekânsal katsayıların varsayımlarını şu şekilde özetlemiştir, Ord (1981) C komşuluk matrisi için mekânsallık parametresinin $\lambda \in (1/v_{min}, 1/v_{max})$ aralığında olduğunu ve eğer W ağırlık matrisi satır standartlaştırılmış ise $\lambda \in (1/v_{min}, 1)$ olduğunu belirtmiştir. Daha sonraları Kelejian ve Robinson (1995) ve Kelejian'ın sonraki çalışmaları satır standartlaştırılmış ağırlık matrisi için mekânsallık parametresinin aralığının $\lambda \in (-1, 1)$ olduğunu belirtmişlerdir. Yani satır standartlaştırılmış W ağırlık matrisinin maksimum özdeğeri $v_{max} = 1$, minimum özdeğeri ise $v_{min} = -1$ olmaktadır. İki bölgeyi bir örneklem alındığında komşuluk matrisi $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve ağırlık matrisi $W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olacağından $v_{min} = -1$ ve $v_{max} = 1$ olur.
- LeSage ve Pace (2009) ağırlık matrisinin simetrik olmaması durumunda karakteristik köklerinin karmaşık sayı olabileceğini aşağıdaki şekilde göstermişlerdir.

v ağırlık matrisinin (W) özdeğerleri olmak üzere,

$$|I - \lambda W| = \prod_{i=1}^n (I - \lambda v_i) = \left[\prod_{i=3}^n (I - \lambda v_i) \right] (1 - \lambda v_1)(1 - \lambda v_2) \quad (2.78)$$

şeklinde yazılsın. Burada karmaşık özdeğerlerin v_1 ve v_2 olduğu düşünölsün.

Eğer

$$(1 - \lambda v_1)(1 - \lambda v_2) = 0$$

ise $(I - \lambda W)$ tekil olur ve varyans-kovaryans matrisi de tekil olur. $(I - \lambda W)$ tekil olması aşğıdaki şekilde olur,

$$v_1 = r + jc \quad (2.79)$$

$$v_2 = r - jc \quad (2.80)$$

burada r v_1 ve v_2 nin gerçek kısmı, jc ise kompleks (karmaşık) kısmıdır. $j^2 = -1$. $c \neq 0$ varsayıldığında (0 olursa özdeğer reel sayıya dönüşür),

$$\begin{aligned} (1 - \lambda v_1)(1 - \lambda v_2) &= 0 \\ (1 - \lambda r - \lambda jc)(1 - \lambda r + \lambda jc) &= 0 \\ 1 - 2\lambda r + \lambda^2 r^2 - j^2 \lambda^2 c^2 &= 0 \\ 1 - 2\lambda r + \lambda^2 (r^2 + c^2) &= 0 \\ (r^2 + c^2) \lambda^2 - 2r\lambda + 1 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $ax^2 + bx + c = 0$ quadratik formöl için diskriminant işlemi yapılırsa $d = b^2 - 4ac$, $d < 0$ bulunur.

$$\begin{aligned} d &= (2r)^2 - 4(r^2 + c^2) \\ &= 4(r^2 - r^2 - c^2) \\ &= -4c^2 \end{aligned}$$

Burada c^2 her zaman pozitif olacağı için ($c \neq 0$ varsayılmıştı) diskriminant d negatif çıkar ve quadratik eşitlik iki kompleks köke gider. Bunun anlamı da λ karmaşık iki kökle sifıra eşitlenemeyen eşitlikten dolayı sonuç vermez. Bir başka durum da kompleks özdeğerler $(I - \lambda W)$ matrisinin tekil olup olmamasını etkilemez, sadece reel özdeğerler etkiler.

2.7. Moran I Testleri

Mekânsal bağımlılığın var olup olmadığını ortaya koymak amacıyla kullanılan en yaygın testlerden birisi Moran I testidir. Moran I test istatistiği değeri -1 ile 1 arasında değer alarak mekânsal bağımlılığın derecesini de göstermektedir. Bağımlılığı araştırılan değişken ile onun mekânsal gecikmesinin arasındaki ilişkinin bir ölçütüdür. Yani x ile Wx veya y ile Wy arasında olduğu gibi u ile Wu arasındaki mekânsal bağımlılığı hesaplamak için kullanılabilir. Moran I , Global ve Lokal olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.

2.7.1. Global Moran I testi

Moran'ın I testi (Moran, 1950) sürekli veriler için genel mekânsal ardışık bağımlılığı test eder. Her bölgedeki gözlemin ortalamadan sapmalarının çapraz olarak test edilmesi mantığına dayanmaktadır. Moran I testi bağımlı değişken, bağımsız değişken ve hata terimi için yapılabilir. Bağımsız değişken için Moran I formülü aşağıda verilmiştir:

$$I = \frac{n \sum_i \sum_j w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{S_0 \sum_i (x_i - \bar{x})^2}, \quad (2.81)$$

burada x_i i . konumdaki değişkenin değeri, x_j j . konumdaki değişkenin değeri ($i, j = 1, \dots, n$), n toplam örneklem sayısı ve w_{ij} ağırlık matrisinin elemanları olmak üzere, $S_0 = \sum_i \sum_j w_{ij}$ şeklinde olup ağırlık matrisinin standartlaştırılmasından dolayı $S_0 = n$ olur.

Wagner vd. (2004), Moran I istatistiğini bağımlı değişken için aşağıdaki gibi kovaryans/varyans oranı şeklinde aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

$$I = \frac{\text{kovaryans}}{\text{varyans}} = \frac{\sum_i \sum_j w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y}) / n}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2 / n}. \quad (2.82)$$

Ayrıca, Moran I matris formunda aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$I = \frac{z'Wz}{z'z} \quad (2.83)$$

Formülde, $z = y - \bar{y}$, $z = x - \bar{x}$, $z = u - \bar{u}$ şeklinde olabilir.

Moran I testinde i ve j bölgeleri komşu ise ilk önce ortalamadan sapmaları hesaplanır daha sonra da bu sapmalar çarpılır. Bu durum tüm komşuluğu olan bölgeler için yapılır. Eğer komşuluk değerleri ortalamadan yüksekse sonuç pozitif çıkar. Benzer şekilde iki komşuluk ortalamadan düşükse yine pozitif sonuç ortaya çıkar. Fakat iki bölgeden biri ortalamadan yüksek diğeri ortalamadan küçük çıkarsa bu durumda sonuç negatif çıkar. Yani özet olarak her bir bölge çifti benzer düzeyde yüksek veya düşük sonuçlar verirse Moran I istatistiği de pozitif sonuca doğru gider. Beklenen değerden büyük sonuçlar için pozitif ardışık bağımlılık küçük sonuçlar için ise negatif ardışık bağımlılık vardır denilir.

Aslında bu test istatistiği tek bir değişkenin veya hata teriminin komşuluklardaki gecikmesi ile korelasyonudur yani y ile Wy , x ile Wx ve u ile Wu arasındaki korelasyondur. Eğer iki bölge komşu ise I 'nın hesabında etkisi olur komşu değil ise ağırlık matrisinin ilgili elamanı sıfır olacağından dolayı I istatistiği üstünde etkisi olmaz. Moran I aslında ağırlık matrisleri yardımıyla hesaplanan sapmaların karelerinin toplamıdır.

Moran I varyansı 3 farklı şekilde hesaplanır,

- **Normallik varsayımı altında:** değişken veya hata teriminin rassal olarak normal dağılımdan geldiği varsayılır
- **Rassallık varsayımı altında:** değişken veya hata teriminin dağılımının önemi olmadığı, gözlem değerleri tekrarlı rassal olarak elde edilir.
- **Monte Carlo:** Monte Carlo simülasyonu kullanılarak elde edilir.

Normallik varsayımı ve H_0 hipotezi (mekânsal bağıllık yoktur) altında Moran I beklenen değeri Cliff ve Ord (1972) tarafından aşağıdaki şekilde bulunmuştur:

$$E(I) = -\frac{1}{n-1} \quad (2.84)$$

şeklindedir ve $n \rightarrow \infty$ iken $E(I) \rightarrow 0$ gider.

- Eğer $I > E(I)$ ise mekânsal bölgeler benzer yapılara sahiptir. (düşük/düşük (low/low) veya yüksek/yüksek (high/high) gibi). Yani pozitif otokorelasyon vardır.

- Eğer $I < E(I)$ ise mekânsal bölgeler komşularıyla farklı yapılara sahiptir (düşük/yüksek (low/high) veya yüksek/düşük (high/low) gibi).

I^2 'nin beklenen değeri,

$$E(I^2) = \frac{n^2 S_1 - n S_2 + 3 S_0^2}{S_0^2 (n^2 - 1)} \quad (2.85)$$

şeklindedir, burada

$$S_0 = \sum_i \sum_j w_{ij} \quad (2.86)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (w_{ij} + w_{ji})^2 \quad (2.87)$$

$$S_2 = \sum_i (w_{i0} + w_{0i})^2 \quad (2.88)$$

$$w_{i0} = \sum_j w_{ij} \quad (2.89)$$

$$w_{0i} = \sum_j w_{ji} \quad (2.90)$$

şeklindedir ve normallik varsayımı ve H_0 hipotezi altında Moran I varyansı,

$$\begin{aligned} Var(I) &= E(I^2) - [E(I)]^2 \\ &= \frac{n^2 S_1 - n S_2 + 3 S_0^2}{S_0^2 (n^2 - 1)} - \frac{1}{(n - 1)^2} \end{aligned} \quad (2.91)$$

şeklindedir.

Rassallık varsayımı altında Moran I beklenen değeri,

$$E(I) = -\frac{1}{n - 1} \quad (2.92)$$

şeklindedir. Rassallık varsayımı altında Moran I varyansı

$$E(I^2) = \frac{n\{(n^2 - 3n + 3)S_1 - nS_2 + 3S_0^2\} - S_3\{n(n - 1)S_1 - 2nS_2 + 6S_0^2\}}{(n - 1)(n - 2)(n - 3)S_0^2} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned}
& Var(I) \\
&= \frac{n\{(n^2 - 3n + 3)S_1 - nS_2 + 3S_0^2\} - S_3\{n(n-1)S_1 - 2nS_2 + 6S_0^2\}}{(n-1)(n-2)(n-3)S_0^2} \\
&- \frac{1}{(n-1)^2}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$S_0 = \sum_i \sum_j w_{ij} \tag{2.95}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (w_{ij} + w_{ji})^2 \tag{2.96}$$

$$S_2 = \sum_i (w_{i0} + w_{0i})^2 \tag{2.97}$$

$$w_{i0} = \sum_j w_{ij} \tag{2.98}$$

$$w_{0i} = \sum_j w_{ji} \tag{2.99}$$

$$S_3 = \frac{n^{-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^4}{(n^{-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2)^2} = \frac{m_4}{m_2^2} \tag{2.100}$$

şeklindedir. Moran I asimptotik olarak normal dağılır:

$$\frac{I + \frac{1}{n-1}}{\sqrt{Var(I)}} \sim N(0,1) \tag{2.101}$$

Moran I için anlamlılık testi standart normal dağılıma göre yapılır ve Moran I için sıfır hipotezi mekânsal bağıllığın olmadığı şeklinde kurulur.

$$\begin{aligned}
H_0: I &= 0 \\
H_1: I &\neq 0
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Moran I standartlaştırılmış test istatistiği

$$z = \frac{I - E(I)}{\sqrt{Var(I)}} \tag{2.103}$$

BES örneği için Moran I

BES örneği için Moran I test istatistiği hesaplanmış ve Tablo 2.3 deki sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 2.3. BES örneği için BES katılımcı oranı, İGE ve artıkların Moran I istatistikleri

Değişken	Moran I değeri	p -olasılık değeri
Bağımlı değişken (BES)	0,6145	2,2e-16
IGE	0,6913	2,2e-16
Artıklar	0,0990	0,01819

Moran I için H_0 hipotezi mekânsal bağıllık yoktur şeklinde kurulmaktadır. Bu veri seti için tüm p değerleri 0,05'den küçük çıktığından H_0 hipotezi reddedilmiştir. Yani BES katılım oranı, İGE ve hata terimi için mekânsal bağıllık vardır. $p=0,01$ anlamlılık düzeyinde ise artıklarda mekânsal bağımlılık yoktur denilebilir. Bu durum Gölgelendirme haritalarını destekler niteliktedir.

2.7.2. Lokal Moran I_i testi (local indicators of spatial association, LISA)

Global Moran I testi sadece global mekânsal bağıllığın olup olmadığını gösterirken mekânsal bağıllık varsa hangi bölgeler arasında daha fazla hangi bölgeler arasında daha az olduğu bilgisini vermemektedir. Lokal Moran I_i testi ise birbirine benzer veya benzer olmayan verilerin kümелendiği bölgeleri belirlemede kullanılan bir istatistiktir. Aslında LISA, global Moran I istatistiğinin sonucunun bölgelere bölünmüş sonuçlarıdır.

Eyyuboğlu (2015), global (küresel) Moran I özelliklerin tümünde kümelenme veya yayılma olup olmadığını analiz ederken, bu kümelenme veya yayılmanın konumunu belirtmez. Mekânsal ilişkinin yerel göstergesi (Local Indicators of Spatial Association, LISA) analizi bu kümelenme veya yayılmanın konumunu her bir özellik için yapılan hesaplamayı gösterdiğini belirtmiştir.

Anselin (1995), LISA'nın kullanım amacını iki maddede açıklamıştır:

1. LISA, her bir gözlem için öyle bir göstergedir ki o gözlemin etrafındaki benzer değerlerin kümelenmesini gösterir.
2. Her bir gözlem için tüm LISA toplamları, global mekânsal bağıllık göstergesine denktir.

Lokal Moran I_i test istatistiği formülü aşağıda verilmektedir:

$$I_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \sum_j w_{ij} \frac{(x_j - \bar{x})}{s} \quad (2.104)$$

veya

$$I_i = z_i \sum_j w_{ij} z_j \quad (2.105)$$

burada $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ ve $z_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{s}$ şeklindedir. Bu istatistik araştırılmak istenen her i bölgesi için hesaplanmalıdır. Yüksek bir I_i değeri bölgenin etrafında benzer yönde yüksek ya da düşük kümelenmenin olduğunu, düşük I_i değeri ise bölgeler arasında birbirine benzemeyen kümelenmenin olduğunu gösterir.

Genel olarak LISA sonucu 5 şekilde ortaya çıkar (Oliveau ve Guilmoto-2005),

- Bir bölge komşularıyla benzer yüksek değere sahip ise yüksek-yüksek (H-H) mekânsal kümelenme vardır.
- Bir bölge kendisi yüksek değere sahip iken komşuları düşük değere sahip ise yüksek-düşük (H-L) mekânsal aykırı değerler vardır.
- Bir bölge kendisi düşük değere sahip iken komşuları yüksek değere sahip ise düşük-yüksek (L-H) mekânsal aykırı değerler vardır.
- Bir bölge komşularıyla benzer düşük değere sahip ise düşük-düşük (L-L) mekânsal kümelenme vardır.
- Anlamlı bir mekânsal bağıllık yoktur.

Lokal Moran I 'nın beklenen değeri,

$$E(I_i) = -\frac{w_i}{n-1} \quad (2.106)$$

şeklindedir. Burada $w_i = \sum_j w_{ij}$ şeklindedir

Lokal Moran I 'nin varyansı,

$$Var(I_i) = \frac{w_{i(2)}(n - b_2)}{n - 1} + \frac{2w_{i(kh)}(2b_2 - n)}{(n - 1)(n - 2)} - \frac{w_i^2}{(n - 1)^2} \quad (2.107)$$

şeklindedir. Burada,

$$b_2 = \frac{m_4}{m_2^2} \quad (2.108)$$

$$m_4 = \sum_i \frac{z_i^4}{n} \quad (2.109)$$

$$m_2 = \sum_i \frac{z_i^2}{n} \quad (2.110)$$

$$w_{i(2)} = \sum_{j=1, i \neq j} w_{ij}^2 \quad (2.111)$$

$$2w_{i(kh)} = \sum_{k \neq i} \sum_{h \neq i} w_{ik} w_{ih} \quad (2.112)$$

Lokal Moran I 'nin test istatistiği ise,

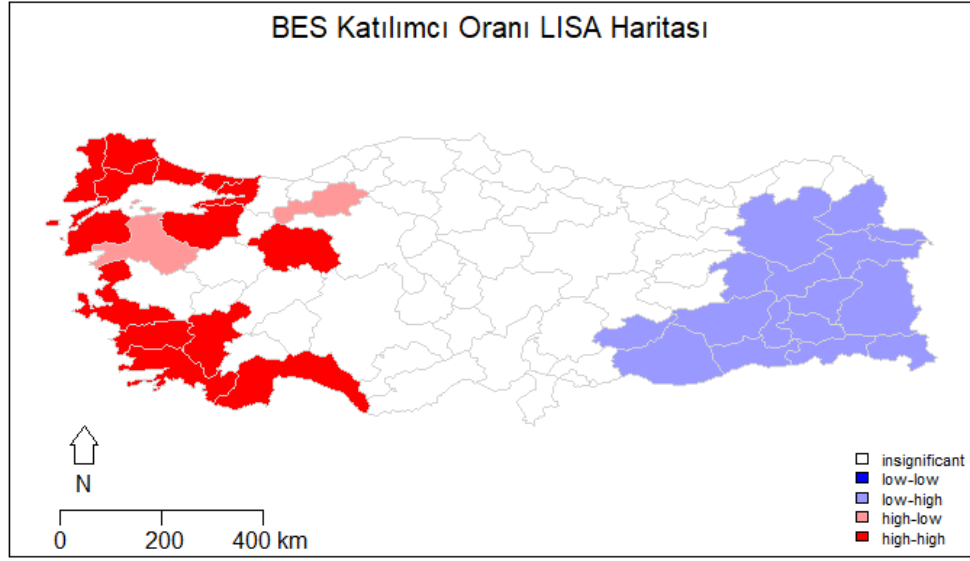
$$z(I_i) = \frac{I_i - E(I_i)}{\sqrt{Var(I_i)}} \quad (2.113)$$

şeklindedir.

Anselin (1995) bazı durumlarda lokal göstergeler, global göstergenin aksi yönünde olabilir ve bu durumda lokal göstergelerin önemlilik arz edebileceğini belirtmiştir. Anselin (1995) mekânsal kümelenmeleri “*hot spots*” olarak isimlendirmiş ve bu bölgeleri LISA test istatistiğinin önemli çıktığı yerler olarak belirtmiştir. Eğer lokal değerler ortalama değerden çok farklıysa bu bölge kaldıraç (leverage) noktası ya da aykırı değer olabilir. Bu durum Moran I saçılım grafiklerinde görsel olarak görülebilir. Yani noktalar “hot spots” mu yoksa aykırı değer mi görülebilir.

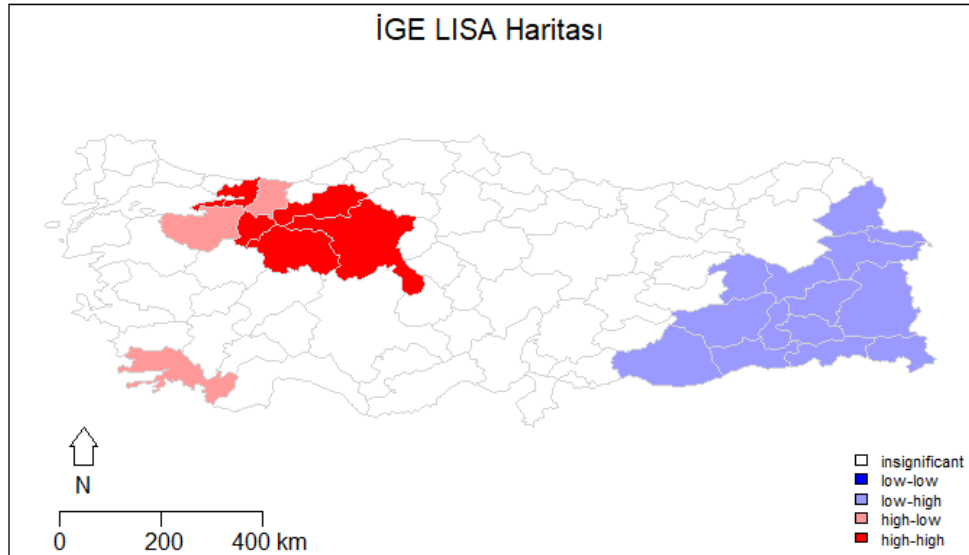
BES örneği için LISA haritaları

BES örneği için Lokal Moran I haritaları Şekil 2.15-2.17’de verilmiştir.



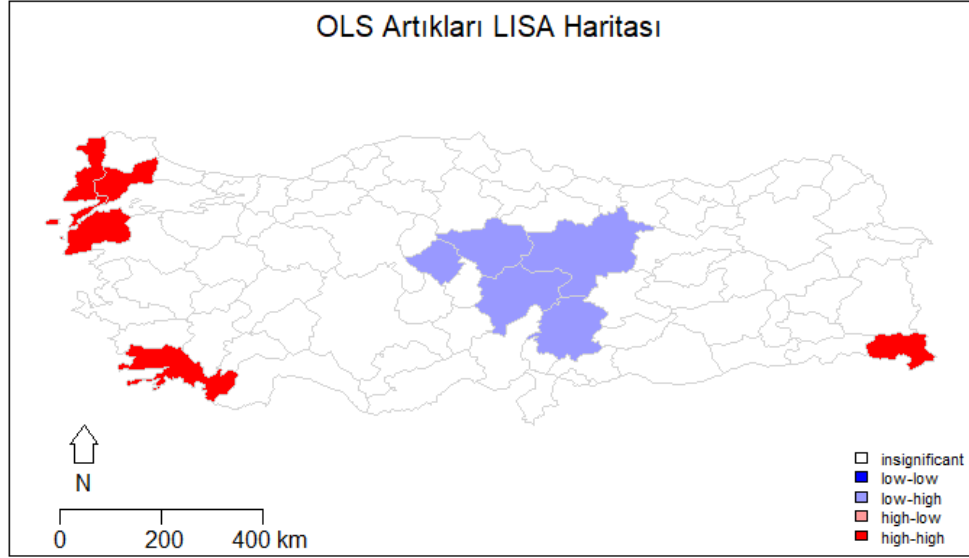
Şekil 2.15. BES katılımcı oranı LISA haritası

BES katılımcı oranı için harita incelendiğinde batı bölgeleri komşuluk ilişkisi yüksek-yüksek olurken doğu ve güneydoğu bölgelerin de düşük-yüksek olmuştur. Beyaz bölgeler ise anlamsız test sonuçlarını göstermektedir.



Şekil 2.16. İGE LISA haritası

IGE için harita incelendiğinde doğu Marmara ve orta-kuzeybatı Anadolu'nun bazı illerinde komşuluk ilişkisi yüksek-yüksek olurken doğu ve güneydoğu bölgelerin de düşük-yüksek olmuştur.



Şekil 2.17. OLS artıkları için LISA haritası

BES örneği artıkları için Moran I değeri sıfıra yakın çıkmıştı yani global bir kümelenmenin olmadığını söylüyordu LISA haritası da bunu desteklemektedir.

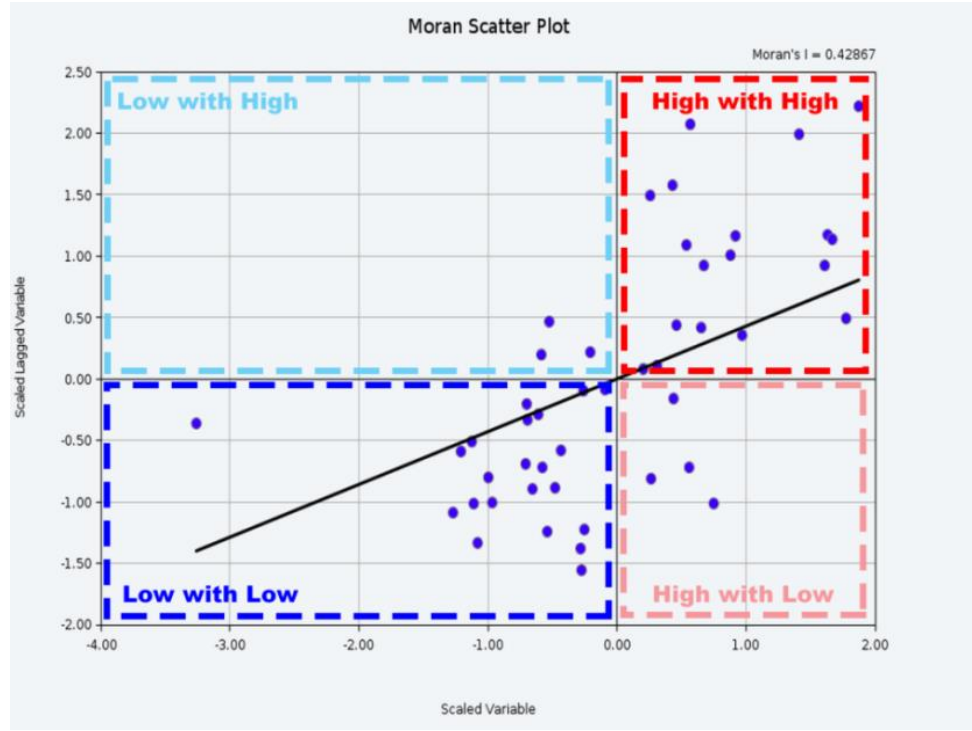
Şekillerden görüldüğü üzere, lokal Moran I haritaları, mekânsal kümelenmeleri ve mekânsal aykırı değerleri tespit etmede etkin bir yöntemdir.

2.7.3. Moran saçılım (scatter) grafikleri

Anselin (1995) tarafından önerilen Moran saçılım grafiği mekânsal bağımlılığı gösteren, grafiğin yatay ekseninde verinin kendisi, dikey ekseninde de ağırlıklandırılmış veri baz alınarak oluşturulan bir grafikdir. Yani x ile Wx , y ile Wy ve u ile Wu gibi. Böylelikle ilgilenilen değişken ile onun komşuluğu arasında mekânsal ilişki varsa grafikte rahatlıkla görülecektir.

Eğrinin eğimi, ağırlıklandırılmış veri ile verinin kendisinin arasında kurulan regresyon modelinin beta eğim katsayısına denktir. Başka bir ifadeyle regresyon eğim katsayısı Moran I istatistiğine denktir. Bu grafiklerde aykırı değerler veya kaldıraç

(leverage) noktalar da görülebilir. Grafik yüksek-yüksek, yüksek-düşük, düşük-yüksek ve düşük-düşük olacak şekilde 4 parçaya bölünmüştür. Australian Urban Research Infrastructure Network (AURIN¹) tarafından herhangi bir değişken için oluşturulmuş örnek bir Moran saçılım grafiği Şekil 2.18’de verilmiştir.



Şekil 2.18. Moran saçılım grafiği

Şekil 2.18’de x-ekseninde değişkenin kendi verileri (scaled variable), y-ekseninde ise değişkenin ağırlık matrisiyle çarpılmış verileri (scaled lagged variable) yer almaktadır. Yani herhangi bir z değişkeni baz alındığında x-ekseninde z değerleri y-ekseninde Wz değerleri yer almaktadır.

Grafik 4 bölgeye ayrılmıştır, yüksek-yüksek (HH) I. bölge, düşük-yüksek (LH) II.bölge, düşük-düşük (LL) III. bölge, yüksek-düşük (HL) IV. bölge şeklindedir.

Moran saçılım grafiğinde her bir bölge için aşağıdaki yorumlamalarda bulunulabilir:

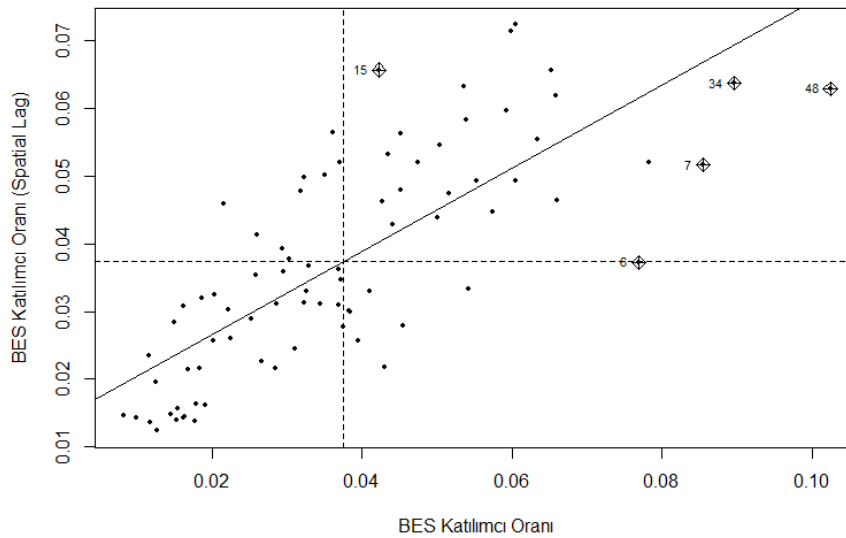
¹ <https://docs.aurin.org.au/portal-help/analysing-your-data/chart-tools/moraniscattervisualisation-workflow/> (Erişim Tarihi: 01.08.2018)

- I. Bölgede noktalar: hem z hem de Wz ortalamasının üzerindedir yani hem normal veriler hem de komşuluklardaki veriler ortalamasının üstünde değer almışlardır (yüksek-yüksek, H-H).
- II. Bölgede noktalar: z 'ler ortalamasının altında değer alırken, Wz 'ler ortalamasının üstünde değer almıştır, yani normal veriler ortalamasının altında değer alırken komşuluklardaki veriler ortalamasının üstünde değer almıştır (düşük-yüksek, L-H).
- III. Bölgede noktalar: hem z hem de Wz 'ler ortalamasının altındadır yani hem normal verilerin hem de komşuluklardaki verilerin ortalamasının altında değer almışlardır (düşük-düşük, L-L).
- IV. Bölgede noktalar: z 'ler ortalamasının üstünde değer alırken, Wz 'ler ortalamasının altında değer almışlardır (yüksek- düşük, H-L).

Grafik incelendiğinde I. ve III. bölgelerdeki noktaların sayısı II. ve IV. bölgelerdeki noktaların sayısına göre fazla ise pozitif mekânsal bağımlılıktan az ise negatif mekânsal bağımlılıktan söz edilebilir. Eğer 4 bölgeye de eşit dağılmışsa mekânsal bağımlılık yoktur.

BES örneği için Moran saçılım grafikleri

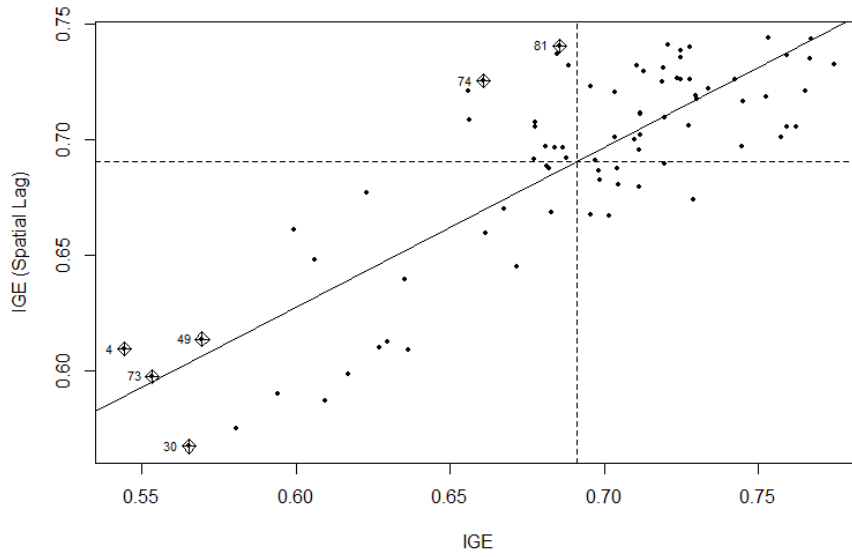
Bağımlı değişken BES katılımcı oranı için Moran saçılım grafiği Şekil 2.19'da verilmiştir.



Şekil 2.19. BES katılımcı oranı Moran saçılım grafiği

Moran saçılım grafiği incelendiğinde verilerin çoğu, I. ve III. bölgede düzgün yayıldıkları görülmektedir. Bu da mekânsal ilişkinin varlığını göstermektedir. Ayrıca verilerin dağılım yönünden dolayı pozitif bir bağılıktan söz edilebilir ki zaten BES için daha önce hesaplanan Moran I değeri de pozitif çıkmıştı.

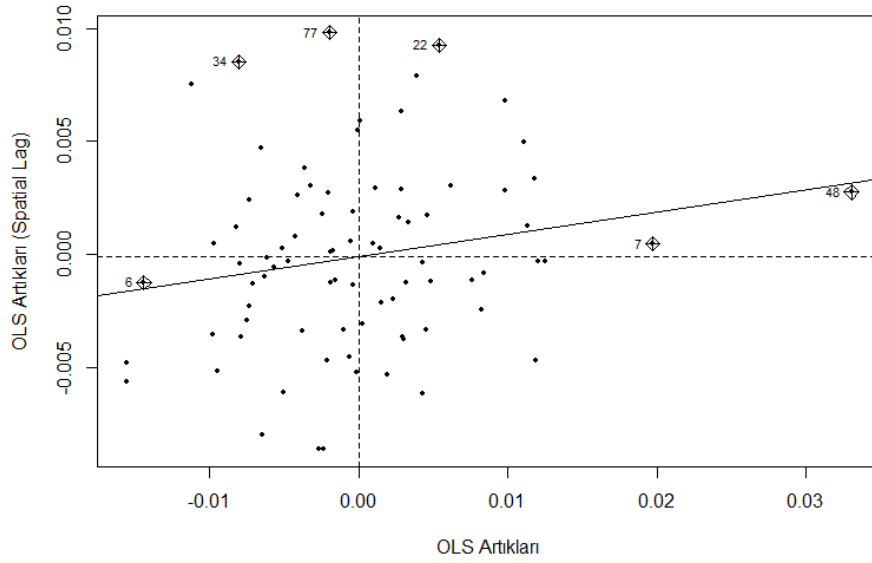
İGE için Moran saçılım grafiği Şekil 2.20’de verilmiştir.



Şekil 2.20. İGE Moran saçılım grafiği

İGE için Moran saçılım grafiği incelendiğinde verilerin bir doğru yönünde düzgün yayıldıkları görülmektedir. Bu da mekânsal ilişkinin varlığını göstermektedir. Noktalar I nolu bölgede kümelenmiş şekilde olduğundan yüksek-yüksek ilişkinin varlığından söz edilebilir. Ayrıca verilerin dağılım yönünden dolayı pozitif bir bağıllık vardır ve zaten Moran I değeri de daha önce pozitif çıkmıştı.

OLS artıkları için Moran saçılım grafiği oluşturulmuş ve Şekil 2.21’de verilmiştir.



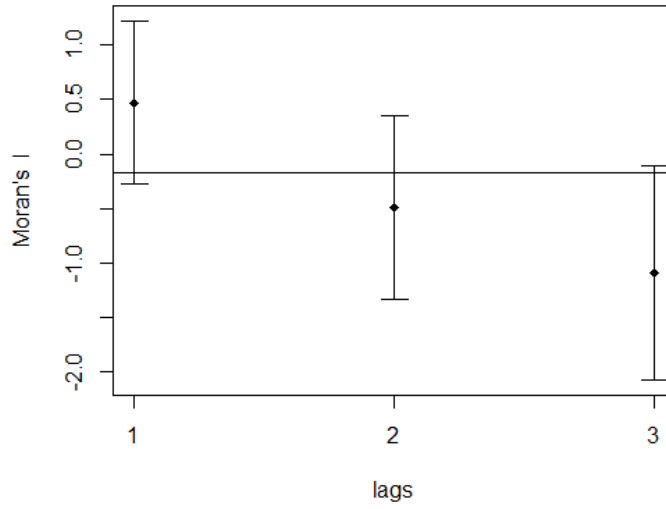
Şekil 2.21. *OLS artıklarının Moran saçılım grafiği*

Artıklar için Moran dağılım grafiği incelendiğinde verilerin dağılımında herhangi bir yön olmadığı gibi bir doğrusallık da yoktur. Bu da mekânsal bağıllığın yani Moran I istatistiğinin zayıf çıkmasının göstergesidir.

2.7.4. Correlogram grafikleri

Zaman serisi kökenli olan Correlogram grafikleri mekânsal bağımlılığın uzaklığa göre nasıl değiştiğini görsel olarak göstermektedirler. Coğrafyacılar çalışma alanında farklı yerlerde defalarca ölçüm yapmışlar ve uzaklığa bağlı olarak correlogram grafiğindeki çubukların uzunluklarının değişmekte olduğunu görmüşlerdir. Böylelikle gecikmeli (lag) değişkenler için Correlogram grafiklerini yüksek dereceli komşulukları baz alarak oluşturulabilmişlerdir (Arbia, 1989).

Lesage'in seyahat süresi örneği için 3. derece komşuluğa kadar Correlogram grafiği oluşturulmuş ve Şekil 2.22'de verilmiştir.

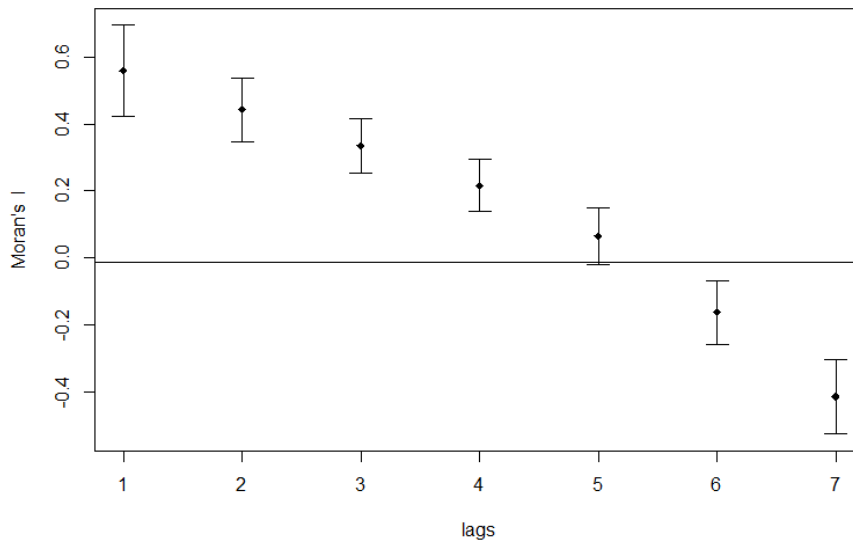


Şekil 2.22. Lesage seyahat süresi Correlogram grafiği

Grafikte görüldüğü üzere 2. derece komşuluktan itibaren Moran I negatif çıkmaya başlamaktadır. Bu veri seti için 3. derece komşuluğa kadar mekânsal etkileşim varlığını korumaktadır.

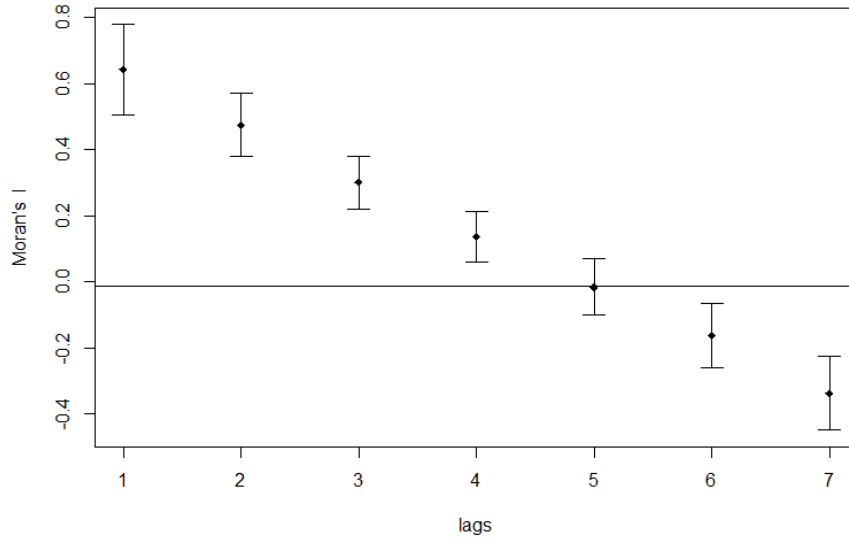
BES örneği için Correlogram grafikleri

Mekânsal bağılılığın ve komşuluğun derecelerinin yüksekliği bu grafikler yardımıyla görülebilmektedir. BES örneği için Correlogram grafikleri Şekil 2.23-2.25'de verilmiştir.



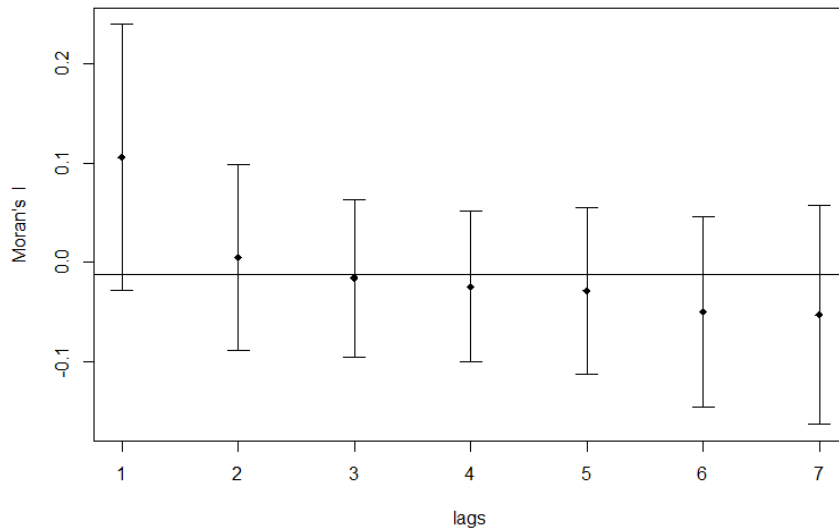
Şekil 2.23. BES katılımcı oranı Correlogram grafiği

BES katılımcı oranı Correlogram grafiği incelendiğinde birinci dereceden komşulukta Moran I değeri 0,6 civarı iken ikinci dereceden komşulukta 0,4'e yaklaşmıştır. 6. ve 7. derece komşulukta ise negatif olmuştur.



Şekil 2.24. İGE Correlogram grafiği

İGE Correlogram grafiği incelendiğinde birinci dereceden komşulukta Moran I değeri 0,6 iken ikinci dereceden komşulukta 0,5'e yaklaşmıştır. 5.dereceden komşulukta ise mekânsal bağıllık ortadan kalkmıştır. 7. derece komşulukta ise -0,3 değerine yakın bir mekânsal bağıllıktan söz edilebilir.



Şekil 2.25. OLS artıkları Correlogram grafiği

OLS artıklarının Correlogram grafiği incelendiğinde 1. ve 2. derece komşulukta düşük olmakla beraber Moran I pozitif çıkarken 3. derece komşulukta ise mekânsal bağıllık ortadan kalkmıştır. Daha sonraki komşuluklarda ise negatif yönde devam etmiştir.

2.8. Lagrange Çarpan Testi

Moran I testi yalnızca değişkenler veya artıklarda mekânsal bağımlılığın olup olmadığını göstermektedir. Fakat mekânsal bağımlılığın olması durumunda hangi modelin kullanılması gerektiği hakkında bir bilgi vermemektedir. Bu tarz bilgi veren testlerden en yaygın kullanılanı Lagrange çarpan (LM) testidir.

SAR (LAG model) için LM testi $H_0: \rho = 0$ hipotezi altında aşağıdaki gibidir:

$$LM_{LAG} = LM_{\rho} = (u'Wy/\sigma^2) / \left\{ \frac{(WX\hat{\beta})' M W X \hat{\beta}}{\sigma^2} + tr(W'W + W^2) \right\}. \quad (2.114)$$

SEM için LM testi $H_0: \lambda = 0$ hipotezi altında aşağıdaki gibidir:

$$LM_{Error} = LM_{\lambda} = \left(\frac{u'Wu}{\sigma^2} \right)^2 / tr(W'W + W^2). \quad (2.115)$$

Her iki model için LM testinde, $\sigma^2 = (u'u)/n$, u OLS artıkları, $M = I - X(X'X)^{-1}X'$ ve $\hat{\beta}$ ise OLS katsayı tahmincileridir.

LM_{LAG} ve LM_{Error} test istatistikleri $\chi^2_{(1)}$ dağılımına sahiptirler.

Bazen hem gecikme modeli hem de hata modeli için LM aynı veya yakın sonuçlar verebilir. Bu tür durumlarda bu testlerin robust olanları kullanılarak hangi modelin daha uygun olacağına karar verilir.

SAR için robust LM testi,

$$RLM_{\rho} = \frac{\left[\frac{u'Wy}{\hat{\sigma}^2} - \frac{u'Wu}{\hat{\sigma}^2} \right]^2}{n\hat{f}_{\rho,\beta} - T} \quad (2.116)$$

şeklindedir. Burada

$$\hat{\sigma}^2 = (u'u)/n$$

$$n\hat{J}_{\rho,\beta} = \left[T + \frac{(WX\beta)'M(WX\beta)}{\hat{\sigma}^2} \right]$$

$$T = tr(W^2 + W'W)$$

$$M = I - X(X'X)^{-1}X'$$

şeklindedir.

SEM için robust LM testi,

$$RLM_{\lambda} = \frac{\left[\frac{u'Wu}{\hat{\sigma}^2} - T(n\hat{J}_{\rho,\beta})^{-1} \frac{u'Wy}{\hat{\sigma}^2} \right]^2}{T - T^2(n\hat{J}_{\rho,\beta})^{-1}} \quad (2.117)$$

şeklindedir. RLM_{ρ} ve RLM_{λ} test istatistikleri $\chi^2_{(1)}$ dağılımına sahiptirler.

Robust testlerde de sonuç anlamlı çıkarsa değeri en küçük olan modele göre işlemlere devam edilir. Şekil 2.26'de model seçimi ve LM testi aşamaları için bir şema verilmiştir.

SAC (SARMA) modeli için LM testi OLS artıklarına dayalı olarak Anselin (1988a) tarafından $H_0: \rho = \lambda = 0$ altında aşağıdaki şekilde önerilmiştir:

$$LM_{SARMA} = \frac{\tilde{d}_{\lambda}}{T} + \frac{(\tilde{d}_{\lambda} - \tilde{d}_{\rho})^2}{D - T} \quad (2.118)$$

burada

$$\tilde{d}_{\lambda} = \frac{u'Wu}{(u'u)/n}$$

$$\tilde{d}_{\rho} = \frac{u'Wy}{(u'u)/n}$$

$$T = tr[(W' + W)W]$$

$$D = \frac{(WX\hat{\beta})'MWX\hat{\beta}}{\hat{\sigma}^2} + T$$

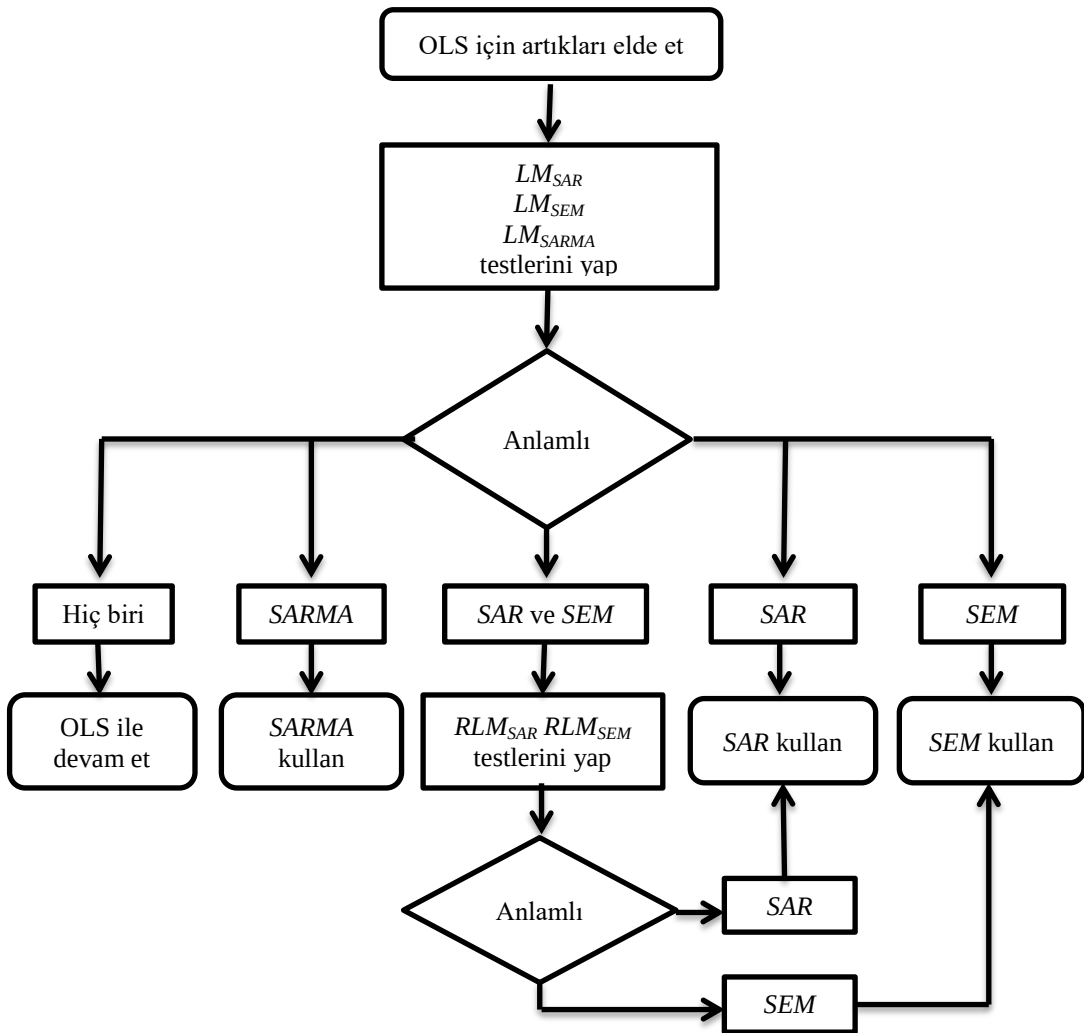
şeklindedir ve $\hat{\beta}$ ve $\hat{\sigma}^2$ OLS tahminleridir.

LM_{SARMA} test istatistiği $\chi^2_{(2)}$ dağılımına sahiptir.

Mekânsal ekonometrik modeller literatürde farklı isimlerle ifade edilmektedir. SEM, *error* model olarak, SAR, LAG olarak ve SAC ise SARMA olarak da ifade edilmektedir. Literatürde genellikle *LM* testinde, *error*, LAG ve SARMA kısaltmaları kullanılmaktadır. *GeoDa* paket programında da bu şekilde yer almaktadır.

GeoDa paket programının *LM* testi desteği bulunmaktadır. *R*'da ise *spdep* kütüphanesinde *lm.LMtests* komutuyla SEM, SAR ve SARMA için yer almaktadır.

LM testi ile karar verme süreci Şekil 2.26'da verilmiştir.



Şekil 2.26. Lagrange çarpan testi karar diyagramı

Şekil 2.26’da SARMA SAC’ı ifade etmektedir. Bu test sonucunda p olasılık değeri en küçük çıkan daha anlamlıdır.

BES örneği için Lagrange testi

Mekânsal bağımlılığının ve otokorelasyonun muhtemel olduğu Moran I , Local Moran I , OLS artıkları grafikleri ve değişen varyans testleri ile gösterdikten sonra hangi modelin uygulanacağına karar vermek gerekir. Bunun için de LM testi yapılır.

BES örneği veri seti için LM testi sonuçları Tablo 2.4.’de verilmiştir.

Tablo 2.4. LM test sonuçları

Test	İstatistik Değeri	p Olasılık Değeri
LMerror (SEM)	1,7950	0,18032
RLMerror (SEM)	0,0601	0,80633
LMlag (SAR)	5,5908	0,01806
RLMlag (SAR)	3,8559	0,04957
SARMA (SAC)	5,6509	0,05928

LM test sonuçlarına bakıldığında SEM için $p=0,18032>0,05$ ve SAC için $p=0,05928>0,05$ olduğundan bu veri setine uygun model değildir. SAR için ise $p=0,01806<0,05$ olduğundan bu veri setine SAR uygun olduğu kararı verilir. Robust LM sonuçlarında da bu durum değişmemiştir.

2.9. Direk ve Dolaylı (Spillover) Etkiler

Mekânsal ekonometrik modeller, mekânsal veya coğrafi bölgelerde ölçülen değişkenler arasındaki mekânsal bağımlılığı dikkate alan ve bu bağımlılığı açıklamak, modellemek için geliştirilmişlerdir. Modellerde, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiler mekânsal modeller ile belirlenmeye çalışılmaktadır. Bir bölgedeki bağımsız değişkendeki değişim kendi bölgesini etkilediği gibi (*direk etki*) diğer bölgeleri de etkileme (*dolaylı etki*) potansiyeline sahiptir. Behrens ve Thisse (2007) belirttiği üzere, mekânsal regresyon modellerinin yeteneği bu karşılıklı etkileşimleri yakalayarak iyi bir şekilde açıklamasıdır (Lesage ve Pace, 2009).

Vandenbulcke-Plasschaert (2011) direk ve dolaylı etkileri aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

Direk Etki: Bir bölgedeki bağımsız değişkendeki değişimin, kendi bölgesindeki etkisi olarak ifade edilir ve iki şekilde ortaya çıkar.

- i. Bir bölgedeki bağımsız değişkendeki değişimin direk kendini etkilemesi (komşuluklar hesaba katılmıyor)
- ii. Bir bölgedeki bağımsız değişkendeki değişimin komşu bölgeleri de etkilemesi ve komşudaki değişimin yine kendisini etkilemesi (*feedback loop*)

Dolaylı (Spillover) Etki: Bir bölgedeki bağımsız değişkendeki değişimin komşularına etkisidir. Bu konu için Sarrias (2017) kirlilik örneğini vermiştir. Bir bölgede meydana gelen hava veya su kirliliği komşu bölgeleri de etkileyecektir ve onlarda da kirliliğe sebep olacaktır.

Dolaylı etkiler lokal spillover ve global spillover olmak üzere ikiye ayrılır. Elhorst (2014) bu etkileri aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

Lokal spillover: Bir bölgede meydana gelen değişim sadece komşu bölgeleri etkiler ve komşusunun komşusuna geçmeden etkisini yitirir.

Global spillover: Bir bölgede meydana gelen değişim komşularını etkiler daha sonra komşularının komşularını etkiler ve daha da yüksek dereceli komşularını etkileyerek yine kendisine geri döner. Bu nedenle de global spillover olduğunda hesaplama yapmak çok daha zordur.

Teorik olarak Lesage ve Pace (2009) direk ve dolaylı etkileri, modelin beklenen değerinin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevleri ile tanımlamışlar ve $S(W)$ ile göstermişlerdir. Yani,

$$S_r(W) = \left[\frac{\partial E(y)}{\partial x_{1r}} \quad \dots \quad \frac{\partial E(y)}{\partial x_{nr}} \right] \quad (2.119)$$

şeklinde. burada $r = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere bağımsız değişkenlerin sayısıdır.

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial E(y_1)}{\partial x_{1r}} & \cdots & \frac{\partial E(y_1)}{\partial x_{nr}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial E(y_n)}{\partial x_{1r}} & \cdots & \frac{\partial E(y_n)}{\partial x_{nr}} \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

Eğer n bölge örnekleme k kadar bağımsız değişken varsa k tane farklı $n \times n$ direkt ve/veya dolaylı etki matrisi elde edilir. Lesage bu matrisleri $S_r(W)$ ile ifade etmiştir.

Lesage (Lesage ve Pace, 2009), $S_r(W)$ matrisinin köşegen elemanlarını $(S_r(W)_{ii})$ *direk etki* olarak ifade ederken köşegen olmayan elemanlarını $(S_r(W)_{ij})$ *dolaylı (spillover) etki* olarak ifade etmiştir.

Her bir model için direkt ve dolaylı etkiler aşağıda verilmiştir.

OLS/SEM

OLS ve SEM'in bağımlı değişken için beklenen değeri aynı olduğu için bağımsız değişkene göre kısmi türevleri,

$$E(y) = X\beta \quad (2.121)$$

$$S_r(W)_{OLS/SEM} = \frac{\partial E(y)}{\partial x_r} \quad (2.122)$$

$$= \beta_r \quad (2.123)$$

Burada $S_r(W)_{OLS/SEM} = \beta_r$ olduğundan sadece direkt etki söz konusudur.

GNS/SDM

$$E(y) = (I_n - \rho W)^{-1}(X\beta + WX\theta) \quad (2.124)$$

$$E(y) = \sum_{r=1}^k (I_n - \rho W)^{-1}(\beta_r + W\theta_r)x_r \quad (2.125)$$

olmak üzere bağımsız değişkene göre kısmi türevi,

$$S_r(W)_{GNS/SDM} = \frac{\partial E(y)}{\partial x_r} \quad (2.126)$$

$$= (I_n - \rho W)^{-1}(\beta_r + W\theta_r) \quad (2.127)$$

SAR/SAC

$$E(y) = (I_n - \rho W)^{-1} X\beta \quad (2.128)$$

$$S_r(W)_{SAR/SAC} = \frac{\partial E(y)}{\partial x_r} \quad (2.129)$$

$$= (I_n - \rho W)^{-1} \beta_r \quad (2.130)$$

SLX/SDEM

$$E(y) = X\beta + WX\theta \quad (2.131)$$

$$S_r(W)_{SLX/SDEM} = \frac{\partial E(y)}{\partial x_r} \quad (2.132)$$

$$= I_n \beta_r + W\theta_r \quad (2.133)$$

Burada ağırlık matrisi köşegen elemanları 0 olduğu için θ_r direk etki göstermez iken β_r direk etki gösterir. Benzer şekilde köşegen olmayan elemanlar dikkate alındığında β_r dolaylı (spillover) etki göstermezken, θ_r dolaylı (spillover) etkiyi gösterir.

Yukarıdaki türevleri Elhorst (2014) aşağıdaki şekilde tablo halinde vermiştir.

Tablo 2.5. *Direk etkiler ve dolaylı (spillover) etkiler*

Model	Direk Etki	Dolaylı (Spillover) Etki
OLS/SEM	β_r	0
SAR/SAC	$(I_n - \rho W)^{-1} \beta_r$ Köşegen elemanları	$(I_n - \rho W)^{-1} \beta_r$ Köşegen Dışı elemanları
SLX/SDEM	β_r	θ_r
SDM/GNS	$(I_n - \rho W)^{-1} (\beta_r + W\theta_r)$ Köşegen elemanları	$(I_n - \rho W)^{-1} (\beta_r + W\theta_r)$ Köşegen Dışı elemanları

Elhorst (2014) Tablo 2.5’den aşağıda verilen üç sonucu elde etmiştir:

1. Bir bölgedeki bağımsız değişkendeki değişim yalnızca kendi bölgesinden değil diğer bölgelerden de kaynaklanıyor olabilir. Kendi bölgesinden kaynaklanan etkiye direk etki, diğer bölgelerden kaynaklanan etkiye ise dolaylı etki denmektedir. Yani her kısmi türevin köşegen elemanları direk etkiyi gösterirken köşegen olmayan elemanları dolaylı etkiyi göstermektedirler. Bununla beraber modelde mekânsal bağımlılık yoksa yani $\rho = 0$ ve $\theta = 0$ ise matrisin köşegen olmayan elemanları da sıfır olacağından dolaylı (spillover) etki ortaya çıkmayacaktır.
2. SAR, SAC, SDM ve GNS için direk ve dolaylı (spillover) etkiler bir bölgeden diğerine farklılık gösterirler, çünkü ağırlık matrisinin elemanları farklı olduğundan $(I_n - \rho W)^{-1}$ matrisinin köşegen ve köşegen olmayan elemanları da birbirinden farklıdır ($\rho \neq 0$ ve $\theta \neq 0$ için).
3. SDM ve GNS için eğer $\theta_r \neq 0$ olursa lokal etki, $\rho \neq 0$ olursa global etki söz konusudur. $\theta_r \neq 0$ olduğunda lokal etki olması ağırlık matrisinin köşegen olmayan elemanlarının bazıları sıfırdan farklı olacağından bağımlı değişkenin, komşu bölgelerdeki bağımsız değişkenlerden etkileneceğini gösterir. Global etki olması ise $\rho \neq 0$ olacağından $(I_n - \rho W)^{-1}$ matrisinin elemanlarının sıfırdan farklı olmasından dolayı yalnızca komşuların değil komşuların komşularının da etkisi söz konusu olacaktır. Eğer hem $\rho \neq 0$ ve $\theta_r \neq 0$ olursa lokal ve global etki birbirinden ayrılamaz.

Bunların haricinde $S_r(W)$ dikkate alındığında aşağıdaki sonuçlar da çıkarılabilir,

- OLS dolaylı (spillover) etkiye sahip değildir. Çünkü OLS’nin varsayımlarından birisi de her bir bölgenin diğerlerinden bağımsızlığıdır. Dolaylı etkiler i . bölgedeki bağımsız değişkendeki değişimin diğer bölgelere etkisi olarak ifade edilmektedir. Matematiksel olarak gösterilir ise $i \neq j$ için $(\partial y_i)/(\partial x_{jr}) = 0$ olduğundan OLS de dolaylı etki yoktur.
- SEM için dolaylı etkiler yoktur çünkü mekânsal bağımlılık hata terimindedir. Oysaki dolaylı etkiler bağımlı ve bağımsız değişkenlerdeki mekânsal bağımlılığı dikkate almaktadır.

- SLX ve SDEM’de direk etki β_r iken dolaylı etki θ_r dır. Bu nedenle direk ve dolaylı etkiyi bulmak için ekstra bir hesaplama yapmaya gerek yoktur.
- Mekânsal modellerde kısmi türevler OLS’deki gibi β_r olmayacaktır. Eğer SAR baz alınır ve OLS ile kıyaslanırsa mekânsal bağıllık bağımlı değişkende olduğundan türevler farklı çıkacaktır. Örneğin, gelir seviyesi bağımlı değişken olarak alındığında bir bölgedeki farklılık komşu bölgelerin gelir seviyesine bağlıdır.

SAR ve SAC dikkate alındığında direk ve dolaylı etkiler daha karmaşıktır. Çünkü $(I_n - \rho W)^{-1}$ ile çarpım söz konusudur. Bu nedenle direk etki için düşünürsek bu çarpım β_r için bir veya daha fazla olabilir. Bu durum Leontief açılımı ile daha iyi anlaşılır. Bu açılım ağırlık matrisinin her bir derecesi için gözlemlerdeki etkiyi ifade eder. Ağırlık matrisi derecesi sıfır olursa kendisi, birinci derece olursa komşusu, ikinci derece olursa komşusunun komşusu şeklinde artarak devam etmektedir. Bu açılım marjinal ve toplam direk/dolaylı etkilerin hesabında farklı dereceli komşuluklar için kullanılır. Bağımsız değişkenlerdeki değişimin etkileri yakın komşuluklarda uzak komşuluklara göre daha fazladır. Bu durum Leontief açılımı ile rahatlıkla görülebilir.

Mekânsal etkiyi daha iyi anlamak için $(I_n - \rho W)^{-1}$ ifadesine aşağıdaki gibi *Leontief açılımı* yapılırsa,

$$(I_n - \rho W)^{-1} = I_n + \rho W + \rho^2 W^2 + \rho^3 W^3 + \dots \quad (2.134)$$

SAR ve SAC için etkiler ise,

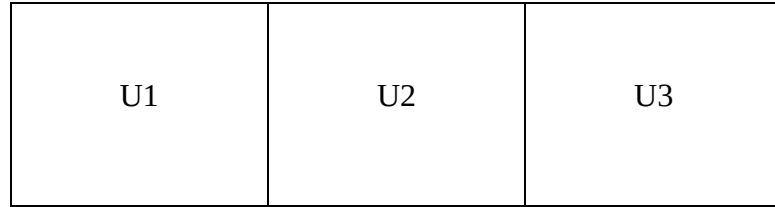
$$S(W) \approx (I_n + \rho W + \rho^2 W^2 + \rho^3 W^3 + \dots) I_n \beta_r \quad (2.135)$$

olur. Sağ taraftaki ilk ifade I birim matrisin köşegen harici elemanları 0 olduğundan bağımsız değişkendeki değişimin direk etkisini gösterir. Buna karşın ikinci ifade ρW ’un köşegen elemanları ağırlık matrisinin varsayımlarından dolayı 0 olduğundan bağımsız değişken X ’deki değişimin dolaylı (spillover) etkisini gösterir. Geri kalan ikinci ve daha yüksek dereceli ifadeler de direk ve dolaylı (spillover) etkileri gösterirler. Derece arttıkça direk etkilerin değeri de büyür. Örneğin ikinci derece komşuluk söz konusu olduğunda bir bölge komşunu etkileyecek ve komşusundan da tekrar kendi etkilenecektir ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$). Benzer durum diğer dereceler içinde geçerlidir, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ vb. Böylece etkilerin bölgeler arasında geçişi mümkün olabilmektedir.

Bu etkilerin büyüklüğünü etkileyen unsurları Lesage (Lesage ve Pace, 2009) dört grupta toplamıştır,

1. Bölgelerin mekânsal pozisyonları
2. Bölgelerin birbirleriyle bağıllık dereceleri (W matrisiyle ifade edilir)
3. Mekânsal bağıllığın gücünü ölçen ρ nun büyüklüğü
4. β ve θ parametreleri

Direk ve dolaylı etkileri daha iyi anlamak için Elhorst (2010), 3 bölgesi SDM örneğini vermiştir. Bu örneğe göre, 3 bölge olsun ve üçü de birbiriyle doğrusal şekilde aşağıdaki gibi komşu olsun:



Şekil 2.27. Elhorst 3 bölgesi haritası

Şekil 2.27'ye göre ağırlık matrisi,

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ w_{21} & 0 & w_{23} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

şeklinde. Burada $w_{12} = w_{32} = 1$ 'dir. Çünkü 1. ve 3. bölge sadece bir komşuluğa sahiptir. $w_{21} + w_{23} = 1$ (w_{21} ve w_{23} farklı olabilir).

$$(I_n - \rho W)^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1 - w_{23}\rho^2 & \rho & \rho^2 w_{23} \\ \rho w_{21} & 1 & \rho w_{23} \\ \rho^2 w_{21} & \rho & 1 - w_{21}\rho^2 \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E(y)}{\partial x_{1r}} & \frac{\partial E(y)}{\partial x_{2r}} & \frac{\partial E(y)}{\partial x_{3r}} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} (1 - w_{23}\rho^2)\beta_r + (w_{21}\rho)\theta_r & \rho\beta_r + \theta_r & (w_{23}\rho^2)\beta_r + (\rho w_{23})\theta_r \\ (w_{21}\rho)\beta_r + w_{21}\theta_r & \beta_r + \rho\theta_r & (w_{23}\rho)\beta_r + w_{23}\theta_r \\ (w_{21}\rho^2)\beta_r + (w_{21}\rho)\theta_r & \rho\beta_r + \theta_r & (1 - w_{21}\rho^2)\beta_r + (w_{23}\rho)\theta_r \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

SDM'ye göre alınan kısmi türevlerden Elhorst (2010) aşağıdaki sonuçları çıkarmıştır,

1. (2.138) matrisinin köşegen elemanları direk etkiyi, köşegen olmayan elemanları dolaylı etkiyi gösterir.
2. Direk ve dolaylı etkiler her bölgede farklı olacaktır. (2.137) ve (2.138) matrisleri incelendiğinde $\rho \neq 0$ için $(I_n - \rho W)^{-1}$ matrisinin köşegen elemanları farklı olacağından direk etkiler farklı olacaktır. Yine (2.137) ve (2.138) matrisi incelendiğinde $\rho \neq 0$ ve $\theta_r \neq 0$ için köşegen olmayan elemanları farklı olacağından ayrıca W matrisinin de köşegen olmayan elemanları farklı olacağından dolaylı etkiler de farklı olacaktır.
3. $\theta_r \neq 0$ olduğunda dolaylı etkiler ortaya çıkar ve lokal etki olur, $\rho \neq 0$ olursa da yine dolaylı etki ortaya çıkar ama global etki olur. (2.138) dikkate alındığında, eğer ağırlık matrisinin elemanları sıfırdan farklı olursa $w_{ij} \neq 0$, bağımsız değişkenin (x_{jk}) de bağımlı değişken y_i üstündeki etkisi farklı olur.

Sarrias (2017) dolaylı etki üzerinden lokal ve global etkileri aşağıdaki şekilde göstermiştir:

$$\frac{\partial E(y_3)}{\partial x_{1r}} = \frac{1}{1 - \rho^2} (w_{21}\rho^2\beta_r + w_{21}\rho\theta_r) \quad (2.139)$$

burada x_{1k} 'in y_3 üzerindeki dolaylı etkisi aşağıdaki global ve lokal etkiye bağlıdır:

Global Etki:

$$\frac{w_{21}\rho^2\beta_r}{1 - \rho^2} \quad (2.140)$$

Lokal Etki:

$$\frac{w_{21}\rho\theta_r}{1 - \rho^2} \quad (2.141)$$

burada $w_{21} = 0$ olursa ne global ne de lokal etki ortaya çıkar. Eğer ρ yükselirse lokal ve global etki artar.

Sarrias (2017) etkiler için aşağıdaki 3 yorumu çıkarmıştır:

- Her bir bölgedeki her bir değişkendeki değişiklik n^2 potansiyel marjinal etkiye sahiptir.
- Eğer modelde k değişken olursa $k \times n^2$ potansiyel ölçü (measures) olur.
- n ve k küçük olsa bile bu sonuçları tamamen raporlamak zor olabilir.

Sarrias (2017) yukarıdaki üç durum için özet ölçülere ihtiyaç duyulduğunu belirtmiştir. Özet ölçülerle ilgili LeSage ve Pace (Lesage ve Pace, 2009) etkilerin bölgeden bölgeye farklılık göstermesini dikkate alarak genel bir ölçüt geliştirmişlerdir. Bu ölçütü ortalama direk etki (Average Direct Impact, *ADI*), bir gözleme etki eden ortalama toplam etki (Average Total Impact to an Observation, *ATIT*), bir gözlemden gelen ortalama toplam etki (Average Total Impact from an Observation, *ATIF*) olarak üçe ayırarak *ADI*, *ATIT* ve *ATIF* için hesaplama yöntemi önermişlerdir.

3. MEKÂNSAL HATA MODELİ İÇİN TAHMİN YÖNTEMLERİ

Klasik lineer regresyon modelinin varsayımları sağlandığında, OLS tahmincileri en iyi lineer yansız tahmin ediciler (BLUE) olmaktadır. Ancak değişkenler (bağımlı, bağımsız ve hata değişkeni) arasında bağımsızlığın ihlal edilmesi durumunda, OLS uygun yöntem olmamaktır. Eğer bu ihlal mekânsal bağımlılık veya komşuluk etkileşiminden dolayı ise bu durumda uygun modeller, mekânsal ekonometrik modellerdir. Bu modeller tahmin edilirken mekânsal bağımlılık parametrelerini dikkate alan kendine özgü hesaplama teknikleri barındıran tahminleme yöntemleri kullanır. Literatürde, mekânsal ekonometrik modeller için çeşitli tahminleme yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemler tanıtılmadan önce OLS'nin mekânsal ekonometrik modeller için uygun yöntem olmadığının gösterilmesi bir sonraki bölümünde ele alınacaktır.

Çeşitli mekânsal etkileşimleri dikkate alan farklı mekânsal ekonometrik tahminciler geliştirilmiştir. Bunlardan en yaygın kullanılanları en çok olabilirlik tahmincisi (maximum likelihood estimator, MLE), genelleştirilmiş momentler yöntemi (generalized method of moments, GMM), Mekânsal iki aşamalı en küçük kareler (Spatial two stage least squares, STSLS) yöntemi şeklindedir.

Büyük örneklerde en çok olabilirlik (ML) tahminlerinin hesaplanması oldukça zordur. Ayrıca ML metodu için hataların normal dağıldığı varsayımı vardır ve bu durum her zaman sağlanamayabilir. Bu tür durumlarda alternatif tahminleme yöntemleri kullanılmalıdır.

Ayrıca, klasik ML ve GMM ise veri setinde aykırı değer olması durumunda aykırı değerlerden etkilenmektedirler. Bu çalışmada, SEM için robustlaştırılan olabilirlik denklemlerine dayalı olarak Hugging (1993) ve Sinha ve Rao (2009) tarafından robust tahminciler elde edilmiştir.

3.1. SEM için OLS Tahmincileri ve Bu Tahmincilerin Sınırları

Mekânsal ekonometrik modeller bölgelerin birbiri ile komşuluğundan kaynaklanan etkileşiminden dolayı görülen mekânsal bağımlılık ve buna ilişkin parametrelerden dolayı klasik ekonometrik modellerden ayrılır. Bu nedenle de klasik tahminciler kullanılmaması gerekir.

SEM için klasik OLS tahmincisi yansız ve tutarlı ama etkin değildir. Bu durum aşağıda ayrı ayrı ispatlanacaktır.

SEM için bağımlı değişkenin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(y) &= E[X\beta + (I_n - \lambda w)^{-1}\varepsilon] \\ &= E[X\beta] + E[(I_n - \lambda w)^{-1}\varepsilon] \end{aligned}$$

burada $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ olduğundan

$$= X\beta \quad (3.1)$$

olur.

SEM için bağımlı değişkenin varyansı,

$$\begin{aligned} V(y) &= V(X\beta + (I_n - \lambda w)^{-1}\varepsilon) \\ &= V((I_n - \lambda w)^{-1}\varepsilon) \\ &= \sigma^2 (I_n - \lambda W)^{-1} (I_n - \lambda W')^{-1} \end{aligned}$$

burada

$$\Omega_\lambda = (I_n - \lambda W)^{-1} (I_n - \lambda W')^{-1} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanırsa varyans,

$$V(y) = \sigma^2 \Omega_\lambda \quad (3.3)$$

olur.

Hataların varyans-kovaryans matrisi,

$$E(uu') = \sigma^2 (I_n - \lambda W)^{-1} (I_n - \lambda W')^{-1} \quad (3.4)$$

şeklinde ve buradan görüleceği üzere her bir hata terimi çifti için kovaryanslar sıfır değildir ve yakınlığın derecesine göre azalır. Ayrıca $E(uu')$ köşegen terimleri de sabit olmadığından hata terimleri arasında değişen varyans vardır. Bu durum ε 'nin heteroscedastic olup olmamasına bağlı değildir, mekânsal korelasyondan gelmektedir.

SEM için OLS tahmincileri incelenirse, katsayı tahmincisi

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{OLS} &= (X'X)^{-1}X'y \\
E(\hat{\beta}_{OLS}) &= E\{(X'X)^{-1}X'y\} \\
E(\hat{\beta}) &= E\{\beta + (X'X)^{-1}X'u\} \\
&= \beta
\end{aligned}$$

olduğundan OLS yansızdır. Varyansı ise,

$$\begin{aligned}
V(\hat{\beta}) &= E\{[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})][\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]'\} \\
&= E\{[\hat{\beta} - \beta][\hat{\beta} - \beta]'\} \\
&= E\{[X'X]^{-1}X'uu'X[X'X]^{-1}\} \\
&= \sigma^2[X'X]^{-1}X'\Omega_\lambda X[X'X]^{-1}
\end{aligned}$$

şeklinde. Burada varyans matrisi köşegen olmadığından yani değişen varyans olduğundan dolayı OLS etkin değildir (Anselin, 1988b), ancak tutarlıdır (Gujarati, 1995).

SEM için OLS tahmincisinin tutarlılığı aşağıda gösterilmiştir,

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{OLS} &= [X'X]^{-1}X'y \\
&= \beta + [X'X]^{-1}X'u \\
&= \beta + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-1} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i u_i)\right)
\end{aligned}$$

burada,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow q$$

terimi q sonludur. İkinci terim ise,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i u_i) \xrightarrow{p} E(x_i u_i) = 0$$

olur. Sonuç olarak SEM için OLS tutarlıdır.

Eğer $cov(x_i u_i) = 0$ ise OLS yansız ve tutarlı ancak etkin değildir. Eğer λ biliniyor olsaydı genelleştirilmiş en küçük kareler (generalized least squares, GLS) etkin tahminci olurdu. Bu yüzden SEM de λ 'nın önsel tahmini yapılırsa Ω_λ bilineceğinden GLS, BLUE tahminleme olacaktır (Baltagi, 2008).

3.2. En Çok Olabilirlik Tahmincisi (Maximum Likelihood Estimator, MLE)

SAR ve SEM için MLE'yi geliştirmek için Cliff ve Ord (1973), Ord (1975), Hople (1976), Hordjik ve Paelink (1976), Haining (1978), Brandsma ve Ketelapper (1979), Anselin (1980), Doreian (1982), Cook ve Pocock (1983), Blommestain (1985) çalışmalarda bulunmuşlardır (Anselin, 1988b).

SEM için MLE hataların normal dağılıma sahip olduğu ($\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ ve $u \sim N(0, \sigma^2 \Omega_\lambda)$) varsayımına dayanmaktadır. Bu varsayım altında $y \sim N(X\beta, \sigma^2 \Omega_\lambda)$ ve $y - X\beta \sim N(0, \sigma^2 \Omega_\lambda)$ dağılırlar ve olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekildedir,

$$L = (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - X\beta)' \Sigma^{-1}(y - X\beta)\right) \quad (3.5)$$

Burada

$$\Sigma = \sigma^2 (I_n - \lambda W)(I_n - \lambda W')^{-1} \quad (3.6)$$

şeklindedir ve $V(u) = \sigma_u^2 = \Sigma$ olur.

Olabilirlik fonksiyonu W ağırlık matrisinin simetrik olması ve olmaması durumuna göre ayrı ayrı incelenecektir.

Eğer W ağırlık matrisi simetrik değilse,

$$\Omega_\lambda = (I_n - \lambda W)(I_n - \lambda W')^{-1} \quad (3.7)$$

$$A = (I_n - \lambda W) \quad (3.8)$$

$$B = (I_n - \lambda W)(I_n - \lambda W') = (I - \lambda W' - \lambda W + \lambda^2 W W') \quad (3.9)$$

$$C = \frac{\partial B}{\partial \lambda} = 2\lambda W W' - W - W' \quad (3.10)$$

olarak tanımlanırsa,

$$\Sigma = \sigma^2 \Omega_\lambda = \sigma^2 (AA')^{-1} = \sigma^2 B^{-1} \quad (3.11)$$

olur ve Log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \log L &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\det(\sigma^2 \Omega_\lambda)) - \frac{1}{2} (y - X\beta)' (\sigma^2 \Omega_\lambda)^{-1} (y - X\beta) \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log|I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} [y - X\beta]' [I_n - \lambda W'] [I_n - \lambda W] [y - X\beta] \end{aligned}$$

Burada işlemlerde basitlik sağlaması bakımından $y - X\beta = u$ olarak kullanılırsa,

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log|I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} u' B u \quad (3.12)$$

olur.

ML tahmincileri elde etmede kullanılacak bazı türev ve beklenen değer özellikleri aşağıda verilmiştir.

Özellik 1:

$$\frac{\partial (A - B\theta)' C (A - B\theta)}{\partial \theta} = -2B' C (A - B\theta) \quad (3.13)$$

Özellik 2a:

$$\frac{\partial Q^{-1}}{\partial \theta} = -Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta} Q^{-1} \quad (3.14)$$

Özellik 2b:

$$\frac{\partial Q^{-1/2}}{\partial \theta} = -Q^{-1/2} \frac{\partial Q^{1/2}}{\partial \theta} Q^{-1/2} \quad (3.15)$$

Özellik 2c:

$$\frac{\partial Q^{-1/2}}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta} Q^{-1/2} \quad (3.16)$$

Özellik 3a:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\det(Q)) = \text{tr} \left(Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) \det(Q) \quad (3.17)$$

Özellik 3b:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\log \det(Q)) = \frac{\text{tr} \left(Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) \det(Q)}{\det(Q)} = \text{tr} \left(Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) \quad (3.18)$$

Özellik 4:

$$E[\epsilon' Q \epsilon] = \text{tr}\{QV(\epsilon)\} + E[\epsilon]' Q E[\epsilon] \quad (3.19)$$

$\log L$ fonksiyonunun parametrelere göre kısmi türevleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log |I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' B (y - X\beta) \right) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} (-2) X' B (y - X\beta) \end{aligned}$$

β parametresinin skor fonksiyonu (s_β) aşağıdaki gibidir:

$$s_\beta = \frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2} X' B u \quad (3.20)$$

Buradan β tahmincisi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} X' B u &= 0 \\ X' B (y - X\beta) &= 0 \\ X' B y &= X' B X \beta \end{aligned}$$

olur ve β_{MLE}

$$\beta_{MLE} = [X' B X]^{-1} X' B y \quad (3.21)$$

şeklinde olur.

$\log L$ fonksiyonunun σ^2 için kısmi türevi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} &= \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(-\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log|I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} u' B u \right) \\ &= -\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{(-1)}{(\sigma^2)^2} u' B u\end{aligned}$$

şeklinde olur ve σ^2 skor fonksiyonu (s_{σ^2}),

$$s_{\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' B u \quad (3.22)$$

şeklinde olur. Burada σ^2 tahmincisi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' B u &= 0 \\ \frac{n}{2\sigma^2} &= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' B u\end{aligned}$$

olur ve σ_{MLE}^2

$$\sigma_{MLE}^2 = \frac{1}{n} u' B u \quad (3.23)$$

şeklinde olur.

$\log L$ fonksiyonunun λ için kısmi türevi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log|I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} u' B u \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log|I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} u' [I - \lambda W' - \lambda W + \lambda^2 W W'] u \right) \\ &= \text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1}(-W)) - \frac{1}{2\sigma^2} u' (2\lambda W W' - W - W') u\end{aligned}$$

daha önce $C = 2\lambda W W' - W - W'$ olarak tanımlanmıştı, burda yerine yazılırsa λ için skor fonksiyonu,

$$s_\lambda = -\text{tr}(A^{-1}W) - \frac{1}{2\sigma^2} u' C u \quad (3.24)$$

şekline olur. β parametresinin ikinci dereceden kısmi türevleri hesaplanırsa, β için,

$$H_{\beta\beta} = \frac{\partial \log L}{\partial \beta \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\sigma^2} X' B (y - X\beta) \right)$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2} X' B X \quad (3.25)$$

şeklinde olur. Beklenen değeri ise,

$$\begin{aligned} E(H_{\beta\beta}) &= E\left(-\frac{1}{\sigma^2} X' B X\right) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} X' B X \end{aligned} \quad (3.26)$$

şeklinde olur. σ^2 için kısmi türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} H_{\sigma^2\beta} &= \frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2 \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} X' B u \right) \\ &= -\frac{1}{(\sigma^2)^2} X' B u \end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklinde olur. Beklenen değeri ise,

$$E(H_{\sigma^2\beta}) = E\left(-\frac{1}{(\sigma^2)^2} X' B u\right) = 0 \quad (3.28)$$

şeklinde olur. λ için kısmi türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} H_{\lambda\beta} &= \frac{\partial \log L}{\partial \lambda \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\sigma^2} X' B u \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} X' C u \end{aligned} \quad (3.29)$$

ve beklenen değer,

$$E(H_{\lambda\beta}) = E\left(\frac{1}{\sigma^2} X' C u\right) = 0 \quad (3.30)$$

olur.

σ^2 parametresinin ikinci dereceden kısmi türevleri hesaplanırsa, σ^2 için,

$$H_{\sigma^2\sigma^2} = \frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' B u \right)$$

$$= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} u' Bu \quad (3.31)$$

ve beklenen değeri ise,

$$\begin{aligned} E(H_{\sigma^2 \sigma^2}) &= E\left(\frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} u' Bu\right) \\ &= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} E(u' Bu) \\ &= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} (tr(B\Sigma) + 0) \\ &= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} tr(BB^{-1}\sigma^2) \\ &= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^2} tr(I) \\ &= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{n}{(\sigma^2)^2} \\ &= -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

şeklinde olur. λ için kısmi türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} H_{\lambda \sigma^2} &= \frac{\partial \log L}{\partial \lambda \partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' Bu \right) \\ &= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' Cu \end{aligned} \quad (3.33)$$

ve beklenen değer,

$$\begin{aligned} E(H_{\lambda \sigma^2}) &= E\left(\frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' Cu\right) \\ &= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} E(u' Cu) \\ &= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} (tr(C\Sigma) + 0) \\ &= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} tr(CB^{-1}\sigma^2) \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} tr(CB^{-1}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

olur. β için kısmi türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
 H_{\beta\sigma^2} &= \frac{\partial \log L}{\partial \beta \partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' B u \right) \\
 &= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} (-2X' B (y - X\beta)) \\
 &= -\frac{1}{(\sigma^2)^2} X' B u
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

şeklinde olur. Beklenen değeri ise,

$$E(H_{\beta\sigma^2}) = E\left(-\frac{1}{(\sigma^2)^2} X' B u\right) = 0 \tag{3.36}$$

dır.

λ parametresinin ikinci dereceden kısmi türevleri hesaplanırsa, λ için,

$$\begin{aligned}
 H_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial \log L}{\partial \lambda \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1} W) - \frac{1}{2\sigma^2} u' C u \right) \\
 &= -\text{tr}(-(I_n - \lambda W)^{-1} (-W)(I_n - \lambda W)^{-1} W) - \frac{1}{2\sigma^2} u' 2WW'u \\
 &= -\text{tr}(A^{-1} W A^{-1} W) - \frac{1}{\sigma^2} u' W W' u
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

şeklinde olur. Beklenen değeri ise,

$$\begin{aligned}
 E(H_{\lambda\lambda}) &= E\left(-\text{tr}(A^{-1} W A^{-1} W) - \frac{1}{\sigma^2} u' W W' u\right) \\
 &= -\text{tr}(A^{-1} W A^{-1} W) - \frac{1}{\sigma^2} E(u' W W' u) \\
 &= -\text{tr}(A^{-1} W A^{-1} W) - \frac{1}{\sigma^2} (\text{tr}(W W' \Sigma) + 0) \\
 &= -\text{tr}(A^{-1} W A^{-1} W) - \frac{1}{\sigma^2} \text{tr}(W W' B^{-1} \sigma^2) \\
 &= -\text{tr}(A^{-1} W A^{-1} W) - \text{tr}(W W' A^{-1} A^{-1}) \\
 &= -2\text{tr}(A^{-1} W A^{-1} W)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

dır. σ^2 için kısmi türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
H_{\sigma^2\lambda} &= \frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2 \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(-\text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1} W) - \frac{1}{2\sigma^2} u' C u \right) \\
&= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' C u
\end{aligned} \tag{3.39}$$

ve beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
E(H_{\sigma^2\lambda}) &= E \left(\frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' C u \right) \\
&= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} E(u' C u) \\
&= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} (\text{tr}(C\Sigma) + 0) \\
&= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \text{tr}(C B^{-1} \sigma^2) \\
&= \frac{1}{2\sigma^2} \text{tr}(C B^{-1})
\end{aligned} \tag{3.40}$$

dır. β için kısmi türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
H_{\beta\lambda} &= \frac{\partial \log L}{\partial \beta \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1} W) - \frac{1}{2\sigma^2} u' C u \right) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2} (-2X' C (y - X\beta)) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} X' C u
\end{aligned} \tag{3.41}$$

şeklinde olur. Beklenen değeri ise,

$$E(H_{\beta\lambda}) = E \left(\frac{1}{\sigma^2} X' C u \right) = 0 \tag{3.42}$$

dır. Böylece $\log L$ fonksiyonunun, skor vektörü, Hessian matrisi ve Hessian'ın beklenen değeri elde edilmiş olur. Skor vektörü aşağıda verilmiştir:

$$s = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} X' B u \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' B u \\ -\text{tr}(A^{-1} W) - \frac{1}{2\sigma^2} u' C u \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

Hessian matrisi aşağıda verilmiştir:

$$H = \begin{bmatrix} -\sigma^{-2}X'BX & -\sigma^{-4}X'Bu & \sigma^{-2}X'Cu \\ -\sigma^{-4}X'Bu & \frac{n}{2}\sigma^{-4} - \sigma^{-6}u'Bu & \frac{1}{2}\sigma^{-4}u'Cu \\ \sigma^{-2}X'Cu & \frac{1}{2}\sigma^{-4}u'Cu & -tr(A^{-1}WA^{-1}W) - \sigma^{-2}u'WW'u \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Hessian'ın beklenen değeri aşağıda verilmiştir:

$$E(H) = \begin{bmatrix} -\sigma^{-2}X'BX & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} & \frac{1}{2\sigma^2}tr(CB^{-1}) \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^2}tr(CB^{-1}) & -2tr(A^{-1}WA^{-1}W) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Eğer W ağırlık matrisi simetrik ise,

$$\Omega_\lambda = (I_n - \lambda W)^{-2} \quad (3.46)$$

$$A = (I_n - \lambda W)$$

$$B = (I_n - \lambda W)^2 = A^2 \quad (3.47)$$

$$C = \frac{\partial B}{\partial \lambda} = -2(I_n - \lambda W)W = -2AW \quad (3.48)$$

olarak tanımlanırsa,

$$\Sigma = \sigma^2 \Omega_\lambda = \sigma^2 A^{-2} = \sigma^2 B^{-1} \quad (3.49)$$

olur ve Log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \log L = & -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log|I_n - \lambda W| \\ & - \frac{1}{2\sigma^2} [y - X\beta]' [I_n - \lambda W]^2 [y - X\beta] \end{aligned} \quad (3.50)$$

burada işlemlerde basitlik sağlaması bakımından $y - X\beta = u$ olarak kullanılırsa olabilirlik fonksiyonu,

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log|A| - \frac{1}{2\sigma^2} u' A^2 u \quad (3.51)$$

şeklinde olur.

β ve σ^2 skor fonksiyonları aşağıdaki şekildedir:

$$s_{\beta} = \sigma^{-2} X' A^2 u \quad (3.52)$$

$$s_{\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' A^2 u \quad (3.53)$$

Olabilirlik fonksiyonun λ için kısmi türevi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log |I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} u' A^2 u \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log |I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} u' [I - \lambda W]^2 u \right) \\ &= \text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1}(-W)) - \frac{1}{2\sigma^2} u' (2[I - \lambda W](-W))u \end{aligned}$$

λ için skor fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$s_{\lambda} = -\text{tr}(A^{-1}W) + \sigma^{-2} u' A W u \quad (3.54)$$

Olabilirlik fonksiyonun β parametresinin ikinci dereceden kısmi türevleri hesaplanırsa, β için,

$$H_{\beta\beta} = -\frac{1}{\sigma^2} X' A^2 X \quad (3.55)$$

şeklinde olur. Beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(H_{\beta\beta}) &= E\left(-\frac{1}{\sigma^2} X' A^2 X\right) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} X' A^2 X \end{aligned} \quad (3.56)$$

dır. σ^2 için kısmi türevi hesaplanırsa,

$$H_{\sigma^2\beta} = -\frac{1}{(\sigma^2)^2} X' A^2 u \quad (3.57)$$

şeklinde olur. Beklenen değeri ise,

$$E(H_{\sigma^2\beta}) = E\left(-\frac{1}{(\sigma^2)^2} X' A^2 u\right) = 0 \quad (3.58)$$

dır. λ 'ya göre 2.türev alınır,

$$\begin{aligned}
H_{\lambda\beta} &= \frac{\partial \log L}{\partial \lambda \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\sigma^2} X' A^2 u \right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} X' (2[I - \lambda W](-W))u \\
&= -\frac{2}{\sigma^2} X' A W u
\end{aligned} \tag{3.59}$$

şeklinde bulunur. Beklenen değeri ise,

$$E(H_{\lambda\beta}) = E\left(-\frac{2}{\sigma^2} X' A W u\right) = 0 \tag{3.60}$$

dır.

Olabilirlik fonksiyonun σ^2 parametresinin ikinci dereceden kısmi türevleri hesaplanırsa, σ^2 için,

$$H_{\sigma^2 \sigma^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} u' A^2 u \tag{3.61}$$

şeklinde olur. Beklenen değeri ise,

$$\begin{aligned}
E(H_{\sigma^2 \sigma^2}) &= E\left(\frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} u' A^2 u\right) \\
&= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} E(u' A^2 u) \\
&= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} (tr(A^2 \Sigma) + 0) \\
&= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} tr(A^2 B^{-1} \sigma^2) \\
&= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^2} tr(I) \\
&= -\frac{n}{2(\sigma^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

şeklinde olur. λ için kısmi türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
H_{\lambda \sigma^2} &= \frac{\partial \log L}{\partial \lambda \partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' A^2 u \right) \\
&= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' (2[I - \lambda W](-W))u
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{(\sigma^2)^2} u' A W u \quad (3.63)$$

şeklinde olur. Beklenen değeri ise,

$$\begin{aligned} E(H_{\lambda\sigma^2}) &= E\left(-\frac{1}{(\sigma^2)^2} u' A W u\right) \\ &= -\frac{1}{(\sigma^2)^2} E(u' A W u) \\ &= -\frac{1}{(\sigma^2)^2} E(u' A W u) \\ &= -\frac{1}{(\sigma^2)^2} (tr(AW\Sigma) + 0) \\ &= -\frac{1}{(\sigma^2)^2} (tr(AW A^{-2} \sigma^2) + 0) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} tr(W A^{-1}) \end{aligned} \quad (3.64)$$

şeklinde olur. β için kısmi türevi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$H_{\beta\sigma^2} = -\frac{1}{(\sigma^2)^2} X' A^2 u \quad (3.65)$$

Beklenen değeri ise,

$$E(H_{\beta\sigma^2}) = E\left(-\frac{1}{(\sigma^2)^2} X' A^2 u\right) = 0 \quad (3.66)$$

şeklinde olur.

Olabilirlik fonksiyonun λ parametresinin ikinci dereceden türevleri hesaplanırsa, λ için,

$$\begin{aligned} H_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} (-tr(A^{-1}W) + \sigma^{-2} u' A W u) \\ &= -tr(-(I_n - \lambda W)^{-1}(-W)(I_n - \lambda W)^{-1}W) + \sigma^{-2} u' (-W) W u \\ &= -tr(A^{-1}W A^{-1}W) - \sigma^{-2} u' W^2 u \end{aligned} \quad (3.67)$$

olur ve beklenen değeri ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
E(H_{\lambda\lambda}) &= E\left(-tr(A^{-1}WA^{-1}W) - \frac{1}{\sigma^2}u'W^2u\right) \\
&= -tr(A^{-1}WA^{-1}W) - \frac{1}{\sigma^2}E(u'W^2u) \\
&= -tr(A^{-1}WA^{-1}W) - \frac{1}{\sigma^2}(tr(W^2\Sigma) + 0) \\
&= -tr(A^{-1}WA^{-1}W) - \frac{1}{\sigma^2}tr(W^2A^{-2}\sigma^2) \\
&= -tr(A^{-1}WA^{-1}W) - tr(W^2A^{-2}) \\
&= -2tr(A^{-1}WA^{-1}W)
\end{aligned} \tag{3.68}$$

σ^2 için kısmi türevi,

$$\begin{aligned}
H_{\sigma^2\lambda} &= \frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2 \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2}(-tr(A^{-1}W) + \sigma^{-2}u'AWu) \\
&= -\frac{1}{(\sigma^2)^2}u'AWu
\end{aligned} \tag{3.69}$$

şeklindedir ve beklenen değeri ise,

$$\begin{aligned}
E(H_{\sigma^2\lambda}) &= E\left(-\frac{1}{(\sigma^2)^2}u'AWu\right) \\
&= -\frac{1}{(\sigma^2)^2}E(u'AWu) \\
&= -\frac{1}{(\sigma^2)^2}(tr(AW\Sigma) + 0) \\
&= -\frac{1}{(\sigma^2)^2}tr(AWA^{-2}\sigma^2) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}tr(WA^{-1})
\end{aligned} \tag{3.70}$$

şeklinde olur. β için kısmi türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
H_{\beta\lambda} &= \frac{\partial \log L}{\partial \beta \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \beta}(-tr(A^{-1}W) + \sigma^{-2}u'AWu) \\
&= \sigma^{-2}(-2X'AW(y - X\beta)) \\
&= -\sigma^{-2}2X'AWu
\end{aligned} \tag{3.71}$$

şeklinde olur. Beklenen değeri ise,

$$E(H_{\beta\lambda}) = E(-\sigma^{-2}2X'AWu) = 0 \quad (3.72)$$

olur. Böylece, skor vektörü, Hessian matrisi ve Hessian'ın beklenen değeri elde edilmiş olur. Skor vektörü aşağıda verilmiştir:

$$s = \begin{bmatrix} \sigma^{-2}X'A^2u \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}u'A^2u \\ -tr(A^{-1}W) + \sigma^{-2}u'AWu \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Hessian matrisi aşağıda verilmiştir:

$$H = \begin{bmatrix} -\sigma^{-2}X'A^2X & -\sigma^{-4}X'A^2u & -\sigma^{-2}2X'AWu \\ -\sigma^{-4}X'A^2u & \frac{n}{2}\sigma^{-4} - \sigma^{-6}u'A^2u & -\sigma^{-4}u'AWu \\ -\sigma^{-2}2X'AWu & -\sigma^{-4}u'AWu & -tr(A^{-1}WA^{-1}W) - \sigma^{-2}u'W^2u \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Hessian'ın beklenen değeri aşağıda verilmiştir:

$$E(H) = \begin{bmatrix} -\sigma^{-2}X'A^2X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} & -\frac{1}{\sigma^2}tr(WA^{-1}) \\ 0 & -\frac{1}{\sigma^2}tr(WA^{-1}) & -2tr(A^{-1}WA^{-1}W) \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

β tahmincisini elde etmek için skor fonksiyonu sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} s_\beta &= \frac{1}{\sigma^2}X'A^2u = 0 \\ X'A^2(y - X\beta) &= 0 \\ X'A^2y &= X'A^2X\beta \end{aligned}$$

olur ve böylece β tahmincisi aşağıdaki şekilde olur:

$$\beta_{MLE} = [X'A^2X]^{-1}X'A^2y \quad (3.76)$$

Varyans tahmincisini elde etmek için skor fonksiyonu sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} s_{\sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}u'A^2u = 0 \\ \frac{n}{2\sigma^2} &= \frac{1}{2(\sigma^2)^2}u'A^2u \end{aligned}$$

olur ve varyans tahmincisi aşağıdaki şekilde olur:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} u' A^2 u \quad (3.77)$$

3.3. MLE Hesaplama Yöntemleri

MLE hesaplamaları n büyüdükçe zorlaşmaktadır. Bu zorluklar matris işlemlerinde özellikle de $\log|I_n - \lambda W|$ hesaplanmasında ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle çeşitli alternatif yöntemler geliştirilmiştir (Fischer ve Nijkamp, 2014).

3.3.1. Concentrated log-likelihood

Bu yöntemde amaç, log-olabilirlik fonksiyonunu sadece mekânsal parametre λ 'ya bağlı olarak maksimize etmektir. Bunun için de diğer parametrelerin tahmincileri kullanılarak bilinmeyen olarak sadece λ bırakılır. Bu süreç, aşağıda sırasıyla açıklanmıştır.

Öncelikle, değişkenlere Cochrane-Orcutt dönüşümü yapılır. Böylece,

$$y^*(\lambda) = y - \lambda W y \quad (3.78)$$

$$X^*(\lambda) = X - \lambda W X \quad (3.79)$$

şeklinde yeni değişkenler tanımlanmış olur. Bu durumda log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \log L = & -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log|I_n - \lambda W| \\ & - \frac{1}{2\sigma^2} [y^*(\lambda) - X^*(\lambda)\beta]' [y^*(\lambda) - X^*(\lambda)\beta] \end{aligned} \quad (3.80)$$

şeklinde olur. Burada,

$$SSE = [y^*(\lambda) - X^*(\lambda)\beta]' [y^*(\lambda) - X^*(\lambda)\beta] \quad (3.81)$$

olarak tanımlanırsa log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log|I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} SSE \quad (3.82)$$

şeklinde yazılır. SSE açılırsa,

$$\begin{aligned}
SSE &= [y^*(\lambda) - X^*(\lambda)\beta]'[y^*(\lambda) - X^*(\lambda)\beta] \\
&= y^*(\lambda)'y^*(\lambda) - y^*(\lambda)'X^*(\lambda)\beta - \beta'X^{*\prime}(\lambda)y^*(\lambda) + (X^*(\lambda)\beta)'(X^*(\lambda)\beta) \\
&= y^*(\lambda)'y^*(\lambda) - 2\beta'X^*(\lambda)'y^*(\lambda) + \beta'X^*(\lambda)'X^*(\lambda)\beta
\end{aligned}$$

olur, burada β parametresi için tahmincisi,

$$\begin{aligned}
\beta &= [X'BX]^{-1}X'By \\
&= [X^*(\lambda)'X^*(\lambda)]^{-1}X^*(\lambda)'y^*(\lambda)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

şeklinde kullanılırsa SSE ,

$$\begin{aligned}
SSE &= y^*(\lambda)'y^*(\lambda) - 2y^*(\lambda)'X^*(\lambda)[X^*(\lambda)'X^*(\lambda)]^{-1}X^*(\lambda)'y^*(\lambda) \\
&\quad + y^*(\lambda)'X^*(\lambda)[X^*(\lambda)'X^*(\lambda)]^{-1}X^*(\lambda)'X^*(\lambda)[X^*(\lambda)'X^*(\lambda)]^{-1}X^*(\lambda)'y^*(\lambda) \\
&= y^*(\lambda)'y^*(\lambda) - 2y^*(\lambda)'X^*(\lambda)[X^*(\lambda)'X^*(\lambda)]^{-1}X^*(\lambda)'y^*(\lambda) \\
&\quad + y^*(\lambda)'X^*(\lambda)[X^*(\lambda)'X^*(\lambda)]^{-1}X^*(\lambda)'y^*(\lambda) \\
&= y^*(\lambda)'y^*(\lambda) - y^*(\lambda)'X^*(\lambda)[X^*(\lambda)'X^*(\lambda)]^{-1}X^*(\lambda)'y^*(\lambda)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir, burada $X^*(\lambda)$ matrisi için QR ayrışımı kullanılırsa,

$$X^*(\lambda) = QR \tag{3.84}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada Q ortogonal matristir ($Q'Q = I$) ve R ise üçgen matristir.

SSE için QR ayrışımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
SSE &= y^*(\lambda)'y^*(\lambda) - y^*(\lambda)'QR[(QR)'(QR)]^{-1}(QR)'y^*(\lambda) \\
&= y^*(\lambda)'y^*(\lambda) - y^*(\lambda)'QR[R'Q'QR]^{-1}R'Q'y^*(\lambda) \\
&= y^*(\lambda)'y^*(\lambda) - y^*(\lambda)'QR[R'R]^{-1}R'Q'y^*(\lambda) \\
&= y^*(\lambda)'y^*(\lambda) - y^*(\lambda)'QRR^{-1}R'^{-1}R'Q'y^*(\lambda) \\
&= y^*(\lambda)'y^*(\lambda) - y^*(\lambda)'QQ'y^*(\lambda)
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

σ^2 tahmincisi SSE ile ifade edilirse,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{n}u'Bu \\
&= \frac{1}{n}[y^*(\lambda) - X^*(\lambda)\beta]'[y^*(\lambda) - X^*(\lambda)\beta]
\end{aligned}$$

$$= SSE/n \quad (3.85)$$

şeklinde olur.

$\log L$ SSE ile ifade edilirse,

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(SSE/n) + \log|I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} SSE \quad (3.86)$$

şeklinde olur. Bu denklem *concentrated* veya profile log-olabilirlik fonksiyonu olarak isimlendirilir. Bu denklem tek bir değişkene bağlı hale geldiği için optimizasyonu kolaylaşacaktır (Pace, 2014).

Buradan λ parametresi tahmin edildikten sonra Cochrane-Orcutt dönüşümünde kullanılarak genelleştirilmiş en küçük kareler (generalized ordinary least squares, GLS) ile β parametreleri tahmin edilebilir. İlk olarak Cochrane-Orcutt dönüşümü aşağıdaki şekilde yapılmalıdır,

$$y^*(\hat{\lambda}) = y - \hat{\lambda} W y \quad (3.87)$$

$$X^*(\hat{\lambda}) = X - \hat{\lambda} W X \quad (3.88)$$

Buradan da GLS tahmincisi,

$$\hat{\beta}_{GLS} = [X^*(\hat{\lambda})' X^*(\hat{\lambda})]^{-1} X^*(\hat{\lambda})' y^*(\hat{\lambda}) \quad (3.89)$$

şeklinde elde edilir.

Mekânsal ve klasik regresyon modelinin olabilirlik fonksiyonunun farkı $\log|I_n - \lambda W|$ 'dan gelmektedir ve bunun hesaplanmasına yönelik olarak da geliştirilen çeşitli yöntemler mevcuttur. $\log|I_n - \lambda W|$ hesaplamaları için bazı yaklaşımlar aşağıda verilmiştir.

3.3.2. Log-determinant hesaplamaları

Log-olabilirlik denkleminde en önemli problemlerden biri de $\log|I_n - \lambda W|$ hesaplanmasıdır. Bu nedenle çeşitli log-determinant hesaplama yöntemleri geliştirilmiştir. Bu hesaplamalarından bazıları, özdeğer yöntemi, sparse matris ayrışım yöntemleri (Cholesky, Chebyshev, vb.), Monte Carlo yaklaşımları ve momentlerin kullanılması vb. şeklindedir.

R programındaki *spdep* mekânsal kütüphanesi $\log|I_n - \lambda W|$ hesaplamalarında, eigen, Matrix, Matrix_J, spam, spam_update, Chebyshev, MC, LU, LU_prepermute, moments, SE_classic, SE_whichMin, SE_interp yöntemlerini kullanmaktadır.

$\log|I_n - \lambda W|$ hesaplanmalarından özdeğer yöntemi ve Cholesky ayrışım yöntemi aşağıda açıklanmıştır.

Özdeğer yöntemi: Özdeğerler bir matrisi özetleyen en önemli unsurlardan biridir. Ord (1975) tarafından önerilen bu yöntemde, W ağırlık matrisinin özdeğerleriyle log jacobiyen ayrıştırılmıştır. W ağırlık matrisinin özdeğer vektörü $n \times 1$ boyutlu $v = (v_1, \dots, v_n)$ olmak üzere,

$$\log|I_n - \lambda W| = \sum_{i=1}^n \log(I_n - \lambda v_i) \quad (3.90)$$

olarak ifade edilir.

Sparse matrix yöntemi: Mekânsal modelin tahminlenmesinde bir bölgenin diğer bölgelerle arasındaki ilişki kullanılmaktadır. Eğer n bölge varsa n^2 potansiyel ilişki var demektir. Böylece n büyüdükçe determinantı hesaplamak zahmetli olacaktır. Bu binlerce gözlem içeren büyük veri setleri durumunda büyük problem teşkil edecek ve standart mekânsal istatistiksel yöntemler birçok gerçekçi uygulama için pratikliğini yitirecektir (Pace ve Barry, 1997).

Sparsity hızlı hesaplama yapması açısından önemlidir çünkü sadece sıfır olmayan matris elemanlarıyla işlem yapmaktadır. Sparse Matris ile normal matris işlemleriyle yapılan sonuçların hemen hemen aynısı elde edilir (Pace, 2014).

Sparse metotları, Pace ve Barry (1997) direk ve iteratif olarak iki gruba ayırmışlardır. İstatistikçilerin, non-lineer problemlerin optimizasyonunda genel olarak iteratif metotları kullandıklarını belirtmişlerdir. Pace ve Barry (1997) sparse matrislerin çözüme hızlı gittiğini belirterek minimizasyon (maksimizasyon) problemlerinde global çözümün varlığından emin olmak için algoritmanın pozitif (negatif) tanımlı matrislere ihtiyaç duyduğunu söylemişlerdir. Pace ve Barry (1997) büyük veri setlerinde etkin tahminleme yapmak için bir yaklaşım önermişlerdir. Bu yaklaşıma göre direk sparse matris algoritması olarak Cholesky veya LU ayrışimleri kullanılarak mekânsallık

parametresi $\lambda \in (v_{min}^{-1}, v_{max}^{-1})$ aralığında Log-determinant hesaplanabilir. Burada, v_{max} ve v_{min} sırasıyla ağırlık matrisinin en büyük ve en küçük özdeğerleridir (LeSage, 2004).

Cholesky ayrışım yöntemi: Simetrik ve pozitif tanımlı W ağırlık matrisi U üst Cholesky üçgen matrisine dönüştürülebilir. U matrisinin köşegen elemanları *pivot* olarak isimlendirilir ve hepsi kesin pozitiftir. Pivotların log toplamı, üçgen matrisin log-determinantına eşittir. Çünkü Cholesky üçgen bir matrisin kareköküdür. Başka ifadeyle bir matrisin log-determinantı, onun U matrisinin log-determinantının iki katıdır.

$$I_n - \lambda W = U'U \quad (3.91)$$

$$\log|I_n - \lambda W| = \sum_{i=1}^n \log(U_{ii}) \quad (3.92)$$

Simetrik olmayan matrislerde LU ayrışımı kullanılır (Pace, 2014).

3.3.3. Fisher scoring algoritması

ML tahmincisi bir tane global maksimum ve çoklu yerel maksimumlara sahip olabilmektedir bu nedenle de Fisher scoring algoritması kullanılmalıdır (Pratesi ve Salvati, 2008).

Daha önce mekânsal hata modeli için olabilirlik fonksiyonu şu şekilde tanımlanmıştı,

$$L = (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - X\beta)' \Sigma^{-1}(y - X\beta)\right)$$

Log-olabilirlik fonksiyonu ise,

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log|\Sigma| - \frac{1}{2} (y - X\beta)' \Sigma^{-1} (y - X\beta)$$

şeklinde tanımlanmıştı.

Daha önce Hessian matrisinin beklenen değeri (3.45) nolu formülde

$$E(H) = \begin{bmatrix} -\sigma^{-2} X' B X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} & \frac{1}{2\sigma^2} tr(CB^{-1}) \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^2} tr(CB^{-1}) & -2tr(A^{-1}WA^{-1}W) \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunmuştur. Fisher bilgi matrisi $FI = -E(H)$ şeklinde elde edilir. Bu matrise göre β tahmincisi $\beta_{MLE} = [X'BX]^{-1}X'By$ şeklinde ilgili yerlerine yazılarak aşağıdaki s_{Fisher} skor vektörü ve FI Fisher bilgi matrisi elde edilir:

$$s_{Fisher} = \begin{bmatrix} -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} u' B u \\ -tr(A^{-1}W) - \frac{1}{2\sigma^2} u' C u \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

$$FI = \begin{bmatrix} \frac{n}{2(\sigma^2)^2} & -\frac{1}{2\sigma^2} tr(CB^{-1}) \\ -\frac{1}{2\sigma^2} tr(CB^{-1}) & 2tr(A^{-1}WA^{-1}W) \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \lambda \end{bmatrix}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \lambda \end{bmatrix}^{(i)} + [FI(\sigma^{2(i)}, \lambda^{(i)})]^{-1} s [\hat{\beta}(\sigma^{2(i)}, \lambda^{(i)})] \quad (3.95)$$

Fisher scoring algoritma sürecine $(\sigma^{2^0}, \lambda^0)$ başlangıç değerlerinin seçilmesiyle başlanır ve (3.95) formülü hesaplanır. Bu süreç σ^2 ve λ katsayılarında yakınsama sağlanana kadar devam ettirilir. Daha sonra GLS ile $\hat{\beta}_{GLS}$ bulunur.

3.4. Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi (Generalized Method of Moments, GMM)

Kelejian ve Prucha (1999) tarafından SEM için geliştirilmiştir. GMM, moment koşullarını kullanarak parametreleri tahmin eder. Kelejian ve Prucha'nın GMM tahmincisi hata terimi ε 'nin ilk üç momentine dayanmaktadır. Bu tekniğin bir avantajı da büyük örneklemlemlerle çalışma kolaylığı sağlamasıdır. Oysaki ML tekniğinde determinant veya özdeğerler hesaplanırken büyük örneklemlemlerle çalışmanın zor olduğu görülmüştür.

Kelejian ve Prucha (1999) GMM'in varsayımlarını aşağıdaki gibi belirtmişlerdir:

1. SEM'deki ε hata terimleri bağımsız ve türdeş dağılıma sahip olmalı ayrıca ortalamaları 0 varyansları σ^2 şeklinde $a < \sigma^2 < \infty$ olmalıdır.
2. Hata teriminin dördüncü momenti var olmalıdır.
3. Ağırlık matrisinin köşegen elemanları 0 olmalıdır.
4. $|\lambda| < 1$ olmalıdır.
5. $|\lambda| < 1$ için $I - \lambda W$ matrisi tekil olmamalıdır.

Böylelikle SEM için $E(u) = 0$ ve $E(uu') = \Omega(\lambda) = \sigma^2(I - \lambda W)^{-1}(I - \lambda W')^{-1}$ olmaktadır.

SEM'de,

$$u = \lambda W u + \varepsilon \quad (3.96)$$

$$u - \lambda W u = \varepsilon \quad (3.97)$$

şeklindeydi. Eşitliğin her iki tarafı da W ile çarpılırsa,

$$W u - \lambda W^2 u = W \varepsilon \quad (3.98)$$

olur. Ağırlıklandırılmış artıklar:

$$v_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} u_j \quad (3.99)$$

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}^2 u_j \quad (3.100)$$

şeklinde tanımlanıp karesel olarak açılıp toplanıp n 'e bölünürse,

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 + \lambda^2 n^{-1} \sum_{i=1}^n v_i^2 - 2\lambda n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i v_i = n^{-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (3.101)$$

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n v_i^2 + \lambda^2 n^{-1} \sum_{i=1}^n \tau_i^2 - 2\lambda n^{-1} \sum_{i=1}^n v_i \tau_i = n^{-1} \sum_{i=1}^n v_i^2 \quad (3.102)$$

elde edilir. Yukarıdaki her iki eşitlik çarpılarak aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i v_i + \lambda^2 n^{-1} \sum_{i=1}^n v_i \tau_i - \lambda \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i \tau_i + n^{-1} \sum_{i=1}^n v_i^2 \right) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \quad (3.103)$$

Böylece Kelejian ve Prucha (1999) yukarıdaki eşitlikler yardımı ile aşağıdaki moment koşullarını önermişlerdir.

$$E \left(\frac{\varepsilon' \varepsilon}{n} \right) = \sigma^2 \quad (3.104)$$

$$E \left(\frac{\bar{\varepsilon}' \bar{\varepsilon}}{n} \right) = \sigma^2 \frac{1}{n} \text{tr}(W'W) \quad (3.105)$$

$$E \left(\frac{\bar{\varepsilon}' \varepsilon}{n} \right) = 0 \quad (3.106)$$

Burada $\bar{\varepsilon} = W\varepsilon$ şeklindedir ve herhangi bir A matrisi için

$$E(\varepsilon' A \varepsilon) = E[\text{tr}(\varepsilon' A \varepsilon)] = \text{tr}(A) \text{Var}(\varepsilon) + 0 = \sigma^2 \text{tr}(A) \quad (3.107)$$

formülü ile yukarıdaki 3 eşitliğin sağ tarafı bulunur.

$$\bar{u} = Wu \quad (3.108)$$

$$\bar{\bar{u}} = W\bar{u} = WWu = W^2u \quad (3.109)$$

olarak tanımlanırsa yukarıdaki üç moment koşulu şu şekilde yazılabilir,

$$n^{-1} E[(u - \lambda \bar{u})'(u - \lambda \bar{u})] - \sigma^2 = 0 \quad (3.110)$$

$$n^{-1} E[(\bar{u} - \lambda \bar{\bar{u}})'(\bar{u} - \lambda \bar{\bar{u}})] - \sigma^2 n^{-1} \text{tr}(W'W) = 0 \quad (3.111)$$

$$n^{-1} E[(\bar{u} - \lambda \bar{\bar{u}})'(\lambda u - \lambda \bar{u})] = 0 \quad (3.112)$$

Denklem sistemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Gamma_n[\lambda, \lambda^2, \sigma^2] - \gamma_n = 0 \quad (3.113)$$

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \frac{2}{n} E(u' \bar{u}) & \frac{-1}{n} E(\bar{u}' \bar{u}) & 1 \\ \frac{2}{n} E(\bar{\bar{u}}' \bar{u}) & \frac{-1}{n} E(\bar{\bar{u}}' \bar{\bar{u}}) & \frac{1}{n} \text{tr}(W'W) \\ \frac{1}{n} E(u' \bar{\bar{u}} + \bar{u}' \bar{u}) & \frac{-1}{n} E(\bar{u}' \bar{\bar{u}}) & 0 \end{bmatrix}, \gamma_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} E(u' u) \\ \frac{1}{n} E(\bar{u}' \bar{u}) \\ \frac{1}{n} E(u' \bar{u}) \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Bu denklem sisteminde u 'nun tahmincisi $\hat{u}$ alınarak örneklem momentleri ile (3.114) denklemi aşağıdaki şekle dönüştürülür,

$$G_n = \begin{bmatrix} \frac{2}{n}(\hat{u}'\hat{u}) & \frac{-1}{n}(\hat{u}'\hat{u}) & 1 \\ \frac{2}{n}(\hat{\hat{u}}'\hat{u}) & \frac{-1}{n}(\hat{\hat{u}}'\hat{u}) & \frac{1}{n}tr(W'W) \\ \frac{1}{n}(\hat{u}'\hat{\hat{u}} + \hat{\hat{u}}'\hat{u}) & \frac{-1}{n}(\hat{\hat{u}}'\hat{u}) & 0 \end{bmatrix}, g_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}(\hat{u}'\hat{u}) \\ \frac{1}{n}(\hat{\hat{u}}'\hat{u}) \\ \frac{1}{n}(\hat{u}'\hat{\hat{u}}) \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$$G_n[\lambda, \lambda^2, \sigma^2] - g_n = v_n(\lambda, \sigma^2). \quad (3.116)$$

Böylece aşağıdaki nonlinear denklem sisteminin çözümü GMM tahmincileri sonucunu verecektir:

$$(\hat{\lambda}_{NLS,n}, \hat{\sigma}_{NLS,n}^2) = \underset{\lambda \in [-a, a], \sigma^2 \in [0, b]}{\operatorname{argmin}} \{v_n(\lambda, \sigma^2)'v_n(\lambda, \sigma^2)\} \quad (3.117)$$

Nonlinear en küçük kareler yöntemi ile bu sistemden tutarlı tahminciler elde edilebilir (Kelejian ve Prucha 1999). Lee (2007)'ye göre GMM tahmincileri tutarlı ve asimptotik normaldir ve ayrıca hesaplanmaları kolaydır.

SEM için GMM aşağıdaki adımlarla hesaplanır:

1. Mekânsal olmayan regresyon modeli ile artıklar elde edilir (OLS gibi).
2. Kelejian ve Prucha (1999) tarafından λ ve σ^2 için tanımlanmış olan GMM tahmincileri elde edilir.
3. Tahmin edilen λ kullanılarak $y^*(\lambda) = y - \lambda W y$ ve $X^*(\lambda) = X - \lambda W X$ şeklinde Cochrane-Orcutt dönüşümü yapılır.
4. λ yerine tahmincisi $\hat{\lambda}$ kullanılacağından uyarlanabilir genelleştirilmiş en küçük kareler (Feasible Generalized Least Squares – FGLS) tahmincisi yardımıyla SEM bağımsız değişken katsayıları $\hat{\beta}_{FGLS}$ ile tahmin edilir, $\hat{\beta}_{FGLS} = [X^*(\lambda)'X^*(\lambda)]^{-1}X^*(\lambda)'y^*(\lambda)$ en son elde edilen $\hat{\beta}_{FGLS}$, β 'nın GMM tahmincisi olarak alınır.

4. SEM İÇİN ROBUST EN ÇOK OLABİLİRLİK TAHMİNCİSİ (RMLE)

Önceki bölümlerde, SEM için ML tahminleme süreçleri tanıtılmıştır. Bu bölümde ise SEM için robust maksimum likelihood tahmincisi (RMLE) tanıtılacaktır. RMLE sürecinde olabilirlik fonksiyonu robust hale getirilerek aykırı değerlerin etkisine karşı dirençlilik kazandırılmıştır. İlk olarak Huggins (1993) tarafından önerilen yöntemde olabilirlik fonksiyonunda artıklar yerine artıkların m-tahmincilerde kullanılan özel bir fonksiyonu kullanılmıştır. Daha sonraları Sinha ve Rao (2009) m-tahmincileri olabilirlik fonksiyonunda değil de skor fonksiyonlarında kullanmışlardır ve Huggins'in yöntemini *Proposal I* kendi yöntemlerini de *Proposal II* olarak adlandırmışlardır. Schmid ve Münnich (2014) *Proposal II* yöntemini Small Area Modeli'ne uyarlamışlardır. Bu çalışmada *Proposal II* yöntemi SEM'e adapte edilmiş ve robust tahminler elde edilmiştir.

Huggins (1993), Sinha ve Rao (2009), Schmid ve Münnich (2014) ve Salvati (2004)'nin kullandığı yaklaşım SEM'e uyarlanarak aşağıdaki robust MLE elde edilmiştir.

Bu çalışmada RMLE, ağırlık matrisinin (W) simetrik olduğu varsayımı altında geliştirilmiştir.

Daha önce $B = (I_n - \lambda W)(I_n - \lambda W')$ ve $A = (I_n - \lambda W)$ şeklinde tanımlanmıştı. Eğer W matrisi simetrik ise

$$(I_n - \lambda W)(I_n - \lambda W') = (I_n - \lambda W)^2$$

$$B = A^2$$

$$\Omega_\lambda = (I_n - \lambda W)^{-2}$$

$$\Omega_\lambda^{-1} = (I_n - \lambda W)^2$$

olur ve böylece,

$$\Omega_\lambda^{-1} = B = A^2 \quad (4.1)$$

şeklinde olur. SEM için olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde daha önce verilmiştir:

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log|\Sigma| - \frac{1}{2} (y - X\beta)' \Sigma^{-1} (y - X\beta)$$

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) + \log|I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' \Omega_\lambda^{-1} (y - X\beta)$$

Eğer W matrisi simetrik ise yukarıdaki ifade aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) + \log|I_n - \lambda W| - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (I_n - \lambda W)^2 (y - X\beta) \quad (4.2)$$

$\log L$ fonksiyonunun β parametresine göre türevi aşağıdadır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2\sigma^2} (-2X') (I_n - \lambda W)^2 (y - X\beta) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} X' (I_n - \lambda W)^2 (y - X\beta) \end{aligned} \quad (4.3)$$

burada standartlaştırma yapmak için, $\hat{\sigma}$ σ 'nın yansız tahmincisi ve $\hat{\lambda}$ 'da λ 'nın yansız tahmincisi olmak üzere

$$\Gamma = \hat{\sigma} (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanırsa artıklar aşağıdaki şekilde standartlaştırılabilir,

$$r = \Gamma^{-1} (y - X\beta) \quad (4.5)$$

$\Gamma \Gamma^{-1} = I$ olduğundan (4.3) denkleminde eklenirse,

$$\frac{1}{\sigma^2} X' (I_n - \lambda W)^2 \Gamma \Gamma^{-1} (y - X\beta)$$

elde edilir.

$$\frac{1}{\sigma^2} X' (I_n - \lambda W)^2 \hat{\sigma} (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \frac{1}{\hat{\sigma}} (I_n - \hat{\lambda} W) (y - X\beta)$$

burada $\hat{\sigma}^{-1} (I_n - \hat{\lambda} W) (y - X\beta) = r$ olduğundan,

$$\frac{1}{\sigma^2} X' (I_n - \lambda W)^2 \hat{\sigma} (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} r \quad (4.6)$$

olur. Burada r yerine m-tahminlemede kullanılan ve aykırı değerlerin etkisini azaltan bir ψ fonksiyonu kullanılırsa β için skor fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$s_{\beta} = \frac{\hat{\sigma}}{\sigma_u^2} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) = 0 \quad (4.7)$$

β parametresinin ikinci dereceden kısmi türevleri hesaplanırsa, β için,

$$\begin{aligned} H_{\beta\beta} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) \right) \\ &= \frac{\hat{\sigma}}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \frac{\partial(\psi(r))}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \beta} \\ &= \frac{\hat{\sigma}}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \Psi(r) \frac{(I_n - \hat{\lambda} W)}{\hat{\sigma}} (-X) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \Psi(r) (I_n - \hat{\lambda} W) X \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklinde olur. Fisher bilgi matrisi elemanı ise,

$$\begin{aligned} FI_{\beta\beta} &= -E \left[-\frac{1}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \Psi(r) (I_n - \hat{\lambda} W) X \right] \\ &= \sigma^{-2} X'(I_n - \lambda W) E(\Psi(r)) (I_n - \lambda W) X \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklinde olur. σ^2 için kısmi türev hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} H_{\sigma^2\beta} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) \right) \\ &= -2 \frac{\hat{\sigma}}{\sigma^4} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) \end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklinde olur. Fisher bilgi matrisi elemanı ise,

$$\begin{aligned} FI_{\sigma^2\beta} &= -E \left[-2 \frac{\hat{\sigma}}{\sigma^4} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) \right] \\ &= 2 \frac{\hat{\sigma}}{\sigma^4} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \lambda W)^{-1} E[\psi(r)] = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

dır. λ için kısmi türev hesaplanırsa,

$$H_{\lambda\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) \right)$$

$$= 2 \frac{\hat{\sigma}}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^1 (-W) (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) \quad (4.12)$$

şeklinde olur. Fisher bilgi matrisi elemanı ise,

$$\begin{aligned} FI_{\sigma^2 \beta} &= -E \left[-2 \frac{\hat{\sigma}}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^1 (-W) (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) \right] \\ &= 2 \frac{\hat{\sigma}}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^1 W (I_n - \lambda W)^{-1} E[\psi(r)] = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

dır.

$\log L$ fonksiyonunun σ^2 için türevi,

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (y - X\beta)' (I_n - \lambda W)^2 (y - X\beta)$$

şeklinde, burada standartlaştırma yapılırsa,

$$\begin{aligned} &= -\frac{n}{2} \frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} \\ &\quad + \frac{1}{2\sigma^4} (y - X\beta)' (I_n - \hat{\lambda} W)^{\frac{1}{\hat{\sigma}}} (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \hat{\sigma} (I_n - \lambda W)^2 \\ &\quad \hat{\sigma} (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \frac{1}{\hat{\sigma}} (I_n - \hat{\lambda} W) (y - X\beta) \\ &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma^4} r' (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} (I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} r \end{aligned} \quad (4.14)$$

olur. Burada r için $\psi(r)$ dönüşümü yapılırsa Log-olabilirlik fonksiyonunun çözümü için,

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma^4} \psi(r)' (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} (I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) = 0$$

olmalı,

$$E \left[\frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma^4} \psi(r)' (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} (I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) \right]$$

$\hat{\lambda} \rightarrow \lambda, \hat{\sigma} \rightarrow \sigma$ iken,

$$= \frac{1}{2\sigma^2} \text{tr}[(I_n - \lambda W)^{-1} (I_n - \lambda W)^2 (I_n - \lambda W)^{-1}] \text{Var}(\psi(r)) + 0 = \frac{n}{2\sigma^2} K$$

olur ve burada

$$Var(\psi(r)) = E[\psi^2(r)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(r)f(r)dr = K \quad (4.15)$$

şeklindedir ve böylece σ^2 için skor fonksiyonu aşağıdaki gibidir,

$$\mathbf{s}_{\sigma^2} = -\frac{nK}{2\sigma^2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma^4} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(I_n - \lambda W)^2(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) = 0 \quad (4.16)$$

σ^2 parametresinin ikinci dereceden kısmi türevleri hesaplanırsa, β için,

$$\begin{aligned} H_{\beta\sigma^2} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\sigma^2} = \frac{\partial}{\partial\beta} \left(-\frac{nK}{2\sigma^2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2(\sigma^2)^2} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(I_n - \lambda W)^2(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde olur. σ^2 için kısmi türev hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} H_{\sigma^2\sigma^2} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\sigma^2\partial\sigma^2} = \frac{\partial}{\partial\sigma^2} \left(-\frac{nK}{2\sigma^2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2(\sigma^2)^2} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(I_n - \lambda W)^2(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \right) \\ &= \frac{nK}{2\sigma^4} - \frac{\hat{\sigma}^2}{(\sigma^2)^3} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(I_n - \lambda W)^2(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \quad (4.17) \end{aligned}$$

elde edilir. Fisher bilgi matrisi elemanı ise,

$$\begin{aligned} FI_{\sigma^2\sigma^2} &= -E \left[\frac{nK}{2\sigma^4} - \frac{\hat{\sigma}^2}{(\sigma^2)^3} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(I_n - \lambda W)^2(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \right] \\ &= -\frac{nK}{2\sigma^4} + \frac{nK}{(\sigma^2)^2} \\ &= \frac{nK}{2\sigma^4} \quad (4.18) \end{aligned}$$

şeklinde olur. λ için türev aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} H_{\lambda\sigma^2} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda\partial\sigma^2} = \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(-\frac{nK}{2\sigma^2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2(\sigma^2)^2} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(I_n - \lambda W)^2(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \right) \\ &= \frac{\hat{\sigma}^2}{2(\sigma^2)^2} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(2(I_n - \lambda W)(-W))(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \quad (4.19) \end{aligned}$$

Fisher bilgi matrisi elemanı ise,

$$\begin{aligned}
FI_{\lambda\sigma^2} &= -E \left[-\frac{\hat{\sigma}^2}{(\sigma^2)^2} \psi(r)' (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} (I_n - \lambda W) W (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \psi(r) \right] \\
&= \frac{K}{\sigma^2} \text{tr} \left(W (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde elde edilir.

$\log L$ fonksiyonunun λ için kısmi türevi aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} &= \text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1}(-W)) - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (2(I_n - \lambda W)(-W))(y - X\beta) \\
&= -\text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1}W) + \frac{1}{\sigma^2} (y - X\beta)' (I_n - \lambda W) W (y - X\beta) \\
&= -\text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1}W) + \frac{1}{\sigma^2} (y - X\beta)' (I_n - \hat{\lambda}W) \frac{1}{\hat{\sigma}} (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \\
&\quad \hat{\sigma} (I_n - \lambda W) W \hat{\sigma} (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \frac{1}{\hat{\sigma}} (I_n - \hat{\lambda}W) (y - X\beta) \\
&= -\text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1}W) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} r' (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \hat{\sigma} (I_n - \lambda W) W \hat{\sigma} (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} r
\end{aligned} \tag{4.21}$$

burada r için $\psi(r)$ dönüşümü yapılırsa Log-olabilirlik fonksiyonunun çözümü için,

$$= -\text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1}W) + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \psi(r)' (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} (I_n - \lambda W) W (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \psi(r) = 0$$

olmalı

$$E \left[\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \psi(r)' (I_n - \lambda W)^{-1} (I_n - \lambda W) W (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \psi(r) \right]$$

$\hat{\lambda} \rightarrow \lambda, \hat{\sigma} \rightarrow \sigma$ iken,

$$\begin{aligned}
&= (I_n - \lambda W)^{-1} (I_n - \lambda W) W (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \text{Var}(\psi(r)) + 0 \\
&= \text{tr} \left[W (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \right] K
\end{aligned}$$

ve burada

$$\text{Var}(\psi(r)) = E[\psi^2(r)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(r) f(r) dr = K \tag{4.22}$$

şeklinde ve böylece λ için skor fonksiyonu aşağıdaki gibidir,

$$s_\lambda = -Ktr((I_n - \lambda W)^{-1}W) + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(I_n - \lambda W)W(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r)$$

λ parametresinin ikinci dereceden kısmi türevleri hesaplanırsa, β için,

$$\begin{aligned} H_{\beta\lambda} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-Ktr((I_n - \lambda W)^{-1}W) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(I_n - \lambda W)W(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

şeklinde olur. λ için kısmi türev hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} H_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-Ktr((I_n - \lambda W)^{-1}W) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(I_n - \lambda W)W(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \right) \\ &= -Ktr((I_n - \lambda W)^{-1}W(I_n - \lambda W)^{-1}W) \\ &\quad - \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}WW(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \end{aligned} \quad (4.24)$$

şeklinde olur. Fisher bilgi matrisi elemanı ise,

$$\begin{aligned} FI_{\lambda\lambda} &= -E \left[-Ktr((I_n - \lambda W)^{-1}W(I_n - \lambda W)^{-1}W) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}WW(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \right] \\ &= Ktr((I_n - \lambda W)^{-1}W(I_n - \lambda W)^{-1}W) + tr((I_n - \lambda W)^{-1}WW(I_n - \lambda W)^{-1})K \\ &= 2Ktr((I_n - \lambda W)^{-1}W(I_n - \lambda W)^{-1}W) \end{aligned} \quad (4.25)$$

olarak elde edilir. σ^2 için kısmi türev hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} H_{\sigma^2\lambda} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(-Ktr((I_n - \lambda W)^{-1}W) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \psi(r)'(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}(I_n - \lambda W)W(I_n - \hat{\lambda}W)^{-1}\psi(r) \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{\hat{\sigma}^2}{(\sigma^2)^2} \psi(r)' (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} (I_n - \lambda W) W (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \psi(r) \quad (4.26)$$

şeklinde ve ilgili Fisher elemanı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} FI_{\sigma_u^2 \lambda} &= -E \left[-\frac{\hat{\sigma}^2}{(\sigma^2)^2} \psi(r)' (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} (I_n - \lambda W) W (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \psi(r) \right] \\ &= \frac{K}{\sigma^2} \text{tr}(W(I_n - \lambda W)^{-1}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Böylece tüm parametrelere ilişkin s skor, H Hessian ve Fisher bilgi matrisi bulunmuş ve aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} s &= \\ &\begin{bmatrix} \frac{\hat{\sigma}}{\sigma^2} X'(I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \psi(r) \\ -\frac{nK}{2\sigma^2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma^4} \psi(r)' (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} (I_n - \lambda W)^2 (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \psi(r) \\ -K \text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1} W) + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \psi(r)' (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} (I_n - \lambda W) W (I_n - \hat{\lambda}W)^{-1} \psi(r) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$FI = \begin{bmatrix} \sigma^{-2} X'(I_n - \lambda W) E(\Psi(r)) (I_n - \lambda W) X & 0 & 0 \\ 0 & \frac{nK}{2\sigma^4} & \frac{K}{\sigma^2} \text{tr}(W(I_n - \lambda W)^{-1}) \\ 0 & \frac{K}{\sigma^2} \text{tr}(W(I_n - \lambda W)^{-1}) & 2K \text{tr}((I_n - \lambda W)^{-1} W (I_n - \lambda W)^{-1} W) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Burada çözüme ulaşmak için aşağıda adımları verilen scoring algoritması kullanılırsa,

$$\beta^{i+1} = \beta^i + [FI_{\beta\beta}^i]^{-1} s_{\beta}^i \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \lambda \end{bmatrix}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \lambda \end{bmatrix}^{(i)} + [FI(\sigma^{2(i)}, \lambda^{(i)})]^{-1} s[\sigma^{2(i)}, \lambda^{(i)}] \quad (4.31)$$

Eşitliklerinin çözümü şu algoritma ile elde edilir,

- i. Bir ψ fonksiyonu seçilir
- ii. β , λ ve σ^2 için yansız bir tahmini seçilir
- iii. β^{i+1} aşağıdaki şekilde hesaplanır,

$$\beta^{(i+1)} = \beta^{(i)} + [FI(\beta^{(i)})]^{-1} s_{\beta}^{(i)}$$

- iv. β^{i+1} kullanılarak artıklar hesaplanır

v. $\begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \lambda \end{bmatrix}^{(i+1)}$ aşağıdaki şekilde hesaplanır,

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \lambda \end{bmatrix}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \lambda \end{bmatrix}^{(i)} + \left[\text{FI}(\sigma^{2(i)}, \lambda^{(i)}) \right]^{-1} s \left[\sigma^{2(i)}, \lambda^{(i)} \right]$$

vi. $|\beta^{i+1} - \beta^i| < 10^{-4}$ ve $\left\| \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \lambda \end{bmatrix}^{(i+1)} - \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \lambda \end{bmatrix}^{(i)} \right\| < 10^{-4}$ sağlanana kadar iii-iv adımlarına devam edilir.

vii. Bulunan son tahminler $\hat{\beta}_{RMLE}$, $\hat{\sigma}_{RMLE}^2$, $\hat{\lambda}_{RMLE}$ ’dir.

Burada RMLE’nin robust olmasını belirleyen en önemli konu ψ fonksiyonunun seçimidir. Literatürde çeşitli ψ fonksiyonları bulunmaktadır (Yıldırım, 2012).

M-Tahmincilerde kullanılan bazı ψ fonksiyonları Tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1. *M-tahmincilerde kullanılan bazı $\psi(.)$ fonksiyonları*

Fonksiyon Adı	$\psi(.)$	Sabit Değeri
Cauchy	$\frac{r}{1 + \left(\frac{r}{c}\right)^2}$	$c = 2,385$
Welsch	$\exp\left(-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right)$	$c = 2,985$
Insha	$r\left(1 + \left(\frac{r}{c}\right)^4\right)^{-2}$	$c = 4,685$
Logistic	$c \tanh\left(\frac{r}{c}\right)$	$c = 1,205$

Bu fonksiyonların performansları benzetim (simülasyon) bölümünde ayrı ayrı ele alınacaktır.

5. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde, SEM'in klasik (MLE ve GMM) ve önerilen robust tahmincisinin (RMLE) performansı simülasyon çalışmaları yardımıyla karşılaştırılacaktır. Bu amaç için SEM'e uygun olarak, farklı hata dağılımları düşünülerek veri türetilmiş ve tahmincilerin sonuçları hata kareler ortalaması (MSE) ve yan (bias) ölçütlerine göre karşılaştırılmıştır.

Komşuluklar *R* programında *spdep* paketinde *cell2nb* fonksiyonu yardımıyla *queen* komşuluk olarak oluşturulmuştur.

Veri üretirken bağımsız değişken düzgün dağılımdan üretilmiş ($X \sim U(0, 4)$), SEM parametreleri, sabit ve eğim parametreleri için $\beta = (1, 1)$, otokorelasyon parametresi için $\lambda = 0,8, 0,6, 0,4$ ve örneklem büyüklüğü $n = 25, 49, 100$ olarak alınmıştır.

Hatalar için ise literatüre paralel olarak aşağıdaki farklı dağılımlar kullanılmıştır. Ayrıca, karma (mixture) dağılımlar ve en büyük (en küçük) gözlem modifikasyonu veri setinde aykırı değer oluşturmak için düşünülmüştür.

- Standart normal dağılım $N(0, 1)$
- Student t dağılımı $t(4)$
- Karma Normal dağılım $[0,90 \times N(0, 1) + 0,10 \times N(0, 10)]$
- Karma Normal dağılım $[0,80 \times N(0, 1) + 0,20 \times N(0, 10)]$
- Karma Normal dağılım $[0,90 \times N(0, 1) + 0,10 \times N(0, 20)]$
- Aykırı değer durumu (en büyük gözlem 5 ile çarpıldı)
- Aykırı değer durumu (en küçük gözlem 5 ile çarpıldı)

İlk olarak normal dağılım durumunda λ 'nın RMLE'nin performansının değerlendirebilmesi için sonuçları Tablo 5.1'de verilmiştir. Hata dağılımı normal olduğunda, MLE'nin MSE kriterine göre en iyi tahminci olduğu tablodan görülmektedir. Bu durum beklenen sonuçtur. Bununla birlikte, RMLE (Insha)'nın sonuçları MLE'ye oldukça yakındır. RMLE (Insha)'nın yan değeri ise tüm örneklem büyüklüklerinde hem MLE'den hem de GMM'den daha küçüktür.

Tablo 5.1. Normal dağılım için λ parametresinin yanlılık ve MSE sonuçları

$n=25$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,25988	0,14372	0,25455	0,15738	0,23452	0,15828
GMM	0,24938	0,16492	0,25955	0,18878	0,24814	0,20050
RMLE_Cauchy	0,25603	0,14846	0,25380	0,16608	0,22894	0,16763
RMLE_Welsch	0,25632	0,14846	0,25388	0,16677	0,22937	0,16985
RMLE_Insha	0,24582	0,14373	0,24496	0,16276	0,22903	0,16957
RMLE_Logistic	0,25619	0,14846	0,25408	0,16617	0,22909	0,16726

$n=49$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,11781	0,03808	0,13015	0,05717	0,13715	0,07384
GMM	0,10671	0,04195	0,12973	0,06281	0,14709	0,08605
RMLE_Cauchy	0,11640	0,04087	0,13040	0,06090	0,13883	0,07907
RMLE_Welsch	0,11648	0,04111	0,13063	0,06123	0,13896	0,07938
RMLE_Insha	0,10838	0,03887	0,12300	0,05856	0,13370	0,07712
RMLE_Logistic	0,11644	0,04082	0,13026	0,06073	0,13874	0,07901

$n=100$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,05686	0,01128	0,06088	0,02030	0,05574	0,02511
GMM	0,04805	0,01163	0,05920	0,02163	0,05829	0,02695
RMLE_Cauchy	0,05368	0,01237	0,06155	0,02252	0,05656	0,02751
RMLE_Welsch	0,05393	0,01243	0,06152	0,02256	0,05652	0,02754
RMLE_Insha	0,04942	0,01138	0,05694	0,02102	0,05321	0,02584
RMLE_Logistic	0,05356	0,01233	0,06153	0,02249	0,05655	0,02750

Tablo 5.2’de ise Student t dağılımı durumunda λ ’nın MSE ve yan sonuçları verilmiştir. Tüm tahminciler benzer yan sonuçları verirken, $\lambda = 0,6, 0,8$ değerleri için MLE en küçük MSE vermiş, RMLE (Cauchy) ve RMLE (Logistic) ise $\lambda = 0,4$ için en küçük MSE değeri vermiştir.

Tablo 5.2. *Student t(4) dağılım için λ parametresinin yanlılık ve MSE sonuçları*

$n=25$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,25277	0,13483	0,25795	0,15103	0,24229	0,16555
GMM	0,23975	0,14904	0,26016	0,18284	0,26391	0,21925
RMLE_Cauchy	0,26944	0,14366	0,25874	0,15124	0,23907	0,15431
RMLE_Welsch	0,27313	0,14816	0,26050	0,15983	0,24592	0,16893
RMLE_Insha	0,26722	0,14419	0,26179	0,15725	0,24316	0,16346
RMLE_Logistic	0,26963	0,14316	0,26004	0,14968	0,23767	0,15121

$n=49$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,13457	0,04391	0,12152	0,05439	0,14549	0,07782
GMM	0,12488	0,04640	0,12077	0,05828	0,15475	0,08692
RMLE_Cauchy	0,15246	0,04988	0,13831	0,05594	0,15070	0,07568
RMLE_Welsch	0,15292	0,05164	0,13761	0,05977	0,15082	0,08334
RMLE_Insha	0,15270	0,05077	0,13823	0,05768	0,15508	0,08076
RMLE_Logistic	0,15366	0,04982	0,13936	0,05526	0,15147	0,07345

$n=100$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,05470	0,01072	0,06217	0,02043	0,05438	0,02707
GMM	0,04632	0,01076	0,06144	0,02144	0,05535	0,03135
RMLE_Cauchy	0,07345	0,01413	0,08383	0,02311	0,07226	0,02700
RMLE_Welsch	0,07151	0,01457	0,08110	0,02452	0,07157	0,02953
RMLE_Insha	0,07534	0,01460	0,08427	0,02388	0,07440	0,02780
RMLE_Logistic	0,07565	0,01425	0,08616	0,02299	0,07335	0,02638

RMLE'nin asıl iyi performansı aykırı değerlerin olması durumunda olmalıdır. Bu yüzden, karma Normal dağılım durumunda performansı araştırılacaktır. Tablo 5.3.-5.5' den, λ için RMLE'nin dikkate alınan tüm örnek ve karma hata dağılımları için genel olarak en iyi performansa sahip olduğu görülmektedir. Özellikle, RMLE_Cauchy ve RMLE_Logistic, MSE açısından diğerlerinden daha iyi performans göstermektedir.

Tablo 5.3. Karma Normal ($0,90*N(0, 1)+0,10*N(0, 10)$) dağılım için λ parametresinin yanlışlık ve MSE sonuçları

$n=25$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,24222	0,12323	0,17712	0,10478	0,20081	0,12265
GMM	0,22407	0,13780	0,16842	0,11759	0,21632	0,14773
RMLE_Cauchy	0,22333	0,10252	0,13024	0,07926	0,14406	0,10031
RMLE_Welsch	0,24147	0,12170	0,13180	0,09630	0,15626	0,13840
RMLE_Insha	0,23394	0,11671	0,12814	0,09045	0,16838	0,13187
RMLE_Logistic	0,22270	0,09848	0,13757	0,07288	0,14642	0,08389

$n=49$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,10812	0,03668	0,11015	0,04521	0,10539	0,05318
GMM	0,12438	0,03875	0,10367	0,05410	0,11190	0,06642
RMLE_Cauchy	0,09541	0,02409	0,06795	0,02814	0,05110	0,03671
RMLE_Welsch	0,09691	0,02914	0,06303	0,03926	0,03423	0,06295
RMLE_Insha	0,09564	0,02764	0,07238	0,03625	0,05338	0,05444
RMLE_Logistic	0,10311	0,02337	0,08153	0,02404	0,06642	0,02608

$n=100$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,06163	0,01308	0,06629	0,02127	0,06828	0,02718
GMM	0,05105	0,01354	0,06186	0,02438	0,07035	0,03121
RMLE_Cauchy	0,02599	0,00572	0,03563	0,01040	0,03926	0,01591
RMLE_Welsch	0,01806	0,00779	0,01957	0,01947	0,01910	0,03748
RMLE_Insha	0,02816	0,00735	0,03480	0,01585	0,03510	0,02951
RMLE_Logistic	0,04306	0,00557	0,05199	0,00860	0,05286	0,01055

Tablo 5.3 incelendiğinde RMLE_Cauchy ve RMLE_Logistic, MSE açısından diğerlerinden daha iyi performans gösterdiği görülmüştür.

Tablo 5.4. Karma Normal ($0,80*N(0, 1)+0,20*N(0, 10)$) dağılım için λ parametresinin yanlışlık ve MSE sonuçları

$n=25$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,25767	0,13768	0,24217	0,14420	0,21441	0,13856
GMM	0,24132	0,15158	0,23979	0,16316	0,23350	0,17364
RMLE_Cauchy	0,14089	0,05586	0,16939	0,07115	0,13591	0,06205
RMLE_Welsch	0,17411	0,09645	0,20953	0,13381	0,15164	0,11384
RMLE_Insha	0,19837	0,10708	0,23859	0,11889	0,19408	0,10982
RMLE_Logistic	0,14132	0,05290	0,19922	0,07074	0,15312	0,05416

$n=49$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,12412	0,03698	0,14954	0,06077	0,13742	0,07354
GMM	0,10864	0,03939	0,14383	0,06754	0,14667	0,08448
RMLE_Cauchy	0,05004	0,01247	0,07395	0,02463	0,06276	0,02673
RMLE_Welsch	0,05771	0,01732	0,08571	0,04802	0,03879	0,06590
RMLE_Insha	0,05268	0,01546	0,08553	0,04193	0,07307	0,05166
RMLE_Logistic	0,05075	0,00987	0,07022	0,01882	0,09163	0,02128

$n=100$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,06956	0,01323	0,08460	0,02293	0,06871	0,02780
GMM	0,05860	0,01349	0,08091	0,02431	0,06949	0,03427
RMLE_Cauchy	0,02123	0,00402	0,03110	0,00711	0,04358	0,00989
RMLE_Welsch	0,02074	0,00719	0,03019	0,01801	0,00929	0,03770
RMLE_Insha	0,02300	0,00615	0,03172	0,01528	0,04628	0,02260
RMLE_Logistic	0,02386	0,00314	0,03086	0,00531	0,06762	0,00974

Tablo 5.4 incelendiğinde RMLE_Cauchy ve RMLE_Logistic, MSE açısından diğerlerinden daha iyi performans gösterdiği gözlemlenmiştir.

Tablo 5.5. Karma Normal ($0,90*N(0, 1)+0,10*N(0, 20)$) dağılım için λ parametresinin yanlışlık ve MSE sonuçları

$n=25$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,21833	0,11729	0,22365	0,12791	0,22652	0,13688
GMM	0,19183	0,13225	0,22715	0,14609	0,24504	0,16540
RMLE_Cauchy	0,14548	0,05548	0,14983	0,07085	0,13114	0,07499
RMLE_Welsch	0,15901	0,06922	0,17325	0,09970	0,14646	0,11207
RMLE_Insha	0,16423	0,07053	0,17077	0,09011	0,15404	0,10695
RMLE_Logistic	0,14980	0,05284	0,15141	0,05886	0,12841	0,05521

$n=49$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,13186	0,04859	0,15236	0,06404	0,15780	0,07575
GMM	0,11602	0,05339	0,15395	0,07382	0,17386	0,09219
RMLE_Cauchy	0,04702	0,01322	0,05654	0,02415	0,04595	0,03627
RMLE_Welsch	0,04847	0,01614	0,05707	0,03363	0,04109	0,05648
RMLE_Insha	0,05269	0,01686	0,05948	0,03164	0,05175	0,04889
RMLE_Logistic	0,06136	0,01208	0,07229	0,01736	0,06233	0,02126

$n=100$						
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,09049	0,01953	0,10787	0,03118	0,11032	0,03781
GMM	0,07450	0,01889	0,10238	0,03486	0,11700	0,04268
RMLE_Cauchy	0,01595	0,00383	0,02670	0,00856	0,02144	0,01938
RMLE_Welsch	0,01142	0,00528	0,01739	0,01624	0,01197	0,03429
RMLE_Insha	0,01427	0,00487	0,02523	0,01286	0,02419	0,02708
RMLE_Logistic	0,03407	0,00395	0,04116	0,00755	0,03943	0,00988

RMLE'nin performansı karma Normal dağılım durumunda Tablo 5.3.-5.5' den görüldüğü üzere iyi çıkmıştı. Tablo 5.6'da ise veri setinde en büyük ve en küçük değer 5 ile çarpılarak yan ve MSE değerleri tablo halinde verilmiştir. λ için RMLE'nin en küçük veya en büyük gözlemin 5 ile çarpılması durumlarında klasik tahmincilere göre daha iyi performans sergilediği görülmektedir.

Tablo 5.6. Aykırı değer durumu için λ parametresinin yanlılık ve MSE sonuçları

En büyük gözlem 5 ile çarpıldı			n=100			
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,28288	0,08861	0,245746	0,078662	0,17968	0,05335
GMM	0,27032	0,08154	0,237301	0,075222	0,16900	0,04908
RMLE_Cauchy	0,06684	0,02650	0,075346	0,039817	0,06118	0,03787
RMLE_Welsch	0,04379	0,02741	0,049789	0,046977	0,03018	0,04975
RMLE_Insha	0,10471	0,02873	0,110477	0,038339	0,08571	0,03401
RMLE_Logistic	0,05788	0,02457	0,058962	0,041044	0,04480	0,04210

En küçük gözlem 5 ile çarpıldı			n=100			
λ	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,28723	0,09307	0,24984	0,07938	0,17453	0,05613
GMM	0,27601	0,08777	0,24746	0,07869	0,16993	0,05325
RMLE_Cauchy	0,03405	0,02374	0,05654	0,03702	0,06932	0,04523
RMLE_Welsch	0,01106	0,02543	0,02147	0,04378	0,05197	0,05204
RMLE_Insha	0,07785	0,02488	0,10383	0,03260	0,09222	0,03886
RMLE_Logistic	0,02249	0,02255	0,03615	0,04013	0,05888	0,04813

Otokorelasyon katsayısı için MSE ve yan sonuçlarına göre RMLE değerlendirilmiştir ve RMLE'nin MLE ve GMM'e göre robust olduğu görülmüştür. Şimdi RMLE'nin eğim katsayısı için performansı simülasyon ile değerlendirilecektir.

Normal dağılım için beklenti MLE'nin iyi sonuç vermesidir. Tablo 5.7'de eğim parametresi için sonuçlardan MLE'nin iyi performansı görünmekle beraber, RMLE (Insha)'nın MLE den sonra iyi performansı gözlenmektedir.

Normal dağılım için veri setinde aykırı değer olmadığından, m-tahminciler artıkları çok fazla değiştirmezler bu nedenle de MLE'ye yakın sonuçlar verirler. Tablo 5.7 incelendiğinde bu durum açıkça görülmektedir.

Tablo 5.7'den görüldüğü üzere m-tahmincilerin performansı birbirine yakın çıkmıştır.

Tablo 5.7. Normal dağılım için SEM'in eğim katsayısının yanlılık ve MSE sonuçları

<i>n</i> =25						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,00342	0,05629	-0,01353	0,05537	-0,00358	0,05535
GMM	0,00315	0,05778	-0,01354	0,05646	-0,00308	0,05535
RMLE_Cauchy	0,00213	0,06099	-0,01473	0,05692	-0,00558	0,05787
RMLE_Welsch	0,00131	0,06122	-0,01470	0,05686	-0,00516	0,05809
RMLE_Insha	0,00265	0,05875	-0,01386	0,05590	-0,00484	0,05624
RMLE_Logistic	0,00240	0,06101	-0,01466	0,05693	-0,00574	0,05771

<i>n</i> =49						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	-0,00838	0,02469	0,00606	0,02645	0,00451	0,02983
GMM	-0,00852	0,02502	0,00605	0,02652	0,00416	0,02998
RMLE_Cauchy	-0,00788	0,02665	0,00478	0,02783	0,00493	0,03075
RMLE_Welsch	-0,00782	0,02655	0,00493	0,02776	0,00482	0,03069
RMLE_Insha	-0,00771	0,02543	0,00559	0,02679	0,00452	0,02993
RMLE_Logistic	-0,00790	0,02665	0,00471	0,02780	0,00489	0,03074

<i>n</i> =100						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,00157	0,01286	-0,00280	0,01312	0,00426	0,01355
GMM	0,00170	0,01287	-0,00269	0,01314	0,00433	0,01357
RMLE_Cauchy	0,00118	0,01384	-0,00318	0,01388	0,00475	0,01389
RMLE_Welsch	0,00131	0,01379	-0,00324	0,01380	0,00497	0,01384
RMLE_Insha	0,00129	0,01344	-0,00295	0,01326	0,00481	0,01356
RMLE_Logistic	0,00121	0,01384	-0,00313	0,01389	0,00462	0,01390

Student t (4) dağılımı altında SEM'in eğimini için Tablo 5.8'deki sonuçlardan RMLE'nin MSE açısından iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 5.8. *Student t(4) dağılım için SEM'in eğim katsayısının yanlılık ve MSE sonuçları*

$n=25$						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,00522	0,09610	-0,00660	0,10241	-0,00799	0,10556
GMM	0,00338	0,09909	-0,00669	0,10319	-0,00847	0,10541
RMLE_Cauchy	0,00385	0,08460	-0,00906	0,08697	-0,00286	0,09069
RMLE_Welsch	0,00309	0,08581	-0,01025	0,08886	-0,00231	0,09327
RMLE_Insha	0,00223	0,08830	-0,01086	0,09164	-0,00413	0,09485
RMLE_Logistic	0,00445	0,08483	-0,00849	0,08705	-0,00344	0,09048

$n=49$						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	-0,00018	0,04484	-0,00582	0,05087	0,01425	0,05609
GMM	0,00008	0,04521	-0,00543	0,05095	0,01441	0,05628
RMLE_Cauchy	-0,00250	0,03839	-0,00382	0,03837	0,00808	0,04434
RMLE_Welsch	-0,00291	0,03872	-0,00351	0,03830	0,00655	0,04465
RMLE_Insha	-0,00167	0,04001	-0,00347	0,04074	0,00955	0,04724
RMLE_Logistic	-0,00248	0,03847	-0,00409	0,03891	0,00869	0,04440

$n=100$						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	-0,00108	0,02264	0,00538	0,02626	0,00075	0,02391
GMM	-0,00090	0,02267	0,00538	0,02626	0,00111	0,02410
RMLE_Cauchy	-0,00154	0,01774	0,00109	0,02034	0,00039	0,01885
RMLE_Welsch	-0,00155	0,01783	-0,00013	0,02051	-0,00019	0,01897
RMLE_Insha	-0,00077	0,01864	0,00073	0,02168	-0,00072	0,02039
RMLE_Logistic	-0,00150	0,01788	0,00189	0,02044	0,00067	0,01891

Karma dağılımlar durumunda eğim katsayılarının performansı Tablo 5.9-5.11’de verilmiştir. Tablo incelendiğinde RMLE’nin MSE ve Yan açısından en iyi performansa sahip olduğu görülmektedir.

Tablo 5.9. Karma Normal $(0,90*N(0, 1)+0,10*N(0, 10))$ dağılım için SEM'in eğim katsayısının yanlışlık ve MSE sonuçları

$n=25$						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	-0,00565	0,27402	0,07461	0,41256	0,02567	0,42196
GMM	-0,00687	0,28251	0,07198	0,41100	0,02650	0,42399
RMLE_Cauchy	0,00408	0,07495	0,00707	0,05233	0,01204	0,08143
RMLE_Welsch	0,00561	0,07542	0,00298	0,05359	0,00710	0,08150
RMLE_Insha	0,00452	0,07940	0,00266	0,05748	0,00881	0,08606
RMLE_Logistic	0,00128	0,08085	0,01571	0,06136	0,01392	0,09090

$n=49$						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,02526	0,18505	-0,03901	0,21420	-0,01199	0,22889
GMM	0,02571	0,18722	-0,03988	0,21644	-0,01133	0,22953
RMLE_Cauchy	0,01435	0,03504	-0,01506	0,03780	0,00203	0,03892
RMLE_Welsch	0,01192	0,03607	-0,01226	0,03720	0,00188	0,04019
RMLE_Insha	0,01371	0,03583	-0,01261	0,03651	-0,00161	0,04345
RMLE_Logistic	0,01576	0,03914	-0,02039	0,04064	-0,00090	0,04297

$n=100$						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	-0,02176	0,12641	-0,00450	0,13233	-0,00874	0,14270
GMM	-0,02242	0,12697	-0,00436	0,13240	-0,00838	0,14304
RMLE_Cauchy	-0,00389	0,01874	-0,00135	0,01732	0,00274	0,01827
RMLE_Welsch	-0,00313	0,01893	-0,00068	0,01821	0,00361	0,01827
RMLE_Insha	-0,00230	0,01787	0,00094	0,01834	0,00299	0,01870
RMLE_Logistic	-0,00555	0,02057	-0,00126	0,02005	0,00163	0,02200

Tablo 5.9 incelendiğinde RMLE'nin MSE ve Yan açısından en iyi performansa sahip olduğu görülmektedir.

Tablo 5.10. Karma Normal $(0,80*N(0, 1)+0,20*N(0, 10))$ dağılım için SEM'in eğim katsayısının yanlışlık ve MSE sonuçları

<i>n</i> =25						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	-0,00220	0,82555	0,12544	0,87682	-0,02626	0,96465
GMM	-0,00423	0,85310	0,11965	0,89608	-0,02705	0,98598
RMLE_Cauchy	-0,00843	0,06603	0,00016	0,12194	0,02976	0,10407
RMLE_Welsch	-0,01351	0,06916	-0,04610	0,13321	0,02486	0,12319
RMLE_Insha	-0,01751	0,17724	0,02332	0,34155	-0,00455	0,19143
RMLE_Logistic	-0,01111	0,12743	0,04328	0,19588	0,02365	0,15406

<i>n</i> =49						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,07098	0,51687	-0,00326	0,45664	0,01284	0,48396
GMM	0,07081	0,51232	-0,00240	0,46014	0,01273	0,48565
RMLE_Cauchy	0,00251	0,04012	0,00318	0,04790	0,00777	0,05160
RMLE_Welsch	-0,00133	0,03644	0,00164	0,04972	0,00521	0,05589
RMLE_Insha	-0,00432	0,04284	0,00048	0,06184	0,00792	0,06425
RMLE_Logistic	0,00527	0,06824	0,00195	0,06678	0,00803	0,07056

<i>n</i> =100						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	-0,08440	0,24856	0,02864	0,25686	0,01097	0,28343
GMM	-0,08361	0,24840	0,02967	0,25767	0,01085	0,28457
RMLE_Cauchy	0,00493	0,02241	-0,00331	0,02428	-0,00058	0,02332
RMLE_Welsch	0,00914	0,02690	-0,00673	0,02069	0,00129	0,02528
RMLE_Insha	0,00096	0,02763	-0,00819	0,03001	0,00148	0,02551
RMLE_Logistic	-0,00835	0,03015	0,00132	0,03817	-0,00003	0,03534

Tablo 5.10 incelendiğinde RMLE'nin MSE ve Yan açısından en iyi performansa sahip olduğu görülmektedir.

Tablo 5.11. Karma Normal $(0,90*N(0, 1)+0,10*N(0, 20))$ dağılım için SEM'in eğim katsayısının yanlışlık ve MSE sonuçları

$n=25$						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	-0,08017	1,13305	-0,04807	0,70125	0,09329	0,87567
GMM	-0,07290	1,16528	-0,04527	0,70859	0,10361	0,92299
RMLE_Cauchy	0,00731	0,08060	0,04085	0,13320	0,02882	0,07532
RMLE_Welsch	0,00103	0,07584	0,03910	0,10016	0,03987	0,08687
RMLE_Insha	0,00177	0,09467	0,02458	0,09515	0,03233	0,08468
RMLE_Logistic	-0,00512	0,08738	0,02087	0,07690	0,03478	0,07687

$n=49$						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,07792	0,45949	-0,19620	0,63441	-0,10202	0,58935
GMM	0,07360	0,45973	-0,19262	0,64694	-0,10200	0,59354
RMLE_Cauchy	0,03040	0,03204	-0,00038	0,02786	-0,01577	0,03241
RMLE_Welsch	0,02319	0,02922	0,00414	0,02858	0,00266	0,07907
RMLE_Insha	0,01369	0,02886	0,00622	0,02749	0,00143	0,09391
RMLE_Logistic	0,03485	0,04065	-0,01258	0,03066	-0,02193	0,03826

$n=100$						
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	-0,01232	0,36801	0,10496	0,43920	-0,00274	0,41402
GMM	-0,00995	0,36811	0,10456	0,43908	-0,00319	0,41542
RMLE_Cauchy	-0,00759	0,01428	-0,00639	0,01506	-0,00317	0,01876
RMLE_Welsch	-0,00862	0,01393	-0,00339	0,01666	-0,00202	0,01944
RMLE_Insha	-0,00983	0,02561	-0,00525	0,01588	0,00587	0,07275
RMLE_Logistic	-0,01185	0,02284	0,00521	0,02745	-0,00351	0,02193

Veri setinde aykırı değer olması için en büyük ve en küçük değer 5 ile çarpılmış yan ve MSE sonuçları Tablo 5.12’de verilmiştir. Tablo incelendiğinde RMLE’nin MSE açısından en iyi performansa sahip olduğu görülmektedir. Sonuç olarak, eğim parametresi için RMLE’nin aykırı değerlere karşı robust olduğu simülasyon çalışması yardımıyla gösterilmiştir.

Tablo 5.12. *Aykırı değer durumu için SEM'in eğim katsayısının yanlışlık ve MSE sonuçları*

<i>En büyük gözlem 5 ile çarpıldı</i>			<i>n=100</i>			
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	-0,00150	0,05119	-0,01005	0,03692	-0,00882	0,02606
GMM	-0,00165	0,05103	-0,00881	0,03673	-0,00899	0,02637
RMLE_Cauchy	-0,02042	0,01673	-0,00156	0,01411	0,00634	0,01095
RMLE_Welsch	-0,02334	0,02321	-0,00353	0,01289	0,01090	0,01067
RMLE_Insha	-0,01887	0,01616	-0,00088	0,01433	0,00492	0,01093
RMLE_Logistic	-0,02145	0,01559	-0,00283	0,01415	0,00746	0,01102

<i>En küçük gözlem 5 ile çarpıldı</i>			<i>n=100</i>			
β	0,8		0,6		0,4	
Tahminci	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
MLE	0,00743	0,03869	-0,00322	0,04074	-0,03921	0,03445
GMM	0,00725	0,03872	-0,00281	0,04068	-0,03882	0,03456
RMLE_Cauchy	0,00333	0,01569	-0,00520	0,01541	-0,01267	0,01481
RMLE_Welsch	0,00359	0,01776	-0,00330	0,01817	-0,00949	0,01386
RMLE_Insha	0,00246	0,01406	-0,00654	0,01513	-0,01675	0,01435
RMLE_Logistic	0,00267	0,01665	-0,00326	0,01543	-0,01130	0,01474

6. UYGULAMA

Mekânsal ekonometrik modelleri ve SEM için RMLE’yi gerçekçi bir örnek üzerinde göstermek için Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) tarafından yayınlanan *Toplam Yaş Bağımlılık Oranı* ve *Yaşam Endeksi* istatistikleri kullanılmıştır. Bu veriler kapsamında bağımlı değişken olarak “*Toplam Yaş Bağımlılık Oranı*”, bağımsız değişken olarak ta “*Yaşam Endeksi*” alınmış ve mekânsal bağımlılık testleri yapılarak veri seti kontrol edilmiş daha sonra SEM için klasik MLE ve bu çalışmada önerilen RMLE’nin performansı temiz ve kirlenilen verilerde gösterilmiştir. Kullanılan değişkenlerin açıklamaları sırasıyla aşağıda verilmiştir.

Toplam Yaş Bağımlılık Oranı (Toplam Bağımlı Yaş Oranı): “15-64” yaş grubundaki her 100 kişi için “0-14” ve “65 ve daha yukarı” yaş gruplarındaki kişilerin oranıdır.

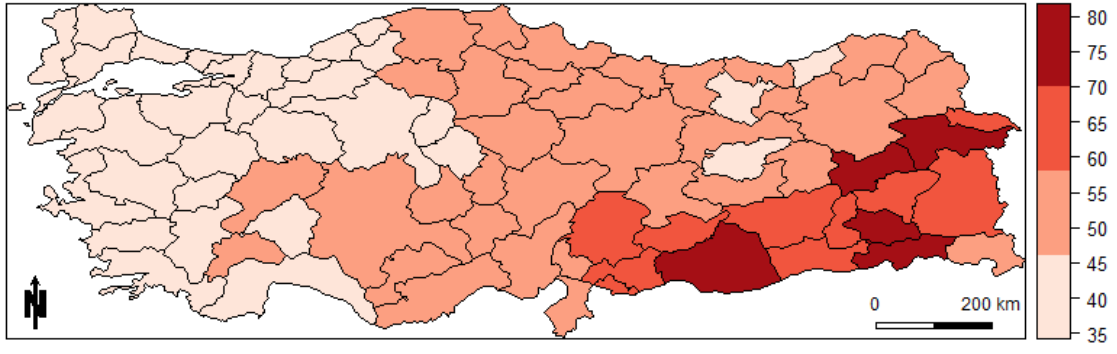
Yaşam Endeksi: Türkiye İstatistik Kurumu tarafından ilk defa yayımlanan illerde “Yaşam Endeksi” bireylerin ve hanehalklarının yaşamını objektif ve sübjektif göstergeler kullanarak yaşam boyutları ayrımında il düzeyinde ölçmeye, karşılaştırmaya ve zaman içinde izlemeye yönelik bir endeks çalışmasıdır. (TÜİK).

İllerde yaşam endeksi; konut, çalışma hayatı, gelir ve servet, sağlık, eğitim, çevre, güvenlik, sivil katılım, altyapı hizmetlerine erişim, sosyal yaşam ve yaşam memnuniyeti olmak üzere yaşamın 11 boyutunu kapsamakta ve 41 gösterge ile temsil edilen bu boyutları tek bir bileşik endeks yapısı içinde sunmaktadır. Endeks 0 ile 1 arasında değer almakta ve 1’e yaklaştıkça daha iyi bir yaşam düzeyini ifade etmektedir (TÜİK).

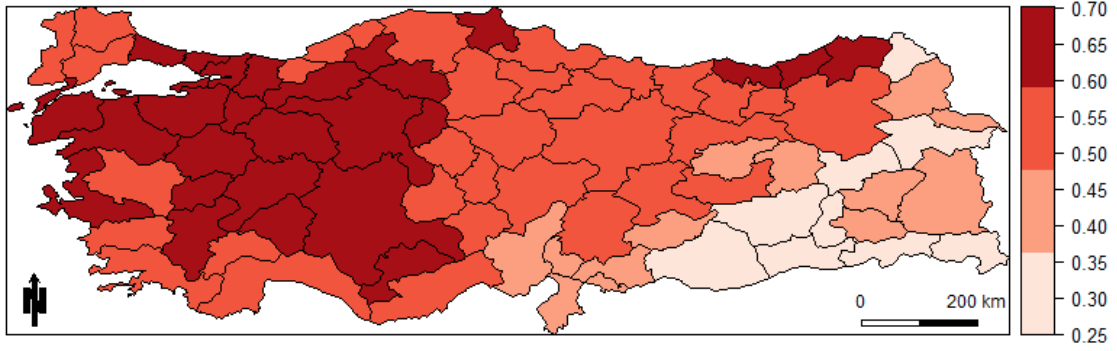
Bu uygulama için tüm analizler simetrik yapısı sebebiyle *Queen* sınır komşuluğu baz alınarak yapılmıştır.

Mekânsal Gölgeleme haritaları

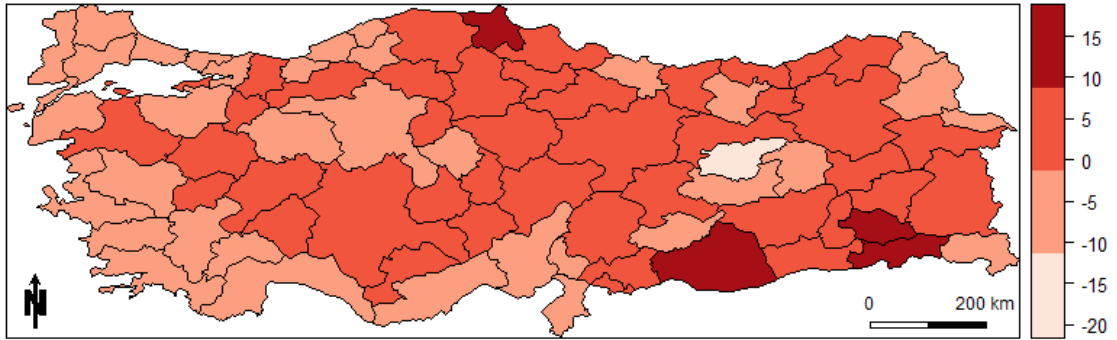
İlk olarak mekânsal bağımlılığın var olup olmadığını görsel olarak görmek için Gölgeleme haritaları oluşturulmuştur. Bu haritalar, Toplam Yaş Bağımlılık Oranı, Yaşam Endeksi ve OLS artıkları için sırasıyla Şekil 6.1’de verilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 6.1. (a) toplam yaş bağımlılık oranı, (b) yaşam endeksi, (c) OLS artıkları için gölgelendirme haritaları

Veriler bu haritalarda 4 gruba ayrılmış ve farklı renklerle tanımlanmışlardır. Haritalar incelendiğinde bölgeler arası mekânsal bir dokunun olduğu görülmektedir. Bu durum da mekânsal korelasyonun varlığına işaretir.

Bağımlı değişken toplam yaş bağımlılık oranı gölgelendirme haritası incelendiğinde batı Anadolu ve orta Anadolu kendi içlerinde aynı renk grubuna sahip olduğundan mekânsal bağımlılık rahatlıkla görülebilmektedir. Doğu Anadolu ve

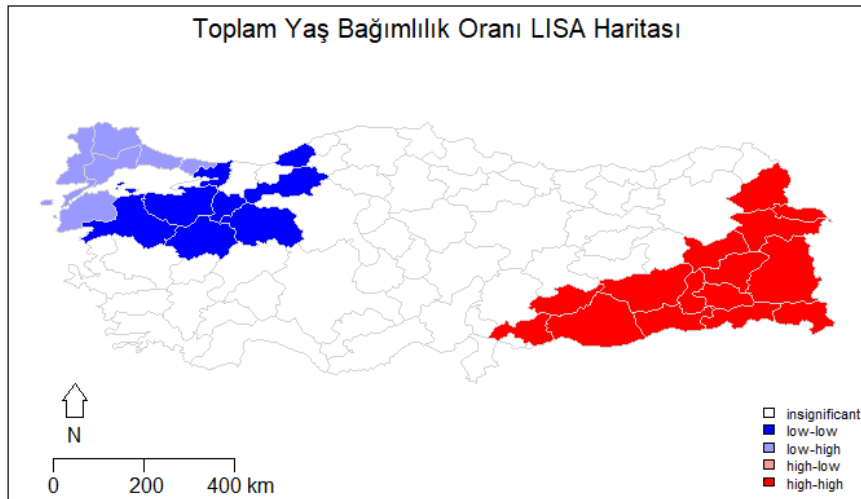
güneydoğu Anadolu ise kendi aralarında renk benzerliği gözükmemektedir. Toplam yaş bağımlılık oranı batı Anadolu’da en düşük değere sahipken, Doğu ve Güneydoğunun bazı illerinde en yüksek değere sahiptir.

Bağımsız değişken yaşam endeksi mekânsal haritası incelendiğinde güney Marmara, orta Anadolu’nun batısı ve Trakya aynı renk grubuna sahip iken Karadeniz, Akdeniz ve Orta Anadolu’nun batısı aynı renk grubuna sahiptir. Doğu Anadolu ve Güneydoğu Anadolu ise kendi aralarında yakın tonda geçişlere sahiptir. Yaşam endeksi değerleri en yüksek Batı Anadolu’da çıkarken en düşük Güneydoğu ve Doğu Anadolu da çıkmıştır.

OLS artıklarının mekânsal haritası incelendiğinde orta Anadolu, Karadeniz, Anadolu’nun doğu ve güneydoğusunun büyük kısmı aynı renk grubuna sahip iken Anadolu’nun batısı ve güneyi ise kendi içlerinde aynı renk grubuna sahiptir.

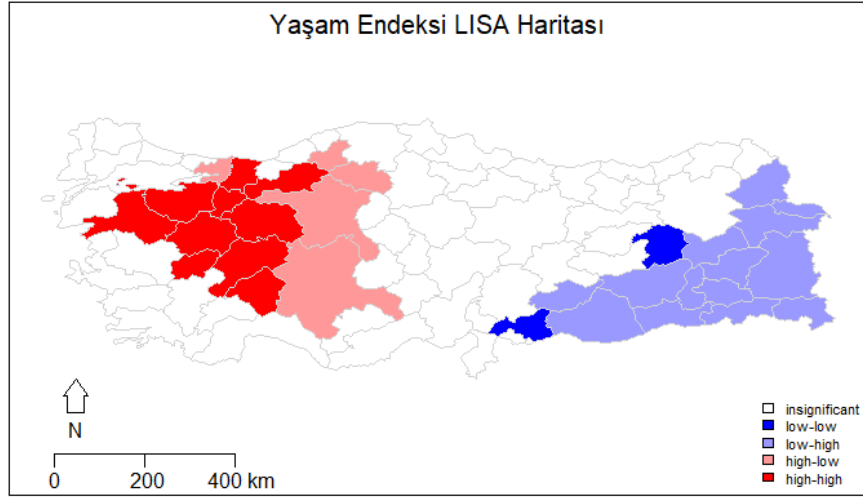
LISA haritaları

Bölgesel kümelenmeleri göstermek için LISA haritaları oluşturulmuş ve Şekil 6.2, 6.3, 6.4’de verilmiştir,



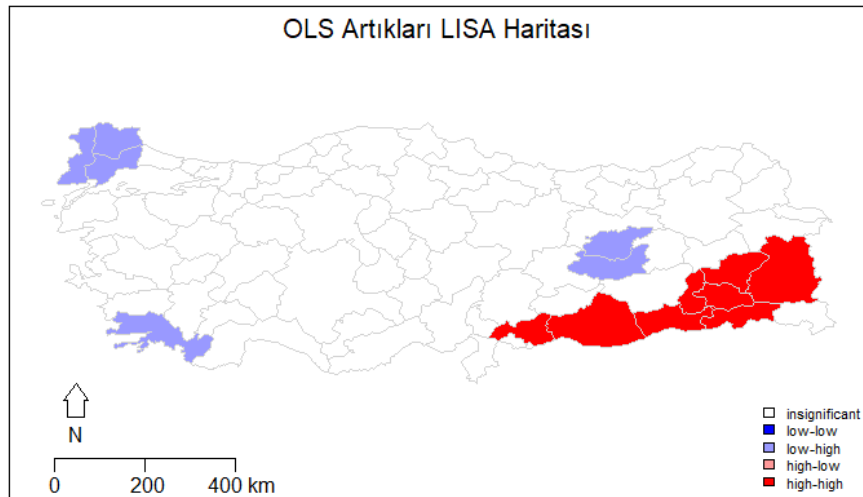
Şekil 6.2. Toplam yaş bağımlılık oranı LISA haritası

Harita incelendiğinde batı bölgeleri komşuluk ilişkisi düşük-düşük ve düşük-yüksek olurken doğu ve güneydoğu bölgelerin de yüksek-yüksek olmuştur. Beyaz olan bölgeler istatistiksel olarak anlamsız bölgelerdir.



Şekil 6.3. Yaşam endeksi LISA haritası

Harita incelendiğinde orta-batı bölgeleri komşuluk ilişkisi yüksek-yüksek ve yüksek düşük olurken doğu ve güneydoğu bölgelerin de düşük-yüksek olmuştur.

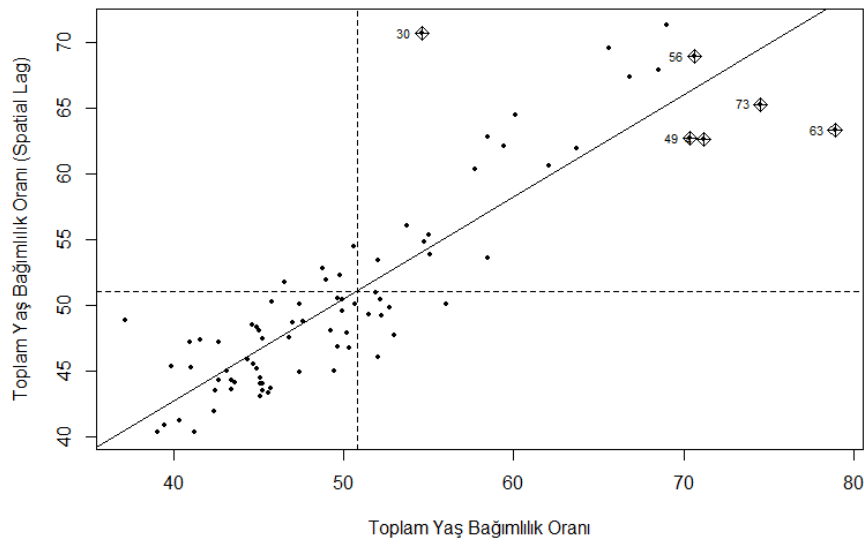


Şekil 6.4. OLS artıkları LISA haritası

OLS artıkları LISA haritası incelendiğinde komşuluk ilişkisi doğu ve güneydoğu bölgelerinde yüksek-yüksek olmuştur. Trakya’da ise düşük-yüksek olmuştur. Düşük-düşük ve yüksek düşük kümelenme görülmemiştir.

Moran saçılım grafikleri

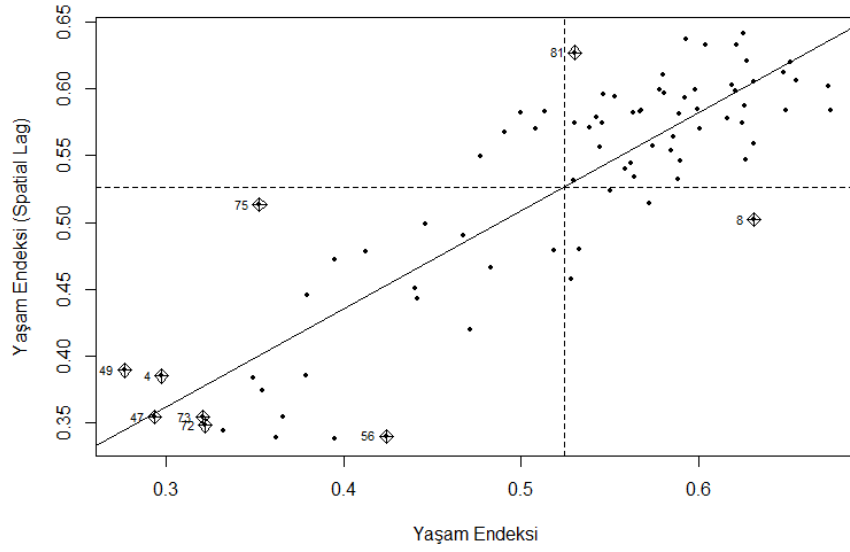
Mekânsal otokorelasyonu görsel olarak gösteren farklı bir grafik de Moran saçılım grafikleridir. Bağımlı değişken için Moran saçılım grafiği Şekil 6.5’de verilmiştir.



Şekil 6.5. Toplam yaş bağımlılık oranı Moran saçılım grafiği

Moran dağılma grafiği incelendiğinde verilerin bir doğru yönünde düzgün yayıldıkları görülmektedir. Bu da mekânsal ilişkinin varlığını göstermektedir. Ayrıca verilerin dağılım yönünden dolayı pozitif bir bağılıktan söz edilebilir ki zaten Moran I değeri de pozitif çıkmaktadır. III nolu bölgede kümelenme çok olduğundan düşük-düşük ilişkisinin varlığından söz edilebilir. II ve IV nolu bölgelerde diğer bölgelere göre daha az nokta yer almıştır.

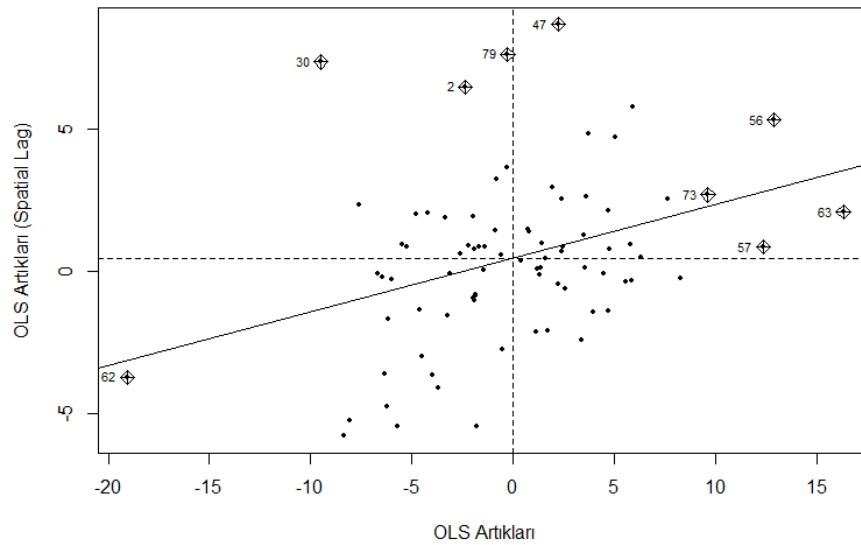
Bağımsız değişken için Moran dağılım grafiği Şekil 6.6’da verilmiştir.



Şekil 6.6. Yaşam endeksi Moran saçılım grafiği

Moran saçılım grafiği incelendiğinde verilerin bir doğru yönünde düzgün yayıldıkları görülmektedir. Bu da mekânsal ilişkinin varlığını göstermektedir. Ayrıca verilerin dağılım yönünden dolayı pozitif bir bağılıktan söz edilebilir ki zaten Moran I değeri de pozitif çıkmaktadır. I nolu bölgede kümelenme çok olduğundan yüksek-yüksek ilişkiden söz edilebilir.

Artıklar için Moran I dağılım grafiği oluşturulmuş ve Şekil 6.7’de verilmiştir.



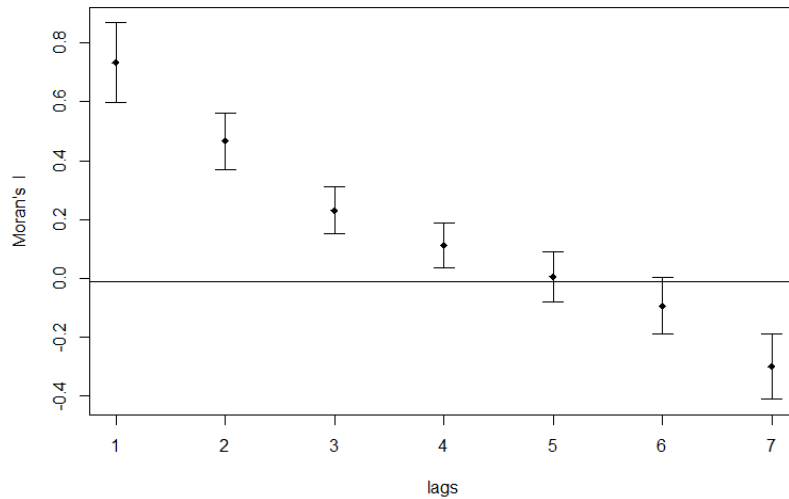
Şekil 6.7. OLS artıkları Moran saçılım grafiği

Artıklar için Moran dağılım grafiği incelendiğinde verilerin III nolu bölgeden I nolu bölgeye doğru dağıldığı görülmektedir. Fakat noktalar hemen hemen tüm bölgelere eşit dağılmaktadır zaten Moran I istatistiği de bu durumu destekleyecek şekilde düşük çıkmaktadır.

Correlogram

Moran I ve komşuluk arasındaki ilişkiyi göstermenin farklı bir yolu da correlogram grafikleridir. Komşuluğun derecesine bağlı olarak Moran I istatistiğindeki değişim bu grafikler yardımıyla görülebilir.

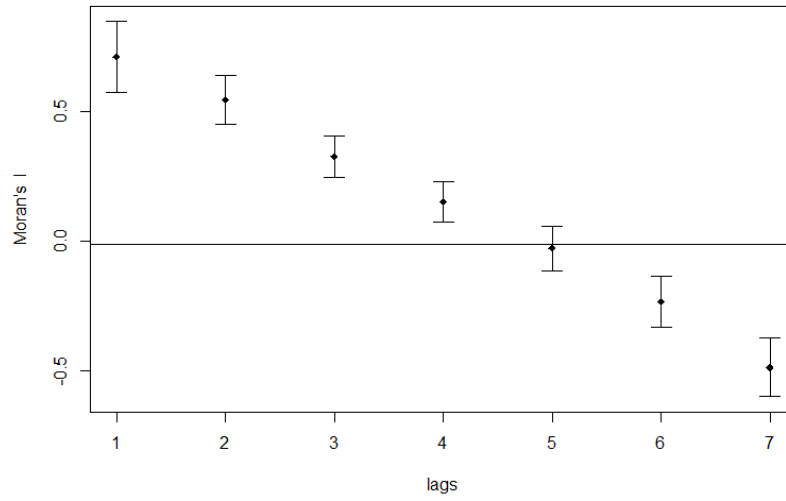
Bağımlı değişken için Correlogram grafiği Şekil 6.8’de verilmiştir.



Şekil 6.8. Toplam yaş bağımlılık oranı Correlogram grafiği

Bağımlı değişken için Correlogram grafiği incelendiğinde komşuluğun derecesine bağlı olarak düzgün bir azalış vardır. 5.derece komşulukta Moran I değeri sıfıra yaklaşmış daha sonra negatif yönde devam etmiştir. Moran I değeri birinci derece komşulukta 0,7-0,8 arasında iken ikinci derece komşulukta 0,4-0,5 arasında yer almıştır. 7.derece komşulukta ise -0,2 ile -0,4 arasında yer almıştır.

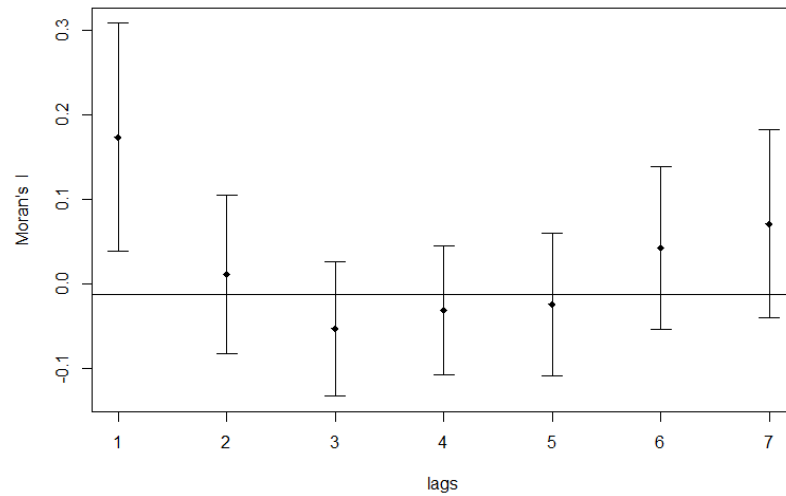
Bağımsız değişken için Correlogram grafiği Şekil 6.9’da verilmiştir.



Şekil 6.9. *Yaşam endeksi Correlogram grafiği*

Bağımsız değişken için Correlogram grafiği incelendiğinde komşuluğun derecesine bağlı olarak düzgün bir azalış vardır. 5.derece komşulukta Moran I değeri sifıra yaklaşmış daha sonra negatif yönde devam etmiştir. Moran I değeri birinci derece komşulukta 0,7 civarında iken ikinci derece komşulukta 0,5-0,6 arasında yer almıştır. Mekânsal bağıllık 5.derece komşulukta sıfır değerini almış daha sonra 6. ve 7. derece komşulukta negatif değer almıştır.

Artıklar için Correlogram grafiği Şekil 6.10'da verilmiştir.



Şekil 6.10. *OLS artıkları Correlogram grafiği*

Artıklar için Correlogram grafiği incelendiğinde sadece 1. derece komşulukta kayda değer mekânsal bağılıktan söz edilebilir. Diğer komşuluklarda Moran I değerleri çok düşük çıkmıştır. Bu nedenle de mekânsal bağımlılık 1. derece komşulukta söz konudur.

Normallik ve değişen varyans testleri

Normallik ve değişen varyans testi için öncelikle klasik OLS regresyon ile modelleme yapılmış, varsayımların sağlanıp sağlanmadığı test edilmiştir. Eğer OLS'nin varsayımları, mekânsal bağımlılıktan dolayı sağlanmıyor ise bunun yansıması hataların normal olmaması veya hatalarda değişen varyans olması şeklinde ortaya çıkabilir. Yapılan normallik testi (Jarque-Bera), değişen varyans testi (Breusch-Pagan, Koenker-Basset) hataların normal olmadığını ve değişen varyans varsayımının ihlali göstermektedir. (Bakınız Tablo 6.1)

Tablo 6.1. *Normallik ve değişen-varyans testleri sonuçları*

Test	Değeri	<i>p</i> olasılık değeri
Jarque-Bera	7,3202	0,02573
Breusch-Pagan	8,2596	0,00405
Koenker-Basset	4,7576	0,02917

Tablo 6.1 incelendiğinde, %5 anlamlılık düzeyinde, Jarque-Bera testine göre hataların normal dağılıma sahip olmadığı görülmektedir. Breusch-Pagan ve Koenker-Basset testi sonuçlarına göre ise değişen varyans vardır.

Moran I testi

Verilerde ve dolayısı ile artıklarda mekânsal otokorelasyon olup olmadığına karar verebilmek için kullanılan en yaygın test Moran I testidir. Bu veri setinde bağımlı değişken, bağımsız değişken ve OLS artıkları için Moran I test istatistiği değerleri Tablo 6.2'de verilmiştir.

Tablo 6.2. *Moran I testi sonuçları*

Değişken	İstatistik değeri	<i>p</i> olasılık değeri
Bağımlı değişken	0,775263	2,2e-16
Bağımsız değişken	0,735172	2,2e-16
Hata terimi	0,189065	0,00134

Moran *I* için H_0 hipotezi mekânsal bağıllık yoktur şeklinde kurulmaktadır. Bu veri seti için *p* değerleri 0,05’den küçük çıktığından tüm değişkenler için H_0 hipotezi reddedilmiştir yani mekânsal otokorelasyon vardır. Bağımlı değişken ve bağımsız değişkenin Moran *I* değerleri sırasıyla 0,775 ve 0,735 çıkmış bu da güçlü bir mekânsal bağıllığın varlığını göstermektedir. Hataların Moran *I* değeri ise 0,189 çıkmıştır.

Lagrange testi

Mekânsal bağımlılık olduğu görüldükten sonra hangi modelin uygulanacağına karar vermek gerekir. Bunun için de LM testi yapılır. Bu veri seti için LM testi sonuçları Tablo 6.3’de verilmiştir.

Tablo 6.3. *Lagrange testi sonuçları*

Modeller	İstatistik değeri	<i>p</i> olasılık değeri
LM _{SEM}	6,5464	0,01051
RLM _{SEM}	3,9781	0,0461
LM _{SAR}	25,142	5,326e-07
RLM _{SAR}	22,574	2,022e-06
LM _{SAC (SARMA)}	29,12	4,75e-07

Sonuçlara bakıldığında tüm modellerde *p* değerleri 0,05’den küçük çıktığından hepsi bu veri setine uygundur. Fakat Lagrange testi ile *p* değeri 0,05’den küçük çıkan modellerden hangisinin veri setine en iyi uyumu sağladığı hususunda bir karar verilememektedir.

Log-olabilirlik, AIC ve R^2 değerleri

Hangi modelin daha iyi olduğuna karar vermek için log-olabilirlik, AIC değerleri kıyaslanır. İlgili değerler Tablo 6.4’de verilmiştir.

Tablo 6.4. Log-olabilirlik, AIC ve R^2 değerleri

Tahminci	Log- olabilirlik	AIC	R^2
OLS	-252,094	510,189	0,634511
MLE _{SEM}	-242,585	493,170	0,760945
MLE _{SAR}	-236,923	481,845	0,773353
MLE _{SAC}	-236,530	483,046	* ²

Tablo incelendiğinde SEM, OLS ile kıyasla bu veri seti için daha uygun bir modeldir. Hata modelinde log olabilirlik değeri OLS’ye göre yükselirken AIC değeri düşmüştür. Ayrıca belirlilik katsayısını 0,13 artırmıştır. SEM ve SAR arasında SAR tercih edilmelidir.

Tahminleme

Bu tezde SEM için RMLE’nin performansını gözlemlemek için aşağıdaki şekilde aykırı değer oluşturulmuştur ve veri setine atılmıştır:

$$y_{max} = \bar{y} + 4s_y$$

burada y toplam yaş bağımlılık oranı, $\bar{y}$ aritmetik ortalaması ve s_y standart sapmasıdır. Tahminlemeler hem temiz veri hem de aykırı değerli veri için yapılmıştır. Mekânsal otokorelasyon, sabit terim ve eğim parametrelerinin sonuçları bu iki durum için karşılaştırılmıştır.

Aykırı değer olan ve olmayan (gerçek) veri için elde edilen tahmin sonuçları Tablo 6.5’de verilmiştir.

² R^2 değerleri GeoDa programı yardımıyla oluşturulmuştur. GeoDa’nın SAC için hesaplama desteği olmadığından bu değer hesaplanamamıştır.

Tablo 6.5. Parametrelerin tahminleri

λ parametresi tahmini			
Tahminci	Gerçek veride	Aykırı değer olan veride	Fark
GMM	0,3599	0,3144	0,0455
MLE	0,7879	0,7497	0,0382
RMLE Cauchy	0,8112	0,7959	0,0153
RMLE Insha	0,8222	0,8097	0,0125
RMLE Logistic	0,8124	0,7965	0,0159
RMLE Welsch	0,7924	0,7762	0,0162
β_0 parametresi tahmini			
Tahminci	Gerçek veride	Aykırı değer olan veride	Fark
GMM	79,5089	81,7006	-2,1917
MLE	61,5191	63,9982	-2,4791
RMLE Cauchy	58,8524	57,6985	1,1538
RMLE Insha	61,1523	58,7603	2,0920
RMLE Logistic	58,5245	57,7382	0,7863
RMLE Welsch	59,4702	58,7425	0,7277
OLS	87,0865	88,0179	-0,9314
β_1 parametresi tahmini			
Tahminci	Gerçek veride	Aykırı değer olan veride	Fark
GMM	-55,2220	-59,1080	3,8860
MLE	-22,9596	-26,8859	3,9264
RMLE Cauchy	-21,6545	-19,9214	-1,7332
RMLE Insha	-24,3970	-20,9846	-3,4124
RMLE Logistic	-22,4656	-21,3519	-1,1138
RMLE Welsch	-21,2882	-20,0088	-1,2794
OLS	-69,2232	-70,8086	1,5855

Tablo 6.5 incelendiğinde mekânsal otokorelasyon katsayısı λ için MLE sonuçları aykırı değer durumundan oldukça etkilenip 0,0382'lik bir değişim oluştururken RMLE'de maksimum 0,0162'lik değişim olmuştur. λ için RMLE aykırı değerlerden daha az etkilendiği gözlenmiştir.

Eğim katsayısı β_1 için de benzer sonuçlar vardır. MLE ve GMM aykırı değerlerden daha çok etkilenmiştir.

7. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yapılanlar ve elde edilenler aşağıda maddeler halinde sunulmaktadır:

1. Mekânsal istatistik, mekânsal istatistiğin temel kavramları ve mekânsal ekonometrinin temel tanımları verilmiştir
2. Komşuluk matrisleri ve ağırlık matrisleri tanıtılmıştır.
3. Mekânsal ekonometrik modeller ve bu modellerin seçiminde kullanılan testler ve kriterler verilmiştir.
4. Mekânsal hata modeli (SEM) ayrıntılı çalışılmış ve SEM'in klasik tahminleme yöntemlerinin (MLE ve GMM) aykırı değerlerden etkilendiği yani robust olmadığı görülmüştür.
5. Bu çalışmada, SEM'in likelihood eşitlikleri ψ fonksiyonu yardımıyla robustlaştırılarak aykırı değerlere karşı dirençli olabilecek robust maksimum likelihood tahmincisi (RMLE) elde edilmiştir.
6. RMLE'nin performansı bir simülasyon çalışması ile değerlendirilmiş ve elde edilen sonuçlar tablolar halinde sunulmuştur.
7. RMLE, veri setinde aykırı değerler olması durumunda klasik tahmincilere göre daha küçük hata kareler ve yan değeri gösterdiği simülasyon sonuçlarında gözlemlenmiştir.
8. Simülasyon sonuçlarında, RMLE'nin normal hata dağılımı durumunda etkinlik kaybının küçük olduğu görülmüştür.
9. SEM'e uygun gerçek hayattan alınan bir uygulama verisine yapay bir aykırı değer konulmuş, RMLE'nin bundan nasıl etkilendiği araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar RMLE'nin klasik yöntemlere göre daha robust olduğunu göstermiştir.
10. Gelecekte, bu tez çalışmasında ele alınan RMLE diğer mekânsal ekonometrik modellerine (SAR, SAC vb.) ve farklı hata yapılarına sahip SEM (MA vb.) için genişletilmeye çalışılacaktır.

KAYNAKÇA

- Anselin, L. (1980). *Estimation methods for spatial autoregressive structures*. Regional Science Dissertation and Monograph Series 8. Field of Regional Science, Cornell University, Ithaca, N.Y.
- Anselin, L. (1988a). Lagrange multiplier test diagnostics for spatial dependence and spatial heterogeneity. *Geographical Analysis*, 20(1), 1-17.
- Anselin, L. (1988b). *Spatial econometrics: methods and models*. Kluwer Academic, Publishers (Dordrecht).
- Anselin, L. (1995). Local indicators of spatial association – LISA. *Geographical Analysis*, 27, 93-115.
- Anselin, L. (2003). Spatial externalities, spatial multipliers, and spatial econometrics. *International Regional Science Review*, 26, 153-166.
- Anselin, L. (2010). Thirty years of spatial econometrics. *Papers in regional science*, 89(1), 3-25.
- Anselin, L. and Florax, R. J. (1995). Small sample properties of tests for spatial dependence in regression models: Some further results. In Anselin, L. and Florax, R. J., editors, *New Directions in Spatial Econometrics*, pages 21–74. Springer-Verlag, Berlin.
- Arbia, G. (1989). *Spatial data configuration in statistical analysis of regional economic and related problems*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.
- Baltagi, B.H. (2008). *Econometric analysis of panel data (4th edn)*. John Wiley & Sons, Chichester
- Can, A. (1990). The measurement of neighborhood dynamics in urban house prices. *Economic Geography*, 66(3), 254-272.
- Cialdea, D., Mastronardi, L. and Giannelli, A. (2014). Data-tourism spatialization: a new methodology useful for landscape planning assessment. *5th Central European Conference in Regional Science – CERS*. Košice, Slovakia 5th to 8th October, 2014.

- Cliff, A.D. and Ord, J.K. (1968). The problem of spatial autocorrelation. In Scott, A.J., editors, *Studies in Regional Science*, pages 25-55, Pion, London.
- Cliff, A.D. and Ord, J.K. (1972). Testing for spatial autocorrelation among regression residuals. *Geographical Analysis*, 6, 267-284.
- Cliff, A.D. and Ord, J.K. (1973). *Spatial autocorrelation*. Pion, London.
- Cliff, A.D. and Ord, J.K. (1981). *Spatial processes: models and applications*, Pion, London.
- Drukker, D. M. Prucha, I. R. and Raciborski, R. (2011). A command for estimating spatial-autoregressive models with spatial-autoregressive disturbances and additional endogenous variables. *Econometric Reviews*, 32, 686-733.
- Elhorst, J.P. (2010). Applied spatial econometrics: raising the bar. *Spatial Economic Analysis*, 5(1), 9-28, DOI: 10.1080/17421770903541772.
- Elhorst, J.P. (2014). *Spatial econometrics: from cross-sectional data to spatial panels*. Springer, Heidelberg
- Elhorst, J.P. and Halleck Vega, S. (2013). On spatial econometric models, spillover effects, and W. *ERSA conference papers*, No: ersa13p222, European Regional Science Association.
- Elhorst, J.P., and Halleck Vega, S. (2017). The SLX model: extensions and the sensitivity of spatial spillovers to W. *Papeles de Economía Española*, 152.
- Eyyuboğlu, B.B. (2015). *Sosyal bilimlerde mekânsal istatistik ve coğrafî bilgi sistemleri: kuramdan uygulamaya*. Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Fischer, M.M. and Nijkamp, P. (2014). *Handbook of regional science, p. (eds.)*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, DOI 10.1007/978-3-642-23430-9_88.
- Getis, A. (2008). A History of the concept of spatial autocorrelation: a geographer's perspective. *Geographical Analysis*, 40, 297–309.
- Goetschalckx, M. (2011). *Supply chain engineering*. Springer, New York.

- Gujarati, D. N. (1995). *Basic econometrics*. McGraw-Hill, Inc.
- Günay, S. (2008). *Türkiye ölüm oranları atlası*. Çantay Kitabevi, İstanbul.
- Huggins, R.M. (1993). On The robust analysis of variance components models for pedigree data. *The Australian journal of statistics*, 35(1), 43-57.
- Kelejian, H.H. and Piras, G. (2017). *Spatial econometrics*. Academic Press.
- Kelejian, H.H. and I.R.Prucha (1998). A generalized spatial two-stage least squares procedure for estimating a spatial autoregressive model with autoregressive disturbances. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 17(1), 99-121.
- Kelejian, H.H. and Prucha, I.R. (1999). A generalized moments estimator for the autoregressive parameter in a spatial model. *International Economic Review*, 40, 509-533.
- Kelejian, H. H. and Robinson, D. P. (1993). A suggested method of estimation for spatial interdependent models with autocorrelated errors, and an application to a county expenditure model. *Papers in regional science*, 72(3), 297-312.
- Kelejian, H. H. and Robinson, D. P. (1995). Spatial correlation: a suggested alternative to the autoregressive model. In Anselin, L. and Florax, R. J., editors, *New directions in spatial econometrics*, pages 75-95, Springer, Berlin.
- Le Gallo, J. and Chasco, C. (2015). Spatial econometrics principles and challenges in Jean Paelinck's research. *Spatial Economic Analysis*, DOI: 10.1080/17421772.2015.1062602.
- Lee, L. F. (2007). GMM and 2SLS Estimation Of Mixed Regressive, Spatial Autoregressive Models. *Journal of Econometrics*, 137, 489-514.
- LeSage, J. (1999). *The Theory and Practice of Spatial Econometrics*. Department of Economics, University of Toledo, Toledo, Ohio.
- LeSage, J.P. (2004). *Maximum likelihood estimation of spatial regression models*. University of Toledo, Toledo, Ohio.

- LeSage, J. and Pace, R.K. (2009). *Introduction to Spatial Econometrics*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton [FL], London and New York.
- Manski, C.F. (1993). Identification of endogenous social effects: the reflection problem. *Review of Economic Studies*, 60, 531-542.
- Moran, P.A. (1948). The interpretation of statistical maps. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 10(2), 243-251.
- Moran, P.A. (1950). Notes on continuous stochastic phenomena. *Biometrika*, 37(1/2), 17-23.
- Oliveau S. and Guilmoto C.Z. (2005). Spatial correlation and demography: exploring India's demographic patterns. *XXVe Congrès International de la Population*, Tours, France, 18 to 23 July, 2005.
- Ord, J.K. (1975). Estimation methods for models of spatial interaction. *Journal of the American Statistical Association*, 70(349), 120-126.
- Ord, J.K. (1981). Towards a theory of spatial statistics: a comment. *Geographical Analysis*, 13, 91-93.
- Osland, L. (2010). An Application of spatial econometrics in relation to hedonic house price modeling. *Journal of Real Estate Research*, 32(3), 289-320.
- Pace, R.K. (2014). Maximum likelihood estimation, In Fischer, M.M. & Nikamp, P., editors, pages 1553-1569, *Handbook of Regional Science*, Springer-Verlag, Berlin.
- Pace, R.K. and Barry, R.P. (1997). Quick computation of spatial autoregressive estimators. *Geographical Analysis*, 29(3), 232-246.
- Pratesi, M. and Salvati, N. (2008). Small area estimation: the EBLUP estimator based on spatially correlated random area effects. *Statistical Methods & Applications*, 17, 113 – 141.
- Sarrias, M. (2017). *Class Notes and Slides of Spatial Econometrics* [PowerPoint slides]. Retrieved from https://msarrias.weebly.com/notes_spaecon.html.

- Salvati, N. (2004). Small area estimation by spatial models: the spatial empirical best linear unbiased prediction (spatial EBLUP). *Technical Report*, University of Florence, Department of Statistics.
- Schmid, T. Münnich, R. (2014). Spatial Robust small area estimation, *Statistical Papers*, 55(3), 653-670.
- Sinha, S. K. and Rao, J. N. K. (2009). Robust small area estimation. *Canadian Journal of Statistics*, 37, 381-399.
- Tuzcu, S.E. (2016). Mekânsal ekonometri ve sosyal bilimlerde kullanım alanları. *Ankara Üniversitesi SBF Dergisi*, Cilt 71, No. 2, s. 401-436.
- Tobler, W. R. (1970). A computer movie simulating urban growth in the Detroit region. *Economic geography*, 46(sup1), 234-240.
- Ullah, A. and Giles, D. (1998). *The Handbook of Applied Economic Statistics*. Marcel Dekkar, New York.
- Unwin, D. J. and Hepple, L. W. (1974). The statistical analysis of spatial series. *The Statistician*, 23, 211–227.
- Vega, S.H. and Elhorst, J.P. (2015). The SLX model. *Journal of Regional Science*, 55(3), 339–363.
- Vandenbulcke-Plasschaert, G. (2011). *Spatial analysis of bicycle use and accident risks for cyclists*, Presses Universitaires de Louvain.
- Wagner, H.H. Holderegger R. Werth S. Gugerli F. Hoebee S.E and Scheidegger C. (2004). Variogram analysis of the spatial genetic structure of continuous populations using multilocus microsatellite data. *Genetics Society of America*, 169:1739–1752, DOI: 10.1534/genetics.104.036038.
- Whittle, P. (1954). On stationary processes in the plane. *Biometrika*, 434-449.
- Yıldırım, V. (2012). *Doğrusal regresyon modeli için M-tahmincilerin incelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi. Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Zeren, F. (2010). Mekânsal etkileşim analizi. *İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi Ekonometri ve İstatistik Dergisi*, 12, 18–39.

http-1: <https://docs.aurin.org.au/portal-help/analysing-your-data/chart-tools/moraniscattervisualisation-workflow/>
(Erişim Tarihi: 01.08.2018)