ALTINCI SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL DÜŞÜNMELERİNİN ÜÇ PARAMETREYLE BİRLİKTE İNCELENMESİ: NİCELİKSEL MUHAKEME, KOVARYASYONEL VE FONKSİYONEL DÜŞÜNME

Gamze Nur GÜVENDİREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Prof. Dr. Tangül KABAEL

Anadolu Üniversitesi

Temmuz 2019 Eskişehir

ALTINCI SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL DÜŞÜNMELERİNİN ÜÇ PARAMETREYLE BİRLİKTE İNCELENMESİ: NİCELİKSEL MUHAKEME, KOVARYASYONEL VE FONKSİYONEL DÜŞÜNME

Gamze Nur GÜVENDİREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Matematik Eğitimi Programı
Danışman: Prof. Dr. Tangül KABAEL

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Temmuz 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Gamze Nur GÜVENDİREN'in "Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünmelerinin Üç Parametreyle Birlikte İncelenmesi: Niceliksel Muhakeme, Kovaryasyonel ve Fonksiyonel Düşünme" başlıklı tezi 31.05.2019 tarihinde, aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programında, Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof.Dr. Tangül KABAEL	
Üye	: Prof.Dr. Pınar ANAPA SABAN	
Üye	: Doç.Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN	

Prof.Dr. Handan DEVECİ
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Müdür Vekili

ÖZET

ALTINCI SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL DÜŞÜNMELERİNİN ÜÇ PARAMETREYLE BİRLİKTE İNCELENMESİ: NİCELİKSEL MUHAKEME, KOVARYASYONEL VE FONKSİYONEL DÜŞÜNME

Gamze Nur GÜVENDİREN
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Temmuz 2019

Danışman: Prof. Dr. Tangül KABAEL

Ortaokul matematik öğrenme sürecinde aritmetikten cebire geçiş dönemi oldukça önemli olmakla birlikte genellikle öğrenciler için güçlük kaynağıdır. Literatür cebirsel düşünmenin gelişmeye başladığı aritmetikten cebire geçiş sürecinin niceliksel muhakeme, kovaryasyonel düşünme, fonksiyonel düşünme gibi çeşitli matematiksel düşünme becerileri ile desteklenmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Bu çalışmada altıncı sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme ile birlikte; niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmelerinin ve varsa bu düşünme biçimleri arasındaki ilişkinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaca göre; ölçüt örneklem yöntemiyle seçilmiş dokuz tane altıncı sınıf düzeyindeki katılımcıya açık uçlu veri toplama araçları iki oturum halinde bireysel olarak uygulanmış ve açık uçlu araçların ardından bireysel klinik görüşmeler yapılmıştır. Veriler içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Genel olarak; öğrencilerin belirtilen düşünme becerileri arasından kovaryasyonel düşünmelerinin en düşük düzeyde olduğu, bağımsız ve bağımlı değişkenler arasındaki doğrusal fonksiyonel ilişkileri anlamlandırıp genelledikleri, okulda ve günlük yaşamlarında alıştıkları yöntemlerin dışına çıkıldığında düşünme becerilerinin düzeylerinin düştüğü sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca, belirtilen dört düşünme becerisi ilişkilendirilerek; niceliksel muhakemenin diğer düşünme becerilerinin gelişiminde merkezde olduğu görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Niceliksel muhakeme, Kovaryasyonel düşünme, Fonksiyonel düşünme, Cebirsel düşünme.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE ALGEBRAIC THINKING OF SIXTH GRADE STUDENTS WITH THREE PARAMETERS: THE QUANTITAVE REASONING, THE COVARIATIONAL THINKING AND THE FUNCTIONAL THINKING

Gamze Nur GÜVENDİREN
Department of Mathematic and Science Education
Anadolu University, Graduate School of Education Science, July 2019

Supervisor: Prof. Dr. Tangül KABAEL

Although the transition period from arithmetic to algebra in secondary school mathematics learning process is quite important, it is often a source of difficulty for students. The literature reveals that the process of algebraic thinking to develop from arithmetic to algebra should be supported by various mathematical thinking skills such as quantitative reasoning, covariational thinking and functional thinking. The aim of this study was to investigation of the algebraic thinking with the quantitative reasoning, the covariational thinking and the functional thinking and, if any, the relationship between these forms of thinking of sixth grade students. According to this purpose; the open-ended data collection tools were administered and then in-depth individual clinical interviews in two sessions to the nine participants in sixth grade level selected by criterion sample method. Data were analyzed by content analysis method. In general; it was concluded that the students' covariational thinking skills were at the lowest level than according to other thinking skills, the linear functional relationships between the independent and dependent variables were understood and generalized, and the thinking skills decreased when they were taken out of the methods used in school and in their daily lives. In addition, the mentioned four thinking skills are associated; it was found that quantitative reasoning was central to the development of other thinking skills.

Keywords: Quantitative reasoning, Covariational thinking, Functional thinking, Algebraic thinking.

Sevgili Annem Bilge Güvendiren’e

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi oluşturmamda ve verilerimi toplama sürecinde bana yardımcı olan altıncı sınıf öğrencilerime, çocuklarının benimle çalışmasını kabul eden değerli velilere, okullarında tez uygulaması yaparken yardımlarını esirgemeyen okul müdürleri ile matematik öğretmenlerine, tezimi ayrıntılı olarak inceleyip değerli fikirleri ve önerilerini açıkça benimle paylaşan sevgili jüri üyelerim Prof. Dr. Pınar ANAPA SABAN ve Doç. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN'a, yüksek lisans sürecimin her aşamasını titizlikle takip edip bana yol göstermek için çabalayan babam Sami Yılmaz GÜVENDİREN'e, her türlü desteği vererek hep daha ilerisini düşünmem için beni motive eden, tezimi yazarken yardımlarıyla beni rahatlatan can suyum Uğurcan BİLGİN'e ve en önemlisi, ihtiyacım olduğu her anda yardımını ve değerli bilgilerini benden esirgemeyen, tezi bitirmemde büyük emeği ve desteği olan sevgili danışmanım Prof. Dr. Tangül KABAEL'e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Gamze Nur Güvendiren

ESKİŞEHİR 2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

09/07/2019

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Gamze Nur Güvendiren

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

GÖRSELLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM : National Council of Teachers of Mathematics

F : Fahrenheit

C : Celsius

1. GİRİŞ

Matematik öğrenme sürecinin önemli aşamalarından olan aritmetikten cebire geçiş ortaokul yıllarına denk gelir. Literatür, cebirsel düşünmenin geliştiği bu sürecin öğrenciler için güçlük kaynağı olduğunu ortaya koymaktadır. Cebirsel düşünme; öğrencilerin matematiksel fikirleri belirli örneklerden genelleştirdiği, ispatlayarak genellemeleri kurduğu, bunları giderek formal ve yaşa uygun yollarla ifade ettiği bir süreçtir (Blanton ve Kaput, 2005). Genelleştirerek muhakeme yapabilmek ve amaçlı genellemeye yönelik simgeleştirme süreçleri, cebirsel düşünmenin merkezini oluşturmaktadır (Kaput, 2008). Öğrenciler için güçlük oluşturan aritmetikten cebire geçiş sürecinde cebirsel düşünmenin gelişimi pek çok matematiksel düşünme ve muhakeme biçimi ile desteklenmektedir. Bunlardan önemli üçü; niceliksel muhakeme, kovaryasyonel düşünme ve fonksiyonel düşünmedir.

Matematik eğitiminde niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmenin cebirsel düşünmeyi desteklediği ortak savunu haline gelmiştir. Literatürde; niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmenin cebirsel düşünmeyi desteklediğini belirten çalışmalar bulunmaktadır. Örneğin; niceliksel muhakeme; olguların ölçülebilen özellikleri olan nicelikler arasında ilişki kurabilme, akıl yürütebilme ve problem çözme becerisidir (Thompson, 1988) ve aritmetik ile cebir arasında köprü görevi görmektedir (Smith ve Thompson, 2007). Cebirsel düşünmenin gelişimi de nicelikler arasındaki ilişkiler üzerine kurulmuştur ve “değişken” kavramının kazanımıyla bu ilişkiler cebirsel düşünmenin her basamağında yer almaktadır. Kaput (2008) cebirsel düşünmeyi “genelleştirilmiş aritmetik” ve “fonksiyonel düşünme” şeklinde gruplayarak matematiksel düşünme becerilerini ilişkilendirmiştir. Genelleştirilmiş aritmetik, aritmetiğin genellenmesi; fonksiyonel düşünme ise fonksiyonel ilişkilerin genellenmesidir. Fonksiyonel düşünme sürecinde de birbirine bağlı olarak değişen nicelikler arasındaki fonksiyonel ilişkiler genellenerek bu ilişkiler kelime, sembol, tablo veya grafiklerle ifade edilmektedir (Blanton vd., 2011).

Kovaryasyonel düşünme, literatüre daha yeni girmiş olan bir matematiksel düşünme biçimidir. Kovaryasyonel düşünme, değeri bilinmeyen ve birbirine bağlı olarak değişen değişkenlerin görüntüsünü eş zamanlı olarak zihinde tutmaktır (Carlson, Larsen ve Jacobs, 2001) ve Thompson (1990) kovaryasyonel düşünme ile niceliksel muhakeme arasında güçlü bir bağ olduğunu savunmaktadır. Sürecinde bağımsız ve bağımlı değişkenler arasında ilişkiler kurulduğundan, kovaryasyonel düşünme fonksiyonel düşünme ile de ilişkilendirilebilir. Ayrıca cebirsel, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmelerin gelişiminde, nicelik ve değişkenler arasında ilişkilerin kurularak genelleme yapılmasında ve cebirsel stratejilerin kullanılmasında; niceliksel muhakemenin önemi literatürde vurgulanmaktadır (Ellis, 2011; Smith ve Thompson, 2007; Blanton ve Kaput, 2004).

Niceliksel muhakeme, cebirsel, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmelerin ayrı ayrı incelendiği veya bu muhakeme ve düşünme biçimlerinin bazılarının ilişkisinin kurulduğu çalışmalar literatürde bulunmasına karşın, bunların tümünü ilişkilendirerek bu ilişkinin nasıl olduğunu ortaya koymayı amaçlayan herhangi bir çalışmaya rastlanmamaktadır. Bu çalışmada altıncı sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünmeyle birlikte niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmelerine ve varsa bu düşünme biçimleri arasındaki ilişkiye odaklanılmıştır.

1.1. Niceliksel Muhakeme

Aritmetik, öğrencilerin eğitim hayatının başından itibaren ilgilendikleri sayılar ve sayısal yöntemlerdir. Matematik Dersi Ortaokul Öğretim Programı’na göre (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018) K-8 düzeyi, aritmetik ağırlıklı olsa da öğrenciler altıncı sınıfın ikinci döneminde “cebir” ile tanışırlar ve artık sayıların yerini semboller, sayısal yöntemlerin yerini sembolik yöntemler alır. Ortaokul düzeyine denk gelen bu dönemde öğrencilerin cebirsel düşünmelerinin gelişmesinde önemli bir katkısı olan muhakeme biçimi ise niceliksel muhakemedir. Niceliksel muhakemenin aritmetikten cebire geçişte köprü olarak görülüp cebirsel düşünme için temel oluşturduğu ifade edilebilir (Ellis, 2007).

Smith ve Thompson’a göre (2007) ise nicelik; nesnelerin ve olguların ölçülebilen özellikleridir ve onları nicelik yapan bizim ölçebilme kapasitemizdir. Nicelikler iki gruba ayrılır (Thompson, 1988): Yaygın (extensive) nicelikler ve pekiştirmeli (intensive) nicelikler:

- Yaygın (extensive) nicelikler; mutlak birimler halinde ölçülebilir. Örneğin; boy uzunluğu, iki nokta arasındaki mesafe, bir cismin ağırlığı düşünüldüğünde uzunluk, mesafe ve ağırlık kavramları birer yaygın niceliktir.

- Pekiştirmeli (intensive) nicelikler ise iki niceliğin oranı şeklinde oluşan niceliklerdir. Örneğin; basınç, hız, yoğunluk vb. farklı iki niceliğin birbirine oranlanmasıyla elde edilen pekiştirmeli niceliklerdir.

Thompson'a (1988) göre, nicelikler arasında ilişki kurabilme, akıl yürütebilme ve problem çözebilme becerisi ise niceliksel muhakemedir. Niceliksel muhakeme bireyin bir durumu algılaması, algıladığı durum ile ilgili nicelikleri oluşturması, oluşturulan nicelikler arasında ilişki kurması gibi zihinsel eylemleri içermekle birlikte verilen durumun niceliksel yapı oluşturacak şekilde analiz etmesini sağlamaktadır (Moore, Carlson ve Oehrtman, 2009). Ellis'e (2007) göre öğrenciler niceliksel muhakeme sürecinde nicelikler ve ilişkileri hakkında çalışırlar. Zihinsel eylemlerden kaynaklanan niceliksel yapılar, öğrencileri anlamlı formüller, hesaplamalar ve grafikler geliştirmede destekleyebilir (Moore, 2010).

Niceliksel muhakeme sürecinde; problem bağlamındaki nicelikler belirlenip bu nicelikler arasında ilişkiler kurularak *nicelleştirme* süreci başlar. Sonuca ulaşmak için gerekli olan *niceliksel işlem* zihinsel olarak seçilir (Thompson, 1990). Niceliksel muhakeme "aritmetik" ile tanımlanmamalıdır. Niceliksel işlemler yapılırken eğer bir sayısal değere ulaşılacaksa aritmetik işlemler gerekebilir (Thompson, 1988). Niceliksel işlemler, daha önceden tasarlanmış bir veya daha fazla nicelikle ilişkili olarak yeni bir niceliğin tasarlandığı kavramsal işlemlerdir (Ellis, 2007). Bu işlemler aritmetiksel olarak niceliklere uygulanarak problem bağlamında istenen sayısal *değer*e ulaşılır (Thompson, 1990). Günlük hayattaki bazı durumlarda farklı nicelikler farklı birime sahip olduğu için nicelikler arası ilişkiler kolay bir şekilde kurulamayabilir. Ancak problem bağlamında birimler de yer aldığında nicelikler ile birimlerini koordine etmek, birimler arası dönüşümler yapmak gerekmektedir (Kabael ve Akın, 2016a). Bazı problem durumlarında ise yaygın (extensive) nicelikler ve birimleri arasındaki ilişkiler kurulup bu nicelikler oranlanarak pekiştirmeli (intensive) nicelikler oluşturulur.

Niceliksel muhakeme ile nicelikler arasındaki genel ilişkileri temsil etme öğrencilerin kavramsal gelişimini destekler ve aritmetikten cebire geçişte cebirsel sözel problemleri çözme sürecinde anlamlı bir araç olarak kullanmasını sağlamaktadır (Smith ve Thompson, 2007). Bu nedenlerden dolayı niceliksel muhakeme becerisi hem aritmetikten cebire geçişte hem de problem çözme sürecinde öğrencilerin matematiksel becerilerinin gelişimi açısından oldukça önemlidir (Kabael ve Akın, 2016a).

1.2. Cebirsel Düşünme

Matematik dünyası öncelikle sayılar ve sayısal işlemler (aritmetik) dünyası ve daha sonra semboller ve sembolik prosedürler (cebir) dünyasından oluşmaktadır (Smith ve Thompson, 2007). Öğrenciler eğitim hayatının başlangıcından itibaren sayılarla aritmetiksel işlemler (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) yaparak aritmetiksel düşünürler ve bilinen sayılar yardımıyla bilinmeyen değerlere ulaşırlar. Ancak ortaokul döneminde hayatlarına cebir girdiğinde, sayılarla birlikte harfler, semboller, cebirsel ifadeler, denklemler ve eşitliklerle tanışırlar.

Cebir, Matematik Dersi Ortaokul Öğretim Programı'na göre (MEB, 2018) altıncı sınıfın ikinci döneminde başlamaktadır. "Cebir" öğrenme alanına göre;

> Cebir öğrenme alanına ilişkin kazanımlar ilk olarak altıncı sınıfta yer almaktadır. Bu sınıf seviyesinde öğrencilerden sayı örüntülerinde istenilen terimi bulmaları, cebirsel ifadeleri anlamlandırmaları hedeflenmektedir. Yedinci sınıfta iki alt öğrenme alanı vardır: cebirsel ifadeler ile eşitlik ve denklem. Bu sınıf düzeyinde öğrencilerin cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerini yapmaları, eşitlik kavramını anlamaları ve birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri ve ilgili problemleri çözmeleri beklenmektedir. Sekizinci sınıfta Cebir öğrenme alanına çok daha geniş yer verilmektedir. Bu seviyede cebirsel ifadeler ve özdeşlikler, doğrusal denklemler, eşitsizlikler konuları işlenmektedir. Öğrencilerin cebirsel ifadeleri ve özdeşlikleri anlamaları ve cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırmaları beklenmektedir. Bunlara ek olarak iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin incelenmesi ve denklem çözümleri yer almaktadır. Ortaokul cebir konuları bir bilinmeyenli eşitsizliklerin incelenmesi ile sona ermektedir (MEB, 2018).

Usiskin'e (1995) göre cebirin değerinin aritmetik kadar açık olmadığı görülmektedir. Cebirin değeri, onu nerede ve nasıl kullanılacağını bilmeyenler için genellikle gizli kalmaktadır. Günlük yaşam problemlerinde cebir kullanabilme disiplininin dünyada nasıl işe yaradığını ortaya çıkarmak için birçok araştırma yapılmaktadır. Cebir bilgisi olmadan (Usiskin, 1995);

- Birçok iş yapmaktan ve iş alabilecek atılımlar yapmaktan kaçınabilir,
- Hayatın bazı kısımlarında kontrolü kaybedip bizler için bir şeyler yapmasını bekleyerek başkalarına güvenmek zorunda kalabilir,
- Finansal ve sağlam olmayan kararlar verebilir,
- Kimya, fizik, yer bilimleri, ekonomi, işletme, psikoloji ve diğer pek çok alanda tartışılan birçok fikri anlamayabiliriz.

Cebirin okuma, yazma ve aritmetik ile birçok ortak noktası vardır. Eğer matematiksel olarak bir işlem bir kez yapılacaksa muhtemelen cebire değil yalnızca aritmetiğe başvurulur. Ancak matematiksel olarak aynı işlemin sürekli yapılması gereken bir süreç varsa, bu süreci açıklamak için cebir çok basit bir dil sağlamaktadır (Usiskin, 1995). Örneğin; kesirlerin çarpımı kuralı anadilimizde;

"İki kesrin çarpımında kesirlerin payları çarpılır, çarpımın payı elde edilir. Kesirlerin paydaları çarpılır, çarpımın paydası elde edilir." şeklindedir.

Tek bir örnek verilirse;

$$\frac{3}{4} . \frac{1}{5} = \frac{3}{20} \text{ elde edilir.}$$

Cebir diliyle ise bu kural kısa ve pratik hale getirilerek;

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} \text{ halini alır.}$$

Bir başka örnekte ise Fahrenheit (F) ve Celsius (C) sıcaklık birimleri arasında oluşturulmuş

$$F=\frac{9}{5}.C + 32 \tag{1.1}$$

bağıntısına göre; istediğimiz her Fahrenheit sıcaklığına bağlı olarak Celsius sıcaklığını, her Celsius sıcaklık için ise Fahrenheit sıcaklığını hesaplayabiliriz. Görüldüğü gibi cebir, kalıpları anlamlandırdığımız basit ve pratik bir genelleme dilidir (Usiskin, 1995).

Cebirde düşüncelerin sembollerle ifade edilmesi sürecinin ilk adımı olarak dilin önemi büyüktür. Ayrıca denklem çözme ve denklemlerle kelime problemlerinin temsil edilmesi vb. durumlarda bilinmeyenleri ifade etmek için için harflerin kullanımı ve sayısal kalıpların ve formüllerin genellenmesi ve/veya sayısal örüntülerin genellenmesi ve genel sonucunun ifade edilmesi vb. durumların ifade edilmesinde harflerin kullanımı oldukça önemlidir (Kieran ve Chalouh, 1992).

Cebir, matematiğin en önemli 'bekçisi' olarak nitelendirilmektedir (Cai, Ng ve Moyer, 2011). Öğrencilerin hem sınıf içi matematiksel gelişimleri hem de sınıf dışında gelecekleri için cebir oldukça önemlidir (Deal, 2015). Çünkü cebir öğrencilerin günlük yaşamda karşılarına çıkan problemlerin çözümüne ulaşmalarında önemli bir matematik dalıdır. Berg'e (2012) göre cebir, günümüzde genel sayısal ilişkileri ve matematiksel yapıları simgeleyen ve bu yapılarda faaliyet gösteren matematiğin bir parçası olarak görülmektedir. Sayıların ve niceliklerin temel alınarak genelleme yapılması ve bu genellemelerin açıkça ve sistematik olarak ifade edilmesi cebirin merkezini oluşturur

(Kaput, 2008). Cebir, sayı sistemleri hakkında genellemeleri ifade etmek için pratik bir notasyon sağlar (Bastable ve Schifter, 2017).

Dede'ye (2004) göre önemli bir konumda olan cebir ve cebir öğretiminin temelinde değişken kavramı yatmaktadır. Değişken; cebirsel ifadelerde, denklemlerde, eşitliklerde, eşitsizliklerde ve formüllerde sayıların yerine kullanılan sembollerdir. Aritmetiğin temel kavramı "sayı" iken cebir ve bütün yüksek matematiğin temeli "değişken" kavramıdır. Sayılar, kümeler üzerindeki işlemlerin tanımlarını özetleme imkanı verirken; değişkenler, kümeler arasındaki ilişkileri tanımlama imkanı verir. Değişkenler genelleme yapmak için temel araçlardır. Genel çıkarımlar yapmak, genel işlemleri karakterize etmek, matematiksel sorunların genelliğini araştırmak ve hızlı bir şekilde değişik durumlardaki konumlarını belirlemek için kullanılırlar. Cebirde, denklemlerin çözümünde bilinmeyenleri temsil etmek için ve genel çözümlerin ifade edilmesinde değişkenleri temsil etmek için harfler kullanılır. Kısacası, cebirsel semboller matematik yapabilmek için çok önemlidir. Matematik eğitiminde değişkenler hakkında farklı sınıflandırmalar yapılmaktadır (Dede, 2004; Berg, 2012; Blanton vd., 2015). Bu sınıflandırmalara göre cebirde kullanılan harfli ifadeler 'bilinmeyen' ve 'sabit' anlamının yanında 'değişken' olarak kullanılır (Dede, 2004; Berg, 2012) ve farklı görevleri vardır (Blanton vd., 2015):

- Cebirsel ifadeler ve fonksiyon kurallarında olduğu gibi *değişen nicelikler* görevinde (y=3x-16 eşitliğinde x bağımsız y ise x'e bağımlı olarak değişen niceliktir),
- Temel özelliklerin temsilinde olduğu gibi *genelleştirilmiş sayılarda* (A ve B herhangi iki sayı olmak üzere çarpma işleminin değişme özelliği A.B=B.A şeklinde genellenebilir),
- Sınıflandırma ve fonksiyonlarda *parametre* görevindedir.
  x=a.cost
  y=b.sint. ('t' parametre, 'a' ve 'b' sabit, 'x've 'y' ise değişen nicelikler görevindedir.)

Küchemann (aktaran Berg, 2012) ise değişkenleri altı farklı sınıfa ayırmıştır:

- Değer Verilen Harfler; 3+2x=11 eşitliğinde x bu görevdedir. Öğrenciler x'i 4 ve 5 arasında bir sayı olarak bulurlar. Bu değer manipüle edilemez, tektir.

- Harf Kullanılmayan Değişkenler; öğrenciler herhangi bir harfli ifade kullanmadan cebirsel soruları cevaplayabilirler.
- Nesne Yerine Kullanılan Harfler; bir nesne bir harfle temsil edilir. (a ‘bir elma’ olmak üzere, 6.a’nın anlamı ‘6 tane elma’ demektir.)
- Özel Bilinmeyenler Olarak Kullanılan Harfler; öğrenciler hiçbiri bilinmese bile harfli ifadelerden birine bir değer atayabilirler. (R=S+T ve R+S+T=30 ise R=15 tir.)
- Sayıların Genellenmesi için Kullanılan Harfler; aritmetiksel işlemlerin ve/veya özelliklerin genellenmesi için kullanılır. (a, b ve c herhangi üç reel sayı olmak üzere toplama işleminin birleşme özelliği a+(b+c)=(a+b)+c olarak genellenebilir.)
- Değişken Olarak Kullanılan Harfler; cebirsel ifadelerde veya eşitliklerde kullanılan harfli ifadeler mümkün olan değerleri aldığında, cebirsel ifadelerin ve eşitliklerin değeri de değişir. (Y=3K eşitliği ve K+3 cebirsel ifadelerinde K değeri değişik değerler aldığında Y değişkeni ve K+3 cebirsel ifadesi de değişir.)

Cebir, aritmetiksel düşünme ve niceliksel muhakemeden daha farklı düşünme becerileri gerektirmektedir. Cebirsel düşünme, ilköğretim matematiğinin fikirleri ve kavramları üzerine kurulmuştur. Bu fikirler giderek karmaşıklaşan sorunları çözmek için kullanılır (Windsor ve Norton, 2011). Esas olarak, cebirsel düşünme, kişinin niceliksel ilişkileri temsil etme yeteneğini içerir (Morehouse, 2007). Cebirsel düşünmenin gelişimi, nicelikler ve nicelikler arası ilişkiler üzerine kurulmuştur. Erken öğrenme dönemlerinde kelimeler aracılığıyla temsil edilen nicelikler ve bu nicelikler arasındaki muhakeme yapma becerisi; ileriki dönemlerde değişken kavramının kazanımıyla cebirsel düşünmenin her basamağında yer almaktadır (Kabael ve Tanışlı, 2010). Cebirsel düşünme ya da akıl yürütme, sayı ve hesaplama ile deneyimlerden genellemeler oluşturmayı, bu fikirleri anlamlı bir sembol sistemi kullanarak biçimlendirmeyi, örüntü ve fonksiyon kavramlarını keşfetmeyi içerir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2010). Genelleştirerek muhakeme yapabilme ve amaçlı genellemeye yönelik simgeleştirme süreçleri, cebirsel düşünmenin merkezini oluşturur (Kaput, 2008).

Blanton ve Kaput (2005) cebirsel düşünmeyi, öğrencilerin matematiksel fikirleri belirli örneklerden genelleştirdiği, ispatlayarak bu genellemeleri kurduğu, bunları giderek formal ve yaşa uygun yollarla ifade ettiği bir süreç olarak ele almaktadır. Örneğin, öğrenciler belirli bir gruptaki olası tüm el sıkışmaların toplam sayısını tanımladıkları zaman cebirsel düşünme becerilerini kullanırlar. Keyfi büyüklükteki bir grup için genelleme geliştirir ve ifade ederler. Öğrencilerin tecrübe seviyesine bağlı olarak genellemeler kelimelerle veya sembollerle ifade edilebilir. Bu örnekteki genelleme, gruptaki kişi sayısı ile el sıkışmaların toplam miktarı arasındaki ilişkiye dayalı örüntü yardımıyla yapılır. Benzer şekilde, öğrenciler özel durumların sistematik analizlerine dayanarak bir sayı sisteminin özelliklerini tanıdıklarında, örneğin ardışık tek sayıların toplamını genelleştirip ifade ettiğinde de cebirsel düşünmeyi kullanırlar.

Öğrenciler cebir ile ortaokula kadar tanışmasalar bile erken yaşlarda cebirsel düşünmeye başlarlar. Cebir öncesinin çok önemli olduğu düşünülen iki yönü vardır (Kieran ve Chalouh, 1992): i. sayıları temsil eden harflerin kullanımı, ii. hem harf hem de sayı kullanımı ile sembolize edilen matematiksel yöntemlerin farkındalığı. Erken cebir dönemindeki genelleme becerileri, tüm cebirsel düşünme sürecinin kalbidir. Ancak öğrencilerin erken yaşlarda cebirsel düşünme becerilerinin kazandırılması için uygulanan öğretim programı ve öğretim yöntemlerinin de önemi büyüktür. Genel olarak öğrencilere aritmetik ve cebir arasında açık bağlantılar kurma fırsatı verilmemektedir (Kieran ve Chalouh, 1992). Cebir öncesi dönemlerde harfli ifade haricindeki semboller kullanılarak, eşittir (=) işaretinin önemine vurgu yapılarak, sayı ve şekil örüntüleri ile yakın ve ileri adımlara genellenmesi için çalışılarak, öğrenciler cebirsel düşünmeye teşvik edilebilir.

1.3. Fonksiyonel Düşünme

Matematik, Scandura tarafından (1971) üç kategoriye ayrılmıştır (aktaran Warren ve Cooper, 2005):

i) Şeyler -*things*- (sayılar, şekiller, değişkenler)
ii) İlişkiler (Şeyler arasındaki ilişkiler)
iii) Dönüşümler (Şeylerin değişim ve dönüşümleri)

Matematiğin gücü ise örüntüler ve genellemelerin yol açtığı ilişkiler ve dönüşümlerde yatmaktadır (Warren ve Cooper, 2005).

Matematiğin en önemli ve yaygın kavramlarından biri fonksiyonlardır. Ortaöğretim düzeyindeki öğrenciler aniden ve soyut olarak bu kavramla karşılaştıklarından genellikle sıkıntı çekerler. Aslında küçük çocuklar bile, yeterince somut bir şekilde sunulduğunda ve yeterince uzun bir zaman diliminde soyutlandığında fonksiyon kavramını anlamlandırabilirler (Willoughby, 1997). Bu anlayış; basit fonksiyon kurallarını içeren (bireyin yaşının, uzunluğunun bir fonksiyonu olarak oluşturma problemleri gibi) problemleri çözme yetenekleriyle ortaya konabilir (Willoughby, 1997). National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)'e göre (2000) öğrenciler erken yıllarda örüntüleri, ilişkileri ve fonksiyonları anlayabilirler, matematiksel durum ve yapıları cebirsel semboller kullanarak analiz ve temsil edebilirler, niceliksel ilişkileri anlamak ve temsil etmek için matematiksel modelleri kullanabilirler ve farklı bağlamlardaki değişimleri analiz edebilirler.

Fonksiyonel düşünme, Kaput'un (2008) belirttiği gibi cebirsel düşünmenin bir çeşididir ve gerçek yaşam durumlarını modellemek için önemli bir beceridir (Blanton ve Kaput, 2011). Fonksiyonel düşünme, iki (veya daha fazla) değişen nicelikler arasındaki ilişkiyi genellemeye yönlendiren temsilsel bir düşünme biçimidir (Smith, 2008). Fonksiyonel durumlarda bağımsız değişken(ler) ile bağımlı değişken arasında ilişkiyi kurabilmektir. Fonksiyonel düşünme (Blanton vd., 2011);

- Fonksiyonun davranışını analiz etmek için çeşitli temsilleri kullanarak (tablo, grafik, cebirsel, resim, sözel temsil) muhakeme etme,
- Birbirine bağlı olarak değişen nicelikler arasındaki ilişkileri genelleme,
- Bu ilişkileri kelime, sembol, tablo veya grafiklerle ifade etmektir.

"Fonksiyon" kavramı MEB Ortaöğretim Matematik Öğretim Programı'na (2018) göre 'Sayılar ve Cebir' öğrenme alanında 10. sınıfta öğretilmeye başlanmaktadır. Ancak fonksiyonel düşünmenin gelişimi ortaöğretim ve üniversite düzeyleri ile sınırlandırılamamaktadır. Cebirsel düşünme ile desteklenerek gelişen fonksiyonel düşünmenin ilerlemesi, ilkokul düzeyi kadar erken yıllarda başlamaktadır (Kabael ve Barak, 2017). Erken dönemden itibaren örüntüleri, ilişkileri ve fonksiyonları anlayabilme kapasitesi öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerini göstermektedir (Blanton ve Kaput, 2011).

Fonksiyonel düşünme yardımıyla matematiksel ilişkilerin genellenmesi, bu ilişkilerin temsili, ispatlanması ve ilişkiler hakkında akıl yürütülmesinin erken cebirsel düşünme pratikleri arasında önemli bir bağlantı vardır. Bu bağlantı ilköğretim düzeyinde "fonksiyonların" önemini güvence altına almaya destek olmaktadır (Blanton vd., 2015). Fonksiyonel düşünme aşağıdaki süreçleri içermektedir (Blanton vd., 2015):

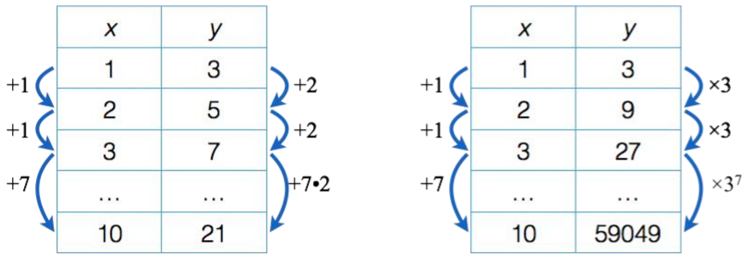
a) Eşzamanlı değişen nicelikler arasındaki ilişkileri genellemek,
b) Doğal dil, değişkenler, tablolar ve grafiklerle bu ilişkileri temsil ve ispat etmek,
c) Problem bağlamındaki fonksiyonel davranışı anlamak ve tahmin etmek için bu genelleştirilmiş temsillerle akıcı bir şekilde akıl yürütmek.

Fonksiyonel düşünme, işlemler arasındaki ilişkilerin, özellikle ters ilişkinin anlaşılmasına da yardımcı olur (eğer benim sayım 2 artırılsa ve şu anda 8 ise, orijinal sayım ne idi? şeklindeki örnekler öğrencilere yönlendirilerek). Bu durum, sonraki aşamalarda öğrencilerin çeşitli işlemler arasında fonksiyonel ilişkiler kurmalarını ve erken yaşlarda hem varsayım hem de ispat yapabilmelerine yardımcı olur (Warren ve Cooper, 2015).

Örüntüler, fonksiyon kavramına bağlılığı açısından hem çok zengin hem de geniş kapsamlı örnekler içerir. Örüntülerdeki ilişkileri temsil etmek için çok çeşitli sembol sistemleri: tablolar, grafikler, fonksiyon makineleri gibi pedagojik sistemler kullanılabilir (Kaput, 2008). Blanton ve Kaput (2011), öğrencilerin örüntülerin bağımsız (girdi) ve bağımsız (çıktı) değişkenleri arasında fonksiyonel ilişkiler kurularak genellenmesi gerektiğini savunmaktadırlar. Matematik öğretimi sürecinde örüntüler arasında kurulan bu ilişkiler, erken basamaklarda değişken kullanmadan ileri adımlara kadar incelenir ve daha sonraki basamaklarda değişken kullanılarak genel terimi buldurma şeklinde sürdürülür. Bu ilişkiler, adım sayısı ile örüntünün o adımındaki teriminin ilişkilendirilmesi bağlamında bir bağımsız (girdi) ve bir bağımlı (çıktı) değişken arasındaki ilişki olarak düşünüldüğünde fonksiyonel bir ilişkidir (Kabael ve Tanışlı, 2010).

1.4. Kovaryasyonel Düşünme

Kovaryasyonel düşünme, 1980lerin sonunda 1990ların başında ortaya çıkan bir yaklaşımdır (Thompson ve Carlson, 2017). Kovaryasyon, matematik eğitimcileri tarafından farklı şekillerde tanımlanmıştır. Confrey ve Smith'e göre (1994, 1995) kovaryasyon, birbirini izleyen değerleri arasında hareket eden bir değişkeni ona bağlı olan diğer değişkenin ardışık değerleri ile koordine etmektir. Şekil 1.4.1'de Confrey ve Smith'in (1994,1995) kovaryasyon yaklaşımına iki örnek verilmiştir (Thompson ve Carlson, 2017):



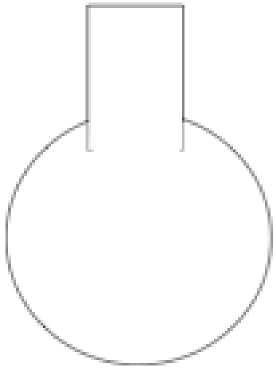
Şekil 1.4.1. *Bir değişken değişirken diğer değişkendeki değişimi koordine etmek ile ilgili oluşturulmuş iki örnek (Thompson ve Carlson, 2017)*

Confrey ve Smith'in (1994) kovaryasyon yaklaşımı, girdi kolonundaki değişkenlerin değişimine göre çıktı kolonundaki değişkenlerin değişimini başarılı bir şekilde göstermektedir. Ancak bu yaklaşım önemli bir noktaya değinmemektedir:

Tablolardaki girdilerin ara değerlerinde çıktılar nasıl değişmektedir?

Thompson (1990) ise kovaryasyonel düşünme ile niceliksel muhakeme arasında güçlü bir bağ olduğunu savunmaktadır. Niceliksel muhakeme bir problem durumundaki nicelikleri oluşturduktan sonra birden fazla nicelik arasında ilişkileri kurma becerisi olduğundan (Thompson, 1990), kovaryasyonel düşünmede de değeri bilinmeyen niceliklerin eş zamanlı değişimleri arasında ilişki kurulmaktadır. Saldanha ve Thompson'a (1998) göre kovaryasyonel düşünme, iki niceliğin değerlerinin eşzamanlı değişiminin görüntüsünü akılda tutmaktır. Bu durum, iki niceliğin koordine edilmesini gerektirir. Bir niceliğin değişimi anlık ve sürekli olarak gerçekleşirken diğer nicelik de farklı bir değere sahip olacaktır. Böylece Confrey ve Smith'in (1994) kovaryasyon yaklaşımına büyük katkılarda bulunulmuştur.

Kovaryasyonel düşünmeye daha ayrıntılı olarak değinen Carlson, Larsen ve Jacobs'a göre (2001) kovaryasyonel düşünme sürecinde *değeri bilinmeyen* değişkenlerin *eşzamanlı* koordine edilebilmesi çok önemlidir. Yani bir problem bağlamındaki bağımsız değişkenlerin değişimi ile bağımsız değişkenlere bağlı olarak değişen bağımlı değişkenin değişimi eşzamanlı olarak zihinde canlandırılmalıdır (Carlson, Larsen ve Jacobs, 2001). Bir başka deyişle x bağımsız değişken olmak üzere; f(x)=y türündeki fonksiyonel durumlar düşünüldüğünde $\mathrm{x_k} \rightarrow \mathrm{x_{k+1}}$ iken $\mathrm{y_k} \rightarrow \mathrm{y_{k+1}}$ değişimi eşzamanlı koordine edilmelidir. Benzer şekilde x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere f(x,y)=z türündeki fonksiyonel durumlarda $\mathrm{x_k} \rightarrow \mathrm{x_{k+1}}$ ve $\mathrm{y_k} \rightarrow \mathrm{y_{k+1}}$ iken $z_k \rightarrow z_{k+1}$ değişimi eşzamanlı olarak koordine edilmelidir. Bu durum pek çok araştırmada kullanılan "Şişe Problemi" ile örneklendirilirse:



Şekil 1.4.2. *Carlson (1998) kullandığı şişe probleminin görseli*

Şişe Problemi: Şekil 1.4.2'deki şekle sahip bir boş şişeye, musluktan su doldurulduğunu varsayınız. Şişe dolarken şişedeki suyun hacmi-su yüksekliğinin grafiğini oluşturunuz.

Şişedeki su dolarken, şişedeki suyun hacmi arttıkça şişedeki suyun yüksekliği de artacaktır. Ancak bu artış şişenin şeklindeki değişime göre farklılık gösterecektir. Bu fonksiyonel durumda hacim-yükseklik grafiği oluşturulurken birden fazla değişkenin sayısal değerini bilmeksizin değişimi zihinde eşzamanlı olarak canlandırılmalıdır:

- Su doldurulma anında şişedeki suyun hacmi (bağımsız değişken),
- Şişenin şekli (bağımsız değişken),
- Hacim ve şişenin şekline göre şişedeki suyun yüksekliği (bağımlı değişken).

Herhangi aritmetiksel işlem yapmadan, sadece şişeye su doldurulurken, şişedeki suyun hacmine ve şişenin şekline göre düşünüldüğünde "Boş şişeye su eklendikçe şişe ortasına kadar genişlediğinden suyun yüksekliği giderek azalarak artacaktır. Bir başka deyişle suyun yüksekliği artsa şişe genişlediğinden bu artış birim hacimde daha azalan miktarlarda olacaktır. Şişenin ortasından boyun kısmına kadar daraldığından suyun yüksekliği giderek artarak artacaktır. Bir başka deyişle suyun yüksekliği artsa da şişe daraldığından bu artış birim hacimde daha artan miktarlarda olacaktır. Şişenin boyun kısmından bitimine kadar şişe dümdüz olduğundan, tamamen dolana kadar suyun yüksekliği sabit olarak artacaktır." yorumu yapıldığında tüm değişkenlerin eşzamanlı olarak koordine edildiği açıkça görülmektedir.

Kovaryasyonel düşünürken nokta bazlı değil süreç bazlı düşünülmelidir. Çünkü şişe probleminde de görüldüğü üzere fonksiyonel durum her ne kadar sayısal nicelikler verilmiş olmasa bile bir süreçtir ve bağımsız değişkenlerin en küçük aralıklarına kadar, hatta anlık muhakeme yapılmalıdır (Carlson, 2002).

Carlson, Larsen ve Jacobs, (2001) kovaryasyonel düşünme sürecinde fonksiyonel durumları kartezyen koordinat sisteminde temsil ederken zihinde oluşan zihinsel eylemleri beş farklı kategoride sıralamış ve "Kovaryasyon Çerçevesi"ni oluşturmuşlardır. Carlson vd. (2002) bu teorik çerçeveyi daha da geliştirerek "Kovaryasyonel Düşünme Düzeyleri"ni oluşturmuşlardır. Bu çerçevelerde öğrencilerin fonksiyonel durumlarla karşılaştıklarında davranışına göre zihinsel eylemleri, bu zihinsel eylemlere göre ise kovaryasyonel düşünme düzeyleri saptanmaktadır.

Kovaryasyonel düşünme süreci için başka teorik çerçeveler de oluşturulmuştur. Castillo- Garsow (2010); 'chunky' ve 'smooth' kovaryasyon kavramlarını öne sürerek ortalama değişim oranı ve anlık değişim oranına başka bir pencereden bakmıştır. Castillo-Garsow, Johnson ve Moore (2013) belirttiği gibi 'chunky' kovaryasyon, bağımsız değişkenlerdeki alt aralıklar için bağımlı değişkendeki değişimi koordine etmek demektir. 'Chunky' kovaryasyonel düşünme becerisinde sahip olanlar aralıklar ne kadar küçük olursa olsun her zaman bağımsız değişkenin iki değer arasındaki değişimini düşünür. 'Smooth' kovaryasyon ise bağımsız değişkenler ile bağımlı değişken arasındaki eşzamanlı koordinasyonu tüm anlar için sağlamak ve tüm fonksiyonel süreci zihinde canlandırabilmektir. Bu iki kovaryasyonel düşünme biçimini ayırt edebilmemiz için aşağıdaki örneği verebiliriz:

> Bir filmde bir topun hızla atıldığını ve kağıttan bir duvarı yırtıp geçtiğini izleyelim. Bizler izlerken topun hareket sürecinde duvarı yırttığı 'an'a ve topun ilerlediği her 'an' a tanık oluruz. Her anın akıcı ve kesintisiz bir şekilde görülmesi ve zihinde canlandırılması 'smooth' kovaryasyondur. Bir de bu filmin çekildiği kamerada görüntünün her saniyesinin belli sayıda parçalara böldüğümüzü varsayalım. Bu parçalar ne kadar artarsa artsın yine de iki nicelik arasındadır. Bu görüntüleri peş peşe gören birisi her 'an'a tanık olmak yerine hep iki değer arasındaki zaman dilimine tanık olacağından topun kağıttan duvarı yırtıp geçtiği o 'an'ı fark etmeyebilir. Bu durum ise 'chunky' kovaryasyonel düşünmeye örnektir (Castillo-Garsow, Johnson ve Moore, 2013).

Araştırmacılar, niceliksel muhakemenin ve kovaryasyonel düşünmenin, öğrencilerin değişim oranı ve fonksiyon gibi matematiksel fikirlerinin gelişimi için önemli olduğunu, aynı zamanda kovaryasyonel olarak akıl yürütmenin öğrencilerin niceliklerin büyüklüklerini karşılaştırıp görüntüler oluşturma becerilerini geliştirmelerinde çok önemli olduğunu da tespit etmişlerdir. Özellikle bu görüntüler öğrencilerin çarpımsal nesneler inşa etme fırsatları yaratmaktadır (Stevens vd., 2017).

1.5. İlişkili Literatür Taraması

1.5.1. Niceliksel muhakeme ile ilgili yapılan çalışmalar

Niceliksel muhakeme aritmetikten cebire geçiş sürecinde nicelikler arasındaki ilişkilerin kurulmasında çok önemli bir muhakeme biçimi olarak kabul edilmektedir ve erken yaşlardan itibaren öğrencilerde cebirsel düşünme becerileri niceliksel muhakeme ile desteklenerek gelişmektedir. Bu öneminden dolayı matematik eğitimi alanında niceliksel muhakemenin konu edinildiği pek çok çalışma bulunmaktadır. Thompson (1990, 1993, 1994), çalışmalarında karmaşık yapılı toplamsal problemlere ve günlük yaşam problemlerine yer vererek bunların çözümünde nicelikler arasında ilişkiler kurulurken; niceliksel işlemlerin ve niceliksel muhakemenin önemini vurgulamıştır. Niceliksel muhakemeleri zayıf öğrenciler aritmetiğe yönelerek nicelikler için doğru niceliksel işlemleri seçememişlerdir.

Literatür incelendiğinde, niceliksel muhakemenin aritmetiksel ve cebirsel düşünme biçimleri arasındaki önemine ve kovaryasyonel düşünme ile ilişkisine vurgu yapılmıştır. Thompson (1988), sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel problemleri çözme süreçlerini incelemiştir. Smith ve Thompson (2007) K-8 düzeyindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçişteki muhakeme becerilerini araştırmışlardır. Akkan, Baki ve Çakıroğlu (2012) yaptıkları çalışmada ortaokul öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş sürecindeki öğrencilerin problem çözme sırasında kullandığı stratejileri incelemişlerdir. Ortaokul öğrencilerini iki farklı gruba ayırıp öğretim deneyi tasarlayarak genelleme becerilerini incelemeyi amaçlayan Ellis (2007) ise bu incelemeyi öğrencilerin niceliksel muhakeme becerilerini dikkate alarak yapmıştır. Ellis (2011) bir diğer çalışmasında cebirsel düşünmenin öneminden ve erken dönemlerde küçük öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri inşa etmelerinin önemine değinerek ortaokul öğrencilerinin lineer ve kuadratik fonksiyonel durumlardaki nicelikler arasında ilişki kurma becerilerini araştırmış, Koedinger ve Nathan (2004) yaptıkları araştırmada cebire yeni başlayan öğrencilerin gerçek yaşam problemlerini temsil ederken, performanslarında ve performanslarının altında yatan bilişsel süreçlerde niceliksel muhakemenin önemini incelemişlerdir. Kabael ve Akın (2016a) çalışmasında yedinci sınıf öğrencilerinin bir cebirsel sözel problemin çözümünde kullandıkları problem çözme stratejileri ve niceliksel muhakeme becerilerini incelemişlerdir. Niceliksel muhakeme aritmetikten cebire geçişte bir köprü görevi gördüğünden, niceliksel muhakeme becerileri gelişmiş olan öğrencilerin hem aritmetiksel hem de cebirsel stratejileri etkili kullanabilmesinde niceliksel muhakeme becerisinin önemini ortaya çıkarmıştır. Thompson (1990) ise sayısal değerleri verilmeyen nicelikler arasında eşzamanlı koordinasyon kurmayı gerektiren kovaryasyonel düşünme ile niceliksel muhakeme becerileri arasında güçlü bir bağ olduğunu vurgulamıştır.

Bu araştırmalar niceliksel muhakeme becerilerinin özellikle ortaokul seviyesindeki öğrencilere kazandırılmasının önemini göstermektedir. Çoğunlukla cebire geçme sürecindeki ortaokul öğrencileriyle yapılan çalışmalar göstermiştir ki, niceliksel muhakeme becerileri gelişmemiş olan öğrenciler günlük yaşam problemleri, hikaye problemleri gibi geniş akıl yürütme gerektiren problemleri irdeleyememişler, nicelikler arası ilişkiler kurmak yerine aritmetiğe yönelmişlerdir. Ancak niceliksel muhakeme becerileri gelişmiş olan öğrenciler, cebirsel problemlerde dahi sembolik temsillere ihtiyaç duymadan çözüme ulaşmışlardır.

Literatürdeki araştırmalarda da belirtildiği gibi, niceliksel muhakeme, öğrencilere erken yaştan itibaren kazandırılmalıdır. Çünkü bu muhakeme biçimi; nicelikler ve değişkenler arasında ilişkiler kurulduğundan, günlük yaşamda ve okulda karşılaşılan problem durumlarının doğru cevabına ulaşmada oldukça etkilidir. Aynı zamanda niceliksel muhakemenin aritmetiksel düşünme, cebirsel ve fonksiyonel düşünme gibi düşünme biçimlerine katkısı da literatürde incelenmiştir. Niceliksel muhakemenin diğer matematiksel düşünme ve muhakeme biçimleri ile ilişkilendirilerek bu ilişkinin nasıl olduğunun incelendiği çalışmaların; matematik eğitimi literatüründe önemli açıkları kapatacağı düşünülmektedir.

1.5.2. Cebirsel düşünme ile ilgili yapılan çalışmalar

Cebirsel düşünmenin temelinde örüntüler, örüntüler arasındaki ilişkiler, örüntüleri genelleme yer almaktadır ve küçük yaştaki öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri incelenirken en çok kullanılan yöntem, sayı ve şekil örüntüleriyle çalışmaktır (Smith, 2003). Matematik eğitimi araştırmacıları cebirsel düşünme üzerine çalışmışlar, özellikle erken dönemde öğrencilerin cebirsel düşünme ve genelleme yapabilme becerilerini araştırmışlardır. Birçok eğitimci ve araştırmacı matematikte, özellikle de cebirde, bütün kavramların örüntülere bağlı ve örüntülerin genellenmesi ile ilgili olduğunu, aynı zamanda örüntü ve örüntüleri genellemenin matematiğin özü olduğunu belirtmektedirler (Yaman ve Umay, 2013). Bu yüzden araştırmaların çoğunda sayılar ve nicelikler ile aritmetiğin genelleştirilmesi üzerinde durulmuştur (Carraher vd., 2006). Daha sonra cebirsel bir dilde ifade edebilecekleri genellemelerini küçük yaştaki çocuklar işlemleri temsil eden günlük dil, şemalar ve hikayeleştirme bağlamlarını kullanarak yapmaktadırlar (Bastable ve Schifter, 2017).

Hernandez (2010) beşinci sınıf öğrencilerinin hem şekil örüntüsü hem de sözel örüntü problemleriyle doğrusal ve kuadratik ilişkileri genelleme, Apsari (2015) beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülerde doğrusal ve kuadratik ilişkileri genelleme, Blanton vd. (2015) altı yaş grubu öğrencilerinin doğrusal ilişkiler içeren problem durumlarını genelleme, Berg (2012) ikinci ve üçüncü sınıf öğrencilerinin elemanları açıkça verilmiş sayı örüntüleri ve sayı örüntüsü problemlerini temsil edip genelleme, Carraher vd. (2006) dokuz-on yaş grubu öğrencilerinin cebirsel düşünmeye yönelik problemleri genelleme, Carraher, Martinez ve Schliemann (2008) üçüncü sınıf öğrencilerinin doğrusal ilişki örüntü problemlerini genelleme amaçlı araştırmalar yapmışlardır. Yapılan araştırmaların genel sonucuna göre küçük yaştaki öğrenciler sayı ve şekil örüntülerini çoğunlukla yakın adımlara kadar ilerletebilmektedir. Aynı zamanda genel olarak öğrencilerin değişken kavramı ile ilgili algılarında eksiklikler olduğu görülmüştür (Girit ve Akyüz, 2016). Ancak güçlü cebirsel düşünme becerilerine sahip olan öğrenciler, örüntüleri uzak adımlara kadar tahmin edip, bu örüntüleri gerek sembollerle gerek sözel olarak genelleyebilmişlerdir. Radford, (2006, 2010) sekizinci ve dokuzuncu sınıf öğrencileriyle yaptığı çalışmalarında doğrusal fonksiyonel ilişkiler içeren şekil örüntülerini şekil (görsel) üzerinden analiz ederek ileri adımlarını tahmin etme ve genelleme becerilerini incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmalarının sonuçlarına göre güçlü cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler belirli bir şekil örüntüsünün görseli üzerinden farklı stratejilerle kurallar üreterek genellemelerini ana dillerinde ve sembolik olarak ifade edebilmişlerdir.

Windsor ve Norton (2015), yedinci sınıf öğrencisiyle yaptıkları çalışmada; cebirsel düşünmenin belirli yönlerini kolaylaştıran ve cebirsel düşünmeye teşvik eden bir problem çözme yaklaşımı kullanmanın etkinliğini araştırmayı, aynı zamanda cebirsel düşünmenin daha gelişmiş ve daha derin bir kuramsal anlayışını ve ilkokul bağlamında nasıl geliştirilebileceğini ortaya koymayı amaçlamışlardır. Çalışmanın sonuçlarına göre; öğrenciler problem bağlamlarında örüntü ve genelleme arayışlarında materyaller, diyagram modelleri, tablolar ve grafikler kullanarak bu temsiller aracılığıyla cebirsel notasyonun anlamlı bir şekilde oluşturulmasında problem çözme yaklaşımı yardımcı olmuştur. Bu yaklaşım, öğrencilerin cebiri daha anlamlı kavramsallaştırmasını sağlayabilecek düşünme biçimlerini güçlendirmiştir.

Matematik öğretmen adayları ve öğretmenlerle yapılan çalışmalarda ise (Yeşildere ve Akkoç, 2011; Tanışlı ve Köse, 2013; Zazkis ve Liljedahl, 2002) öğretim deneyleri uygulanarak katılımcıların lineer ve lineer olmayan şekil örüntülerini genelleme becerileri incelenmiştir. Blanton ve Kaput (2005) yaptıkları çalışmada öğretmenlerin mevcut cebirsel düşünme becerileri ile öğrencilerine öğretim yapmaları ve öğrencilere uygulanacak öğretim deneyi ile öğretmenlerin cebirsel düşünme becerilerinin ölçülmesi amaçlanmıştır. Baş, Erbaş ve Çetinkaya (2011) yaptıkları araştırmada dokuzuncu sınıf matematik öğretmenlerinin öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgilerini ölçmeyi amaçlamıştır. Yapılan çalışmalar dikkate alındığında, öğretmen adaylarının örüntüleri genellemede öğrenciler kadar eksikliklerinin olduğu, öğretmenlerin de öğrencilerin örüntüleri genellemedeki cebirsel düşünme yapılarına ilişkin beklentilerinin istenilen düzeyde olmadığı dikkati çekmektedir (Tanışlı ve Köse, 2013).

Öğrencilerin özellikle ilkokul ve ortaokul matematiğinde nicelikler ve değişkenler arası ilişkilerin kurularak bu ilişkilerin genellenmesinde ve simgeleştirilmesinde cebirsel düşünmenin erken yaşlarda kazandırılmasının önemi literatürde kanıtlanmıştır. Cebirsel düşünme beraberinde pek çok matematiksel düşünme biçimi ile desteklenerek gelişmektedir. Bu sebeple cebirsel düşünme şemsiyesinin altındaki diğer düşünme ve muhakeme biçimlerinin birlikte desteklenerek incelenmesinin, matematik eğitimi literatüründe önemli açıkları kapatacağı düşünülmektedir.

1.5.3. Fonksiyonel düşünme ile ilgili yapılan çalışmalar

Blanton ve Kaput (2004)'a göre ise cebirsel düşünmenin aldığı formlardan birisi de fonksiyonel düşünmedir. Matematik eğitimi araştırmacıları özellikle erken dönemdeki öğrencilerin cebirsel düşünmelerini, dolayısıyla fonksiyonel düşünmelerini örüntüler yardımıyla araştırmışlardır.

Pinto ve Canadas (2017), sekiz-dokuz yaş grubu öğrencilerinin fonksiyonel düşünmelerine odaklandığı çalışmasında bir öğretim deneyi uygulamıştır. Payne (2012) ise yaşları yedi ve 10 arasında değişen ilkokul öğrencilerine fonksiyonel düşünme becerilerini ölçmek amacıyla öğretim deneyi uygulamıştır. Stephens vd., (2012) öğrencilerin özyinelemeli desenlemeden benzeşen ilişkilere fonksiyonel düşünmelerini geliştirmek amacıyla yaklaşık 300 öğrenciden oluşan 10 sınıfa (dört tane üçüncü sınıf, dört tane dördüncü sınıf ve iki tane beşinci sınıf) bir öğretim deneyi uygulamıştır. Genel olarak öğretim deneylerinde öğrencilerin temsiller arası geçiş yapabilmesine, şekil örüntülerinin düzenini bulup genelleyebilme becerisine, girdi-çıktı tablosu kullanabilmesine, grafikleri kullanabilmesi ve yorumlayabilmesine odaklanılmıştır. Çalışmaların genel sonucuna göre öğrenciler fonksiyonel düşünebilmişler, koordine edilmiş nicelikler arasındaki ilişkilere odaklanabilmişlerdir. Öğrencilerin örüntüdeki bir öğenin yapısına odaklanmalarına teşvik etmiş ve benzeşen bir yaklaşım kullanarak bir fonksiyonel ilişkiyi genellemeyi kavramsallaştırmaya yardımcı olmuştur. Tanışlı (2011) çalışmasında beşinci sınıftaki öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerini lineer fonksiyon tabloları aracılığı ile incelemeyi amaçlamıştır. Dört tane beşinci sınıf öğrencisi ile yapılan görev temelli etkinliklere dayalı görüşmelerle verilerini toplamıştır. Bu çalışmanın sonuçları öğrencilerin akıl yürütmeleri hakkında bilgiler vermiştir. Öğrencilerin lineer fonksiyon tablolarında çalışırken kovaryasyonel olarak düşündükleri saptanmıştır. Daha ileri düzey olarak benzeşen ilişkiler kurabilip bu ilişkileri genelleyebildikleri de görülmüştür. Blanton ve Kaput (2004, 2011), beş yıllık süren bir çalışmanın sonunda çok küçük öğrencilerin t-tablosu yardımı ile fonksiyonel düşünebildiklerini göstermişlerdir. Anaokulu öğrencileri bu tablolardaki verileri genelleyerek fonksiyonun genel kuralına ulaşmışlardır. Çalışmalar sırasında öğrenciler, 'değişken' (x,y vb.) kavramından önce, nicelikleri tanımlamak için semboller kullanmışlardır (problem durumlarındaki niceliklerin baş harflerini ifade eden P, H, n harfleri gibi).

Wilkie ve Clarke (2014) ise yaptıkları çalışmada 222 öğrenciye bir yıllık periyotta 10 öğretmeninin yardımıyla kendi sınıflarında öğretim deneyleri uygulanmıştır. Sonuç olarak bu çalışma ile öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinin geliştirilmesinde eş zamanlı olarak stratejilerin bir karışımını kullanabildikleri keşfedilmiştir. Birbirinden farklı stratejilere olan ilgileri fark edilmiş ve öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinin gelişmesinde bu fırsatların değeri vurgulanmıştır. Warren ve Cooper (2005) altı-yedi yaşlarındaki ikinci sınıf öğrencilerine "Fonksiyon Dersleri" adında öğretim deneyleri yaptırmışlardır. Bu öğretim deneylerinin amacı; küçük çocukları fonksiyonel yaklaşımlarla değişimleri fark etmeyi ve ters işlem sürecine sokarak geri dönüşüm yapabilmeyi teşvik etmektir. Araştırmanın sonuçlarına göre her ne kadar başarıda farklılıklar olsa da ikinci sınıftaki çocukların erken fonksiyon aktivitelerine sahip oldukları görülmüştür. Çocuklar “sayı” dışındaki niteliklere sahip olan durumlarda değişim ve değişimin tersini inceleyebilmişlerdir.

MEB Matematik Öğretim Programı’na (2018) göre “fonksiyon” kavramı ile öğrenciler ortaöğretim düzeyinde karşılaşmış olsalar bile, literatürde, aralarında fonksiyonel ilişkiler bulunan nicelikler ve değişkenlerin değişimleri daha erken yaşlarda keşfetmeye başladıkları ve bu ilişkileri genelleyebildikleri görülmektedir. Fonksiyonel düşünme, cebirsel düşünmenin bir çeşidi olduğundan (Kaput, 2008); cebirsel düşünme ile fonksiyonel düşünmeye çoğu araştırmada ilişkilendirilerek yer verilmektedir. İlkokul ve özellikle ortaokul döneminde aritmetiğin ve fonksiyonel durumların genellenmesinin incelenerek diğer düşünme ve muhakeme biçimleriyle ilişkilendirilmesinin, matematik eğitimi literatüründe önemli açıkları kapatacağı düşünülmektedir.

1.5.4. Kovaryasyonel düşünme ile ilgili yapılan çalışmalar

Kovaryasyonel düşünme; niceliksel muhakeme, fonksiyonel ve cebirsel düşünmeye göre daha sonra keşfedilmesine rağmen; matematik eğitimi alanında kovaryasyonel düşünmeyle ilgili pek çok çalışmaya rastlanmaktadır (Carlson, 1998; Carlson, Larsen ve Jacobs, 2001; Carlson vd., 2002; Castillo-Garsow, 2010; Carlson, Larsen ve Lesh, 2003; Silva vd., 2017; Johnson, 2013; Koklu, 2007; Moore ve Bowling, 2008; Moore, Carlson ve Oerthman, 2009). Çalışmaların örneklemini genellikle üniversite öğrencileri, matematik öğretmen adayları ve nadiren de olsa ortaokul ve ortaöğretim öğrencileri oluşturmaktadır. Bu çalışmalarda katılımcıların sayısal değerleri verilmemiş fonksiyonel durumlarda bağımsız ve bağımlı değişkenler arasında eşzamanlı ilişkiler kurma süreçlerinin incelenmesi, değişim oranı kavramını anlamlandırmada kovaryasyonel düşünmenin önemi, değişkenlerin değişim sürecini grafiğe dökmeleri ve verilmiş grafikleri yorumlama becerilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçlar doğrultusunda uygulanan kovaryasyonel muhakeme problemleri ve öğretim deneylerinden toplanan veriler, kovaryasyonel düşünme ile ilgili literaürde oluşturulmuş çerçeveler (Carlson vd., 2002; Castillo-Garsow, 2010) destek alınarak analiz edilmiştir.

Belirtilen araştırmaların genel sonuçlarına göre; üniversite öğrencileri ve matematik öğretmen adayları üniversite öğrencileri grafikleri nokta bazında yorumlayabilmiş, alt aralıklar hakkında yorum yaparken zorlanmışlardır. Girdi-çıktı arasındaki süreci genelleyememişlerdir (Carlson, 1998). Üniversite öğrencilerinin değişim oranı ile ilgili yorumlamalar ve grafik temsilinde dönüm noktasının anlamını ifade etmekte zorlanmışlardır. Analizler, öğrencilerin verilen durumların ve niceliklerin zihinsel bir görüntüsünü oluşturmaya yönelik az sayıda davranış sergilediğini ortaya koymaktadır (Moore ve Bowling, 2008). Çalışmaların önemli sonuçlarından bir diğeri ise öğrencilerin dinamik fonksiyonel durumlarını çoğunlukla statik (sabit) olarak düşünmüşler ve iki değişken arasındaki eşzamanlı değişimleri ayrı ayrı irdeledikleridir. Ezberlenmiş olan kurallar, formüller, konuyla ilgisi olmasa da öğrencilerin zihinlerindeki görüşler, fonksiyonel durumların yanlış yorumlanmasına yol açmıştır (Koklu, 2007).

Ortaokul öğrencileriyle yapılan çalışmalarda ise genellikle öğrencilerin sayısal olmayan nicelikler için düşünme becerilerini desteklemek ve niceliğin başka bir değişen nicelikle ilişkisinde nasıl bir değişime uğrayabileceğini gösteren tasvirler oluşturmak öğretim deneyleri tasarlanmıştır (Castillo-Garsow, 2010; Johnson, 2013). Araştırmaların genel sonuçlarına göre; öğrenciler, niceliklerin birbirine göre nasıl değiştiğini ancak sayısal hesaplamalar yaparak gösterebilmişlerdir. Öğrencilerin nicelikler arası kovaryasyonel ilişki kurmada sayısal olmayan akıl yürütmeler önemlidir. Öğrenciler (zaman içermeyen) kovaryant niceliklerin grafiklerini, zaman varmış gibi oluşturmuşlardır. Fonksiyon kavramı ve değişim oranı konusuyla karşılaşmamış ortaokul öğrencileri problem durumundaki bağımsız değişkendeki değişimi belirli sabit aralıklarda düşündüğünden, bağımlı değişkendeki değişimi 'chunky' kovaryasyon seviyesinde kalmıştır (Castillo-Garsow, 2010).

Çalışmalar limit, süreklilik vb. kavramları ile ilgili görevleri anlama ve tamamlamada kovaryasyonel düşünmenin temelde olduğunu ispatlamıştır (Carlson, Larsen ve Jacobs, 2001). Aynı zamanda değişim oranı, orantı, fonksiyonlar, doğrusal fonksiyonlar, üstel fonksiyonlar, logaritmik fonksiyonlar, rasyonel fonksiyonlar ve trigonometri konularına odaklanılan çalışmanların sonuçları öğrencilerin bir problem bağlamında kendi eşzamanlı niceliksel ilişki yapılarını oluşturmayı desteklemenin, formüller oluşturmadaki başarıları, çözüm ve grafikleri hakkında anlamlı açıklamalar sağlamaları açısından son derece değerli olabileceğini ve niceliksel muhakeme ile kovaryasyonel düşünmenin birbirinden bağımsız düşünülemeyeceğini göstermektedir (Moore, Carlson ve Oehrtman, 2009).

Matematik eğitimi literatüründe öğretmenlerin kovaryasyonel düşünmelerinin incelenmesine ilişkin çalışmalar da bulunmaktadır (Strom, 2006; Şen Zeytun, Çetinkaya ve Erbaş, 2010). Bu çalışmaların genel sonuçlarına göre; öğretmenler çalışmalarda ele alınan konuları (üstel fonksiyonlar, grafikler vb.) öğrencilerine sıklıkla öğretmelerine rağmen, değişkenler arasında koordinasyon kurmakta zorlanmışlardır. Araştırmaların bulguları, öğretmenlerin birtakım ciddi güçlüklere ve yanılgılara sahip olduğu ve fonksiyonel ilişkileri grafik olarak göstermekte ve yorumlamakta zorlandığını ortaya koymuştur. Ayrıca kovaryasyonel düşünme çerçevelerine göre öğretmenlerin kovaryasyonel düşünmeleri düşük düzeyde kalmıştır.

Modeller ve modelleme yaklaşımı, eğitimcilerin müfredat oluşturması için iyi tanımlanmış bir yapıya sahiptir. Bu müfredat faaliyetleri, öğrencileri durumları anlamaya teşvik etmek, kendi matematiksel yapılarını icat etmek ve genişletmek üzere tasarlanmıştır. Modelleme sonunda elde edilen öğrenci ürünleri, öğrencilerin mantığını ve kavram gelişimini izlemek için hem öğretmen hem de eğitimciler açısından oldukça önemlidir (Carlson, Larsen ve Lesh, 2003). Bu sebeple yapılan çalışmalarda öğretmen adaylarının dinamik fonksiyonel durumları modellemelerinde (Carlson, Larsen ve Lesh, 2003), değişim oranı ile ilgili etkinlikleri modellemelerinde (Silva vd., 2017), iki niceliğin eşzamanlı değişimini içeren durumları modellerken grafik oluşturma ve yorumlamalarında (Kertil, Çetinkaya ve Erbaş, 2014) kovaryasyonel düşünmelerinin etkisi araştırılmıştır. Çalışmaların genel sonuçlarına göre; kovaryasyonel düşünmeleri üst düzeyde olan öğretmen adayları bilgisayar tabanlı modellemeleri yapabilmişlerdir. Ancak kovaryasyonel düşünmeleri zayıf olan öğretmen adayları bir gerçek hayat durumunda iki değişken arasındaki değişim ilişkisini doğru ifade etmelerine rağmen bazen bunları grafiğe aktaramamışlardır. Bazı durumlarda ise; grafiği çizmelerine rağmen yorumlarken "bağımlı" ve "bağımsız" değişkenleri doğru ifade edememişlerdir.

Kartezyen koordinat sistemi dışındaki koordinat sistemlerindeki kovaryasyonel düşünmelerinin araştırıldığı çalışmalar vardır (Moore vd., 2013; Moore, Paoletti ve Musgrave, 2013). Ortaokul matematik öğretmen adayının problem durumlarını kutupsal koordinat sisteminde temsil edebilmesinin ve kartezyen koordinat sistemi ile kutupsal koordinat sistemi arasında geçişler yapabilmesinin, kovaryasyonel düşünme bağlamında incelenmiştir. Öğrenciler kartezyen koordinat sisteminden kutupsal koordinat sistemine geçtiklerinde, kovaryasyonel düşünmeleri, grafik ve formülün görsel özelliklerindeki farklılıklara rağmen aynı ilişkiyi ifade eden durumların anlaşılmasını sağlamıştır. Aynı fonksiyonel ilişkiyi farklı koordinat sistemleri ve farklı formüllerle temsil edebilme becerisi, kovaryasyonel düşünmeleri ile doğrudan ilişkilidir.

Literatürdeki çalışmaların bir kısmının, niceliksel muhakeme ile kovaryasyonel düşünme arasındaki bağın önemini vurguladığı; aynı zamanda kovaryasyonel düşünmeye yönelik çalışmalar incelendiğinde, katılımcıların büyük çoğunlukla ortaöğretim düzeyi öğrenciler, üniversite öğrencileri, öğretmen adayları ve öğretmenlerden oluştuğu görülmektedir. Ancak literatürde daha erken yaş grubundaki öğrencilerin kovaryasyonel düşünmelerini incelemek amaçlı çerçeveler de oluşturulmuştur. Ortaokul öğrencilerinin kovaryasyonel düşünmelerinin bu çerçevelerden yardım alınarak daha fazla incelenmesi ve ilişkili olarak geliştiği diğer matematiksel düşünme ve muhakeme biçimleriyle birlikte incelenmesinin matematik eğitimi literatüründe önemli açıkları kapatacağı düşünülmektedir.

1.6. Amaç

Çalışmada; altıncı sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünmeleri ile birlikte niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmeleri ile (varsa) bu düşünme biçimleri arasındaki ilişkilerin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu genel amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara cevap aranmaktadır:

1. Öğrencilerin niceliksel muhakemesi nasıldır?
2. Öğrencilerin fonksiyonel düşünmesi nasıldır?
3. Öğrencilerin cebirsel düşünmesi nasıldır?
4. Öğrencilerin kovaryasyonel düşünmesi nasıldır?
5. Öğrencilerin niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmeleri arasında ilişki varsa nasıldır?

1.7. Önem

Çalışmada aritmetikten cebire geçişte önemli bir sınıf düzeyi olan altıncı sınıftaki öğrencilerin, literatürde cebirsel düşünmeyi desteklediği ortaya konulan niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmelerinin, cebirsel düşünme ile birlikte inceleniyor olması ve aritmetikten cebire geçiş sürecinde bu muhakeme ve düşünme becerileri arasındaki ilişkinin nasıl olduğunu inceliyor olması dolayısıyla bu çalışmanın ortaokulda aritmetikten cebire geçiş için önemli ipuçları vereceği düşünülmektedir. Literatürde bu şekilde bir çalışmaya rastlanmamış olması ise çalışmanın özgün değerini oluşturmaktadır ve çalışmanın alan yazında önemli bir açığı kapatacağı düşünülmektedir.

1.8. Sınırlılıklar

Çalışmanın örneklemi Eskişehir'deki merkez ilçelerden farklı sosyo-ekonomik yapıya sahip üç ortaokulda öğrenim gören altıncı sınıf öğrencileri arasından seçilecek öğrencilerin cebirsel düşünmeleri ile birlikte niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmelerinin ve varsa aralarındaki ilişkinin incelenmesi ile sınırlı kalmıştır.

1.9. Sayıltılar

Çalışma sırasında açık uçlu problemleri çözme ve klinik görüşme sürecindeki dış etkenler, katılımcıların endişe, dikkatsizlik gibi durumları araştırma sürecini olumsuz bir biçimde etkilememiştir. Aynı zamanda klinik görüşmelerde katılımcılar doğal hallerini yansıtmışlardır. Klinik görüşmeler sırasında rahat davranarak problem çözüm sürecini ve zihinlerinden geçenleri görüşmeciye aktarabilmişlerdir.

1.10. Kuramsal Çerçeve

Çalışmada altıncı sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünmeyle birlikte niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmeleri ve (varsa) bunlar arasındaki ilişkilerinin incelenmesi amaçlandığından; bu amaca yönelik toplanan verilerin analizinde rehber olması amacıyla, matematik eğitimi literatüründeki niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünme ile ilgili oluşturulmuş sınıflandırmalar ve çerçevelerin düzeylerine ayrıntılı olarak aşağıda yer verilecektir.

Literatürdeki bazı araştırmalara göre (Thompson, 1990; Olive ve Çağlayan, 2008; Smith ve Thompson, 2007) niceliksel muhakeme becerisi aşamalardan oluşmaktadır. Farklı çalışmalardaki bu aşamalar Tablo 1.10.1.'deki gibi bir araya getirilebilir (Kabael ve Akın, 2016a):

Tablo 1.10.1. *Niceliksel muhakeme aşamaları çerçevesi*

Niceliksel Muhakeme Aşaması	**Özellikleri**
Niceliklerin Belirlenmesi	Problem bağlamındaki ölçülebilen özelliklerin, bir başka deyişle niceliklerin zihinsel farkındalığıdır.
Nicelikler Arasında İlişkilerin Kurulması	Belirlenen niceliklerin arasında doğru ilişkilerin kurulması, hangi niceliğin hangi nicelikle bağlantılı olduğunun saptanmasıdır.
Niceliksel İşlemler	Niceliklerin belirlendikten sonra zihinsel olarak işleme sokulması sürecidir. Doğru niceliksel

	işlemin seçilmesi ve uygulanması oldukça önemlidir.
Niceliksel Birim Koordinasyonu	Problem bağlamındaki niceliklerin birimini fark ederek, niceliğe ait sayısal değer ile niceliğin birimi arasındaki ilişkiyi keşfedebilmektir.
Niceliksel Birim Korunumu	Farklı nicelikleri ve bunların farklı birimleri arasında dönüşüm yaparak, bu nicelikleri tek bir birim cinsine göre bir bütün olarak ele almaktır. Öğrenci problem durumunda verilen iki ya da daha fazla farklı birime sahip nicelikleri koordine edip bir bütün olarak birleştirebildiğinde niceliksel birim korunumunu becerisini kullanmış olur. Böylece farklı nicelikleri ve bunların farklı birimleri arasındaki ilişkileri kullanarak bunları aynı birim cinsinden bir bütün olarak ifade edebilmektedir (Olive ve Çağlayan, 2007).

Thompson (1988, 1990), niceliksel işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlamıştır. Çalışmada toplanan verilerin analizinin kolaylaşması bakımından niceliksel işlemler üç gruba ayrılmıştır:

Toplamsal Niceliksel İşlemler

- Nicelikleri toplamsal olarak birleştirmek (Alp'in 16, Eren'in 22 tane oyun kartı vardır. İkisinin 38 tane oyun kartı vardır.)
- Nicelikleri toplamsal olarak karşılaştırmak (Uğur'un boyu 187 cm, Can'ın boyu ise 166 cm uzunluğundadır. Uğur, Can'dan 21 cm daha uzundur.)

Çarpımsal Niceliksel İşlemler

- Nicelikleri çarpımsal olarak birleştirmek (Kısa kenarı 10 br, uzun kenarı 12 br olan bir dikdörtgenin alanı 120 br^2 dir.)
- Nicelikleri çarpımsal olarak karşılaştırmak (Bilge'nin 200 TL'si, Sami'nin 400 TL'si vardır. Sami'nin parası Bilge'nin parasının 2 katıdır.)

Oran Niceliksel İşlemler

- Oranları oluşturmak (Pelin'in oyuncak bebek sayısı Setenay'ın oyuncak bebek sayısının 3 katı, Setenay'ın oyuncak bebek sayısı ise Zeynep'in oyuncak bebek sayısının 4 katıdır. Pelin'in 24 oyuncak bebeği varsa Setenay'ın 8 oyuncak bebeği olacaktır. Setenay'ın 8 oyuncak bebeği varsa Zeynep'in oyuncak bebek sayısı 2'dir.)

- Orantıları oluşturmak (1 Amerikan Doları 5,5 Türk Lirası, 1 Türk Lirası 7 İngiliz Sterlini olsun. Bu bilgilere göre 3 Amerikan Doları 16,5 Türk Lirası, 16,5 Türk Lirası ise 115,5 İngiliz Sterlinidir. Sonuç olarak 3 Amerikan Doları 115,5 İngiliz Sterlinidir.)
- Bir oranı genellemek (Sabit hızla giden bir aracın hızı her "an"da aynıdır.)
- Oranı örneklendirmek ('3 saat boyunca saatte 50 km gittim.' veya '6 km için, km başına 5 saat yolculuk yaptım.' (Thompson, 1990)).

Kaput'un oluşturduğu (2008) cebirsel düşünme sürecinde zihindeki cebirsel aktiviteler Tablo 1.10.2.'de belirtilmiştir.

Tablo 1.10.2. *Cebirsel düşünme sürecinde zihindeki cebirsel aktiviteler*

Zihindeki Cebirsel Aktiviteler	**Özellikleri**
Genelleştirilmiş Aritmetik	Aritmetik ve niceliksel muhakemeden yola çıkarak genellemeler oluşturmak, matematikçiler ve matematik eğitimcileri tarafından cebirin öncelikli yolu olarak gösterilmektedir. Bu aşama, aritmetik işlemlerin ve özelliklerin genellenmesi ve genel ilişkiler ve formlar hakkında muhakeme yapabilmeyi içerir (Kaput, 2008). Çoğunlukla aritmetiğin sembolik tarafı ile yoğunlaşmıştır. Öğrenciler cebirsel düşünmeyi genelleştirilmiş aritmetik aracılığıyla birkaç şekilde geliştirebilirler (Kaput, 2008): İlişkileri ve özellikleri keşfetme: Örneğin; a, b reel sayı olmak üzere a+b=b+a ilişkisini keşfetmek. Nicelikler arasında bir ilişki olarak eşitliği keşfetme: Kaput'a (2008) göre eşittir işareti, genel denkliklerin sonuçlarını ve işlemleri ayıran bir işarettir. Örneğin; 12+23=35 ifadesinde eşittir işaretinin görevi sol taraftaki işlemin sonucunu vermektir. 12+23= ♠+18 ifadesinde ise eşittir

	işaretinin görevi işlemleri ayırmaktır. Aritmetikten cebire geçişte bu işareti anlamlandırmak oldukça önemlidir. Değişkenler olarak sembolleri kullanma
Fonksiyonel Düşünme	Sayılardan oluşan iki veri kümesi arasındaki ilişkinin farkına varmak ve değişimleri belirlemek için örüntüleri analiz etmektir. Değişen nicelikler arasındaki ilişkinin genellenmesini temsil eden sistemlerden oluşur (Smith, 2008).

Smith (2008), erken dönemde öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerini saptamak için, örüntüler ve ilişkilerin analiz edilmesinde fonksiyonel düşünmeyi üç farklı kategoriye ayırmıştır. Oluşturulmuş fonksiyonel düşünme kategorileri Tablo 1.10.3.'de belirtilmiştir.

Tablo 1.10.3. *Fonksiyonel düşünme kategorileri*

Fonksiyonel Düşünme Kategorisi	**Özellikleri**
Özyinelemeli (Recursive) Desenleme	Bir örüntünün ardışık adımlardaki değerlerini bulma becerisidir. Örüntü yakın adımlara kadar genellenebilir. Adım sayısı (girdi) ile çıktı sayısı arasında bağlantı kurmak yerine sadece çıktı sayıları arasında bağlantı kurulur.
Örüntülerde Kovaryasyonel Düşünme	Fonksiyonel düşünürken girdi değerlerindeki değişimle çıktı değerlerindeki değişimin eş zamanlı olarak koordine edilmesidir. Örneğin; "Girdi değeri 1'er artarken çıktı değeri önce 3, sonra 5, sonra 7 artmış." yorumu örüntülerde kovaryasyonel düşünmeye örnektir.
Benzeşen (Correspondence) İlişkiler	Bir örüntüdeki adım sayısı (girdi) ile ona bağlı olarak değişen çıktı sayısı arasında bağlantı kurmaktır. Bu bağlantı örüntünün çok ileri adımlara kadar tahmin edilmesine yardımcı olmaktadır.

Thompson ve Carlson (2017), Castillo-Garsow (2010) ve Carlson vd.'nin (2002) oluşturduğu çerçeveleri temel alarak kovaryasyonel düşünmeye yönelik yeni bir çerçeve oluşturmuşlardır. Bu çerçevenin ayrıntıları Tablo 1.10.4.'de belirtilmiştir.

Tablo 1.10.4. *Kovaryasyonel düşünmenin başlıca seviyeleri çerçevesi*

Seviye	**Özellikleri**
Koordinasyon Yok	Kişi değişkenlerin birbirine göre değiştiğinin farkında değildir. Sadece bağımlı değişkenin veya sadece bağımsız değişkenin değişimlerine odaklanmaktadır.
Değerlerin Ön-koordinasyonu	Kişi bağımsız ve bağımlı değişkenlerin değerlerini zihinde canlandırmaya başlar. Ancak bu bilişsel faaliyetler eşzamanlı olmaz. Bağımsız (x)-bağımlı (y) değişkenler için (x,y) ikililerini oluşturmaz.
Değerlerin Bütün (Gross) Koordinasyonu	Kişi bağımsız değişken herhangi iki değeri aldığında, bağımlı değişkenin artanlığına, azalanlığına veya sabitliğine karar verebilir.
Değerlerin Koordinasyonu	Kişi bir değişkenle diğer değişkeni koordine edip (x,y) ikililerinin koleksiyonunu oluşturabilir.
Chunky Sürekli Kovaryasyon	Kişi eşzamanlı olarak bağımsız değişkendeki değişimi bağımsız değişkendeki birim değişimle koordine edebilir. Bu koordinasyon Castillo-Garsow, Johnson ve Moore (2013) tanımladığı chunky kovaryasyon şeklindedir.
Smooth Sürekli Kovaryasyon	Kişi eşzamanlı olarak bağımsız değişkenin değerindeki artışı veya azalışı bağımlı değişkenin değeriyle koordine ederek zihninde canlandırabilir. Bu koordinasyon Castillo-Garsow, Johnson ve Moore (2013) tanımladığı smooth kovaryasyon şeklindedir.

2. YÖNTEM

Matematik eğitimi alanında yapılan araştırmalarda genellikle katılımcıların matematiksel zihinsel eylemleri incelendiğinden nitel araştırma yaklaşımları benimsenmiştir. Nitel araştırma; gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Araştırmalarda kullanılan nitel yöntemlerin en önemli katkısı, araştırılan konuyu, ilgili bireylerin bakış açısından görebilmeye ve bu bakış açılarını oluşturan sosyal yapıyı ve süreçleri ortaya koymaya olanak vermesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Altıncı sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme ile birlikte niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmelerinin ve bu düşünme biçimleri arasındaki (varsa) ilişkinin incelenmesi amaçlandığı bu çalışmada da nitel veri toplama aracı olarak açık uçlu ölçme aracı ve klinik görüşme kullanılmıştır.

2.1. Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları ölçüt örneklem yöntemiyle seçilmiştir. Ölçüt örneklem bir amaçlı örneklem seçme çeşididir. Ölçüt örneklem seçimi örneklemin problemle ilgili olarak belirlenen niteliklere sahip kişiler, olaylar, nesneler ya da durumlardan oluşturulmasıdır (Büyüköztürk, 2012). Bu ölçüt veya ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da önceden hazırlanmış bir ölçüt listesi dikkate alınabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Çalışmanın katılımcıları Eskişehir ilinin merkez ilçelerindeki farklı sosyo-ekonomik yapıya sahip olarak bilinen üç ortaokuldan seçilmiştir. Okullardan biri özel okul, diğer ikisi ise biri sosyo-ekonomik düzeyi yüksek, diğeri ise düşük olarak bilinen çevrelerden seçilmiş devlet okullarıdır. Bu okulların her birindeki ortaokul matematik öğretmenleriyle görüşülmüş ve öğretmenlerin akademik başarılarını diğer öğrencilere göre nispeten iyi, orta ve zayıf olarak değerlendirdikleri çalışmaya gönüllü üçer tane altıncı sınıf öğrencisi çalışmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla ölçüt örnekleme yönteminin uygulanmasında kullanılmış ölçütler;

- Akademik başarı
- Gönüllülük
- Kayıtlı olunan okulun çevresindeki sosyo-ekonomik yapıdır.

Belirtilen ölçütlere göre ortaokulların sosyo-ekonomik düzeylerine göre seçilen katılımcıların akademik başarılarına göre dağımları Tablo 2.1.1.'de belirtilmiştir:

Ortaokul-1: Yüksek Sosyo-ekonomik Düzeydeki Okul

Ortaokul-2: Orta Sosyo-ekonomik Düzeydeki Okul

Ortaokul-3: Düşük Sosyo-ekonomik Düzeydeki Okul olmak üzere;

Tablo 2.1.1. *Katılımcıların çalışmada kullanılacak kod isimlerinin ortaokullara ve akademik başarılarına göre dağılımı*

	Akademik Başarı Düzeyi Düşük Öğrenciler	Akademik Başarı Düzeyi Orta Öğrenciler	Akademik Başarı Düzeyi Yüksek Öğrenciler
Ortaokul-1	Ö1	Ö2	Ö3
Ortaokul-2	Ö4	Ö5	Ö6
Ortaokul-3	Ö7	Ö8	Ö9

2.2. Verilerin Toplanması

Araştırmanın verileri açık uçlu problemlerden oluşan açık uçlu test ve klinik görüşme yolu ile toplanmıştır. Klinik görüşme yoluyla, deneyimler, tutumlar, düşünceler, niyetler, yorumlar, zihinsel algılar ve tepkiler gibi gözlemlenmeyeni anlamaya çalışırız. Bu süreçte, sorulan sorulara, karşı tarafın rahat, dürüst ve doğru bir şekilde tepkide bulunmasını sağlamak görüşmecinin temel görevidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Araştırmada değişkenler arasında ilişkiler içeren cebirsel, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmelerinin incelenmesi amaçlandığından veriler altıncı sınıfın bahar döneminin sonunda toplanmıştır. Her bir araştırmacıya görüşme öncesi açık uçlu test uygulanmış ve ardından katılımcının açık uçlu testte verdiği cevaplara ilişkin daha detayı bilgi almak için klinik görüşmeler yapılmıştır. Açık uçlu test uygulanırken katılımcılara standart bir süre verilmemiştir. Veri toplama süreleri katılımcılara bağlı olarak değişmektedir.

2.3. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmanın veri toplama araçları; açık uçlu problemlerden oluşan açık uçlu test ve klinik görüşmelerdir.

2.3.1. Açık uçlu testler

Araştırmanın açık uçlu testleri olan Veri toplama aracı-1 ve Veri toplama aracı-2, farklı zorluk seviyelerindeki açık uçlu problem durumlarını içermektedir (EK-1 ve EK-

2). Hazırlanan açık uçlu testtin kapsam geçerliği için bir alan uzmanından ve deneyimli bir öğretmenden görüş alınmıştır. Tablo 2.3.1.1.'de her bir problem ve incelemeyi amaçladığı matematiksel muhakeme ve düşünme biçimleri belirtilmiştir.

Tablo 2.3.1.1. *Açık uçlu problem çözme araçlarındaki problemler ile incelemeyi amaçladığı muhakeme ve düşünme biçimleri*

Problem	İncelenen Muhakeme ve Düşünme Biçimi
Veri Toplama Aracı-1 : 1. Problem, 2. Problem 3. Problem, 4. Problem 5. Problem, 6. Problem 7. Problem, 8. Problem	Niceliksel Muhakeme
Veri Toplama Aracı-1: 9. Problem, 10. Problem	Cebirsel Düşünme
Veri Toplama Aracı-1: 11. Problem	Fonksiyonel Düşünme
Veri Toplama Aracı-2: 1. Problem, 2. Problem 3. Problem, 4. Problem	Cebirsel Düşünme
Veri Toplama Aracı-2: 5. Problem, 6. Problem, 7. Problem	Kovaryasyonel Düşünme

Altıncı sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünmeleri ile birlikte niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmelerini incelemek amacıyla hazırlanan bu problemlerin içeriğine ayrı başlıklarda yer verilecektir.

2.3.1.1. Niceliksel muhakemeye yönelik açık uçlu problemler

Veri toplama aracı-1'de yer alan birinci problemde katılımcılardan öncelikle sütun grafiğindeki günler ve günlere karşılık gelen kişi sayısı niceliklerini belirleyip eşleştirmeleri ve kişi sayılarına göre haftanın günlerini karşılaştırıp toplamsal nicelikler arası ilişkiler kurarak toplamsal niceliksel işlemleri belirlemeleri beklenmektedir. İkinci problemde iki kişinin ayrı ayrı zamanlardaki yaşları ve bugünden birkaç yıl sonra bir zaman dilimindeki yaşları arasındaki çarpımsal ilişki verilmiştir. Katılımcılardan iki kişinin yaşları arasındaki ilişkiyi anlamlandırmaları, bu ilişkiye göre uygun toplamsal ve çarpımsal niceliksel işlemler seçerek kişilerden birinin şu andaki yaşına ulaşmaları beklenmektedir. Üçüncü problemde ise üç kişi arasında taş alışverişi yapılmaktadır. Problem bağlamında kişilere ait taş sayısı açıkça verilmemiş, sadece birbirlerinden aldıkları ve birbirlerine verdikleri taş sayıları belirtilmiştir. Katılımcılardan, alınan ve verilen taşların sayısı olan niceliklerin arasında ilişkiler kurup karşılaştırarak toplamsal niceliksel işlemleri belirlemeleri ve sadece bir kişinin taş sayısındaki farkı hesaplamaları beklenmektedir. Dördüncü problemde ise katılımcılar için yeni ve kritik bir konu olan tam sayılar yer almaktadır. Problem bağlamı mutlak değer, ondalık sayılar, birim dönüşümü gibi önemli konu alanlarını da içermektedir. Katılımcılardan bu konu alanlarında öğrendiklerini kullanarak nicelikler arasında ilişkiler kurmaları, kurdukları bu ilişkilere göre toplamsal ve çarpımsal niceliksel işlemleri belirleyebilmeleri ve hesapladıkları nicelikler ile birimlerini koordine etmeleri beklenmektedir.

Beşinci problemde bir fabrikada çalışan erkek ve kadın sayılarının oranı ve kadın sayısıyla erkek sayısı arasındaki fark nicelikleri verilmiştir. Katılımcılardan bu nicelikler arasında ilişkileri anlamlandırmaları, kurulan bu ilişkilerden hareketle oran niceliksel işlemleri belirleyebilmeleri ve istenen nicelikleri hesaplamaları beklenmektedir. Altıncı problem hem niceliksel işlemler hem de birimler bakımından diğer problemlere göre daha çeşitlidir. Katılımcılardan laboratuvarda tepkimeye giren ürünlerin miktarları ile tepkime süresi arasında ilişkiler kurmaları, bu ilişkilerden hareketle oran ve toplamsal niceliksel işlemleri belirleyerek istenen niceliklere ulaşmaları, nicelikler ile birimlerini koordine etmeleri beklenmektedir. Yedinci problem, katılımcıları hem demir paraların sayılarını hem de demir paraların değerlerini birlikte düşünmeye yönlendirmektedir. Katılımcılardan küçük ve büyük demir paraların oluşturduğu farklı sayılardaki grupların değerlerinden hareketle, demir paraların sayısı ile değerleri arasında ilişkiler kurmaları, toplamsal niceliksel işlemler yardımıyla bir küçük ve bir büyük demir paranın değerini ayrı ayrı hesaplamaları ve hesapladıkları nicelikler ile birimlerini koordine etmeleri beklenmektedir. Sekizinci problem bir hız problemidir. Matematik dersinin dışında Fen Bilgisi dersinde de "hız" kavramı ile karşılaşmış olan katılımcılardan bu kavramı ve birimini anlamlandırmaları, "alınan yol" ve "süre" nicelikleri arasında ilişkiler kurabilmeleri, oran ve çarpımsal niceliksel işlemleri belirleyip, niceliksel birim koordinasyonu ve korunumunu sağlaması beklenmektedir.

2.3.1.2. Cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye yönelik açık uçlu problemler

Veri toplama aracı-1'de yer alan ve cebirsel düşünmeye yönelik dokuzuncu problemde a,b,c herhangi üç Reel sayıyı temsil etmek üzere çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği yer almaktadır. Katılımcılardan a,b ve c harflerinin cebirsel olarak herhangi sayıları temsil ettiğini ve verilen eşitliğin dağılma özelliği olduğunu fark etmeleri beklenmektedir. Cebirsel düşünmeye yönelik 10. problem, eşittir (=) işaretinin önemine vurgu yapmaktadır. Katılımcılardan problemin çözüm sürecinde işlem önceliğinden faydalanarak eşittir işaretinin sol ve sağ tarafını eşitlemesi, eşitledikten sonra bilinmeyen "m" değerine ulaşması beklenmektedir. Cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye yönelik 11. problem ise şekil ve sayılarla açıkça gösterilmeyen bir sayı örüntüsü problemidir. Katılımcılardan problem bağlamına göre gizli sayı örüntüsünü ortaya çıkarmaları, bu örüntüye göre problemde istenenler hakkında yorum yapmaları, birbirine göre değişen durumları fark etmeleri, problemin öncülleri arasında ilişkiler kurarak genelleme yapmaları ve genellemelerini cebirsel olarak ifade etmeleri beklenmektedir.

Veri Toplama Aracı-2'nin cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye yönelik birinci probleminde bir şekil örüntüsünün ilk dört adımı verilmiştir. Verilen bu adımlara göre katılımcılardan öncüllerde belirtilen problemleri cevaplamaları, hem şekil hem de şekillerden ortaya çıkan sayı örüntüsü hakkında yorum yapmaları ve birbirine göre değişen durumları fark edebilmeleri beklenmektedir. Aslında bu örüntü çok ileri adımlara kadar genellenebilir olsa bile hazırbulunuşlukları ve cebirle yeni tanışıyor olması sebebiyle bu kuralı bulabilmesi katılımcılardan beklenmemektedir. Cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye yönelik ikinci problemde, kibrit çöplerinden üçgenler oluşturulmuştur. Bu üçgenler şekil örüntüsü ve dolayısıyla üçgen ve kibrit çöpü sayıları sayı örüntüsü oluşturmaktadır. Katılımcılardan sayı örüntüsü ve/veya şekil örüntüsü üzerinden problem bağlamında istenenleri yorumlamaları, örüntüyü ileriki adımlara kadar genellemeleri, birbirine göre değişen durumları fark edebilmeleri ve cebirsel ifadelerle bu genellemeyi temsil etmeleri beklenmektedir. Cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye yönelik üçüncü problemde problem bir şekil örüntüsünün ilk iki adımı verilmiştir. Cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye yönelik dördüncü problemde ise problem bağlamında bir şekil örüntüsünün ilk üç adımı verilmiştir. Katılımcılardan bu şekil örüntülerini yorumlayarak ileriki adımlara kadar devam ettirmeleri, birbirine göre değişen durumları fark edip genellemeleri ve buldukları kuralı cebirsel ifadelerle temsil etmeleri beklenmektedir.

2.3.1.3. Kovaryasyonel düşünmeye yönelik açık uçlu problemler

Veri toplama aracı-2'de yer alan beşinci problemde hareket halinde bir araç bir şehirden yola çıkıp (bir şehirden daha geçerek) başka bir şehre varacaktır. Katılımcılardan hiçbir sayısal değer verilmeden birbirine bağımlı olarak değişen iki değişken hakkında eş zamanlı olarak yorum yapmaları beklenmektedir. Altıncı problemde aynı hızda ve aynı miktarda su akan bir musluğun şişeyi doldurma süreci yer almaktadır. Katılımcılardan boş şişe dolana kadar birbirine bağlı değişen durumları sayısal değerler olmadan yorumlamaları ve yorumlarını problem bağlamında istenen şekilde grafiğe dökmeleri beklenmektedir. Yedinci problemde kare şeklindeki bir odada karşılıklı köşelerde duran iki kardeşin birbirlerine doğru yürümesi, birbirlerini geçmesi ve yine karşılıklı köşelerde durması süreçlerine yer verilmiştir. Katılımcılardan problem bağlamında belirtilen üç farklı durum için ayrı ayrı yorum yapmaları, birbirine göre değişen durumları sayısal değerlere başvurmadan değerlendirmeleri ve grafiğe dökmeleri beklenmektedir.

2.3.2. Klinik görüşmeler

Çalışmada öncelikle katılımcılara açık uçlu problemlerin bulunduğu açık uçlu test sunulmuş ve katılımcılardan problemleri çözmeleri istenmiştir. Daha sonra katılımcılarla derinlemesine klinik görüşmeler yapılarak, problem çözme sürecindeki zihinsel eylemlerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Katılımcıların sıkılmaması, zihinsel olarak yorulmaması için daha verimli veri toplamak amacıyla açık uçlu testi uygulatma ve klinik görüşmeler iki oturum halinde yapılmıştır. Veriler toplanırken çalışmanın amacına yönelik görüşme soruları yönlendirilmiştir. Toplanan verilerin kalıcılığının sağlanması açısından görüşmeler ses kaydına alınmıştır.

Veri toplama aracı-1 katılımcılara uygulandıktan sonra her bir katılımcıyla ayrı olarak klinik görüşmelerin birinci oturumu tamamlanmıştır. Birinci oturumdaki görüşmelerin süresi yaklaşık olarak 26-47 dakika arasındadır. İlk oturum bittikten sonra Veri toplama aracı-2 katılımcılara uygulanıp tekrar her bir katılımcıyla ayrı olarak klinik görüşmelerin ikinci oturumu tamamlanmıştır. İkinci oturumdaki görüşmelerin süresi de yaklaşık olarak 24-39 dakika arasında değişmiştir.

2.4. Veri Analizi

Katılımcılardan toplanmış olan veriler bir nitel analiz yöntemi olan içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. İçerik analizinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. Bu amaçla toplanan verilerin önce kavramsallaştırılması, daha sonra da ortaya çıkan kavramlara göre mantıklı bir biçimde düzenlenmesi ve buna göre veriyi açıklayan temaların saptanması gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Nitel araştırmada içerik analizinde veriler dört aşamada analiz edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2016):

- Verilerin kodlanması
- Temaların bulunması
- Kodların ve temaların düzenlenmesi
- Bulguların tanımlanması ve yorumlanması

Katılımcıların niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmelerinin incelenmesi ve (varsa) bunlar arasındaki ilişkilerin analiz edilmesi için, Tablo 1.10.1., Tablo 1.10.2., Tablo 1.10.3. ve Tablo 1.10.4.'de belirtilen çerçevelerin rehberliğinde bir kod-tema tablosu (Tablo 2.4.1.) oluşturulmuştur. Belirlenen bu kodlar bağlamında verilerin analizlerinin kodlama güvenirliği, iki katılımcının araştırmacı ve bir alan uzmanı tarafından yapmış oldukları analizler arasındaki tutarlılık ile sağlanmıştır. Araştırmacı ve alan uzmanının kodlamalarının büyük ölçüde tutarlı olduğu görülmüştür.

Tablo 2.4.1.'de belirtilecek kodların açıklaması aşağıdaki gibidir:

Sistematik olmayan deneme-yanılma yöntemi: Problem bağlamındaki nicelikler arasında ilişkiler kurmak yerine rasgele sayısal değerler vererek niceliklerin değerlerine ulaşma yöntemi.

Bar modeli: Nicelikler arasındaki ilişkilerin Bar modeli yöntemi yardımıyla kurulması.

Niceliksel kovaryasyonel düşünme: Problem bağlamındaki niceliklerin değişiminin eş zamanlı olarak değerlendirilmesi.

Bağımsız değişkene odak: Örüntülerde bağımsız değişkenin değişimi yok sayılarak yalnızca bağımlı değişkenin değişimine odaklanılması.

Örüntülerde eşlemeli fonksiyonel ilişkiler: Şekil örüntülerindeki bağımsız ve bağımlı değişkenleri belirleyip aralarında fonksiyonel ilişkiler kurma süreci.

Ana dilde genelleme: Bağımsız ve bağımlı değişkenler arasında kurulan ilişkilerin sembolik olarak değil, sözel genellerek ana dilde ifade edilmesidir.

Eşittir işaretinin "denge" anlamı: Eşittir işaretinin yalnızca "sol taraftaki işlemin sonucu" anlamında değil, "sağ kısım ile sol kısmı eşitleyip dengede tutan bir terazi" anlamında düşünülmesi.

Eşitlikler oluşturabilme (Nicelik): Problem bağlamlarındaki nicelikler arasında ilişkiler kurup uygun niceliksel işlemleri seçerek doğru eşitliklerin kurulabilmesi.

Eşitlikler oluşturabilme (Örüntü değişkenleri): Örüntülerdeki değişkenler arasında fonksiyonel ilişkiler kurarak doğru eşitliklerin kurulabilmesi.

Eşitlikler oluşturabilme (Gizli örüntü): Gizli sayı örüntüsündeki değişkenler arasında fonksiyonel ilişkiler kurarak doğru eşitliklerin kurulabilmesi.

Sembol atama (Nicelik): Çözüm sürecinde problem bağlamlarındaki niceliklere sembol (harf) atanarak cebirsel ifadelerin, denklemlerin oluşturulması ve çözülmesi.

Sembol atama (Örüntü değişkenleri): Şekil örüntülerini genelleyip bağımsız değişkene sembol (harf) atayarak bağımlı değişken ile arasındaki ilişkinin cebirsel olarak temsil edilmesi.

Sembol atama (Gizli örüntü): Gizli sayı örüntüsündeki bağımsız değişkene sembol (harf) atayarak bağımlı değişken ile arasındaki ilişkinin cebirsel olarak temsil edilmesi.

Tek değişkene odak: Problem bağlamındaki bağımsız veya bağımlı değişkenlerden yalnızca birindeki değişimine odaklanılmasıdır.

Bağımlı değişkenin yalnızca artanlığı/azalanlığı/sabitliği: Bağımsız değişken(ler) herhangi iki değeri aldığında, değişimde bazı faktörlerin göz ardı edilerek bağımlı değişkenin yalnızca artanlığı/azalanlığı/sabitliğine karar verilmesi.

Anlamlı grafik çizimi: Problem bağlamındaki değişkenler arasındaki tüm değişim sürecinin grafiğe dökülmesi.

Tablo 2.4.1. *Veri analizi amacıyla oluşturulan kod-tema tablosu*

Niceliksel Muhakeme	Fonksiyonel Düşünme	Cebirsel Düşünme	Kovaryasyonel Düşünme
Niceliklerin Belirlenmesi Nicelikler Arası İlişkiler: Toplamsal Çarpımsal Oran Sistematik olmayan deneme-yanılma yöntemi (Nicelikler Arası İlişkilerin Kullanılması) Bar modeli yöntemi (Nicelikler Arası İlişkilerin Kullanılması) Niceliksel İşlemler: Toplamsal Çarpımsal Oran Niceliklerde Birim Koordinasyonu: Toplamsal Çarpımsal Oran Niceliksel Birim Korunumu Niceliksel kovaryasyonel düşünme [Değerlerin Koordinasyonu (Niceliklerde)]	Bağımsız değişkene odak [Özyinelemeli (Recursive) Desenleme] Örüntüleri yalnızca yakın adımlara kadar ilerletmek (Özyinelemeli Desenleme ve Kovaryasyonel Düşünme) Örüntülerde eşlemeli fonksiyonel ilişkiler [Benzeşen (Correspondence) İlişkiler] Örüntü şekillerinin üzerinden anlamlı yorumlamalar [Benzeşen (Correspondence) İlişkiler] Ana dilde genelleme [Benzeşen (Correspondence) İlişkiler]	Dağılma özelliğinin farkındalığı (Genelleştirilmiş Aritmetik- İlişkileri ve özellikleri keşfetme) Problem bağlamındaki sembolleri (harfleri) anlamlandırma (Genelleştirilmiş Aritmetik-Değişkenler olarak sembollerin kullanılması) Eşittir işaretinin “denge” anlamı (Genelleştirilmiş Aritmetik- Nicelikler arasında ilişki olarak eşitliği keşfetmek) Eşitlikler oluşturabilme: Nicelikler Örüntü değişkenleri Gizli örüntü (Genelleştirilmiş Aritmetik- Nicelikler arasında ilişki olarak eşitliği keşfetmek) Sembol atama: Nicelikler Örüntü değişkenleri Gizli örüntü (Değişkenler olarak sembollerin kullanılması)	Tek değişkene odak (Koordinasyon Yok) Bağımlı değişkenin yalnızca artanlığı/azalanlığı/sabitliği [Değerlerin Bütün (Gross) Koordinasyonu] Değişkenlere rasgele sayısal değerler verilerek değerlerin koordine edilmesi: Sözel yorumlamalar Grafik (Değerlerin Ön Koordinasyonu) Değişkenlere sistematik sayısal değerler verilerek değerlerin koordine edilmesi: Sözel yorumlamalar Grafik (Değerlerin Koordinasyonu) Değişim sürecinde değişkenlerin eş zamanlı yorumlanması (Chunky ve Smooth Sürekli Kovaryasyon) Anlamlı grafik çizimi (Smooth Sürekli Kovaryasyon)

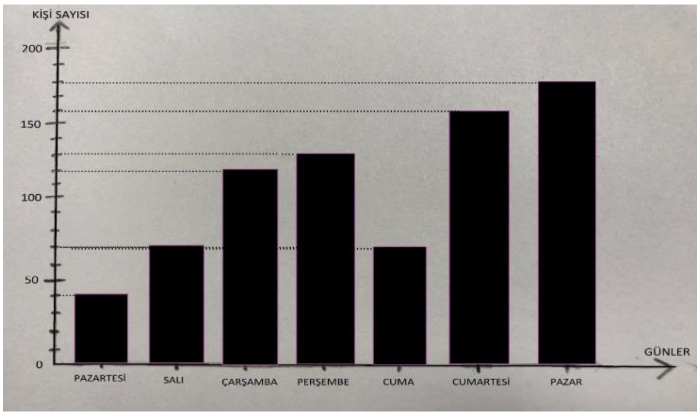
3. BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde Veri Toplama Aracı-1 ve Veri Toplama Aracı-2'de yer alan tüm problem durumlarında katılımcıların çözüm süreçlerine ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

3.1. Katılımcıların Niceliksel Muhakemeleri İle İlgili Bulgular ve Yorumlar

Veri Toplama Aracı-1'deki niceliksel muhakemeye yönelik problem durumlarında katılımcıların çözüm süreçlerine ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Veri Toplama Aracı-1'deki niceliksel muhakeme problemleri ve bulgular ayrı ayrı belirtilmiştir.

1.Problem: Bir alışveriş merkezindeki mağazaya belirli bir haftada her gün gelen müşterilerin kaydı tutulmuştur ve aşağıdaki sütun grafiği oluşturulmuştur.



a. Her gün için ayrı ayrı gelen müşteri sayısını belirtiniz.

b. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- Mağazaya en fazla hangi gün müşteri gelmiştir?
- Mağazaya en az hangi gün müşteri gelmiştir?
- En az müşteri gelen gündeki müşteri sayısıyla en fazla müşteri gelen gündeki müşteri sayısı arasındaki fark kaçtır?
- Hangi ardışık (peşpeşe) günlerde müşteri sayısındaki artış en azdır?
- Bir hafta boyunca mağazaya kaç kişi gelmiştir?

Şekil 3.1.1. *Veri Toplama Aracı-1'in birinci problemi*

Tüm katılımcılar a) öncülünü cevaplarken eşit aralıklarla bölünmüş olan sayıların hangi değere karşılık geldiğini hesaplayabilmiş ve her bir günün sütunlarını sayısal değerleri ile eşleştirebilmişlerdir.

Problemin b) öncülünün ilk iki seçeneğinde Ö1, Ö2, Ö3, Ö4 ve Ö7 en az ve en fazla müşteri gelen günü bulurken, a) öncülünde hesapladıkları sayı değerlerinden en küçük ve en büyük olanı seçerek, bu sayılara karşılık gelen günleri cevap olarak belirtmişlerdir. Ö5 ve Ö6 problem bağlamında verilen sütun grafiği görselinde en yüksek ve en alçak sütunu seçerek bu öncülü cevaplamışlardır. Ö8 ise hem sayısal değerleri hem de görseldeki sütunların yüksekliklerini karşılaştırarak problemi cevaplamıştır.

Problemin b) öncülünün üçüncü seçeneğinde de tüm katılımcılar ilk iki seçenekte hesapladıkları değerlerin farkını almışlardır. Ancak bir sonraki "Hangi ardışık (peş peşe) günlerde müşteri sayısındaki artış <u>en azdır</u>?" seçeneğinde Ö2 ve Ö8 haricindeki tüm katılımcılar ardışık günleri ayrı ayrı inceleyip farkın en az olduğu günleri bulabilmiştir. Ö2 ve Ö8 ise "artışın en az olması" durumunu anlamayarak önce azalışın en fazla olduğu ardışık iki günü seçmiş ancak Ö2 daha sonrasında hatasını fark ederek doğru cevaba ulaşmıştır.

G: Peki, hangi ardışık günlerde müşteri sayısındaki artış en azdır?

Ö2: Yani, Perşembe gününde ve Cuma günü arasında ki fark azaldığı için buradaki artış en azdır diye düşünerek Perşembe, Cuma dedim.

G: Perşembe ve Cuma günleri arasında artış var mı?

Ö2: Artış yok ama azalış var.

G: Soruda bize ne soruyor?

Ö2: Bize artışı soruyor. Yani artışın en az olduğunu soruyor. Bir dakika… O zaman ben yanlış cevaplamışım. Çarşamba ve Perşembe olması gerek.

G: Hangi ardışık günler arasında müşteri sayısındaki artış en azdır?

Ö8: Cuma günü dedim ben.

G: Peş peşe günleri sormuşuz ama. Cuma ve hangi gün arasında?

Ö8: Perşembe ve Cuma.

G: Soruda ne istemiş bizden?

Ö8: Hocam en azı soruyor. Resimde de bakınca hep peş peşe günlerde artış var bir tek Perşembe'den Cuma'ya azalış var. O da bayağı azalmış 60 kişi.

Problemin b) öncülünün son seçeneğinde bütün hafta mağazaya gelen müşteri sayısı sorulduğundan, tüm katılımcılar günlere karşılık gelen sayısal değerleri toplamışlardır. Ancak Ö5, Ö6 ve Ö7 doğru yöntemi kullanmış olsalar da işlem hatası yaptıklarından yanlış cevaba ulaşmışlardır.

2. Problem: Bugünden birkaç yıl sonra Can 48 yaşında ve Can'ın yaşı kızı Selin'in yaşının 3 katı olacaktır. Selin şu anda 10 yaşında olduğuna göre Can şu anda kaç yaşındadır?

Şekil 3.1.2. *Veri Toplama Aracı-1'in ikinci problemi*

Bu problemde Ö1 problem bağlamında verilen bilgileri anlamlandırmadan ve gerekliliğini sorgulamadan deneme-yanılma yöntemiyle problemi çözmeye çalışmış, ancak emin olmadığı yanlış bir sonuca ulaşmıştır. Ö1, hangi zaman diliminde babanın yaşının kızının yaşının üç katı olduğu bilgisini fark etse de bu bilgiyi nasıl kullanacağını anlamlandıramamış ve problem kökünde verilen çoğu bilgiyi göz ardı etmiştir.

G: Çözüme ulaşana kadar nasıl düşündün?

Ö1: Şey, ben bir sürü sayı denedim. En sonunda 39'u denemeye karar verdim. 39, üçe bölündüğünde 13 çıkıyor. Yani biraz garip oldu ama bu soruda, her şey ters gitti. Yine de böyle bir cevap verdim üç katı olduğu için.

…

G: Selin'in şu anda 10 yaşında olduğu bilgisini bize neden vermiş?

Ö1: (Düşünüyor) Bilmiyorum, soru çok karışık (gülüyor).

Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö8 verilen yaş problemiyle ilgili önemli bir yanılgıya düşmüş ve iki kişi arasındaki yaş oranının hiçbir zaman değişmeyeceğini savunmuşlardır. Yalnızca Ö3, klinik görüşme sırasında kendisi ve babasıyla ilgili yaş örneği vererek önce yaptığı çözümün yanlış olduğunu fark etmiş ve hatasını düzelterek doğru cevaba ulaşmıştır. Ö1, Ö2 ve Ö8 ise bu yanılgılarından dolayı problem kökünde verilen gerekli bilgiyi kullanmayarak doğru cevaba ulaşamamışlardır. Ö8, Can'ın 48 yaşında olduğu bilgisini kullanmadığı için ulaştığı cevaptan emin olmadığını belirtmiştir.

G: Peki bize soruda Can'ın 48 yaşında olacağı bilgisini neden vermiş?

Ö1: 48 yaştan birkaç sayı inerek yapmaya çalıştım. Hepsini teker teker denedim. Üçe bölünmesi için 39'u buldum.

G: Ne zaman Can'ın yaşı Selin'in yaşının 3 katıymış?

Ö1: (Sessizlik) İşte orada sıkıntı çıktı zaten. (Sessizlik) Bugünden birkaç yıl sonra üç katıymış. 48'den aşağı indiğimizde (düşünüyor) 39 var. Üçe bölünebiliyor diye.

G: … Bu sorudan neler anladın?

Ö2: Burada iki tane kişi verilmiş. Bunların birisinin babasının ve diğerinin kız olduğunu anladım ve birisinin diğerinden üç kat daha fazla olduğunu anladığım için ilk baştaki yaşının 48 ve Selin'in de üç katı olduğu için 48'i üçe bölerek Selin'in yaşını buldum. Sonra burada 10 yaşında olduğunu gösteriyor. Buna bağlı olarak üç katı olduğuna göre Can 30 yaşında oluyor. Can onun için şu an 30 yaşındadır dedim.

G: Peki soruda Can'ın 48 yaşında olduğunu bilgisini bize neden vermiş olabilir?

Ö2: Can'ın 48 olduğunu neden vermiş onu aslında ben hiç öyle düşünmedim.

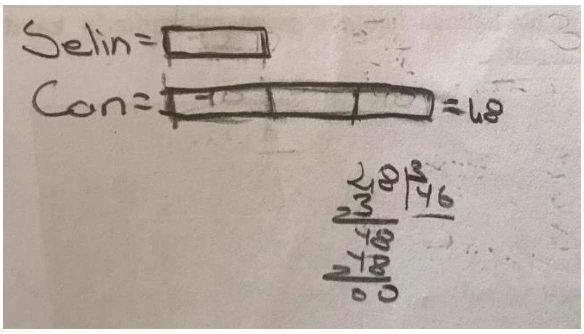
G: Bu bilgiyi nerde kullanabilirim diye düşündün mü?

Ö2: Aslında pek düşünmedim. Kaç yıl geçerse geçsin hep yaşları arasındaki katın aynı olacağı için hemen üç ile çarptım.

Ö3 çözüm sürecinde öncelikle Selin ve Can'ın yaşları arasındaki oranın hep aynı kalacağını düşündüğünden, yaşlarını temsil etmek amacıyla bar modelinden faydalanmıştır. Selin’in yaşını bir kutucuk, Can’ın yaşını ise üç katını alarak üç kutucukla ifade etmiştir.

G: … Neler anladın bu sorudan?

Ö3: Şimdi bu yıldan birkaç yıl sonrasında babanın yani Can’ın yaşı 48 olacakmış ve kızı Selin’in yaşının da üç katı olacakmış. Zaten bu katlar hiç değişmediği için her sene hep aynı şekilde gittiği için her sene üç kat kalacak. Şu anki yıl da 10 yaşındaymış. Can’ın şimdiki yaşını sormuş. Ben şöyle yaptım; Selin dedim ve bir kutucuk yaptım. Bu kutucuk 10 yaşını gösteriyor ve Selin’in yaşı da Can’ın yaşının üç katı olduğuna göre… Yok Can’ın yaşı üç katı olduğuna göre, Can’ın bu kutucuktan üç tane var. Bu kutucukları topladığımızda 30 oluyor.



Görsel 3.1.1. *Ö3’ün Selin ve Can’ın yaşını temsil etmek amacıyla kullandığı Bar modeli*

G: Soruda Can’ın 48 yaşında olduğu bilgisini neden vermiş?

Ö3: Bilmiyorum. Selin’in şimdi 10 yaşında olduğu bilgisini üç ile çarpınca zaten babanın yaşını bulurum. (Düşünüyor) Ay yoksa bulamam mı? Bir dakika… Şöyle bir örnek vereyim. Ben 12 yaşındayım. Şu an babamın yaşı biraz orantısız olacağı için başka bir örnek mesela 36 yaşında diyelim. Ben seneye 13 yaşında olacağım, 13 ile de üçü çarptığımızda… Ee olmuyor. Bir dakika hesaplayayım… 39 oldu. Babam bir yılda üç yaş büyümüş oldu (Gülüyor). O zaman hep üç kat olmaz ki. …

G: Hatanı nasıl düzeltirsin?

Ö3: Tamam nasıl yapacağımı da buldum. Şimdi Can 48 yaşında olduğu zaman Selin’in yaşının üç katı oluyormuş bu yüzden 48’i üçe böldüm 16 çıktı. Selin de şimdi 10 yaşında olduğuna göre demek ki aradan kaç yıl geçtiğini bulmak için 16’dan 10’u çıkardım altı kaldı. Can’da o altı yıl içerisinde 48 yaşında olacağı için 48’den de altıyı çıkardım 42 oldu. Yani Can’ın şu andaki yaşı 42.

Ö3 kendisi ve babasıyla ilgili verdiği yaş örneğinden sonra bu durumu genelleyerek problemi doğru bir şekilde çözebilmiştir. Problemi başka yöntemle (örneğin cebire ve cebirsel ifadelere başvurarak) çözüp çözemeyeceği sorulduğunda ise Ö3 ihtiyaç duymadığı için tek yöntemle çözdüğünü belirterek başka bir çözüm yolu üretmemiştir.

Ö5 ve Ö6 problemi doğru yöntemlerle çözerek doğru cevaba ulaşabilmişlerdir. Ö9 ise kağıdına hiçbir işlem yapmayarak, zihninden işlemlerle doğru cevaba ulaşmıştır. Her üç katılımcı da önce yaşlar oranından yola çıkarak Selin'in birkaç yıl sonraki yaşını hesaplamış, sonra Selin'in şimdiki yaşına göre farkını alarak aradan kaç yılın geçtiği bilgisine ulaşmışlardır. Son olarak aradaki yıl farkına göre Can'ın şimdiki yaşını doğru olarak hesaplayabilmişlerdir.

Ö4 ve Ö7 ise problem durumunu anlamlandıramamış ve Selin'in birkaç yıl sonraki yaşının, şimdiki yaşının üç katı olduğunu düşünmüşlerdir. Selin'in birkaç yıl sonraki yaşını hesapladıktan sonra ise, Can'ın birkaç yıl sonraki yaşı ile Selin'in birkaç yıl sonraki yaşının farkını almışlardır. Bunu anlamlı olarak yapmadıklarından, buldukları değerin Can'ın şimdiki yaşı olduğunu belirtmişlerdir. Ancak yaptıkları işlemlere mantıklı bir açıklama getirememişler, yanlış cevaba ulaşmışlardır.

G: İkinci soruya geçebiliriz, bu sorudan neler anladın?

Ö4: (Problemin tamamını okuyor) Selin şimdi 10 yaşındadır dediği için ben önce kızının yaşını buldum. Üç ile çarptım 30 oldu.

G: Kimin yaşını üç ile çarptın?

Ö4: Selin'in yaşını.

G: Bu hesapladığın 30 kimin yaşı oldu?

Ö4: Selin'in daha sonraki yaşı oldu.

G: Daha sonra nasıl bir yol izledin?

Ö4: Daha sonra 48'den 30'u çıkararak Can'ın yaşını 18 olarak buldum.

G: Neden iki sayıyı çıkardın?

Ö4: (Düşünüyor) Can birkaç yıl sonra 48 yaşındaymış. Şimdiki yaşını bulmam için çıkarmam gerek diye düşündüm.

G: Sonuç olarak bana hem Can'ın hem de Selin'in şimdiki yaşını söyler misin?

Ö4: Selin'in şimdiki yaşı 10, Can'ın 18 oldu.

3. Problem: Ceyda, Sude ve Tuğçe oyun taşlarıyla oynamaktadır. Sude, Ceyda'dan 6 taş Tuğçe'den 5 taş kazanıyor. Ceyda, Tuğçe'den 3 taş, Sude'den 4 taş kazanıyor. Tuğçe, Ceyda'dan 12 taş Sude'den 2 taş kazanıyor. Tuğçe'nin oyundan önce ve sonraki taşları farkı nedir?

Şekil 3.1.3. *Veri Toplama Aracı-1'in üçüncü problemi*

Problemin çözümünde Ö7 haricindeki tüm katılımcılar Tuğçe'nin oyundan önce ve sonraki taşları farkını doğru olarak hesaplayabilmişlerdir. Katılımcılar, çözüme ulaşırken farklı yöntemlere başvurmuşlardır.

Ö1, Ö4 ve Ö6 her bir kişi için alınan ve verilen taş sayılarını hesaplamış, sonrasında tüm kişiler için alınan ve verilen taş sayılarının farkını almıştır. Ancak Ö1 ilk başta zihninden tüm kişilerin taşlarını sıfırmış gibi düşünerek alınan taşları sıfıra eklemiş, verilen taşları da son durumdan çıkarmıştır.

G: … Bu sorudan neler anladın?

Ö1: Çocuklar birbirleriyle taş oyunu oynuyorlarmış. Birbirlerine birkaç tane taş alıp veriyorlar. Önce Tuğçe'den beş taş kazanıyor Sude. Ceyda'dan da beş taş kazanıyor. Sonra Ceyda, Tuğçe'den üç taş Sude'den de dört taş kazanıyor. Tuğçe de Ceyda'dan 12 taş, Sude'den iki taş kazanıyor. Sude'nin en son 11 taşı oluyor. Ceyda'nın yedi, Tuğçe'nin 14 oluyor.

…

G: Tek tek düşünelim. Sude'nin neden 11 taşı vardır?

Ö1: Sude, Ceyda'dan altı ve Tuğçe'den de beş taş alıyor. 11 oluyor bu kısım. Sonra Sude'den dört taş eksiliyor yani 11'den dört taş eksiliyor. Sonra Tuğçe Ceyda'dan 12 taş Sude'den de iki taş kazanıyor 14 oluyor. Bu şekilde yaptım. Burada yazdığım sekiz de Tuğçe'den eksilen taş sayıları.

G: Tuğçe kaç tane taş kaybetmiş?

Ö1: Sude'ye beş taş vermiş. Ceyda' ya üç taş vermiş. Sekiz oldu.

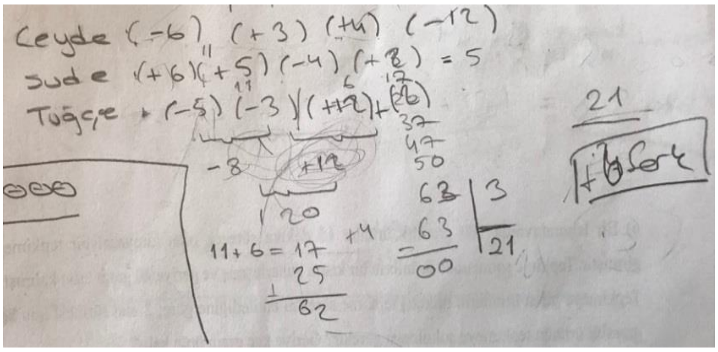
Ö4 ve Ö6, tüm kişilerin aldıkları ve verdikleri taş sayılarını değerlendirip, bilgilerin çeşitli olmasından dolayı eksik ve hatalı işlem yapmışlardır. Ö4 klinik görüşmeler sırasında sadece Tuğçe'ye odaklanmayı tercih edip hatasını düzeltmiş ve doğru sayısal değere ulaşmıştır. Benzer şekilde Ö6'da klinik görüşme sırasında problem durumunu tekrar okuduğunda öncesinde fark etmediği taş sayısını da hesaba katarak doğru sayısal değere ulaşmıştır. Ö6 kişilerin verdiği taşları – işareti, aldığı taşları ise + işareti ile temsil etmiştir.

G: … Üçüncü sorudan neler anladın?

Ö6: Buraya önce Ceyda'nın eline gelen ve verdiği taşları yaptım. Verdiklerine eksi koydum aldıklarına artı koydum. Mesela Sude'ye altı tane verdiği için -6 olarak yansıttım, böyle devam ediyor işte. Tek tek yazdım bunları. Bize Tuğçe'yi sormuş soruda. Tuğçe beş tane vermiş Sude'ye, -5 oldu. Tuğçe Ceyda'ya üç tane vermiş -3 oldu. Ceyda'dan aldığı da 12 olmuş, +12 dedim. Verdikleri sekiz, aldıkları 12 oldu. Yani baştaki duruma göre dört fark olur. … Hocam ben bir şeyi unuttum geri dönebilir miyiz?

G: Neyi unuttun?

Ö6: Hocam Tuğçe iki kişiye taş veriyor dedim ama bir kişiden taş alıyor diye düşündüm sadece +12 yaptım. Tuğçe Sude'den iki taş almış, +2 geliyor oradan bir de. …



Görsel 3.1.2. *Ö6'nın üçüncü problemde her bir kişi için ayrı ayrı taş alışverişini değerlendirmesi*

Ö2, Ö8 ve Ö9 ise problemin sadece istenen kişiyi ilgilendiren bilgilerini kullanmıştır. Ö2 ve Ö8, Tuğçe'ye gelen ve o Tuğçe'nin verdiği taş sayılarını dört işlem yöntemiyle hesaplayarak bu sayıların farkını almıştır. Ancak Ö8 önce işlem hatası yaparak klinik görüşmeler sırasında taşları eksik saydığını fark etmiş, sonra hatasını düzelterek doğru sayısal değere ulaşmıştır. Ö9 ise tüm işlemleri zihninden yaptığından, klinik görüşmeler sırasında hata yaptığını fark edip tekrar zihninden işlem yaparak hatasını düzeltip doğru sayısal değere ulaşmıştır.

G: … Üçüncü soruya gelelim. Bu sorudan ne anladın?

Ö9: (Sessizlik) Yine yanlış yapmışım, keşke kontrol etseydim.

G: Olsun, hatanı düzeltme şansın var.

…

G: Nasıl hesapladın?

Ö9: Önce Tuğçe'nin dağıttığı taşlara baktım. Beş ve üç tane taş dağıtmış. Sonra da arkadaşlarından aldığı taşları buldum. 12 ve iki taş almış diğerlerinden. 14 taş almış, sekiz taş vermiş. Tuğçe'nin altı taşı daha fazla olacak ilk duruma göre.

Ö7 ise sadece Tuğçe için işlemler yapsa da doğru cevaba ulaşamamıştır. Tuğçe'nin diğerlerinden kazandığı taş sayısını doğru hesaplamış ancak Tuğçe'nin oyunun başındaki taşlarının sayısına ulaşmak için problem bağlamındaki bütün sayısal değerleri toplamıştır. Bunun sebebi sorulduğunda ise mantıklı bir açıklama getirememiştir. Daha sonra problem bağlamının kökünde "Tuğçe'nin oyundan önce ve sonraki taşları farkı…" ifadesi olduğundan, Tuğçe'nin toplam taş sayısı ve kazandığı taş sayısının farkını alarak yanlış sayısal değere ulaşmıştır.

G: Üçüncü sorudan neler anladın?

Ö7: Bu soruda Tuğçe'yi sormuş bize. Tuğçe, Ceyda'dan 12 taş kazanıyor. 12'yi buraya yazdım. Sonra Sude'den de iki taş kazanıyormuş, toplamda 14 taş kazanır Tuğçe. Sonra burada yazan bütün taşları topladım. Tuğçe'nin bütün taşları 28 yaptı. 28'den de 14'ü çıkardım 14 buldum.

G: Tuğçe'nin toplamda 28 taşı olduğunu nasıl buldun?

Ö7: Sorudaki bütün sayıları topladım. Burada vermiş ya işte altı tane sayı. Toplarsak 28 eder.

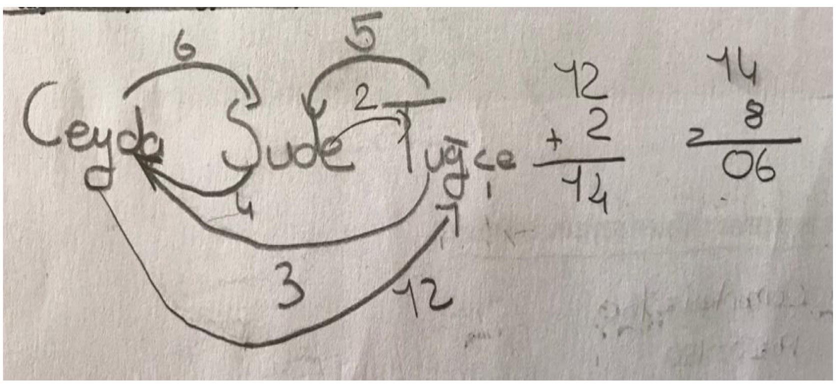
G: Neden tüm sayıları topladın?

Ö7: (Düşünüyor) İlk baştaki taş sayısını bulmak için. Hani taş alıp vermeden önceki. Tuğçe'de ilk başta 28 taş varmış. Diğerlerinden 14 almış. Oyundan önceki ve sonraki taş farkını sorduğundan, fark demek eksi demek zaten. Çıkardım 14 oldu. Yani Tuğçe'de şu an 14 taş var.

Ö3 ve Ö5; Ö1, Ö4 ve Ö6 ile benzer şekilde yine her bir kişi için alınan ve verilen taş sayılarını hesaplamıştır. Ancak bunu hesaplarken Ö3 kişi isimlerini yazarak taş veren kişiden alan kişiye doğru oklar çıkarmayı ve okların ucuna taşların sayısal değerlerini yazmayı tercih etmiştir. Problem bağlamının her bir cümlesinde durarak okları yerleştirmiştir. Ok yerleştirme ve sayısal değer yazma işlemi bittikten sonra da sadece soruda istenen kişiye doğru gelen okların sayılarını toplamış ve kişiden çıkan okların sayılarını çıkarmıştır. İstenen kişiye gelen ve kişinin verdiği taş sayılarının farkını almıştır.

G: Tamam, o zaman üçüncü soruya geçelim. Ne anladın bu sorudan?

Ö3: (Problemin tamamını okuyor.) Şimdi ben ilk önce Ceyda, Sude ve Tuğçe diye büyük bir şekilde yazdım. Aralarında da boşluk bıraktım oklarla göstereceğim için. İlk başta soruyu tekrardan okudum. Sude, Ceyda'dan altı taş almış. O yüzden Ceyda'dan Sude'ye doğru ok göndererek altı yazdım üstüne. Tuğçe'den beş taş kazanıyor dediği için Tuğçe'den de Sude'ye ok gönderdim beş yazdım buna da. Devam ettim soruyu okumaya. Sonra Ceyda Tuğçe'den üç taş kazanıyormuş o yüzden Ceyda'ya Tuğçe'den gelen bir ok gönderdim üstüne üç yazdım. Ceyda Sude'den de dört taş kazanıyormuş. Sude'den Ceyda'ya ok gönderdim dört yazdım. En son Tuğçe Ceyda'dan 12 taş almış yine ok gönderdim Ceyda'dan Tuğçe'ye doğru üstünde 12 yazıyor. Tuğçe Sude'den iki taş kazanmış o yüzden Sude'den Tuğçe'ye ok çıkardım üstüne iki yazdım. Sonra kazandığı taşları topladım Tuğçe'nin, 12 ile ikiyi topladım 14 oldu. Sonra kaybettiği taşları topladım Sude'ye beş, Ceyda'ya da üç taş verdiği için toplamda sekiz taş kaybetmiş. Zaten 14 taş kazanmıştı, sekiz taş da kaybettiği için 14'ten sekizi çıkardığımda altı kalır. Çünkü onlar birbirlerini götürüyor.

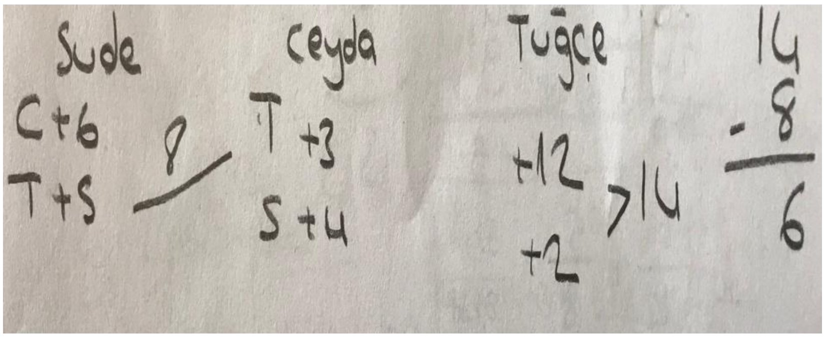


Görsel 3.1.3. *Ö3'ün üçüncü probleme ilişkin çözüm yöntemi*

Ö5 ise her bir kişinin isimlerini yazarak problemdeki bilgilere göre isimlerin altına aldıkları taş sayısını toplama işareti ile yerleştirmiştir. Ayrıca kişilerin bu taşları kimden aldığını belirtmek için aldığı kişilerin baş harflerini kullanmıştır. Problem bağlamı yalnızca Tuğçe hakkında bilgi istediğinden Tuğçe'nin aldığı taşları hesaplamıştır. Diğer isimlerin altında T harfine karşılık gelen sayıları da Tuğçe'nin verdiği taşlar olarak düşünüp, aldığı taşlarla verdiği taşların farkını alarak doğru sayısal değere ulaşmıştır.

G: Üçüncü soruya geçelim. Bu sorudan neler anladın?

Ö5: Öncelikle hepsinin kimden ne kadar aldığını yazdım. Ondan sonra Tuğçe'nin önce ne kadar taşı olduğunu bulmak için ikisine verdiği taşları topladım. Sekiz taş vermiş. Ondan sonra diğerlerinden ne kadar taş aldığını topladım. 12 ve iki almış, 14 oldu. Sonra aldıklarından verdiklerini çıkarınca altı oldu.



Görsel 3.1.4. *Ö5'in üçüncü probleme ilişkin çözüm yöntemi*

Katılımcılara Tuğçe'nin taşlarının taş alışverişi önceki duruma göre nasıl değiştiği sorulduğunda ise Ö1, Ö2 ve Ö7 haricindeki tüm katılımcılar doğru cevap vermişlerdir. Ö1 önce taşların ilk duruma göre azaldığını düşünmüş, ancak daha sonra böyle olmadığını fark etse de soruya emin olamadığından net bir cevap verememiştir.

Ö2 ve Ö7 taş sayısının ilk duruma göre azaldığını düşünerek yanlış cevap vermiştir. Ö2'nin bu şekilde cevap vermesinin sebebi, önce alınan taşları hesapladıkları daha sonra verilen taşları bu sayıdan çıkardıkları için taş sayısının azalmasından dolayı oluşan yanılgıdır. Ö7 ise problemi en başından beri yanlış çözüp Tuğçe'nin en baştaki taşlarından kazandığı taşların farkını almıştır. Bu sebeple çıkan sonucun Tuğçe'nin oyunun başındaki taş sayısından az olduğunu düşünerek, taş sayısının azaldığını belirtmiştir.

G: Peki, ilk duruma göre altı taş fazla mıdır, altı taş az mıdır?

Ö2: İlk duruma göre altı taş azdır. (Uzun bir sessizlik) altı taş az değil midir? Azdır. Çünkü burada sekiz taş eksikmiş. 14 normal taşken, sekiz taş eksildiği için kaybetmiş oluyor. Yani altı taş kalmış.

G: Oyunun başına göre 14 taş daha mı eksik, yoksa daha mı fazla?

Ö7: (Düşünüyor) 28'miş, 14'e düşmüş. Daha azdır.

Diğer katılımcılar ise taş sayısının ilk duruma göre arttığını belirterek doğru cevap vermiştir. Ö6, bilgilerin fazla olmasından dolayı taş sayısının ilk duruma göre fazla olduğunu belirtmiş ancak yanlış sayısal değer hesaplamıştır. Ancak klinik görüşme sırasında hatasını düzelttiğinden bu soruya da tamamen doğru cevap verebilmiştir.

G: … Dört tane az mı olur, dört tane fazla mı olur ilk duruma göre taşları?

Ö6: Daha fazla olur da hocam ben bir şeyi unuttum geri dönebilir miyiz?

G: Neyi unuttun?

Ö6: Hocam Tuğçe iki kişiye taş veriyor dedim ama bir kişiden taş alıyor diye düşündüm sadece +12 yaptım. Tuğçe Sude'den iki taş almış, +2 geliyor oradan bir de (gülüyor). Dört taş fazla demiştim, iki tane da geldi altı taş olacak cevap.

Ö8 önce taş sayısının azaldığını belirtmiş, bunun sebebi sorulduğunda ise hatasını fark edip sonrasında doğru cevaba ulaşabilmiştir.

G: Peki ilk duruma göre altı taş fazla mıdır az mıdır?

Ö8: İlk durumda sekiz taşı varmış onları vermiş, şimdi altı taşı kalmış. Altı taş daha azdır.

G: İlk durumda sekiz taşı varsa ve onları veriyorsa nasıl altı taşı kalıyor?

Ö8: (Düşünüyor) Aa.. Hocam altı taş daha fazladır. Aldıkları verdiklerinden daha çoksa artık altı taş daha fazla var demektir.

Ö9 zihinden işlem yaptığından ilk baştaki hatasının devamı olarak bu soruda eksik sayıda taşın artacağını hesaplamış. Ama sonrasında hatasını düzelterek doğru cevaba ulaşmıştır.

4. Problem: Deniz seviyesinden başlayarak bir dağa tırmanış gerçekleşecektir. Dağa tırmanmaya başlarken hava sıcaklığı 10 C iken dağın zirvesinde hava sıcaklığı -6 C'dir. Buna göre;

a. Havanın kaç C değiştiğini hesaplayınız.
b. Dağa her 1000 m çıkışta hava 6,4 C soğuduğuna göre, dağın zirvesi denizden kaç km yüksektedir?

Şekil 3.1.4. *Veri Toplama Aracı-1'in dördüncü problemi*

Dördüncü problem katılımcıların en çok zorlandığı problemlerdendir. Bu problem bağlamı kısa süre önce öğrendikleri konu alanları ve kavramları içermektedir. Problemin a) öncülünde, Ö4 ve Ö7 haricindeki tüm katılımcılar doğru sayısal değere ulaşmışlardır. Ö1, Ö3, Ö6 ve Ö9 deniz seviyesi ve dağın zirvesi arasındaki sıcaklık değişimini hesaplamak için her iki değeri birbirinden çıkarmayı tercih etmiştir. Ö1, neden iki değeri çıkardığı sorulduğunda cevaba ulaşmak için bir yorum yapmıştır: İki değeri asansörde bir kat olarak düşünmüş ve deniz seviyesinden yukarı doğru çıkarken hava soğuduğundan bunu asansörde aşağı inmek olarak temsil etmiştir. Bu yüzden bu iki değeri çıkarmanın aslında 10 ve -6 değerleri arasındaki mesafe olduğunu göstermiştir. Hava soğuduğundan bu 16 derecelik değişimi -16 olarak ifade etmiştir.

G: … Bu sorudan ne anladın?

Ö1: İlk deniz seviyesinden başlayarak dağa tırmanacakmış. Dağa tırmanmaya başlarken hava sıcaklığı 10 dereceyken dağın zirvesinde hava sıcaklığı -6 derece oluyormuş. Yani yukarı çıktıkça hava soğumuş. Buna göre de havanın kaç derece olduğunu hesapladım.

G: Neden havanın kaç derece olduğunu hesapladın?

Ö1: Bize sormuş ya. (Düşünüyor) Havanın yukarı çıkarken kaç derece değiştiğini sormuş. -16 derece.

G: Neden eksi (-)?

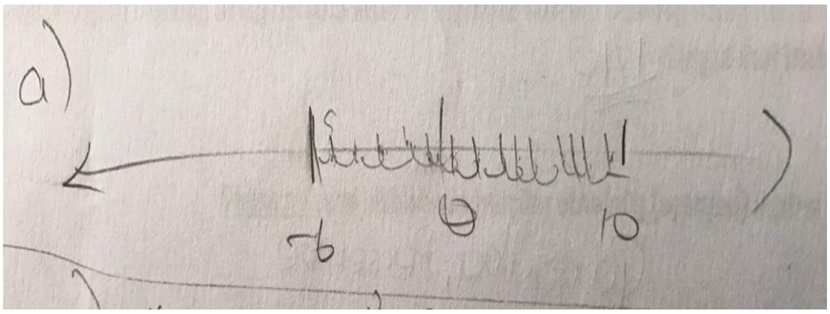
Ö1: Yani 10'dan altıyı çıkardım. Çıkan sonuç -16 oldu.

G: 10'dan altıyı neden çıkardın?

Ö1: Daha doğrusu bir tablo çizdim. Buralara -6 ve 10'u yerleştirdim. Yerleştirince ikisinin arasını topladım. Toplayınca 16 çıktı. Yani -16 oldu.

G: 16'yı hesapladıktan sonra neden önüne eksiyi ekledin?

Ö1: Yani daha çok asansör gibi düşündüm. 10'muş önce, sonra 10'dan eksilmeye başlamış diye düşündüm hani hava soğuyor ya gittikçe. Bir derece düşse -1 diye düşündüm. 16 derece hava soğumuş, -16 dedim bende.



Görsel 3.1.5. *Ö1'in a) öncülünde sıcaklık değişimini sayı doğrusu yardımıyla hesaplama yöntemi*

Ö3 problemin a) öncülünde, deniz seviyesi ve dağın zirvesi arasındaki sıcaklık değişimini bulmak için çıkarma işleminden faydalanarak hesaplayarak doğru cevaba ulaşmış, öncesinde neden bu işlemleri yaptığını anlamlandıramamış, ezberlediği kurallara başvurduğunu belirtmiştir. Ancak Ö3, deniz seviyesi ve dağın zirvesindeki hava sıcaklık değerlerini sayı doğrusuna yerleştirmiş, sayı doğrusu üzerinde iki değer arasındaki mesafeyi sıcaklıktaki değişim olarak yorumlamış ve doğru cevaba ulaşmıştır.

G: Dördüncü sorudan neler anladın?

Ö3: … (Sorunun tamamını okuyor.) Burada deniz seviyesi demeseydi biz tırmanışın nereden başlayacağını bilemeyecektik. Deniz seviyesi sıfır metredir. Havanın kaç derece değiştiğini hesaplayınız diyor a şıkkında. Deniz seviyesinde 10 dereceymiş sonra -6 dereceye düşmüş. Of bunu inşallah yanlış yapmamışımdır ya. Şimdi parantez içinde +10 parantezi kapattım, eksi, parantezi açtım -6 yazdım parantezi kapattım. Sonra düşmanımın düşmanı dostum oluyor böyle bir Türk mantığı var (gülüyor). O yüzden eksi -6 hep artı-artı oluyor. O zaman +10 artı +6 o da 16 derece oluyor.

G: Tamam. Neden 10'dan -6'yı çıkardın?

Ö3: Yani zaten sayı doğrusunda da baktığımızda -6 sıfırdan önce, 10 sıfırdan sonradır. -6'dan 10'a saydığımızda 16 derecelik bir değişim var yani. Tam olarak açıklayamıyorum ki. Şimdi yukarıya gittikçe hava soğuyor, normal hayatta da böyle. En yukarıda da -6 derece olmuş. (Sessizlik) Ben bunu açıklayamıyorum ya. Kaç seneden beri hep öğrenmişiz, çıkarma işlemi yapıyoruz. Ama nedenini açıklamıyoruz tabii.

Ö6 ve Ö9; iki sıcaklık arasındaki farkın alınması gerektiğini belirterek bu iki değeri birbirinden çıkarmıştır. Ö6 bu hesaplamayı kağıda dökse de, Ö9 zihinden işlem yapmayı tercih etmiştir. Çıkarma işlemi tercih etmelerinin sebebi sorulduğunda ise iki değer arasındaki farkın aslında sayı doğrusunda değerlerin arasındaki mesafe olduğunu, zihinlerinde oluşturduğu hayali sayı doğrusunda cevabın mantığının yattığını belirtmişlerdir.

G: Dördüncü sorudayız. Neler anladın bu sorudan?

Ö9: Deniz seviyesinden tırmanış gerçekleşiyormuş. Bu deniz seviyesinde hava 10 dereceymiş, en tepede hava -6 dereceymiş. Bize a şıkkında deniz seviyesiyle zirve arasındaki sıcaklık değişimini sormuş. Sıcaklık farkını sormuş yani. O yüzden 10 dereceden -6 dereceyi çıkardım, 16 buldum.

G: Neden iki sayının farkını almayı tercih ettin?

Ö9: İki yer arasındaki sıcaklığın arasındaki farkı almam gerek değişimini bulmak için. 10 ile -6'nın arasında 16 fark var, kafamdan sayınca çıktı zaten. Hayali bir sayı doğrusu kurunca o aradaki farkı sayabildim.

Ö2 ise sıcaklık değişimini hesaplarken önce toplama işlemine başvurmuş, bunun nedeni sorulduğunda, sıcaklık değişiminin sıcaklıklar farkı almak olduğunu fark edip hatasını anlayarak çıkarma işlemine yönelmiştir.

G: … Dördüncü sorudan neler anladın?

Ö2: Dördüncü soruda, dereceler verilmiş. Bunlara göre bizden iki tane soru çözmemizi istiyor. Burada birinci soruda havanın kaç derece değiştiğini gösteriyor. Önce dağa tırmanmaya başlarken 10 derece demiş. Sonra hava sıcaklığı -6 dereceye düşüyormuş. Ben burada 10 derece ile -6 dereceyi toplayıp dört dereceyi buldum yani aralarında kaçtan kaça düştüğünü buldum. Dört derece eksilmiş.

G: Neden topladın?

Ö2: Çünkü aralarındaki sıcaklık farkını bulmak istedim. Hayır hayır neden topladım ki… 10 derece ile -6 yı çıkarıp 16 derece olarak sıcaklıklar arasındaki farkı buldum.

Ö5 ve Ö8 ise deniz seviyesi ve dağın zirvesi arasındaki sıcaklık değişimini hesaplamak için önce sayı doğrusuna başvurmuşlardır. İki değer arasındaki mesafeyi değişim olarak kabul etmişlerdir. Başka bir yöntemle çözmeleri istendiğinde ise her ikisi de çıkarma işlemini tercih etmiştir. Ö5 okulda öğretmeni benzer sorularda çıkarma işlemini tercih ettiği için kendisinin de çıkarma işlemi yaptığını belirtmiş; Ö8 ise sıcaklık değişiminin sıcaklık farkı almak olduğunu açıklamıştır.

G: … Diğer soruya geçelim o zaman. Ne anladın bu sorudan?

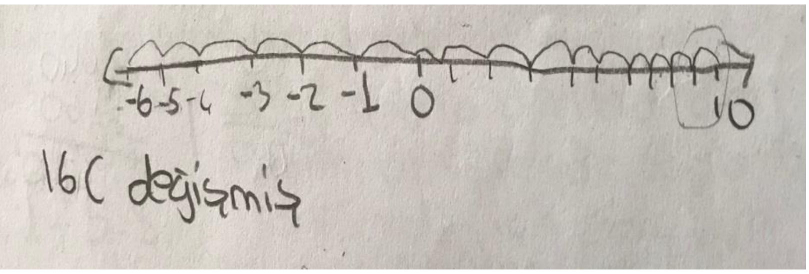
Ö8: Şimdi bir dağcı varmış dağa tırmanıyormuş. Yerde hava 10 dereceymiş zirvede -6. Hava kaç derece değişir diyor. Ben bir sayı doğrusu çizmeyi tercih ettim. Sayı doğrusunda 10 ve -6'yı buldum. Ondan sonra bu iki sayının arasındaki tüm aralıkları saydım. 16 derece değişmiş oldu.

G: Peki sayı doğrusu çizmeseydin, havanın kaç derece değiştiğini nasıl hesaplardın?

Ö8: Çıkarırdım hocam. 10 eksi -6 derdim zaten 16 derece yapacak yine.

G: Neden çıkarırdın iki değeri?

Ö8: Hocam sıcaklık değişimi derken sıcaklık farkını soruyor bize. Fark demek çıkarmak demek.



Görsel 3.1.6. *Ö8'in a) öncülünde sıcaklık değişimini sayı doğrusu yardımıyla hesaplama yöntemi*

Ö4 ve Ö7 ise problemin a) öncülünde yanlış sayısal değere ulaşmışlardır. Ö4, sıcaklık değişimini hesaplamak için iki değeri toplaması gerektiğini, bunun sebebinin okulda benzer problemlerde hep toplama işlemi yaptığında öğretmenle aynı cevaba ulaşması olduğunu belirtmiştir.

G: … O zaman geldik dördüncü soruya. Bu sorudan neler anladın?

Ö4: Şimdi tırmanmaya deniz seviyesinden başladığı için sıfır metredir dedim. Dağa tırmanmaya başladığında hava sıcaklığı 10 dereceyken yani +10 oluyor. Dağın zirvesinde hava -6 derecedir demiş. Ben burada +10 artı -6 yaptım ve +4 olarak buldum değişimi.

G: +10 ve -6 derecelerini neden toplamayı tercih ettin?

Ö4: Eee. Eksi yapsaydım mesela tam sayılarda çıkarma işleminde eksiyi artı yapıp diğer sayının eksisini de artıya çevirecektik ya o yüzden bu şekilde bulmak için bu şekilde yaptım.

G: Tam sayılarda çıkarma işlemi yaparken aradaki eksiyi artı yaptığınızı anladım. Ama bu problemde neden bu iki dereceyi çıkarmak yerine hemen topladığını hala anlamadım.

Ö4: Hocam ben buna benzeyen sorularda çıkarma yerine toplamayı yapıyorum. Çünkü toplamayı yapmadığım zaman farklı sonuçlara ulaşıyorum hep yanlış çıkıyor. Artık ben de soruları bu şekilde yapıyorum. Çünkü ne zaman toplama işlemi yapsam sonuç doğru çıkıyor (gülüyor).

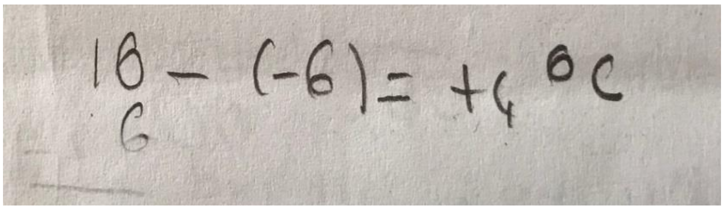
Ö7 ise iki yer arasında yukarı çıkıldığında sıcaklık farkı alması gerektiğini belirterek iki değerin farkını almıştır. Ancak tam sayılarda toplama ve çıkarma işlemlerinin yöntemlerini karıştırdığından yanlış sayısal değere ulaşmıştır.

G: … Bir sonraki sorudan neler anladın?

Ö7: Şimdi çıkmak üzereyken 10 dereceyse, -6 derece de çıktığındaysa, havanın kaç derece değiştiğini hesaplamamız istenmiş. Çıkarma işlemi yaptım ben burada 10'dan -6'yı çıkardığımda 10 büyük sayı olduğu için onun işaretinden artı yaptım, 10'dan altıyı çıkarıp dört dedim. Yani +4 derece değişmiştir hava.

G: Neden iki sıcaklık değerini çıkarmayı tercih ettin?

Ö7: Toplasaydım eğer arada artı olacaktı, -6'nın eksisi de artı olacaktı. +10 artı +6 olacağı için +16 çıkacaktı hava değişimi. Ama bir yerden yukarı çıkıyorsa aradaki farkı bulmamız gerek diye düşündüğüm için çıkardım.



Görsel 3.1.7. *Ö7'nin sıcaklıkların farkını aldığını düşünerek iki değeri toplayıp sonuca ulaşması*

Dördüncü problemin b) öncülü ise katılımcıları a) öncülüne göre çok daha fazla zorlamıştır. Problemin b) öncülünde yalnızca Ö2 ve Ö9 doğru sayısal değere ulaşabilmiştir. Ö1, Ö3, Ö5 ve Ö8 çözüm sürecinde sıcaklık farkından yola çıkarak kademeli çıkarma işlemi yapıp dağın yüksekliğine ulaşmaya çalışmışlardır. Ancak Ö1 problemi anlamlandırsa da çözümünü yarım bırakmıştır. Ondalık sayıyı değerlendirirken tam kısmı ve ondalık kısmı ayırmış, sadece tam kısımları sıcaklık farkından kademeli olarak çıkarmıştır. Çıkarması gereken sayıdan daha küçük bir sayıyla karşılaştığı için kademeli çıkarma yapmaktan vazgeçen Ö1, ondalık kısımlarla ilgili anlamsız işlemler yapıp yanlış cevaba ulaşmıştır. Metreden kilometreye geçişlerde ise dönüşüm yapabilmiştir.

G: Peki sorunun ikinci şıkkında neler anladın?

Ö1: Aslında bu soruda da bayağı zorlandım. Dağa her 1000 metre çıkışında 6,4 derece soğuyormuş. Biz 16 derece soğuyor dedik. Benim birkaç ondalık sayıdaki işlemlerimde yani tam sayı kısmı değil de virgülden sonrasında tam hesaplayamadım. 2,8 çıktı aslında. 2 kilometre virgül 8 çıktı.

G: Nasıl hesapladın 2,8'i?

Ö1: İşte hava 16 değişiyordu ya, 6,4'teki tam kısmı yani altıyı çıkardım. 10 derece kaldı buradan. Bir daha altı dereceyi çıkardım dört derece kaldı. İki kere çıkarınca 2000 metre tırmanmış oldu. Bir de virgül 4'ler vardı iki tane 6,4'ten kalan. Onları toplayınca virgül 8 oluyor. 2000 metre iki kilometre olur. Virgül 8'i de ekleyince 2,8 kilometre oldu.

Ö3, Ö5 ve Ö8 ise çözüm kağıtlarına işlemler yapıp cevaba ulaşamadıkları için işlemlerini silmişlerdir. Ancak klinik görüşme sırasında, çözüm sürecinde aklından geçenleri tekrar aktarmaları beklendiğinde ise üçü de benzer yöntemler uygulamıştır. Bu yöntemlere göre Ö3 ve Ö5, deniz seviyesindeki sıcaklıktan, 1000 metrelik mesafeye karşılık gelen 6,4 dereceyi kademeli olarak çıkarmayı denemiştir. Ö3, sürekli 6,4 çıkardığında değerler dağın zirvesindeki -6 derecenin de altına düştüğünden çıkarma işlemi yapmayı durdurmuştur. -6 dereceye ulaşamadığı için de net bir cevap vermek yerine uzunluk aralığı belirtmeyi tercih etmiştir. Uzunluk aralığını metreden kilometreye dönüştürebilmiştir.

G: O zaman b şıkkına geçelim. Buraya yazmadığın ama düşündüğün neler var?

Ö3: Şimdi… (Düşünüyor) Şöyle desek, deniz seviyesinden tırmanmaya başlıyor ya, hava sıcaklığı 1000 metre çıktıkça hava sıcaklığı bir öncekine göre 6,4 derece düşecekmiş. O zaman sıfır metreden başladık. İlk başta 10 dereceymiş, 1000 metre çıktıkça 6,4 derece düşse… 10'dan 6,4'ü çıkarıyorum. 3,6 derece. Bir daha 1000 metre gitse hava kaç derece olacak ona baktım. Yine 6,4'ü çıkardım, -2,8 oldu. Bir daha 1000 metre çıksa yine çıkaralım -9,2 oldu. Ama -6'dan da düşük oldu burada durayım. Zirvede hava sıcaklığı -6 dereceymiş. 2000 metrede hava sıcaklığı -2,8 derece olacağı için, 3000 metrede hava sıcaklığı -9,2 derece olacağı için dağın yüksekliği iki km ile üç km arasında bir yerlerde. Ama net bir cevap bulamadım.

Ö5 ise Ö3'e benzer şekilde deniz seviyesindeki sıcaklıktan başlayarak kademeli olarak 6,4 dereceyi çıkarmayı denemiştir. Ancak 6,4'den daha küçük bir değere ulaşıp, bu değerden 6,4'ü çıkaramadığından işlem yapmayı durdurmuştur. Ö5'e problemi başka yöntemle çözüp çözemeyeceği sorulduğunda ise bir seçenek sunarak sıcaklık farkının içindeki 6,4 dereceleri aramak gerektiğini belirtmiştir. Ancak ondalık sayılarda bölme işlemi yapamadığından sonuca ulaşamamıştır. Sonuca ulaşsaydı izlemesi gereken yolu görüşmeciye doğru bir biçimde aktarabilmiştir. Çözüm sürecinde metreden kilometreye olan dönüşümü doğru bir biçimde yapabilmiştir.

G: Acaba bunun başka bir çözümü var mıdır?

Ö5: (Düşünüyor) Hava 16 derece düşmüş ya. Aklıma 16'yı 6,4'e bölmek geliyor bir de ama.

G: Neden bu yöntemi tercih ettin?

Ö5: 16'nın içinde kaç tane 6,4 olduğunu bulmak için işte. Kaç tane varsa o kadar 1000 metre çıkacak.

G: Böl bakalım.

Ö5: İkisi de ondalıklı ya, çok zorlandım. 3,2 kaldı. 3,2'nin içinde 6,4 yok. Virgül koysam. (Düşünüyor) Yapamıyorum. Ondalık sayılarda bölmeyi unutmuşum.

G: Eğer bulabilseydin çözüme nasıl devam edecektin?

Ö5: 6,4 kaç taneyse 1000 metreyle çarpacaktım. Bize de kaç kilometre dediği için çıkan sonucu 1000'e bölüp kilometreye çevirecektik.

Ö8 ise sıcaklığın 6,4 derece düşmesinden yola çıkarak 16 derecelik soğumaya kadar 6,4'ün katlarını almayı tercih etmiştir. Ancak 6,4'ün katlarını aldığında 16 dereceyi aştığını fark etmiştir. 16 derece olması gereken sıcaklık değerini hesaplasa bile, bu değerin kaç metreye karşılık geldiğini hesaplayamadığından çözümünü yarım bırakmış, dağın uzunluğu için aralık tahmini yapmıştır. Bu tahminde de metreden kilometreye doğru dönüşüm yapabilmiştir.

G: Diğer şıkta bir cevaba ulaşmadığını görüyorum. Soruyla uğraşırken aklından neler geçti paylaşır mısın?

Ö8: Aslında ben şunu düşündüm. Her 1000 metre çıkışta 6,4 derece soğuyormuş ya, 2000 metrede iki katını alacağım ama virgüllü sayı olduğu için kafam karıştı benim yapmadım. (…)

Ö4 ve Ö7 problem bağlamını anlamadıkları için işlemler yapsalar da yanlış cevaba ulaşmışlardır. Ö4 bir önceki öncülde hesapladığı değere göre sıcaklık ve uzunluğun katını almış, ancak sebebini anlamlandıramamıştır.

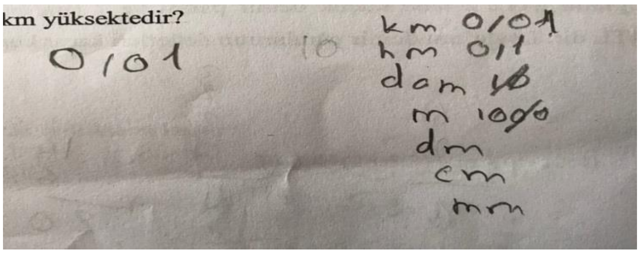
G: Peki sorunun devamında neler düşündün?

Ö4: Hocam ben bu soruyu anlayamadım pek fazla.

G: Tamam, ama kağıtta bir şeyler yazıp sonra sildiğini görüyorum. Bir de bazı sayılar yazmışsın. Bunları yazarken aklından neler geçti?

Ö4: Ben bu soruda 6,4 derece soğuyor dediği için ilk başta üst soruya baktım. Soruda da aşağıda hava 10 derece olduğunu gördüm. Sonra dört ile çarptım, neden çarptığımı bilmiyorum ama. 40 buldum. Sonra biraz daha düşündüm, 1000 metreyi dört ile çarpmayı denedim 4000 metre oldu. Ama doğru olmadığından emin olduğum için sildim sonra.

Ö7 ise dağa tırmandıkça düşen 6,4 dereceyi hiç hesaba katmayarak sadece uzunluk dönüşümü yapmayı tercih etmiştir. Ö7 kağıtta cevabı 0,01 km hesaplamıştır ancak bu değeri telaffuz ederken sıfır tam onda bir ifadesini kullanmıştır. Bu ise Ö7'nin metreden kilometreye doğru dönüşüm yapamadığını göstermektedir.



Görsel 3.1.8. *Ö7'nin metreden kilometreye birim dönüşüm yöntemi*

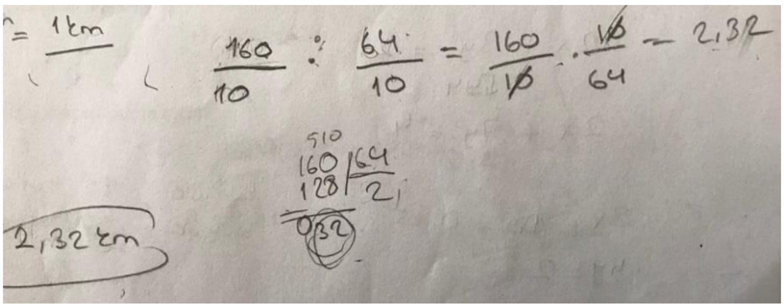
Ö6 ise ondalık sayılarda bölme işlemini yapamadığından, doğru yöntem kullanmış olsa bile yanlış sayısal değere ulaşmıştır. 16 derecelik soğumanın içindeki 6,4 dereceleri, dolayısıyla bir kilometreleri araması gerektiğini fark edip anlamlandırmıştır. Farklı bir bölme tekniği uygulayan Ö6, bölmenin kalanını doğrudan virgülden sonra yazmıştır. Metreden kilometreye doğru dönüşümler yapabilmiştir.

G: Sorunun devamından neler anladın?

Ö6: (Problemin tamamını okuyor) Önce metreyi km'ye çevirdim. 1000 metre bir km oluyor. Sonra zirve ve deniz seviyesi arasında 16 derece fark var. Ben bunu kesire çevirmeliyim çünkü 6,4 bir ondalık kesir. Bu ondalık kesri normal kesre çevirirken onda 64 olarak çevriliyor. Benim ama bu derece farkını bölmem gerekir bu sayıya.

G: Neden bölmen gerekir?

Ö6: Çünkü her bir km'de 6,4 kadar soğuyor. 16 derecelik soğuma varmış toplamda. 16'nın içinde kaç tane 6,4 varsa (düşünüyor) o kadar kilometre oluyor. Ama ben ondalık kesirlerde bölme işlemi yaparken her şeyi kesre çeviririm. 16'ya onda 160 dedim. Yani onda 160'ı onda 64'e bölüyorum. Kesirlerde bölme yaparken ikinciyi ters çevirip çarpıyoruz. On diğer onla sadeleşiyor, 160 bölü 64 kalıyor. 160'ı 64'e bölüyorum. 160'ın içinde 64 iki kere var, ama tam bölünmüyor, kalanlı falan oluyor. Kalan 32 kalıyor. 32'yi de ikinin yanına ekliyoruz. 2,32 oluyor. Yani dağın yüksekliği 2,32 km oluyor.



Görsel 3.1.9. *Ö6'nın ondalık sayılarda bölme işlemi yöntemi ve kalan sayıyı virgülden sonraki ondalık kısma eklemesi*

Ö2, havanın değişimini hesapladıktan sonra dağın yüksekliğinin kaç kilometre olduğunu doğru bir şekilde hesaplamıştır. Bunu yaparken bölme işleminden faydalanan Ö2, yaptığı işlemleri anlamlandırabilmiştir. Metreden kilometreye de doğru bir şekilde dönüşüm yapabilmiştir.

Ö9 ise problemi önce boş bırakmıştır. Çözüm sürecindeki düşünceleri sorulduğunda ise zihinden yaptığı işlemleri devam ettiremediğini belirtmiştir. Klinik görüşmeler sırasında, çözüm yöntemini tekrar kullanarak problemi kağıt-kalem yardımıyla çözmesi talep edilmiştir. Zihinden yaptığı işlemlerde hata yaptığını fark eden Ö9; 6,4 derecelik soğumayı 16 derecelik soğumaya ulaşana kadar kademeli olarak toplamış, 6,4'e karşılık gelen metreleri sayarak dağın uzunluğunu doğru olarak hesaplayabilmiş, metreden kilometreye dönüşümü yapabilmiştir.

G: Kağıda yazarak tekrar hesaplar mısın?

Ö9: Bir daha soruları işlem yaparak çözeceğim (gülüyor). Bu kaçıncı oldu.

G: Nasıl çözdün soruyu?

Ö9: 6,4 ile 6,4'ü toplayınca 12,8 oluyor. 16'dan çıkarınca 3,2 derece kaldı. Bu da 6,4'ün yarısı. Yani 3,2 derece soğuması için 500 metre daha çıkması gerekir. 16 dereceyi tamamlayınca dağın yüksekliği 2,5 km olur.

5. Problem: Bir fabrikadaki erkek sayısı, kadın sayısının $\frac{5}{8}$ i kadardır. Eğer kadınlar erkeklerden 24 fazla ise bu fabrikada toplam kaç kişi çalışır?

Şekil 3.1.5. *Veri Toplama Aracı-1'in beşinci problemi*

Beşinci problemde Ö1, Ö2, Ö3, Ö4 ve Ö9 doğru cevaba ulaşabilmiştir. Ö1 ve Ö2, erkeklerin kadınlara olan oranını problem bağlamında da verdiği üzere $\frac{5}{8}$ olarak düşünmüş, kadınlar erkeklerden 24 fazla olduğundan Ö1 ve Ö2 bu oran değişmeyecek şekilde sistematik deneme-yanılma yöntemiyle payda (kadın sayısı) ve payın (erkek sayısı) arasındaki fark 24 olacak şekilde genişletme yapmışlardır. Sonunda sekiz ile genişletme yaparak amaçlarına ulaşan Ö1 ve Ö2, kadın sayısı ve erkek sayısını hesaplayarak çözüme ulaşmışlardır.

G: … Bu sorudan neler anladın?

Ö1: Bu soruda, fabrikadaki erkek sayısı kadın sayısının 5/8'i kadarmış. Ben erkek sayısını E.S. diye kısalttım, kız sayısını da K.S. diye kısalttım. Birkaç tahminde bulundum. İki kere falan tahmin ettikten sonra beşi sekiz ile çarptım çünkü tahmin ettiğim sayı sekizdi. Çarpınca da 40 çıktı. Aynısını kız sayısında da yani 5/8'in sekiz kısmıyla yaptım. Sekiz ile sekizi ile çarptım 64 oldu.

G: Neden sekizi tahmin ettin?

Ö1: Denedim ilk başta. Tahmin ettiğimde de sekiz olunca bulduğum sayıların farkı 24 oldu. Soruda da kadın sayısıyla erkek sayısı arasındaki farkın 24 olduğunu söylüyor yani. Fabrikada toplam kaç kişi çalışır diyor. Sayılarımız zaten kesin oldu 40 ve 64. Sonra ikisini topladım 104 çıktı.

G: … Ne anladın bu sorudan?

Ö2: Bir fabrikada ki erkek sayısı kadın sayısının sekizde beşi kadardır. Eğer kadınlar erkeklerden 24 fazla ise bu fabrikada toplam kaç kişi çalışır? Burada erkekler beş bölü sekiz imiş. Ben burada bunu genişleterek düşündüm. Beş ile sekizi çarptım. Sekiz ile de sekizi çarptım. Buradaki nedeni de 24 fark varmış şu orandaki sekizden beşi çıkardım üç buldum. 24'ü üçe böldüm sekiz buldum. Sekiz buradaki genişletmemiz gereken sayı. Beş ile sekizi çarptım 40. Sekiz ile sekizi çarptım 64. Buna göre bu fabrikada toplam çalışan kişi sayısını da 64 ile 40 toplayarak 104 buldum.

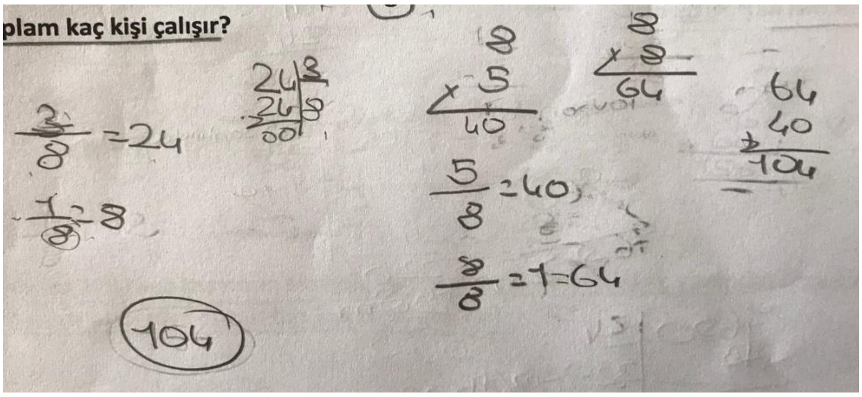
Ö3 ise farklı bir çözüm yöntemi uygulamıştır. Erkek sayısının kadın sayısına oranı olan $\frac{5}{8}$'i temel alarak bu kesri sözlü olarak modelleyerek kadınların sayısını, erkeklerin sayısını ve bu sayıların aralarındaki farkı belirlemiştir. Modelde kadın sayısı ve erkek sayısı arasındaki farkı, problem bağlamında verilen 24 ile eşleştirerek yaptığı işlemler sonucunda doğru cevaba ulaşmıştır.

G: … Bu sorudan neler anladın?

Ö3: …Şimdi burada kadınlar erkeklerden 24 fazlaymış ve erkek sayısı kadın sayısının beş bölü sekizi. Yani biz kadını sekiz diye sayarsak erkeği beş olarak alacağız ve aradaki fark da üç. … Biz burada kadın sayısına sekiz, erkek sayısına beş dediğimiz zaman aradaki fark 24'tü ya, sekizden beşi çıkarınca da üç oluyor. Yani üç bölü sekiz aslında 24 oluyor.

G: Üç bölü sekiz nasıl 24'e eşit olur?

Ö3: Ben burada pastadan yola çıkacağım veya insanlardan da gidebilirim. İnsanları sekiz eş gruba ayırmışlar bunlar kadınlar, bu sekizin beş tane grubu erkekler, kalan üç tane grup var ya bunlar aradaki fark olur 24 oldu. Bu yüzden bir grupta kaç kişi olacağını bulmak için 24'ü üçe böleceğim ve sekiz olur. Yani bir bölü sekizlik kısım sekizdir. Burada erkek sayısı beş grup olduğu için sekiz ile beşi çarptığımda 40 ediyor, erkek sayısının 40 olduğunu görüyoruz. Kadın sayısı da sekiz eş gruptu zaten, sekiz ile sekizi çarptığımızda 64 ediyor ve kadın sayısının da 64 olduğunu görüyoruz. Bize bu fabrikada çalışan toplam kişi sayısını sorduğundan 40 ile 64'ü topladığımızda 104 ediyor.



Görsel 3.1.10. *Ö3'ün beşinci probleme ilişkin çözüm süreci*

Ö9 ise modelleme yapmaya başvurmasa da Ö3 ile benzer şekilde erkek sayısının kadın sayısına oranını kullanarak erkek ve kadınların temsil ettiği kesirleri ve aralarında farkı temsil eden kesri zihinden doğru bir şekilde hesaplayabilmiştir. Daha sonra kadın ve erkek sayıları arasındaki farkı, temsil ettiği kesir ile eşleştirmiştir. Böylece parçadan bütüne doğru giderek erkek ve kadın sayılarına ulaşmıştır.

G: Beşinci soruya geçebiliriz. Bu sorudan neler anladın?

Ö9: Hocam kadınlar erkeklerden 24 fazla. Yani üç bölü sekiz oluyor fazlalığı. 24'ü üçe bölünce bir bölü sekizlik kısım sekize denk gelmiş oldu. Sekizi sekizle çarptım 64 buldum, sonra beşi sekizle çarptım 40 buldum. İkisini topladım 104 kişi çalışıyormuş.

G: Kadınların sayısını hangi kesirle ifade ettin?

Ö9: Kadınlar sekiz bölü sekiz kesri olur.

G: Erkeklerin sayısını hangi kesirle ifade ettin?

Ö9: Kadınların beş bölü sekizi olduğu için erkekler beş bölü sekiz kesrine denk gelir. Aradaki farkı da 24 olduğu için sekiz bölü sekizden beş bölü sekizi çıkarınca 24 aslında üç bölü sekiz kesri oldu.

G: 24'ü neden üçe böldün?

Ö9: Üç bölü sekizmiş 24 olan. Ben bir bölü sekize ulaştım. Çünkü buradan hem kadınların sayısına hem de erkeklerin sayısına ulaşabilirim. Bir bölü sekizlik kısım sekiz oldu. Kadınların sayısını bulmak için sekizle çarptım 64, erkeklerin sayısını bulmak için beşle çarptım 40 oldu. Toplayınca fabrikada çalışan kişi sayısını buldum.

Ö4, öncesinde problemin doğru cevabına ulaşamamıştır. Problemde verilen oranın hangi iki değerin oranı olduğunu doğru olarak yorumlamıştır. Oranı doğru olarak yorumlasa da, önceki yıllardan beri sonuca ulaşmak için kullandığı bir yöntemi uyguladığını belirtmiş, yaptığı işlemleri anlamlandıramamıştır.

(…)

G: Şimdi kademe kademe gidelim. Sorunun ilk cümlesindeki sekizde beş oranı ne demektir?

Ö4: Fabrikadaki erkek sayısının kadın sayısına oranı beş bölü sekiz.

G: Tamam, bu orandaki beş ve sekizi birbiriyle çarpma sebebin nedir?

Ö4: (Düşünüyor) Hocam küçüklükten beri öyle yaptığım için (gülüyor).

G: Nasıl yani?

Ö4: Bir sonuca ulaşamayınca mesela direkt böyle yapıyorum.

Ö4, klinik görüşme sırasında hata yaptığını fark edip hatasını düzeltmiştir. Öncesinde erkeklerin sayısını fazla olarak düşünmüş, sonra kadınların fazla olduğunu fark etmiştir. Ancak kullandığı yöntemlerden dolayı tesadüfi olarak doğru cevaba ulaşmıştır.

Doğru cevaba ulaşan Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö9'a bu problemi başka yöntemle (cebirsel ifadelere başvurarak) çözüp çözemediği sorulmuştur. Ö1, doğru cevabı bildiğinden ona yönelik yöntem üretmeye çalışsa da bu yöntem anlamlı olmamıştır. Fabrikada çalışan kadın ve erkek sayılarını modellemiş ancak kadın sayısı ve erkek sayısını model üzerinde yanlış temsil etmiştir. Ö3 ise problem bağlamında ek bilgiler verilseydi anca başka yöntemle çözebildiğini belirtmiştir.

G: Peki bu soruyu başka bir yöntemle çözebilir misin?

Ö1: Eeee. Sanırım evet.

G: Nasıl çözersin?

Ö1: Küçük sayıyı çok daha kolay bulabilirmişim. Erkek sayısını yani.

G: Nasıl bulurdun?

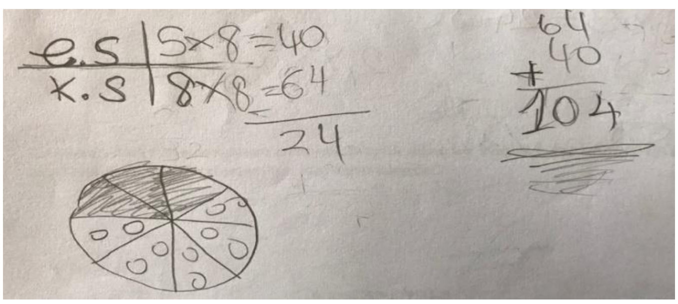
Ö1: Beş ile sekizi çarparak bulabilirmişim 40'ı.

G: Neden beş ve sekizi çarpıyorsun?

Ö1: Sekizin dörde bölünmüş hali kızlar yani sekizde dört kızlar oluyor. Ay pardon sekizde üçü kızlar oluyor. Yani sekiz dilimlik bir pastanın üç dilimini aldığımda geriye kalan beş dilimlik kısmını erkekler olarak düşündüm. Ama kızlar daha fazlaydı o zaman tam tersi olacak. Bir dakika bir daha pasta çizeceğim. (Daire şeklinde bir pasta çiziyor ve sekize bölüyor.)

G: Bu pastada erkeklerin kapladığı kısmı çizgilerle tarar mısın? (Ö1 üç dilimi tarar.)

G: Pastada kadınların kapladığı kısmı nokta nokta tarar mısın? (Ö1 beş dilimi tarar.)



Görsel 3.1.11. Ö*1'in beşinci probleme ilişkin çözüm yöntemi ve pasta modeli*

G: Bu pastaya göre sonuca nasıl ulaşırsın?

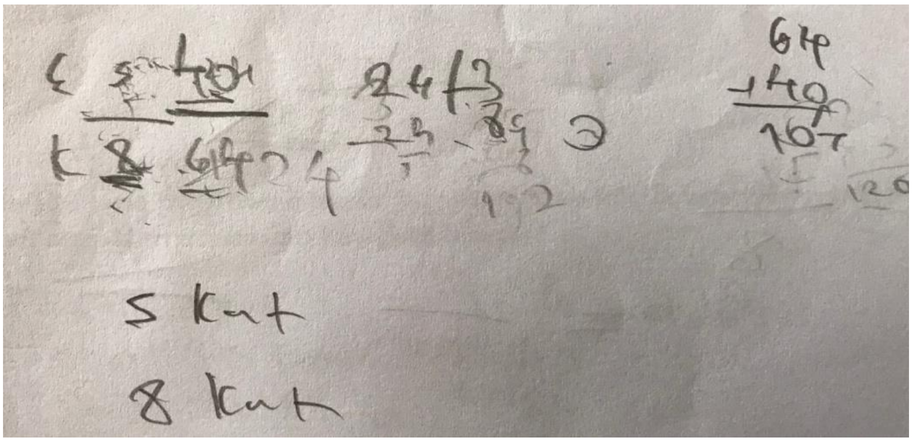
Ö1: Soruda kızların daha fazla olduğunu söylemiş zaten. Tam denk geliyor mu bilmiyorum ama sekizde beşi demiş. Beş ile sekizi çarparak 40 buldum, bu erkek sayısı. Sonra sekizle sekizi çarpınca 64 oldu. İşte ikisini topladım 104 oldu yine.

Ö2 ise başka bir yöntemle problemi çözmek için düşünmüş ve erkek sayısını "5kat", kadın sayısını "8kat" olarak etiketlemiştir. Ancak bu etiketlemenin devamında çözüm üretememiş ve bu şekilde problemi çözmeyi bırakmıştır.

G: Peki, bu genişletme yönteminden başka bir yöntemle bu soruyu çözebilir misin?

Ö2: Yani, aslında hiç öyle düşünmedim.

G: Bir düşün istersen. (Öğrenci kağıda 5 kat ve 8 kat yazıyor.)



Görsel 3.1.12. *Ö2'nin beşinci probleme ilişkin çözüm yöntemleri*

Ö2: Yani erkek 5 kat, şuradaki erkeklere 5 kat dedim. Kadınlara da 8 kat dedim.

G: Tamam çözmeye devam edebilir misin?

Ö2: (Düşünüyor). Hayır devamı gelmedi.

Ö9 ise kadın sayısına ilk yöntemiyle ulaşacağını belirtmiştir. Ancak erkek sayısını oran kullanarak hesaplamak yerine, problem bağlamında verilen diğer bilgi yardımıyla da hesaplayarak yine doğru cevaba ulaşabilmiştir.

Ö5, Ö6, Ö7 ve Ö8 ise problemin doğru cevabına ulaşamamışlardır. Ö5, problemde verilen oranı anlamlandırabilmiş ancak verilen bilgileri yanlış anladığından öncesinde yanlış bir çözüm yöntemi kullanmıştır. Klinik görüşme sırasında problemi tamamen anlayan Ö5, kadınlarla erkekler arasındaki farkı, verilen oranla birlikte nasıl kullanacağını bilemediğinden çözümü tamamlayamamıştır.

G: Bir fabrikadaki erkek sayısının kadın sayısının sekizde beşi olması ne demektir?

Ö5: (Sessizlik) Aaa… Ben yanlış anlamışım. Ben kadın sayısı erkek sayısının sekizde beşi sandım. O zaman 24'ü sekize bölmüştüm zaten üç, üçle beşi çarptım 15 oldu. Sekizde beşi olduğu için sekize bölüp üçle çarpıyoruz. 15 erkek sayısıdır o zaman. Sekizde beş olan erkekler çünkü. Kadınlar 24 fazlaysa eklerim 39 kadın sayısı oldu. Toplam 54 kişi çalıştı.

G: Neden 24'ün sekizde beşini alıyorsun?

Ö5: (Sessizlik) Çünkü… Hiii ben tamamen yanlış anladım. Bu soruda çok yanlış çözmüşüm ben. Aradaki fark olduğunu değil de çalışanların bir kısmı 24 diye anladım, hemen sekizde beşini aldım ben. (Düşünüyor) O zaman bu soru çok zor oluyor… Erkekler yine 15 oluyor. (Düşünüyor) Hayır ben yanlış şeyin sekizde beşini aldım ben. Nasıl bulacağız ki? Kadın sayısını da bilmiyoruz, erkek sayısını da bilmiyoruz. Sadece aralarındaki farkı biliyoruz.

G: Bu oran ne demektir?

Ö5: Erkeklerin kadınlara oranı beş bölü sekiz. (Sessizlik) Ben bu soruyu çözemiyorum.

Ö6 ise problemi çözmeye iki değişken ve cebirsel ifadeler kullanarak başlasa da, klinik görüşmeler sırasında bu cebirsel ifadeleri ve problemde verilen oranı anlamlandıramadığını fark etmiştir.

G: Beşinci soruya geçebiliriz. Bu sorudan neler anladın?

Ö6: Kadın sayısının sekizde beşi kadar erkek varmış fabrikada, kadınlar erkeklerden 24 fazlaymış. Ben şöyle yaptım, erkeğe y dedim, kadına da x dedim. Erkek, kadın sayısı x olduğu için 5x ediyor yani 5 tane x'in toplamı erkek sayısı 5x oluyor. Çünkü erkek sayısı kadın sayısının sekizde beşi kadar diyor.

G: Kadın sayısı olan x'in sekizde beşi ne oluyor?

Ö6: (Düşünüyor) 5x oluyor. Yok… Yani bilmiyorum (gülüyor).

G: Tamam, devamında neler düşündün?

Ö6: Burada y+24 yazdım. Çünkü erkek sayısının 24 fazlası kadın sayısı yapıyormuş. Şimdi 24 fazlaymış, 24'ü sekize böldüm üç buldum. Bir x'in üç olduğunu düşünerek beşi üçle çarptım 15 buldum. Sonra y 15 oldu, 24 ekledim 39 kadın sayısı oldu. 39 ile de 15'i topladım 54 kişi çalışıyor olarak buldum.

G: 24'ü sekize neden bölme gereği duydun?

Ö6: Çünkü burada önce 24'ü beşe bölmeyi denedim, insan sayısı tam çıkmalı diye olmadı. Ama 24 sekize tam bölünüyor diye ona böldüm. Mantıksız oldu biraz ama… Off hocam bilemedim.

Ö7 ve Ö8, problemi benzer yöntemlerle çözmüş ve yanlış cevaba ulaşmışlardır. Her iki katılımcı da problemde yer alan sayıyı ve oranı anlamlandırmadan, kadınların ve erkeklerin sayısı arasındaki farkın sekizde beşini almışlardır. Bunun sebebi sorulduğunda ise problemde sekizde beşinin alınması gereken tek bir sayı olduğunu belirtmişlerdir. Ancak Ö7, sayının sekizde beşini alırken yapılması gereken işlemlerin tersini uygulamıştır. Neden sayının sekizde beşini aldığı sorulduğunda ise "içinden öyle geldiğini" belirtmiştir. Problemde verilen bilgileri ve oranı anlamlandırmayan Ö7, bulduğu cevap ondalık sayı çıktığı halde bir fabrikada ondalık sayıda kişinin çalışamayacağını öne sürüp mantıklı bir açıklama getirmeden virgülü kaldırmıştır. Klinik görüşme sırasında problemi yanlış çözdüğünü fark etse de, hatasını düzeltememiştir.

G: … Bir sonraki sorudan neler anladın?

Ö7: İlk başta kadınlar 24 kişi fazla ise 24'ü sekizle çarptım 192 çıktı. 192'yi de beşe böldüm 38,4 çıktı. Onu da sadeleştirip 384 kişi buldum.

G: 24 ile sekizi niye çarptın?

Ö7: Eee… (Düşünüyor) Onu nasıl söyleyeceğimi bilemedim. Bilmiyorum içimden öyle geçti. Beş ile çarptığımda az kişi çıkar diye düşündüm. Fabrika bu yani fazla kişi çalışır.

G: 192'yi beşe bölüp 38,4 sonucuna ulaşmışsın. 38,4'ü nasıl sadeleştirerek 384 hesapladın?

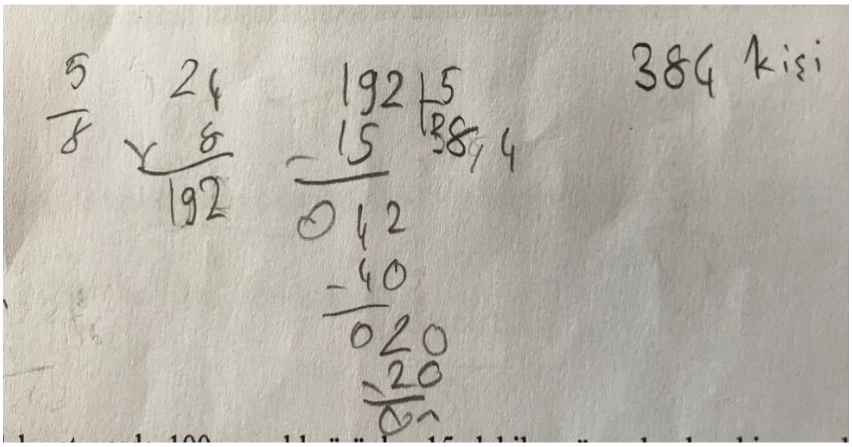
Ö7: Ya… Virgülü direkt sildim. Sonuçta 38,4 kişi çalışamaz bir yerde.

G: Bir yerdeki erkek sayısının kadın sayısının beş bölü sekiz olması ne demektir?

Ö7: Erkeğin sayısı… Ben bu soruyu yanlış yapmışım galiba.

G: Tekrar çözmek ister misin?

Ö7: Hayır… (Düşünüyor) Yok yok böyle kalsın. Ne yapacağımı bilmiyorum ki.



Görsel 3.1.13. *Ö7'nin beşinci problemde ondalık sayıdaki virgülü kaldırıp sonuca ulaşma süreci*

6. Problem: Bir laboratuvarda 100 gramlık ürünler 15 dakika sürecek olan kimyasal bir tepkimeye girmiştir. Tepkime sonucunda ürünlerin bir kısmı buharlaşmış ve geriye 20 gram ürün kalmıştır. Tepkimeye giren ürünlerin miktarı tepkime süresini etkilediğine göre; 2 saat sürmesi için kaç gramlık ürünün tepkimeye sokulması gerekir? Geriye kaç gram ürün kalır?

Şekil 3.1.6. *Veri Toplama Aracı-1'in altıncı problemi*

Altıncı problemde Ö2, Ö3, Ö5, Ö6 ve Ö9 anlamlı oranlar kurup birim dönüştürmeleri yaparak problemde istenen tüm soruların cevaplarına ulaşmışlardır. Problemin tamamına hakim olabilmiş, hem birimler arasında doğru dönüşümler yapmış hem de süre ve tepkimeye giren-çıkan ürünleri oranlamışlardır. Bu katılımcılar önce iki saatin içinde kaç tane 15 dakika olduğunu hesaplamışlar, süreler arasındaki oranın aynısını tepkimeye girecek ve çıkacak ürünlere de uygulamışlardır. Böylece doğru cevaba ulaşabilmişlerdir. Ancak Ö9, diğerlerinden farklı olarak tepkimeye giren ürünlerin miktarını hesaplamak için tepkimeden çıkan ürün miktarını tepkimede buharlaşan ürün miktarına eklemeyi tercih etmiştir.

Ö1, "tepkimenin iki saat sürmesi durumunda kaç gram ürünün tepkimeye sokulması gerektiği" problemini çözme aşamasında problemde karşılaştığı nicelikleri kendisi de anlamlandıramadığı bir şekilde işleme sokmuştur. Birim dönüşümlerini yapmamış ve "süre" niceliğinin oranını önemsememiştir. Çözümündeki işlemleri neden tercih ettiği sorulduğunda ise bunun nedenini açıklayamamıştır. Buradan bir cevaba ulaşmak için rastgele işlemler yaptığı anlaşılmaktadır. Ö1 problemin ikinci kısmında "tepkimenin iki saat sürmesi durumunda kaç gram ürünün geriye kalacağı" probleminde doğru yöntemle düşünmüş olsa da, problemin ilk kısmını doğru hesaplamadığından ikinci kısmında da yanlış sayısal değere ulaşmıştır. Ö1, 15 dakikalık tepkimede giren ürünün çıkan ürüne oranını hesaplayabilmiş, bu oranı kendi bulduğu yanlış sayıya uygulayarak tepkimeden çıkan ürün miktarına ulaşmıştır.

Ö4 ise çözüm sürecinde önce iki saatin içindeki 15 dakikaları hesaplamış ancak bunu iki saatin kaç dakika olduğunu bulmak için yaptığını belirtmiştir. İki saati elde ettikten sonra ise hem tepkimeye giren hem de buharlaşan ürünlerin 120 katını almayı tercih etmiştir. Bu iki miktarı hesapladıktan sonra farklarını alarak tepkimeden çıkan ürün miktarına ulaşmıştır. Ancak verilen tepkime ve istenen tepkime arasında doğru oranlamalar yapmadığı için yanlış cevaba ulaşmıştır.

Ö7 ise hem saat ve dakika arasındaki dönüşümü hem de tepkimeye giren ve çıkan ürünlerin miktarları arasında doğru oranlamaları yapamamıştır. Problem bağlamında verilen bilgileri rasgele işlemlere sokarak, Ö1 ile benzer şekilde deneme-yanılma yöntemiyle cevaba ulaşmaya çalışmıştır.

G: … Bu sorudan neler anladın?

Ö7: 100 gramlık ürünler 15 dakika sürecek olan tepkimeye girdiğinde 20 gram ürün kalıyor geriye, yani 80 gram ürün erir diye düşündüm. 80 gramı da tepkimenin iki saat sürmesi için ikiye böldüm 40 çıktı. Yani tepkimenin iki saat sürmesi için 40 gram ürün geriye kalan ürün olur.

G: Neden 80'i ikiye böldüğünü açıklar mısın?

Ö7: Şimdi 15 dakika sürmesi için 100 gram giriyormuş, 20 gram kalıyormuş, 80 gram eriyormuş. İkiye bölmem gerekir. 15'e bölsem olmaz, çünkü zaten 15 dakika sürmesi için 100 gram girmeliymiş, o belli soruda. O zaman bize iki saati sorduğu için ikiye bölmeliyim.

G: Eğer 40 gram geriye kalan ürün ise kaç gram ürün tepkimeye sokulmalıdır?

Ö7: (Düşünüyor) Bulduğum 80'den 40'ı çıkarırım desem... Yine 40 çıkıyor. 40 gram tepkimeye giriyor.

G: Hiç ürün erimemiş o zaman iki saatlik tepkimede.

Ö7: Hiç bu şekilde düşünmemiştim. (Düşünüyor) O zaman 40'dan 15'i çıkarsam… 35 kalır. O zaman 35'i buharlaşmış olur.

G: 40'dan 15'i neden çıkardın?

Ö7: Bilmiyorum hocam.

G: Sayıları rastgele deniyormuşsun gibi geldi bana.

Ö7: Biraz öyle oldu burada. Çünkü diğer sayılar tutmadı, ben de 15'i çıkardım.

Ö8, problemde doğru yöntemi kullanmış, doğru oranlamalarla tepkimede çıkan ürün ve buharlaşan ürün miktarını doğru hesaplamış olsa da, bu iki miktarın farkını alarak tepkimeye giren ürün miktarına ulaşmıştır. İki değerin neden farkını aldığı sorulduğunda ise mantıklı bir açıklama getiremediğinden problemin bir kısmını yanlış cevaplamıştır.

(…)

G: Peki kaç gram ürün tepkimeye girmelidir?

Ö8: (Düşünüyor) 640'dan 160'ı çıkarsam, 480 gram tepkimeye girmelidir.

G: Tepkimeye giren ürün miktarı, buharlaşan ürün miktarından nasıl fazla oldu?

Ö8: (Sessizlik)

7. Problem: Leyla'nın demir paraları iki farklı değere sahiptir. 2 tane küçük demir parası ve 3 tane büyük demir parasının değerleri toplamı 2TL, 2 tane küçük demir parası ve 7 tane büyük demir parasının değerleri toplamı 4TL dir. Leyla'nın demir paralarının değerleri kaçar kuruştur?

Şekil 3.1.7. *Veri Toplama Aracı-1'in yedinci problemi*

Yedinci probleme Ö2 ve Ö7 haricindeki tüm katılımcılar doğru cevap verebilmiştir. Ö2 deneme-yanılma yöntemini kullanarak problem bağlamında verilen bilgilerden yardım alarak paraların sayısına göre değerlerini tahmin etmeye çalışmıştır. Ancak herhangi bir cevaba ulaşmamış, deneme yapmayı bırakmıştır.

G: … Gördüğüm kadarıyla yedinci soruda bir cevaba ulaşamamışsın ama aklından geçenleri öğrenmek istiyorum. Öncelikle bu sorudan ne anladın?

Ö2: Öncelikle burada iki tane küçük demir parçası ve üç tane büyük demir parçası 2 TL ediyormuş. İki tane küçük demir parçası ile iki tane büyük demir parçası 4 TL ediyormuş. Ben burada iki tane küçük demir parçasının üç tane büyük demir parçasından daha büyük bir değeri olduğunu düşündüm. Bu nedenle büyük paraları bir lira yaparsak küçük paraların da 50 kuruş olduğunu düşündüm. Ama soruyu sağlamadığından dolayı ben bunu bulamadım. Hepsine bir sayı vererek de düşündüm. Denemeye yönelik düşündüm ama bulamadım. Onun dışında başka türlü de düşündüm, öbür türlü de bulamadım. Bu nedenle yedinci soruyu bulamadım.

Ö7 ise problemde verilen bilgileri anlamlandıramadığı için paraların değerlerini ve paraların miktarlarını toplamayı tercih etmiş ve toplam sayıdaki paraların toplam değerini hesaplamıştır. Ancak her iki cümlede de ortak olan iki küçük demir parayı iki kere saydığından toplam para miktarını yanlış hesaplamıştır. Daha sonra ise paraların sayısı ve değerlerini toplamış, ancak bu yaptığına mantıklı bir açıklama getiremeyerek problemi yanlış cevaplamıştır.

G: … Neler anladın bu sorudan?

Ö7: İki tane küçük demir parası ve üç tane büyük demir parası 2 TL, iki tane küçük demir parası ve yedi tane büyük demir parası 4 TL ise ben bu değerleri topladım 6 TL etti. Diğer paraların tanelerini topladığım zaman da 14 tane oldu. Yani 14 tane demir parası altı TL etti. 14 ile altıyı topladım 20 kuruş yaptı.

G: 20 kuruş dediğin şey nedir?

Ö7: Demir paranın değeri.

G: Hangi demir paranın?

Ö7: (Düşünüyor) İşte hem küçüğün hem büyüğün toplam değeri.

Ö1, Ö4, Ö5, Ö8 ve Ö9 hem küçük hem de büyük demir paraların değerlerini deneme-yanılma yöntemiyle hesaplamışlardır. Günlük yaşamda kullandıkları paraların değerlerini küçük ve büyük demir paraların değerleriyle eşleştirip problem bağlamında verilen bilgilerle sağlamasını yapmışlardır. Ancak Ö9, tüm bu süreci zihninden işlem yaparak tamamlamıştır.

G: Tamam, yedinci soruya geçelim o zaman. Bu sorudan neler anladın?

Ö9: Deneme-yanılma yöntemiyle yaptım.

G: Yine işlem görmüyorum kağıdında, hemen buldun mu değerleri?

Ö9: Yani ilk başta biraz kafam karıştı boş bıraktım. Sonra geri döndüğümde çok kolay olduğunu fark ettim.

G: Cevabının kesin doğru olduğuna nasıl emin oldun?

Ö9: Küçüğe 25 kuruş olsun, büyüğe 50 kuruş olsun dedim. Sonra soruda verilenlerin yerine koyunca zaten eşit oldu. Her ikisini de sağladığı için bitirdim çözmeyi. Öyle emin oldum yani.

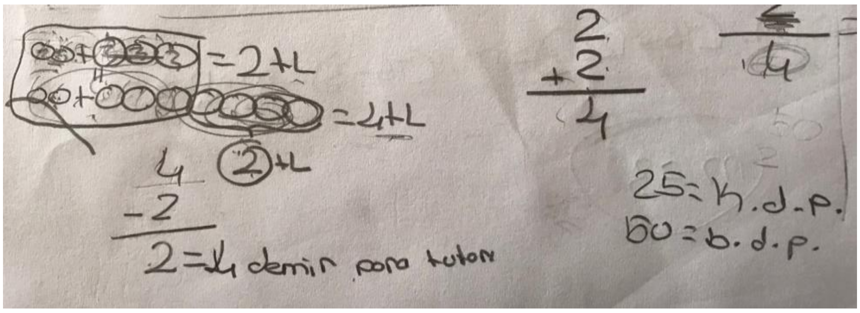
Ö3, küçük ve büyük demir paraları bar modelinden faydalanarak modellemiş, bu model üzerinde problem bağlamında verilen bilgileri uygulamış ve hem küçük demir paranın hem de büyük demir paranın doğru değerlerine ulaşabilmiştir.

G: … Bu sorudan neler anladın?

Ö3: … Leyla'nın iki tane küçük ve üç tane büyük demir parası var, bunların değerleri toplamı 2 TL imiş. Ben önce iki tane küçük demir para çizdim, üç tane de büyük demir para çizdim eşittir 2 TL yazdım. Yine altına aynı yerden başlayarak iki tane küçük demir para çizdim artı dedim ve yine altına aynı yerden başlayarak yedi tane büyük demir para çizdim üç tanesi üsttekiyle alt alta gelecek şekilde oldu. Buna da eşittir 4 TL'dir yazdım soruda böyle vermiş. Bu alt alta gelen iki küçük demir para ve üç büyük demir para 2 TL idi, yedi büyük demir paradan geriye kalan o dört büyük para da 2 TL ye eşir olduğunu görebiliyoruz. Bir tane büyük demir paranın değerini bulmak için ikiyi dörde böldüm. İki bölü dördü sadeleştirdim bir bölü iki oldu. Beş ile genişlettim beş bölü on oldu yani 0,5 oldu. … O da 50 kuruş olur.

G: Bir tane küçük demir paranın değerini nasıl hesapladın?

Ö3: Şimdi soruda bize on tane büyük demir para ve iki tane küçük demir paranın toplamı 2 TL demişti. Biz büyüğü 50 kuruş bulmuştuk zaten, üç tanesi 1,5 TL yapacak. 2 TL'den 1,5 TL'yi çıkarınca 50 kuruş oluyor. Bu 50 kuruş iki tane küçük demir para ettiğinden bir küçük demir paranın değeri 25 kuruş oluyor.

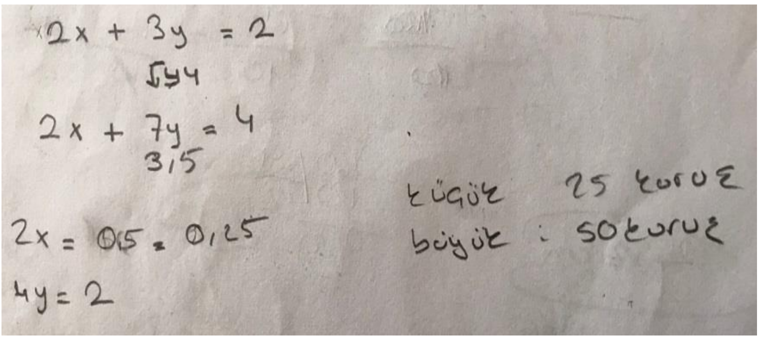


Görsel 3.1.14. *Ö3'ün küçük ve büyük demir paraları modellemesi*

Ö6'da küçük demir paranın ve büyük demir paranın değerlerine değişken atayarak problem bağlamında verilen bilgilere göre iki bilinmeyenli denklemler oluşturmuştur. Denklemlerindeki ortak özelliği fark ederek denklemi çözmüş ve değişkenlerin sayısal değerlerini hesaplayabilmiştir.

G: Yedinci sorudan neler anladın?

Ö6: (Problemin tamamını okuyor) Problemdeki bilgilerin ikisinde ortak bir özellik var, her ikisinde de iki küçük demir para varmış. Ben bu küçük demir paralara x dedim, büyük demir paraya da y dedim. İki küçük demir para diyor ikisinde de, büyük demir paralar eşitliyor durumu yani. Birinde 3y var, birinde 7y var. Bu küçük demir paraları görmezden geliyoruz, arada 4y lik bir fark var. Bu 4y fark da bizim için iki liralık bir fark demek oluyor. iki lira 4y olduğu için, iki lirayı dörde bölünce büyük demir para 50 kuruş oluyor. Büyük demir para 50 kuruş olunca, yedi tane 50 kuruş ne kadar eder, 3,5 lira eder. O zaman kalan 50 kuruşa da 2x yani iki küçük demir para düşüyor. Kalan 50 kuruşu ikiye böldüm 25 kuruş çıktı. Bir küçük demir para 25 kuruş oldu.



Görsel 3.1.15. *Ö6'nın yedinci problemde küçük demir para ve büyük demir paranın değerlerine atadığı değişkenler*

8. Problem: Bir tavşanın hızı 960 cm/dk dır. Aynı anda tavşan ve kaplumbağa yarışa başladıklarında tavşan parkuru 8 dk da bitirmiştir. Aynı mesafeyi kaplumbağa 3 katı fazla sürede bitirdiğine göre, kaplumbağanın hızı kaç m/dk dır?

Şekil 3.1.8. *Veri Toplama Aracı-1'in sekizinci problemi*

Sekizinci problemde yalnızca Ö3 ve Ö9 doğru çözüm yöntemi uygulamıştır. Ö1 ve Ö5 kaplumbağanın parkuru bitirme süresi tavşanın parkuru bitirme süresinin üç katı olduğu bilgisinden yola çıkarak hızlarının oranının da aynı olduğunu, yani kaplumbağanın hızının da tavşanın hızının üç katı olması gerektiğini düşünmüşlerdir. Hız biriminin ne anlama geldiğini açıklayamayan Ö1, ulaştığı cevabın birimini problemde istenen birime dönüştürememiştir.

G: … Sekizinci sorudayız. Ne anladın bu sorudan?

Ö1: Tavşan ve kaplumbağa bir yarışa giriyorlarmış. Tavşanın hızı 960 cm/dk mış. Kaplumbağa da parkura tavşanla aynı anda başladıklarında tavşan parkuru sekiz dakikada bitirmiş. Aynı mesafeyi kaplumbağa üç katı fazla sürede bitiriyor, yani sekiz ile üçü çarptım 24 dakikada bitirir. Tavşanın hızı 960 cm/dk idi, ama kaplumbağanın hızını bizden m/dk olarak istiyor. Santimetre olarak bulduğumuzu metreye çevirmemizi istiyor bir de. Ben 960'ı da üç ile çarptım önce.

G: 960'ı neden üç ile çarptın?

Ö1: Sorudaki dakika kısmını buldum zaten 24 dakika olduğunu. 960 olan kısmın da üç katı olduğunu düşündüm, yani zaman ilerledikçe üç katı daha fazla koştuğunu düşündüm. Çıkan sonuç 2880 çıktı.

G: Peki hesapladığın 2880 sayısının birimi nedir?

Ö1: Eeeee… Cm/dk. Bizden bunu metreye çevirmemizi istediği için metreye çevirirken üç tane sıfır atmamız gerekecek. Birinci sıfırı attım 288. İkinci sıfır için de ondalıklı sayıya dönüştürürüz. Üçüncü sıfırda da virgül 2'nin yanına gelecek. Yani 2,88 m/dk oluyor cevabı.

G: m/dk birimi ne ifade etmektedir senin için?

Ö1: Koştuğu uzaklığı, dakikaya böldüğümüzde çıkan sonuç olduğunu düşünüyorum.

Ö5 ise çözüme ulaşana kadar yaptığı işlemlerden emin olmadığını klinik görüşme sırasında belirtmiştir. Hız biriminin ne anlama geldiğini ifade edebilse bile, bu bilgiyi problem çözme sürecine yansıtamamıştır.

G: Tavşanın hızı 960 cm/dk imiş. Bunun anlamı nedir?

Ö5: (Düşünüyor) Tavşan dakikada 960 cm gidiyor.

G: Tamam. Problemi çözerken neler düşündün?

Ö5: (Düşünüyor) Ben şu sekiz dakika bilgisini şaşırtma olarak verdiğinizi düşündüm. Kaplumbağa tavşanın üç katı fazla sürede bitirdiği için hızı da üç katı sürede olur dedim. Tavşanın hızını üçle çarparak 2880 cm/dk buldum. Ama bize m/dk dediği için… (Düşünüyor) 28,8 m/dk olacak.

G: Kaplumbağa, tavşanın üç katı sürede parkuru bitiriyorsa; neden kaplumbağanın hızı da tavşanın hızının üç katıdır dedin?

Ö5: Bilmem. (Düşünüyor) Öyle düşündüm ama emin olmadan yaptım bunu da zaten. Öyle olmasa, 960'ı üçe bölsem… Hayır… Sallıyorum şu an. Anlamıyorum.

Ö2 ise kaplumbağanın hızını cm/dk biriminde doğru hesaplamış ancak birimler arasında dönüşüm yaparken yanlış cevaba ulaşmıştır. Aynı zamanda Ö2 hız, alınan yol ve süre arasındaki ilişkiyi öğrendiği ezber bilgilerle kurmuştur. Hızın anlamını arka planda bırakıp sadece sayılara ve öğrendiği Hız=Yol÷Zaman formülüne odaklanmıştır. Ö2'ye hız biriminin anlamı sorulduğunda ise ancak günlük yaşamdan örnekler vererek anlamlandırabilmiştir.

(…)

G: Cevabının birimi nedir?

Ö2: 32 m/dk dedim.

G: 32 m/dk kaplumbağa için ne ifade ediyor?

Ö2: Yani m/dk örneğin arabaların daha çok anne ve babalarımız araba sürerken bize mesela saatte 360 km gidiyor diyor. Burada ki sürat anlamındadır. O zaman… (Düşünüyor) Aynı mantıkla... Kaplumbağanın 1 dakikada 32 metre yol gittiğini söylüyor.

Ö3, problemi önce Ö1 gibi çözmüş, süreler arasındaki oranın hızlar arasındaki oran ile aynı olduğunu düşünmüştür. Ancak daha sonra hatasını fark edip problemin doğru cevabına ulaşabilmiştir. Üstelik ezber bilgiler ve formüllere başvurmak yerine hızın anlamına odaklanarak problemi çözmüştür. Hesapladığı sayısal değeri problem bağlamında istenen birime de doğru bir şekilde çevirebilmiştir.

(…)

G: Öncelikle sana şunu sormak istiyorum; tavşanın hızının 960 cm/dk olmasının anlamı nedir?

Ö3: Yani tavşanın süratı 960 olur.

G: Şu cm/dk birimi ne ifade eder?

Ö3: Yani tavşan bir dakikada 960 cm yol gidiyormuş. Ben şöyle bir şey buldum. Şimdi tavşan parkuru sekiz dakikada bitirmiş. Zaten bir dakikada da 960 cm yol gidiyormuş. Şimdi biz bu parkurun kaç cm olduğunu bulmamız için 960'ı sekiz ile çarpmamız gerekiyor, o da 7680 cm olur. Ama bize metre diyor o da 76,8 m olur. Kaplumbağanın parkuru kaç dakikada bitirdiği 24 dakikaydı zaten. Parkurun uzunluğu da 76,8 metreydi zaten, m/dk bulmak için 76,8'i 24'e böleceğiz. Ama ben ondalıklı sayı zor ya 7680 cm'yi 24'e bölüp sonra cm/dk'yı m/dk'ya çevirdim hocam. Benim ondalıklı sayılarda bölmem biraz kötü olduğu için böyle daha kolay oldu. Bölünce de 320 cm/dk oldu sürat. Ben bunu dönüştürdüğümde 3,2 m/dk oluyor kaplumbağanın süratı.

Ö9'da Ö3'ün ikinci çözüm yönteminde olduğu gibi hızın anlamından yola çıkarak parkurun uzunluğuna, kaplumbağanın parkuru gittiği süreye ve kaplumbağanın hızına doğru bir şekilde ulaşabilmiştir. Birimler arasında dönüşümler yapabilmiştir.

G: … Neler düşündün soruyu çözerken?

Ö9: Hocam tavşan bir dakikada 960 cm gidiyormuş. Parkuru sekiz dakikada bitirmiş. Ben de parkurun ne kadar uzunlukta olduğunu bulmak için sekizle çarptım 960'ı, 7680 cm buldum. Sonra üç katı fazla sürede bitirmiş kaplumbağa, sekizi üçle çarptım 24 dakika olarak buldum. 7680'i de 24'e böldüm.

G: 7680'i 24'e neden bölmeyi tercih ettin?

Ö9: Hocam 7680 cm'yi 24 dakikada gitmiş, tüm parkuru yani. Ama kaç m/dk dediği için bir dakikada kaç metre gittiğini bulmam gerekiyor. Bölünce de 320 cm çıktı. M/dk olarak sorduğu için 320 cm'i metreye çevirmem gerek o da 3,2 oldu.

G: Yani kaplumbağanın hızı kaç olur?

Ö9: 3,2 m/dk olur.

Ö4 ve Ö6 hız biriminin anlamını bilmediklerinden çözüm sürecinin tamamını hatalı ilerletmiş ve yaptığı işlemleri anlamlandıramadığından yanlış cevaba ulaşmışlardır. Ö6 hesapladığı değerlerin bazılarının gerekli olmadığını klinik görüşme sırasında fark etmiştir. Ayrıca Ö4 problemde istenen kaplumbağanın hızını ifade ederken de hesapladığı uzunluk ve süreyi ayrı ayrı ifade etmiştir. Her iki katılımcı da santimetreden metreye dönüşümü doğru yapmışlardır.

Ö7 hız biriminin anlamını bilse bile bu bilgisini çözüm sürecine yansıtamamıştır. Çözümünün başında tavşanın gittiği yolu işlem hatası yaptığından yanlış hesaplamıştır. Devamında ise yaptığı işlemlere mantıklı bir açıklama getirememiş ve yanlış cevaba ulaşmıştır. Birimler arasındaki dönüşümü yapamamış, sayının büyüklüğüne göre birimin büyüklüğüne karar vermiştir. Ö4 ile benzer şekilde problemde istenen kaplumbağanın hızını ifade ederken de hesapladığı uzunluk ve süreyi ayrı ayrı ifade etmiştir.

G: … Sekizinci sorudayız. Bu sorudan neler anladın?

Ö7: Tavşan bir dakikada 960 cm yol gidiyormuş. Kaplumbağa parkuru sekiz dakikada bitirmiş. Bir dakikada 960 cm gidiyorsa sekiz dakikada ne kadar gider dedim. 960'ı sekizle çarparım 7280 cm olur dedim.

G: 7280 cm neyin uzunluğudur?

Ö7: İşte tavşanın gittiği yolun uzunluğu.

G: Tamam. Devamında nasıl düşündün?

Ö7: Kaplumbağa tavşanın üç katı fazla süresinde bitirdiği için 24 dakikada bitirmiştir. Yol 7280 idi, 960 çıkardım bundan, 6320 oldu.

G: Neden çıkardın?

Ö7: 7280 tüm yoldu, 960'ı tavşan giderse 6320'yi de kaplumbağa gider.

G: 6320'nin birimi nedir?

Ö7: Şimdi metre santimetreden daha uzun bir yoldur. 6320'de büyük bir sayı olduğu için 6320 metredir.

G: Sonuç olarak kaplumbağanın hızı kaç metre bölü dakikadır?

Ö7: 6320 metre… Bölü… 24 dakika.

Ö8 öncesinde hız biriminin anlamından yola çıkarak tavşanın gittiği yolu doğru hesaplamış olsa da, kaplumbağanın parkuru tamamlama süresi tavşanın parkuru tamamlama süresinin üç katı olduğundan, kaplumbağanın gittiği yolun da tavşanın gittiği yolun üç katı olması gerektiğini düşünüp yanlış cevaba ulaşmıştır. Santimetreden metreye doğru dönüşüm yapan Ö8, Ö4 ve Ö7 ile benzer şekilde problemde istenen kaplumbağanın hızını ifade ederken de hesapladığı uzunluk ve süreyi ayrı ayrı ifade etmiştir.

G: … Sekizinci sorudan neler anladın?

Ö8: Tavşanın hızı 960 cm/dk imiş. Tavşan parkuru sekiz dakikada bitiriyormuş. O zaman 960 ile sekizi çarpmalıyım.

G: Neden çarpmalısın?

Ö8: Çünkü hızı bir dakikada 960. Sekiz dakika için bu değer büyümelidir. 7680 buldum.

G: Hesapladığın 7680'in birimi nedir?

Ö8: Santimetre.

G: 7680 cm olarak hesapladığın nedir?

Ö8: Uzunluk. Tavşanın sekiz dakikada gittiği şey işte, parkur.

G: Tamam. Sonrasında nasıl düşündün?

Ö8: Kaplumbağa tavşanın üç katı fazla sürede parkuru bitiriyormuş. Yani 24 dakika olur sekiz çarpı üç. Sonra kaplumbağa üç katıysa o zaman tavşan için bulduğum 7680'i de üçle çarptım. 23040 oldu.

G: 23040 birimi?

Ö8: 23040 cm. Tavşanın gittiği yol da 23040 cm. Ama bize m/dk soruyor 230,40 m/dk.

G: 23040 cm'i nasıl 230,40 m/dk'ya çevirdin?

Ö8: (Sessizlik) 230,40 metre… Kaplumbağa 24 dakikada gitmiş. 230,40 m/24 dk diyeyim o zaman.

3.2. Katılımcıların Cebirsel ve Fonksiyonel Düşünmeleri İle İlgili Bulgular ve Yorumlar

Kaput'a (2008) göre cebirsel düşünmenin alt elemanları:

- Genelleştirilmiş Aritmetik
- Fonksiyonel Düşünme

şeklindedir. Bu sebeple veri toplama araçlarında fonksiyonel düşünmenin incelendiği problem bağlamları, katılımcıların cebirsel düşünmelerini de incelemeye yöneliktir. Bu problemlerin haricindeki iki problem ise katılımcıların sadece cebirsel düşünmelerini incelemeye yöneliktir.

Bu bölümde Veri Toplama Aracı-1 ve Veri Toplama Aracı-2'deki cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye yönelik problem durumlarında katılımcıların çözüm süreçlerine ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Veri Toplama Aracı-1 ve Veri Toplama Aracı-2'deki cebirsel ve fonksiyonel düşünme problemleri ve bulgular ayrı ayrı belirtilmiştir.

9. Problem: $a.(b+c)= a.b+a.c$ eşitliği sizin için neyi ifade etmektedir. a, b ve c harfleriyle kast edilen nedir?

Şekil 3.2.1. *Veri Toplama Aracı-1'in dokuzuncu problemi*

Dokuzuncu problemde Ö2 haricindeki tüm katılımcılar a,b ve c olarak belirtilen cebirsel ifadelerin sayılar olduğunu fark etmiştir. Ö1, Ö3, Ö4 ve Ö8 a,b ve c harflerinin temsil ettiği sayıları doğal sayılar kümesiyle sınırlandırmışlardır.

Ö2 bu problemde a,b ve c harflerinin cebirsel ifadeler olduğunu söylese de harflerin aslında sayıları temsil ettiğini bilmediğinden, a,b, ve c'nin hangi sayılara karşılık geldiğini belirtmemiştir.

G: … Bu sorudan neler anladın?

Ö2: … a, b, c kast edilen cebirsel ifadeleri gösteriliyor veya doğal sayılarda olabilir.

G: Sence a,b,c sayılar mı yoksa cebirsel ifadeler mi?

Ö2: Yani şuan a,b,c bana cebirsel ifade ediyor. Sanki… Yani şu an bana göre harf gibi gözüküyor.

Ö5 a,b ve c harflerinin tam sayılar kümesini temsil ettiğini; Ö6 ve Ö9 bütün sayıların (irrasyonel sayılar kümesi haricinde) kümesini temsil ettiğini, Ö7 ise sıfırın sayısal olarak değeri olmadığını düşünerek a,b ve c'nin sayma sayılar kümesini temsil ettiğini belirtmiştir.

Verilen eşitliğin dağılma özelliği olduğunu ise Ö1, Ö7 ve Ö8 haricinde tüm katılımcılar fark edebilmiştir. Ö1 ise sadece eşitliğin sol tarafındaki ve sağ tarafındaki harfler arasında olan çarpma ve toplama işlemlerini tanımlayabilmiştir. Ancak bu işlemlerin dağılma özelliğini oluşturduğunu belirtmemiştir.

G: … Bu eşitlik senin için ne ifade ediyor?

Ö1: Ben ilk önce a'ya herhangi bir sayı dedim, bilmediğimiz için, cebirsel ifadelerle yazdığımız için. Onunla başka bir sayıyı çarpmış, sonra o başka bir sayıya, başka bir sayı daha eklemiş. Eşittir; herhangi bir sayı çarpı başka bir sayı, artı herhangi bir sayı çarpı başka bir sayı daha oluyor.

Ö7 bu eşitliğin birleşme özelliği olduğunu, eşitliğin sol tarafındaki parantez içindeki işleme göre eşitliğin sağ tarafında harflerin (temsil ettiği sayıların) birbirleriyle birleştiğini ifade etmiştir. Ö8 ise bu eşitliğin değişme özelliği olduğunu, eşitliğin sol tarafındaki işlemlerin sayısının ve yerinin değişerek eşitliğin sağ tarafını oluşturduğunu ifade etmiştir. Ayrıca a,b ve c harfleri yerine örnek sayı değerleri vererek eşitliğin sol ve sağ tarafının her zaman eşit olduğunu belirtmiştir.

G: … Dokuzuncu sorudaki bu eşitlik senin için ne ifade ediyor?

Ö8: Ben bu eşitlikteki a,b ve c'yi sayılarla örneklendirdim. a'ya beş, b'ye iki, c'ye üç dedim. Birinci tarafta işlem önceliğinden önce parantez içini yaptım beş oldu, a ile yani beşle çarptım 25 oldu. İkinci tarafta da işlem önceliğinden önce çarpmaları yaptım 10 ve 15, topladım yine 25 oldu. Yani şu sonuç çıkıyor hocam, her iki taraf da her zaman eşittir.

G: Peki bu eşitlik işlemin hangi özelliğidir?

Ö8: Değişme özelliği hocam. Sonuçta iki taraftaki işlemler değişmiş. Birinci tarafta çarpı ve parantez içinde bir toplama varken ikinci tarafta iki çarpı bir toplama olmuş.

10. Problem: Aşağıdaki eşitlikte m kaçtır? $36\text{-}3.4+(25:5.3)= m.\ (4^2\text{-}12:4)$

Şekil 3.2.2. *Veri Toplama Aracı-1'in 10. problemi*

Bu problem Ö7 haricindeki diğer katılımcıların zorlanmadan doğru cevaba ulaştığı bir problemdir. Katılımcılar öncelikle eşittir işaretinin sol tarafını işlem önceliği bilgileriyle hesaplamıştır. Daha sonra eşittir işaretinin sağ tarafında bilinmeyen ile çarpım durumunda olan sayıyı işlem önceliği bilgileriyle hesaplamıştır. Eşittir işaretinin sol ve sağ tarafının sayısal değerinin aynı olması gerektiğinin bilincinde olan katılımcılar bilinmeyen "m"nin değerine ulaşabilmişlerdir. Ancak Ö1 önce yanlış cevaba ulaşmıştır. Klinik görüşme esnasında hatasını fark edip parantez içinde olmayan değerleri de parantez içine alarak işlem yapmayı tercih etmiştir. Düzeltmelerini yaparak doğru cevaba ulaşmıştır. Ö3’de bilinmeyene ulaşma sürecinde önce işlem önceliğinde işlem hataları yapsa da hatasını fark ederek doğru cevaba ulaşmıştır.

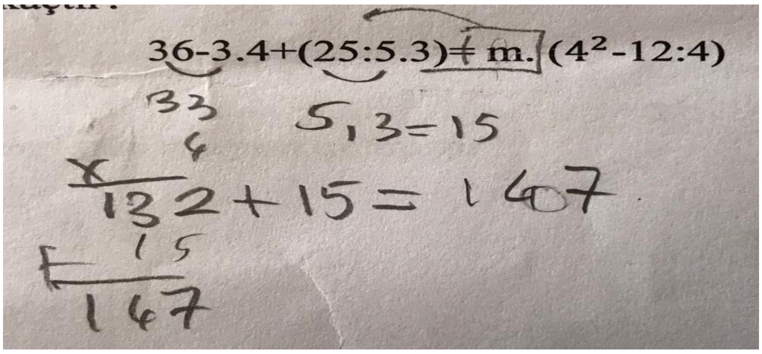
Ö7 ise eşitliğin sağ tarafında m ile çarpım durumunda olan parantez içindeki ifadeyi önemsemeyip hesaplamamıştır. İşlem önceliği ile eşitliğin sol tarafını doğru bir şekilde hesaplasa da, bu değerden sonra eşittir m ifadesi olduğundan bulduğu değeri direkt m’ye eşitlemeyi tercih etmiştir.

G: Onuncu soruda m’yi nasıl hesapladın?

Ö7: Hocam m 147 olur. Önce ilk kısmı yaptım yani m eşittir diye olan bu kısmı (Eşitliğin sol tarafını gösteriyor). Parantez içinden başlanır. Burada da soldan sağa gittim 25’i beşe böldüm beş, üçle çarptım 15 oldu. Parantez içi 15. Sonra soldan sağa yapmaya devam ederek; 36’dan üçü çıkardım 33, dört ile çarptım 132 dedim. Demin bulduğum 15’i 132’ye ekledim 147 oldu. Eşittir m diyor zaten, m 147 oldu.

G: Peki m’nin yanındaki parantez içindeki değer nedir?

Ö7: Onu önemsemedim hocam çünkü bulduğum 147 eşittir m yazıyor. Bize de m’yi soruyor direkt 147 oldu.



Görsel 3.2.1. *Ö7’nin 10. Probleme yönelik çözüm süreci*

11. Problem: Bir ormanda 5 maymun ve bir büyük ağaç bir de küçük ağaç bulunmaktadır. Maymunlar büyük ağaç ve küçük ağacın yanında oyun oynayacaklardır. Ağaçların yanındaki maymun sayılarının olası tüm durumları kaç tanedir? • Ormanda 123 tane maymun olsaydı, büyük ağaç ve küçük ağaç yanındaki maymun sayılarının olası tüm durumları kaç tane olurdu? • Ormanda n tane maymun olsaydı, büyük ağaç ve küçük ağaç yanındaki maymun sayılarının olası tüm durumları kaç tane olurdu?

Şekil 3.2.3. *Veri Toplama Aracı-1’in 11. problemi*

Ö1 ve Ö3 öncelikle problem bağlamını anlamakta zorlanmışlardır. Beş maymun için durum dağılımlarında; ağaçlar arasındaki mesafe, ağaçların sağ-sol ve orta bölgeleri gibi durumları da hesaba katarak maymun sayılarını ağaçlara dağıtmışlardır. Hesaba katılan bu özellikler, Ö1 ve Ö3'ün farklı olası durum düşünmelerine sebep olmuştur. Ö1 ağaçların birbirine yakın olmasına göre çok fazla olası durum bulmuş ve cevabın tek olmadığını belirtmiştir. Ağaçların birbirinden uzak olmasına göre ise aslında doğru çözüm yöntemini uygulasa da eksik olası durum hesaplamıştır. Bulduğu durumların tam tersini düşünememiştir.

G: … Bu sorudan neler anladın?

Ö1: Bu soruda beş tane maymun ve iki tane ağaç varmış biri büyük biri de küçük. Yanında oyun oynuyorlarmış. Ağaçlardaki maymun sayılarının olası tüm durumları kaç taneymiş diye soruyor. Ben ilk başta iki tane ağaç çizdim. Ama şöyle düşündüm; iki tane ağacın üç tane kısmı var; bir ortası ve diğer kenarları olacak şekilde. Soruda yanında oynadıklarını söylediği için, ben ondan biraz zorlandım. Öyle olmasa dört durum olacak, birbirlerinden arada bayağı bir mesafe olmasında. Mesela iki ağacın da yanında ikişer tane maymun olabilir. Ama birbirlerine yakın olduklarında değişir. İkisinin ortasında iki tane olur, birinin sağında iki tane diğerinin solunda bir tane mesela. (Düşünüyor) Bu sorunun tek bir cevabı yok. Ama ağaçlar birbirinden uzak olsa bu sefer bir maymunu ortadan ikiye bölemeyeceğime göre paylaştıralım. Birinde iki tane oynasa ikincisinde üç tane oynar. Birinde bir tane oynasa ikincisinde dört olur. Birinde hiç oynamaması da olur o zaman hepsi ikinci ağaçta oynar. (Düşünüyor) Bu kadar işte 3 durum var.

Ö2, Ö4, Ö5 ve Ö7 ise problem bağlamını hemen anlayabilmiş ancak maymun sayılarını ağaçlar ile eşleştirirken olası durum sayılarını eksik olarak düşünmüşlerdir. Büyük veya küçük ağacın yanında hiç maymun olmaması durumunu değerlendirmemişlerdir.

G: Son sorudayız. Ne anladın bu sorudan?

Ö4: Ben bu soruda büyük ağaç ve küçük ağaca değerler verdim toplamı beş olacak şekilde. Önce büyük ağaca üç, küçük ağaca iki maymun gelir dedim. Sonra büyük ağaca dört, küçük ağaca bir maymun gelir dedim. Bu şekilde iki durum buldum. Aslında büyük ağaca iki, küçük ağaca üç maymun da gelir diyecektim ama küçük ağaç fazla maymunu taşımayabilir diye düşünüp vazgeçtim.

G: Maymunların ağaçların üstünde değil de etrafında oynadıklarını düşün sen ve öyle çöz.

Ö4: Aaa… O zaman büyük ağaca iki, küçük ağaca üç maymun. Bir de büyük ağaca bir, küçük ağaca dört maymun gelir. Bu sefer dört olası durum oldu.

G: Son soruya gelelim. Bu soruda beş maymun büyük ağaç ve küçük ağacın yanında kaç farklı şekilde oynayabilir?

Ö5: Bence dört durum. Birinci durum; büyük ağaçta bir maymun, ikinci ağaçta dört maymun. İkinci durumda; büyük ağaçta iki, küçük de üç maymun. Üçüncü durumda; büyük ağaçta üç, küçükte iki. Dördüncü durumda da; büyükte dört, küçükte bir maymun oynar.

Yapılan klinik görüşme sırasında Ö3 tekrar düşünerek problem bağlamında istenenin ne olduğunu anlayabilmiş, önce bazı dikkatsizlikler yapsa da sonrasında doğru cevaba ulaşabilmiştir. Ö3 ile birlikte Ö6, Ö8 ve Ö9'da beş maymun için olası tüm durumları doğru bir şekilde hesaplayabilmiştir.

Maymun sayısının 123 olması durumunda katılımcıların beş maymun için oluşturulan durum sayısı ile 123 maymun için oluşturulan durum sayısı arasında ilişki kurması gerekmektedir. Ö3, Ö6, Ö8 ve Ö9 bu ilişkiyi doğru bir şekilde kurabilmiştir.

Ö1, beş maymun için bulduğu durum sayısı ile 123 maymun için bulduğu durum sayısının oranının maymun sayılarının oranıyla aynı olduğunu düşünmüştür. Ancak bu çözüm yöntemini anlamlandırmadığından, bölümün sonucunda kalan sayıyı nasıl değerlendireceği konusunda fikir üretememiştir.

G: … Beş tane değil de 123 tane maymun olsaydı kaç durum olurdu?

Ö1: Yani ben kaç durum olur diye 123'ü beşe böldüm önce. Kaç olur, ne kadar yapabiliriz diye düşünerek. 24 buldum.

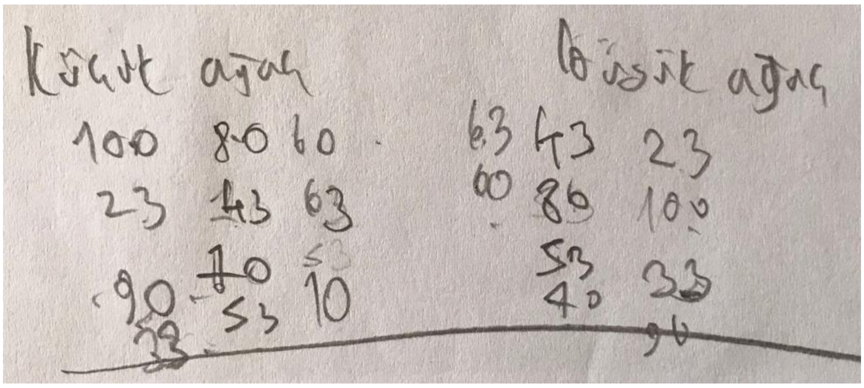
G: Neden 123'ü beşe böldün?

Ö1: Yani ne kadar katı olduğunu bulmak için aslında. Ona göre durumu onunla çarpmam gerekiyormuş aslında şu anda fark ettim. (İşlemi yapıyor.) 24 ile üç durumu çarptım 72 ama üçde kalan var. Bence 72'ye üç eklesem bir fark olur mu diye düşünüyorum şu anda. Üç tane maymun olarak mı düşünmeliyim o artanı, üç tane maymun dışarıda kalacak diye düşünüyorum. O zaman eklerim 72'ye üçü, 75 durum.

Ö2 ve Ö4, beş maymun olması halinde tüm durumları tek tek yazdığından, 123 maymun için de olası durumların tek tek yazılarak hesaplanabileceğini belirtmiştir. Ö2, olası durumların 10 tanesini yazmıştır. Ancak 123 çok büyük bir sayı olduğundan diğer durumları yazmaktan vazgeçmiş ve kesin bir cevaba ulaşamamıştır. Ö4'de toplamları 123 olacak şekilde bazı durumları hesaplasa da, kağıda sığdıramayacağından hesaplamaktan vazgeçmiştir.

G: Peki beş değil de 123 maymun olsaydı kaç durum olacaktı?

Ö2: 123 maymun olsaydı, 100 ve 23 dedim başta sonra 23 ve 100 dedim. 90 ve 33 dedim, 33 ve 90 dedim. 80 ve 43 dedim, 43 ve 80 dedim. 70 ve 53 dedim, 53 ve 70 dedim. Burada toplam olası durumlar bu. 10 tane olası durum var.



Görsel 3.2.2. *Ö2'nin belirttiği 10 olası durum*

G: Başka ihtimal var mıdır?

Ö2: Yani başka türlü ihtimallerde olabilir ama şu an değerlendirdiğimde 10 tane var.

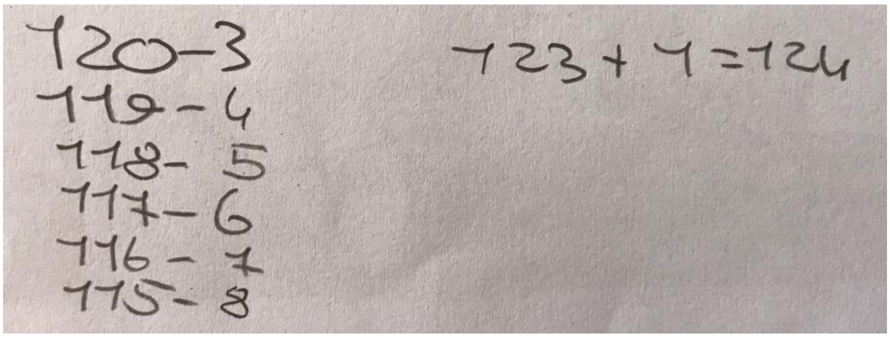
G: Yani bu sorunun bana kesin olarak cevabını söyler misin?

Ö2: Yani kesin bir sayı söyleyemem aslında. Daha bir sürü olabilir. Çok ihtimal var çünkü.

Ö3 ise Ö2 ile benzer şekilde önce tek tek durumları yazarak cevaba ulaşmaya çalışmıştır. Ancak daha sonra klinik görüşme sırasında problem bağlamını tekrar düşünerek beş maymun için bulduğu durum sayısı ile maymun sayısı arasında ilişki kurabilmiş ve bu ilişkiyi 123 maymun için uyarlamıştır. Böylece 123 maymun için olası durum sayısını doğru bir şekilde hesaplayabilmiştir.

G: Peki 123 tane maymun olduğunda kaç maymun oynar?

Ö3: 119'a dört olur. 118'e beş olur. 117'ye altı. Tek tek yazamayacağım hocam çok uzun ya. İşte soldaki sayılar küçüldükçe sağdaki sayılar büyüyor. Benim bunu bulmam için yazmam gerekiyor. Hatta altıya 117, beşe 118, dörde 119.



Görsel 3.2.3. *Ö3'ün belirttiği örnek olası durumlar*

G: 123 maymun için tek tek yazmadan hesaplayabilir misin?

Ö3: (Uzun bir sessizlik) 124.

G: Neden?

Ö3: Çünkü beş tane maymun için bir fazlası altı durum varsa, 123 tane için de bir fazlası olur 124.

Ö6, Ö8 ve Ö9 ise 123 maymun için tüm durumları yazmak yerine bir önceki öncüldeki problemle bağlantı kurarak doğru cevaba ulaşmıştır.

G: 123 maymun olsaydı kaç durum olacaktı?

Ö6: 124.

G: Neden?

Ö6: Beş maymun için altı durum varsa, 123 maymun için 124 durum olur.

G: Bundan nasıl emin oldun?

Ö6: Denemedim. 123 maymun için tek tek yazmadım tabii ki de. Mantık yürüttüm sadece. Beşin bir fazlasıysa 123'ün de bir fazlasıdır dedim.

G: 123 maymun için kaç durum olur?

Ö9: 124 durum.

G: 124 durum olduğundan nasıl emin oldun?

Ö9: Beş maymunda altı durum varsa, bir fazlası ya, 123 durumda da 124 durum olur dedim. Bağlantı kurdum yani.

Ö5, 123 tane maymun için olası durum sayısını hesaplarken bir önceki öncülle bağlantı kurmuştur. Ancak beş maymun için eksik olası durum sayısı bulduğundan 123 maymun için de doğru bağlantıyı kuramamıştır.

Ö7 ise Ö2 ve Ö4 ile benzer şekilde önce tüm durumları tek tek yazmayı denemiş, ancak çok uzun süreceğini fark ettiğinden başka çözüm yöntemine yönelmiştir. İki tane ağaç olduğundan maymun sayısını ikiye bölmüş, ondalık sayı çıktığından mantıklı bir açıklama getirmeden virgülü kaldırarak yanlış cevaba ulaşmıştır.

G: Peki 123 maymun için kaç durum olur?

Ö7: Çok uzun hocam. 122 büyük ağaç olsa bir tane küçük ağaç. İşte ne bileyim 120 büyük ağaç olsa üç küçük ağaçta oynasa, bir de bunların tam tersi var. Tek tek yazmamız gerek. 80'lere ineriz, 70'lere ineriz. Anca o zaman cevaba ulaşırız ama vakit yetmez.

G: Bunun kısa bir yolu yok mu sence?

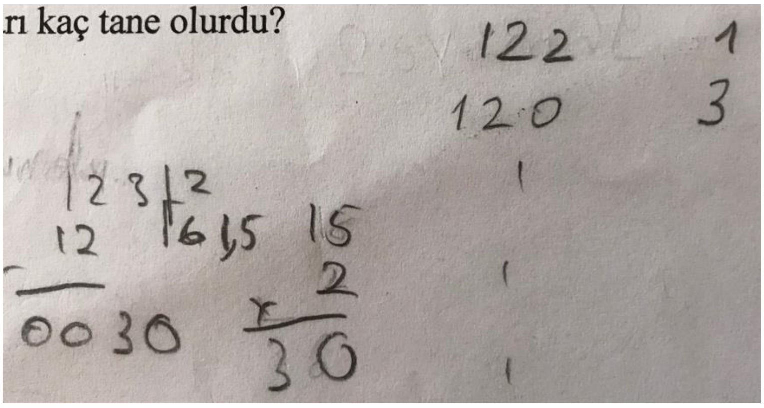
Ö7: Bence vardır. İki ağaç olduğu için 123'ü ikiye bölerim ağaçlara dağıtmak için… 615 oldu. Yani 615 durum oldu.

G: 123'ü ikiye bölerek nasıl 615 hesapladın? 615 çok büyük bir sayı.

Ö7: Hocam aslında 61,5 ama tam bölünmedi 61,5 tane durum olamaz diye virgülü kaldırdım.

G: Virgülü neden kaldırıyorsun?

Ö7: Hocam tam çıkmıyor. Demin kişi sayısıydı mesela tam çıkması gerekir. Bu da durum sayısı, 61,5 tane durum vardır diyemeyiz ki.



Görsel 3.2.4. *Ö7'nin 11. Problemde ulaştığı ondalık sayı sonucu*

Problemin son öncülünde ise önce beş maymun, sonra 123 maymun için hesaplanan olası durum sayılarının n tane maymun için genellenmesi istenmektedir. Bu genellemeyi Ö3, Ö6, Ö8 ve Ö9 doğru bir şekilde yapabilmiştir.

Ö1, 123 maymun için olası durumları hesaplarken kullandığı yöntemi n tane maymun için olası durumları hesaplarken de kullanmıştır.

G: Ormanda eğer n tane maymun olsaydı o zaman kaç durum olurdu?

Ö1: Ben üç tane durum olduğunu düşünerek yapmıştım 123 durumlu soruyu. Yani n tane maymun varsa n'yi üçe bölerek yapacağımı düşünmüştüm.

G: Yani kaç durum var?

Ö1: n bölü üç.

G: Peki eğer n sayısı üçe kalanlı bölünüyorsa, nasıl düşünmeliyiz?

Ö1: 123'te olduğu gibi kalanı da ekleriz n bölü üçe.

Ö2 ise "n tane maymun olması" durumundaki değişkeni yanlış yorumlayarak kesin bir cevaba ulaşamamıştır, n harfiyle temsil edilen ifadeyi terim sayısı olarak düşünmüştür. Maymun sayılarının bir, iki, üç, dört… fazlasının alınabileceğinden, bir başka deyişle maymun sayısının her sayı seçilebileceğinden, n yerine her türlü sayının konulacağından bahsetmiştir. Ancak maymun sayıları ile olası durum sayıları arasında hiçbir ilişki kuramamıştır.

G: … Peki ormanda beş tane değil 123 tane değil de n tane maymun olsaydı nasıl yorum yaparsın?

Ö2: Ben orda n tane maymun olsaydı yani n+1, n+2, n+3, n+4… sonsuza kadar giderdi diye düşündüm ben. n'nin yerine her türlü sayı koyulabilir.

G: Ormanda n tane maymun olması ne demektir?

Ö2: n tane maymunun olması demek, bence bir terimle ilgili. Yani terim tane maymun olsaydı, yani terim+1, terim+2… diye gidiyor. O yüzden ben sınırsız diyorum.

Ö4, Ö2 ile benzer şekilde n değişkenine sayısal değer verilmesi gerektiğini bilse de maymun sayısı ve olası durum sayısı arasında hiçbir ilişki kuramamıştır. Bazı yorumlar yapsa da emin olamadığından bir cevaba ulaşamamıştır.

Ö5, beş maymun için eksik olası durum bulduğundan, 123 maymun için bağlantı kurarak eksik cevap vermişti. Buna bağlı olarak n tane maymun için de aynı bağlantıyı kurup eksik olası durum hesaplamış ve probleme yanlış cevap vermiştir. n tane maymun için m tane durum olduğunu belirtmiş, harfleri alfabedeki konumuna göre düşünmüştür. Ancak klinik görüşme sürecinde düşündüklerini cebirsel ifade ile temsil edebilmiştir. Beş maymun için hesapladığı eksik sayıdaki olası durum sayısından yola çıkarak maymun sayısına bağlı olası durum sayısını cebirsel olarak ifade edebilmiştir.

G: n tane maymun olsaydı kaç durum olacaktı?

Ö5: m tane olacaktı.

G: Neden m?

Ö5: (Gülüyor) Alfabede n harfinden bir önce m harfi olduğu için. Bir eksiği yani… Ben onu böyle ifade edeceğimi düşünmüştüm. (Düşünüyor) Aslında n-1 desem daha mantıklı olacak.

Ö7, n değişkenin maymun sayısı olacağını ve sayıları temsil ettiğini bilse de problemin bu öncülünde sayısal bir değer verilmediği için maymun sayısı ile olası durum sayısı arasında ilişki kuramamıştır. Bir tek n harfi olduğu için buna karşılık tek durum olacağını belirtse de çözümüne mantıklı bir açıklama getiremeyip yanlış cevaba ulaşmıştır.

G: Peki n tane maymun olsaydı kaç durum olacaktı?

Ö7: (Sessizlik)

G: n nedir?

Ö7: n tane maymun varmış. Yerine sayı konuluyor.

G: Tamam, o zaman n tane maymundaki durum sayısı kaçtır?

Ö7: n yerine bir sürü sayı koyduğumuz için değişir. Ama… (Düşünüyor) Burada bir tane n olduğu için… Bir tane durum olur. Bir tane n’e karşılık tek durum.

G: Hangi durumdur o?

Ö7: (Sessizlik) Yani… n’i bilmiyoruz ya ondan ne diyeceğimi bilemedim.

Ö3, Ö6, Ö8 ve Ö9 ise beş maymun için hesapladığı olası durumların sayısı ile maymun sayısı arasındaki ilişkiyi 123 maymuna uyarlayabilmişti. Benzer şekilde n tane maymun için de tüm olası durumların sayısını ifade edebilmişlerdir. Maymun sayısının bir fazlasının olası durum sayısı olduğu ilişkisini kurabilmiş ve doğru cevaba ulaşmışlardır.

Tüm katılımcılar problemin son öncülündeki n değişkeninin maymun sayısını ifade ettiğini ve bu değişkenin sayıları temsil ettiğini belirtmişlerdir. Olası durumların sayısının maymun sayısına göre değiştiğini de belirtmişlerdir. Ancak Ö2, Ö4 ve Ö7 maymun sayılarına bağlı olarak olası durum sayılarını temsil eden cebirsel ifadeler bulamamıştır.

Ö1, 123 maymun için kullandığı çözüm yöntemini n tane maymuna uyarladığından yanlış da olsa maymun sayısına bağlı olası durum sayısını cebirsel olarak ifade edebilmiştir.

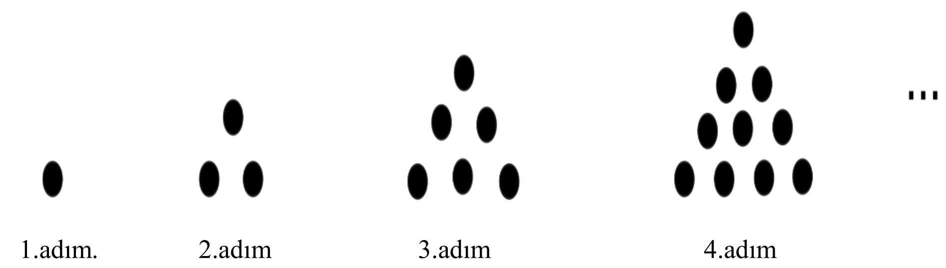
Ö1: … Yani n tane maymun varsa n'yi üçe bölerek yapacağımı düşünmüştüm.

G: Yani kaç durum var?

Ö1: n bölü üç.

Ö3, Ö6, Ö8 ve Ö9 ise maymun sayısına göre olası durum sayılarının değiştiğini temsil eden cebirsel ifadeler bulabilmişlerdir. Her biri buldukları "n+1" cebirsel ifadesindeki n harfinin maymun sayısı, n+1 ifadesinin olası durum sayısı olduğunu, dolayısıyla olası durum sayısının maymun sayısına göre değişeceğini belirtmişlerdir.

12. Problem: Şekilde bir şekil örüntüsünün ilk 4 adımı verilmiştir.



a. Bu örüntünün 6. Adımında kaç nokta vardır?

b. Örüntünün ilerlemesi hakkında ne düşünüyorsunuz?

c. Örüntüde istediğimiz bir adımdaki nokta sayısını bulabilir miyiz?

d. Bu örüntüyle ilgili bir kural bulabilir misiniz?

e. Bulursanız, bu kuralı harfli olarak ifade edebilir misiniz?

Şekil 3.2.4. *Veri Toplama Aracı-2'nin birinci problemi*

Tüm katılımcılar örüntünün adımları arasındaki nokta artışlarının her seferinde bir nokta arttığını fark edebilmişlerdir. Örüntüde birinci adımdan ikinci adıma geçerken iki top artmış, ikinci adımdan üçüncü adıma geçerken üç top artmış, üçüncü adımdan dördüncü adıma geçerken dört top artmıştır. Tüm katılımcılar fark ettikleri bu özellik sayesinde problemin a. öncülünde altıncı adımdaki nokta sayısını doğru bir şekilde hesaplamışlardır.

Ö7 ve Ö9 haricindeki tüm katılımcılar önce okuldaki derslerde edindikleri alışkanlıktan yola çıkarak, adım sayısı ve nokta sayısı arasında bir kural aramış ancak bulamamışlardır. Ö1 önce ilk iki adımdaki nokta sayıları ile adım sayıları arasında ilişki kurup bunu örüntünün kuralı olarak belirlemiştir. Klinik görüşme sırasında kuralı tüm adımlara uygulaması istendiğinde ise yaptığı hatanın farkına varmıştır. Çözüm sürecinde ise uzun bir süre adım sayısına göre nokta sayısını belirleyen bir kural bulmayı deneme-yanılma yöntemiyle denese de bir sonuca varamamıştır.

G: Verilen bu şekil örüntüsünden neler anladın?

Ö1: Birinci adıma göre örüntünün sayılarını karşılaştırarak yapmam gerektiğini anladım. İşte mesela birinci adımda bir, ikinci adımda üç olarak şekilleri vermiş. Ben sorudaki altıncı adımda kaç nokta olduğunu 11 olarak buldum.

G: Neden?

Ö1: Çünkü birinci adımda bir, ikinci adımda üç yani "çarpı iki, eksi bir" olarak ilerlemiş. Altıncı adım için altı çarpı iki eksi bir dedim, 11 yaptı.

G: Örüntünün tüm adımları için bu kuralı uygular mısın?

Ö1: Tamam, üçüncü adım için üç çarpı ikiden altı, eksi bir… Beş olması gerekirdi ama değil. Yanlışlık olmuş.

G: Nerede hata gördün?

Ö1: Üçüncü adımda beş çıkması gerekirdi ama burada altı tane nokta var. Olmuyor kuralım. Dördüncü adımda da (düşünüyor) olmuyor zaten. Yanlışlık yapmışım, bir daha düşünmem gerekiyor.

G: Neler düşündüğünü benimle de paylaşır mısın?

Ö1: Yani, hepsinin iki katını aldım önce. İkinin dört, üçün altı, dördün de sekiz çıktığını gördüm önce. İki katlarıyla arasındaki farklara baktım. Ama bir şey bulamıyorum ki…

Ö1, örüntünün çok ileriki bir adımında nokta sayısı sorulduğunda ise adım sayısı ve nokta sayısı arasında bir ilişki kuramadığı için cevabın çok uzun bir sürede hesaplanabileceğini belirtmiştir. Bulduğu kuralı cebirsel olarak ifade edememiştir. Ö2, Ö1 ile benzer şekilde çok ileriki bir adımı hesaplamanın çok uzun süreceğini ve sürekli önceki adımlara ekleme yapmak gerektiğini belirtmiştir.

(…)

G: Bu örüntüde istediğin tüm adımlardaki nokta sayısını hesaplayabilir misin?

Ö1: Bulamam. Yani çok büyük rakamlı adımları bulamam. Yoksa baştan başlayıp ekleye ekleye bulmam gerekiyor. Mesela 50 için 50. adıma kadar eklemem gerekiyor. O da çok uzun sürer. Çok uzun sürse bile yine de bulabiliriz ama imkansız değil.

Ö2 adım sayısı ve o adımdaki nokta sayısına göre bir kural bulmaya çalışırken değişkenlerden faydalanmaya çalışmıştır. Değişkene anlamlı atamalar yapmayıp sadece değişkenin tek bir değeri (n=1) için her adımda farklı bir cebirsel ifadeye ulaşmıştır. Ancak bu denemesi herhangi bir sonuca varmamıştır.

Ö2: … Yani aslında şey diyebiliriz. Hepsinde n+2, n+3, n+4 diyebiliriz. Her adımda çünkü artışı bir sayı arttığı için. …

G: Bahsettiğin n+2 ve n+3 de, n dediğin ne ifade etmektedir?

Ö2: n eşittir bir dedim. Burada n'e örüntünün terimi dedim. Mesela birincisinde n'e bir dedim, birincisi normal n sadece n, ikincisinde n+2, üçüncüsünde n+3 yani bir artı iki, iki artı üç…

G: Buradaki n harfine neden bir diyorsun?

Ö2: Çünkü birinci adımdakine göre düşündüm ben sadece.

G: İkinci adımı düşünürken n'ye kaç diyorsun?

Ö2: İkinci adımı düşünürken n+2 dedim yani n yerine bir koyarsam bir artı ikiden üç olur. Üçüncü adımda altı tane olduğu için 2n+4 dedim. Yani n'i hep bir diyerek düşündüm sonuç olarak.

Ö4 ve Ö6'da Ö1 ve Ö2 ile benzer şekilde uzak adımdaki nokta sayıları için kural bulmaya çalışmış ancak böyle bir kural oluşturamamıştır.

G: Örüntünün 50. adımındaki nokta sayısını hesaplar mısın?

Ö4: Bunun için bir kural oluşturmam gerekirdi. n'li bir kural oluştururdum. Hocam ben bu kuralı oluşturmayı çok denedim, olmadı. Bir sürü şey denedim ama hepsini sağlayan bir kural bulamadım. İkinci adımdan sonra üçüncü adıma geçerken bozuldu mesela.

G: Peki sence her örüntünün bir adımı olmak zorunda mı?

Ö4: Olmak zorunda değil, ama hep okulda da kural buluyorduk ben de bulmaya çalıştım hemen. Belki bunun da yoktur.

Ö4 ve Ö6; Ö1 ve Ö2 ile benzer şekilde çok ileriki bir adımı hesaplamanın çok uzun süreceğini ve sürekli önceki adımlara ekleme yapmak gerektiğini, bu durumun da cebirsel olarak ifade edilemeyeceğini belirtmişlerdir. Ö3, Ö5 ve Ö8; daha önce bahsedilen katılımcılar gibi öncelikle adım sayısına bağlı nokta sayısını veren kural bulmaya çalışmış ancak başarısız olmuşlardır.

G: O zaman 50. adımdaki nokta sayısını nasıl hesaplarsın?

Ö6: İşlem yaparak hesaplayabiliriz ancak. Tek tek yaza yaza uzun sürer ama illa ki ulaşırız.

G: Bu şekilde ilerleyen örüntünün kuralını harfli olarak ifade edebilir misin?

Ö6: Okulda gördüğümüz gibi bir kural bulamadım zaten. İşte şu katı şu fazlası bilmem ne diye. Arada eklenen sayılar bir artıyor hep ama onu da x'li y'li yazamam.

G: Peki bu örüntünün ilerlemesi hakkında ne düşünüyorsun?

Ö3: Bu örüntü düzensiz bir örüntüdür. Buradan herhangi bir cebir çıkartılamaz.

G: Bu örüntüyle ilgili kural bulabilir misin sorusuna ‘cebirsiz’ yazmışşın. Bu ne ifade ediyor?

Ö3: Örüntüde bir kural buldum. Ama cebirsiz. Çünkü düzensiz bir kuraldır benim bulduğum. Ama cebirde hep sabit bir kural olduğu için olmaz.

G: Kuralda biz neye göre cebiri kullanıyoruz sence?

Ö3: Ben adım sayısına göre kural bulurum genelde. Ama bu soruda bulamadım.

Ö3, Ö5, Ö7, Ö8 ve Ö9; ileriki adımdaki nokta sayısı sorulduğunda ise yine bu sürecin uzun süreceğini, önceki tüm adımların bilinmesi gerektiğini, yine de cevabın hesaplanabileceğini belirtmişlerdir. Ancak bu katılımcılar altıncı adıma kadar nokta sayılarını hesaplarken önemli bir detay fark etmişlerdir. Bu detaya göre “örüntü hangi adıma geçerse, bir önceki adımdaki nokta sayısına o adım sayısı kadar nokta eklenecektir.” Örneğin katılımcılara 50. adımdaki nokta sayısı sorulduğunda bir önceki (49.) adıma 50 tane nokta ekleneceğini belirtmişlerdir.

Ö3: … birinci adımla ikinci adım arasındaki topların farkı iki, ama ikinci adımdaki toplarla üçüncü adımdaki topların farkı 3 ve üçüncü adımla dördüncü adımdaki topların farkı dört. Yani farklar hep bir artarak gerçekleşiyor. Düzensiz olduğundan ben buradan bir cebirsel ifade çıkaramadım. Bu yüzden de hep ben bir ekleyerek ilerlettim ben bunu.

G: Peki bu örüntüde diyelim ki 50.adımdaki top sayısı soruldu. Nasıl bir yorum yaparsın?

Ö3: (Düşünüyor) Ben 50.adımı bulurum, ama kısa yoldan değil.

G: Nasıl çözersin?

Ö3: Dediğim gibi hep artırarak ilerletirim. Zaten şunu da fark ettim, birinci adımdan ikinci adıma geçerken iki top artmış, ikinci ve üçüncü adım için üç artıyor, üç ve dördüncü adımlar için dört artıyor. Yani bu da bize avantaj sağlıyor. Bir yerde unutursak kaç arttığını ona dikkat edebiliriz. Yani adım sayısıyla o adımdaki artma sayısı aynı olacak.

G: O zaman 50.adımdaki top sayısı için nasıl yorum yaparsın?

Ö3: 50.adımdayken bir önceki adıma göre 50 artacak. Ama 50’yi bulmak için 49 gerecek, 49’u bulmak için 48 gerekecek. 47, 46 öyle gidiyor zaten.

G: Bu örüntüde istediğimiz bir adımdaki nokta sayısını bulabilir miyiz?

Ö7: Bulabiliriz.

G: Mesela 50.adımda kaç nokta olduğunu hesaplayabiliriz?

Ö7: 50.adımda demek ki… (Düşünüyor) O zaman 50.adımda 50 tane artacak.

G: Buna nasıl emin oldun?

Ö7: Dördüncü adımda dört artmış, beşinci adıma geçerken de beş arttırdık. 50’ye geçerken de 50 artacak.

G: Bu 50 topu neye eklememiz lazım?

Ö7: Bir önceki top sayısı neyse ona eklememiz lazım.

G: Peki bu örüntüyle ilgili bulduğun kural nedir?

Ö7: Yani aradaki artışlar bir bir artıyor.

G: Bu kuralı harfli olarak nasıl ifade edersin?

Ö7: (Düşünüyor) Harfli olarak ifade edemem.

Ö5 klinik görüşme sırasında, Ö8 ise daha öncesinde örüntü hangi adıma geçerse, bir önceki adımdaki nokta sayısına o adım sayısı kadar nokta ekleneceği detayını fark etmiş, bu detayı 50. adımdaki nokta sayısı sorulduğunda uyarlayabilmişlerdir. Ancak Ö3 ile benzer şekilde detayı cebirsel olarak ifade edememişlerdir.

G: Birinci sorudaki bu örüntü nasıl ilerliyor?

Ö5: Beşinci adımı buldum önce, beş tane ekleyerek. Ondan sonrasında altıncı adımı hesaplamak için altı ekledim 15'e, 21 oldu. Aaa… Kaçıncı adımdaysak o kadar ekleniyor, şu an fark ettim. Size söylerken konuşunca anlaşılıyor (gülüyor).

G: Peki 50.adımdaki nokta sayısını bulmanın nasıl bir yöntemi olabilir?

Ö5: (Düşünüyor) Normal teker teker hesaplanarak yaparız. Normalde 50.adıma 50 tane eklememiz lazım ama ondan önce eklenecekler olacağı için baştan itibaren yazmamız gerekiyor.

G: Örüntüde istediğimiz bir adımdaki nokta sayısını yazabiliriz?

Ö5: Tek tek yazarak bulabilirdik.

G: Örüntüyle ilgili bulduğun kural neydi?

Ö5: İşte… Hep bir artarak ilerleyecek. Bir de hangi adımdaysak o adım sayısı kadar artacak.

G: Bu kural harfli olarak ifade edilebilir mi?

Ö5: (Düşünüyor) Yapamıyorum.

Ö9 ise örüntü hangi adıma geçerse, bir önceki adımdaki nokta sayısına o adım sayısı kadar nokta ekleneceği detayını fark etmiş, bu detayı 50. adımdaki nokta sayısı sorulduğunda uyarlayabilmiştir. Ancak diğer katılımcılardan farklı olarak bu detayı cebirsel olarak ifade edebilmiştir. Adım sayısına ve o adıma geçerken eklenecek nokta sayısına aynı değişkeni atamıştır.

G: Birinci sorudaki şekil örüntüsünün ilerlemesi hakkında ne düşünüyorsun?

Ö9: Her adımda bir öncekinin bir fazlası artıyor. Birden ikiye giderken iki artıyor, ikiden üçe giderken üç, üçten dörde giderken dört artıyor. Sonra beş artacak, altı artacak. Altıncı adımı sormuşsunuz. Ben de teker teker saydım 21 buldum.

G: Örüntüde istediğimiz adımdaki nokta sayısını bulabilir miyiz?

Ö9: Buluruz ama nasıl bulacağımızı bulamadım.

G: 50. adımda kaç nokta olduğunu nasıl hesaplarsın?

Ö9: Birden başlayarak 50. adıma kadar bütün sayıları toplaya toplaya giderim. Başka da kısa yol bulamadım zaten.

G: Bu örüntüyle ilgili bir kural bulabildin mi?

Ö9: Şunu buldum ben; atıyorum dördüncü adıma geçerken dört artmış, üçüncü adıma geçerken üç artmış. O zaman n. adıma geçerken n artacak.

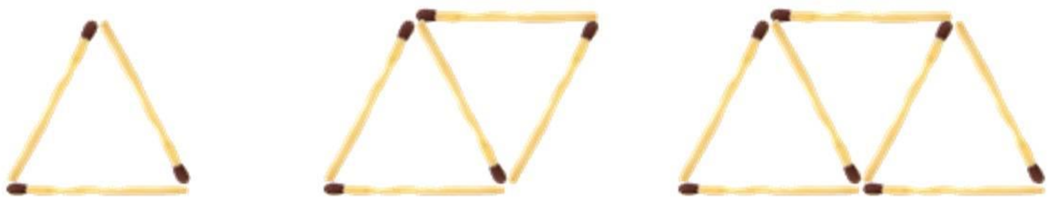
G: O zaman bu kuralını 50.adıma nasıl uyarlarsın?

Ö9: 49. adımı bilirsem eğer, ona 50 ekleyeceğimi bilirim. 50. adıma geçerken 50 artar çünkü.

G: n nedir?

Ö9: İşte o adımda, adım sayısı kadar artacak. (Düşünüyor) Hem adım sayısı buradaki n, diğer n'de artış sayısı.

13. Problem: Aşağıda bir şekil örüntüsünün ilk 3 adımı verilmiştir.



1.adım 2.adım 3.adım

Buna göre;

a. Örüntü nasıl ilerlemektedir? Yorumlayınız.

b. Üçgen sayısı ve kibrit çöpü sayısı nasıl değişmektedir?

c. 10 ve 50 tane üçgen oluşturmak için kaç tane kibrit çöpü kullanmalıyız?

d. İstediğimiz üçgen sayıları için kaç tane kibrit çöpü kullanacağımıza dair bir kural bulabilir miyiz?

e. Bu kuralı bulursak harfli olarak nasıl ifade edilir?

Şekil 3.2.5. *Veri Toplama Aracı-2'nin ikinci problemi*

Tüm katılımcılar örüntüyü değerlendirirken öncelikle kibrit çöpü sayısının ikişer ikişer arttığını fark etmiştir. Ö1 ve Ö3 problemin çözüm sürecinin en başında, ilk üç adımdan hareketle bir kural oluşturmuştur. Her iki katılımcı da adım sayısına bağlı olarak üçgen sayısını veren bir kural bulmuştur. Diğer katılımcılar ise çözüm süreçlerinin başında sadece kibrit çöpü sayısına odaklanarak kibrit çöplerinin ikişer ikişer arttığını belirtmişlerdir. Ö3, kuralından bahsederken örüntüdeki adım sayısı ile o adımdaki üçgen sayısının aynı olduğunu fark edebilmiştir.

G: … İkinci sorudan neler anladın?

Ö3: Şimdi kibrit çöpleri var ve bunlardan üçgenler oluşturuluyor. Her adımda hem üçgen sayıları hem de kibrit sayıları artıyor. Birinci adımda bir tane üçgen olup üç tane kibrit çöpü var. İkinci adımda iki üçgen beş kibrit var, üçüncü adımda üç üçgen ve yedi kibrit var. Dördüncü adımda dört üçgen ve 9 kibrit olur, böyle gider. Şöyle bir şey var, örüntü kaçıncı adımdaysa o kadar üçgen oluyor. Kibrit sayıları da şöyle değişiyor, adımın 2 katı ve artı 1 oluyor.

Ö2, Ö5, Ö7 ve Ö8'e üçgen sayısının ve kibrit çöpü sayısının ilerlemesi hakkında fikirleri sorulduğuna üçgen sayılarındaki ve kibrit çöpü sayılarındaki değişimi ayrı ayrı değerlendirmişlerdir. Üçgen sayısı bir arttıkça kibrit çöpü sayısının iki arttığını ve Ö3 ile benzer şekilde adım sayısı ile üçgen sayısının aynı olduğunu belirtmişlerdir.

G: Peki bu örüntüde üçgen sayısı ile kibrit çöpü sayısı arasında bir ilişki var mıdır?

Ö2: Kibrit çöpü sayısı her adımda ikişer ikişer artıyordu, üçgen sayısı da birer birer artıyor olacak. Üçgen sayısı birinci adımda bir taneyken ikinci adımda iki tane üçüncü adımda üç tane oluyor. Kibrit çöpü sayısı da zaten ikişer ikişer artıyor.

G: Üçgen sayısı ve kibrit çöpü sayısı nasıl değişmektedir?

Ö8: Üçgen sayısı birinci adımda bir tane, ikinci adımda iki, üçte üç tane üçgen var. Üçgen sayıları her zaman bir artıyor, kibrit çöpü sayıları da hep iki iki artıyor.

Ö6 ve Ö9 ise sadece üçgen sayılarındaki ve kibrit çöpü sayılarındaki değişimi ayrı ayrı değerlendirerek üçgen sayısı bir arttıkça kibrit çöpü sayısının iki arttığını belirtmişlerdir.

G: Peki üçgen sayısı ve kibrit çöpü sayısı nasıl değişiyor?

Ö9: İlk üçgen hariç her üçgende iki tane kibrit ekleniyor. Çünkü eklenen üçgenin bir kenarı diğer yapıştığı üçgenle ortak.

Ö4'e üçgen sayısının ve kibrit çöpü sayısının ilerlemesi hakkında fikri sorulduğunda ise diğer katılımcılardan farklı yorum yapmıştır. Üçgenler birleştiğinde ortak olan kenarlara tek bir kibrit çöpü konduğundan yalnızca bir üçgende üç kibrit çöpü varken üçgen eklendikçe olması gerekenden daha az kibrit çöpü bulunduğunu belirtmiştir. Bir başka deyişle iki üçgen için altı kibrit çöpü olması gerekirken beş tane, üç üçgende dokuz kibrit çöpü olması gerekirken yedi tane kibrit çöpü olduğunu ifade etmiştir.

Katılımcılara 10 tane üçgen oluşturmak için kaç tane kibrit çöpü kullanılması gerektiği sorulduğunda ise Ö1 ve Ö3 çözüm sürecinin başında adım sayısına bağlı olarak oluşturdukları kuralı oluşturmuşlardır. Bu kuralın aslında hem adım sayısına hem de üçgen sayısına bağlı olduğunu ise klinik görüşme sırasında keşfetmişlerdir.

G: O halde 10 tane üçgen oluşturmak için kaç tane kibrit çöpü kullanmalıyız?

Ö1: O zaman 10 çarpı iki, 20 etti artı bir, 21 oluyor.

G: Burada iki ile çarptığın 10 nedir?

Ö1: 10 tane üçgen var üçgen sayısı.

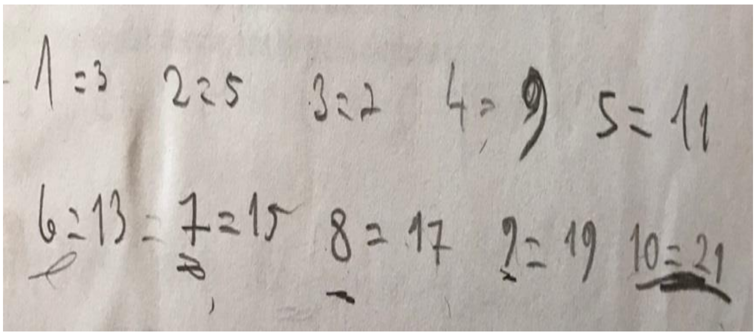
G: Az önce hep adım sayısını iki ile çarpıp bir eklemiştin. Şimdi de üçgen sayısını iki ile çarpıp bir ekliyorsun. Neden aynı yöntemi uyguladın?

Ö1: Kaç tane kibrit çöpü kullanılmalıdır diye sormuş ya, aynı şey geçerlidir diye düşündüm. (Düşünüyor) Adım sayısı zaten üçgen sayısı. Yani birinci adımda bir tane üçgen var, ikinci adımda iki tane üçgen, üçüncü adımda üç tane üçgen var. Orada 10 koyduğumuzda hem adım sayısı hem üçgen sayısı demek.

Ö2 ve Ö8 ise sadece kibrit çöpü sayılarına odaklandığından 10 üçgen oluşturmak için üçüncü adımdan itibaren tek tek örüntüyü ilerletmeyi ve 10. adımdaki kibrit çöpü sayısını hesaplamayı tercih etmişlerdir.

G: … 10 tane üçgen oluşturmak için kaç tane kibrit çöpü kullanmalıyız?

Ö2: 10 tane üçgen için 21 tane kibrit çöpü kullanmalıyız. Ben burada ilk başta sayıları yazarak düşündüm. İşte dördüncü adımda 9, beşinci adımda 11, altıncı adımda 13, yedinci adımda 15, sekizinci adımda 17, dokuzuncu adımda 19, onuncu adımda 10 tane üçgene ulaştım zaten 21 tane kibrit çöpü kullanılır dedim.

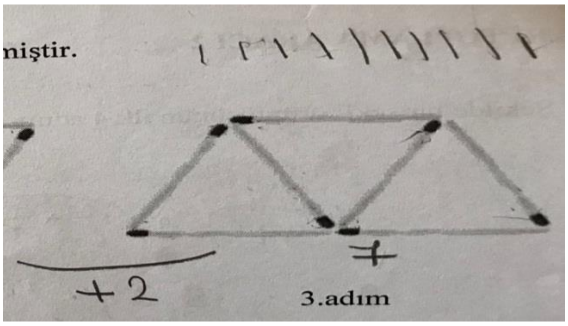


Görsel 3.2.5. *Ö2'nin 10 üçgen için gereken kibrit çöpü sayısına ulaşma süreci*

Ö8 önce kibrit çöpü sayısı iki arttığından üçgen sayılarının karesini almayı düşünse de bu yöntemden emin olmadığından 10 üçgene kadar örüntüyü ilerlettiğini belirtmiştir.

G: Peki 10 tane üçgen oluşturmak için kaç kibrit çöpü kullanmalıyız?

Ö8: Ben burada her seferinde iki tane artacağına göre, adım sayılarını göstermek için minik çizgiler çizdim. Önce bir kafam karıştı benim, her üçgende iki iki arttığı için 10 üçgende 10'un karesini aldım 100 kibrit olmalıdır dedim. 50 üçgen için de 50 üzeri iki olsa 2500 kibrit olacak dedim. Ama bundan hiç emin olmadım çünkü sallamasyon oldu (gülüyor) Sonra üç üçgen için sağlamasını yaptım üçün karesi dokuz ama burada yedi kibrit var. Ben de 10 üçgene kadar tek tek saymayı denedim. Hep ikişer ikişer ekledim, 21 kibrit oldu.



Görsel 3.2.6. *Ö8'in 10 üçgen için gereken kibrit çöpü sayısına ulaşmak için çizdiği çizgiler*

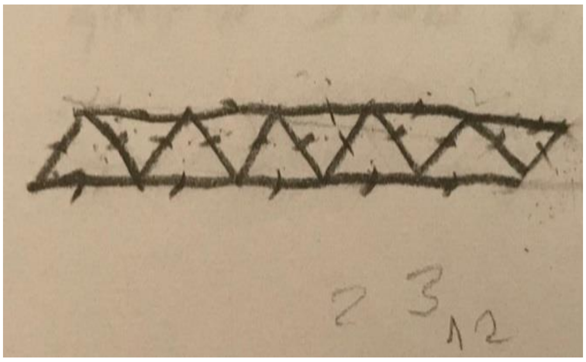
Ö5, Ö6 ve Ö7; 10 tane üçgen oluşturmak için gereken kibrit çöpü sayısını hesaplamak için 10 tane üçgen çizerek kibrit çöplerini saymıştır.

G: 10 tane üçgen oluşturmak için kaç kibrit çöpü kullanmalıyız?

Ö5: 21 tane kullanmalıyız.

G: Neden 21?

Ö5: Önce çizdim sonrasında galiba yanlışlıkla bir kural bulmuş olabilirim (gülüyor).

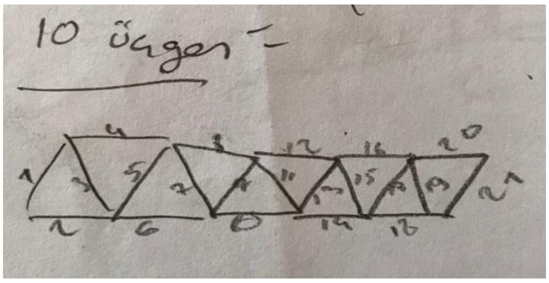


Görsel 3.2.7. *Ö5'in 10 üçgen için gereken kibrit çöpü sayısını üçgen çizerek hesaplaması*

Ö6, 50 üçgen için gereken kibrit çöpü sayısı sorulduğunda 10 üçgen için hesapladığı kibrit çöpü sayısından hareketle kural oluşturduğunu, bu kuralı 50 üçgen için de kullandığını belirtmiştir.

G: Peki 50 tane üçgen oluşturmak için kaç tane kibrit çöpü kullanmalıyız?

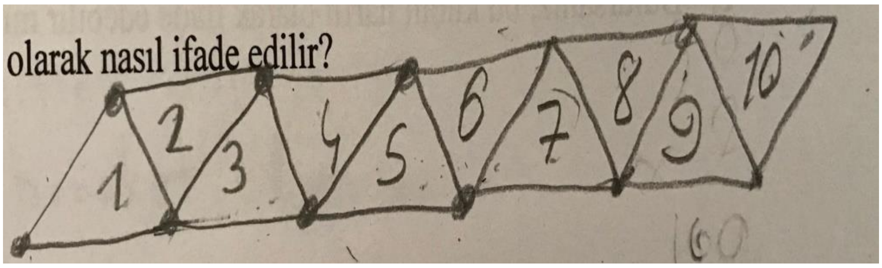
Ö6: Şimdi ben 10 tane üçgende 21 tane bulunca, bir kural buldum ve diğerlerinin üzerinde de denedim. Verilen üçgen sayısını iki ile çarpıp bir ekleyince kibrit çöpü sayısına ulaşıyoruz. Yani 50 üçgen için 50'yi iki ile çarpıp bir ekleyince 101 tane kibrit çöpü oluyor.



Görsel 3.2.8. *Ö6'nın 10 üçgen için gereken kibrit çöpü sayısını üçgen çizerek hesaplaması*

G: 10 tane üçgen oluşturmak için kaç kibrit çöpü kullanmalıyız?

Ö7: 21 tane kullanmalıyız. 10 tane üçgen çizdim, onun da kibrit çöplerini saydım, 21 tane kibrit oldu.



Görsel 3.2.9. *Ö7'nin 10 üçgen için gereken kibrit çöpü sayısını üçgen çizerek hesaplaması*

Ö4 ve Ö9 ise 10 üçgen için kibrit çöpü sayısını hesaplamadan önce örüntünün kuralını bulmuşlardır. Ö4 ilk üç adımda üçgen sayıları ile kibrit çöpü sayıları arasında bir ilişki kurmuş, sağlamasını yapmak amacıyla dördüncü adımdaki üçgenleri de zihninde çizip kibrit çöplerini saymıştır. Tüm adımlardaki üçgenler için kibrit çöpü sayısını veren kuralı bulduktan sonra bunu istenen tüm adımlar için uygulamıştır.

Ö9 ise "örüntüde bir üçgen eklendikçe iki kibrit çöpü eklendiği" bilgisinden yola çıkarak her üçgenin iki kibrit çöpüne karşılık geldiğini, yalnızca ilk üçgende üç kibrit çöpü bulunduğundan üçgen sayısının iki katının bir fazlasının alınması gerektiğini belirtmiştir. Örüntünün şeklinden ulaştığı bu kuralı 10 ve 50 üçgen oluşturmak için uygulamıştır.

G: 10 tane üçgen oluşturmak için kaç tane kibrit çöpü kullanmalıyız?

Ö9: 21.

G: Nasıl ulaştın 21'e?

Ö9: İlk baş 10 ile ikiyi çarptım, her üçgende iki kibrit arttığı için. Üçgen başına iki kibrit olduğu için. Birinci üçgende bir tek üç kibrit çöpü var. Diğerlerinden bir fazla olduğu için bir ekledim.

G: 50 tane üçgen oluşturmak için kaç kibrit çöpü gerekir?

Ö9: 101. Yine aynı şekilde.

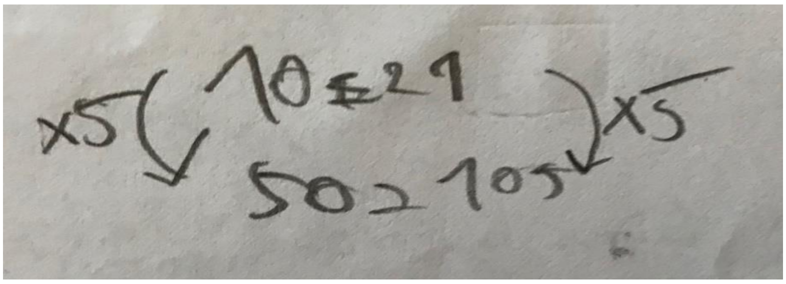
Kural oluşturabilmiş olan tüm katılımcılar 50 üçgen için gereken kibrit çöpü sayısına kurallarını uygulayarak ulaşabilmişlerdir. Ancak Ö2, 50 üçgen için gereken kibrit çöpü sayısına önce 10 üçgen için hesapladığı kibrit çöpü sayısının 5 katını alarak ulaşmıştır.

G: 50 tane üçgen oluşturmak için kaç tane kibrit çöpü kullanmalıyız?

Ö2: 105 tane kullanmalıyız.

G: Neden?

Ö2: Bunu da tek tek yazardım ama çok yer kaplayacaktı (gülüyor). Onun yerine 10 tane üçgende 21 kibrit çöpü bulmuştum ya, burada 50 üçgen 10'un 5 katı olacağı için 21'in de 5 katını aldım ve 105 olarak buldum.



Görsel 3.2.10. *Ö2'nin 50 üçgen için gereken kibrit çöpü sayısını hesaplama yöntemi*

Ö7 ise 10 üçgen için kibrit çöpü sayısına çizerek ulaştıktan sonra deneme-yanılma yöntemi ile kural oluşturmaya çalışmış ancak oluşturamadığından 50 üçgen için gerekli olan kibrit çöpü sayısına ulaşamamıştır.

Ö8, 50 üçgen için gereken kibrit çöpü sayısı sorulduğunda ise 50 üçgen çizmekte zorlandığı için kural aramaya yönelmiş, sayılar arasında bağlantı kurarak kuralını oluşturmuştur.

G: Peki 50 üçgen için kaç kibrit çöpü kullanılacak o halde?

Ö8: 50'ye kadar yazmam çok zor olacağı için hemen kural aramaya başladım, bayağı uğraştım bunda. İki katının bir fazlası buldum kuralı.

G: Ne, neyin iki katının bir fazlası?

Ö8: İşte… Kibrit sayısı üçgen sayısının iki katının bir fazlası. 10 üçgende iki katı 20, artı bir 21 kibrit.

G: Bu kaç üçgen için geçerli bir kural?

Ö8: 10. Ama aslında tümü, hepsi için geçerli. Bakın, bir üçgenin iki katının bir fazlası üç yaptı. İşte üç üçgenin iki katının bir fazlası yedi yaptı.

Ö7 haricindeki katılımcılar bu örüntüyü genellerken üçgen sayıları ve kibrit çöpü sayıları arasında ilişkiyi doğru şekilde kurabilmiş ve bunu altıncı sınıf düzeyindeki derslerinde sıkça karşılaştıkları değişken olan "n" ile temsil edebilmişlerdir. Ancak bu ilişkiyi kurarken Ö1 ve Ö3 alışkanlık olarak hep adım sayılarını hesaba katmışlardır.

G: İstediğimiz üçgen sayısı için kibrit çöpü sayısına nasıl ulaşırız?

Ö1: Üçgen sayısını iki ile çarpıp bir ekleyerek.

G: Bu bulduğun kuralı harfli olarak nasıl ifade ederiz?

Ö1: N yani kaçıncı adım olduğu için, Nx2 +1.

G: N dediğin nedir?

Ö1: Adım sayısı.

G: Ama biz üçgen sayısına göre bir kural oluşturmak istiyoruz.

Ö1: Zaten adım sayısıyla üçgen sayısı aynı ya, N aynı zamanda üçgen sayısı da olur.

G: Üçgen sayısını iki ile çarpıp bir eklediğimizde neye ulaşıyoruz?

Ö1: Kibrit çöpü sayısına.

Ö2 ise önce üçgen sayısına göre kibrit çöpü sayısını genelleyememiştir. İstenen üçgenin sayısal değerinin verilmesi gerektiğini, bu sayısal değere göre bilinen bir adımdaki kibrit çöpü sayısının katının alınması gerektiğini belirtmiştir. Yani istenen üçgen sayısına göre kibrit çöpü sayısı arasında ilişki kuramamıştır. Ö2'nin çözüm kağıdında bulunan cebirsel ifadenin anlamı sorulduğunda ise önce değişkeni adım sayısı olarak tanımlamıştır. Klinik görüşmeler sırasında bu cebirsel ifadenin aslında problem bağlamında istenen kural olduğunu fark edebilmiştir. Bunu fark ettikten sonra 50 üçgen için öncesinde yaptığı hatayı düzeltebilmiştir.

G: Bana hiç bahsetmedin ama kağıdında 2n+1 yazdığını görüyorum. Bu nedir?

Ö2: 2n+1 dediğim, ben yine burada n'e bir dedim. İki kere bir artı bir, üç eder. Sonra ikinci adımda n'e iki dediğimde iki kere iki artı bir, beş oldu, üçüncü adımda üç kere iki artı birden yedi. Dördüncü adımda da dört kere iki artı bir bulmuştum zaten dokuz olacak.

G: Peki 2n+1'deki n harfi ne ifade ediyor?

Ö2: Ben n ile terim sayısını ifade ediyorum. Birinci, ikinci terim… Yani adım sayısı. Adım sayısını yerine yazınca burada kibrit çöpünü buluyorum.

G: Kağıttaki problem de bize sorulduğu gibi, üçgen sayısı ve kibrit çöpü sayısı arasındaki ilişkiyi gösteren bir kural bulabilir misin?

Ö2: Burada da birinci adımda bir üçgende üç kibrit çöpü, ikinci adımda iki üçgen var, beş kibrit çöpü… Aynısı olmaz mı?

G: Neyin aynısı olmaz mı?

Ö2: Kuralı. Yani… Adım sayısıyla üçgen sayısı zaten aynı değil mi?

G: Sence aynı mı değil mi?

Ö2: Aynı.

G: Sen neden önce adım sayısıyla ilgili kurala ulaştın?

Ö2: Hocam derslerde yapıyoruz hep ondan.

G: O zaman 2n+1 kuralındaki n'nin anlamı nedir?

Ö2: (Düşünüyor) Hem adım sayısı hem de üçgen sayısıdır.

G: Peki üçgen sayısını iki ile çarpıp bir eklediğimizde çıkan sonuç bize neyi verir?

Ö2: Kibrit çöpü sayısını verir.

Ö7 ise üçgen sayıları ve kibrit çöpü sayılarının değişimini ayrı ayrı değerlendirdiğinden bu ilişkiyi kendisinin de anlamlandıramadığı cebirsel ifadelerle temsil etmiştir.

G: Sonuç olarak bu örüntü için bulduğun kural ne?

Ö7: İşte her adımda bir üçgen artıyor, iki kibrit çöpü artıyor.

G: Peki bunu harfli olarak nasıl ifade edersin?

Ö7: Mesela k adımında üçgen sayısı b kadar artıyor, kibrit çöpü sayısı da d kadar artıyor.

G: k, b ve d harfleri nedir?

Ö7: İşte k adımdır. b, o adımdaki üçgen olsun. k adımında kibrit çöpü sayısı d tane artmış. (Sessizlik) Bilmiyorum öyle işte.

Tüm katılımcılar problemin çözüm sürecinde kibrit çöpü sayısının adım sayısına ve dolayısıyla üçgen sayısına bağlı olarak değiştiğini fark edebilmişlerdir.

14. Problem: Burcu bir doğum günü partisine gitmiştir. Bu partide tekli kare masayı seçerse masanın etrafında 4 kişi oturacaklar, ikili kare masayı seçerse masanın etrafında 6 kişi oturacaklardır.

- Buna göre Burcu 3lü, 4lü ve 5li yan yana kare masa seçerse etrafına sırayla kaçar kişi oturacaktır?
- Kare masa sayısıyla etrafında oturan kişi sayısı arasında bir bağlantı var mıdır?
- Eğer varsa bu ilişkiyi bir değişkenle ifade edebilir misiniz?
- Burcu 15li yan yana kare masa seçerse, etrafında kaç kişi oturacaktır?

Şekil 3.2.6. *Veri Toplama Aracı-2'nin üçüncü problemi*

Katılımcıların tümü bu problemle ilgili farklı yöntemler üretmiş ve tüm öncüllere doğru cevap verebilmişlerdir. Ö1, Ö7 ve Ö9 problemin ilk öncülü için öncelikle istenen sayıdaki masaları çizip etrafındaki kişileri saymıştır. Sonra ise masa birleştirildiğinde her masada karşılıklı iki kişi oturacağını, en uçlarda da ekstra iki kişi oturacağını fark edip üçlü, dörtlü ve beşli masalar ile örnek vererek açıklayabilmişlerdir. Böylece problem bağlamında istendiği üzere kare masa sayısı ve etrafında oturan kişi sayısı arasında ilişki kurabilmiştir. Daha sonra kurdukları bu ilişkiyi son öncülde sorulan 15 masa için uyarlamışlardır.

G: Problemi çözerken neler düşündün?

Ö1: Üçlü masada üç çarpı iki, artı ikiden toplam sekiz kişi oturabiliyor.

G: Dörtlü masa için nasıl yorum yaptın?

Ö1: Yine aynı işlemi uyguladım, dört masa varmış. Çarpı iki, artı iki eşittir 10.

G: Neden iki ile çarpıyorsun?

Ö1: Şimdi dört tane masada karşılıklı olarak ikişer kişi oturuyorlar, o yüzden dört masa var ama karşılıklı sekiz kişi oturuyor. (Sessizlik) Daha doğrusu üçlü masada da aynı şekilde düşünebiliriz. Üç masada karşılıklı altı kişi oturur.

G: Tamam iki ile çarpmanın sebebi buysa, sonra iki eklemenin sebebi nedir?

Ö1: En kenardaki sağ ve soldaki iki kişiyi de ekliyorum.

G: Peki beş masa için nasıl yorum yaptın?

Ö1: Karşılıklı oturanlar beş çarpı ikiden 10, sonra da sağ ve soldakiler artı iki. Yani 12.

G: Kare masa sayısıyla etrafında oturan kişi sayısı arasında bir bağlantı var mıdır?

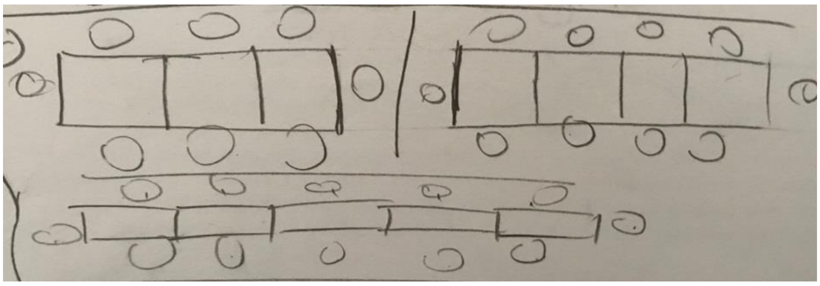
Ö1: "Çarpı iki, artı iki"

G: İkiyle çarptığın nedir?

Ö1: Masa sayısı. Masa sayısıyla ikiyi çarpıyoruz sonra iki ekliyoruz.

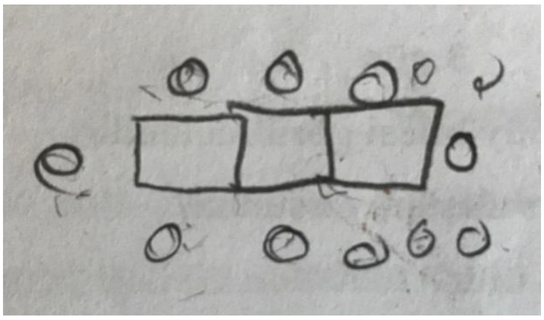
G: Peki buna göre 15'li yan yana masa seçerse, masanın etrafında kaç kişi oturacaktır?

Ö1: 15 çarpı ikiden 30, iki eklersek de 32.



Görsel 3.2.11. *Ö1'in etrafında oturacak kişi sayısını hesaplamak için çizdiği masalar*

Ö7: İşte masaları çizdim. Üç masada burada üç, üç masa burada altı oldu, bir de yanlarda iki kişi eklendi sekiz oldu. Dörtlü masada da kafamdan masa ekledim, çizmedim bu sefer. Bir tarafta dört, bir tarafta dört, etti sekiz. Bir de iki yanda var 10 oldu. Beşli masada da masaların bir tarafında beş, karşı tarafında beş, yanlarda da iki kişi oturacak.

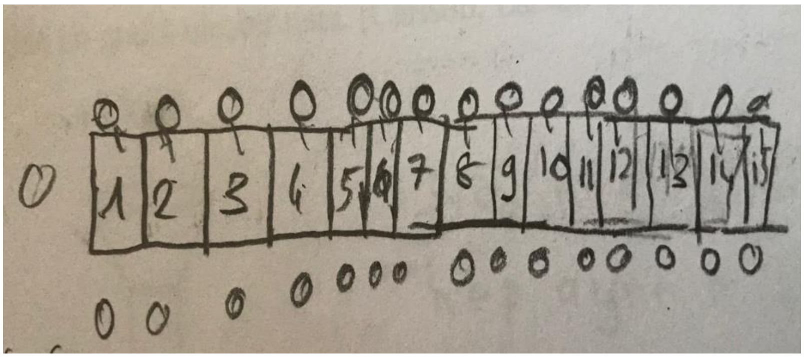


Görsel 3.2.12. *Ö7'nin etrafında oturacak kişi sayısını hesaplamak için çizdiği üçlü masa*

Ö7: … Mesela 15'li masada çizdim ben burada; şekilde göstereyim. 15 kişi bu tarafta otursa, bu tarafa da 15 kişi oturuyor topladım 30, yanlarda da iki kişi oturur 32 oldu.

G: Kare masa sayısıyla etrafında oturan kişi sayısı arasında nasıl bir bağlantı kurmuş oldun?

Ö7: Masa sayısına göre… İşte masa sayısı kaç taneyse o kadar kişi bir tarafta oturur, o kadar kişi yine karşısında oturur, sağda solda da iki kişi olur.



Görsel 3.2.13. *Ö7'nin etrafında oturacak kişi sayısını hesaplamak için çizdiği 15'li masa*

Ö5 öncelikle bir masa eklendikçe iki kişi artacağını fark ederken problemin ilk öncülünü yanıtlamıştır. Ancak son öncüldeki problemi cevaplarken Ö1, Ö7 ve Ö9 ile aynı yöntemi uygulayarak masa sayısı ve etrafında oturan kişi sayısı arasında bir ilişki kurabilmiştir.

Ö2 ise problemde şekilleri adım sayısı olarak adlandırmış ve adım sayısı ve kişi sayısı arasında bir ilişki kurmuştur. Ayrıca bulduğu bu ilişkiyi cebirsel ifadeyle temsil etmiştir. Klinik görüşme sırasında masa sayısına göre kişi sayısındaki değişim sorulduğunda ise her masa eklendiğinde iki kişi arttığını belirtmiştir. Daha sonra ilk önce bulduğu ve cebirsel ifadeyle temsil ettiği ilişkinin aslında masa sayısı ve masa sayısına göre kişi sayısı arasındaki ilişki olduğunu fark edebilmiştir.

G: Peki Burcu üçlü, dörtlü ve beşli kare masa seçerse etrafında kaç kişi otururlar?

Ö2: Yani ben adım sayısıyla bir ilişki kurarak düşündüm burada. O zaman… 1 tane masada dört kişidir, iki tane masada altı, üç tane masada sekiz olur. Çünkü her masada iki kişi daha ekleniyor. Bir öncekine masa ekledim yani. Masa ekledikçe iki kişi daha geliyor. Onun için dörtlü masada da iki kişi eklenirse 10 olur, beşli masa da iki kişi daha eklenirse 12 kişi olur.

G: Bulduğun bu ilişkiyi değişkenle nasıl ifade edersin?

Ö2: Ben bu ilişkiyi değişkenle ifade edemedim. (Sessizlik.) Ama bir şey buldum. 2n+2 buldum ya, onu değişkenle ifade ettim. Bu olmaz mı?

G: 2n+2'deki n'nin adım sayısı olduğunu az önce söylemiştin bana.

Ö2: (Düşünüyor) Deminki sorudaki gibi işte. Birinci adımda bir masa var, ikinci adımda iki masa olur. Yani adım sayısı kare masa sayısına eşittir.

G: Peki Burcu 15 tane yan yana kare masa seçerse masaların etrafında kaç kişi otururlar?

Ö2: Biz kuralı bulduk değişkenle, o yüzden kolay olur. 15 kere ikiden 30, artı iki yani 32 kişi.

Ö3 ise ilk önce problemde istendiği gibi üçlü, dörtlü, beşli ve hatta 15'li masaları çizmiş, etrafında oturacak kişi sayısını tek tek yerleştirmiştir. Ancak klinik görüşme sırasında 50'li masa için kişi sayısı sorulduğunda masa çizmekten vazgeçerek başka bir yöntem bulmuştur. Çizdiği masaların kenarlarını karelerin ayrıtı olarak düşünmüş ve bu ayrıtlara göre kişi sayısını veren bir ilişki kurabilmiştir.

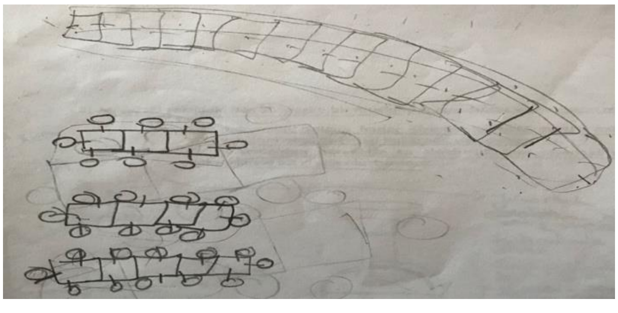
G: … Neler anladın bu sorudan?

Ö3: … Burada cebir kuralı, örüntü falan hiçbir şey bulamadım. Ben de masaları tek tek çizmeye karar verdim. Önce üç masa çizdim. Masanın etrafına insanları yerleştirdim, saydım sekiz kişi oldu. Sonra dört masa çizdim, 10 kişi oturdu. Sonra beş masa çizdim, 12 kişi oturdu.

…

G: O zaman 15 tane kare masa seçseydi, masanın etrafında kaç kişi oturacaktır?

Ö3: Ben 15 tane masa çizdim buraya zaten. Etrafını saydım (Tek tek sayıyor) 32 kişi oturuyor.



Görsel 3.2.14. *Ö3'ün etrafında oturacak kişi sayısını hesaplamak için çizdiği masalar*

G: Tamam. 50 tane kare masa seçseydi etrafında kaç kişi oturacaktır?

Ö3: Tek tek çizersem kağıt yetmez (gülüyor). Düşüneyim (Düşünüyor). Ben şöyle bir yöntem buldum. Şimdi masalar birleşince etrafına oturacak iki ayrıtı kalıyor sadece. Çünkü masalar yapıştığı için o ayrıtlar iptal oluyor. Şimdi 50 tane masa diziyor. Üst sırada 50 tane ayrıt var, alt sırada 50 tane daha ayrıt var. En sağda ve en solda da hep iki tane ayrıt olur. 50 ye 50 eklersek 100, sağ ve soldakileri eklersek 102 kişi.

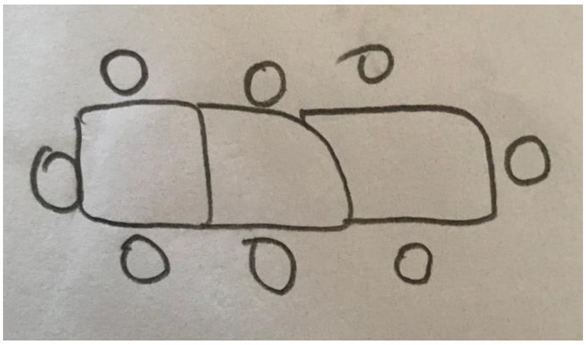
G: Peki herhangi bir masa sayısı için etrafında kaç kişi oturur?

Ö3: Tamam, n tane masa sayısı olsun. O zaman n kişi üstte, n kişi altta, artı iki kişi. Yani n çarpı iki, artı iki.

Ö4 ise problemin ilk ve son öncüllerini çözerken masaları çizerek etrafındaki kişileri saymıştır. Önce kişi sayılarının bir masa eklendikçe iki arttığını fark etmiştir. 15 masa için problemi çözdükten sonra ise üçlü, dörtlü, beşli ve 15'li masalar için hesapladığı sayıları sağlayacak şekilde deneme-yanılma yöntemiyle masa sayıları ve kişi sayıları arasında kural oluşturmuştur.

G: Üçüncü soruya geçebiliriz. Bu sorudan neler anladın?

Ö4: Hocam bir karede dört tane kenar vardır. Ama iki kareyi birleştirdiğimizde iki karenin bir tane kenarı ortak olur. O yüzden sekiz kişi oturacağı yerde altı kişi oturur. Üçlü kare masada ise çizerek yaptım, sekiz kişi oturur. Dörtlü masa çizdim 10 kişi oldu. İki ekleyerek ilerlediğini fark ettim. Bir masada dört, iki masada altı, üç masada sekiz hep iki artıyor kişi sayısı. Beşli masada da 12 oldu.



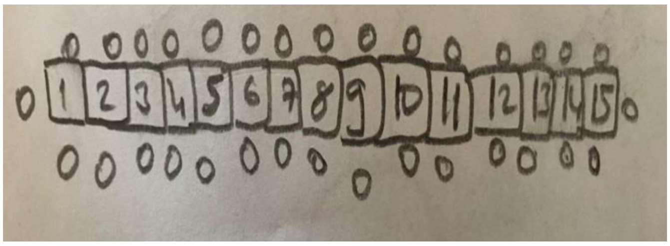
Görsel 3.2.15. *Ö4'ün etrafında oturacak kişi sayısını hesaplamak için çizdiği üçlü masa*

G: Burcu 15'li kare masa seçerse masanın etrafında kaç kişi oturacak?

Ö4: 15 tane masa çizdim ben, saydım 32 kişi oturdu.

G: Kare masa sayısı ile etrafında oturan kişi sayısı arasında bağlantı var mıdır?

Ö4: Masa sayısı çarpı iki, artı iki bulmuştum ben. Üçlü, dörtlü, beşli masa sayısını bulmuştum önce, sonra da 15'li masayı buldum 32 olarak. Bunların değerlerine baktım. Üç masaya kadar denedim, buldum. 15'e de uygulayınca oldu. Kesin bu diye düşündüm.



Görsel 3.2.16. *Ö4'ün etrafında oturacak kişi sayısını hesaplamak için çizdiği 15'li masa*

Ö6'da bir masa eklendikçe iki kişi eklendiğini düşünerek problemin ilk öncülünü cevaplamıştır. Son öncülde sorulan 15 masa için kişi sayısını hesaplarken de masaları çizerek etrafında oturan kişileri saymıştır. Büyük sayıdaki masa için masa sayısı sorulduğunda ise yine masa çizeceğini belirtmiştir. Ancak bunun kısa yolu olup olmadığı sorulduğunda düşünerek klinik görüşme sırasında masa sayısı ve kişi sayısı arasında deneme-yanılma yöntemiyle bir ilişki kurarak problemin ilk ve son öncülünde hesapladığı sayılarla sağlamasını yapmıştır.

G: Üçüncü soruda neler düşündün?

Ö6: Üçlü kare masa çizdim sekiz kişi oturdu. Dört tane masa çizdim sonra 10 kişi. Diğeri de 12 kişi oldu. İki iki arttı hep kişi.

G: Burada 15'li kare masa seçerse kaç kişi oturur diye sormuş. Cevaba kaç dedin?

Ö6: Çizerim 15 masayı ulaşırım cevaba.

G: 100 masa için etrafındaki kişi sayısını nasıl hesaplarsın?

Ö6: 100 tane masa çizebilirim (gülüyor).

G: Bunun bir kısa yolu yok mu?

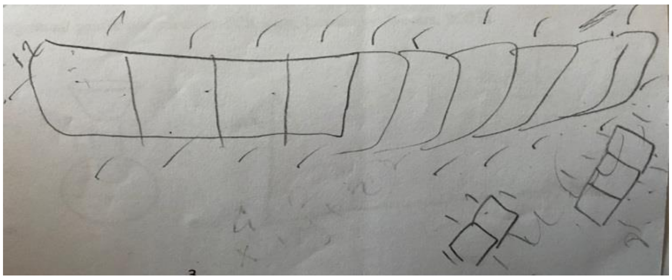
Ö6: Dedim ya, masa eklendikçe iki kişi artıyor. (Düşünüyor) Bir dakika… Üç masada sekiz kişi, dört masada 10. Çarpı iki, artı iki. Buldum (gülüyor). Masa sayısını iki ile çarpıp iki ekliyoruz kişi sayısına ulaşıyoruz. Denedim hepsinde oluyor. 15 masa için 32 kişi olur. O zaman 100 masa için 200 artı ikiden 202 kişi olur.

G: Nasıl buldun?

Ö6: Üç, dört ve beş masayı biliyordum zaten. 15 masayı da buldum sonradan. Denedim işte, iki ile çarptım önce sonra iki ekledim, hepsinde sağlayınca kuralı bulmuş oldum.

G: Başka bir şekilde yine bu kurala ulaşır mıydın?

Ö6: Yok ulaşamazdım. Hep böyle deneyerek bulmayı öğrendik zaten bizde, ama geç anladım bunu (gülüyor).



Görsel 3.2.17. *Ö6'nın etrafında oturacak kişi sayısını hesaplamak için çizdiği masalar*

Ö8 ise önce üç masa çizerek etrafındaki kişileri saymış ve bir masa eklendikçe iki kişi eklendiğini fark etmiştir. Bu sebeple hemen bu iki kişilik artışı cebirsel ifadeyle temsil etmiştir. Problemin son öncülünde sorulan 15 masa için masa sayısını cebirsel ifadede değişkenin yerine koyarak kişi sayısına ulaşmış ancak kesin cevabı hesaplamak için 15 tane masa çizerek kişileri tekrar saymıştır. Böylece oluşturduğu cebirsel ifadede hata yaptığını fark ederek başka bir kural bulmaya çalışmıştır. İlk öncül ve son öncülde hesapladığı sayıları sağlayacak kurala deneme-yanılma yöntemiyle ulaşmıştır.

G: Üçüncü soruda neler düşündün?

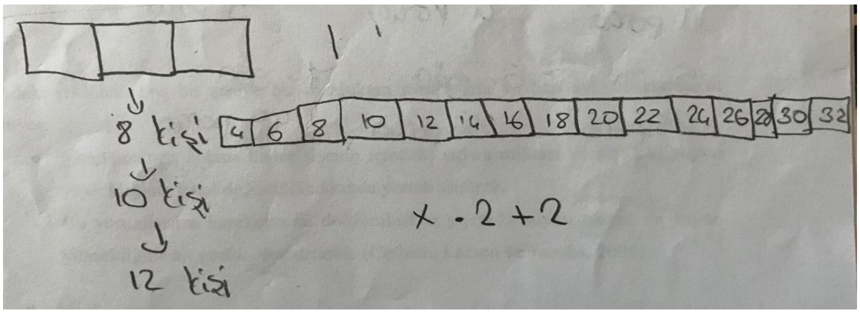
Ö8: Burada bir masa etrafında dört kişi, iki tanesinin etrafında altı kişi oturacaksa, üç tane masa çizdim burada sekiz kişi oturmuş oldu. Sonra fark ettim ki hep iki kişi ekleniyor bir öncekine. O yüzden dört ve beşli masa çizmeme gerek kalmadan 10 ve 12 kişi oturur dedim.

G: Kare masa sayısıyla etrafında oturan kişi sayısı arasında bir bağlantı var mıdır?

Ö8: Vardır. Bir kare masa eklendikçe iki kişi daha ekleniyor. Ama ben önce şöyle bir saçmalık yaptım (gülüyor). x'e masa sayısı desem, iki de artan kişi sayısı olacağı için x+2 dedim.

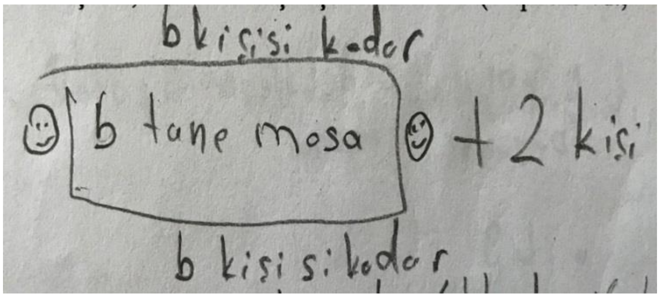
G: Neden daha sonra hata yaptığını düşündün?

Ö8: 15li masa için kişi sayısını sormuşsunuz. Ben hemen rahat rahat x yerine 15 dedim. 17 kişi oldu. Ama içim rahat etmedi 15 masayı çizdim garanti olsun diye, üşenmeden (gülüyor). Bir baktım 32 kişi oldu. Başka kural aradım hemen. 15 masa var, 32 kişi var. 15'i ikiyle çarpıp iki eklersem 32 olur diye düşündüm. Sonra hemen diğerlerinde denedim, üç masa için iki katının iki fazlası sekiz, beş masa için 12. Oldu işte.



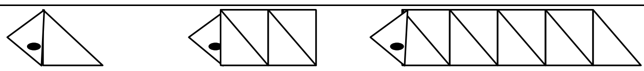
Görsel 3.2.18. *Ö8'in etrafında oturacak kişi sayısını hesaplamak için çizdiği masalar*

Tüm katılımcılar kişi sayısının masa sayısına göre değiştiğini belirtmişlerdir. Ö7 haricindeki katılımcılar ise masa sayısı ve masaların etrafında oturan kişi sayısı arasında kurdukları ilişkiyi cebirsel ifadelerle gösterebilmişlerdir. Ö7 ise kurduğu bu ilişkiyi değişkenler kullanarak görsel olarak farklı bir şekilde temsil etmiştir. b tane masayı temsilen büyük bir masa çizmiş, b tane kişiyi masanın bir tarafına, b tane kişiyi masanın karşı tarafına, iki kişiyi de sağ ve sol tarafa yerleştirmiştir.



Görsel 3.2.19. *Ö7'nin masa sayısına göre değişen kişi sayısını cebirsel olarak genelleme yöntemi*

15. Problem:



1.gün 2.gün 3.gün

Yukarıdaki şekilde bir yılanın günlük büyümesi görülmektedir.

- Yılanın büyümesi konusunda ne düşünüyorsunuz?
- Yılanın 7.günde uzunluğu nasıl olur?
- Yılanın uzunluğu nelere bağlı olarak büyümektedir?
- Yılanın istediğimiz herhangi bir gündeki uzunluğunu bulmak için bir şey düşünebilir miyiz?
- Herhangi bir gündeki uzunluğunu sembolik olarak nasıl ifade ederiz?

Şekil 3.2.7. *Veri Toplama Aracı-2'nin dördüncü problemi*

Probleme Ö1 ve Ö3 benzer cevaplar vermiştir. Her ikisi de yılanın gün gün vücudundaki üçgen parçaları (yılanın başını temsil eden parça hariç) saymış, gün ve o gündeki parça sayısı arasında ilişki kurmuşlardır. Ayrıca bu ilişkiyi cebirsel olarak ifade edebilmişlerdir. Klinik görüşmeler sırasında yılanın baş kısmının da hesaba katmaları istendiğinde yeniden bilgilerini düzenleyebilmiş ve bu bilgiyi tekrar cebirsel olarak ifade edebilmişlerdir.

G: …Bu sorudan neler anladın?

Ö3: Şimdi bu soruda yılanın büyümesi hakkında ne düşünüyorsunuz diyor. Ben n üzeri iki dedim.

G: Yani ne demektir bu n üzeri iki?

Ö3: Şimdi birinci günde gövdesinde bir üçgen, ikinci günde dört üçgen var, üçüncü günde dokuz üçgen var. Bu yüzden bir üzeri ikiden bir, iki üzeri ikiden dört, üç üzeri ikiden dokuz üçgen.

G: Peki yedinci gündeki yılanın uzunluğu nasıl olur?

Ö3: Yedi üzeri ikiden 49.

G: Yılanın vücudundaki tüm parça sayıları nasıl değişmektedir?

Ö3: O zaman kafa kısmını da alırdım. Yani o zaman yedinci gün için n üzeri ikiye bir de kafayı ekliyoruz artı bir. 49 artı birden 50 parça.

G: Yılanın herhangi bir gündeki uzunluğunu hesaplamak için bir şey düşünebilir miyiz?

Ö3: Cebirle düşünebiliriz. Yani n üzeri iki. Sonra artı bir.

G: Tamam. Burada n harfi nedir?

Ö3: Burada n dediğimiz gün.

G: Peki gün sayısını kendisiyle çarpıp bir ekleyince neyi hesaplıyoruz?

Ö3: O gündeki vücudundaki parça sayısını, uzunluğunu.

Ö2 ise günleri adım sayısı olarak düşünmüş, adım sayısı ve adım sayısındaki günde yılanın vücut parçalarının sayısı (yılanın başı hariç) arasında ilişki kurup bu ilişkiyi cebirsel ifadelerle temsil etmiştir. Ancak baş kısmını da sayması istendiğinde önceden hesapladığı sayılara bir eklemiş, bu sayılara göre yılanın büyümesi hakkında başka yöntem üretmiştir. Ö2'ye göre yılanın vücudundaki üçgenler arasındaki artış hep iki artarak ilerlemektedir. Klinik görüşme sırasında ürettiği fikri herhangi bir gündeki yılanın uzunluğunu hesaplaması istendiğinde ise kendisi bir gün örneği vermiş ancak yeni yöntemiyle yılanın uzunluğuna ulaşamamıştır. Çözüm sürecinin başında bulduğu kurala göre yılanın uzunluğuna ulaşmış, yılanın başını eklemenin aslında kuralına bir eklemek olduğunu ise klinik görüşme sırasında fark etmiştir. Ayrıca Ö2, cebirsel ifadesindeki değişkenin hem adım sayısı hem de güne karşılık geldiğini de belirtmiştir.

G: Yılanın istediğimiz herhangi bir gündeki uzunluğunu bulmak için bir şey düşünebilir miyiz?

Ö2: Yani hangi bir sayı? Mesela 20.günde yılanın uzunluğunu kafasını saymazsak hesaplayabiliriz ama kafasını sayarsak hesaplayamayız. Kafayı sayarsak tek tek yazmamız gerekir. Artışlar hep iki iki artıyordu çünkü. Ama kafasını saymazsak 20'nin karesini alırız, (Hesaplıyor) 400 olur.

G: Kafasını da sayarak hesaplar mısın?

Ö2: (Uzun bir sessizlik) Artı bir. 401. (Gülüyor) Karesini alıp bir eklerim, bunu neden fark etmediğime şaşırıyorum şu anda. Burada kafasız olarak hesaplarım, sonra artı bir kafasını eklerim.

G: Herhangi bir gündeki uzunluğunu değişkenle nasıl ifade ederiz?

Ö2: Bir dakika kafayı da ekleyeyim. Burada n kare artı bir oldu.

G: Tamam. Buradaki n değişkeni ne ifade eder?

Ö2: Burada n, adım sayısıdır. Bir de gün sayısıdır.

G: Tamam. Gün sayısının karesini alıp sonra bir eklediğimizde neyi hesaplarız?

Ö2: Yılanın o gündeki uzunluğunu hesaplarız.

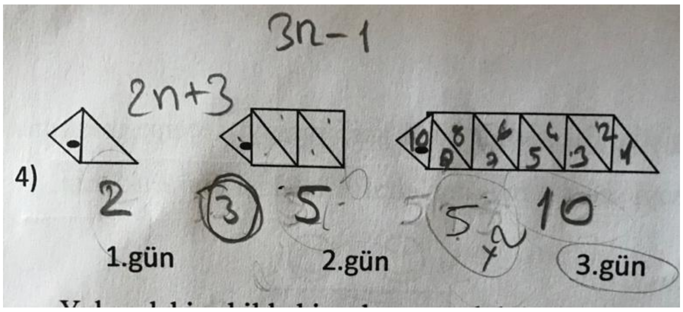
Ö4, Ö6, Ö7 ve Ö8 ise yılanın uzaması hakkında yorum yaparken yalnızca üçgen sayılarına (yılanın başı hariç) odaklanarak problemde istenen yedinci gündeki uzunluğu hesaplamışlardır. Bu katılımcılar Ö2 ile benzer şekilde yılanın vücudundaki üçgenler arasındaki artışın hep iki artarak ilerlediğini fark etmişler; hangi gün olursa olsun o günde yılanın uzunluğuna hep günler arasındaki artışlara iki sayı eklenerek ulaşılabileceğini belirtmişlerdir. Yılanın baş kısmını da sayması istendiğinde daha önce hesapladıkları sayılara bir eklemiş ancak örüntünün ilerlemesi hakkındaki fikirlerini değiştirmemişlerdir. Ö4, Ö6 ve Ö8 buldukları kuralları cebirsel olarak ifade edememiş, Ö7 ise bu konuda fikir üretmiştir.

Ö4 önce yılanın uzunlukları arasındaki değişim için birden fazla fikir üretmiş, daha sonra bu fikirler arasında kendisine göre en mantıklı olanı seçmiştir. Yedinci gündeki uzunluğa ise seçtiği yöntem ile cevap vermiştir. Çözüm sürecinde gün sayısı ve uzunluk arasında bir kural aramak için çok uğraşsa da ulaşamamıştır.

(…)

G: Ama her adımın tek bir doğru cevabı vardır. Bunun doğrusunu bulmamız lazım.

Ö4: (Düşünüyor) Hocam sürekli kurallar deniyorum ama, ikiyle çarptım bir şeyler ekledim, çıkardım. Ama bulamıyorum. (Düşünüyor) Hocam ben… Tamam bir karar verdim. Üç eklemişti, beş eklemişti, yedi eklenecek. Dördüncü günde 10 artı yediden 17 olacak.



Görsel 3.2.20. *Ö4'ün günlere bağlı olarak yılanın uzunluğunu hesaplamaya yönelik kural denemeleri*

G: Neden buna karar verdin de diğer seçenekleri eledin?

Ö4: En mantıklısı bu geldi. Her gün aradaki artışlar iki iki artacak.

G: Yedinci günde kaç parça olacak vücudunda?

Ö4: Beşinci günde dokuz ekledim 26, altıncı gün 11 eklemem gerekiyor 37, yedinci gün için 13 eklemem lazım 50 parça.

G: Yılanın baş kısmını neden saymıyorsun?

Ö4: Bilmem, sayayım. (Düşünüyor) Yedinci günde 50 olur. Kural değişmez ama.

G: Peki 50. gündeki uzunluğunu sorsam nasıl hesaplardım?

Ö4: Bu işleme devam ederdim hocam (gülüyor). Çünkü bir kural bulamadım buna dair.

G: Ama aradaki sayıların ikişer ikişer arttığını söylemiştin. Kural bu değil mi?

Ö4: Yok yok, n'li bir kural bulamadım yani.

Ö6, yılanın vücudundaki parça sayısının tek sayılar şeklinde arttığını; bu sebeple çok yakın adımlardaki boy uzunluğunun kolay bir şekilde hesaplanacağını ve ileriki günler için bunun zor olacağını belirtmiştir. Yalnızca vücut parça sayılarının artışı hakkında yorum yaptığından değişken ile ifade edemeyeceğini belirtmiştir.

Ö7, yılanın herhangi bir gündeki uzunluğunu hesaplamak için oluşturduğu kuralı cebirsel olarak ifade etmek için uğraşsa da, yalnızca gün sayısına veya yalnızca uzunluğun artışına değişken atayabilmiştir.

G: Yılanın istediğin gündeki uzunluğunu nasıl hesaplarsın?

Ö7: Hep tek sayılar olarak iki sayı fazlası artıyor. Böyle artıra artıra yaparım. Mesela 25.gündeki uzunluğu bulmak için, 24'e geçerken kaç uzadıysa ona iki eklerim, iki eklediğim sayıyı da 24.güne eklerim.

G: Bu ilişkiyi harfli olarak nasıl ifade edebiliriz?

Ö7: Yani d gününde şu kadar arttı diyebiliriz veya tam tersi; şu günde d kadar arttı diyebiliriz. (Sessizlik)

Ö8'de Ö4 ile benzer şekilde önce yılanın uzunluğu hakkında birden fazla fikir üretmiştir. Ancak yılanın her gün bir öncekinden daha fazla büyüdüğünü fark ettiğinden mantıklı olan yöntemi seçebilmiştir.

G: Dördüncü soruya geçelim. Sorudaki bu yılanın büyümesi hakkında ne düşünüyorsun?

Ö8: Şimdi ben yılanın boyunu şöyle buldum. Birinci günde bir üçgen, ikinci günde dört üçgen varmış. Yani üç tane üçgen artmış. Sonra üçüncü gün dokuz üçgen var, bu sefer beş üçgen artmış. Ben önce üç-beş artmış ya, hep üç-beş-üç-beş artacağını düşüneyim dedim. Daha sonra neden böyle düşündüğümü kendim de anlamadım (gülüyor). Sonuçta yılan hep daha daha fazla büyümüş şekle bakınca. Derslerde de zaten yaptığımızda genelde aynı şekilde artacak şekilde çözüyorduk bunu hatırladım. Yani üç-beş-yedi diye artacak dedim.

Ö5 ve Ö9 ise önce yılanın vücudundaki üçgenler arasındaki artışın hep iki artarak ilerlediğini fark etmişlerdir. Bu bilgiye göre yılanın yedinci gündeki uzunluklarını (yılanın baş kısmı hariç) hesaplamışlardır. Ancak Ö5 klinik görüşme sırasında, Ö9 ise daha öncesinde ilk yedi günü hesapladıktan sonra yılanın uzunluğunun gün sayısının karesi olduğunu görerek kurallarını oluşturmuşlardır. Klinik görüşme sırasında yılanın baş kısmını da eklemeleri istendiğinde ise gün sayısının karesine bir eklemişlerdir. Ö5 ve Ö9 oluşturdukları ilişkiyi cebirsel olarak ifade edebilmişlerdir.

Ö4 ve Ö7 haricindeki tüm katılımcılar yılanın uzunluğunun günlere göre değiştiğini belirtmişlerdir. Ö4 ve Ö7 ise yılanın boyunun üçgenlere/şekillere göre değiştiğini ifade etmişlerdir.

G: Yılanın uzunluğu neye göre değişiyor?

Ö4: Vücudundaki üçgenlere göre değişiyor. Üçgen sayısı arttıkça yılan uzuyor.

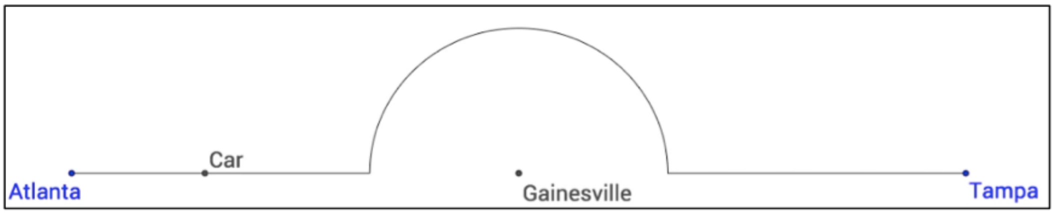
G: Dördüncü soruda yılanın boyu neye göre değişmektedir?

Ö7: (Düşünüyor) Şekillere bağlı olarak değişiyor işte.

3.3. Katılımcıların Kovaryasyonel Düşünmeleri İle İlgili Bulgular ve Yorumlar

Veri Toplama Aracı-2'deki kovaryasyonel düşünmeye yönelik problem durumlarında katılımcıların çözüm süreçlerine ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Veri Toplama Aracı-2'deki kovaryasyonel düşünme problemleri ve bulgular ayrı ayrı belirtilmiştir.

16. Problem:



Atlanta'dan sabit hızla yola çıkan araç, şekildeki yolu izleyerek Tampa'ya varacaktır. Bu durumda araç Atlanta'dan yola çıkıp giderken aldığı toplam mesafe ile Gainesville şehrine olan mesafe hakkında yorum yapınız.

Şekil 3.3.1. *Veri Toplama Aracı-2'nin beşinci problemi*

Tüm katılımcılar problem bağlamını anlamakta zorlandıklarından klinik görüşme öncesinde istenen değişkenler hakkında yorum yapamamışlardır. Katılımcıların çoğunun bu problemle ilgili olan yanılgılarından biri problemde aracın yolculuk süreci hakkında yorum yapmamaları olmuştur. Katılımcıların bir kısmı ilk önce süreç hakkında yorum yapmak yerine; yol uzunlukları, aracın Gainesville ve Tampa'ya varma süreleri vb. konular hakkında yorum yapmışlardır.

G: Beşinci soruya geçelim. Bu sorudan neler anladın?

Ö5: Aracın Atlanta'dan yola çıkıp giderken mesafesi, Tampa'ya göre azalır, Atlanta'ya göre artar. Yani araç ilerlerken Atlanta'dan uzaklaşır, Tampa'ya yakınlaşır.

G: Peki araç gittikçe…

Ö5: Yol kısalır.

G: Tamam, bu sorudan neler anladın?

Ö8: Bu soruda, aldığı yolu kesirle ifade ettim ben. Atlanta'dan Tampa'ya tam gitmiş olursa mesela dört bölü sekizse tam yol, o zaman Gainesville noktasına kadar olan yol yarısı olacak dört bölü dört kesri yani. Öyle buldum.

G: Beşinci sorudan neler anladın?

Ö9: (Problemin tamamını okuyor) Aracın gittiği yolla, G noktasına kalan yolu bulup ikiyle çarparsak, yok yok. Kalan yolu… Evet öyle olur. İkiyle çarpıp sonra aracın gittiği yolu çıkartırsak Tampa'ya olan uzaklığını bulabiliriz.

Katılımcıların çoğunun bu problemle ilgili olan yanılgılarından diğeri ise aracın gittiği yolun şekli ile ilgili olmuştur. Ö1, Ö2 ve Ö3 yolun kıvrımlı olmasından dolayı alternatif yollar düşünerek aracın düz yolda gitmesi durumunu da değerlendirmişlerdir. Ayrıca hem eğimli hem de düz yol için aracın gittiği mesafeleri karşılaştırmışlardır. Ancak görüşmeci düz bir yolun olmadığını, şehirlerin arasındaki yolun şekilde belirtilen yol olduğunu belirtince, Ö2 ve Ö3 yeni fikirler üretmiş, Ö1 ise problemi değerlendirmekten vazgeçmiştir.

G: Şimdi de beşinci sorudayız. Nasıl bir yorum yaptın?

Ö1: Ben tepeden çıkması uzun süreceği için Tampa'ya, Gainesville'den daha uzun sürede gider diye yazmıştım. Yani yükseğe çıkmak araç için zor olabilir diye düşünmüştüm. Gainesville'den buradan değil de dümdüz aşağıdan giderse daha kısa sürer diye düşünmüştüm. Yani yol biraz kıvrımlı olduğu için, dümdüz gitseydi daha kısa sürede Tampa'ya varacaktı. Ama yine birazcık daha uzun sürer.

G: Bu araç yolda giderken, Tampa'ya varana kadar bu aracın aldığı mesafe nasıl değişir?

Ö1: Aldığı mesafe, dümdüz gittiği mesafeden daha uzun bir mesafe olur.

G: Dümdüz giden bir yol yok. Şehirler arasında sadece tek bir yol var. Bu yolu giderken aracın aldığı mesafe nasıl değişir?

Ö1: (Uzun bir sessizlik) Daha önce böyle bir soruyla karşılaşmamıştım. Kafam durdu resmen. Bu soruyu geçebilir miyiz?

Ö4 ise yolun kıvrımlı değil de rampalı olduğunu düşünerek aracın sabit hızla gidemeyeceğini ifade etmiştir. Ancak görüşmeci yolun rampalı değil kıvrımlı olduğunu belirtince; Ö1, Ö2 ve Ö3 ile benzer şekilde önce yolun düz olması durumunu da değerlendirip karşılaştırma yapmıştır. Görüşmeci düz bir yolun olmadığını, şehirlerin arasındaki yolun şekilde belirtilen yol olduğunu belirtince problem hakkında yeni fikirler üretmiştir.

Ö6 ise şekilde gösterilen yolu hiç önemsemeyip iki şehir arasında Gainesville şehrinin merkezinden geçen bir yol olduğunu ve bu yol üzerinde aracın şekilde belirtilen noktada durduğunu varsaymıştır. Yolun üzerindeki birkaç yeri nokta ile işaretleyerek noktalar arasındaki mesafeyi değerlendirmiştir. Ancak görüşmeci yolun düz yol değil de şekilde gösterilen kıvrımlı yol olduğunu belirtince, problem hakkında yeni fikirler üretmiştir.

G: Bir sonraki sorudan neler anladın?

Ö6: Şimdi ben buraya nokta isimleri verdim. Atlanta'ya A, arabaya C, Gainesville şehrine G, buralara B, D, Tampa'ya T dedim. Bu noktalar arasındaki mesafeler hep eşit olur dedim.

G: Aracın gittiği yolu bana bir gösterir misin?

Ö6: Böyle işte, dümdüz.

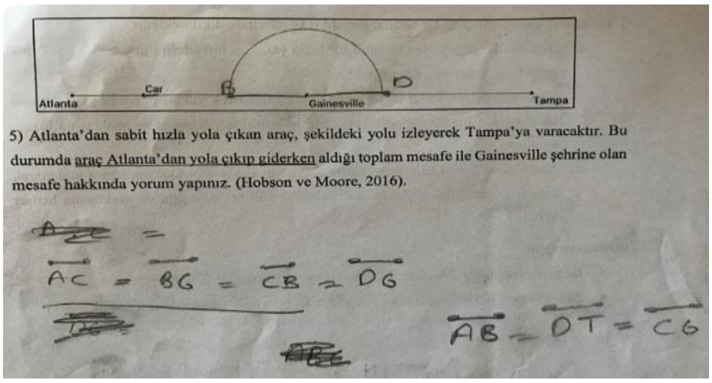
G: Soruyu dikkatle okudun mu?

Ö6: Okudum.

G: Şekildeki yolu izleyerek demiş.

Ö6: (Düşünüyor) Bu eğimli yolu mu?

G: Evet.



Görsel 3.3.1. *Ö6'nın kendi oluşturduğu düz yol üzerinde belirlediği noktalar ve aralarındaki uzaklıkları*

Tüm katılımcılar problem bağlamındaki yolu anlamlandırdıktan sonra, istenen değişkenleri eş zamanlı olarak yorumlaması beklenmiştir. Ancak hiçbir katılımcı eş zamanlı olarak yorum yapamadığından; görüşmeci her bir değişkeni ayrı ayrı sorarak yorumlanmasını istemiştir. Klinik görüşmeler sırasında problem durumunu tekrar değerlendiren katılımcılar olsa da, yalnızca Ö5 ve Ö9 probleme doğru ve tam cevap verebilmişlerdir. Ancak bu katılımcılar da problemde eş zamanlı olarak yorumlanması istenen iki değişkeni ayrı ayrı değerlendirebilmiştir.

Öncelikle, Ö5 ve Ö9 haricindeki katılımcıların problem bağlamındaki "araç Atlanta'dan yola çıkıp giderken aldığı toplam mesafe" değişimi hakkındaki yorumlarını ele alalım. Ö2 aracın Tampa'ya giderken aldığı toplam mesafeyi değerlendirmek yerine, aracın Tampa'ya olan mesafesini değerlendirerek yanlış bir yorum yapmıştır.

Ö2: O zaman bir dakika düşüneyim (Düşünüyor) Şimdi burada araç yola çıktı Tampa'ya geldikçe yaklaştığı için şehre olan mesafesi hep azalır.

Ö3, Ö6 ve Ö7 ise aracın Tampa'ya giderken aldığı toplam mesafenin sürekli artacağını belirterek doğru yorum yapabilmişlerdir. Ancak Ö7, "artış" ifadesini kullanmak yerine aracın Tampa'ya olan mesafesine sayısal bir değer vererek araç gittikçe aracın aldığı toplam mesafeyi rasgele sayısal değerler vererek örneklendirmeyi tercih etmiştir. Ö8 ise araç giderek Tampa'ya yaklaşacağı için aracın hem Tampa'ya olan mesafesinin hem de aracın aldığı toplam mesafenin azalacağını belirtmiştir.

G: Sorunun bizden yorumlamamızı istediklerine tekrar bakalım. Araç Atlanta'dan Tampa'ya giderken, aracın aldığı toplam mesafe nasıl değişir?

Ö7: Mesela ikisi arasındaki mesafe 10 kilometre ise, aracın aldığı toplam mesafe de 10 kilometre olacak.

G: Peki araç yolculuk halindeyse bu süreçte aldığı toplam mesafe nasıl değişir?

Ö7: (Düşünüyor) Mesela beş kilometre gittiyse araç, aldığı toplam mesafe de beş kilometre oldu. Yedi kilometre giderse, bu sefer yedi kilometre oldu. En son da yol bitince 10 kilometre mesafe aldı toplamda.

Ö5 ve Ö9 haricindeki katılımcıların problem bağlamındaki "araç Atlanta'dan yola çıkıp giderken Gainesville şehrine olan mesafesi" değişimi hakkındaki yorumlarını ele alalım. Ö2, Ö3, Ö4 ve Ö7; araç şekilde belirtilen yolda giderken yolun tam ortasına kadar Gainesville şehrinin merkezine yaklaştığından, aracın merkeze olan mesafesinin azaldığını; yolun ortasından sonuna kadar ise Gainesville şehrinin merkezinden uzaklaştığından, aracın merkeze olan mesafesinin uzadığını belirtmişlerdir.

G: Bu sırada aracın Gainesville'ye olan uzaklığı nasıl değişir?

Ö3: Şimdi bu noktaya göre bakalım. Şu yolu ortadan ikiye bölelim. İlk yarısına kadar Gainesville'ye mesafe azalır, diğer yarısında bu noktaya olan mesafesi artar.

G: Peki Atlanta'dan Tampa'ya giderken Gainesville şehrinin merkezine olan mesafemiz nasıl değişir?

Ö4: (Düşünüyor) Önce şöyle ortasına kadar biraz yaklaşırız sonra uzaklaşırız. (Sessizlik)

Ö6 ve Ö8 ise Atlanta'dan şekildeki çembersel yolun sonuna kadar aracın Gainesville şehrine yaklaştığından şehrin merkezine olan mesafesinin azalacağını, çembersel yolun sonundan Tampa'ya varana kadar ise aracın Gainesville şehrinden uzaklaştığından şehrin merkezine olan mesafesinin artacağını belirtmişlerdir.

G: Bu sırada arabanın Gainesville şehrinin merkezine olan mesafesi nasıl değişir?

Ö6: Gainesville'ye yaklaştıkça mesafeniz azalır. Bu D noktası olan yere kadar azalır. Sonra artar mesafesi. (Görsel 3.3.1'de belirttiği D noktası)

Ö5 ve Ö9, daha önce de belirtildiği gibi eş zamanlı olmasa bile problem bağlamında yer alan değişkenlere tam ve doğru yorum yapabilen katılımcılardır. Her ikisi de araç Atlanta'dan Tampa'ya giderken aracın aldığı toplam mesafenin hep artacağını, aracın Gainesville şehrinin merkezine olan mesafesinin de Atlanta'dan çembersel yola kadar -araç yaklaştığından dolayı- azalacağını, çembersel yolda mesafenin hep sabit olacağını, çembersel yoldan Tampa'ya kadar –araç uzaklaşacağından dolayı- artacağını belirtmişlerdir.

G: Araç giderken aracın aldığı toplam mesafe nasıl değişir?

Ö5: Gittikçe hep daha çok mesafe alır alır, artar oraya varana kadar.

G: Araç giderken Gainesville şehrinin şu noktayla gösterilen merkezine olan mesafesi nasıl değişir?

Ö5: Önce bu düz çizgide yaklaşır yaklaşır mesafe azalır, sonrasında diğer düz çizgide uzaklaştığından mesafesi artar.

G: Peki bu aradaki yolda?

Ö5: (Düşünüyor) Orada hep sabittir. Çember şeklinde yol. Yani çemberin yarısı.

G: Peki bu yolu giderken aracın aldığı toplam mesafe nasıl değişecek?

Ö9: Bir yerden bir yere giderken aldığı toplam mesafe… Artar.

G: Tamam. Başka bir şeyi daha yorumlamamızı istemiş.

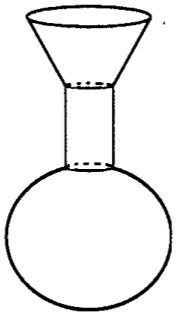
Ö9: Aracın şu G noktasına olan mesafesini değil mi?

G: Aynen öyle. Sence o mesafe nasıl değişir?

Ö9: (Düşünüyor) Buraya kadar olduğunda, yani dönüşe kadar sürekli kısalır mesafe. Sonra bu dönüşte eşit olur hep bu noktaya. Sonra tekrar dönüşte uzaklaşır bu mesafe büyümeye başlar Tampa'ya yaklaşırken.

17. Problem: Aşağıdaki şekildeki boş bir şişeye bir musluktan aynı hızda ve hep aynı miktarda su dolduruluyor.

- Şişe tamamen dolana kadar şişenin içindeki suyun miktarı ve şişedeki suyun yüksekliğinin nasıl değiştiği hakkında yorum yapınız.
- Bu yorumlardan hareketle su doldurulurken şişedeki suyun hacmi ve suyun yüksekliğine ait grafik oluşturunuz.



Şekil 3.3.2. *Veri Toplama Aracı-2'nin altıncı problemi*

Problemin ilk öncülünde şekilde gösterilen şişe tamamen dolana kadar şişenin içindeki suyun miktarı ve şişedeki suyun yüksekliğinin eş zamanlı olarak değişiminin yorumlanması beklenmektedir. Ö1, Ö3, Ö5 ve Ö9; şişenin içine su eklendikçe şişedeki su miktarının artacağını, suyun yüksekliğinin ise şişenin şekline göre farklı şekillerde artacağını eş zamanlı olarak yorumlamışlardır. Diğer katılımcılar ise şişeye su eklendikçe şişedeki suyun miktarının ve yüksekliğinin artacağını belirtmiş, şişenin şeklindeki değişimi yorumlarında hesaba katmamışlardır.

Ö1, şişedeki suyun yüksekliğini değerlendirirken şişenin üç bölümünü hem ayrı ayrı yorumlamış hem de karşılaştırma yapmıştır. Ancak karşılaştırma yaparken şişenin en alt bölümü diğer bölümlere göre geniş olduğundan bu bölümü bir bütün olarak değerlendirmiştir.

G: Şişe sorusu hakkında nasıl yorum yaptın?

Ö1: Şişedeki suyun miktarı artar zaten. Yüksekliği de artar. Yuvarlak olan kısım ortasına kadar diğer kısımlara göre daha geniş olduğundan daha yavaşlayarak dolar.

G: Neden yavaşlayarak dolar?

Ö1: Daha yavaş yükselir. Ama birazcık daha yukarı çıktığında suyun daha hızlı dolduğunu görürüz. Dolma hızı aynı olsa bile biz öyleymiş gibi görürüz. Hızlı yükselir.

G: Tamam. Şişenin orta kısmında nasıl yükselir?

Ö1: Şişenin ortası diğer yuvarlağa göre daha hızlı yükselir yani hemen dolar. Hem dar, hem de kısa bir yer olduğundan dolayı.

G: Şişenin en üst kısmında su nasıl yükselir?

Ö1: Orta kısımdaki gibi hızlı yükselir daha sonra gitgide yavaş doluyormuş gibi görürüz. Çünkü genişler burada şişe. En sonda da biter.

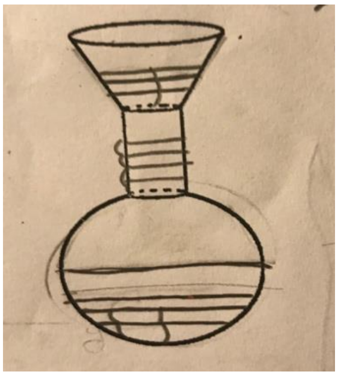
Ö3, Ö5 ve Ö9'da Ö1'e benzer şekilde şişenin her bir bölümünü değerlendirmişlerdir. Ancak alttaki yuvarlak bölümün alt yarısını ayrı, üst yarısını ayrı olarak yorumlamışlardır. Çünkü şişe yuvarlak bölümün alt yarısında genişlerken üst yarısında daralmaktadır.

G: Gelelim altıncı soruya. Bu sorudan neler anladın?

Ö3: Bu arada ben bu şişenin üst kısmına bir isim bulamadığım için 'garip kap' yazdım (gülüyor). Alt kısmına 'küre' dedim yuvarlak şekilli, ortaya da 'silindir' dedim. (Problemin tamamını okuyor.) Şimdi şişe dolmaya alttan başladığı için önce yuvarlak kısım dolacak. Suyun miktarı hep artıyor zaten o durum hiç değişmez. Su da yükseliyor ama kaplar farklı olunca durumlar da değişiyor.

G: Yani suyun yüksekliği neye bağlı olarak değişmektedir?

Ö3: Kapların şekline göre değişmektedir. Hep artar ama farklı farklı artar. Şimdi önce şu kadar doldu, sonra şişe genişlemeye başladı şu kadar doldu, ilkine göre daha alçak çizmeye çalışıyorum. Sonra tam ortadan sonra kap daralıyor ya, suyun kaplayacağı yer de azalıyor, o zaman su daha çabuk artıyor. O yüzden su daha yukarı yükselmek zorunda kalıyor. Yani önce gittikçe azalan, yuvarlağın tam ortasından sonra gittikçe artan bir artış var. Sonra dolmaya devam ediyor. Silindirde hep eşit bir artış var, çünkü kabın hiçbir yamukluğu ve bozukluğu yok. Garip olan şekilde de kap gittikçe genişliyor ve bu sayede de suyun kaplayacağı boşluk daha fazla artacağı için suyun giderek artışı azalır.



Görsel 3.3.2. *Ö3'ün 17. Problem hakkında görüş bildirirken şişe görseli üzerinde yaptığı çizimler*

G: Altıncı soruda nasıl yorum yaptın?

Ö5: İkisi de artıyor. Şişeye su doldurunca içindeki su miktarı hep artacak. Miktarı artınca da yüksekliği de artacak. Yuvarlak kısımda ortasına kadar daha yavaş artar çünkü genişliyor bu şişe. Sonra buradan sonra hızlanır, daralmaya başladığı için. Bu dar yerde aynı şekilde hemen artar su, en üstte de genişlediğinden yavaşlayarak yükselir.

Ö2 ise şişeye su eklendiğinde suyun yüksekliğinin arttığını, şişenin şekline göre aldığı su miktarının azaldığını belirtmiştir. Şişenin bölümlerinin hacimlerini karşılaştırmış, aşağıdan yukarıya doğru bölümlerin hacimlerinin azaldığını düşünerek bu bölümlerin aldığı su miktarlarının da azaldığını ifade etmiştir.

Problemin ikinci öncülünde ise su doldurulurken şişedeki suyun hacmi ve suyun yüksekliğine ait grafik oluşturulması beklenmektedir. Ancak hiçbir katılımcı grafiği doğru bir şekilde çizememiştir. Ö8 ve Ö9 haricindeki katılımcılar ise grafik oluşturmuşlar ancak grafiklerini anlamlandıramamışlardır.

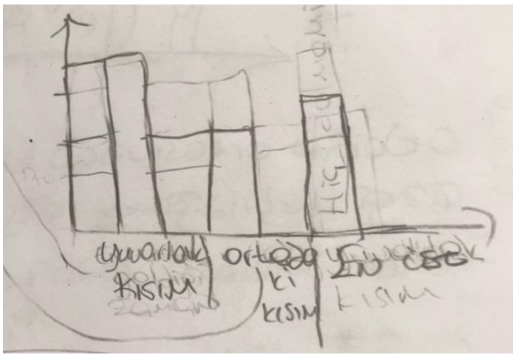
Ö1 grafiğinde şişelerin şekline ve görseldeki hacimlerine göre yükseklikleri temsil eden sütun grafiği oluşturmuştur. Yuvarlak bölüm en geniş ve en büyük göründüğünden hacminin en fazla olduğunu, dolayısıyla suyun en fazla bu bölümde yükseleceğini düşünerek yuvarlak kısmın yükseklik sütununu en yüksek çizmiştir. Şişenin orta bölümünün ise yuvarlak bölümden hacim olarak daha dar ve küçük olduğunu düşünerek orta bölümün yükseklik sütununu yuvarlak kısma göre daha alçak çizmiştir. Şişenin üst kısmının hacmini ise yuvarlak kısımdan küçük, orta kısımdan büyük olduğunu düşünerek yükseklik sütununu diğer iki sütunun arasında bir yükseklikte çizmiştir.

G: Peki oluşturduğun bu grafik ne ifade ediyor?

Ö1: Tamamen doldururken şişedeki suyun yüksekliğini yapmaya çalıştım. Gruplara ayırdım. Yuvarlak olan kısımda yüksekliği daha yavaş bir şekilde dolar, daha doğrusu hacim olarak en yükseği odur. Yuvarlak kısmın hacmi çok fazladır.

G: Neden yuvarlak kısmın hacmi fazladır?

Ö1: Yuvarlak kısım hem geniş olmasından dolayı en fazla suyu o kısım alır. Ortadaki kısım da birazcık daha az olduğunu düşünüyorum hacminin. Ama en üst kısımda mı yoksa en altta mı hacmin daha fazla olduğunu bilemedim. Ortadaki kısmı yukarı taşıdığımda çizdiğimde orta kısmın yüksekliği üst kısımdan daha aşağıda olur. Bu yüzden üst kısım da en altla ortanın arasında bir yerlerde hacim olarak.



Görsel 3.3.3. *Ö1'in 17. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

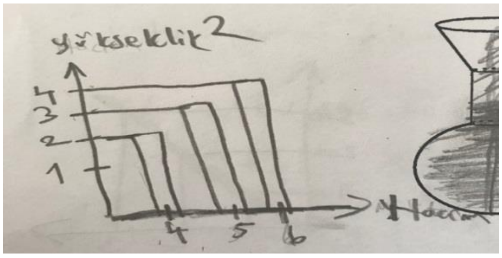
Ö2, hacim ve yükseklik için sütun grafiği oluşturmuştur. Şişedeki suyun hacminin arttıkça suyun yüksekliğinin de arttığını temsil etmek için sütunların yüksekliklerini giderek artırmıştır. Hem hacim hem de yüksekliğin artışını göstermek için ise hacim ve yükseklik niceliklerine rasgele sayılar vermiştir.

G: Tamam, burada çizdiğin grafik ne ifade ediyor?

Ö2: Ben önce yükseklik ve hacim tablosu gibi bir şey yaptım. Burada önce ikide dört yani yüksekliği iki iken hacmi dört olur diye düşündüm.

G: Neden yükseklik iki iken hacim dört oldu?

Ö2: Onu ben aslında rasgele verdim. Kafama göre verdim. İşte yükseklik üç iken hacim beş olur. Yükseklik dört olunca da hacim altı olur. Hep artış var yani.

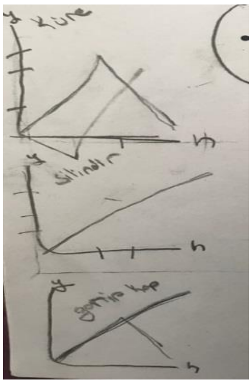


Görsel 3.3.4. *Ö2'nin 17. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

Ö3 ise şişenin her bir bölümü için üç farklı çizgi grafiği oluşturmuştur. Ancak bunları klinik görüşme sırasında anlamlandıramamıştır. Grafikler konusunda iyi olmadığından, oluşturduğu grafiklerde de emin olmadığını belirtmiştir.

G: Peki burada çizdiğin grafiklerde ne anlatmak istedin?

Ö3: Ben bu yuvarlağın ortasından sonraki kısmı böyle çizdim ama yani hiç emin değilim bu yaptıklarımdan ben. Bir anda yükseliyor ya. Grafiklerde benim kafam çok karışıyor. Ben bu grafiği çok uğraştım ama yapamadım. Zaten bizim pek bilmediğimiz bir konu. Bütün her şeyi yorumladım ama grafikte sıkıntım var. Zaten benim fende de grafikte bir sıkıntım var.

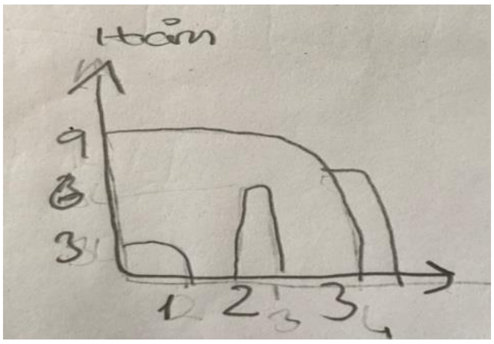


Görsel 3.3.5. *Ö3'ün 17. Probleme yönelik oluşturduğu grafikler*

Ö4 ise oluşturduğu grafikte "zaman" ve "damla sayısına" yer vermiştir. Hem zaman değişkenine hem de o süreye karşılık gelen musluktan akan damla sayısı değişkenlerine rasgele sayısal değerler vermiştir. Ancak oluşturduğu grafiğin eksenlerinden birini "hacim" olarak adlandırmıştır.

G: Çizdiğin grafikte ne anlatmak istedin?

Ö4: Hocam ben burada değer verdim. Bir saniyede iki damla akıyorsa diye. Burada da üç saniyede bir damla aksın dedim. Altı saniyede iki damla akar. Dokuz saniyede de üç damla akar dedim. Hep aynı şekilde akar dedim işte.

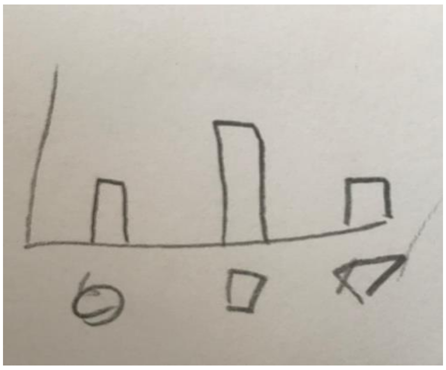


Görsel 3.3.6. *Ö4'ün 17. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

Ö5'de Ö1 ile benzer şekilde şişenin bölümlerindeki yüksekliklerini temsil eden sütun grafiği oluşturmuştur. Ancak şişedeki suyun kap genişledikçe yavaşlayarak arttığını yorumladığı için, bu yorumu grafikte nasıl ifade edeceğini bilememiştir. Bu sebeple oluşturduğu grafikten emin olmadığını belirtmiştir.

G: Bu grafikte ne anlatmak istedin?

Ö5: Nasıl gösterilir bilmiyorum. (Düşünüyor) Şişenin yuvarlak, dar ve en üstteki bu kısmını göstersem, her birinde farklı hızlarda artıyor. Ama yavaşlayarak artmayı nasıl göstereceğimi bilmiyorum.

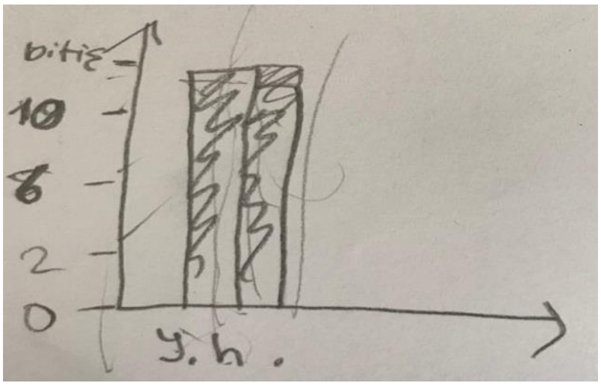


Görsel 3.3.7. *Ö5'in 17. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

Ö6, hem hacim hem de suyun yüksekliğinin arttığını düşündüğünden yükseklik-hacim ve zaman grafiği oluşturmuştur. Grafiğin bir eksenine yükseklik ve hacim sütunları çizmiş, her ikisi de artacağı için eşit uzunluktaki sütunlarla temsil etmiştir. Diğer eksende de zaman niceliğini temsil edecek rasgele sayısal değerler vermiştir. Grafiğe göre zaman geçtikçe yükseklik ve hacim sütunları yükselecektir.

G: Bu grafik ne ifade ediyor?

Ö6: Buradaki y yükseklik, h hacim. İkisi de artıyor. İkinci dakika, sekizinci dakika, onuncu dakika dedim kafamda. İkisi de artmış.



Görsel 3.3.8. *Ö6'nın 17. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

Ö7 ise şişeye su eklendikçe suyun hacminin ve yüksekliğinin hep artacağını düşünerek grafik oluşturmuştur. Ancak sadece hacim ve yükseklik eksenlerine sistematik sayılar yerleştirmiştir. Hacim ve yüksekliğin sayısal olarak değerlerinin aynı olacak şekilde artacağını belirtmiştir. Ancak çizdiği grafikten emin olmadığından hacim ve yükseklik niceliklerinin birimlerini açıklarken zorlanmıştır.

G: Çizdiğin bu grafik ne anlama geliyor?

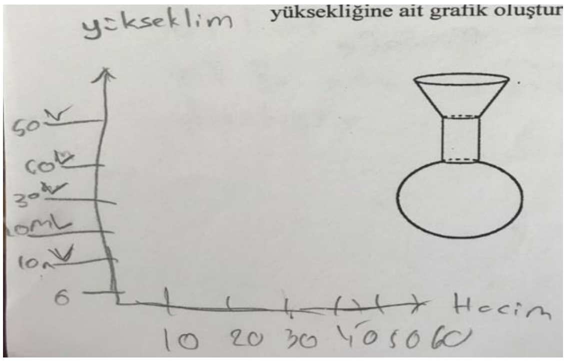
Ö7: Hacim-yükseklik grafiği istemiş. Bir yere hacim dedim bir yere yükseklik. İşte 10 litre, 20 litre, 30, 40, 50, 60 litre buraya yazdım. Yüksekliğe de yine 10,20,30,40 öyle yazdım. Su hep aynı miktarda aktığı için 10 litrede yükseklik 10'dur, 20 litrede 20'dir dedim.

G: Hacmin birimi litreymiş, yüksekliğin birimi nedir?

Ö7: (Düşünüyor) Bilmiyorum. Santimetre veya metre fark etmez.

G: Neden bu sayısal değerleri verdin?

Ö7: (Sessizlik) Bilmiyorum.



Görsel 3.3.9. *Ö7'nin 17. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

18. Problem: İki kardeş kare şeklindeki bir odanın karşılıklı köşelerinde dikilmektedir.

a. Birbirlerine doğru aynı ve sabit bir hızla yaklaşıp birbirlerini geçip yine aynı sabit hızla karşı köşelere yürümüşlerdir.
b. Yan yana gelene kadar birbirlerine doğru hızlanarak yaklaşıp, sonra yavaşlayarak karşı köşelere yürümüşlerdir (kardeşlerin birbirine yaklaşma ve uzaklaşma hızları aynıdır).
c. Yan yana gelene kadar birbirlerine doğru yavaşlayarak yaklaşıp, sonra hızlanarak karşı köşelere yürümüşlerdir (kardeşlerin birbirine yaklaşma ve uzaklaşma hızları aynıdır).

Bu 3 durum için;

- İki kardeş arasındaki mesafenin zamanla nasıl değiştiğini yorumlayınız.
- Zaman ve çocukların arasındaki mesafeye ait bir grafik oluşturunuz.

Şekil 3.3.3. *Veri Toplama Aracı-2'nin yedinci problemi*

Problemin ilk öncülünde katılımcılardan verilen her üç durumda kardeşler arasındaki mesafenin zamanla nasıl değiştiğinin yorumlanması beklenmektedir. Tüm katılımcılar önce zaman niceliğini hesaba katmadan kardeşlerin her üç durumda da birbirlerine göre mesafesinin önce azalıp sonra artacağını belirtmiştir. Ek olarak Ö6 ve Ö9, bir an bu mesafenin sıfır olacağını ifade etmiştir.

Ö1, Ö2 ve Ö5; kardeşler arasındaki mesafenin her üç durumda da önce azalıp sonra artacağını belirtmiş, üç durumda da kardeşlerin yürümeye başlayıp bitirdiği sürelerin aynı olduğunu ifade etmişlerdir. b) öncülünde kardeşler önce hızlanıp sonra yavaşladıkları, c) öncülünde ise önce yavaşlayıp sonra hızlandıkları için bu durumların birbirlerini nötrlediklerini düşünmüşlerdir.

G: Geçelim yedinci soruya. Ne anladın bu sorudan?

Ö2: (Problemin tamamını okuyor.) İlkinde iki kardeş sabit hızla gidiyorlarmış. Yani sabit hızla gittiklerine göre sabit süratla gitmiş oluyorlar. Sabit süratla gittiklerine göre de burada mesafe hep aynı şekilde artar veya hep aynı şekilde azalır.

G: Hangi durumlarda artar ve azalır?

Ö2: Başlayıp bitirdiklerinde aralarındaki mesafe yine eşit olur. Sabit hızla giderler sürekli. Birbirlerine geldikçe mesafe azalır sonra birbirlerinden uzaklaştıkça artar.

G: Tamam. İkinci durum için nasıl yorum yaptın?

Ö2: Burada yaklaştıkça mesafeleri yine aynı olur, hızları da yine aynı. Burada başladığı ve bitirdiklerinde mesafeleri yine aynı olacak şekilde devam ederler. Yaklaşıp uzaklaşma süreleri de a şıkkıyla aynı olur. Birbirlerine yaklaşınca da aradaki mesafe önce azalır, sonra yine artar karşıya yürüdükleri için.

G: Peki üçüncü durum için nasıl yorum yaptın?

Ö2: Yan yana gelene kadar yavaşlayarak yaklaşıyorlarmış, sonra hızlanarak karşı köşelere gidiyorlarmış. Burada aralarındaki mesafe de yaklaşırken yine azalır, uzaklaşırken yine artar, ilk başlarken ki mesafeyle eşit olur. a ve b şıkkıyla aynı sürede uzaklaşıp yaklaşırlar.

Ö5 önce a) öncülünü anlamayarak kardeşlerin sabit hızla değil de "hızla" yol aldıklarını düşünmüş ve yanlış yorum yapmıştır. Ancak klinik görüşme sırasında problemi tekrar okuduğunda yeniden değerlendirerek Ö1 ve Ö2 ile benzer yorumları yapmıştır.

(…)

Ö5: b ve c'de yarısını hızlı, yarısını yavaş gidiyorlar. Ama a'da hep hızla gidiyorlar… Ben yanlış okumuşum. Hızla gidiyormuş yazınca hızlanarak anlıyorum. Sabit hızla yazıyor burada. (Düşünüyor) Hepsi aynı anda başlasa aynı anda bitirir. Yavaşlama hızlanma olduğu için b ve c aslında birbirini nötrlüyor gibi bir şey oluyor ve a ile aynı oluyor. Yani mesela hepsi 10 saniyede bitirecek.

G: Peki iki kardeşin arasındaki mesafe nasıl değişir?

Ö5: Yaklaşmaya kadar, mesela biri buradan biri buradan yola çıktı, yan yana gelene kadar mesafe azalır. Burada yan yana gelsinler diyelim. Buradan sonra aralarındaki mesafe artar.

Ö3, Ö4, Ö7 ve Ö9 ise her üç durum için kardeşlerin birbirlerine yaklaşma ve uzaklaşma sürelerini de değerlendirmişlerdir. a) öncülünde kardeşler hep sabit hızla gittiklerinden birbirlerine yaklaşma ve uzaklaşma sürelerinin aynı olduğunu, b) öncülünde kardeşler önce hızlanıp sonra yavaşladığından birbirlerine yaklaşma sürelerinin uzaklaşma sürelerinden daha az olduğunu, c) öncülünde kardeşler önce yavaşlayıp sonra hızlandığından birbirlerine yaklaşma sürelerinin uzaklaşma sürelerinden daha fazla olduğunu ifade etmişlerdir.

G: Sence bahsedilen bu üç durum arasındaki fark ve benzerlikler nedir?

Ö4: Mesela üçüncü durumda birbirlerine doğru hızlanıyorlar. Hızlanmak demek zamandan tasarruf demek. Birbirlerine hemen ulaşıyorlar. Sonra yavaşlamaya başladıkları için karşıya gitmeleri zaman almış oluyor. İkisinin de hızları hep birbiriyle aynı olduğu için aynı anda karşıya varırlar yine de. Bence hepsinde aynı süre geçer. Birinde yavaşlayıp hızlanıyor, birinde hızlanıp yavaşlıyor, diğerinde de hep aynı hızla gidiyorlar. O yüzden aslında bunlar aynı zamanda başlayıp bitirirler.

Ö9: Üç tane şık var burada. Birinde kardeşler sabit hızla gitmişler, diğerinde önce hızlanıp sonra yavaşlamış, üçüncüsünde de tam tersi olmuş. Zamanla kardeşlerin arasındaki mesafeyi yorumlamamızı istemiş. a şıkkında mesafe aynı sürede azalmış, sonra yan yana gelince sıfır olmuş, aynı sürede tekrar uzamış ve ilk başladıkları hale dönmüştür.

G: Tamam. Diğer durumları yorumlar mısın?

Ö9: b ve c şıkkında … yan yana gelene kadar geçen zaman, yan yana geçip karşıya geçerken geçen süreden daha kısadır. Çünkü hızlanarak gelmiştir. c ise b'nin tam tersidir. Birbirlerine gelirken sıfırlanana kadar mesafe azalır, geçen zaman birbirlerinden uzaklaşıp karşıya vardıklarında daha kısadır. Bu sefer de yavaşlayarak geldikleri için.

Ö6 ise b) ve c) öncüllerinde hızlanma ve yavaşlama olduğundan bu durumların birbirlerini nötrlediğini, a) öncülünde ise kardeşler hep aynı şekilde gittiğinden az da olsa daha kısa sürede yürümeyi bitireceklerini ifade etmiştir. Ö8 ise her üç öncülde kardeşlerin sadece birbirlerine yaklaşma sürelerini karşılaştırıp değerlendirmiştir.

G: Son soruya geçelim o zaman. Bu soruda nasıl yorum yaptın?

Ö8: Şimdi mesela birbirine doğru yavaşlayarak giderse, mesafe… Nasıl desem, az az ilerlerler birbirlerine doğru. Yani, aralarındaki mesafeyi sormuş uzun zamanda kapanır. Ama hızlanarak giderlerse hemencecik birbirlerine yaklaşırlar. Sabit gittiğinde de, şöyle diyeyim aralarındaki mesafe önce b'de kapanır hızlanarak yaklaştıkları için. Sabit gittiklerinden sonra a'da kapanır. En son yavaşlayarak gidiyorlarmış c'de kapanır.

Problemin son öncülünde ise katılımcılardan zaman ve çocukların arasındaki mesafeye ait bir grafik oluşturmaları beklenmektedir. Ö5, Ö8 ve Ö9 herhangi bir grafik oluşturamamıştır. Diğer katılımcılar ise oluşturdukları grafikleri anlamlandıramamıştır.

Ö1, klinik görüşme sırasında önceden oluşturduğu grafiklerde değişiklikler yapmıştır. Kardeşlerin her üç öncül için birbirlerine yaklaşma ve birbirlerinden uzaklaşma sürelerini temsil eden sütun grafikleri çizmiştir. Öncesinde kardeşlerin yürüme sürelerine sayısal değer vermiş, daha sonra sayısal değeri yok sayarak grafikleri oluşturmaya devam etmiştir. Ancak grafiğin eksenlerini nasıl isimlendireceğini bilemeyip, çizdiği grafiklerden emin olmadığını belirtmiştir.

G: Çizdiğin bu grafikler ne ifade ediyor?

Ö1: Ben şey düşündüm, tam orta kısmına 50 dedim, bir sayı verdim. İlk başta çocukların arasındaki mesafe hep böyle tam ortaya geldiği zaman 50 olarak verdim. Grafiği de böyle çizdim.

G: Neden sayısal bir değer verdin?

Ö1: Net olsun diye. Aslında vermesem de olurdu yorumum değişmezdi ama.

G: Grafikte bu eksene (x ekseni) 'zaman' ismini vermişsin. 50'yi buraya yerleştirmişsin. 50'nin birimi nedir burada?

Ö1: Aslında o "zaman" değil mesafe.

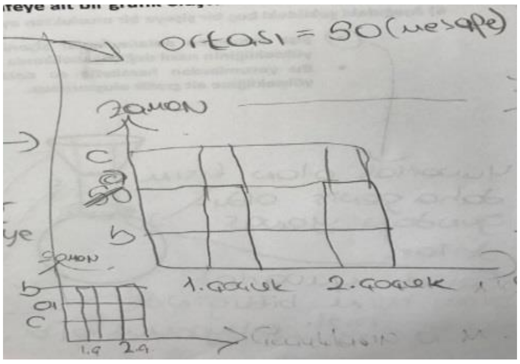
G: 'Aralarındaki mesafe' demişsin bu eksene de (y ekseni), sonra 1. çocuk ve 2. çocuk diye buraya yerleştirmişsin. Neden?

Ö1: 50'nin buraya geçmesi gerekiyor sanırım (y ekseni), bunların da (1. çocuk ve 2. çocuk) yok olması gerekiyor sanırım. Buraya da (x ekseni) ne yazıp yazmamam gerektiğini bilmiyorum. İstediklerini yazmışım kenarlara ama içini biraz sallamışım galiba (gülüyor). Bence zaman olan kısım da değişiyor sürekli. Ortaya kadar geldikleri zamana 50 diyelim o zaman. 50 saniye mesela veya sayısal değer vermeyelim de… Grafikte yan yana gelene kadarki zaman olarak a diyelim, a sabit hızlı olandı. Sonra b durumu için hızlanarak geliyorlardı zamana b diyelim, ama daha kısa sürecek yan yana gelmeleri. En yavaşı c olduğu için c zamanı diyelim, a dan ve b den büyük olacak.

G: Yan yana geldikten sonra karşı köşeye yürüme durumlarını nasıl yorumlarsın?

Ö1: Onda da zaten tam tersi olacak. En aşağıya c çizgisini koyacağım, ortaya a çizgisi sabit hızlı olan, en yukarı da b çizgisi diyelim çünkü yavaşlıyorlar ya uzun sürecek.

Problemde zaman-çocukların arasındaki mesafe grafiği istendiğinde eksenleri bu şekilde adlandırmış ancak çocukların arasındaki mesafe eksenine 1. çocuk ve 2. çocuk sütunlarını yerleştirmiştir. Çocukların birbirlerine yaklaşma sürelerini azdan çoğa doğru b-a-c şeklinde (b: b öncülünde kardeşlerin birbirlerine yaklaşma süreleri, a: a öncülünde kardeşlerin birbirlerine yaklaşma süreleri, c: c öncülünde kardeşlerin birbirlerine yaklaşma süreleri); çocukların birbirlerinden uzaklaşma sürelerini de c-a-b şeklinde sıralamıştır.



Görsel 3.3.10. *Ö1'in 18. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

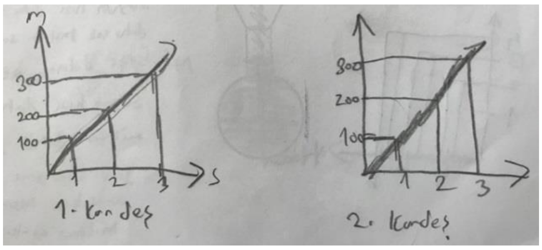
Ö2 ise her yalnızca a öncülü için 1. çocuğun ve 2. çocuğun zamanla gittikleri mesafeyi iki ayrı çizgi grafiğinde ifade etmiştir. Grafiklerde çocukların gittiği yola metre cinsinden, süreye de saniye cinsinden sistematik olarak sayısal değerler vermiştir. Bu grafiklere göre a) öncülünde 1. çocuk ve 2. çocuk aynı sürede aynı mesafede yol alırlar. Diğer öncüller için yavaşlama ve hızlanma durumları olduğundan grafik oluşturamamıştır.

G: Burada çizdiğin iki grafik ne ifade ediyor?

Ö2: Ben burada ilk önce ikisinin de sabit süratlı olduğunu göstermeye çalıştım. Yani sadece a seçeneğinin grafiğini çizdim burada ben. Diğerlerini çizemedim çünkü ilk başta düşünememiştim şimdi konuşurken bir sürü şeyi fark ettim. Mesafe mesela 100 metre olsun. Birinci kardeş 100 metreyi bir saniyede alır, 200 metreyi iki saniyede alır, 300 metreyi üç saniyede alır dedim. Yine aynı şekilde ikinci kardeş 100 metreyi bir saniyede alır, 200 metreyi iki saniyede alır, 300 metreyi üç saniyede alır.

G: Diğer durumları grafikle nasıl ifade edersin peki?

Ö2: (Uzun bir sessizlik) İfade edemedim yavaşlama ve hızlanma olduğu için nasıl çizeriz bilemedim burada.

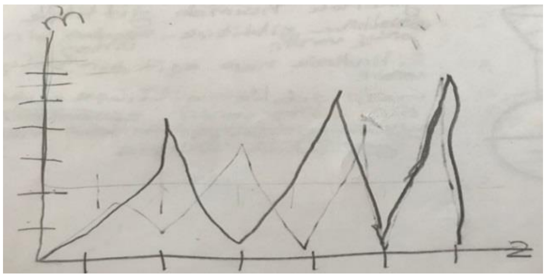


Görsel 3.3.11. *Ö2'nin 18. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

Ö3 ise bir çizgi grafiği oluştursa da bunu anlamlandıramamış ve klinik görüşme sırasında grafiği oluştururken kurduğu mantığı görüşmeciye aktaramamıştır.

G: Çizdiğin grafik ne ifade ediyor?

Ö3: Ben yine garip bir şey yaptım. Ben grafiği beceremiyorum. Tamamen salladım (gülüyor). Bulamıyorum. Yorumlamam da sorun yok düşündükçe ortaya çıkıyor. Ama grafikte bitiyorum.



Görsel 3.3.12. *Ö3'ün 18. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

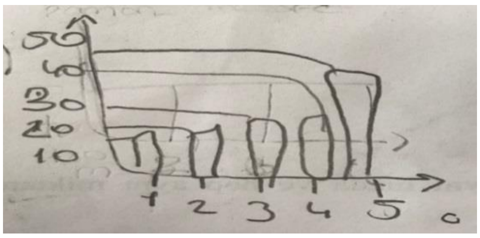
Ö4'de Ö2 ile benzer şekilde yalnızca a) öncülü için sütun grafiği oluşturabilmiştir. Grafikte çocukların geçen süreye göre aldıkları yolu belirten sütun grafiğinde hem geçen süreye hem de alınan yola sistematik olarak sayısal değerler vermiştir.

G: İki tane grafik çizmişsin. Bunlar ne anlama geliyor?

Ö4: Ben burada sabit hızı belirtmek istedim. 10 saniyede bir metre yol gittiklerini düşündüm. 20 saniyede iki metre, 30 saniyede üç ve 40 saniyede dört ve en son da 50 saniyede beş metre gidebileceğini düşündüm. Aslında sadece a durumu için grafik çizebildim diğerlerini çizemedim.

G: Peki bu ve önceki iki soruda da soruları yorumlarken neden sayısal değerler verdin?

Ö4: Hocam bunlara ben daha açıklayıcı olsun, ne bileyim kafamda canlansın diye bir değer verdim.



Görsel 3.3.13. *Ö4'ün 18. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

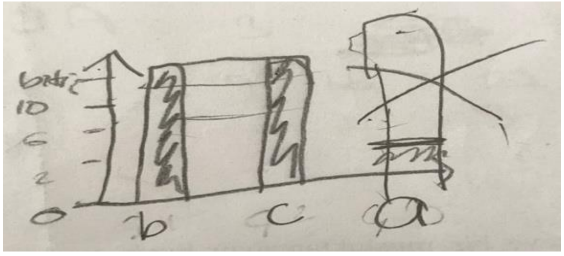
Ö6 ise b) ve c) öncülünde kardeşlerin aynı sürede, a) öncülünde ise daha kısa sürede yürümeyi bitirdiğini düşündüğünden, bu bilgilere göre bir sütun grafiği oluşturmuştur. b) ve c) öncüllerini temsil eden sütunları eşit yükseklikte, a) öncülünü temsil eden sütunu ise daha alçak çizmiştir. Diğer eksende de yürüyüş sırasında geçen süreye sayısal değerler vermiştir.

G: Peki bu grafikte ne anlatmak istedin?

Ö6: Bu ikisi b ve c durumu, ikisi de eşit zamanda bitirmiş. Bu da a durumu, o diğerlerinden daha az zamanda bitirmiş yürümeyi. Zamanla olan grafiklerini yap dediği için buraya da bitiş dakikalarını yazdım. İki, altı, 10 gibi.

G: Bu soru ve bundan önceki soruda grafik oluştururken, süreye neden değerler verdin?

Ö6: Yani… Aslında sorularda yok ama ne bileyim böyle düşünmek daha rahat oluyor.

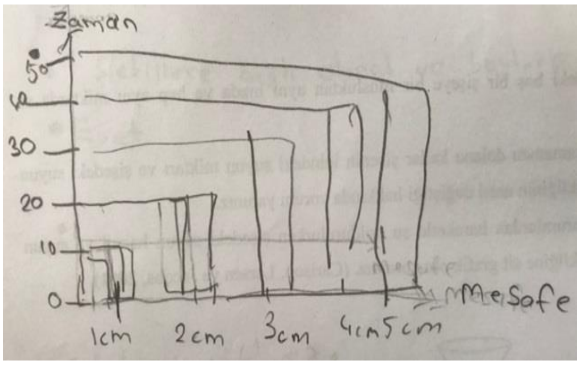


Görsel 3.3.14. *Ö6'nın 18. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

Ö7 ise Ö2 ve Ö4 ile benzer şekilde yalnızca a öncülü için sütun grafiği oluşturmuştur. Bu grafiğe göre çocukların diğer eksendeki sürelerde aldıkları yolları sütunlarla ifade etmiştir. Hem mesafe hem de zaman niceliklerine sistematik olarak sayısal değer vermiştir.

G: Burada çizdiğin sütun grafiği ne ifade ediyor?

Ö7: Ben sadece a için yaptım. Diğerlerinde yapamadım. Mesafe ve zaman yazdım. Sabit hızla gittikleri için hep, mesela 10 saniyede iki kardeş de birer santimetre gider, 20 saniyede 2 santimetre gider diye böyle 50 santimetreye kadar gittim.



Görsel 3.3.15. *Ö7'nin 18. Probleme yönelik oluşturduğu grafik*

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

4.1. Sonuç

Çalışmanın bu bölümünde, elde edilen bulgulardan hareketle, katılımcıların niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmelerine ve bu düşünme becerileri arasındaki ilişkiye yönelik sonuçlara yer verilecektir. Daha önce belirtilmiş olan araştırma sorularına bağlı kalınarak bu soruların cevapları ayrıntılı olarak ayrı başlıklarda irdelenecektir.

4.1.1. Katılımcıların niceliksel muhakemeleri ile ilgili sonuçlar

Bu başlık altında "Öğrencilerin niceliksel muhakemesi nasıldır?" araştırma sorusuna cevap verilecektir. Analiz edilen verilere göre; katılımcıların büyük bir çoğunluğunun (yaklaşık %80'i) güçlü niceliksel muhakeme becerilerine sahip olmadıkları sonucuna ulaşılabilir.

Tüm katılımcılar problem bağlamlarında sayısal değerleri doğrudan verilen nicelikler arasında ilişkiler kurup toplamsal niceliksel işlemleri seçerek niceliksel muhakeme yapabilmişlerdir. Ancak problem bağlamlarında verilen negatif sayılar, ondalık sayılar, oranlar, günlük yaşama dair bazı yanılgılar (yıllar geçtikçe kişilerin yaşları oranının değişmemesi, hızın arttıkça varılacak noktaya ulaşma süresinin de artması), bağlamdaki niceliklerin çeşitliliğinin artması (demir paraların sayısı-değeri, hava sıcaklığı-dağ yüksekliği, uzunluk-süre-hız vb.) gibi faktörler katılımcıların çoğunun (yaklaşık %80'i) niceliksel muhakemelerini olumsuz yönde etkilemiştir. Bu sebeple problemlerin zorluk derecesi arttıkça katılımcıların nicelikler arasında doğru ilişkiler kurmakta, doğru niceliksel işlemleri seçmekte ve anlamlandırmakta, nicelikler ile birimlerini koordine etmekte ve iki ayrı niceliğin (uzunluk ve süre) oranından bir başka nicelik (hız) oluşturmakta zorlandıkları görülmüştür.

Çalışmanın önemli sonuçlarından bir diğeri; günlük yaşamda ve/veya okulda karşılaştıkları problemlerde nicelikler arasında ilişkiler kurup muhakeme yapmak yerine, anlamlandırmadığı ezber bilgilere ve formüllere başvuran katılımcıların niceliksel muhakeme düzeylerinin düşük düzeyde kaldığıdır (Tablo 4.1.1.1.).

Tablo 4.1.1.1. *Katılımcıların niceliksel muhakeme düzeyleri*

Niceliklerin Belirlenmesi	**Nicelikler Arası İlişkilerin Belirlenmesi**	**Niceliksel İşlemler**			**Niceliksel Birim Koordinasyonu**	**Niceliksel Birim Korunumu**
		Toplamsal	Çarpımsal	Oran		
		Ö1	-	Ö1		
Ö4, Ö7		Ö2	-	Ö2	Ö2	Ö3, Ö9
		Ö5	Ö5	-	Ö5	
		Ö6	Ö6	-	Ö6	
		Ö8	-	-		

Çalışmanın örnekleminde yer alan dokuz katılımcının ikisinin niceliklerin belirlenmesi, ikisinin niceliksel işlemler, üçünün niceliksel birim koordinasyonu ve ikisinin ise niceliksel birim korunumu düzeyine ulaşabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Ancak katılımcıların bir kısmı (yaklaşık %45'i) ileri düzey niceliksel işlemleri (oranları oluşturmak, orantıları oluşturmak, bir oranı genellemek, oranı örneklendirmek) seçmekte ve anlamlandırmakta zorlanmışlardır. Bir başka deyişle, ilgili problemlerde katılımcılar airtmetiksel düşünebilmişlerdir. Çarpımsal ve oran içeren niceliksel ilişkiler ve işlemler, altıncı sınıf düzeyindeki katılımcılarda henüz yerleşmemiş olduğundan niceliksel muhaskeme becerilerinin düşük düzeyde kaldığı sonucuna ulaşılabilir. Katılımcıların derslerinde ve günlük yaşamda karşılaştıkları problemlerde, ileri düzey niceliksel işlemler ile daha az karşılaşıyor olmalarının, niceliksel muhakeme düzeylerinin düşük kalmasına sebep olduğu düşünülebilir.

Problemleri anlamakta ve nicelikler arasında doğru ilişkiler kurmakta en çok zorlanan katılımcılar Ö4 ve Ö7 olmuştur. Niceliksel işlemleri seçme ve anlamlandırmada eksik oldukları, veri toplama aracındaki problem bağlamları ile günlük yaşamlarında karşılarına çıkan durumlar arasında bağlantı kuramadıkları ve sahip oldukları çoğu bilgiyi kavramsallaştıramadıklarından bu bilgileri problemlerin çözüm süreçlerine dahil edemedikleri görülmüştür. Bu sebeplerle Ö4 ve Ö7'nin en düşük düzeyde niceliksel muhakemeye sahip katılımcılar olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Ö4 ve Ö7, niceliksel muhakeme problemlerinin çoğunda "niceliklerin belirlenmesi" düzeyindelerdir. Genel olarak problem bağlamlarındaki nicelikleri belirlemişler, ancak aralarında doğru ilişkiler kuramamışlardır.

Tablo 4.1.1.2. *Ö4'ün niceliksel muhakeme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Niceliklerin Belirlenmesi	**Nicelikler Arası İlişkilerin Kurulması**	**Niceliksel İşlemler**	**Niceliksel Birim Koordinasyonu**	**Niceliksel Birim Korunumu**
2. Problem 4. Problem 6. Problem 7. Problem 8. Problem	5. Problem	1.Problem (Toplamsal) 3. Problem (Toplamsal)		

Tablo 4.1.1.3. *Ö7'nin niceliksel muhakeme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Niceliklerin Belirlenmesi	**Nicelikler Arası İlişkilerin Kurulması**	**Niceliksel İşlemler**	**Niceliksel Birim Koordinasyonu**	**Niceliksel Birim Korunumu**
2. Problem 3. Problem 4. Problem (b. öncülü) 5. Problem 6. Problem 7. Problem 8. Problem		1.Problem (Toplamsal)	4. Problem (a. öncülü)	

Ö3 ve Ö9 ise en üst düzeyde niceliksel muhakemeye sahip katılımcılardır. Nicelikler arasında doğru ilişkiler kurabilip niceliksel birim korunumu düzeyine kadar ulaşmışlardır. Problemlerin çözüm süreçlerinde günlük yaşamlarında karşılaştıkları durumlarla bağlantı kurabilmeleri, niceliklerin oranlarını anlamlandırabilmeleri ve güçlü niceliksel işlem becerilerinin sonucunda, güçlü niceliksel muhakemeye sahip oldukları düşünülebilir.

Tablo 4.1.1.4. *Ö3'ün niceliksel muhakeme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Niceliklerin Belirlenmesi	**Nicelikler Arası İlişkilerin Kurulması**	**Niceliksel İşlemler**	**Niceliksel Birim Koordinasyonu**	**Niceliksel Birim Korunumu**
		1.Problem (Toplamsal) 2. Problem (Tüm niceliksel işlemler) 3. Problem (Toplamsal) 5. Problem (Oran ve Toplamsal)	4. Problem 6. Problem 7. Problem (Bar modeli)	8. Problem

Ö9, niceliksel muhakeme problemlerinde Ö3 ile benzer düzeylere ulaşmış olsa da, yalnızca bir problemde "niceliklerin belirlenmesi" düzeyindedir. Bu durumun sebebi ise problemin çözüm sürecinde nicelikler arasında ilişkiler kurmak yerine sistematik olmayan deneme-yanılma yöntemine başvurmasıdır. Ö3 ise aynı problemde okul dışında öğrenmiş olduğu Bar modelinden faydalanarak nicelikler arasında ilişkiler kurabilmiştir.

Tablo 4.1.1.5. *Ö9'un niceliksel muhakeme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Niceliklerin Belirlenmesi	**Nicelikler Arası İlişkilerin Kurulması**	**Niceliksel İşlemler**	**Niceliksel Birim Koordinasyonu**	**Niceliksel Birim Korunumu**
7. Problem		1.Problem (Toplamsal) 2. Problem (Tüm niceliksel işlemler) 3. Problem (Toplamsal) 5. Problem (Oran ve toplamsal)	4. Problem 6. Problem	8. Problem

Diğer katılımcılar ise (Ö1, Ö2, Ö5, Ö6 ve Ö8) hem Ö4 ve Ö7 hem de Ö3 ve Ö9 ile benzer niceliksel muhakeme becerileri göstermişlerdir. Ö4 ve Ö7'ye göre zorluk düzeyi daha yüksek problemlerde nicelikler arasında ilişkiler kurabildikleri, niceliksel işlemleri seçip anlamlandırabildikleri ve nicelikler ile birimlerini koordine edebildikleri görülmüştür. Ancak bu katılımcılar, Ö4 ve Ö7 ile benzer şekilde iki ayrı nicelik (uzunluk ve süre) arasında ilişki kurup başka bir nicelik (hız) oluşturamamışlardır.

Ö1, niceliksel muhakeme problemlerinde toplamsal niceliklerde niceliksel birim korunumu düzeyine kadar ulaşabilmiştir. Ancak problemlerin çoğunda Ö4 ve Ö7 ile benzer şekilde "niceliklerin belirlenmesi" düzeyinde kaldığı görülmektedir.

Tablo 4.1.1.6. *Ö1'in niceliksel muhakeme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Niceliklerin Belirlenmesi	Nicelikler Arası İlişkilerin Kurulması	Niceliksel İşlemler	Niceliksel Birim Koordinasyonu	Niceliksel Birim Korunumu
2. Problem 4. Problem (b. öncülü) 6. Problem 7. Problem 8. Problem	3. Problem	1.Problem (Toplamsal niceliksel işlemler) 5. Problem (Oran ve toplamsal niceliksel işlemler)	4. Problem (a. öncülü)	

Ö2, Ö5, Ö6 ve Ö8'in; niceliksel muhakeme problemlerinin çoğunda "niceliksel işlemler" düzeyinde olsalar da, "niceliksel birim koordinasyonu" düzeyine kadar ulaştıkları görülmektedir. Ancak Ö2; oran içeren, ezberlediği formüllere ve sistematik olmayan deneme-yanılma yöntemine başvurduğu problem bağlamlarında nicelikleri belirlese de bu nicelikler arasında ilişki kuramamıştır.

Tablo 4.1.1.7. *Ö2'nin niceliksel muhakeme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Niceliklerin Belirlenmesi	Nicelikler Arası İlişkilerin Kurulması	Niceliksel İşlemler	Niceliksel Birim Koordinasyonu	Niceliksel Birim Korunumu
2. Problem 7. Problem	3. Problem	1.Problem (Toplamsal	4. Problem 6. Problem	

8. Problem		niceliksel işlemler) 5. Problem (Oran ve toplamsal niceliksel işlemler)		

Ö5, Ö2 ile benzer şekilde, oran içeren ve nicelikler arasında ilişkiler kurmak yerine sistematik olmayan deneme-yanılma yöntemine başvurduğu problemlerde nicelikleri belirlese de ilişkilendirmemiştir.

Tablo 4.1.1.8. *Ö5'in niceliksel muhakeme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Niceliklerin Belirlenmesi	**Nicelikler Arası İlişkilerin Kurulması**	**Niceliksel İşlemler**	**Niceliksel Birim Koordinasyonu**	**Niceliksel Birim Korunumu**
7. Problem 8. Problem	5. Problem	1.Problem (Toplamsal) 2. Problem (Tüm niceliksel işlemler) 3. Problem (Toplamsal)	4. Problem 6. Problem	

Ö6, oran içeren problemlerin çözüm sürecinde nicelikleri belirlese de aralarında ilişkiler kuramamıştır ancak Ö2 ve Ö5'in başvurduğu sistematik olmayan deneme-yanılma yöntemi yerine nicelikler arasında ilişkiler kurarak niceliksel birim koordinasyonuna kadar ulaşmıştır.

Tablo 4.1.1.9. *Ö6'nın niceliksel muhakeme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Niceliklerin Belirlenmesi	**Nicelikler Arası İlişkilerin Kurulması**	**Niceliksel İşlemler**	**Niceliksel Birim Koordinasyonu**	**Niceliksel Birim Korunumu**
5. Problem 8. Problem		1.Problem (Toplamsal) 2. Problem (Tüm niceliksel işlemler) 3. Problem (Toplamsal)	4. Problem 6. Problem 7. Problem	

Ö8 ise yalnızca bir problem bağlamında niceliksel birim koordinasyonu düzeyine kadar çıkmış olsa da Ö2 ve Ö5 ile benzer şekilde oran içeren ve sistematik olmayan deneme-yanılma yöntemine başvurduğu problemlerde niceliklerin belirlenmesi düzeyinde kalmıştır.

Tablo 4.1.1.10. *Ö8'in niceliksel muhakeme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Niceliklerin Belirlenmesi	Nicelikler Arası İlişkilerin Kurulması	Niceliksel İşlemler	Niceliksel Birim Koordinasyonu	Niceliksel Birim Korunumu
2. Problem 5. Problem 7. Problem 8. Problem	6. Problem	1.Problem (Toplamsal) 3. Problem (Toplamsal)	4. Problem	

4.1.2. Katılımcıların fonksiyonel düşünmeleri ile ilgili sonuçlar

Bu başlık altında "Öğrencilerin fonksiyonel düşünmeleri nasıldır?" araştırma sorusuna cevap verilecektir. Şekil ve sayı örüntüleri üzerinden katılımcıların fonksiyonel düşünmeleri incelenmiş, bağımsız değişken(ler) ve bu değişken(ler)e bağlı olarak değişen bağımlı değişken arasında ilişki kurma becerileri analiz edilmiştir.

Tüm katılımcıların örüntü problemlerinde ulaşabildikleri fonksiyonel düşünme düzeyleri Tablo 4.1.2.1.'de belirtilmiştir.

Tablo 4.1.2.1. *Tüm katılımcıların ulaşabildikleri fonksiyonel düşünme düzeyleri*

		Benzeşen (Correspondence) İlişkiler		
Özyinelemeli (Recursive) Desenleme	(Örüntülerde) Kovaryasyonel Düşünme	Eşlemeli doğrusal fonksiyonel ilişkiler	Eşlemeli kuadratik fonksiyonel ilişkiler	Gizli sayı örüntüsünde eşlemeli fonksiyonel ilişkiler
Ö4	Ö7, Ö8	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9	Ö1, Ö3, Ö5, Ö9	Ö3, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9

Katılımcıların çoğunun (yaklaşık %90'ı) birbirlerine göre değişen bağımsız ve bağımlı değişkenleri tespit edebildikleri ve değişkenler arasında doğrusal fonksiyonel ilişki kurabildikleri sonucuna ulaşılabilir. Katılımcıların yaklaşık %75'i şekil örüntüsü problemlerini daha çok benzeşen (correspondence) ilişkiler kurarak genelleyebilmiş; yaklaşık %25'i ise örüntülerde kovaryasyonel düşünerek bağımsız değişkenin birim değişimlerindeki bağımlı değişkenin değişimini değerlendirmiş veya genelleme yapamayarak özyinelemeli (recursive) desenleme düzeyinde kalmışlardır.

Katılımcıların yaklaşık %25'i bağımsız değişkeni adım sayısı, terim sayısı vb. olarak düşünmüştür. Bunun sebebinin okulda derslerde daha çok adım sayısı-terim sayısına bağlı olarak değişen örüntü problemlerini çözmüş oldukları söylenebilir. "Örüntü" kavramıyla altıncı sınıfta karşılaşmış olan katılımcıların ileri adımlara ulaşabilmeleri, bağımsız değişkeni adım sayısı-terim sayısının ötesinde düşünebilmeleri, hem sayılar hem şekiller üzerinden bağımsız ve bağımlı değişkenler arasında ilişkiler kurabilmeleri için çeşitli örüntü problemi çözmeleri gerektiği sonucuna ulaşılabilir.

Genel kuralı ikinci dereceden ilişkiyi temsil eden problem bağlamında ise çoğu katılımcı (yaklaşık %55'i) değişkenler arasındaki ilişkiyi kuramamış, genelleme yapamayarak kovaryasyonel düşünme ve özyinelemeli desenleme düzeyinde kalmışlardır. Altıncı sınıfta karşılaştıkları problemlerden farklı olan bu problem bağlamının katılımcıları zorlamasının en önemli sebebi; okulda derslerde uyguladıkları deneme-yanılma yöntemiyle kurdukları doğrusal ilişkiyi bu problem bağlamında aynı yöntemle kuramamaları olarak düşünülebilir. Genel kuralı doğrusal ilişkiyi temsil eden problemler dışındaki sayı ve şekil örüntülerini irdeleyerek öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerini geliştirebilecekleri sonucuna ulaşılabilir.

Genel kural bulmayı gerektiren problemlerde, tüm katılımcılar şekil örüntülerini sayı örüntüsüne çevirerek bu sayılar arasında ilişki kurmuşlardır. Katılımcıların bir kısmının (yaklaşık %35'i) hem sayı hem de şekil örüntüsü olarak verilmeyen gizli örüntüyü ise sayı örüntüsüne dönüştüremediği ve genelleyemediği görülmüştür. Bu durumun en önemli sebebi, altıncı sınıf öğrencilerinin çoğunlukla ilk birkaç terimi açıkça verilen sayı ve şekil örüntüsü problemleri ile karşılaşmış olmalarıdır.

Tablo 4.1.2.2. *Ö3, Ö5 ve Ö9'un fonksiyonel düşünme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Özyinelemeli Desenleme	(Örüntülerde) Kovaryasyonel Düşünme	Benzeşen İlişkiler
		11. Problem
	12. Problem	13. Problem
		14. Problem
		15. Problem

Sonuç olarak Tablo 4.1.2.2.'de belirtildiği gibi, Ö3, Ö5 ve Ö9 diğer katılımcılara göre tüm fonksiyonel düşünme problemlerindeki örüntüleri en iyi düzeyde desenleyen, bağımsız değişken ve bağımlı değişken arasındaki ilişkileri kurabilen katılımcılardır. Bu sebeple fonksiyonel düşünmeleri diğer katılımcılara göre en güçlü olan katılımcılar Ö3, Ö5 ve Ö9'dur.

Ö1, örüntülerdeki değişkenler arasında benzeşen ilişkiler kurarak örüntü adımlarını çok ileriki adımlara kadar ilerletebilmiştir. Ancak bir problemde yalnızca bağımlı değişkenin değişimine odaklanarak örüntüde özyinelemeli desenleme yapmıştır.

Tablo 4.1.2.3. *Ö1'in fonksiyonel düşünme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Özyinelemeli Desenleme	(Örüntülerde) Kovaryasyonel Düşünme	Benzeşen İlişkiler
12. Problem		13. Problem
		14. Problem
		15. Problem

Ö1, Ö2 ve Ö4'ün, sayı ve şekil örüntüsü olarak açıkça verilmeyen gizli örüntü probleminde ise (11. Problem) fonksiyonel ilişkileri kuramadıkları görülmüştür.

Tablo 4.1.2.4. *Ö2'nin fonksiyonel düşünme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Özyinelemeli Desenleme	(Örüntülerde) Kovaryasyonel Düşünme	Benzeşen İlişkiler
12. Problem		13. Problem
15. Problem		14. Problem

Tablo 4.1.2.5. *Ö4'ün fonksiyonel düşünme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Özyinelemeli Desenleme	(Örüntülerde) Kovaryasyonel Düşünme	Benzeşen İlişkiler
12. Problem		13. Problem
15. Problem		14. Problem

Ö6 ise bağımsız değişken ve bağımlı değişken arasında doğrusal ilişki bulunan şekil örüntüleri dışındaki örüntü problemlerinde yalnızca bağımlı değişkenin değişimini irdeleyerek özyinelemeli desenleme düzeyinde kalmıştır.

Tablo 4.1.2.6. *Ö6'nın fonksiyonel düşünme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Özyinelemeli Desenleme	(Örüntülerde) Kovaryasyonel Düşünme	Benzeşen İlişkiler
12. Problem		11. Problem
15. Problem		13. Problem
		14. Problem

Ö7, problemlerin çoğunda örüntülerde kovaryasyonel düşünme düzeyine kadar ulaşsa da, Ö1, Ö2 ve Ö4 ile benzer şekilde 11. Problemde fonksiyonel ilişkiler kuramayarak herhangi bir fonksiyonel düşünme düzeyine ulaşamamıştır.

Tablo 4.1.2.7. *Ö7'nin fonksiyonel düşünme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Özyinelemeli Desenleme	(Örüntülerde) Kovaryasyonel Düşünme	Benzeşen İlişkiler
15. Problem	12. Problem	14. Problem
	13. Problem	

Ö8 ise Ö1 ile benzer şekilde örüntü problemlerinin çoğunda değişkenler arasında benzeşen ilişkiler kurarak örüntü adımlarını ilerletebilmiştir.

Tablo 4.1.2.8. *Ö8'in fonksiyonel düşünme problemlerinde ulaştığı düzeyler*

Özyinelemeli Desenleme	(Örüntülerde) Kovaryasyonel Düşünme	Benzeşen İlişkiler
15. Problem	12. Problem	11. Problem 13. Problem 14. Problem

4.1.3. Katılımcıların cebirsel düşünmeleri ile ilgili sonuçlar

Bu başlık altında "Öğrencilerin cebirsel düşünmeleri nasıldır?" araştırma sorusuna cevap verilecektir.

Cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye yönelik problemler incelendiğinde, katılımcıların büyük bir çoğunluğu (yaklaşık %90'ı) eşittir işaretini anlamlandırabilmiş, ilişkileri ve özellikleri genelleyebilmiş, problemlerde verilen ve istenen harflerin sayıları temsil ettiğini ifade edebilmişlerdir. Tüm katılımcılar genelleme yaptığı ve benzeşen ilişkiler kurduğu örüntülerde, bu genellemelerini sembolik olarak ifade edebilmiş ve kullandığı sembolleri (harfleri) anlamlandırabilmişlerdir.

Tablo 4.1.3.1. *Katılımcıların ulaşabildikleri cebirsel düşünme düzeyleri*

Genelleştirilmiş Aritmetik	
- **İlişkileri ve özellikleri keşfetmek**	Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö9
- **Nicelikler arasında bir ilişki olarak eşitliği keşfetmek**	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9
- **Değişkenler olarak sembolleri kullanmak**	Ö1, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9
Fonksiyonel Düşünme	Katılımcıların fonksiyonel düşünme düzeylerine **4.1.2. Katılımcıların fonksiyonel düşünmeleri ile ilgili sonuçlar** başlığı altında ayrıntılı olarak yer verilmiştir.

Sonuç olarak; Tablo 4.1.3.1.'de görüldüğü üzere, tüm katılımcılar genelleştirilmiş aritmetiğin en az bir alt düzeyine ulaşabilmişlerdir. Daha önceki yıllarda ilişkiler ve özellikler ile eşittir işaretini keşfetmiş olduklarından, katılımcıların çoğunu en çok zorlayan alt düzeyin "değişkenler olarak sembolleri kullanmak" olduğu sonucuna ulaşılabilir. Harfli ifadelerle altıncı sınıfta tanışan katılımcıların çoğu (yaklaşık %80'i), okulda derslerde bağımsız ve bağımlı değişkenler arasındaki kurdukları benzeşen ilişkileri genelleyip cebirsel olarak ifade etmiş olduklarından, örüntülerde kovaryasyonel ilişkileri cebirsel olarak ifade etmekte zorlandıkları görülmüştür. Ancak iki katılımcı, bağımsız değişkendeki birim değişime göre bağımlı değişkenin değişimini kovaryasyonel olarak düşündüğü problem durumunda sözlü olarak yaptıkları genellemeyi, değişken kullanarak harfli olarak da ifade edebilmişlerdir.

Hem fonksiyonel düşünmeleri hem de genelleştirilmiş aritmetik düzeyleri en iyi olan, dolayısıyla cebirsel düşünmeleri diğerlerine göre en güçlü olan katılımcıların Ö3, Ö5 ve Ö9 olduğu sonucuna ulaşılabilir.

4.1.4. Katılımcıların kovaryasyonel düşünmeleri ile ilgili sonuçlar

Bu başlık altında "Öğrencilerin kovaryasyonel düşünmeleri nasıldır?" araştırma sorusuna cevap verilecektir. Analiz edilen verilerin sonucunda, tüm katılımcıların güçlü kovaryasyonel düşünmeye sahip olmadıkları görülmüştür.

Kovaryasyonel düşünme problemleri tüm katılımcıların en çok zorlandığı problemler olmuştur. Katılımcıların birbirine göre eşzamanlı olarak değişen değişkenler hakkında tam ve doğru değerlendirmeler yapamamalarının sebebinin, açık uçlu kovaryasyonel düşünme problemlerinin altıncı sınıf düzeyindeki öğrencilerin karşılaşmadığı türden problemler olduğu düşünülmektedir. Katılımcıların yaklaşık %20'si problem durumlarını değerlendirirken rasgele ve sistematik olarak değişkenlere atadıkları sayısal değerlere başvurmuşlardır. Bu problemlerde sayısal değerlerin olmayışı ve değişkenlerin birbirlerine göre eşzamanlı olarak değişiminin tüm sürecinin zihinde canlandırılmasının katılımcıları zorladığı, bu sebeplerle kovaryasyonel düşünmelerinin gelişmemiş olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Grafik problemlerinde istenen grafikleri anlamlı olarak çizebilen katılımcı yoktur. Katılımcıların çoğunun (yaklaşık %70'i) yalnızca sütun grafiğine yöneldiği görülmüştür. Grafiklerini oluştururken genellikle değişkenlere rasgele sayısal değerler vererek bu değerleri koordine etmeye çalışmışlardır. Ancak araştırmacıya aktardıkları çoğu bilgiyi grafiğe dökememişlerdir. Altıncı sınıf düzeyinde yalnızca sütun ve nokta grafiğine yer verildiğinden ve derslerde karşılaştıkları grafiklerde niceliklerin sayısal değerleri olduğundan; katılımcıların da sütun grafiği tercih ettikleri ve grafikte yer alan değişkenlere sayısal değerler vermeye yöneldikleri sonucuna ulaşılabilir.

Katılımcıların tüm kovaryasyonel düşünme problemlerinde ayrı ayrı ulaştıkları kovaryasyonel düşünme düzeyleri ise Tablo 4.1.4.1.'de gösterilmiştir:

Tablo 4.1.4.1. *Katılımcıların tüm kovaryasyonel düşünme problemlerinde ulaştıkları kovaryasyonel düşünme düzeyleri*

	16. Problem	17. Problem	18. Problem
Ö1	Problemi değerlendirmemiş	Smooth sürekli kovaryasyon	Değerlerin bütün (gross) koordinasyonu
Ö2	Koordinasyon yok	Değerlerin bütün (gross) koordinasyonu	Değerlerin bütün (gross) koordinasyonu
Ö3	Değerlerin ön koordinasyonu	Smooth sürekli kovaryasyon	Smooth sürekli kovaryasyon
Ö4	Koordinasyon yok	Değerlerin bütün (gross) koordinasyonu	Smooth sürekli kovaryasyon
Ö5	Değerlerin ön koordinasyonu	Smooth sürekli kovaryasyon	Değerlerin bütün (gross) koordinasyonu
Ö6	Değerlerin ön koordinasyonu	Değerlerin bütün (gross) koordinasyonu	Değerlerin bütün (gross) koordinasyonu
Ö7	Değerlerin ön koordinasyonu	Değerlerin bütün (gross) koordinasyonu	Smooth sürekli kovaryasyon
Ö8	Koordinasyon yok	Değerlerin bütün (gross) koordinasyonu	Koordinasyon yok
Ö9	Değerlerin ön koordinasyonu	Smooth sürekli kovaryasyon	Smooth sürekli kovaryasyon

Tablo 4.1.4.1.'den görüldüğü üzere; katılımcıların çoğu (yaklaşık %70'i) smooth sürekli kovaryasyon düzeyine kadar ulaşmıştır. Ancak bu düzeye ulaşabildikleri problemlerin günlük yaşamlarında karşılarına çıkabilecek problemler olduğu ve tüm süreci günlük yaşamlarından verdikleri özel örnekler yardımıyla yorumladıkları görülmüştür.

Katılımcıların çoğunun (yaklaşık %80'i) problemlerin zorluk düzeyi arttıkça, değerlerin bütün (gross) koordinasyonu düzeyinde kovaryasyonel düşünebildikleri görülmüştür. Sonuç olarak; problemlerin çoğunda, bazı bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkene etkilerini göz ardı etmişler, tüm süreci yorumlamak yerine bağımlı değişkenin yalnızca artanlığına/azalanlığına/sabitliğine karar verebilmişlerdir.

Katılımcıların arasından problemlerin büyük bir çoğunluğunda, en üst düzey kovaryasyonel düşünme düzeyi olan smooth sürekli kovaryasyon düzeyine ulaşabilen, tüm süreci ve değişkenleri eşzamanlı olarak en iyi yorumlayabilen katılımcıların Ö3 ve Ö9 olduğu sonucuna ulaşılabilir.

4.1.5. Katılımcıların niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmeleri arasındaki ilişkiler

Bu başlık altında "Öğrencilerin niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmeleri arasında ilişki varsa nasıldır?" araştırma sorusuna cevap verilecektir. Elde edilen bulgulardan hareketle, katılımcıların niceliksel muhakeme kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmeleri arasında ilişkiler bulunduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Genel olarak; niceliksel muhakeme becerilerinin, fonksiyonel ve cebirsel düşünme ile kovaryasyonel düşünmelerini şekillendiren temel düşünme biçimi olduğu görülmüştür. Niceliksel muhakeme problemlerinde verilen nicelikler arasında ilişkiler kuramayan, niceliksel işlemleri seçemeyen ve uygulayamayan katılımcılar; fonksiyonel düşünme ve kovaryasyonel düşünme problemlerinde birbirine bağlı olarak değişen nicelikler (değişkenler) arasında da doğru ilişkileri kuramamış, genelleme yaparken ezber bilgiler ve okuldaki derslerde kullandıkları ezber yöntemlerin ötesine geçememişlerdir. Ancak niceliksel muhakemede üst düzeylere kadar çıkabilen katılımcıların kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmelerinin de üst düzeylerde olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Niceliksel muhakemeleri düşük düzeyde kalan katılımcıların (Ö4 ve Ö7); şekil örüntüsü problemlerinde değişkenler arasında doğrusal ilişkileri kursalar bile, okuldaki derslerde ve günlük yaşamlarında karşılaştıklarından farklı tarzdaki problemlerin (değişkenler arasındaki kuadratik ilişki, gizli örüntü problemi) yorumlanmasında ve hem niceliklerin hem de değişkenlerin değişim sürecini eş zamanlı olarak değerlendirilmesinde zorlandıkları sonucuna ulaşılabilir. Yalnızca sayısal değerleri doğrudan verilmiş olan nicelikler ve değişkenler arasında ilişki kurabilmeleri, oran ve çarpımsal nicelikler ve değişkenler arasında ilişkiler kuramayıp eşitlikler oluşturamamaları, tüm düşünme biçimlerinin düşük düzeyde kalmasına sebep olmuştur. Niceliksel muhakemeleri üst seviyede olan katılımcıların (Ö3 ve Ö9) ise şekil örüntülerini çok ileri adımlara kadar ilerletebildikleri, en üst düzeyde genelleyebildikleri, gizli örüntü probleminde örüntüyü oluşturup değişkenler arasında ilişkiler kurabildikleri, bu değişkenleri hem ana dillerinde hem de sembolik olarak ifade edebildikleri ve kovaryasyonel düşünebilip değişkenlerin değişim sürecini eşzamanlı olarak yorumlayabildikleri görülmüştür. Bu bağlamda, güçlü niceliksel muhakeme becerilerinin diğer düşünme biçimlerini de güçlendirdiği düşünülmektedir.

Tüm katılımcıların, sayı ve şekil örüntülerinden oluşan ve hangi değişkenin hangi değişkenlere göre değiştiğinin saptanarak bu değişimin genellenebilmesi ve sembollerle (harflerle) ifade edilebilmesini gerektiren fonksiyonel düşünme problemlerinin çoğunda (özellikle doğrusal ilişkilerde) genelleme yapabildiği ve genelledikleri bilgileri sözlü olarak ve değişkenlerle ifade edebildikleri görülmüştür. Ancak hangi değişkenin hangi değişkenlere bağlı olarak değiştiğini fark edebilseler bile bu değişkenler arasında fonksiyonel ilişkiler kuramayan katılımcılar genelleme yapamamışlar ve cebirsel sembolizasyonlara başvuramamışlardır. Sonuç olarak fonksiyonel düşünebilme becerilerinin katılımcıların cebirsel düşünmelerini doğrudan etkilediği görülmüştür.

Katılımcılar kovaryasyonel düşünme problemlerinde de bağımsız ve bağımlı değişkenler arasında ilişki kurmaya çalışmışlardır. Niceliksel muhakemeleri yetersiz olan katılımcıların kovaryasyonel düşünmelerinin de yetersiz olduğu sonucuna ulaşılabilir. Nicelikler arasındaki değişim sürecini anlamlandıramayan (niceliksel kovaryasyonel düşünme) katılımcılar, değişkenler arasındaki değişim sürecini yorumlarken de zorlanmışlardır. Problemlerde değişkenlerin değişim sürecinin eş zamanlı olarak zihinde canlandırılmasında sayısal değerlerin yer almayışı, zayıf niceliksel muhakemeye sahip katılımcıların kovaryasyonel düşünememelerine sebep olmuştur.

Çalışmanın bulgularından hareketle örüntülerde fonksiyonel ve dolayısıyla cebirsel düşünme becerilerinin, katılımcıların kovaryasyonel düşünmelerine etki etmediği söylenebilir. Bir başka deyişle, fonksiyonel ve cebirsel düşünmeleri üst seviyeye kadar ulaşmış her katılımcının kovaryasyonel düşünebildikleri söylenemez. Bunun en önemli sebebinin örüntü elemanlarının sayısal olarak veriliyor olup değişim sürecinin değerlendirilmesine karşılık, kovaryasyonel düşünme problemlerinde bu sürecin zihinde canlandırılıp problemlerde verilmeyen sayısal değerlerin sistematik olarak düşünülerek değerlendirilmesinin gerekliliği olduğu düşünülmektedir.

Ancak aynı durumun tersinin doğru olmadığı söylenebilir. Bir başka deyişle kovaryasyonel düşünmeleri zayıf olan katılımcıların niceliksel muhakeme, fonksiyonel ve dolayısıyla cebirsel düşünmelerinin zayıf olduğu söylenemez. Çünkü kovaryasyonel düşünmeye yönelik problemler altıncı sınıf öğrencilerinden oluşan katılımcıların günlük yaşamda ve okuldaki derslerinde sıkça karşılaştıkları problemlerden farklı düşünme biçimleri ve çözüm yöntemleri gerektirmektedir. Bu düşünme biçimi ve çözüm yöntemlerine başvurabilen katılımcıların niceliksel muhakeme, fonksiyonel ve cebirsel düşünmelerinin de güçlü olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak; *niceliksel birim korunumu* düzeyine kadar ulaşabilen katılımcıların şekil örüntülerinin tümünde ve gizli örüntüde *benzeşen (correspondence) ilişkiler* kurabildikleri görülmüştür. Bu katılımcılar, cebirsel düşünmenin bir parçası olarak *ilişkileri ve özellikleri keşfedip*, nicelikler ve değişkenler arasında anlamlı *eşitlikler* kurabilip, *cebirsel sembolizasyonlara* başvurabilmişlerdir. Aynı zamanda sayısal değerleri verilmeyen değişkenler arasındaki değişim sürecini zihinlerinde canlandırıp yorumlayarak *chunky ve smooth sürekli kovaryasyon* düzeyine ulaşabilmişlerdir.

Yalnızca toplamsal nicelikler arasında ilişkiler kurabilip oranı ve çarpımsal nicelikleri anlamlandıramayan katılımcılar ise *nicelikleri belirleme* düzeyinde kaldıklarından, aralarında çarpımsal ilişkiler bulunan bağımsız ve bağımlı değişkenler arasında da ilişkileri çoğunlukla kuramamışlardır. Bu sebeplerle örüntüleri (kuadratik ilişki ve gizli örüntü) *özyinelemeli (recursive) desenleyerek* genelleme yapamamışlardır. Nicelikler ve değişkenler arasında anlamlı eşitlikler oluşturamamışlar, cebirsel sembolizasyonlara başvuramamışlar, kısacası aritmetiği genellerken de zorlanmışlardır. Aynı zamanda birbirine bağlı eş zamanlı olarak değişen ve sayısal değerlerine yer verilmeyen değişkenlerin yorumlanmasında ise değişkenlerin birine odaklanıp *koordinasyon yok* düzeyinde veya her ikisini de birbirinden bağımsız yorumlayıp *değerlerin ön koordinasyonu* düzeyinde kalmışlardır.

Analiz edilen bulgular ve elde edilen genel sonuçlardan hareketle; niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünme düzeyleri arasında Tablo 4.1.5.1.'de belirtildiği gibi ilişkiler görülmüştür:

Tablo 4.1.5.1. *Niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünme düzeyleri arası ilişkiler*

NİCELİKSEL MUHAKEME	KOVARYASYONEL DÜŞÜNME	FONKSİYONEL DÜŞÜNME	CEBİRSEL DÜŞÜNME
Niceliklerin Belirlenmesi	**Koordinasyon Yok (No Coordination)**	**Özyinelemeli (Recursive) Desenleme**	

<table>
<tr><td>(Yalnızca toplamsal nicelikler arası ilişkiler ve işlemler)</td><td>Değerlerin Ön Koordinasyonu (Precoordination)

Değerlerin Bütün (Gross) Koordinasyonu</td><td>(Örüntülerde) Kovaryasyonel Düşünme</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Sayısal değerleri doğrudan verilmiş nicelikler ve/veya yalnızca toplamsal nicelikler arasında karmaşık olmayan ilişkiler kurulabilir. Sayı ve şekil örüntülerinin elemanları doğrudan (açık olarak) verildiğinde bağımsız ve bağımlı değişkenlerden yalnızca bağımlı değişkene odaklanılır veya bağımlı-bağımsız değişkenlerin değişimi ayrı olarak değerlendirilir. Nicelikler ve değişkenler arasında anlamlı eşitlikler oluşturulamayıp genelleme yapılamadığından sembollere başvurulup cebirsel düşünülemez. Benzer şekilde sayısal değerleri verilmemiş değişkenlerin değişim süreci eş zamanlı olarak değerlendirilemez. Değişkenler arasında koordinasyon kurulamadığından; değişkenlerden yalnızca birine odaklanılır veya her ikisinin değişimi bağımsız olarak yorumlanır veya bağımsız değişken(ler)in sürece olan bazı etkileri göz ardı edilerek bağımlı değişkendeki artış/azalış/sabitliğe karar verilebilir.</td></tr>
<tr><td>Nicelikler Arası İlişkilerin Belirlenmesi

Niceliksel İşlemler

(Toplamsal, çarpımsal ve oran nicelikler)</td><td>Değerlerin Koordinasyonu</td><td>Benzeşen (Correspondence) İlişkiler

(Çoğunlukla doğrusal fonksiyonel ilişkiler)</td><td>Genelleştirilmiş Aritmetik:
- İlişkileri ve özellikleri keşfetmek
- Nicelikler arasında bir ilişki olarak eşitliği keşfetmek
- Kurdukları <u>doğrusal ilişkilerde</u> değişkenler olarak sembolleri kullanmak</td></tr>
<tr><td colspan="4">Belirlenen nicelikler arasında ilişkiler kurulup niceliksel işlemler (toplamsal-çarpımsal-oran) uygulanarak eşitlikler oluşturulabilir. Benzer şekilde örüntüyü oluşturan değişkenler arasında da çarpımsal eşitlikler oluşturularak ilişkiler kurulur. Ancak niceliksel muhakemenin bu düzeyinde örüntülerde çoğunlukla doğrusal fonksiyonel benzeşen ilişkiler oluşturulabilir. Doğrusal fonksiyonel ilişkilerde anlamlı cebirsel sembolizasyonlara başvurulur. Nicelikler ve değişkenler arasında ilişkiler kurulabildiğinden aritmetik genelleştirilebilir. Sayısal değerleri verilmeyen ve eş zamanlı olarak değişen değişkenlerin değişiminin tüm süreci zihinde canlandırılamaz. Ancak karmaşık olmayan problemler durumlarında değişkenlerin değerleri sistematik olarak zihinde canlandırılarak bu değerler koordine edilmeye başlanır.</td></tr>
<tr><td>Niceliksel Birim Koordinasyonu

Niceliksel Birim Korunumu</td><td>Chunky Sürekli Kovaryasyon

Smooth Sürekli Kovaryasyon</td><td>Benzeşen (Correspondence) İlişkiler

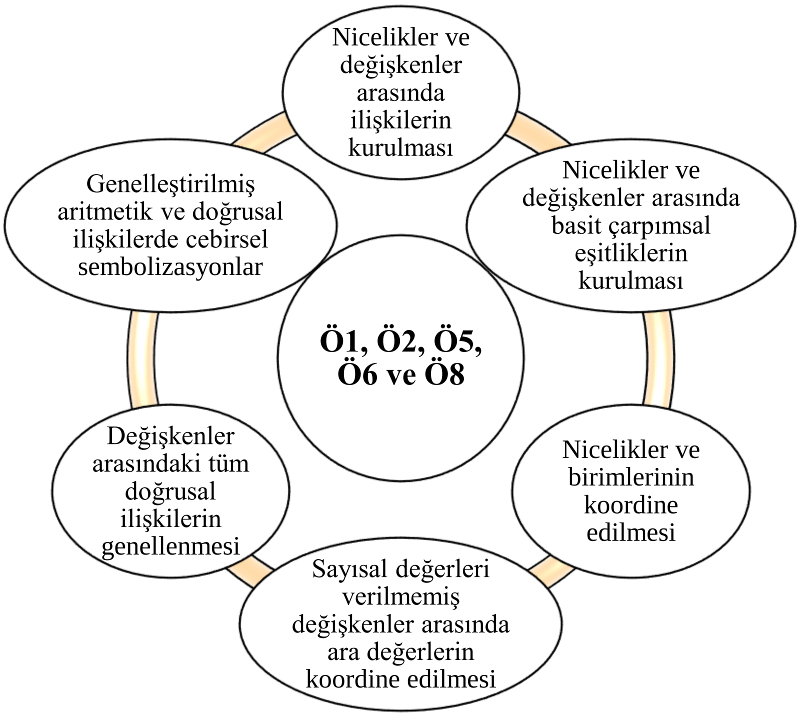
(Tüm fonksiyonel ilişkiler)</td><td>- Değişkenler olarak sembolleri kullanmak</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nicelikler arasında (toplamsal-çarpımsal-oran) ilişkiler kurulup anlamlı nicelikler işlemler seçildikten sonra nicelikler ve birimleri eşleştirilir. Aynı zamanda birbirinden farklı iki niceliğin oranından yeni bir nicelik oluşturulabilir. Benzer şekilde elemanları doğrudan verilen veya verilmeyen sayı ve şekil örüntülerinin değişkenleri arasında her türden (doğrusal, kuadratik vb.) çarpımsal ilişkiler kurulabilir,</td></tr>
</table>

tüm nicelik ve değişkenler arasında anlamlı eşitlikler oluşturulabilir. Genellemeler yapılıp cebirsel sembolizasyonlarla temsil edilebilir. Sayısal değerleri verilmeyen ve eş zamanlı olarak değişen bağımsız ve bağımlı değişkenlerin tüm değişim süreci zihinde canlandırılabilir. Bağımsız değişken(ler)in birim değişimine göre veya genel değişimine göre bağımlı değişken ile arasında koordinasyon kurulabilir.

Çalışmanın katılımcılarının Tablo 4.1.5.1.'de belirtilen ilişki tablosundaki gruplara göre dağılımları ise Görsel 4.1.5.1., Görsel 4.1.5.2. ve Görsel 4.1.5.3.'de gösterilmektedir. Her bir gruptaki katılımcılardan elde edilen tüm bulgular birebir aynı olmasa da, gene olarak bakıldığında problem bağlamlarında benzer şekilde düşünmüşler ve muhakeme yapmışlardır. Birbirine en yakın davranışlar sergileyen katılımcıların aynı grupta olduğu söylenebilir. Buna göre; niceliksel muhakeme, fonksiyonel, cebirsel ve kovaryasyonel düşünmeleri diğer katılımcılara göre en zayıf olan Ö4 ve Ö7'den elde edilen bulgular, bu katılımcıların Tablo 4.1.5.1.'in ilk grubunda bulunduklarını göstermektedir.

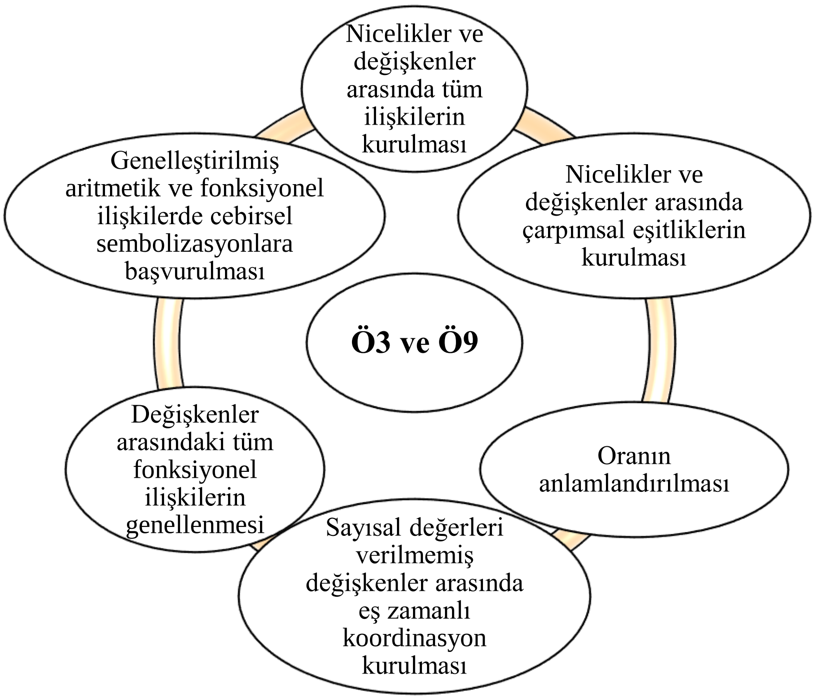
Görsel 4.1.5.1. *Ö4 ve Ö7'nin düşünme ve muhakeme biçimleri arasındaki genel ilişkiler*

Ö1, Ö2, Ö5, Ö6 ve Ö8 katılımcıları ise, Ö4 ve Ö7'den daha iyi düşünme ve muhakeme becerilerine sahip olduklarından, Tablo 4.1.5.1.'de belirtilen ikinci grupta yer almaktadır.



Görsel 4.1.5.2. *Ö1, Ö2, Ö5, Ö6 ve Ö8'in düşünme ve muhakeme biçimleri arasındaki genel ilişkiler*

Niceliksel muhakeme, fonksiyonel, cebirsel ve kovaryasyonel düşünmeleri diğer katılımcılara göre en iyi düzeyde olan, problem bağlamlarında verilen-istenen nicelikler ve değişkenler arasındaki tüm ilişkileri kurabilen katılımcılar olan Ö3 ve Ö9 ise, Tablo 4.1.5.1.'de belirtilen üçüncü grupta yer almaktadır.



Görsel 4.1.5.3. *Ö3 ve Ö9'un düşünme ve muhakeme biçimleri arasındaki genel ilişkiler*

4.2. Tartışma

Bu bölümde; çalışmanın bulguları ve sonuçlarından hareketle, katılımcıların niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmeleri ve bu düşünme biçimleri arasındaki ilişkileri, matematik eğitimi literatüründeki diğer araştırmalarla karşılaştırmalı olarak tartışılacak ve ileride yapılan araştırmalara ve matematik öğretimine yönelik önerilere yer verilecektir.

Katılımcıların bir kısmının karmaşık yapılı problemlerdeki nicelikler arasında ilişkiler kurabilseler bile; kullandıkları niceliksel işlemleri anlamlandırmadıkları, okulda derslerde gördükleri ezber bilgiler, formüller ve çözüm yöntemlerinden faydalandıkları, niceliksel işlemlerden ziyade aritmetiğe yönlendikleri görülmüştür. Akkan, Baki ve Çakıroğlu'nun (2012) ortaokul öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş sürecindeki öğrencilerin problem çözme sırasında kullandığı stratejileri inceledikleri araştırmanın bulgularına göre öğrenciler büyük çoğunlukla aritmetiksel düşünmeye başvurmuştur. Bu çalışmada, niceliksel muhakemeleri zayıf katılımcılar problem bağlamlarında verilen nicelikler arasında kurabildikleri ilişkileri işlemlerle ifade etseler de, klinik görüşmeler sırasında çoğunlukla bu işlemleri neden tercih ettiklerini açıklayamamışlardır. Genel olarak katılımcıların niceliksel muhakemeleri düşük düzeyde kaldığından, aritmetiksel düşündükleri söylenebilir. Thompson (1993) beşinci sınıf öğrencisiyle yaptığı dört günlük öğretim deneyinde karmaşık yapılı toplamsal problemlerdeki öğrenci tutumlarını derinlemesine klinik görüşmelerle takip etmiştir. Araştırmanın bulgularına göre öğrenciler öğretim deneyinde problem bağlamı ile karşılaştıkları zaman hangi nicelik için hangi aritmetik işlemi seçeceklerini değerlendirememişler, doğrudan aritmetik yapmaya yönelmişlerdir. Bu durumlar katılımcıların niceliksel muhakemelerinin zayıf olduğunun bir göstergesidir. Öğretim deneyinin sonuçları çalışmanın sonuçlarıyla kısmen benzerlik gösterse de, bu çalışmayı Thompson'un (1993) çalışmasından ayıran en önemli özellik; katılımcılarının toplamsaldan ziyade daha çok oran ve çarpımsal nicelikler içeren, karmaşık yapılı problemlerdeki niceliksel işlemleri anlamlandırmada zorlanmış olmalarıdır.

Apsari (2015) beşinci sınıf öğrencileriyle örüntülerde doğrusal ve kuadratik ilişkileri genelleme, Blanton (2015) altı yaş grubu öğrencileriyle doğrusal ilişkiler içeren problem durumlarını genelleme, Berg (2012) ikinci ve üçüncü sınıf öğrencileriyle elemanları açıkça verilmiş sayı örüntüleri ve cebirsel sayı örüntüsü problemlerini temsil edip genelleme, Carraher vd. (2006) dokuz-on yaş grubu öğrencileriyle cebirsel düşünmeye yönelik problemleri genelleme, Carraher, Martinez ve Schliemann (2008) üçüncü sınıf öğrencileriyle doğrusal ilişki örüntü problemlerini genelleme amaçlı araştırmalar yapmışlardır. Yapılan araştırmaların genel sonucuna göre küçük yaştaki öğrenciler sayı ve şekil örüntülerini çoğunlukla yakın adımlara kadar ilerletebilmektedir. Ayrıca, genel olarak öğrencilerin değişken kavramı ile ilgili algılarında eksiklikler olduğu görülmüştür (Girit ve Akyüz, 2016). Ancak güçlü cebirsel düşünme becerilerine sahip olan öğrenciler, örüntüleri uzak adımlara kadar tahmin edip, bu örüntüleri gerek sembollerle gerek sözel olarak genelleyebilmişlerdir. Belirtilen çalışmaların sonuçları, cebir ile henüz tanışmış olan altıncı sınıf katılımcıları ile yapılan bu çalışmanın sonuçları ile uyumludur. Benzer şekilde güçlü cebirsel düşünmeye sahip katılımcılar hem doğrusal hem kuadratik ilişkileri uzak adımlara kadar tahmin ederek genelleme yapabilmişlerdir. Bu çalışmada, cebirsel düşünme ve fonksiyonel düşünme becerilerinin birbirini doğrudan etkilediği görüldüğünden, güçlü cebirsel düşünmeye sahip ve uzak adımlara kadar genelleme yapabilen katılımcıların fonksiyonel düşünmelerinin de güçlü olduğu da söylenebilir.

Çalışmada katılımcılara yönlendirilen fonksiyonel düşünme problem bağlamlarının büyük çoğunluğu şekil örüntülerinden oluşmaktadır. Ancak katılımcıların çoğu şekil örüntülerindeki bağımsız ve bağımlı değişkenler arasındaki ilişkileri şekil örüntülerinin görsellerinden irdelemek yerine örüntüyü girdi-çıktı tabloları yardımıyla sayı örüntülerine çevirerek değerlendirmeyi tercih etmişlerdir. Yalnızca birkaç katılımcının şekil örüntüsünün görselleri üzerinden genelleme yaptıkları görülmüştür. Radford (2006, 2010) sekizinci ve dokuzuncu sınıf öğrencileriyle yaptığı çalışmalarında doğrusal fonksiyonel ilişkiler içeren şekil örüntülerini şekil (görsel) üzerinden analiz ederek ileri adımlarını tahmin etme ve genelleme becerilerini incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmalarının sonuçlarına göre güçlü cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler belirli bir şekil örüntüsünün görseli üzerinden farklı stratejilerle kurallar üreterek genellemelerini ana dillerinde ve sembolik olarak ifade edebilmişlerdir. Sonuçların, bu çalışmanın sonuçlarıyla uyumlu olduğu söylenemez. Çünkü katılımcılardan cebirsel düşünmeleri güçlü olanların şekil örüntülerini tamamıyla görselleri üzerinden genellemedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Aynı zamanda fonksiyonel ve cebirsel düşünmeleri üst düzeyde olmasa da şekil örüntülerinde doğrusal fonksiyonel ilişkileri kurabilen bazı katılımcıların da örüntülerin bir kısmını görselleri üzerinden genelleyebildikleri görülmüştür.

Şekil örüntüsü ve gizli sayı örüntüsü problemlerini genelleyebilip benzeşen (correspondence) fonksiyonel ilişkiler kurabilen katılımcıların klinik görüşmeler sırasında çoğunlukla ana dilde genelleme yaptıkları, ancak problem bağlamında istendiği için sembolik olan genellemelere yöneldikleri görülmüştür. Pinto ve Canadas (2017) sekiz-dokuz yaş grubu öğrencilerinin fonksiyonel düşünmelerine odaklanarak uyguladığı öğretim deneyinde öğrencilerden şekil örüntüsü hakkında yorum yapmalarını istemiş, öğrencilerin çoğu örüntüyü benzeşen ilişkiler düzeyinde irdelemiş, sonunda da ileriki adımlarda kullanılmak üzere sembolik olmayan sözel genellemeler yapabilmişlerdir. Bu çalışmanın sonuçlarıyla, Pinto ve Canadas'ın (2017) yaptığı araştırmanın sonuçlarını ayıran en önemli farklardan birini seçilen örneklem oluşturmaktadır. Altıncı sınıf öğrencileri cebire geçtiklerinden cebirsel sembolizasyonlara başvurabilmişler, belirtilen çalışmadaki sekiz-dokuz yaş grubu öğrencileri değişkenler arasında benzeşen ilişkiler kursa bile cebirsel genelleme yapamamışlardır. Ancak bu çalışmanın bulgularına göre, katılımcıların problem bağlamında istenmediği sürece harfli ifadelere başvurmayacakları, yalnızca ana dilde genelleme yapacakları düşünülmektedir. Sonuçları ayıran bir diğer fark ise bazı katılımcıların örüntü değişkenleri arasında kurdukları kovaryasyonel ilişkiyi de sözle genelledikleri ve istendiğinde sembolik olarak ifade etmiş olmalarıdır. Bu çalışmanın katılımcıları, belirtilen farklardan ve yaşlarından dolayı sekiz-dokuz yaş grubu katılımcılara göre daha üst düzeyde fonksiyonel ve cebirsel düşünme becerilerine sahiptirler.

McEldoon ve Rittle-Johnson (2010), ikinci sınıftan altıncı sınıfa kadar seçtiği öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerini incelemek için; verilmiş bir kuralı uygulama, verilmeyen kuralı fark etme, sözel kuralı kullanıp genelleme ve sembolik kuralı genelleme becerilerini araştırmıştır. Örüntüler yardımıyla yapılan çalışmanın sonucunda tüm öğrencilerin %85'i verilmiş bir kuralı uygulayabilmiş, %61'i verilmeyen kuralı fark etmiş, %40'ı sözel kuralı kullanıp genelleyebilmiş, %28'i ise sembolik kurala ulaşıp genelleyebilmiştir. Bu sonuçların çalışmanın sonuçlarıyla ayrıldığı bazı noktalar bulunmaktadır. Bu çalışmada, benzeşen ilişkiler kurabilen katılımcıların "verilmeyen kuralı fark etme"-"sözel kuralı kullanıp genelleme"-"sembolik kurala ulaşıp genelleme" oranları arasında anlamlı farklar bulunmamaktadır. Cebirle henüz tanışmış olan altıncı sınıf katılımcıların çoğu, benzeşen ilişkiler (bazı katılımcılar kovaryasyonel ilişkiler) kurabildiği fonksiyonel ilişkilerin kuralını fark edebildikten sonra ana dilde ve istendiği için cebirsel olarak anlamlı bir şekilde ifade edebilmişlerdir.

Çalışmanın en önemli sonuçlarından biri de katılımcıların tümünde farklı düzeylerde de olsa niceliksel muhakeme ve cebirsel düşünme becerilerinin bulunduğu ve aritmetikten cebire geçişte köprü görevi gören niceliksel muhakemelerinin; kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmelerinin temelini oluşturduğudur. Ellis, (2011) çalışmasında cebirsel düşünmenin öneminden ve erken dönemlerde küçük öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri inşa etmelerinin önemine değinerek ortaokul öğrencilerinin lineer ve kuadratik fonksiyonel durumlardaki nicelikler arasında ilişki kurma becerilerini araştırmış ve küçük yaştaki öğrencilerin fonksiyonel ilişkilerin kurulabilmesi için niceliksel muhakeme becerilerinin önemine dikkat çekmiştir. Bu çalışmada, niceliksel muhakemesi gelişmiş katılımcıların örüntülerde doğrusal ve kuadratik fonksiyonel ilişkileri kurabildikleri görülmüştür. Niceliksel muhakemeleri gelişmemiş olan katılımcıların ise okulda derslerde sıkça karşılaştıkları problem türlerinden olan şekil örüntülerinde doğrusal fonksiyonel ilişkileri çoğunlukla kurabildikleri; ancak gizli örüntü problemindeki örüntüyü oluşturup genelleme yapmakta ve şekil örüntüsündeki kuadratik ilişkileri kurmakta zorlandıkları görülmüştür. Bulgular, niceliksel muhakemenin fonksiyonel ve cebirsel düşünme açısından önemini açıkça göstermektedir. Bu çalışmada, güçlü niceliksel muhakemeye sahip öğrencilerin problemlerde çoğunlukla girdi-çıktı tablolarından yararlanarak fonksiyonel olarak değişen nicelikler arasında kovaryasyonel ve benzeşen ilişkiler kurabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Smith ve Thompson'un (2007) K-8 düzeyindeki öğrencilerin aritmetik ve cebire geçişteki muhakeme becerilerini araştırdıkları çalışmanın bulgularından hareketle ilkokul ve ortaokul öğrencilerinde aritmetiksel, niceliksel muhakeme ve cebirsel düşünme becerilerinin bulunduğu görülmektedir. Ayrıca niceliksel muhakeme becerilerinin öğrencilerin matematiksel gelişimlerinde merkezde olduğu vurgulanmaktadır. Bu çalışmada da ortaokul öğrencilerinde niceliksel muhakeme ve cebirsel düşünme becerilerinin bulunduğu görülmüş ve niceliksel muhakemeleri düşük olan katılımcıların fonksiyonel ve cebirsel düşünme düzeylerinin de düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Çalışmada sözel olarak verilen gizli örüntü problemi, katılımcıların sayı örüntüsünü ortaya çıkaracakları, genelleme yapacakları ve cebirsel sembolizasyonlara başvuracakları bir problemdir. Büyük çoğunlukla niceliksel muhakemeleri gelişmiş olan katılımcıların bu problem bağlamında cebirsel stratejileri kullanarak genelleme yapabildikleri ve harfli ifadeleri anlamlı olarak kullanabildikleri görülmüştür. Kabael ve Akın (2016a), çalışmasında yedinci sınıf öğrencilerinin bir cebirsel sözel problemin çözümünde kullandıkları problem çözme stratejileri ve niceliksel muhakeme becerilerini incelemişlerdir. Bu çalışma ile benzer şekilde, niceliksel muhakeme becerileri gelişmiş olan öğrencilerin hem aritmetiksel hem de cebirsel stratejileri etkili kullanabilmesinde niceliksel muhakeme becerisinin önemi ortaya çıkmıştır.

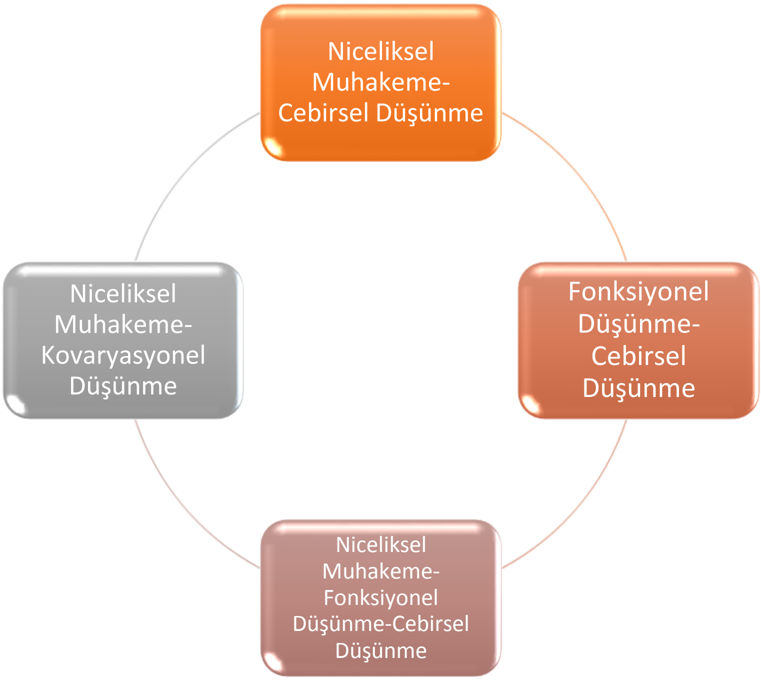
Niceliksel muhakeme düzeyleri ortalama ve üzerinde olan bazı katılımcıların, cebirsel düşünme problemlerinin yanı sıra niceliksel muhakemeye yönelik problem bağlamlarında da cebirsel stratejilere ve sembollere başvurdukları görülmüştür. Bu katılımcılar nicelikleri temsil etme amacıyla problem bağlamlarında yer alan kişilerin isimlerinin baş harflerini kullanmışlardır. Örüntü problemlerinde de yaptıkları genellemelerini ifade etmek amacıyla "fonksiyon" kavramının bilinen değişkenleri olan x,y harfleri yerine, çoğunlukla okulda öğrendikleri ve sıkça kullandıkları cebirsel sembolizasyonlara başvurmuşlardır (n, A gibi). Blanton ve Kaput'un (2004, 2011) ilkokul öğrencileriyle yaptıkları çalışmaları sırasında öğrencilerin 'değişken' (x,y) kavramına değinmeden önce, nicelikleri tanımlamak için semboller kullanmaları (P, H, n gibi); çalışmanın sonuçları ile paralellik göstermektedir.

Thompson (1990), kovaryasyonel düşünme ile niceliksel muhakeme arasında güçlü bir bağ olduğunu savunmaktadır. Niceliksel muhakeme bir problem durumundaki nicelikleri oluşturduktan sonra birden fazla nicelik arasında ilişkileri kurma becerisi olduğundan (Thompson, 1990), kovaryasyonel düşünmede de değeri bilinmeyen niceliklerin eş zamanlı değişimleri arasında ilişki kurulmaktadır. Bu çalışmada da benzer sonuçlara ulaşılmıştır. Niceliksel muhakemeleri en üst düzeyde olan katılımcıların kovaryasyonel düşünebildikleri görülmüştür.

Katılımcıların kovaryasyonel düşünmeleri ile ilgili elde edilen en önemli sonuçlardan bir diğeri de, eş zamanlı olarak akıl yürütemedikleri ve değişkenlerin değişim sürecini yorumlarken problem bağlamlarında verilmeyen sayısal değerlere başvurduklarıdır. Açık uçlu veri toplama araçlarındaki niceliksel muhakeme, cebirsel ve fonksiyonel düşünme problemlerinde ve okulda karşılaştıkları problemlerde sayısal değerleri olan değişkenler ve niceliklerle uğraşmaları, altıncı sınıf katılımcılarını sayısal değerlere başvurmaya itmiştir. Öğrencilerin nicelikler arası kovaryasyonel ilişki kurmada sayısal olmayan akıl yürütmeler önemlidir. Johnson (2013) yaptığı araştırmasında ortaokul öğrencilerinin değişim oranlarındaki nicelikler arasındaki ilişkileri kurmalarına destek olmak için bir dizi kovaryasyon görevleri tasarlamıştır. Bu görevler, öğrencilerin sayısal olmayan nicelikler için akıl yürütme becerilerini desteklemek ve niceliğin başka bir değişen nicelikle ilişkisinde nasıl bir değişime uğrayabileceğini gösteren tasvirler oluşturmak için tasarlanmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre; öğrenciler, niceliklerin birbirine göre nasıl değiştiğini ancak sayısal hesaplamalar yaparak gösterebilmişlerdir. Bu çalışmanın katılımcıların bir kısmı kovaryant olarak değişen değişkenleri hem yorumlarken hem de grafiklerini oluştururken ise bağlamda istenenin dışındaki bağımsız değişkenlere (özellikle zaman) yer vermişlerdir. Johnson'un (2013) araştırmasındaki öğrenciler de (zaman içermeyen) kovaryant niceliklerin grafiklerini, zaman varmış gibi oluşturmuşlardır.

Niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmeleri en güçlü olan iki katılımcıyı, niceliksel muhakeme problem bağlamlarının çözüm sürecinde ayıran en önemli özellik; bir katılımcının problem bağlamlarındaki niceliklerin ve değişkenlerin değişimini ve aralarındaki ilişkiyi, okul dışı öğrendiği Bar modeli yöntemiyle ifade ettiğidir. Bu yöntem, katılımcıyı sistematik olmayan deneme-yanılma yöntemine başvurmayarak modelleme yapmasına, kesin çözümlere ulaşmasına ve "değişken" kavramını diğer katılımcılara göre daha anlamlı kullanmasına yarar sağlamıştır. Hernandez (2010), beşinci sınıf öğrencilerinin hem şekil örüntüsü hem de sözel örüntü problemlerinde doğrusal ve kuadratik ilişkileri genellemelerini incelediği çalışmasında genelleme becerileri güçlü olan öğrencilerden bazılarının sözel örüntü problemlerinde değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade ederken Bar modelinden faydalandığı görülmektedir. Ancak bu çalışmada genelleme becerisi ve nicelikler arası muhakeme becerisi güçlü olan tek bir katılımcı Bar modeli yöntemine başvurmuştur.

Literatürdeki çalışmaların Görsel 4.2.1.'de belirtilen düşünme ve muhakeme becerilerini ilişkilendirdikleri görülmektedir. Ancak cebirsel düşünmenin niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünme ile ilişkili olarak incelendiği çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışma, belirtilen muhakeme ve düşünme becerilerini ilişkilendirerek bu ilişkinin nasıl olduğunu ortaya koymuştur (Tablo 4.1.5.1.).



Görsel 4.2.1. *Literatürde ilişkilendirilmiş olan düşünme ve muhakeme becerileri*

Niceliksel muhakemeleri üst düzeyde olan katılımcıların diğer düşünme becerileri de üst düzeydedir. Benzer şekilde; kovaryasyonel düşünmeleri üst düzeyde olan katılımcıların niceliksel muhakeme, cebirsel ve fonksiyonel düşünmeleri de üst düzeydedir. Niceliksel muhakeme için bu durumun tersi geçerli olsa da kovaryasyonel düşünme için tersinin geçerli olduğu söylenemez. Kovaryasyonel düşünme, birbirine bağlı olarak değişen nicelikler arasında eş zamanlı ilişki kurma süreci olsa da; örüntülerde fonksiyonel düşünebilen ve genelleme yapabilen katılımcıların tümünün kovaryasyonel düşündükleri söylenemez. Güçlü niceliksel muhakeme, fonksiyonel ve cebirsel düşünme becerileri bir araya gelerek kovaryasyonel düşünmeyi güçlendirmektedir. Bu çalışma göstermiştir ki, nicelikler arasında ilişkileri doğru ve anlamlı bir şekilde kurabilme becerisi, birbirine bağlı olarak değişen değişkenler arasında ilişkileri kurabilme ve genelleme becerisini doğrudan etkilemektedir. Nicelikler arasında çarpımsal eşitlikler oluşturulduğunda, değişkenler arasındaki tüm fonksiyonel ilişkilerdeki (doğrusal, kuadratik ilişki ve gizli örüntü problemi) çarpımsal eşitlikler de oluşturulabilir. Sayısal değerleri doğrudan verilmeyen nicelikler arasında muhakeme yapabilme becerisi, sayısal değerleri verilmemiş değişkenlerin değişim sürecini eşzamanlı zihinde canlandırabilme becerisini geliştirmektedir. Değişkenler arasındaki ilişkiler kurulup genellendiğinde ve cebirsel sembolizasyonlara başvurulduğunda ise, belirtilmiş olan beceriler cebirsel düşünme sürecini tamamlamaktadır. Bu çalışmanın sonuçlarına göre; karmaşık yapılı olmayan basit problem bağlamlarındaki nicelikler arasında ilişkiler kurulabildiğinde bununla bağlantılı olarak yine basit yapılı sayı ve şekil örüntüsü problemlerindeki (özellikle doğrusal) fonksiyonel ilişkiler kurularak genellenebilir, ancak değişkenlerin değişim süreci eşzamanlı değerlendirilemediğinden dolayı kovaryasyonel düşünülemez. Elde edilen sonuçlar; niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmenin birbiriyle ilişkili olduğunu ortaya koymuştur.

4.3. Öneriler

Matematik eğitimi literatüründeki diğer araştırmalarla karşılaştırmalı olarak yukarıda belirtilen tartışmalardan hareketle, ileride yapılacak araştırmalara yönelik öneriler aşağıda belirtilmiştir:

- Katılımcılara; niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmelerini geliştirme amaçlı öğretim deneyleri uygulanabilir.
- “Fonksiyon” ve “değişim oranı” kavramlarını öğrenmeye ve anlamlandırmaya başlayan ortaöğretim düzeyi öğrencilerinin niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmeleri ve bu düşünme biçimleri arasındaki ilişkiler incelenebilir.
- Katılımcıların akademik başarıları ile niceliksel muhakeme, kovaryasyonel, fonksiyonel ve cebirsel düşünmeleri arasındaki ilişkiler incelenebilir.
- Katılımcıların matematiksel düşünme becerilerini geliştirmeye yönelik Bar modeli yöntemini öğretmek amacıyla öğretim deneyleri uygulanabilir.
- Katılımcıların fonksiyonel ve cebirsel düşünmelerini incelemeyi amaçlayan araştırmalarda örüntü problemlerinden ziyade cebirsel sözel problemlere daha fazla yer verilebilir.
- Ortaokul ve ortaöğretim düzeyi katılımcılarının, sayısal değerleri verilmeyen değişkenler arasındaki fonksiyonel değişim sürecinin eş zamanlı zihinde canlandırılmasını incelemeyi amaçlayan, kovaryasyonel düşünmeye yönelik araştırmalar artırılabilir.

Matematik öğretimine yönelik öneriler ise aşağıda belirtilmiştir:

- Ortaokul öğrencilerine matematik öğretimi sürecinde, özellikle kovaryasyonel düşünmelerini geliştirmeye yönelik, sayısal değerleri doğrudan verilmeyen nicelikler ve değişkenler arası ilişkiler kurulması amaçlanan sınıf içi etkinlikler planlanıp uygulanabilir.

- Ortaokul öğrencilerine, değişkenler arasındaki doğrusal fonksiyonel ilişkilerin yanı sıra, kuadratik fonksiyonel ilişkilere, gizli sayı örüntüsü problemlerine ve sözel cebir problemlerine daha fazla yer verilebilir.
- Nicelikler arasında ilişkiler kurulurken "değişken" kavramına geçişin kolaylaşması açısından Bar modeliyle çözüm yöntemleri öğretilerek, öğrenciler modellemeler yapmaya yönlendirilebilir.
- Bağımsız değişkenin "adım sayısı" ve "terim sayısı"nın ötesine geçtiği, farklı türdeki bağımsız değişkenler içeren sayı ve şekil örüntüsü problemlerine daha fazla yer verilebilir.

KAYNAKÇA

Akın, A. (2016). *Ortaokul öğrencilerinin matematik okuryazarlıklarının niceliksel muhakemelerinin güçlendirilmesi ile desteklenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

Akkan, Y., Baki, A. ve Çakıroğlu, Ü. (2012). 5-8. sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin problem çözme bağlamında incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* (13), 1-13.

Apsari, R.A. (2015). *Bridging between arithmetic and algebra: Using patterns to promote algebraic thinking.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Palembang: Sriwijaya University, Faculty of Teacher Training and Education.

Bastable, V. and Schifter, D. (2017). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. J.J. Kaput, D.W. Carraher ve M.L. Blanton (Editörler), *Algebra in the early grades* içinde (s. 165–84). New York: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Baş, S., Erbaş, A.K. ve Çetinkaya, B. (2011). Öğretmenlerin dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgileri. *Eğitim ve Bilim, 36*(159), 41-55.

Berg, D. (2012). *Algebraic thinking in the elementary classroom.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Kanada: Simon Fraser University, Faculty of Education.

Blanton, M., Brizuela, B.M., Gardiner, A.M., Sawrey, K. and Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558.

Blanton, M.L. and Kaput, J.J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 135-142.

Blanton, M.L. and Kaput, J.J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.

Blanton, M.L. and Kaput, J.J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *ZDM- International Reviews on Mathematical Education*, 37(1), 34-42.

Blanton, M.L., Levi, L., Crites, T. and Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5.* National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M.L., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A.M., Isler, I. and Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a compherensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 39-87.

Büyüköztürk, Ş. (2012). *Sosyal bilimler için veri analizi el kitabı.* Ankara: Pegem Akademi.

Cai, J., Ng, S. F. and Moyer, J. C. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. J. Cai ve E. Knuth (Editörler), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* içinde (s. 25-41). Springer Berlin Heidelberg.

Carlson, M.P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in Collegiate Mathematics Education III, Conference Board of the Mathematical Sciences, Issues in Mathematics Education, 7*, 114–163.

Carlson, M.P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., and Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 352–378.

Carlson, M.P., Larsen, S. and Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. https://pdfs.semanticscholar.org/3d78/339d5b9ba04a73ef1e882029071316383b61.pdf (Erişim tarihi: 02.08.2017)

Carlson, M.P., Larsen, S. and Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practice. R. Lesh ve H. M. Doerr (Editörler.), *Beyond Constructivism: A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning ve Teaching* içinde (s. 465-478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, D.W., Martinez, M.V. and Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education,* (40), 3-22.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D., Brizuela, B. and Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 37(2), 87-115.

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. USA: Arizona State University.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L. and Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), 31-37.

Confrey, J., and Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. P. Cobb (Ed.), *Learning mathematics* içinde (s. 31–60). Dordrech, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Confrey, J., and Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86.

Deal, J. (2015). *Students' mathematical modeling in algebra.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Urbana: University of Illinois at Urbana-Champaign.

Dede, Y. (2004). Değişken kavramı ve öğrenimindeki zorlukların belirlenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 4(1), 25-56.

Ellis, A. B. (2007). The influence of reasoning with emergent quantities on students' generalizations. *Cognition and Instruction*, *25*(4), 439–478.

Ellis, A.B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. J. Cai ve E. Knuth (Editörler), *Early algebraization* içinde (s. 215-236).

Fonger, N.L., Stephens, A., Blanton, M. and Knuth, E. (2015). A learning progressions approach to early algebra research and practice. T.G. Bartell, K.N. Bieda, R.T. Putnam, K. Bradfield and H. Dominguez (Editörler), *Early algebra, algebra and number concepts: Brief research reports* içinde (s.201-204). East Lansing, MI: Michigan State Üniversitesi.

Girit, D. ve Akyüz, D. (2016). Algebraic thinking in middle school students at different grades: Conceptions about generalization of patterns. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED),* 10(1), 243-272.

Hernandez, I. (2010). *Algebraic reasoning in elementary school students.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Kaliforniya: Harvey Mudd College.

Hobson, N.L.F. and Moore, K.C. (2017). Exploring experts' covariational reasoning. A. Weinberg, C. Rasmussen, J. Rabin, M. Wawro and S. Brown (Editörler), *Proceedings of the 20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (s. 664-672). San Diego, CA.

Johnson, H.L. (2013). Designing covariation tasks to support students' reasoning about quantities involved in rate of change. *STEM Faculty Presentations,* 45. http://source.ucdenver.edu/stem_presentations/45 (Erişim tarihi: 22.09.2017)

Kabael, T. ve Akın, A. (2016a). Problem solving strategies and quantitative reasoning skills in solving algebraic verbal problems of seventh grade students. *Kastamonu University Kastamonu Education Journal*, 24(2), 875-894.

Kabael, T. ve Barak, B. (2017). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının problem çözmedeki fonksiyonel düşünme becerileri. *Uluslararası Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(13), 311-321.

Kabael, T. ve Tanışlı, D. (2010). Teaching from patterns to functions in algebraic thinking process. *Elementary Education Online*, 9(1), 213-228.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?, J.J. Kaput, D. Carraher, ve M. Blanton (Editörler), *Algebra in the Early Grades* içinde (s. 235-272). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kertil, M., Çetinkaya, B. ve Erbaş, A.K. (2014). Öğretmen adaylarının iki niceliğin eş zamanlı değişimini içeren durumları modellerken grafik oluşturma ve yorumlama süreçlerinin incelenmesi. *XI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi (UFBMEK) Bildiri Özetleri Kitabı,* 157-158.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Kieran, C. and Chalouh, L. (1992). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra, B. Moses (Editör), *Algebraic thinking, Grades K-12 içinde* (s. 59-70). New York: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Koedinger, K.R. and Nathan, M.J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The Journal of The Learning Sciences*, 13(2), 129-164.

Koklu, O. (2007). *An investigation of college students' covariational reasoning.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. The Florida State University, Department of Middle and Secondary Education.

McEldoon, K.L. and Rittle-Johnson, B. (2010). Assessing elementary students' functional thinking skills: The case of function tables. https://peabody.vanderbilt.edu/docs/pdf/PRO/ATME_McEldoonandRittle-JohnsonPME-NApaper_2010.pdf (Erişim tarihi: 28.11.2017)

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1,2,3,4,5,6,7 ve 8.sınıflar).* MEB Yayınları, Ankara.

Moore, K. C. (2010). Relationships between quantitative reasoning and students' problem solving behaviors. *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (s. 298-313). Portland, OR: Portland State University.

Moore, K.C., Carlson, M.P. and Oehrtman. (2009). The role of quantitative reasoning in solving applied precalculus problems. *Proceedings of the Twelfth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.* Raleigh, NC: North Carolina State University.

Moore, K.C. and Bowling, S.A. (2008). Covariational reasoning and quantification in a college algebra course. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.192.8717&rep=rep1&type=pdf (Erişim tarihi: 20.06.2017)

Moore, K.C., Paoletti, T., Gammaro, J. and Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and graphing in polar coordinates. S. Brown, G. Karakok, K. H. Roh and M. Oehrtman (Editörler), *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* içinde (s. 351-365). Denver, CO: University of Northern Colorado.

Moore, K. C., Paoletti, T. and Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 461-473.

Morehouse, K.E. (2007). Building conceptual understanding and algebraic reasoning in algebra. *Education and Human Development Master's Theses*, 433.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA: NCTM.

Olive, J. and Çağlayan, G. (2008). Learners' difficulties with quantitaties units in algebraic word problems and the teacher's interpretation of those difficulties. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(2), 269-292.

Payne, N.T. (2012). *Tasks that promote functional reasoning in early elementary school students.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. Greensboro: The University of North Carolina.

Pinto, E. and Cañadas, M.C. (2017). Functional thinking and generalisation in third year of primary school. https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0089.pdf (Erişim tarihi: 02.12.2017)

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *PME-NA*, (4), 2-21.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Saldanha, L. A., and Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. S. B. Berensen, K. R. Dawkings, M. Blanton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood, and L. Stiff (Editörler), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 298-303). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Silva, C.T., Tibúrcio, R., Bellemain, F. and Gitirana, V. (2017). Students' covaritational reasoning: A case study using function studium software. https://ictmt13.sciencesconf.org/148638/document (Erişim tarihi: 15. 09. 2017)

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K- 12 curriculum. J. Kilpatrick, W. G. Martin, ve D. Schifter (Editörler), *A Research Companion to Principles and Standards of School Mathematics* içinde (s. 136–150). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. J.J. Kaput, D.W. Carraher ve M.L. Blanton (Editörler), *Algebra in the early grades* içinde (s. 95-132). New York, NY: Lawrance Erlbaum Associates.

Smith, J. and Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. J. J. Kaput, D. W. Carraher ve M. L. Blanton (Editörler.), *Algebra in the early grades* içinde (s. 95-132). New York: Erlbaum.

Stephens, A.C., Isler, I., Marum, T., Blanton, M.L., Knuth, E.J. and Gardiner, A.M. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. https://pdfs.semanticscholar.org/a473/e04eec0372e97a30b4166afc6e052e0e0a84.pdf (Erişim tarihi: 04.12.2017)

Stevens, I.E., Paoletti, T., Moore, K.C., Liang, B. and Hardison, H. (2017). Principles for designing tasks that promote covariational reasoning. https://www.researchgate.net/publication/314906164_Principles_for_Designing_Tasks_that_Promote_Covariational_Reasoning (Erişim tarihi: 15.08.2018)

Strom, A.D. (2006). The role of covariational reasoning in learning and understanding exponential functions. *PME-NA*, 2, 624-630.

Şen Zeytun, A., Çetinkaya, B. ve Erbaş, A.K. (2010). Matematik öğretmenlerinin kovaryasyonel düşünme düzeyleri ve öğrencilerinin kovaryasyonel düşünme becerilerine ilişkin tahminleri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 10(3), 1573-1612.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), 206-223.

Tanışlı, D. ve Köse, N. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının genelleme sürecindeki bilişsel yapıları: Bir öğretim deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 12(44), 255-283.

Thompson, P.W. (1988). Quantitative concepts as a foundation for algebraic reasoning: Sufficiency, necessity and cognitice obstacles. M. Behr, C. Lacampagne, ve M. Wheeler (Editörler), *Proceedings of the annual conference of the international group for the psychology of mathematics education* içinde (s. 163-170). Dekalb, IL: Northern Illinois University.

Thompson, P. W. (1990). *A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebra.* Center for Research in Mathematics and Science Education: San Diego State University.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(3), 165–208.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. G. Harel ve J. Confrey (Editörler), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* içinde (s. 181-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Thompson, P. W. and Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* içinde (s. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn?, B. Moses (Editör), *Algebraic thinking, Grades K-12 içinde* (s. 22-30). New York: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Van de Walle, J.A., Karp, K.S. and Bay-Williams, J.M. (2010). Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally (7th ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Warren, E. and Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: *A case study of early algebra thinking. Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162.

Wilkie, K.J. and Clarke, D. (2014). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. J. Anderson, M. Cavanagh ve A. Prescott (Editörler), *Curriculum in focus: Research guided practice* içinde (s.637-644). Sydney: MERGA.

Windsor, W. and Norton, S. (2011). Developing algebraic thinking: Using a problem solving approach in a primary school context. J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer ve S. Thornton (Editörler), *Mathematics: Traditions and [new] practices* içinde (s.813-820). Sydney: MERGA.

Willoughby, S.S. (1997). Functions from kindergarten through sixth grade, B. Moses (Editör), *Algebraic thinking, Grades K-12 içinde* (s. 197-200). New York:

Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Yaman, H. ve Umay, A. (2013). İlköğretim öğrencilerinin sunum biçimlerine göre matematiksel örüntüleri algılayışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28(1), 405-416.

Yeşildere, S. ve Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (30), 141-153.

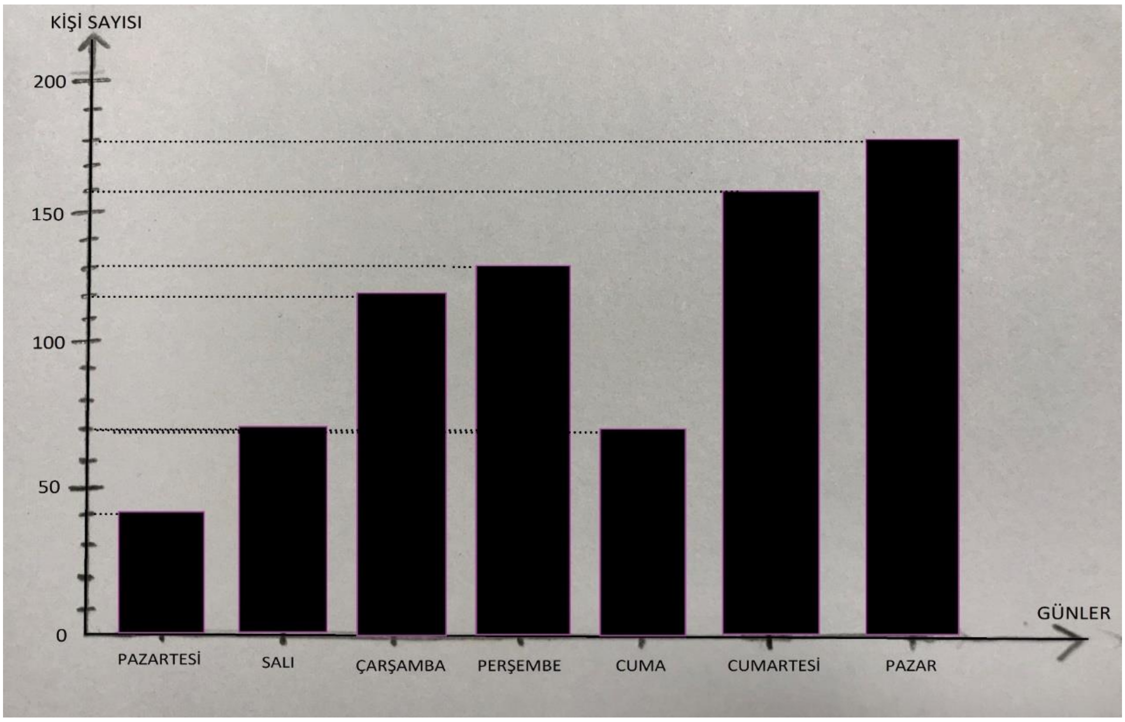
Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* (10). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zazkis, R. and Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, (49), 379-402.

EKLER

EK-1: VERİ TOPLAMA ARACI 1

1) Bir alışveriş merkezindeki mağazaya belirli bir haftada her gün gelen müşterilerin kaydı tutulmuştur ve aşağıdaki sütun grafiği oluşturulmuştur.



a. Her gün için ayrı ayrı gelen müşteri sayısını belirtiniz.

b. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- Mağazaya en fazla hangi gün müşteri gelmiştir?
- Mağazaya en az hangi gün müşteri gelmiştir?
- En az müşteri gelen gündeki müşteri sayısıyla en fazla müşteri gelen gündeki müşteri sayısı arasındaki fark kaçtır?
- Hangi ardışık (peşpeşe) günlerde müşteri sayısındaki artış en azdır?
- Bir hafta boyunca mağazaya kaç kişi gelmiştir?

2) Bugünden birkaç yıl sonra Can 48 yaşında ve Can'ın yaşı kızı Selin'in yaşının 3 katı olacaktır. Selin şu anda 10 yaşında olduğuna göre Can şu anda kaç yaşındadır? (Moore, Carlson ve Oerthman, 2009)

3) Ceyda, Sude ve Tuğçe oyun taşlarıyla oynamaktadır. Sude, Ceyda'dan 6 taş Tuğçe'den 5 taş kazanıyor. Ceyda, Tuğçe'den 3 taş, Sude'den 4 taş kazanıyor. Tuğçe, Ceyda'dan 12 taş Sude'den 2 taş kazanıyor. Tuğçe'nin oyundan önce ve sonraki taşları farkı nedir?

4) Deniz seviyesinden başlayarak bir dağa tırmanış gerçekleşecektir. Dağa tırmanmaya başlarken hava sıcaklığı 10 C iken dağın zirvesinde hava sıcaklığı -6 C'dir. Buna göre;
a.Havanın kaç C değiştiğini hesaplayınız.

b.Dağa her 1000 m çıkışta hava 6,4 C soğuduğuna göre, dağın zirvesi denizden kaç km yüksektedir?

5) Bir fabrikadaki erkek sayısı, kadın sayısının $\frac{5}{8}$ i kadardır. Eğer kadınlar erkeklerden 24 fazla ise bu fabrikada toplam kaç kişi çalışır?

6) Bir laboratuvarda 100 gramlık ürünler 15 dakika sürecek olan kimyasal bir tepkimeye girmiştir. Tepkime sonucunda ürünlerin bir kısmı buharlaşmış ve geriye 20 gram ürün kalmıştır. Tepkimeye giren ürünlerin miktarı tepkime süresini etkilediğine göre; 2 saat sürmesi için kaç gramlık ürünün tepkimeye sokulması gerekir? Geriye kaç gram ürün kalır?

7) Leyla'nın demir paraları iki farklı değere sahiptir. 2 tane küçük demir parası ve 3 tane büyük demir parasının değerleri toplamı 2TL, 2 tane küçük demir parası ve 7 tane büyük demir parasının değerleri toplamı 4TL dir. Leyla'nın demir paralarının değerleri kaçar kuruştur?

8) Bir tavşanın hızı 960 <u>cm/dk</u> dır. Aynı anda tavşan ve kaplumbağa yarışa başladıklarında tavşan parkuru 8 dk da bitirmiştir. Aynı mesafeyi kaplumbağa 3 katı fazla sürede bitirdiğine göre, kaplumbağanın hızı kaç <u>m/dk</u> dır?

9)

$$a.(b+c)= a.b+a.c$$

eşitliği sizin için neyi ifade etmektedir. a, b ve c harfleriyle kast edilen nedir?

10) Aşağıdaki eşitlikte m kaçtır?

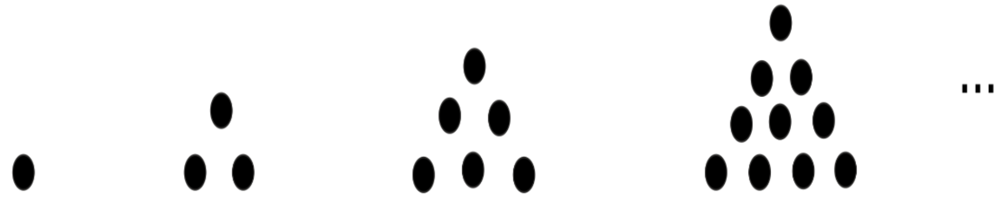
$$36-3.4+(25:5.3)= m. (4^2-12:4)$$

11) Bir ormanda 5 maymun ve bir büyük ağaç bir de küçük ağaç bulunmaktadır. Maymunlar büyük ağaç ve küçük ağacın yanında oyun oynayacaklardır. Ağaçların yanındaki maymun sayılarının olası tüm durumları kaç tanedir?

- Ormanda 123 tane maymun olsaydı, büyük ağaç ve küçük ağaç yanındaki maymun sayılarının olası tüm durumları kaç tane olurdu?
- Ormanda n tane maymun olsaydı, büyük ağaç ve küçük ağaç yanındaki maymun sayılarının olası tüm durumları kaç tane olurdu? (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2010)

EK-2: VERİ TOPLAMA ARACI 2

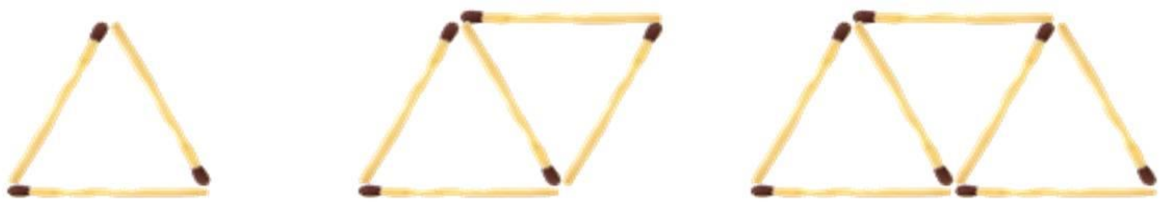
1) Şekilde bir şekil örüntüsünün ilk 4 adımı verilmiştir.



1.adım. 2.adım 3.adım 4.adım

a. Bu örüntünün 6. Adımında kaç nokta vardır?
b. Örüntünün ilerlemesi hakkında ne düşünüyorsunuz?
c. Örüntüde istediğimiz bir adımdaki nokta sayısını bulabilir miyiz?
d. Bu örüntüyle ilgili bir kural bulabilir misiniz?
e. Bulursanız, bu kuralı harfli olarak ifade edebilir misiniz?

2) Aşağıda bir şekil örüntüsünün ilk 3 adımı verilmiştir.

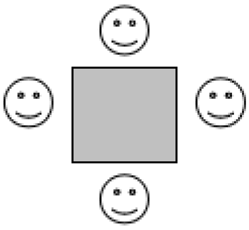


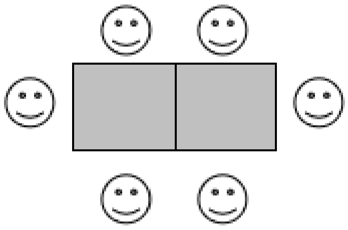
1.adım 2.adım 3.adım

Buna göre;

a. Örüntü nasıl ilerlemektedir? Yorumlayınız.
b. Üçgen sayısı ve kibrit çöpü sayısı nasıl değişmektedir?
c. 10 ve 50 tane üçgen oluşturmak için kaç tane kibrit çöpü kullanmalıyız?
d. Üçgen sayıları için kaç tane kibrit çöpü kullanacağımıza dair bir kural bulabilir miyiz?
e. Bu kuralı bulursak harfli olarak nasıl ifade edilir?

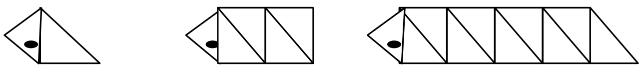
3) Burcu bir doğum günü partisine gitmiştir. Bu partide tekli kare masayı seçerse masanın etrafında 4 kişi oturacaklar, ikili kare masayı seçerse masanın etrafında 6 kişi oturacaklardır.





- Buna göre Burcu 3lü, 4lü ve 5li yan yana kare masa seçerse etrafına sırayla kaçar kişi oturacaktır?
- Kare masa sayısıyla etrafında oturan kişi sayısı arasında bir bağlantı var mıdır?
- Eğer varsa bu ilişkiyi bir değişkenle ifade edebilir misiniz?
- Burcu 15li yan yana kare masa seçerse, etrafında kaç kişi oturacaktır? (Stephens vd., 2012)

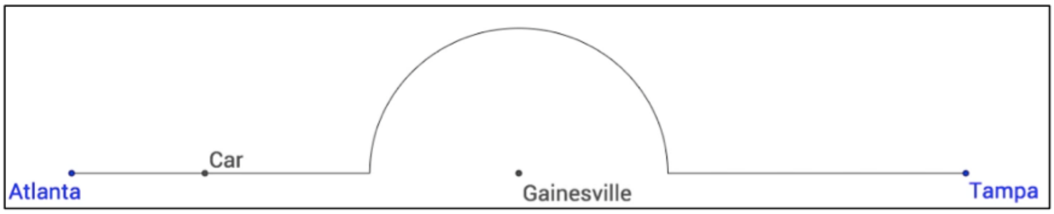
4)



1.gün 2.gün 3.gün

Yukarıdaki şekilde bir yılanın günlük büyümesi görülmektedir.

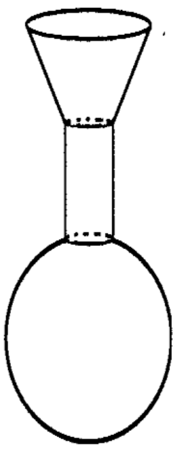
- Yılanın büyümesi konusunda ne düşünüyorsunuz?
- Yılanın 7.günde uzunluğu nasıl olur?
- Yılanın uzunluğu nelere bağlı olarak büyümektedir?
- Yılanın istediğimiz herhangi bir gündeki uzunluğunu bulmak için bir şey düşünebilir miyiz?
- Herhangi bir gündeki uzunluğunu sembolik olarak nasıl ifade ederiz? (Blanton ve Kaput, 2011)



5) Atlanta’dan sabit hızla yola çıkan araç, şekildeki yolu izleyerek Tampa’ya varacaktır. Bu durumda araç Atlanta’dan yola çıkıp giderken aldığı toplam mesafe ile Gainesville şehrine olan mesafesi hakkında yorum yapınız. (Hobson ve Moore, 2017).

6) Aşağıdaki şekildeki boş bir şişeye bir musluktan aynı hızda ve hep aynı miktarda su dolduruluyor.

- Şişe tamamen dolana kadar şişenin içindeki suyun miktarı ve şişedeki suyun yüksekliğinin nasıl değiştiği hakkında yorum yapınız.
- Bu yorumlardan hareketle su doldurulurken şişedeki suyun hacmi ve suyun yüksekliğine ait grafik oluşturunuz. (Carlson, Larsen ve Jacobs, 2001).



7) İki kardeş kare şeklindeki bir odanın karşılıklı köşelerinde dikilmektedir.

a.Birbirlerine doğru aynı ve sabit bir hızla yaklaşıp birbirlerini geçip yine aynı sabit hızla karşı köşelere yürümüşlerdir.

b.Yan yana gelene kadar birbirlerine doğru hızlanarak yaklaşıp, sonra yavaşlayarak karşı köşelere yürümüşlerdir (kardeşlerin birbirine yaklaşma ve uzaklaşma hızları aynıdır).

c.Yan yana gelene kadar birbirlerine doğru yavaşlayarak yaklaşıp, sonra hızlanarak karşı köşelere yürümüşlerdir (kardeşlerin birbirine yaklaşma ve uzaklaşma hızları aynıdır).

Bu 3 durum için;

- İki kardeş arasındaki mesafenin zamanla nasıl değiştiğini yorumlayınız.
- Zaman ve çocukların arasındaki mesafeye ait bir grafik oluşturunuz. (Koklu, 2007)

EK-3: KARAR BELGESİ

Evrak Kayıt Tarihi: 11.05.2018	Protokol No: 55582	Tarih: 31.05.2018

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERÎ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU
KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Yüksek Lisans Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Niceliksel Muhakeme, Kovaryasyonel Muhakeme, Fonksiyonel Düşünme ve Cebirsel Düşünmelerinin İncelenmesi
~~PROJE~~/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Prof. Dr. Tangül UYGUR KABAEL
TEZ YAZARI:	Gamze Nur GÜVENDİREN
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu

Prof.Dr. Coşkun BAYRAK
(Başkan-Eğitim Fak.)

Prof.Dr. T. Volkan YÜZER *(Başkan Yardımcısı-Açıköğretim Fak.)*	**Prof.Dr. Esra CEYHAN** *(Eğitim Fak.)*
Prof.Dr. Münevver ÇAKI *(Güzel Sanatlar Fak.)*	**Prof.Dr. M. Erkan ÜYÜMEZ** *(İkt. ve İdari Bil. Fak.)*
Prof.Dr. Handan DEVECİ *(Eğitim Fak.)*	**Prof.Dr. Emel ŞIKLAR** *(İkt. ve İdari Bil. Fak.)*