ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

EŞLENİKLİK, KUASİDİFERANSİYELLENEBİLME VE KONVEKS OLMAYAN OPTİMİZASYON

Didem TOZKAN

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2014

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Didem Tozkan'ın **"Eşleniklik, Kuasidiferansiyellenebilme ve Konveks Olmayan Optimizasyon"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki **Doktora** tezi 19.06.2014 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK	....
Üye	:	Prof. Dr. Memmedağa MEMMEDLİ	....
Üye	:	Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK	....
Üye	:	Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR	....
Üye	:	Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

EŞLENİKLİK, KUASİDİFERANSİYELLENEBİLME VE KONVEKS OLMAYAN OPTİMİZASYON

Didem TOZKAN

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK

2014, 78 Sayfa

Pozitif homojen fonksiyonlar için Küçük ve ark. [41] tarafından geliştirilen zayıf alt/üst exhauster kavramları zayıf subdiferansiyel/süperdiferansiyel ve exhausterlar arasındaki ilişkiler yardımıyla kurulmuş ve exhausterların özel bir sınıfını oluşturmuşlardır. Aynı çalışmada, zayıf exhausterların kolaylıkla hesaplanabilmesi için Minkowski toplam ve fark işlemleriyle bazı geometrik yöntemler verilmiştir. Zayıf exhausterlar kullanılarak gerekli ve yeterli optimallik koşulları da verilmiştir. Ayrıca, zayıf alt (üst) exhausterların, zayıf subdiferansiyelin (zayıf süperdiferansiyelin) sadece sınır noktalarıyla indekslenerek indirgenebileceği gösterilmiştir [42]. İndirgenmiş zayıf exhausterlarla da optimallik koşulları ifade edilmiştir.

Bu çalışmada, (zayıf) eşlenik fonksiyon ile (zayıf) exhausterlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. İlk olarak, bir fonksiyonun zayıf subdiferansiyeli bu fonksiyonun zayıf eşleniği cinsinden ifade edilmiş ve bu yeni ifade zayıf alt exhausterların da zayıf eşlenik dönüşümle karakterize edilmesini sağlamıştır. Bu karakterizasyon kullanılarak, maksimizasyon problemleri için yeni optimallik koşulları elde edilmiştir. Daha sonra, konveks bir optimizasyon probleminin amaç fonksiyonunun yönlü türevini amaç fonksiyonu kabul eden yeni bir optimizasyon problemi oluşturulmuştur. Bu problemin eşlenik dualinin çözümleri, asıl problemin değer fonksiyonunun üst exhausterına ait kümeler cinsinden ifade edilmiştir. Bununla birlikte, konveks olmayan optimizasyon problemleri de ele alınarak, bunların zayıf Fenchel dual problemlerinin çözümleri zayıf üst exhausterlarla karakterize edilmiştir. Böylelikle, her iki durumda da asıl problemin kritik noktalarını belirleyen yöntemler oluşturulmuştur.

Kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonların da minimizasyonu incelenerek amaç fonksiyonu kuasidiferansiyellenebilir olan bir optimizasyon probleminin, dc-fonksiyon olan yönlü türevini amaç fonksiyonu kabul eden bir DC programlama problemi kurulmuştur. Bu problemin ve DC dualinin çözüm kümeleri için karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca, bu tip optimizasyon problemlerinin zayıf Fenchel dualinin çözümü için de bir karakterizasyon verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Optimizasyon, Eşlenik Duallik, Kuasidiferansiyel, Zayıf Subdiferansiyel, Exhauster, Zayıf Exhauster

ABSTRACT
PhD Thesis
CONJUGACY, QUASIDIFFERENTIABILITY AND NONCONVEX OPTIMIZATION
Didem TOZKAN
Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program
Supervisor: Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK
2014, 78 Pages

Weak lower/upper exhausters of positively homogeneous functions defined by Küçük et al. [41] were constructed via relationships between weak subdifferential/superdifferential and exhausters, and they presented a special class of exhausters. In the same study, some geometric methods to calculate weak exhausters were given by using Minkowski sum and difference operations. Some necessary and sufficient optimality conditions were also given via weak exhausters. In addition, it was shown that weak lower (upper) exhausters can be reduced by indexing them only with the boundary points of weak subdifferential (weak superdifferential) [42]. Some optimality conditions were also expressed via reduced weak exhausters.

In this study, relationships between (weak) conjugate function and (weak) exhausters are investigated. Firstly, weak subdifferential of a function is expressed by means of the weak conjugate of this function and this new expression provides a characterization of weak lower exhausters in terms of weak conjugate function. Some new optimality conditions are obtained for maximization problems by using this characterization. After that, a new optimization problem is constructed which admits the directional derivative of the objective function of a convex optimization problem as the objective function. Solutions of the conjugate dual of this problem are given by means of the sets belonging to any upper exhauster of the value function of the primal problem. Additionally, considering nonconvex optimization problems, solutions of weak Fenchel dual problems of primal problems are represented by weak upper exhausters. In this way, some methods are given to determine stationary points of the primal problems for both cases.

Minimization of quasidifferentiable functions are also investigated and a DC programming problem is constructed which admits the dc-directional derivative of the quasidifferentiable objective function of an optimization problem as the objective function. Some characterizations are obtained to find solutions of this problem and the DC dual of it. In addition, a characterization for solutions of weak Fenchel duals of this type of problems are also given.

Keywords: Optimization, Conjugate Duality, Quasidifferential,
Weak Subdifferential, Exhauster, Weak Exhauster

TEŞEKKÜR

Üzerimde büyük emekleri olan ve Yüksek Lisans öğrenimimden başlayarak bugüne kadar verdikleri sonsuz destekle bu tezin hazırlanmasına büyük katkılarda bulunan değerli hocalarım Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK ve Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK'e, tezin yazımında ve hazırlama aşamasında yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen Yard. Doç. Dr. İlknur ATASEVER GÜVENÇ, Yard. Doç. Dr. Mustafa SOYERTEM, Arş. Gör. Emrah KARAMAN'a ve beni her zaman destekleyen, varlıklarıyla güç veren sevgili eşim Reha TOZKAN ve oğlum Kerem TOZKAN'a, maddi ve manevi destekleriyle beni bugünlere getiren aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Didem TOZKAN
Haziran 2014

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\overline{\mathbb{R}}$	: $\mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ genişletilmiş gerçel uzayı
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu Öklid uzayı
0_n	: $\mathbb{R}^n$ uzayının sıfır vektörü
$\mathbb{B}$	: Kapalı birim Öklidyen yuvar
$B(x^*, c)$	: x^* merkezli c yarıçaplı açık Öklidyen yuvar
$\bar{B}(x^*, c)$	: x^* merkezli c yarıçaplı kapalı Öklidyen yuvar
$\mathrm{int}(A)$	: A kümesinin içi
$\mathrm{cl}(A)$	: A kümesinin kapanışı
$\mathrm{bd}(A)$	: A kümesinin sınırı
$\mathrm{conv}(A)$	: A kümesinin konveks zarfı
$\overline{\mathrm{conv}}(A)$	: A kümesinin kapalı konveks zarfı
$N_A(y^*)$	: A kümesinin y^* noktasındaki normal konisi
$F_A(d)$	: A kümesinin d yönündeki yüzü
$N_{A,\varepsilon}(y^*)$	: A kümesinin y^* noktasındaki ε-normal kümesi
$F_{A,\varepsilon}(d)$	: A kümesinin d yönündeki ε-yüzü
p_A	: A kümesinin destek fonksiyonu
$\min(S, C)$	: S kümesinin C konisine göre minimal elemanlarının kümesi
$\underline{\partial} f(\bar{x})$	: f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki subdiferansiyeli
$\bar{\partial} f(\bar{x})$	: f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki süperdiferansiyeli
$\partial_\varepsilon f(\bar{x})$	: f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki ε-subdiferansiyeli
$\underline{\partial}^w f(\bar{x})$	: f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki zayıf subdiferansiyeli
$\bar{\partial}^w f(\bar{x})$	: f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki zayıf süperdiferansiyeli
$f'(x; g)$	: f fonksiyonunun x noktasındaki g yönündeki yönlü türevi
$f_D^{\downarrow}(x; g)$	: f fonksiyonunun x noktasındaki g yönündeki Dini alt türevi
$f_D^{\uparrow}(x; g)$	: f fonksiyonunun x noktasındaki g yönündeki Dini üst türevi
$f_H^{\downarrow}(x; g)$	: f fonksiyonunun x noktasındaki g yönündeki Hadamard alt türevi
$f_H^{\uparrow}(x; g)$	: f fonksiyonunun x noktasındaki g yönündeki Hadamard üst türevi
$A + B$	: A ile B kümelerinin cebirsel toplamı
$A \dot{+} B$	: A ile B kümelerinin Minkowski toplamı
$A \dot{-} B$	: A ile B kümelerinin Minkowski farkı
$\mathcal{B}(X)$	: X'in boştan farklı, kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi
$\mathcal{K}(X)$	: X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi
$(\mathcal{B}^2(X)_{/\sim}, \leqslant)$	: X uzayının kapalı, sınırlı, konveks kümelerinin MRH örgüsü
$(\mathcal{K}^2(X)_{/\sim}, \leqslant)$	: X uzayının kompakt, konveks kümelerinin MRH örgüsü

$Df(x)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki kuasidiferansiyeli
E^*	:	Üst exhauster
E_*	:	Alt exhauster
E^w	:	Zayıf üst exhauster
E_w	:	Zayıf alt exhauster
f^*	:	f fonksiyonunun eşleniği
f^{**}	:	f fonksiyonunun bieşleniği
f^w	:	f fonksiyonunun zayıf eşleniği
f^{ww}	:	f fonksiyonunun zayıf bieşleniği
(P)	:	Asıl (primal) problem
$(P)^*$	:	(P) asıl probleminin eşlenik duali
$(P)^w$	:	(P) asıl probleminin zayıf eşlenik duali
(DCP)	:	Bir DC-programlama problemi
$(DDCP)$	:	(DCP) DC-programlama probleminin eşlenik duali
$\mathrm{Inf}P$	:	(P) probleminin infimum değeri
$\mathrm{Sup}P^*$	:	$(P)^*$ probleminin supremum değeri

1 GİRİŞ

Bir fonksiyonun kısıtsız (global) ya da kısıtlı anlamda minimum ya da maksimumunun bulunmasını amaçlayan optimizasyon; bilgisayar bilimleri, mühendislik, uygulamalı matematik, iktisat, işletme ve sağlık bilimleri gibi bilim dallarında gerçek hayata dair bir çok problemin çözümünün bulunmasında büyük bir rol oynar. Konveks ya da konveks olmayan optimizasyonda bir çok optimallik koşulu yönlü türev ve genelleştirmeleri cinsinden verildiğinden, yönlü türev kavramı bu alanda oldukça önemli bir araçtır. Ancak, bu optimallik koşullarının kontrol edilebilmesinde yönlü türevin yetersiz kaldığı bazı durumlar da vardır. Dolayısıyla, bir çok araştırmacı türevlenebilme fikrini genelleştirerek, düzgün olmayan (nonsmooth) optimizasyon problemleri için bazı küme değerli araçlar ortaya koymuşlardır. Bu araçların en önemlilerinden biri Rockafellar [1] ve Moreau [2] tarafından tanımlanan subdiferansiyeldir. Bu kavram, konveks analizin temel öğelerinden biridir ve konveks fonksiyonların optimizasyonunda kullanışlı optimallik koşullarının verilmesinde önemli bir araçtır. Öte yandan, subdiferansiyel bir fonksiyonun epigrafını sınır noktalarında destekleyen hiperdüzlemlere karşılık gelen subgradientlerden oluşur. Ancak konveks olmayan fonksiyonlar için bu hiperdüzlemlerin varlığı garanti edilemez. Dolayısıyla, konveks olmayan fonksiyonlar için subdiferansiyelin çeşitli genelleştirmeleri araştırılmıştır. Bu araştırmalar sonucunda elde edilen zayıf subdiferansiyel, kuasidiferansiyel ve Clarke subdiferansiyel [3,4] gibi kavramlar bu genelleştirmelerin bilinen önemli örnekleridir.

Azimov ve Kasimov [5] tarafından geliştirilen zayıf subdiferansiyel kavramı, bir fonksiyonun epigrafını konik yüzeylerle destekleme fikrine dayanmaktadır. Gasimov [6], destek konik yüzeyleri kullanarak konveks olmayan optimizasyon problemlerinin çözümleri için bazı algoritmalar önermiştir. Ayrıca, Azimov ve Gasimov [7] çalışmasında zayıf subdiferansiyel yardımıyla konveks olmayan optimizasyon problemleri için bazı optimallik koşulları vermişlerdir. Kasimbeyli ve Mammadov [8], bir fonksiyonun yönlü türevini zayıf subdiferansiyel cinsinden hesaplamışlardır. Bu da zayıf subdiferansiyelin konveks olmayan optimizasyonda önemli bir role sahip olduğunun bir göstergesidir.

Diferansiyellenemeyen bir fonksiyona diferansiyellenebilir fonksiyonlarla yaklaşılabilir ancak bu yaklaşımlarla fonksiyonun optimal değerinin bulunabilmesi için uygun optimallik koşulları elde edilemeyebilir. Dolayısıyla düzgün olmayan (nonsmooth) optimizasyon problemlerinin çözümleri araştırılırken yeni analitik araçlara ihtiyaç duyulmuştur. 1980'lerin başında Demyanov ve Rubinov [9] kuasidiferansiyel kavramını geliştirmişlerdir. Kuasidiferansiyel, fonksiyonun düzgün olduğu durumda gradienti, konveks olduğu durumda da subdiferansiyeli veren daha genel bir kavramdır. Kuasidiferansiyelin hesap kuralları [10] çalışmasında belirlenmiş ve [11–13] çalışmalarında önemli özellikleri incelenerek, optimizasyon problemleri için bazı optimallik koşulları elde edilmiştir. Öte yandan, yönlü türevlenebilir ve yönlü türevi sürekli olan fonksiyonların yönlü türevine, kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyonun yönlü türeviyle yeterince yaklaşılabilir. Üstelik, Lipschitz ve yönlü türevlenebilir olan fonksiyonların tamamı bu özelliğe sahip olduğundan [11], kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonlar diferansiyellenemeyen fonksiyonlar içinde oldukça belirgin bir sınıfı oluştururlar. Dolayısıyla, kuasidiferansiyellenebilme birinci derece yaklaşımlar açısından kullanışlı bir kavramdır. Ek olarak, Kuasidiferansiyel Analiz kendi içinde pratik hesaplama kurallarına sahiptir ve bu durum kuasidiferansiyeli hesaplama açısından avantajlı kılar. Öte yandan, bir fonksiyon bir noktada kuasidiferansiyellenebilir ise, fonksiyonun bu noktadaki yönlü türevi kompakt, konveks kümelerin bir çifti olan kuasidiferansiyel ile tam olarak belirlidir, ancak kuasidiferansiyeli oluşturan bu küme çifti tek değildir. Urbański, Pallaschke ve Grzybowski kompakt, konveks küme çiftleri üzerinde bir denklik bağıntısı ve bu bağıntıya göre oluşan denklik sınıflarının üzerinde bir sıralama oluşturarak Minkowski-Radström-Hörmander (MRH) Örgüsü'nü elde etmiş, bu örgüye ait denklik sınıflarıyla kuasidiferansiyelin ilişkisini kurarak bu denklik sınıflarının minimal elemanları üzerinde çalışmışlardır [14–21]. Bu çalışmalar, kompakt, konveks küme çiftlerinin MRH örgüsüne ait denklik sınıflarıyla ifade edilen kuasidiferansiyelin minimal temsilcilerinin elde edilmesinde kullanılmıştır.

Konveks olmayan optimizasyonda yeni bir kavram olan ve optimalliğe geometrik bir bakış açısı kazandıran exhausterlar, ilk olarak Demyanov [22] tarafından tanımlanmıştır. Exhausterlar, Minkowski duallik ve Pschenichnyi'nin [23] oluşturduğu üstten konveks ve alttan konkav yaklaşımların exhaustive aileleri kullanılarak elde edilmiştir. Bilindiği üzere, yönlü türev ve Dini, Hadamard, Clarke ve Michel-Penot türevler gibi tüm genelleştirilmiş yönlü türevler yönün pozitif homojen fonksiyonlarıdır [12]. Dolayısıyla, pozitif homojen fonksiyonların üst ve alt exhausterları, bir fonksiyonun kısıtlı ya da kısıtsız optimizasyonu için bazı optimallik koşullarının verilmesinde, en dik iniş (çıkış) yönlerinin belirlenebilmesinde kullanılmıştır [24, 25]. [26–28] çalışmalarında, exhausterlarla bazı genelleştirilmiş subdiferansiyeller arasında çeşitli ilişkiler de kurulmuştur.

Konveks olmayan optimizasyon açısından diğer önemli kavramlar eşlenik (conjugate) fonksiyonu ve eşlenik-dualliktir. Bilindiği gibi, Klasik Analiz'de türevlenebilir bir fonksiyonunun gradienti çok değişkenli vektör değerli bir dönüşümdür. Bu dönüşümün varsa tersine Legendre dönüşümü denir. Eşlenik dönüşüm kavramı da Legendre dönüşümünün bir genelleştirmesidir. Bu kavram, bir çok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. En önemli kullanım alanlarından biri, bir optimizasyon problemine (primal/asıl problem) denk olan ve çoğunlukla asıl problemden daha kolay çözülebilen ve "dual problem" olarak adlandırılan bir başka problem karşılık getirmektir. Bu yaklaşım, verilen bir optimizasyon probleminin özel bir sarsım (pertürbasyon) fonksiyonunun eşleniği kullanılarak dual problem elde edilmesine dayanmaktadır. Bu tür yaklaşımlar ilk olarak, Fenchel [29] ve Rockafellar [1] tarafından sonlu boyutlu konveks optimizasyon problemleri için verilmiş; daha sonra Moreau [2,30] tarafından sonsuz boyutlu durumlara genişletilmiştir. Duallik teorisinin en önemli iki avantajı; kısıtlı optimallik problemlerinin kısıtsız optimallik problemlerine dönüştürülmesi ve optimallik için gerekli ve yeterli koşulların daha kolay elde edilip, kontrol edilebilmesidir. En yaygın olarak kullanılan duallik yaklaşımları Lagrange Duallik, Fenchel Duallik, Fenchel-Lagrange Duallik, Weir Mond ve Wolfe Dualliktir. Ek olarak, Azimov ve Kasimov [5], bir fonksiyonun epigrafını konik yüzeylerle destekleme fikrini eşleniklik teorisine taşıyarak, zayıf eşlenik dönüşüm kavramını oluşturmuşlardır. Aynı çalışmada, zayıf eşlenik dönüşüm ve zayıf subdiferansiyeli kullanarak konveks olmayan optimizasyon problemlerinin zayıf eşlenik-dualini elde etmişler ve zayıf dualliğin sağlandığını göstermişlerdir. Üstelik, bazı koşullar altında güçlü dualliğin de sağlandığını kanıtlayarak duallik boşluğu bulunmayan bir eşlenik duallik yaklaşımı elde etmişlerdir. Buna ek olarak [31] çalışmasında özel bir sarsım dönüşümü kullanılarak konveks olmayan optimizasyon problemleri için augmented Lagrange dual problem ve bu probleme bağlı güçlü duallik koşulları verilmiştir. Küçük ve ark. [32], zayıf eşlenik dönüşümleri ve Fenchel ve Fenchel-Lagrange sarsım fonksiyonlarını kullanarak konveks olmayan optimizasyon problemleri için zayıf Fenchel ve zayıf Fenchel-Lagrange dual problemleri oluşturarak gerekli ve yeterli optimallik koşulları vermişlerdir.

Öncelikle lineer programlama ve konveks optimizasyonda kullanılan eşlenik-duallik, daha sonra vektör ve küme-değerli optimizasyonda da yaygın biçimde kullanılmıştır. Bu çalışmaların en önemlileri; Tanino'nun [33,34], Song'un [35], Luc'un [36], Azimov ve Gasimov'un [5, 37], J.Jahn'ın [38] ve Goh'un [39] çalışmalarıdır. Bunlara ek olarak, Küçük ve ark. [40] konveks olmayan optimizasyon problemleri için küme değerli dönüşümlerin zayıf eşlenik dönüşümlerini tanımlamışlar ve bu kavram yardımıyla konveks olmayan vektör optimizasyon problemleri için zayıf dual problem oluşturarak, problemin güçlü dualliği için gerekli ve yeterli koşullar vermişlerdir. Aynı zamanda, bu dual problemi kurmak için özel olarak Fenchel sarsım fonsiyonunu kullanarak, konveks olmayan kısıtlı vektör optimizasyon problemleri için zayıf Fenchel dual problemi oluşturmuşlardır.

Pozitif homojen fonksiyonların exhausterları ve zayıf subdiferansiyelleri arasındaki ilişkiden yararlanarak, Küçük ve ark. [41] zayıf exhauster tanımı geliştirmişlerdir. Bir pozitif homojen fonksiyonun, sıfırdaki zayıf subdiferansiyeli kullanılarak kurulan zayıf alt exhausterlar, fonksiyonun sıfırdaki her bir zayıf subgradientine karşılık gelen kapalı yuvarlarla oluşturulmuştur. Böylelikle, zayıf subdiferansiyele bağlı olarak tek türlü elde edilen ve konveks olmayan pozitif homojen fonksiyonlar için hesaplanması herhangi bir exhausterın hesaplanmasından daha kolay ve açık olan bir alt exhauster sınıfı elde etmişlerdir. Aynı çalışmada, Minkowski toplam ve fark işlemleri kullanılarak, bazı fonksiyon sınıflarına ait fonksiyonların zayıf subdiferansiyellerinin ve böylece zayıf alt exhausterlarının hesaplanması için geometrik yöntemler verilmiştir. Zayıf subdiferansiyel ve zayıf alt exhausterlara ilişkin elde edilmiş olan tüm sonuçların, zayıf süperdiferansiyel ve zayıf üst exhausterlar için de geçerli olduğu yine aynı çalışmada kanıtlanmıştır. Küçük ve ark. [42], zayıf alt (üst) exhausterların, zayıf subdiferansiyelin (zayıf süperdiferansiyelin) yalnızca sınır noktaları kullanılarak indirgenebileceği kanıtlanmış ve oluşturulan bu yeni exhausterlar, sınır-indirgenmiş zayıf alt/üst exhausterlar biçiminde adlandırılmıştır. Ek olarak, sınır-indirgenmiş zayıf alt/üst exhausterlar kullanılarak, bir fonksiyonun global ya da yerel maksimum/maksimumlarının elde edilebilmesi için optimallik koşulları verilmiştir. Aynı çalışmada, zayıf subdiferansiyelin (zayıf süperdiferansiyelin) bazı özel alt kümeleri kullanılarak, daha etkin indirgeme teknikleri ve bunlar yardımıyla optimallik koşulları da elde edilmiştir.

Bu çalışmada, bir fonksiyonun eşleniği ile exhausterlar arasındaki ilişki araştırılmıştır. Bu ilişki iki yaklaşımla incelenmiştir: İlkinde, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir fonksiyonun sıfırdaki zayıf subdiferansiyeli ile bu fonksiyonun zayıf eşleniği arasındaki ilişkiden yararlanılarak, zayıf alt exhausterların yeni bir ifadesi elde edilmiş ve bu ifade kullanılarak maksimizasyon problemleri için yeni optimallik koşulları elde edilmiştir. Diğer yaklaşımda ise, konveks bir optimizasyon probleminin amaç fonksiyonunun pozitif homojen olan yönlü türevini amaç fonksiyonu kabul eden yeni bir optimizasyon problemi oluşturulmuştur.

Bu yeni optimizasyon probleminin klasik eşleniklik kavramına dayanarak oluşturulan dual probleminin çözümleri, asıl problemin değer fonksiyonunun exhausterları cinsinden elde edilmiştir. Böylece, asıl probleminin kritik noktalarına ulaşılmıştır. Daha sonra, amaç fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı olan konveks olmayan optimizasyon problemi ele alınarak, bunun zayıf eşlenik fonksiyonu ile oluşturulan dual problemin çözümü, zayıf exhausterlar cinsinden elde edilmiştir. Sonuç olarak, zayıf exhausterlar kullanılarak hem optimallik için gerekli ve yeterli koşullar bulunmuş, hem de dual çözümün bulunabilmesi için (zayıf) exhausterlar yardımıyla yeni bir yöntem elde edilmiştir.

Ayrıca, amaç fonksiyonu kuasidiferansiyellenebilir olan bir optimizasyon probleminin, dc-fonksiyon olan yönlü türevini amaç fonksiyonu kabul eden yeni bir optimizasyon problemi kurulmuştur. Bu problemin de bir DC programlama problemi olduğu görülmüştür. Bu problemin veya dualinin çözümlerinin varlığı araştırılarak, asıl ve dual çözüm kümeleri için birer karakterizasyon verilmiştir. Ek olarak, kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonların minimizasyonu, zayıf Fenchel eşlenik-duallik açısından da incelenmiş ve bu problemlerin zayıf dualinin çözüm kümesi için de bir karakterizasyon verilmiştir.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışma için gerekli olan temel tanımlar ve kanıtsız olarak bazı teoremler hatırlatılacaktır.

$X = (X, \tau)$ bir gerçel topolojik vektör uzayı, A ve B, X uzayının boştan farklı alt kümeleri olsun.

$$A\dot{+}B := \mathrm{cl}(A+B) = \mathrm{cl}\{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye A ile B kümelerinin Minkowski toplamı,

$$A\dot{-}B := \{x \in X \mid B + x \subseteq A\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye de A ile B kümelerinin Minkowski farkı denir.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, konveks bir küme olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$p_A(x) := \max_{a\in A}\langle a, x\rangle$$

ile tanımlanan $p_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna A'nın destek fonksiyonu denir.

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. her $g \in \mathbb{R}^n$ ve her $\lambda \geq 0$ için $h(\lambda g) = \lambda h(g)$ oluyorsa h fonksiyonuna birinci mertebeden pozitif homojen (p.h.) fonksiyon denir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olmak üzere, $\bar{B}(x, r)$, x merkezli r yarıçaplı kapalı Öklidyen yuvarı ve $\mathbb{B}$ kapalı birim Öklidyen yuvarı gösterecektir.

2.1 Bazı Genelleştirilmiş Türevler: Subdiferansiyel, Zayıf Subdiferansiyel ve Kuasidiferansiyel

Tanım 2.1.1. [1] *$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ bir konveks fonksiyon olsun.*

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

eşitsizliğini sağlayan bir x^* vektörüne f'nin $\bar{x}$ noktasındaki bir subgradienti denir. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki tüm subgradientlerinin kümesine f'nin $\bar{x}$ noktasındaki subdiferansiyeli denir ve $\partial f(\bar{x})$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. [1] $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *bir konkav fonksiyon olsun.*

$$f(x) \leq f(\bar{x}) + \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

eşitsizliğini sağlayan bir x^* vektörüne f'nin $\bar{x}$ noktasındaki bir süpergradienti denir. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki tüm süpergradientlerinin kümesine f'nin $\bar{x}$ noktasındaki süperdiferansiyeli denir.

Bu çalışma boyunca, f'nin $\bar{x}$ noktasındaki subdiferansiyeli $\underline{\partial} f(\bar{x})$ sembolü ile f'nin $\bar{x}$ noktasındaki süperdiferansiyeli $\bar{\partial} f(\bar{x})$ sembolü ile gösterilecektir.

Subdiferansiyel kavramının bir genellemesi olan ε-subdiferansiyelin tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.3. [43] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu verilsin ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\langle x^*, x - \bar{x}\rangle - \varepsilon \leq f(x) - f(\bar{x})$$

koşulunu sağlayan bir $x^* \in \mathbb{R}^n$ vektörüne f'nin $\bar{x}$ noktasındaki bir ε-subgradienti denir. f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki tüm ε-subgradientlerinin oluşturduğu kümeye f'nin $\bar{x}$ noktasındaki ε-subdiferansiyeli denir ve $\partial_\varepsilon f(\bar{x})$ ile gösterilir.

Uyarı 2.1.4. *ε-subdiferansiyel ile subdiferansiyel arasında aşağıdaki ilişki verilebilir* [43]*:*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}).$$

Aşağıda, bir kümenin bir noktasındaki normal konisinin ve bir yöndeki yüzünün tanımları verilmiştir [44].

Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verildiğinde bir $y^* \in A$ için

$$N_A(y^*) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - y^*, s\rangle \leq 0, \ \forall y \in A\}$$

ile tanımlı kümeye A'nın y^*'daki normal konisi denir. Bir $d \in \mathbb{R}^n$ yönü için

$$F_A(d) = \{y \in A \mid \max_{x\in A}\langle x, d\rangle = \langle y, d\rangle\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye A'nın d yönündeki yüzü adı verilir.

Bu kümelerin ε-subdiferansiyel ile bağlantılı olarak genelleştirmeleri aşağıdaki şekilde verilmiştir [43]:

$$N_{A,\varepsilon}(y^*) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - y^*, s\rangle \leq \varepsilon,\ \forall y \in A\}$$

kümesine A'nın y^* noktasındaki ε-normal kümesi;

$$F_{A,\varepsilon}(d) = \{y \in A \mid \max_{x \in A}\langle x, d\rangle - \varepsilon \leq \langle y, d\rangle\}$$

kümesine de A'nın d yönündeki ε-yüzü denir. A kümesinin destek fonksiyonu kullanılarak, A'nın y^* noktasındaki ε-normal kümesinin

$$N_{A,\varepsilon}(y^*) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid p_A(s) \leq \langle s, y^*\rangle + \varepsilon\} \tag{2.1}$$

biçiminde ve A'nın d yönündeki ε-yüzünün

$$F_{A,\varepsilon}(d) = \{y \in A \mid p_A(d) \leq \langle y, d\rangle + \varepsilon\} \tag{2.2}$$

biçiminde yazılabilecekleri tanımlarından görülebilir.

Tanım 2.1.5. [8] $(X, \|\cdot\|)$ *bir gerçel normlu uzay,* X^**,* X*'in topolojik duali olsun.* $f : X \to (-\infty, +\infty]$ *fonksiyonu verilsin ve* $\bar{x} \in X$*,* $f(\bar{x})$ *sonlu olacak şekilde bir nokta olsun.* $\langle x^*, \cdot\rangle$ X^* *dual uzayında bir lineer dönüşüm olmak üzere*

$$-c\|x - \bar{x}\| + \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) \quad \forall \quad x \in X$$

eşitsizliğini sağlayan bir $(x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ *ikilisine* f*'nin* $\bar{x}$ *noktasındaki bir zayıf subgradienti denir.* f*'nin* $\bar{x}$ *noktasındaki tüm zayıf subgradientlerinin kümesine* f*'nin* $\bar{x}$ *noktasındaki zayıf subdiferansiyeli denir ve* $\partial^w f(\bar{x})$ *ile gösterilir.* $\partial^w f(\bar{x}) \neq \emptyset$ *ise* f*'ye* $\bar{x}$ *noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir denir.*

Bu çalışmada, f'nin $\bar{x}$ noktasındaki zayıf subdiferansiyeli $\underline{\partial}^w f(\bar{x})$ sembolü ile gösterilecektir.

Teorem 2.1.6. [8] *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir* p.h. *fonksiyon olsun. f alttan yarı sürekli ise f, 0_n'da zayıf subdiferansiyellenebilirdir ve $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid normu olmak üzere $\forall g \in \mathbb{R}^n$ için*

$$f(g) = \sup\{\langle x^*, g\rangle - c\|g\| \mid (x^*, c) \in \underline{\partial}^w f(0_n)\}$$

dir.

Zayıf subdiferansiyelin tanımlanışına paralel olarak, bir fonksiyonun epigrafını üstten konveks konik yüzeylerle desteklemeye dayanan zayıf süperdiferansiyel kavramı verilsin.

Tanım 2.1.7. [41] *$(X, \|\cdot\|)$ bir gerçel normlu uzay, X^*, X'in topolojik duali olsun. $f : X \to [-\infty, +\infty)$ fonksiyonu verilsin ve $\bar{x} \in X$ $f(\bar{x})$ sonlu olacak şekilde bir nokta olsun.*

$$c\|x - \bar{x}\| + \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \geq f(x) - f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in X$$

eşitsizliğini sağlayan bir $(x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ ikilisine f'nin $\bar{x}$ noktasındaki bir zayıf süpergradienti denir. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki tüm zayıf süpergradientlerinin kümesine f'nin $\bar{x}$ noktasındaki zayıf süperdiferansiyeli denir ve $\bar{\partial}^w f(\bar{x})$ ile gösterilir. $\bar{\partial}^w f(\bar{x}) \neq \emptyset$ ise f fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında zayıf süperdiferansiyellenebilirdir denir.

Aşağıdaki teorem, p.h. ve üstten yarı sürekli fonksiyonların, sıfırdaki zayıf süpergradientlerine karşılık gelen sublineer fonksiyonların infimumu olarak yazılabileceğini göstermektedir.

Teorem 2.1.8. [41] *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon olsun. f üstten yarı sürekli ise 0_n'da zayıf süperdiferansiyellenebilirdir ve her bir $g \in \mathbb{R}^n$ için*

$$f(g) = \inf\{\langle x^*, g\rangle + c\|g\| \mid (x^*, c) \in \bar{\partial}^w f(0_n)\}$$

dir.

Aşağıda, bir fonksiyonun yönlü türevi ve bu kavramın bazı genelleştirmeleri hatırlatılmıştır.

Tanım 2.1.9. [38] *X bir gerçel vektör uzayı, $\Omega \subseteq X$ bir açık küme olsun ve $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $x \in \Omega$ ve $g \in X$ olmak üzere*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tg) - f(x)}{t}$$

limiti varsa bu değere f'nin x noktasındaki g yönündeki yönlü türevi denir ve $f'(x;g)$ ile gösterilir. Bu limit her $g \in X$ yönü için varsa f'ye x noktasında yönlü türevlenebilirdir denir.

Tanım 2.1.10. [12] *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x \in X$ noktası ve $g \in \mathbb{R}^n$ yönü verilsin. Buna göre*

(a)

$$f_D^{\uparrow}(x;g) = \limsup_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{\alpha}[f(x+\alpha g) - f(x)]$$

değerine f'nin x noktasında g yönündeki Dini üst türevi denir.

(b)

$$f_D^{\downarrow}(x;g) = \liminf_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{\alpha}[f(x+\alpha g) - f(x)]$$

değerine f'nin x noktasında g yönündeki Dini alt türevi denir.

(c)

$$f_H^{\uparrow}(x;g) = \limsup_{[\alpha, g'] \to [0^+, g]} \frac{1}{\alpha}[f(x+\alpha g') - f(x)]$$

değerine f'nin x noktasında g yönündeki Hadamard üst türevi denir.

(d)

$$f_H^{\downarrow}(x;g) = \liminf_{[\alpha, g'] \to [0^+, g]} \frac{1}{\alpha}[f(x+\alpha g') - f(x)]$$

değerine f'nin x noktasında g yönündeki Hadamard alt türevi denir.

Uyarı 2.1.11. *Yukarıda tanımları verilen yönlü türev ve diğer genelleştirilmiş türevler, yönün pozitif homojen fonksiyonlarıdır.*

Subdiferansiyellenebilir fonksiyonların önemli bir genellemesi olan kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfı aşağıda hatırlatılmıştır.

Tanım 2.1.12. [13] $(X, \|\cdot\|)$ *bir gerçel normlu uzay,* X^*, X*'in topolojik duali,* $\Omega \subseteq X$ *açık bir küme ve* $x \in \Omega$ *olsun. Bir* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* x *noktasında yönlü türevlenebilir ve* $\underline{\partial} f(x)$, $\overline{\partial} f(x)$, X^**'ın konveks zayıf*-kompakt alt kümeleri olmak üzere,* f*'nin* x *noktasındaki yönlü türevi her* $g \in X$ *için*

$$f'(x; g) = \max_{u \in \underline{\partial} f(x)} u(g) + \min_{v \in \overline{\partial} f(x)} v(g)$$

biçiminde yazılabiliyorsa f*,* x *noktasında kuasidiferansiyellenebilirdir denir.* f*'nin* x *noktasındaki kuasidiferansiyeli* $(\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x))$ *küme çiftidir ve* $Df(x)$ *ile gösterilir.*

Uyarı 2.1.13. f *fonksiyonu* $x \in \Omega$ *noktasında kuasidiferansiyellenebilir ise* f*'nin* x*'teki yönlü türevinin her* $g \in X$ *için*

$$f'(x; g) = \max_{u \in \underline{\partial} f(x)} u(g) - \max_{v \in -\overline{\partial} f(x)} v(g)$$

şeklinde ifade edilebileceği açıktır. Bu çalışmada, ileride tanıtılacak olan MRH uzayı ile daha uyumlu olan

$$f'(x; g) = \max_{u \in \underline{\partial} f(x)} u(g) - \max_{v \in \overline{\partial} f(x)} v(g)$$

biçimindeki ifade kabul edilmiştir. Bu kabule göre, f*'nin* x*'teki kuasidiferansiyeli* $(\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x))$ *küme çiftidir.*

Bir f fonksiyonu bir x noktasında kuasidiferansiyellenebilir ise f'nin bu noktadaki yönlü türevi bir $(\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x))$ küme çiftiyle tam olarak belirlenebilir, ancak bu küme çifti tek değildir. Örneğin, f fonksiyonu x'te kuasidiferansiyellenebilir ve $Df(x) = (\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x))$ ise $\bar{B}(0_{X^*}, \varepsilon) = \{\ell \in X^* \mid \|\ell\|_{X^*} \leq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$(\underline{\partial} f(x) + \bar{B}(0_{X^*}, \varepsilon), \overline{\partial} f(x) + \bar{B}(0_{X^*}, \varepsilon))$$

çifti de f'nin x'teki bir kuasidiferansiyelidir. Aslında, bir fonksiyonun kuasidiferansiyeli zayıf*-kompakt konveks kümelerin sıralı çiftlerinin bir denklik sınıfıdır ve bu sınıfı veren denklik bağıntısının yapısı aşağıda verilecektir.

Kompakt konveks küme çiftlerinin minimallerinin karakterize edilmesi problemi, kuasidiferansiyelin tek türlü tanımlı olmaması nedeniyle Kuasidiferansiyel Analiz içinde ortaya çıkmıştır. Pallaschke ve Urbański [21] kompakt konveks kümelerin minimal çiftlerinin bazı karakterizasyonlarını vermişlerdir. Minimal kompakt, konveks küme çiftlerinin araştırmalarında kullanılan temel yapı; kompakt, konveks küme çiftlerinin oluşturduğu gerçel topolojik vektör uzayı üzerindeki Minkowski-Rådström-Hörmander örgüsüdür. Aşağıda, bu örgü hatırlatılmıştır [21].

X bir gerçel normlu uzay ve $\mathcal{B}(X)$, X'in boştan farklı, kapalı, sınırlı, konveks alt kümelerinin ailesi olsun. $\mathcal{B}^2(X) := B(X) \times B(X)$ olmak üzere, $B^2(X)$ üzerinde $(A,B),(C,D) \in B^2(X)$ için

$$(A,B) \sim (C,D) \iff A \dot{+} D = B \dot{+} C$$

biçiminde verilen bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre, herhangi bir $(A,B) \in \mathcal{B}^2(X)$ çiftini içeren denklik sınıfı $[A,B] \in \mathcal{B}^2(X)_{/\sim}$ ile gösterilir.

Pinsker [45], $\mathcal{B}^2(X)_{/\sim}$ üzerinde

$$[A,B] \leqslant [C,D] \iff A \dot{+} D \subseteq B \dot{+} C$$

sıralamasını vermiştir. Ayrıca, $\leqslant$ sıralamasına göre $\mathcal{B}^2(X)_{/\sim}$ ailesine ait iki elemanın supremumunun var olduğunu ve $A \vee B = \operatorname{conv}(A \cup B)$ olmak üzere

$$\sup\{[A,B],[C,D]\} = [(A \dot{+} D) \vee (B \dot{+} C), B \dot{+} D]$$

ifadesine eşit olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde, iki elemanın infimumu

$$\inf\{[A,B],[C,D]\} = [A \dot{+} C, (A \dot{+} D) \vee (B \dot{+} C)]$$

biçiminde ifade edilmiştir.

Sonuç olarak, $(\mathcal{B}^2(X)_{/\sim}, \leqslant)$ kısmi sıralı kümesi bir örgüdür ve bu örgüye, kapalı, sınırlı, konveks kümelerin Minkowski-Rådström-Hörmander (MRH) örgüsü denir. $\mathcal{K}(X)$, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi olsun. $X = \mathbb{R}^n$ alınırsa $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ olduğu ve böylece $\mathbb{R}^n$'in kompakt, konveks kümelerinin MRH örgüsünün elde edileceği açıktır. Üstelik, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir fonksiyonun bir noktadaki kuasidiferansiyeli, $\mathbb{R}^n$'deki kompakt, konveks kümelerin MRH örgüsüne ait bir denklik sınıfıdır.

2.2 Eşleniklik Kavramı ve Eşlenik Duallik

Klasik anlamda bir fonksiyonun eşleniği Fenchel [29] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra eşlenik fonksiyonun hesaplanması ve temel özellikleri Moreau [2], Brondsted [46] tarafından incelenmiş ve Rockafellar'ın çalışmaları ile [1, 47] bu konu hakkındaki araştırmalar hız kazanmıştır. Ek olarak, bir fonksiyonun eşleniği kullanılarak bir optimizasyon probleminin dual problemi oluşturulmuş [48] ve asıl optimizasyon problemi için zayıf ve güçlü duallik teoremleri elde edilmiştir. Şimdi, bir fonksiyonun eşleniğinin tanımı ve dual problemin kuruluşu hatırlatılsın.

2.2.1 Eşleniklik ve Eşlenik Duallik

Öncelikle, eşlenik fonksiyon ve eşlenik duallik kavramları hatırlatılsın.

Tanım 2.2.2. [48] *X bir topolojik vektör uzayı, X^* onun topolojik duali ve $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $\langle x^*, \cdot \rangle$, X^* dual uzayına ait bir lineer dönüşüm olmak üzere, her $x^* \in X^*$ için*

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}$$

biçiminde tanımlanan $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun eşleniği denir.

Geometrik olarak, bir $x^* \in X^*$ vektörü verildiğinde $f^*(x^*)$ değeri, x^* vektörünü normali kabul eden hiperdüzlemin ne kadar yukarı ya da aşağıya kaydırıldığında f'nin epigrafını destekleyeceğini göstermektedir.

Uyarı 2.2.3. *Eğer f has (yani, en az bir $x \in X$ noktası için $f(x) < +\infty$ ve her bir $x \in X$ için $f(x) > -\infty$ koşulunu sağlayan) bir fonksiyon ise, eşlenik fonksiyonunun tanımı gereği her $x \in X$ ve her $x^* \in X^*$ için*

$$\langle x^*, x \rangle \leq f(x) + f^*(x^*)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Fenchel eşitsizliği adı verilir.

Tanım 2.2.4. [48] *X bir topolojik vektör uzayı, X^* onun topolojik duali olsun ve $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $\langle x^*, \cdot \rangle$ X^* dual uzayına ait bir lineer* *dönüşüm olmak üzere, her $x \in X$ için*

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*} \{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\}$$

biçiminde tanımlanan $f^{**} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun bieşleniği denir.

Önerme 2.2.5. [48] *Bir $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu has, konveks ve X üzerinde alttan yarı sürekli ise, $f^{**} = f$'dir.*

Önerme 2.2.6. [48] *X bir topolojik vektör uzayı, X^* onun topolojik duali olsun ve $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyonu verilsin. Bu durumda*

$$x^* \in \partial f(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^*\rangle$$

dır. Daha açık olarak, Fenchel eşitsizliğinin eşitliğe dönüşmesi için gerek ve yeter koşul, x^* vektörünün f'nin x noktasındaki subdiferansiyeline ait olmasıdır.

Bir konveks optimizasyon problemi verildiğinde eşleniklik yardımıyla bir dual problem elde edilebilir. Üstelik bazı durumlarda dual problemin çözümünün elde edilmesi, asıl problemin çözümünün bulunmasından çok daha kolaydır.

Aşağıda, asıl (primal) problem tanıtılıp, bu probleme karşılık gelen sarsım (pertürbasyon) problemlerinin oluşturuluşu ve buna bağlı olarak dual problemin kuruluşu hatırlatılmıştır. Burada, aksi belirtilmedikçe (X, X^*) topolojik vektör uzaylarının bir dual çifti, (Y, Y^*) Hausdorff topolojik vektör uzaylarının bir dual çifti olarak alınmıştır. Ayrıca, 0_Y kısaca 0 ile gösterilmiştir.

Tanım 2.2.7. [48] *$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyonu verilsin. Buna göre*

$$(P) \quad \inf_{x \in X} f(x)$$

biçiminde tanımlanan (P) problemine asıl problem adı verilir ve (P) probleminin infimum değeri $\mathrm{Inf}P$ ile gösterilir. Ayrıca $f(x) = \mathrm{Inf}P$ olacak şekildeki her $x \in X$ elemanı (P) probleminin bir çözümü olarak adlandırılır. $f(x_0) < +\infty$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ varsa (P) problemine aşikar olmayan problem denir.

Tanım 2.2.8. [48] *Bir (P) problemi verilsin. her $x \in X$ için $\varphi(x,0) = f(x)$ olacak şekilde bir $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyona bir sarsım (pertürbasyon) fonksiyonu ve $y \in Y$ olmak üzere*

$$(P_y) \quad \inf_{x \in X} \varphi(x,y)$$

problemine de (P) probleminin bir sarsım problemi denir.

Uyarı 2.2.9. *Kuruluşu gereği sarsım problemi φ 'nin seçilişine bağlıdır ve $y = 0$ için (P_0) sarsım problemi asıl probleme eşit olur.*

Tanım 2.2.10. [48] *(P) problemi verilsin ve her $x \in X$ için $\varphi(x,0) = f(x)$ olacak şekilde bir $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu seçilsin. φ fonksiyonunun eşleniği $\varphi^* : X^* \times Y^* \to \overline{\mathbb{R}}$ olmak üzere*

$$(P^*) \quad \sup_{y^* \in Y^*} \{-\varphi^*(0,y^*)\}$$

problemine (P) 'nin dual problemi denir ve (P^*) probleminin supremum değeri $\mathrm{Sup}P^*$ *ile gösterilir. Ayrıca, $-\varphi^*(0,y^*) = \mathrm{Sup}P^*$ olacak şekildeki her $\forall y^* \in Y^*$ elemanı da (P^*) probleminin bir çözümü olarak adlandırılır.*

Önerme 2.2.11. [48] *(P) ve (P^*) problemlerinin çözüm değerleri arasında*

$$-\infty \leq \mathrm{Sup}P^* \leq \mathrm{Inf}P \leq +\infty \tag{2.3}$$

bağıntısı geçerlidir.

Aşağıda, normal ve kararlı problemler hatırlatılmış ve bu tür problemlerin çözümlerinin karakterizasyonları ifade edilmiştir.

Tanım 2.2.12. [48] *(P) problemi verilsin ve $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sarsım fonksiyonu göz önüne alınsın. Her $y \in Y$ için*

$$h(y) := \inf_{x \in X} \varphi(x,y)$$

biçiminde tanımlı fonksiyona (P) probleminin değer fonksiyonu adı verilir.

Yardımcı Teorem 2.2.13. [48] *φ sarsım fonksiyonu konveks ve $X \times Y$ üzerinde alttan yarı sürekli ise (P) asıl problemine bağlı olarak elde edilen değer fonksiyonu h konvekstir.*

Yardımcı Teorem 2.2.14. [48] *(P) problemi verilsin ve $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ bu problemin değer fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $y^* \in Y^*$ için*

$$h^*(y^*) = \varphi^*(0, y^*) \tag{2.4}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.2.15. [48] *(P) problemi verilsin ve $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ bu problemin değer fonksiyonu olsun. Eğer $h(0)$ sonlu ve h, 0'da alttan yarı sürekli ise (P) problemine normal problem adı verilir.*

Önerme 2.2.16. [48] *(P) problemi verilsin. φ fonksiyonunun konveks ve $X \times Y$ üzerinde alttan yarı sürekli olduğu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) *(P) normal problemdir.*

(ii) *(P^*) normal problemdir.*

(iii) $\mathrm{Inf}P = \mathrm{Sup}P^*$ *'dır ve bu değer sonludur.*

Yardımcı Teorem 2.2.17. [48] *(P) problemine karşılık gelen (P^*) dual probleminin çözümler kümesi $\underline{\partial} h^{**}(0)$'dır.*

Tanım 2.2.18. [48] *(P) problemi verilsin ve $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ bu problemin değer fonksiyonu olsun. Eğer $h(0)$ sonlu ve h fonksiyonu 0'da subdiferansiyellenebilir ise (P) problemine kararlı problem adı verilir.*

(P) ve (P^*) problemlerinin normal veya kararlı olmaları, bu problemlerin çözümlerinin varlığı ve karşılaştırılmalarına ilişkin bazı sonuçlar ortaya çıkarmaktadır. Bu sonuçlar aşağıda hatırlatılmıştır.

Önerme 2.2.19. [48] *(P) problemi verilsin ve (P^*) onun dual problemi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) (P) kararlıdır.

(ii) (P) normaldir ve (P^*) en az bir çözüme sahiptir.

Sonuç 2.2.20. [48] *(P) problemi verilsin ve $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sarsım fonksiyonu konveks olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) (P) ve (P^*) normaldir ve çözüme sahiptirler.

(ii) (P) ve (P^*) kararlıdır.

(iii) (P) kararlıdır ve en az bir çözüme sahiptir.

Önerme 2.2.21. [48] *(P) ve (P^*) problemleri çözüme sahip olsunlar. Ayrıca*

$$\mathrm{Inf}P = \mathrm{Sup}P^* < \infty \tag{2.5}$$

olsun. Bu durumda (P) probleminin tüm $\bar{x}$ çözümleri ile (P^*) probleminin tüm $\bar{y}^*$ çözümleri arasında

$$\varphi(\bar{x}, 0) + \varphi^*(0, \bar{y}^*) = 0 \tag{2.6}$$

ya da denk olarak

$$(0, \bar{y}^*) \in \partial\varphi(\bar{x}, 0) \tag{2.7}$$

bağıntıları geçerlidir. Tersine, $\bar{x} \in X$ ve $\bar{y}^* \in Y^*$ elemanları (2.6) bağıntısını sağlıyorlarsa $\bar{x}$, (P) probleminin, $\bar{y}^*$ ise (P^*) dual probleminin birer çözümleridir ve (2.5) gerçeklenir.

2.2.2 Zayıf Eşleniklik ve Zayıf Eşlenik Duallik

Konveks olmayan optimizasyon problemlerinin çözümlerinin bulunması için önemli bir kavram olan, bir fonksiyonun zayıf eşleniği ve zayıf eşlenik duallik kavramları Azimov ve Kasimov [5] tarafından geliştirilmiştir. Bu kesimde, bu kavramlar ve temel özellikleri hatırlatılmıştır.

Tanım 2.2.3. [5] *X bir normlu uzay, X^*, X uzayının duali, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin.*

a) $(x_0, x^*, c) \in X \times X^* \times \mathbb{R}_+$ *için*

$$f^w(x_0, x^*, c) = \sup_{x \in X}\{-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + \langle x^*, x\rangle - f(x)\}$$

biçiminde tanımlanan $f^w : X \times X^* \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna f'nin zayıf eşleniği denir.

b) $x \in X$ *için*

$$f^{ww}(x) = \sup_{(x_0, x^*, c) \in X \times X^* \times \mathbb{R}_+}\{-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + \langle x^*, x\rangle - f^w(x_0, x^*, c)\}$$

şeklinde tanımlanan $f^{ww} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna f'nin zayıf bieşleniği denir.

Uyarı 2.2.4. *Zayıf eşlenik tanımında $c = 0$ alınırsa $f^w(x_0, x^*, 0) = f^*(x^*)$ olduğu görülebilir.*

Bir fonksiyonun zayıf bieşleniği daha sade bir biçimde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

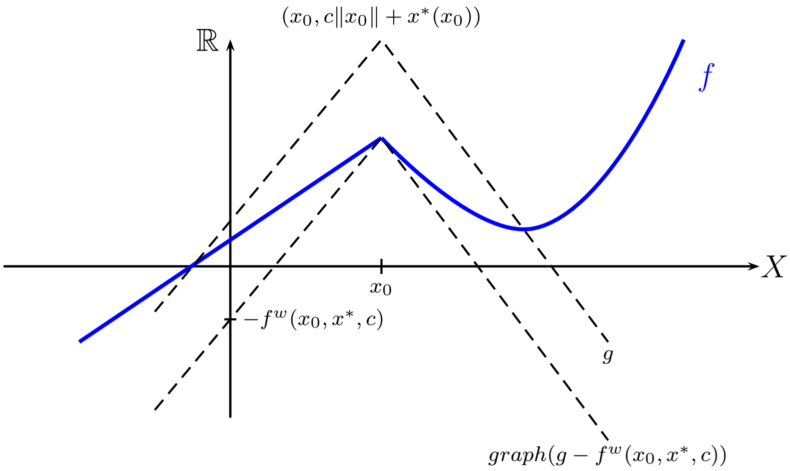
Yardımcı Teorem 2.2.5. [5] *$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda, her $x \in X$ için*

$$f^{ww}(x) = \sup_{(x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+}\{c\|x\| + \langle x^*, x\rangle - f^w(x, x^*, c)\}$$

olur.

Aşağıda, zayıf eşlenik ve zayıf bieşlenik dönüşümlere ilişkin temel özellikler verilmiştir.

Teorem 2.2.6. [5] *$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda, her $x \in X$ için $f^{ww}(x) \leq f(x)$'dir.*



Şekil 2.1. Zayıf eşlenik dönüşümünün geometrik yorumu

Teorem 2.2.7. [5] *$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. Bu durumda,*

$$(x^*, c) \in \underline{\partial}^w f(x_0) \;\Leftrightarrow\; f(x_0) + f^w(x_0, x^*, c) = c\|x_0\| + \langle x^*, x_0 \rangle$$

dır.

Uyarı 2.2.8. *Fenchel eşitliği adı verilen ve*

$$f^*(x^*) + f(x) = x^*(x)$$

olarak ifade edilen eşitlik sadece $x^* \in \partial f(x)$ olması durumunda geçerlidir. Teorem 2.2.7 ise Fenchel eşitliğinin, zayıf eşlenik dönüşümler için hangi koşul altında geçerli olduğunu göstermektedir.

Aşağıda verilen teorem, Teorem 2.2.6'daki eşitsizliğin zayıf subdiferansiyellenebilme koşulu altında eşitliğe dönüştüğünü göstermektedir.

Teorem 2.2.9. [5] *X bir gerçel normlu uzay, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ has bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Buna göre, $\underline{\partial}^w f(x_0) \neq \emptyset$ ise $f(x_0) = f^{ww}(x_0)$ olur.*

Zayıf eşleniklik, konveks optimizasyon için verilen klasik duallik teoremlerinin, eşlenik fonksiyon ve subdiferansiyel tanımında bulunan lineer dönüşümler yerine konkav fonksiyonlar kullanılarak, konveks olmayan optimizasyon problemleri için de elde edilmesini sağlamıştır. Aşağıda, zayıf eşlenik dualliğin kuruluşu hatırlatılmıştır [5].

X bir gerçel normlu uzay, X^* uzayı, X uzayının duali olmak üzere $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin.

$$(P) \begin{cases} \inf\limits_{x \in X} f(x) \end{cases} \tag{2.8}$$

asıl problemi göz önüne alınsın.

Y bir normlu uzay, Y^* da Y uzayının duali olsun. Her bir $x \in X$ için $\varphi(x, 0) = f(x)$ olacak şekilde bir $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sarsım fonksiyonu seçilsin. Bu durumda

$$\inf_{x \in X} \varphi(x, 0) \equiv \inf_{x \in X} f(x)$$

olduğu açıktır. Zayıf dual problemin oluşturulması için

$$\varphi^w : X \times X^* \times \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \times Y \times Y^* \times \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \overline{\mathbb{R}}$$

zayıf eşlenik fonksiyonu göz önüne alınsın.

Her bir $(x_0, x^*, c, y_0, y^*, d) \in X \times X^* \times \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \times Y \times Y^* \times \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ için

$$\begin{aligned} \varphi^w(x_0, x^*, c, y_0, y^*, d) &= \sup_{(x,y) \in X \times Y} \{-c\|x - x_0\| - d\|y - y_0\| + c\|x_0\| \\ &\qquad + d\|y_0\| + x^*(x) + y^*(y) - \varphi(x, y)\} \end{aligned}$$

olur. $x_0 = 0,\ x^* = 0,\ c = 0$ ve $y_0 = 0$ olarak alındığında, $\mathbf{0} = (0_X, 0_{X^*}, 0_{\mathbb{R}}, 0_Y)$ olmak üzere

$$\varphi^w(0, 0, 0, 0, y^*, d) = \varphi^w(\mathbf{0}, y^*, d) = \sup_{(x,y) \in X \times Y} \{-d\|y\| + y^*(y) - \varphi(x, y)\}$$

olur ve (P) probleminin zayıf eşlenik duali

$$(P^*) \begin{cases} \sup\limits_{(y^*,d) \in Y^* \times \mathbb{R}_+ \cup \{0\}} \{-\varphi^w(\mathbf{0}, y^*, d)\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. (P^*) probleminin supremumu $\operatorname{Sup}(P^*)$ ile gösterilir.
$-\varphi^w(\mathbf{0}, y^*, d) = \operatorname{Sup}(P^*)$ olan her bir $(y^*, d) \in Y^* \times \mathbb{R}_+$ ikilisine (P^*) probleminin bir çözümü denir.

Aşağıdaki ifade, dual problemin supremumunun asıl problemin infimum değeri için bir alt sınır verdiğini ve böylece zayıf dualliğin gerçeklendiğini göstermektedir.

Teorem 2.2.10. [5] *(2.8) ile verilen* (P) *problemi ve* (P^*) *zayıf eşlenik dualinin çözüm değerleri için,* $\mathrm{Sup}(P^*) \leq \mathrm{Inf}(P)$ *eşitsizliği gerçeklenir.*

Tanım 2.2.11. [5] *(2.8) ile verilen* (P) *problemi göz önüne alınsın. Bu durumda, her* $y \in Y$ *için* $h(y) = \inf_{x \in X} \varphi(x, y)$ *biçiminde tanımlanan* $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *fonksiyonuna değer fonksiyonu adı verilir.*

Dual problemin çözümü, değer fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 2.2.12. [5] *(2.8) ile verilen* (P) *problemi göz önüne alınsın ve* (P^*) *bu problemin zayıf eşlenik duali olsun. Bu durumda,*

$$\mathrm{Sup}(P^*) = h^{ww}(0)$$

dır.

Bir (P) probleminin kararlılığı aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.2.13. [5] *(2.8) ile ifade edilen* (P) *problemi verilsin. Buna göre,* h *değer fonksiyonu* $0 \in Y$ *noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir ve* $h(0)$ *sonlu ise* (P) *problemine kararlıdır denir.*

Aşağıdaki teorem, güçlü duallik teoremi olarak bilinmektedir ve kararlı problemlerin duallik boşluğu sıfır olan bir eşlenik dualliğe sahip olduğunu göstermektedir.

Yardımcı Teorem 2.2.14. [5] *(2.8) ile ifade edilen* (P) *problemi kararlı ise*

i) $\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(P^*)$*'dır,*

ii) h *değer fonksiyonunun* $0 \in Y$ *noktasındaki her zayıf subgradienti* (P^*) *probleminin bir çözümüdür.*

2.2.3 DC Programlama ve DC Eşlenik Duallik

Bu kesimde, DC programlama ve DC dualliğe ilişkin temel bilgiler özetlenmiştir [49–51].

Tanım 2.2.4. [51] *Bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = g(x) - h(x)$ olacak şekilde $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ has konveks fonksiyonları varsa, f fonksiyonuna bir dc-fonksiyon (difference of convex) denir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı tüm (sonlu) dc-fonksiyonların kümesi $(DC_f(\mathbb{R}^n))$ $DC(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.*

dc-fonksiyonların minimizasyonu ile ilgilenen ve $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ has konveks fonksiyonlar olmak üzere

$$(DCP)\left\{ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{g(x) - h(x)\} \right.$$

biçiminde verilen probleme bir DC programlama problemi denir. Eşlenik fonksiyonun tanımından, (DCP) probleminin optimal değerine α denirse

$$\begin{aligned}
\alpha &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{g(x) - h(x)\} \\
&= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{g(x) - \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y\rangle - h^*(y)\}\} \\
&= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{g(x) + \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{h^*(y) - \langle x, y\rangle\}\} \\
&= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{g(x) - (\langle x, y\rangle - h^*(y))\}\} \\
&= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{g(x) - (\langle x, y\rangle - h^*(y))\}\} \\
&= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{g(x) - \langle x, y\rangle)\} + h^*(y)\} \\
&= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{h^*(y) - g^*(y)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle (DCP) probleminin duali

$$(DDCP)\left\{ \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{h^*(y) - g^*(y)\} \right.$$

biçiminde bulunur ki bu, asıl problemin optimal değeri ile dual problemin optimal değerinin eşit olduğunu gösterir. Sonuç olarak, duallik boşluğu (duality gap) sıfır olan bir eşlenik duallik elde edilmiş olur. α değerinin sonlu olduğu durumda $\mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{dom}(h)$ ve $\mathrm{dom}(h^*) \subseteq \mathrm{dom}(g^*)$ olduğu açıktır.

Aşağıdaki teoremde, bir DC programlama problemi ile bunun dualinin çözüm kümeleri için bir karakterizasyon verilmiştir.

Teorem 2.2.5. [51] *$\mathbb{P}$ ve $\mathbb{D}$, sırasıyla (DCP) ve $(DDCP)$ problemlerinin çözüm kümelerini göstermek üzere*

$$x^* \in \mathbb{P} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\varepsilon h(x^*) \subseteq \partial_\varepsilon g(x^*),\ \forall \varepsilon > 0$$

ve

$$y^* \in \mathbb{D} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\varepsilon g^*(y^*) \subseteq \partial_\varepsilon h^*(y^*),\ \forall \varepsilon > 0$$

dır.

Aşağıdaki teorem, asıl problem çözülerek dual problemin çözümlerinin ve dual problem çözülerek de asıl problemin çözümlerinin elde edilebileceğini göstermektedir.

Teorem 2.2.6. [51] *$\mathbb{P}$ ve $\mathbb{D}$, sırasıyla (DCP) ve $(DDCP)$ problemlerinin çözüm kümelerini göstermek üzere*

$$\bigcup \{\partial h(x) \mid x \in \mathbb{P}\} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathrm{dom}(h^*)$$

ve

$$\bigcup \{\partial g^*(y) \mid y \in \mathbb{D}\} \subseteq \mathbb{P} \subseteq \mathrm{dom}(g)$$

dir.

2.3 Exhausterlar ve Temel Özellikleri

Bu kesimde, bir pozitif homojen fonksiyonun alttan konveks ve üstten konkav yaklaşımları ve bu yaklaşımlar ile Minkowski duallik kullanılarak oluşturulan exhauster kavramı hatırlatılmıştır.

Tanım 2.3.1. [22] *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon olsun.*

a) Bir $\overline{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ p.h. ve konveks fonksiyonu için

$$h(g) \leq \overline{h}(g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

oluyorsa, $\overline{h}$ fonksiyonuna h'nin bir üstten konveks yaklaşımı (u.c.a.) denir.

b) Bir $\underline{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ p.h. ve konkav fonksiyonu için

$$\underline{h}(g) \leq h(g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

oluyorsa, $\underline{h}$ fonksiyonuna h'nin bir alttan konkav yaklaşımı (l.c.a.) denir.

Üstten konveks ve alttan konkav yaklaşımların exhaustive aileleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.3.2. [22] *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon olsun.*

a) h'nin üstten konveks yaklaşımlarının bir Λ^* ailesi için

$$h(g) = \inf_{\overline{h} \in \Lambda^*} \overline{h}(g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

oluyorsa Λ^* ailesine h'nin üstten konveks yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi (U.E.F.) denir.

b) h'nin alttan konkav yaklaşımlarının bir Λ_* ailesi için

$$h(g) = \sup_{\underline{h} \in \Lambda_*} \underline{h}(g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

oluyorsa Λ_* ailesine h'nin alttan konkav yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi (L.E.F.) denir.

Bir pozitif homojen fonksiyonun exhaustive ailelerinin varlığı aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 2.3.3. [52] *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon olmak üzere*

a) h fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde üstten yarı sürekli ise, h'nin üstten konveks yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi vardır.

b) h fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde alttan yarı sürekli ise, h'nin alttan konkav yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi vardır.

h pozitif homojen fonksiyonu üstten yarı sürekli ise, h'nin üstten konveks yaklaşımlarının

$$h(g) = \inf_{\overline{h} \in \Lambda^*} \overline{h}(g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{2.9}$$

eşitliğini sağlayan bir Λ^* exhaustive ailesi vardır. Bu aileden alınan her bir $\overline{h} \in \Lambda^*$ fonksiyonu sublineer olduğundan, öyle tek türlü belirli bir $C(\overline{h}) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt konveks kümesi vardır ki, $\overline{h}$ fonksiyonu

$$\overline{h}(g) = \max_{v \in C(\overline{h})} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla (2.9) eşitliği,

$$E^* = \{C \subseteq \mathbb{R}^n \mid C = C(\overline{h}),\ \overline{h} \in \Lambda^*\}$$

olmak üzere

$$h(g) = \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{2.10}$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekilde elde edilen E^* kümeler ailesine h'nin bir üst exhausterı denir [22].

Benzer biçimde, h pozitif homojen fonksiyonu alttan yarı sürekli ise, h'nin alttan konkav yaklaşımlarının

$$h(g) = \sup_{\underline{h} \in \Lambda_*} \underline{h}(g) \tag{2.11}$$

eşitliğini sağlayan bir Λ_* exhaustive ailesi vardır. Bu aileden alınan her bir $\underline{h} \in \Lambda_*$ fonksiyonu süperlineer olduğundan, Minkowski duallikten, öyle tek türlü belirli bir $C(\underline{h}) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt konveks kümesi vardır ki, $\underline{h}$ fonksiyonu

$$\underline{h}(g) = \min_{w \in C(\underline{h})} \langle w, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla,

$$E_* = \{C \subseteq \mathbb{R}^n \mid C = C(\underline{h}),\ \underline{h} \in \Lambda_*\}$$

olmak üzere (2.11) eşitliği

$$h(g) = \sup_{C \in E_*} \min_{w \in C} \langle w, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

biçimine dönüşür. Böylelikle, h fonksiyonunun (2.12) formunda yazılmasını sağlayan E_* kümeler ailesine h'nin bir alt exhausterı denir [22].

h fonksiyonu pozitif homojen ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde sürekli ise, üstten ve alttan yarı sürekli olduğundan, hem E^* üst exhausterına hem de E_* alt exhausterına sahiptir ve $E = [E^*, E_*]$ çiftine h'nin biexhausterı adı verilir.

3 ZAYIF EXHAUSTERLAR VE OPTİMALLİK KOŞULLARI

Bu bölümde, Küçük ve ark. [41] tarafından geliştirilen zayıf exhauster kavramı tanıtılmış, zayıf exhausterlarla elde edilen optimallik koşulları ifade edilmiş ve zayıf exhausterların indirgenmesine ilişkin Küçük ve ark. [42] tarafından elde edilmiş olan sonuçlar hatırlatılmıştır. Pozitif homojen fonksiyonların alt exhausterları ve zayıf subdiferansiyelleri arasındaki ilişki incelendiğinde, her iki kavramın da fonksiyona alttan konveks yaklaşımlar verdiği görülmektedir. Bu gözlem doğrultusunda, bir p.h. fonksiyonun sıfırdaki zayıf subgradientlerine karşılık gelen konkav fonksiyonların, bu fonksiyonun alttan konkav yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi olduğu gösterilmiştir. Ek olarak, konkav fonksiyonların, Minkowski duallikten sıfırdaki süperdiferansiyelleriyle ifade edilebildiği göz önüne alınarak, bir p.h. fonksiyonun zayıf alt exhausterı oluşturulmuştur. Böylece, fonksiyonun sıfırdaki zayıf subdiferansiyeliyle indekslenen ve kapalı yuvarlardan oluşan bir alt exhauster elde edilmiştir. Benzer düşünceyle, p.h. fonksiyonların sıfırdaki zayıf süperdiferansiyelleri kullanılarak, zayıf üst exhausterlar da tanımlanmıştır. Bu exhausterlar zayıf alt/üst exhausterlar biçiminde adlandırılmışlardır. Bununla birlikte, bazı fonksiyon sınıflarına ait fonksiyonların sıfırdaki zayıf subdiferansiyellerinin (zayıf süperdiferansiyellerinin) ve böylece zayıf alt (üst) exhausterlarının hesaplanması için Minkowski toplam ve fark işlemleri kullanılarak bazı geometrik yöntemler verilmiştir. Ayrıca, bir fonksiyonun p.h. olan genelleştirilmiş yönlü türevlerinin zayıf exhausterları yardımıyla, fonksiyonun global ya da yerel optimal çözümleri için gerek ve yeter koşullar ifade edilmiştir.

Bunların yanında, zayıf alt (üst) exhausterların, zayıf subdiferansiyelin (zayıf süperdiferansiyelin) yalnızca sınır noktaları kullanılarak indirgenebileceği kanıtlanmış ve oluşturulan bu yeni exhausterlar, sınır-indirgenmiş zayıf exhausterlar olarak adlandırılmıştır. Ek olarak, sınır-indirgenmiş zayıf exhausterlar kullanılarak optimallik koşulları verilmiştir.

3.1 Zayıf Exhausterların Kuruluşu

Bu kesimde, zayıf alt ve üst exhausterların tanımları ifade edilmiştir. Ek olarak, destek fonksiyonları cinsinden ifade edilebilen bazı fonksiyon sınıflarına ait fonksiyonların zayıf subdiferansiyel ve zayıf süperdiferansiyellerinin hesaplanmasına ilişkin bazı geometrik yöntemler hatırlatılmıştır. Bu yöntemler, zayıf alt ve üst exhausterların hesaplanmasında da kullanılmıştır.

Teorem 3.1.1. [41] *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ p.h. fonksiyonu alttan yarı sürekli ise*

$$E_* = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)\}$$

ile verilen kümeler ailesi h fonksiyonunun bir alt exhausterıdır.

Kanıt. $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ p.h. ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, Teorem 2.1.6'dan h fonksiyonu zayıf subdiferansiyellenebilirdir ve

$$h(g) = \sup_{(x^*,c)\in\underline{\partial}^w h(0_n)} \{\langle x^*, g\rangle - c\|g\|\} \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.13}$$

biçiminde yazılabilir. Öte yandan, her $(x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)$ için

$$\underline{h}_{(x^*,c)}(g) := \langle x^*, g\rangle - c\|g\|$$

biçiminde tanımlanan $\underline{h}_{(x^*,c)}$ fonksiyonları pozitif homojen ve konkavdır. Dolayısıyla, $\Lambda_* = \{\underline{h}_{(x^*,c)} \mid (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)\}$ ailesi h'nin alttan konkav yaklaşımlarının bir exhaustive ailesidir. Üstelik, bu fonksiyon 0_n'da süperdiferansiyellenebilirdir ve 0_n'daki süperdiferansiyeli yardımıyla

$$\underline{h}(g) = \min_{v\in\overline{\partial}\underline{h}(0_n)} \langle v, g\rangle$$

şeklinde ifade edilebilir. O halde, (3.13) eşitliği

$$h(g) = \sup_{(x^*,c)\in\underline{\partial}^w h(0_n)} \; \min_{v\in\overline{\partial}\underline{h}(0_n)} \langle v, g\rangle$$

biçiminde yazılır. Burada, her bir $(x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)$ için $\underline{h}_{(x^*,c)}$ fonksiyonunun 0_n'daki süperdiferansiyeli hesaplandığında, $\overline{\partial}\underline{h}_{(x^*,c)}(0_n) = \bar{B}(x^*, c)$ kapalı yuvarı elde edilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\underline{h}_{(x^*,c)}(0_n) &= \{a \in \mathbb{R}^n \mid \underline{h}_{(x^*,c)}(g) \leq \langle a, g\rangle,\ \forall g \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, g\rangle - c\|g\| \leq \langle a, g\rangle,\ \forall g \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^* - a, g\rangle \leq c\|g\|,\ \forall g \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^* - a, g\rangle \leq c,\ \forall g \in S(0,1)\} \\
&= \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|x^* - a\| \leq c\} = \bar{B}(x^*, c)
\end{aligned}$$

dir. Böylelikle, h fonksiyonu

$$h(g) = \sup_{(x^*,c)\in\underline{\partial}^w h(0_n)} \ \min_{v\in\bar{B}(x^*,c)} \langle v, g\rangle$$

formunda yazılmış olur. Dolayısıyla,

$$E_* = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)\}$$

kümeler ailesi h'nin bir alt exhausterıdır. □

Teorem 3.1.1'de oluşturulan alt exhauster aşağıdaki tanımda ifade edilmiştir.

Tanım 3.1.2. [41] $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *p.h. fonksiyonu alttan yarı sürekli olsun. Bu durumda*

$$E_w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)\}$$

ile verilen kümeler ailesine h fonksiyonunun zayıf alt exhausterı denir.

Örnek 3.1.3. $h(x) = |x|$ *p.h. fonksiyonu verilsin. h alttan yarı süreklidir ve h'nin sıfırdaki zayıf subdiferansiyeli*

$$\underline{\partial}^w h(0) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid |x^*| \leq c + 1\}$$

kümesidir. Dolayısıyla h fonksiyonunun zayıf alt exhausterı

$$E_w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid |x^*| \leq c + 1\}$$

kümeler ailesidir.

Zayıf alt exhausterın oluşturuluşuna benzer bir biçimde üstten yarı sürekli bir pozitif homojen fonksiyon için zayıf üst exhauster da kurulmuştur.

Teorem 3.1.4. [41] *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ p.h. ve üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$E^* = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n)\}$$

ile verilen kümeler ailesi h fonksiyonunun bir üst exhausterıdır.

Kanıt. $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pozitif homojen ve üstten yarı sürekli fonksiyonu alınsın. Bu durumda, Teorem 2.1.8'den h fonksiyonu 0_n'da zayıf süperdiferansiyellenebilirdir ve her $g \in \mathbb{R}^n$ için

$$h(g) = \inf_{(x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n)} \{\langle x^*, g\rangle + c\|g\|\} \tag{3.14}$$

olur. Öte yandan, $\forall (x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n)$ için

$$\overline{h}_{(x^*, c)}(g) := \langle x^*, g\rangle + c\|g\|$$

biçiminde tanımlanan $\overline{h}_{(x^*, c)}$ fonksiyonu pozitif homojen ve konvekstir. O halde, $\Lambda^* = \{\overline{h}_{(x^*, c)} \mid (x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)\}$ ailesi h'nin üstten konveks yaklaşımlarının bir exhaustive ailesidir. Ayrıca, bu fonksiyon 0_n'da subdiferansiyellenebilirdir ve 0_n'daki subdiferansiyeli yardımıyla

$$\overline{h}(g) = \max_{v \in \underline{\partial}\overline{h}(0_n)} \langle v, g\rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla, (3.14) eşitliği

$$h(g) = \inf_{(x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n)} \max_{v \in \underline{\partial}\overline{h}(0_n)} \langle v, g\rangle$$

ifadesine dönüşür.

Her bir $(x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n)$ için $\overline{h}_{(x^*,c)}$ fonksiyonunun 0_n'daki subdiferansiyeli

$$\begin{aligned}
\underline{\partial}\overline{h}_{(x^*,c)}(0_n) &= \{a \in \mathbb{R}^n \mid \overline{h}_{(x^*,c)}(g) \geq \langle a, g\rangle, \ \forall g \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, g\rangle + c\|g\| \geq \langle a, g\rangle, \ \forall g \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{a \in \mathbb{R}^n \mid c\|g\| \geq \langle a - x^*, g\rangle, \ \forall g \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{a \in \mathbb{R}^n \mid c \geq \langle a - x^*, g\rangle, \ \forall g \in S(0,1)\} \\
&= \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a - x^*\| \leq c\} \\
&= \bar{B}(x^*, c)
\end{aligned}$$

kapalı yuvarı olduğundan, h fonksiyonu

$$h(g) = \inf_{(x^*,c)\in\overline{\partial}^w h(0_n)} \max_{v\in\bar{B}(x^*,c)} \langle v, g\rangle$$

formunda yazılmış olur. Buna göre

$$E^* = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n)\}$$

kümeler ailesi h'nin bir üst exhausterıdır. □

Teorem 3.1.4 doğrultusunda, zayıf üst exhausterlar aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.5. [41] *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ p.h. fonksiyonu üstten yarı sürekli olsun. Bu durumda*

$$E^w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n)\}$$

ile verilen kümeler ailesine h fonksiyonunun zayıf üst exhausterı denir.

Örnek 3.1.6. *$h(x) = |x|$ fonksiyonu göz önüne alınsın. h'nin 0'daki zayıf süperdiferansiyeli $\overline{\partial}^w h(0) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid |x^*| \leq c - 1\}$ olduğundan, h'nin zayıf üst exhausterı*

$$E^w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid |x^*| \leq c - 1\}$$

kümeler ailesidir.

Destek fonksiyonlarıyla ifade edilebilen bazı fonksiyon sınıfları için zayıf subdiferansiyel ve zayıf süperdiferansiyelin kolaylıkla hesaplanmasına yarayan bazı geometrik yöntemler de elde edilmiştir. Aşağıdaki teoremde, destek fonksiyonlarının infimumu biçiminde yazılabilen p.h. fonksiyonların sıfırdaki zayıf subdiferansiyel ve zayıf süperdiferansiyellerinin hesaplanması için, kümelerin Minkowski toplam ve fark işlemleri kullanılarak oluşturulan yöntemler ifade edilerek hatırlatılmıştır.

Teorem 3.1.7. [41] *I bir indeks kümesi, $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve konveks alt kümelerin bir ailesi olmak üzere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \inf\limits_{i\in I} p_{C_i}(x)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda, f'nin sıfırdaki zayıf subdiferansiyeli*

$$\underline{\partial}^w f(0_n) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid x^* \in C_i + c\mathbb{B},\ \forall i \in I\}$$

kümesidir. I'nın sonlu olduğu durumda f'nin sıfırdaki zayıf süperdiferansiyeli

$$\bar{\partial}^w f(0_n) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid \sum_{i\in I} C_i \subseteq x^* + c\mathbb{B} + \overline{conv} \sum_{j\neq i} C_j,\ \forall i \in I\}.$$

kümesidir.

Kanıt. Öklid normu için $\|\cdot\| = p_{\mathbb{B}}$ olduğu göz önüne alınırsa, Minkowski duallikten

$$\begin{aligned}
(x^*, c) \in \underline{\partial}^w f(0_n) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \geq \langle x^*, x\rangle - c\|x\|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow \quad f = \inf_{i\in I} p_{C_i} \geq x^* - c\|\cdot\| = p_{\{x^*\}} - p_{c\mathbb{B}} \\
&\Leftrightarrow \quad p_{C_i} \geq p_{\{x^*\}} - p_{c\mathbb{B}},\ \forall i \in I \\
&\Leftrightarrow \quad p_{C_i} + p_{c\mathbb{B}} + p_{\{-x^*\}} \geq 0,\ \forall i \in I \\
&\Leftrightarrow \quad p_{(C_i + c\mathbb{B} - \{x^*\})} \geq 0,\ \forall i \in I \\
&\Leftrightarrow \quad 0_n \in C_i + c\mathbb{B} - \{x^*\},\ \forall i \in I \\
&\Leftrightarrow \quad x^* \in C_i + c\mathbb{B},\ \forall i \in I
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\underline{\partial}^w f(0_n) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid x^* \in C_i + c\mathbb{B},\ \forall i \in I\}$

olur. I sonlu ise,

$$\begin{aligned}(x^*,c)\in\bar{\partial}^w f(0_n) &\Leftrightarrow\; f=\inf_{i\in I} p_{C_i}\leq x^*-c\|\cdot\|=p_{\{x^*\}}-p_{c\mathbb{B}}\\ &\Leftrightarrow\; p_{\sum\limits_{i\in I}C_i}-p_{\bigvee\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\neq i}C_j}\leq p_{(\{x^*\}+c\mathbb{B})}\\ &\Leftrightarrow\; \sum_{i\in I}C_i\subseteq x^*+c\mathbb{B}+\overline{conv}\sum_{j\neq i}C_j\end{aligned}$$

olduğundan istenen eşitlik elde edilir. $\square$

İki destek fonksiyonunun farkı biçiminde ifade edilebilen dc-fonksiyonların sıfırdaki zayıf subdiferansiyel ve zayıf süperdiferansiyellerinin Minkowski toplam ve fark işlemlerinden yararlanılarak oluşturulan hesaplama yöntemleri, aşağıdaki teoremde hatırlatılmıştır.

Teorem 3.1.8. [41] *$A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ kompakt, konveks kümeler ve $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=p_A(x)-p_B(x)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda, f'nin sıfırdaki zayıf subdiferansiyeli*

$$\underline{\partial}^w f(0_n)=\{(x^*,c)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ \mid x^*\in A+c\mathbb{B}\dot{-}B\}$$

kümesi, sıfırdaki zayıf süperdiferansiyeli ise

$$\bar{\partial}^w f(0_n)=\{(x^*,c)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ \mid x^*\in-\big(B+c\mathbb{B}\dot{-}A\big)\}$$

kümesidir.

Kanıt. $\|\cdot\|=p_{\mathbb{B}}$ olduğundan, Minkowski duallik kullanılarak

$$\begin{aligned}(x^*,c)\in\underline{\partial}^w f(0_n) &\Leftrightarrow\; f=p_A-p_B\geq p_{\{x^*\}}-p_{c\mathbb{B}}\\ &\Leftrightarrow\; p_A+p_{c\mathbb{B}}\geq p_B+p_{\{x^*\}}\\ &\Leftrightarrow\; A+c\mathbb{B}\supseteq B+\{x^*\}\\ &\Leftrightarrow\; x^*\in A+c\mathbb{B}\dot{-}B\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer biçimde,

$$\begin{aligned}
(x^*, c) \in \bar{\partial}^w f(0_n) \quad &\Leftrightarrow \quad f = p_A - p_B \leq p_{\{x^*\}} + p_{c\mathbb{B}} \\
&\Leftrightarrow \quad p_A \leq p_{x^* + c\mathbb{B} + B} \\
&\Leftrightarrow \quad A \subseteq \{x^*\} + c\mathbb{B} + B \\
&\Leftrightarrow \quad x^* \in -\big(B + c\mathbb{B} \dot{-} A\big)
\end{aligned}$$

olur. □

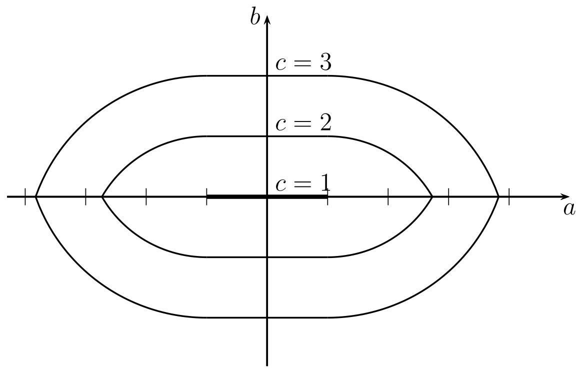
Örnek 3.1.9. *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |x| - |y|$ fonksiyonu ele alınsın. f fonksiyonu ne konveks ne de konkav bir fonksiyondur. Öte yandan, f sıfırda subdiferansiyellenebilir ya da süperdiferansiyellenebilir olmadığı halde, sıfırda zayıf subdiferansiyellenebilir ve zayıf süperdiferansiyellenebilirdir. Üstelik, f fonksiyonu, $I = [-1,1] \times \{0\}$ ve $J = \{0\} \times [-1,1]$ olmak üzere*

$$f(x,y) = p_I(x,y) - p_J(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

biçiminde iki destek fonksiyonun farkı olarak yazılabilir. h fonksiyonunun $(0,0)$'daki zayıf süperdiferansiyeli, Teorem 3.1.8 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\underline{\partial}^w f(0,0) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mid (a,b) \in ([-1,1] \times \{0\}) + c\mathbb{B} \dot{-} (\{0\} \times [-1,1])\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mid \ c \geq 1, |b| \leq c, \ |b| \leq \sqrt{c^2 - (|a|-1)^2} - 1\}.
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Bu kümenin bazı kesitleri Şekil 3.2'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Örnek 3.1.9'da hesaplanan zayıf subdiferansiyel kümesinin $c = 1$, $c = 2$ ve $c = 3$ için kesitleri

Uyarı 3.1.10. $\mathbf{0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sıfır fonksiyonunun sıfırdaki zayıf subdiferansiyeli ve zayıf süperdiferansiyeli birbirine eşittir ve*

$$\underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n) = \bar{\partial}^w \mathbf{0}(0_n) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid \|x^*\| \leq c\}$$

biçiminde ifade edilen bir konidir.

Yukarıda verilen teoremlerin sonucu olarak, belirtilen fonksiyon sınıflarına ait p.h. fonksiyonların zayıf exhausterları da kolaylıkla hesaplanabilir.

Sonuç 3.1.11. [41] *I bir indeks kümesi ve $\{C_i\}_{i \in I}$, $\mathbb{R}^n$'nin kompakt, konveks alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere, $f(x) = \inf\limits_{i \in I} p_{C_i}(x)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, f'nin zayıf alt exhausterı*

$$E_w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid x^* \in C_i + c\mathbb{B}, \ \forall i \in I\}$$

ailesidir. I'nın sonlu olduğu durumda f'nin zayıf üst exhausterı da

$$E^w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid \sum_{i \in I} C_i \subseteq x^* + c\mathbb{B} + \overline{conv} \sum_{j \neq i} C_j, \ \forall i \in I\}.$$

biçiminde ifade edilir.

Kanıt. Zayıf exhausterların tanımları ve Teorem 3.1.7'den kolaylıkla görülebilir. □

Sonuç 3.1.12. [41] *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu iki destek fonksiyonunun farkı biçiminde yazılabilen bir fonksiyon olsun. Yani, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve konveks alt kümeler olmak üzere, $f(x) = p_A(x) - p_B(x)$ biçiminde ifade edilsin. Bu durumda, f'nin zayıf alt exhausterı*

$$E_w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid x^* \in A + c\mathbb{B} \dot{-} B\}$$

kümesi, zayıf üst exhausterı da

$$E^w = \{\bar{B}(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid x^* \in -\big(B + c\mathbb{B} \dot{-} A\big)\}$$

kümesidir.

Kanıt. Zayıf alt ve üst exhausterların tanımları ve Teorem 3.1.8'den görülebilir.

□

Örnek 3.1.13. *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x| - |y|$ fonksiyonunun sıfırdaki zayıf süperdiferansiyeli Örnek 3.1.9'da hesaplanmıştı. Buna göre f fonksiyonunun zayıf üst exhausterı*

$$E^w = \{\bar{B}((a, b), c) \subseteq \mathbb{R}^2 \mid c \geq 1, |b| \leq c, \ |b| \leq \sqrt{c^2 - (|a| - 1)^2} - 1\}$$

kümeler ailesidir.

3.2 Zayıf Exhausterların İndirgenmesi

Önceki kesimde elde edilen Sonuç 3.1.11 ve Sonuç 3.1.12'de verilen yöntemlerle geniş bir fonksiyon sınıfı için zayıf exhausterların hesaplanması kolaylaştırılmıştır. Örneğin, kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyonun yönlü türevinin zayıf exhausterları, bahsi geçen yöntemler kullanılarak, kuasidiferansiyeli cinsinden kolayca hesaplanabilir. Ancak, zayıf alt (üst) exhausterlar zayıf subgradientlere (zayıf süpergradientlere) karşılık gelen kapalı yuvarlardan oluşmakta ve zayıf subdiferansiyel (zayıf süperdiferansiyel) sonsuz çoklukta elemandan oluşmaktadır. Dolayısıyla, zayıf exhausterların indirgenmesi, yani sayıca daha az ya da daha küçük kümelerden oluşan zayıf exhausterların elde edilmesi, sonraki kseimde verilecek olan optimallik koşullarının kontrol edilmesini kolaylaştırması açısından önemlidir. Bu kesimde, zayıf exhausterların, zayıf subdiferansiyel ya da zayıf süperdiferansiyelin sınır noktaları kullanılarak indirgenmesine ilişkin [42] çalışmasında elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

Teorem 3.2.1. [42] *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ p.h. fonksiyonu alttan yarı sürekli olsun. Bu durumda*

$$\bar{E}_w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in bd(\underline{\partial}^w h(0_n))\}$$

ile verilen kümeler ailesi h fonksiyonunun bir alt exhausterıdır.

Kanıt. $(x^*, c_0) \in bd(\underline{\partial}^w h(0_n))$ alınsın ve

$$A(x^*) := \{c \in \mathbb{R}_+ \mid (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)\}$$

kümesi tanımlansın. $A(x^*) \subseteq \mathbb{R}_+$ kümesi 0 ile alttan sınırlı ve kapalı bir kümedir. Dolayısıyla, $A(x^*)$ kümesi bir minimuma sahiptir ve bu minimum nokta kümenin sınırında olmak durumundadır. Yani, $\min A(x^*) = c_0$'dır. O halde, $(x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)$ olacak şekildeki her bir $(c_0 \neq) c \in \mathbb{R}_+$ sayısı için $c > c_0$'dır. Böylece, her $(x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)$ için

$$\bar{B}(x^*, c_0) \subseteq \bar{B}(x^*, c)$$

elde edilir. Bu ise, ([53], Teorem 4.3(i))'den, her $c > c_0$ için $\bar{B}(x^*, c)$ yuvarlarının zayıf alt exhausterdan atılabileceğini gösterir. Yani h'nin 0'daki zayıf subdiferansiyelinin sınırından alınan (x^*, c) ikililerine karşılık gelen $\bar{B}(x^*, c)$ yuvarları haricindeki diğer tüm yuvarlar zayıf alt exhausterdan çıkarılabilirler. Böylelikle,

$$\bar{E}_w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in bd(\underline{\partial}^w h(0_n))\}$$

kümesi h'nin bir zayıf alt exhausterıdır. □

Teorem 3.2.2. [42] *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ p.h. fonksiyonu üstten yarı sürekli olsun. Bu durumda*

$$\bar{E}^w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in bd(\bar{\partial}^w h(0_n))\}$$

ile verilen kümeler ailesi h fonksiyonunun bir üst exhausterıdır.

Kanıt. Teorem 3.2.1'nin kanıtına benzer biçimde, ([53], Teorem 4.4) yardımıyla gösterilir. □

Yukarıda elde edilen exhausterlar, sınır-indirgenmiş zayıf alt/üst exhausterlar olarak adlandırılmıştır. Elde edilen indirgeme tekniği yardımıyla zayıf exhausterların indirgenmesine ilişkin bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.2.3. *$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = |x|$ fonksiyonu ele alınsın. Örnek 3.1.6'da, bu fonksiyonun zayıf üst exhausterı*

$$E^w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid |x^*| \leq c - 1\}$$

biçiminde hesaplanmıştı. Bu zayıf üst exhaustera Teorem 3.2.1'de verilen in-

dirgeme tekniği uygulanırsa

$$\bar{E}^w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid |x^*| = c - 1\}$$

indirgenmiş zayıf üst exhausterı elde edilir.

3.3 Zayıf Exhausterlarla Optimallik Koşulları

Bir p.h. fonksiyonun alt ya da üst exhausterları tanımlanışları gereği tek türlü belirli değildir, hatta bir p.h. fonksiyon için sonsuz değişik şekilde exhauster elde edilebilir. Ancak, zayıf exhausterlar, zayıf subdiferansiyel ya da zayıf süperdiferansiyel kullanılarak tek türlü belirlenmiş özel bir exhauster sınıfı oluştururlar. Ayrıca, genel anlamda exhausterlar kompakt konveks kümelerden oluşurken, zayıf exhausterlar özel kompakt konveks kümeler olan kapalı yuvarlardan oluşmaktadırlar. Dolayısıyla, zayıf exhausterlar optimallik koşulları araştırılırken daha işlevsel bir araç olarak kullanılabilir. Üstelik, zayıf exhausterlarla verilen optimallik koşulları düzgün olmayan bir fonksiyonun optimal noktalarının bulunması sürecine geometrik bir yaklaşım sağlar. Zayıf exhausterlar kullanılarak [41] çalışmasında elde edilen gerekli ve yeterli optimallik koşulları aşağıda hatırlatılmıştır.

Teorem 3.3.1. [41] *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki bir genelleştirilmiş alt türevi $h(g) = f^{\downarrow}(\bar{x}; g)$ olmak üzere, h fonksiyonu üstten yarı sürekli olsun. Bu durumda, $\bar{x}$ noktası f'nin bir yerel ya da global minimalleştiricisi ise, aşağıdaki denk koşullar sağlanır:*

(i) $0_n \in \bar{B}(x^*, c), \quad \forall (x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)$,

(ii) $\|x^*\| \leq c, \quad \forall (x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)$,

(iii) $\bar{\partial}^w h(0_n) \subseteq \bar{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$.

Kanıt. Zayıf süperdiferansiyelin tanımlanışı gereği (i), (ii) ve (iii) koşullarının birbirine denk olduğu açıktır. $\bar{x}$ noktası f'nin bir yerel ya da global minimalleştiricisi olsun. O halde, ([25], Lemma 2.1)'den

$$h(g) \geq 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

elde edilir. h'nin üstten yarı sürekliliğinden $E^w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)\}$ kümesi h'nin zayıf üst exhausterıdır. Buradan,

$$h(g) = \inf_{(x^*,c)\in\bar{\partial}^w h(0_n)} \max_{v\in\bar{B}(x^*,c)} \langle v, g\rangle \geq 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

olur. Dolayısıyla, her $g \in \mathbb{R}^n$ ve her $(x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)$ için

$$p_{\bar{B}(x^*,c)}(g) = \max_{v\in\bar{B}(x^*,c)} \langle v, g\rangle \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise, ([1], Teorem 13.1)'den, her $(x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)$ için $0_n \in \bar{B}(x^*, c)$ olduğunu gösterir ki böylece (i) sağlanmış olur. □

Teorem 3.3.2. [41] *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki Hadamard alt türevi $h(g) = f_H^{\downarrow}(\bar{x}; g)$ olmak üzere, h fonksiyonu üstten yarı sürekli olsun. Aşağıdaki denk koşulları sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ noktası f'nin bir kesin yerel minimalleştiricisidir:*

(i) $\bar{B}(0_n, \delta) \subseteq \bar{B}(x^*, c), \quad \forall (x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)$,

(ii) $\|x^*\| + \delta \leq c, \quad \forall (x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)$,

(iii) $\bar{\partial}^w h(0_n) + (\bar{B}(0_n, \delta) \times \{0\}) \subseteq \bar{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$.

Kanıt. Öncelikle, yukarıda verilen üç koşulun denk olduğu gösterilecektir.

(i) ⇒ (ii) Herhangi bir $(x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)$ elemanı alınsın. $x^* = 0_n$ ise (ii) koşulunun sağlanacağı açıktır. $x^* \neq 0_n$ ise $-\dfrac{x^*}{\|x^*\|}\delta \in \bar{B}(0_n, \delta)$'dır. Dolayısıyla, $-\dfrac{x^*}{\|x^*\|}\delta \in \bar{B}(x^*, c)$ elde edilir ki bu $\left\| x^* + \dfrac{x^*}{\|x^*\|}\delta \right\| \leq c$ eşitsizliğini verir. Buradan $\|x^*\| + \delta \leq c$ bulunur ve böylece (ii) sağlanır.

(ii) ⇒ (iii) Keyfi $(x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)$ ve $y \in \bar{B}(0_n, \delta)$ elemanları alınsın. Üçgen eşitsizliği ve (ii) kullanılarak $\|x^* + y\| \leq \|x^*\| + \|y\| \leq \|x^*\| + \delta \leq c$ elde edilir. Buradan $(x^* + y, c) \in \bar{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$ olur. Böylece, (iii) elde edilir.

(iii) ⇒ (i) Keyfi $(x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)$ ve $y \in \bar{B}(0_n, \delta)$ elemanları alınsın. O halde, $\bar{B}(0_n, \delta)$ yuvarının simetrik oluşundan $-y \in \bar{B}(0_n, \delta)$ olacaktır. (iii)'den $\|x^* - y\| \leq c$'dir. Dolayısıyla, $y \in \bar{B}(x^*, c)$ elde edilir ki bu (i)'yi verir. Böylece, (i), (ii) ve (iii) koşulları denktir.

Şimdi, (i) koşulu sağlansın ve sıfırdan farklı bir $g \in \mathbb{R}^n$ alınsın. Bu durumda, $\lambda_g g \in \operatorname{bd}(\bar{B}(0_n, \delta))$ olacak şekilde en az bir $\lambda_g > 0$ sayısı vardır. Öte yandan, $E^w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)\}$ kümesi h'nin zayıf üst exhausterı olduğundan

$$h(g) = \inf_{(x^*,c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)} \max_{v \in \bar{B}(x^*,c)} \langle v, g \rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

eşitliği sağlanır. Buradan, (i) sağlandığından

$$h(g) = \inf_{(x^*,c) \in \bar{\partial}^w h(0_n)} \max_{v \in \bar{B}(x^*,c)} \langle v, g \rangle \geq \max_{v \in \bar{B}(0_n,\delta)} \langle v, g \rangle = \langle \lambda_g g, g \rangle = \lambda_g \|g\|^2 > 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, her $0_n \neq g \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $h(g) > 0$ elde edilir. Böylece, ([25], Lemma 2.1)'den $\bar{x}$, f'nin kesin yerel minimalleştiricisidir. □

Bir fonksiyonun maksimalleştiricisinin bulunması için aşağıdaki teoremlerde verilen gerek ve yeter koşullar, Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2'ye benzer biçimde kanıtlanırlar.

Teorem 3.3.3. [41] *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki bir genelleştirilmiş üst türevi $h(g) = f^{\uparrow}(\bar{x}; g)$ olmak üzere, h fonksiyonu alttan yarı sürekli olsun. Buna göre, $\bar{x}$ noktası f'nin bir yerel ya da global maksimalleştiricisi ise, aşağıdaki denk koşullar sağlanır:*

(i) $0_n \in \bar{B}(x^*, c), \quad \forall (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)$,

(ii) $\|x^*\| \leq c, \quad \forall (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)$,

(iii) $\underline{\partial}^w h(0_n) \subseteq \underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$.

Teorem 3.3.4. [41] *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki Hadamard üst türevi $h(g) = f_H^{\uparrow}(\bar{x}; g)$ olmak üzere, h fonksiyonu alttan yarı sürekli olsun. Aşağıdaki denk koşulları sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ noktası f'nin bir kesin yerel maksimalleştiricisidir:*

(i) $\bar{B}(0_n, \delta) \subseteq \bar{B}(x^*, c), \quad \forall (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)$,

(ii) $\|x^*\| + \delta \leq c, \quad \forall (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)$,

(iii) $\underline{\partial}^w h(0_n) + (\bar{B}(0_n, \delta) \times \{0\}) \subseteq \underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$.

Uyarı 3.3.5. *Yukarıdaki teoremlerde verilen optimallik koşulları, önceki kesimde verilen indirgeme teknikleriyle elde edilen sınır-indirgenmiş zayıf exhausterlar kullanılarak çok daha kolay bir biçimde kontrol edilebilir. Böylece yapılan indirgemenin yararlılığı da optimal noktaların elde edilmesi açısından değerlendirilmiş olur.*

Zayıf exhausterlar yardımıyla verilen optimallik koşullarının bir sonucu olarak, kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonlar için bazı gerekli ve yeterli optimallik koşulları, bu tür fonksiyonların kuasidiferansiyelleri cinsinden elde edilmiştir.

Sonuç 3.3.6. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki kuasidiferansiyeli $Df(\bar{x}) = [A, B]$ olmak üzere, $\bar{x}$ noktası f'nin bir yerel ya da global minimalleştiricisi ise, aşağıdaki denk koşullar sağlanır:*

(i) $x^* \in -(B + c\mathbb{B} \dot{-} A)$ *olan her* $\forall(x^*, c)$ *için,* $0_n \in \bar{B}(x^*, c)$*'dir,*

(ii) $x^* \in -(B + c\mathbb{B} \dot{-} A)$ *olan her* (x^*, c) *için,* $\|x^*\| \leq c$*'dir,*

(iii) $c\mathbb{B} \dot{-} A \neq \emptyset$ *olan her* $c \geq 0$ *sayısı için,* $-(B + c\mathbb{B} \dot{-} A) \subseteq c\mathbb{B}$*'dir.*

Kanıt. f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki kuasidiferansiyeli $Df(\bar{x}) = [A, B]$ olduğundan $\forall g \in \mathbb{R}^n$ için $h(g) = f'(\bar{x}; g) = p_A(g) - p_B(g)$'dir. O halde, Teorem 3.1.8'den

$$\bar{\partial}^w h(0_n) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid x^* \in -(B + c\mathbb{B} \dot{-} A)\}$$

yazılır ve h, iki destek fonksiyonunun farkı olarak sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla, $\bar{x}$ f'nin bir yerel ya da global minimalleştiricisi ise, Teorem 3.3.1'den (i), (ii) ve (iii) denk koşulları sağlanır. □

Sonuç 3.3.7. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki kuasidiferansiyeli $Df(\bar{x}) = [A, B]$ olmak üzere, aşağıdaki denk koşulları sağlayacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ noktası f'nin bir kesin yerel minimalleştiricisidir:*

(i) $x^* \in -(B + c\mathbb{B} \dot{-} A)$ *olan her* (x^*, c) *için,* $\bar{B}(0_n, \delta) \subseteq \bar{B}(x^*, c)$*'dir,*

(ii) $x^* \in -(B + c\mathbb{B} \dot{-} A)$ *olan her* (x^*, c) *için,* $\|x^*\| + \delta \leq c$*'dir,*

(iii) $c\mathbb{B} \dot{-} A \neq \emptyset$ *olan her* $c \geq 0$ *sayısı için,* $-(B + c\mathbb{B} \dot{-} A) + \delta\mathbb{B} \subseteq c\mathbb{B}$*'dir.*

Kanıt. Sonuç 3.3.6'nın kanıtına benzer biçimde, Teorem 3.1.8 ve Teorem 3.3.2 yardımıyla görülebilir. □

Aşağıda, zayıf exhausterlar yardımıyla bir fonksiyonun optimal noktasının bulunması ile ilgili örnekler verilmiştir.

Örnek 3.3.8. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$ fonksiyonu $\bar{x} = 0$ noktası verilsin. Bu konkav fonksiyon $\bar{x} = 0$ noktasında yönlü türevlenebilirdir ve 0'daki yönlü türevi $h(g) = f'(0; g) = -|g|$ fonksiyonudur. h fonksiyonunun 0'daki zayıf subdiferansiyeli*

$$\underline{\partial}^w h(0) = \{(a, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid |a| \leq c - 1\}$$

kümesidir ve bu küme Şekil 3.3'de gösterilmiştir. Dolayısıyla, h'nin zayıf alt exhausterı

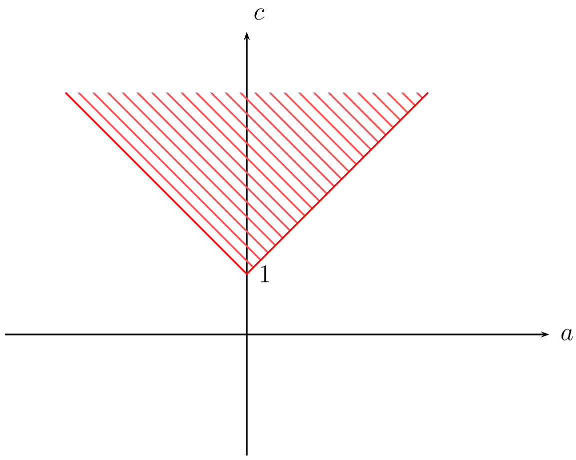
$$E_w = \{[a - c, a + c] \mid a \in [-c + 1, c - 1],\ c \geq 1\}$$

kümesidir. Buna göre, $\delta = 1$ sayısı için

$$\bar{B}(0, \delta) = [-1, 1] \subseteq [a - c, a + c], \quad \forall (a, c) \in \underline{\partial}^w h(0)$$

koşulunun sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Gerçekten, $c \geq 1$ olmak üzere, her $(a, c) \in \underline{\partial}^w h(0)$ için $a \in [-c + 1, c - 1]$ olduğundan, $-c + 1 \leq a \leq c - 1$'dir. Dolayısıyla, $a + c \geq 1$ ve $a - c \leq -1$ eşitsizlikleri sağlanacağından her $(a, c) \in \underline{\partial}^w h(0)$ için $[-1, 1] \subseteq [a - c, a + c]$ bulunur.

Dolayısıyla, Teorem 3.3.4 (i) gereğince $\bar{x} = 0$ noktası f'nin $\mathbb{R}$ üzerindeki kesin yerel maksimum noktasıdır. f fonksiyonu konkav olduğundan, bu nokta f'nin kesin global maksimalleştiricisidir.



Şekil 3.3. $f(x) = -|x|$ fonksiyonunun 0'daki zayıf subdiferansiyeli

Örnek 3.3.9. *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x, y) = |x| + |y|$ ile verilsin ve $\bar{x} = (0, 0)$ olsun. Bu fonksiyon $\bar{x}$ noktasında yönlü türevlenebilirdir ve bu noktadaki yönlü türevi her bir $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2$ için $h(g) = f'(0; g) = |g_1| + |g_2|$ fonksiyonudur. h fonksiyonunun $(0, 0)$'daki zayıf süperdiferansiyeli*

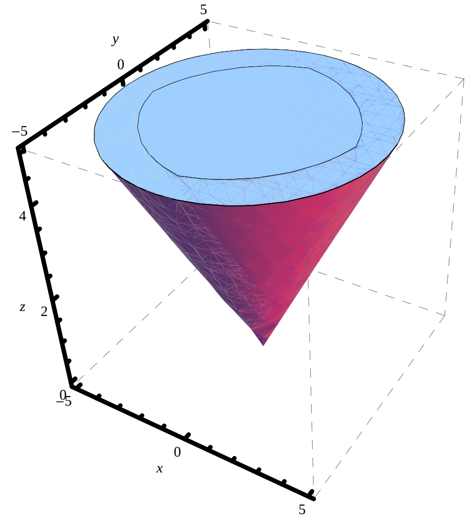
$$\bar{\partial}^w h(0,0) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mid a^2 + 2|a| + b^2 + 2|b| + 2 \leq c^2,\ c \geq \sqrt{2}\}$$

kümesidir. Buna göre, $\delta = 1$ seçilerek

$$\bar{\partial}^w h(0,0) + (\bar{B}((0,0),1) \times \{0\}) \subseteq \bar{\partial}^w \mathbf{0}(0,0)$$

kapsamının sağlandığı gösterilebilebilir. Bunun için, $\mathbb{B} := \bar{B}((0,0),1)$ olmak üzere, keyfi bir $(x,y,z) \in \bar{\partial}^w h(0_n) + (\mathbb{B} \times \{0\})$ alınsın. O halde, $(x,y,z) = (a,b,c) + (p,q,0)$ olacak şekilde $(a,b,c) \in \bar{\partial}^w h(0,0)$ ve $(p,q) \in \mathbb{B}$ vektörleri vardır. Bu vektörler için $\|(x,y)\| \leq z$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için, $a^2 + 2|a| + b^2 + 2|b| + 2 \leq c^2$, $p^2 + q^2 \leq 1$ eşitsizliklerinin sağlandığı ve $z = c$ olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\|(x,y)\|^2 = \|(a+p, b+q)\|^2 &= (a+p)^2 + (b+q)^2 \\
&= a^2 + b^2 + 2ap + 2bq + p^2 + q^2 \\
&\leq a^2 + b^2 + 2ap + 2bq + 1 \\
&\leq a^2 + b^2 + 2|a| + 2|b| + 2 \leq c^2 = z^2
\end{aligned}$$



Şekil 3.4. $\bar{\partial}^w h(0,0)$ ve $\bar{\partial}^w \mathbf{0}(0,0)$ kümeleri

elde edilir. Bu ise $\|(x,y)\| \le z$ *eşitsizliğini, yani* $(x,y,z) \in \bar{\partial}^w \mathbf{0}(0,0)$ *olduğunu verir. Böylece, Teorem 3.3.2* (*iii*) *sağlandığından* $(0,0)$ *noktası* f*'nin* $\mathbb{R}^2$ *üzerindeki kesin yerel minimum noktasıdır.* f *konveks olduğundan, bu nokta* f*'nin kesin global minimalleştiricisidir.*

4 KONVEKS OLMAYAN OPTİMİZASYONDA EŞLENİK DUALLİK VE EXHAUSTERLAR YARDIMIYLA OPTİMALLİK KOŞULLARI

Bu bölümde, bir fonksiyonun eşleniği ile exhausterları arasındaki ilişki araştırılmış ve optimallik için iki farklı yaklaşım elde edilmiştir. Bu yaklaşımların ilkinde, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı pozitif homojen bir fonksiyonun sıfırdaki zayıf subdiferansiyeli ile bu fonksiyonun zayıf eşleniği arasındaki ilişki incelenerek, zayıf alt exhausterların yeni bir ifadesi elde edilmiş ve bu ifade kullanılarak maksimizasyon problemleri için yeni optimallik koşulları verilmiştir.

Diğer yaklaşımda ise, konveks bir optimizasyon probleminin amaç fonksiyonunun yönlü türevini amaç fonksiyonu kabul eden yeni bir optimizasyon problemi oluşturulmuştur. Bu yeni optimizasyon probleminin, eşleniklik kavramına dayanılarak oluşturulan dual probleminin çözümleri asıl problemin değer fonksiyonunun exhausterları cinsinden elde edilmiştir. Böylece, asıl probleminin kritik noktalarına ulaşılmıştır. Daha sonra, amaç fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı olan herhangi bir konveks olmayan optimizasyon problemi ele alınarak, bu kez zayıf eşlenik fonksiyonu ile oluşturulan dual problemin çözümleri zayıf exhausterlar cinsinden elde edilmiştir.

Sonuç olarak, zayıf exhausterlar kullanılarak hem optimallik için gerekli ve yeterli koşullar bulunmuş, hem de asıl problemin kritik noktalarına ulaşmayı sağlayan yeni bir problem kurularak, bunun dualinin çözümü zayıf exhausterlarla karakterize edilmiştir.

4.1 Optimallik Koşulları

Bu kesimde, alttan yarı sürekli bir pozitif homojen fonksiyonun 0_n'daki zayıf subdiferansiyelinin ve böylece zayıf alt exhauterının, fonksiyonun 0_n'daki zayıf eşleniği cinsinden yeni bir ifadesi elde edilmiştir. Bu sonuç, Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.4'de verilen optimallik koşullarının zayıf eşlenik dönüşümle ilişkilendirilmesini sağlamıştır.

Teorem 4.1.1. *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ p.h., alttan yarı sürekli bir fonksiyon ise, h'nin zayıf alt exhausterı*

$$E_w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid h^w(0_n, x^*, c) = 0\} \tag{4.15}$$

kümesidir.

Kanıt. h fonksiyonu, p.h. ve alttan yarı sürekli olduğundan zayıf alt exhaustera sahiptir ve bu exhauster

$$E_w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)\}$$

kümesidir. Öte yandan, 2.2.7'ye göre her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$(x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(x) \quad \Leftrightarrow \quad h(x) + h^w(x, x^*, c) = c\|x\| + \langle x, x^* \rangle$$

dır. Dolayısıyla, $x = 0_n$ alındığında

$$\begin{aligned} \underline{\partial}^w h(0_n) &= \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid h(0_n) + h^w(0_n, x^*, c) = c\|0_n\| + \langle 0_n, x^* \rangle\} \\ &= \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid h(0_n) + h^w(0_n, x^*, c) = 0\} \end{aligned}$$

elde edilir. Üstelik, h pozitif homojen olduğundan $h(0_n) = 0$'dır. Böylece

$$\underline{\partial}^w h(0_n) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid h^w(0_n, x^*, c) = 0\} \tag{4.16}$$

bulunur. O halde, bu fonksiyonun zayıf alt exhausterı

$$E_w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid h^w(0_n, x^*, c) = 0\}$$

olarak elde edilir. □

Aşağıdaki önermede, h'nin 0_n'daki zayıf eşleniği 0_n'daki zayıf subdiferansiyeli cinsinden elde edilmiştir.

Önerme 4.1.2. *$h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ p.h., alttan yarı sürekli ve 0_n'da sonlu değer alan bir fonksiyon ise, her $(x^*, c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ için*

$$h^w(0_n, x^*, c) = \begin{cases} 0 & , \quad (x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n) \\ +\infty & , \quad (x^*, c) \notin \underline{\partial}^w h(0_n) \end{cases}$$

olur.

Kanıt. Keyfi $(x^*, c) \in \underline{\partial}^w h(0_n)$ alındığında, (4.16) eşitliğinden $h^w(0_n, x^*, c) = 0$

olduğu açıktır. Kabul edelim ki $(x^*, c) \notin \underline{\partial}^w h(0_n)$ olsun. Zayıf subdiferansiyelin tanımından

$$\langle x^*, x_0 \rangle - c\|x_0\| - h(x_0) > 0 \tag{4.17}$$

olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vardır. Buna göre, h fonksiyonu p.h. olduğundan $\forall \lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} h^w(0_n, x^*, c) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x^*, x \rangle - c\|x\| - h(x)\} \\ &\geq \langle x^*, \lambda x_0 \rangle - c\|\lambda x_0\| - h(\lambda x_0) \\ &= \lambda(\langle x^*, x_0 \rangle - c\|x_0\| - h(x_0)) \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan, (4.17) eşitsizliği göz önüne alınarak $\lambda \to +\infty$ için

$$h^w(0_n, x^*, c) \geq \lambda(\langle x^*, x_0 \rangle - c\|x_0\| - h(x_0)) \geq +\infty$$

elde edilir ki bu $h^w(0_n, x^*, c) = +\infty$ olduğunu verir. □

Uyarı 4.1.3. $\mathbb{R}^n$ *üzerinde tanımlı* $\mathbf{0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dönüşümü için*

$$\underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid \|x^*\| \leq c\}$$

olduğundan, Önerme 4.1.2'den, bu fonksiyonun 0_n*'daki zayıf eşleniği*

$$\mathbf{0}^w(0_n, x^*, c) = \begin{cases} 0 & , \quad \|x^*\| \leq c \\ +\infty & , \quad \|x^*\| > c \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.4. $h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *p.h. fonksiyonu* 0_n*'da zayıf subdiferansiyellenebilir olsun. Bu durumda,* $\underline{\partial}^w h(0_n) \subseteq \underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$ *olması için gerek ve yeter koşul her bir* $(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ *için* $\mathbf{0}^w(0_n, x^*, c) \leq h^w(0_n, x^*, c)$ *olmasıdır.*

Kanıt. $\underline{\partial}^w h(0_n) \subseteq \underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$ olsun. Keyfi bir $(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ alınsın. Önerme 4.1.2'den $h^w(0_n, x^*, c)$ ve $\mathbf{0}^w(0_n, x^*, c)$ fonksiyonları sırasıyla, $\underline{\partial}^w h(0_n)$ ve $\underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$

kümelerinin indikatör fonksiyonlarıdır. Daha açık olarak

$$h^w(0_n, x^*, c) = i_{\underline{\partial}^w h(0_n)}(x^*, c) \quad \text{ve} \quad \mathbf{0}^w(0_n, x^*, c) = i_{\underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)}(x^*, c)$$

eşitlikleri gerçeklenir. $\underline{\partial}^w h(0_n) \subseteq \underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$ olduğundan indikatör fonksiyonun tanımlanışı gereği her $(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ için

$$i_{\underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)}(x^*, c) \leq i_{\underline{\partial}^w h(0_n)}(x^*, c)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da istenen eşitsizliği verir.

Tersine, her $(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ için $\mathbf{0}^w(0_n, x^*, c) \leq h^w(0_n, x^*, c)$ eşitsizliği sağlansın. O halde, $\forall (x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ için $i_{\underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)}(x^*, c) \leq i_{\underline{\partial}^w h(0_n)}(x^*, c)$ olur. Bu ise, $\underline{\partial}^w h(0_n) \subseteq \underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$ olduğunu gösterir. □

Elde edilen sonuçlar kullanılarak, bir fonksiyonun maksimalliği için gerekli ve yeterli optimallik koşulları ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.5. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki bir genelleştirilmiş üst türevi $h(g) = f^{\uparrow}(\bar{x}; g)$ olmak üzere, h fonksiyonu alttan yarı sürekli olsun. Bu durumda, $\bar{x}$ noktası f'nin bir yerel ya da global maksimalleştiricisi ise, aşağıdaki denk koşullar sağlanır:*

(i) $h^w(0_n, x^*, c) = 0$ olan her (x^*, c) için, $0_n \in \bar{B}(x^*, c)$'dir.

(ii) $h^w(0_n, x^*, c) = 0$ olan her (x^*, c) için, $\|x^*\| \leq c$'dir.

(iii) $\underline{\partial}^w h(0_n) \subseteq \underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$'dır.

(iv) Her $(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ için $\mathbf{0}^w(0_n, x^*, c) \leq h^w(0_n, x^*, c)$'dir.

Kanıt. Zayıf subdiferansiyel ve zayıf eşlenik fonksiyonun tanımlanışı gereği ve Önerme 4.1.2 ile Teorem 4.1.1'den (*i*), (*ii*), (*iii*) ve (*iv*) koşullarının denk oldukları açıktır. $\bar{x}$ noktası f'nin bir yerel ya da global maksimalleştiricisi olsun. O halde, ([25], Lemma 2.2)'den

$$h(g) \leq 0, \ \forall g \in \mathbb{R}^n$$

elde edilir. Öte yandan, Teorem 4.1.1'den

$$h(g) = \sup_{h^w(0_n, x^*, c)=0} \min_{v \in \bar{B}(x^*, c)} \langle v, g \rangle \leq 0$$

dır. O halde, $h^w(0_n, x^*, c) = 0$ olan her bir (x^*, c) için

$$\min_{v \in \bar{B}(x^*, c)} \langle v, g \rangle \leq 0, \ \forall g \in \mathbb{R}^n$$

olur ki bu her $g \in \mathbb{R}^n$ için $-p_{\bar{B}(x^*,c)(g)} \leq 0$ yani $p_{\bar{B}(x^*,c)}(g) \geq 0$ olduğunu verir. Dolayısıyla, ([1], Teorem 13.1)'den $h^w(0_n, x^*, c) = 0$ olan her (x^*, c) için $0_n \in \bar{B}(x^*, c)$ elde edilir. Böylece (i) sağlanır. □

Aşağıdaki teoremde, bir maksimizasyon problemi için yeterli optimallik koşulları verilmiştir.

Teorem 4.1.6. *$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki Hadamard üst türevi $h(g) = f_H^{\uparrow}(\bar{x}; g)$ olmak üzere h, alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki denk koşulları sağlayacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ noktası f'nin bir kesin yerel maksimalleştiricisidir:*

(i) $h^w(0_n, x^*, c) = 0$ olan $\forall (x^*, c)$ için, $\bar{B}(0, \delta) \subseteq \bar{B}(x^*, c)$'dir.

(ii) $h^w(0_n, x^*, c) = 0$ olan $\forall (x^*, c)$ için, $\|x^*\| + \delta \leq c$'dir.

(iii) $\underline{\partial}^w h(0_n) + (\bar{B}(0_n, \delta) \times \{0\}) \subseteq \underline{\partial}^w \mathbf{0}(0_n)$.

Kanıt. Zayıf subdiferansiyel ve zayıf eşlenik fonksiyon arasında Teorem 4.1.1'de kurulan ilişki göz önüne alındığında (i), (ii) ve (iii) koşullarının denk olduğu açıktır. O halde, bu koşullardan birinin sağlandığı durumda $\bar{x}$ noktasının f'nin kesin yerel maksimalleştiricisi olduğu gösterilmelidir. (i) koşulunu sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var olsun ve keyfi bir $0_n \neq g \in \mathbb{R}^n$ alınsın. Bu durumda, öyle bir $\lambda_g > 0$ sayısı vardır ki $\lambda_g g \in bd(\bar{B}(0_n, \delta))$'dır. Teorem 4.1.1'den

$$E_w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid h^w(0_n, x^*, c) = 0\}$$

kümesi h'nin zayıf alt exhausterı olduğundan

$$h(g)=\sup_{h^w(0_n,x^*,c)=0}\ \min_{v\in\bar{B}(x^*,c)}\langle v,g\rangle,\ \forall g\in\mathbb{R}^n$$

eşitliği yazılabilir. (i) koşulu sağlandığından

$$h(g)=\sup_{h^w(0_n,x^*,c)=0}\ \min_{v\in\bar{B}(x^*,c)}\langle v,g\rangle\leq\min_{v\in\bar{B}(0_n,\delta)}\langle v,g\rangle=-\langle\lambda_g g,g\rangle=-\lambda_g\|g\|^2<0$$

elde edilir. O halde, sıfırdan farklı her bir $g\in\mathbb{R}^n$ için $h(g)<0$ bulunur. Buna göre, ([25], Lemma 2.2)'den $\bar{x}$, f fonksiyonunun bir kesin yerel maksimalleştiricisidir. □

Aşağıdaki örnekte, Teorem 4.1.5 ve Teorem 4.1.6'de verilen optimallik koşulları kullanılarak, bir fonksiyonun maksimalleştiricisinin bulunuşu gösterilmektedir.

Örnek 4.1.7. *$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonu verilsin. f p.h. ve yönlü türevlenebilir bir fonksiyondur ve*

$$h(g_1,g_2)=f'((0,0);(g_1,g_2))=-\sqrt{g_1^2+g_2^2}\ \ \forall(g_1,g_2)\in\mathbb{R}^2$$

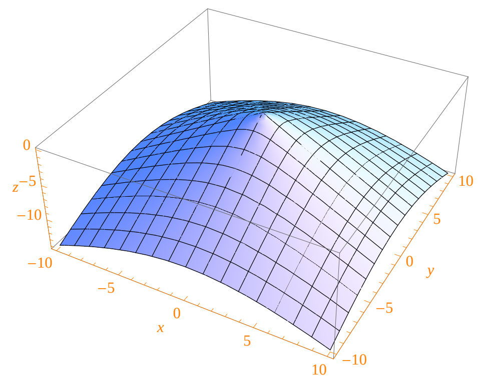
olur (Şekil 4.5). Buna göre

$$\begin{aligned} h^w((0,0),(a,b),c) &= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left\{\langle(a,b),(x,y)\rangle-c\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right\}\\ &= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\{\|(a,b)\|\|(x,y)\|\cos\theta+(1-c)\|(x,y)\|\}\\ &= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\{\|(x,y)\|\left(\|(a,b)\|\cos\theta+(1-c)\right)\}\end{aligned}$$

bulunur. Her $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için $\|(x,y)\|\geq 0$ ve $|\cos\theta|\leq 1$ olduğundan

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\{\|(x,y)\|\left(\|(a,b)\|\cos\theta+(1-c)\right)\}$$

ifadesinin değeri $\cos\theta=1$ ve $\|(a,b)\|+(1-c)\leq 0$ olduğunda 0, diğer durum-



Şekil 4.5. h fonksiyonunun grafiği

larda da $+\infty$ *olur. Dolayısıyla*

$$h^w((0,0),(a,b),c) = \begin{cases} 0 & , \quad \|(a,b)\| \le c-1, \ c \ge 1 \\ +\infty & , \quad \|(a,b)\| > c-1 \end{cases}$$

elde edilir. $h^w((0,0),(a,b),c) = 0$ *olan* (a,b,c) *vektörlerinin oluşturduğu küme Şekil 4.6'da gösterilmiştir. Üstelik,*

$$\bigcap_{h^w((0,0),(a,b),c)=0} \bar{B}((a,b),c) = \bar{B}((0,0),1) = \mathbb{B} \tag{4.18}$$

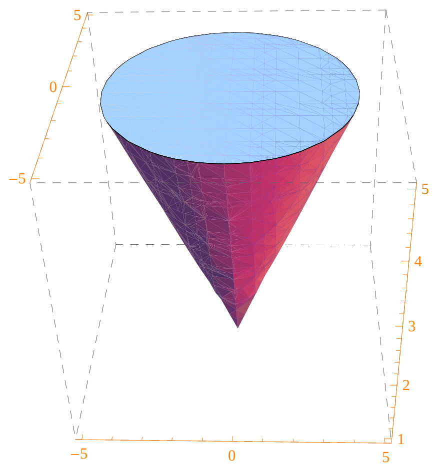
eşitliği sağlanır. Gerçekten, keyfi bir $(x,y) \in \bigcap_{h^w((0,0),(a,b),c)=0} \bar{B}((a,b),c)$ *alınsın. O halde,* $h^w((0,0),(a,b),c) = 0$ *olan her bir* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ *üçlüsü için*

$$(x,y) \in \bar{B}((a,b),c)$$

dir. Daha açık olarak, $\|(a,b)\| \le c-1, \ c \ge 1$ *eşitsizliklerini sağlayan her* (a,b,c) *için*

$$\|(x,y)-(a,b)\| \le c$$

elde edilir. Özel olarak, $(a,b) = (0,0)$ *ve* $c = 1$ *için* $\|(a,b)\| \le c-1$ *eşitsizliği sağlandığından* $(a,b,c) = (0,0,1)$ *için* $\|(x,y)-(0,0)\| \le 1$ *eşitsizliği bulunur.*



Şekil 4.6. $h^w((0,0),(a,b),c) = 0$ eşitliğini sağlayan (a,b,c) vektörlerinin oluşturduğu küme

Bu ise $(x,y) \in \mathbb{B}$ *olduğunu verir.* (x,y) *keyfi seçildiğinden*

$$\bigcap_{h^w((0,0),(a,b),c)=0} \bar{B}((a,b),c) \subseteq \mathbb{B}$$

elde edilir. Tersine, keyfi bir $(x,y) \in \mathbb{B}$ *alınsın.* (x,y)*'nin arakesite ait olduğunu göstermek için,* $\|(a,b)\| \leq c-1,\ c \geq 1$ *eşitsizliklerini sağlayan keyfi bir* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ *alınsın. O halde,* $\|(x,y)\| \leq 1$ *ve* $\|(a,b)\| \leq c-1$ *olduğundan*

$$\|(x,y)-(a,b)\| \leq \|(x,y)\| + \|(a,b)\| \leq 1 + c - 1 = c$$

olur. Buradan $(x,y) \in \bar{B}((a,b),c)$ *olur.* (x,y) *ve* (a,b) *keyfi seçildiklerinden*

$$\mathbb{B} \subseteq \bigcap_{h^w((0,0),(a,b),c)=0} \bar{B}((a,b),c)$$

bulunur. Böylece istenen eşitlik gerçeklenir. Dolayısıyla, h*'nin* $(0,0)$*'daki zayıf eşleniğini sıfır yapan tüm elemanlara karşılık gelen kapalı yuvarlar, birim yuvarı içermektedirler. O halde,* $\delta \leq 1$ *olacak şekildeki tüm* $\delta > 0$ *sayıları ve*

$h^w((0,0),(a,b),c) = 0$ *olan tüm* (a,b,c) *elemanları için*

$$\bar{B}((0,0),\delta) \subseteq \bar{B}((a,b),c)$$

kapsamı elde edilir. Böylelikle, Teorem 4.1.6 (i) *koşulu sağlandığından,* $(0,0)$ *noktası* f *fonksiyonunun bir kesin yerel maksimalleştiricisidir.*

4.2 Eşlenik-Duallik ve Exhausterlar

Bu kesimde, konveks bir optimizasyon probleminin kritik noktalarının belirlenebilmesi amacıyla, eşlenik fonksiyon yardımıyla oluşturulan dual problemin çözümleri, problemin değer fonksiyonunun üst exhausterları cinsinden ifade edilmiştir. Böylece, değer fonksiyonunun eşleniği hesaplanmadan, dual problemin çözümlerinin varlığı kontrol edilerek, başlangıçta alınan noktanın kritik nokta olup olmadığı belirlenmiştir.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu verilsin ve

$$(P) \quad \inf_{u \in \mathbb{R}^n} f(u) \tag{4.19}$$

problemi ele alınsın. Bir $\bar{u}$ noktası (P) probleminin bir çözümü ise

$$f'(\bar{u},x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

koşulunun sağlandığı bilinmektedir [12]. Bu gerçek göz önüne alınarak, her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $g(x) = f'(\bar{u},x)$ olmak üzere

$$(P') \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) \tag{4.20}$$

problemi oluşturulsun. $\bar{u}$ noktası (P) probleminin bir çözümü ise, $\mathrm{Inf}P' = 0$ olacaktır. Dolayısıyla, $\mathrm{Inf}P' = 0$ olacak şekildeki $\bar{u}$ noktaları (P) probleminin kritik noktalarını belirleyecektir.

Şimdi, (P') probleminin eşlenik duali oluşturulsun. Bunun için, önce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pozitif homojen fonksiyonunun her bir $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \varphi(x,y) = g(x+y)$$

biçiminde tanımlanan Fenchel sarsım fonksiyonu ele alınsın. g pozitif homojen olduğundan φ de pozitif homojendir. Gerçekten, $\lambda > 0$ ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda(x,y)) = \varphi(\lambda x, \lambda y) &= g(\lambda x + \lambda y) \\ &= g(\lambda(x+y)) = \lambda g(x+y) \\ &= \lambda \varphi(x,y)\end{aligned}$$

elde edilir. Ek olarak, f fonksiyonu konveks olduğundan yönlü türevi de konvekstir ([44], Önerme 1.1.2). Dolayısıyla g'nin konveksliğinden Fenchel sarsım fonksiyonu da konvekstir. O halde, φ sublineer bir fonksiyondur. φ'nin eşleniği

$$\begin{aligned}\varphi^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x^*, y^*) &\mapsto \varphi^*(x^*, y^*) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \{\langle (x^*, y^*), (x,y) \rangle - \varphi(x,y)\}\end{aligned}$$

olmak üzere (P')'nün dual problemi

$$(P')^* \quad \sup_{y^* \in \mathbb{R}^n} \{-\varphi^*(0, y^*)\} \tag{4.21}$$

biçiminde elde edilir. Öte yandan, değer fonksiyonu

$$\begin{aligned}h : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto h(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x,y)\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. φ pozitif homojen olduğundan değer fonksiyonunun da pozitif homojen olduğu açıktır. Üstelik, Yardımcı Teorem 2.2.13'den h fonksiyonu konvekstir. Ayrıca, Yardımcı Teorem 2.2.14'den

$$h^*(y^*) = \varphi^*(0, y^*)$$

olduğu görülebilir. Ek olarak, (P') problemi normal olsun yani, h değer fonksiyonu 0_n'da alttan yarı sürekli olsun. O halde, Önerme 2.2.16'dan

$$\mathrm{Inf} P' = \mathrm{Sup}(P')^*$$

olur. Öte yandan, Önerme 2.2.6'dan

$$\begin{aligned}\underline{\partial} h(0_n) &= \{y^* \in \mathbb{R}^n \mid h(0_n) + h^*(y^*) = \langle 0_n, y^* \rangle\} \\ &= \{y^* \in \mathbb{R}^n \mid h^*(y^*) = 0\}\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. Ayrıca, h sublineer olduğundan $h^{**} = h$ elde edilir. Böylece, $\underline{\partial} h^{**}(0_n) = \underline{\partial} h(0_n)$ eşitliği gerçeklenir. Buradan da, Yardımcı Teorem 2.2.17'den, $(P')^*$ probleminin çözüm kümesi $\underline{\partial} h(0_n)$ olarak elde edilir. Bu ise (4.22)'den

$$\mathrm{Inf}P' = \mathrm{Sup}(P')^* = 0$$

olduğunu gösterir. Böylelikle, güçlü dualliğin sağlandığı açıktır.

Şimdi, $(P')^*$ dual probleminin çözümleri exhausterlar cinsinden ifade edilecektir. h değer fonksiyonunun sonlu değerli ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde üstten yarı sürekli olduğu kabul edilsin. O halde, h bir E^* üst exhausterına sahiptir, yani h fonksiyonu her $y \in \mathbb{R}^n$ için

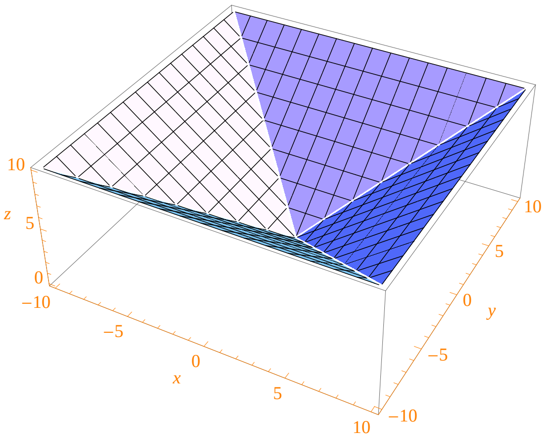
$$h(y) = \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, y \rangle$$

formunda yazılabilir.

Dual problemin çözümleri, $\underline{\partial} h(0_n) = \{y^* \in \mathbb{R}^n \mid h^*(y^*) = 0\}$ kümesinin elemanları olduğuna göre, bu çözümler h'nin üst exhausterı yardımıyla aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

$$\begin{aligned}
h^*(y^*) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle y^*, y \rangle - h(y)\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \langle y^*, y \rangle - h(y) \leq 0 \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow \quad \langle y^*, y \rangle \leq \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, y \rangle \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow \quad p_{\{y^*\}}(y) \leq \inf_{C \in E^*} p_C(y) \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow \quad p_{\{y^*\}}(y) \leq p_C(y), \ \forall C \in E^* \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow \quad p_{\{y^*\}} \leq p_C \ , \ \forall C \in E^* \\
&\Leftrightarrow \quad \{y^*\} \subseteq C, \ \forall C \in E^* \\
&\Leftrightarrow \quad y^* \in C \ , \ \forall C \in E^* \\
&\Leftrightarrow \quad y^* \in \bigcap_{C \in E^*} C
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $(P')^*$ dual probleminin çözümleri $y^* \in \bigcap_{C \in E^*} C$ koşulunu sağlayan y^* vektörleridir. Bu vektörlerin oluşturduğu küme boştan farklıysa, dual problem çözüme sahiptir. Böylelikle, $\mathrm{Inf}P' = \mathrm{Sup}(P')^* = 0$ eşitliği de göz önüne alınırsa, (P') problemi de çözüme sahiptir. Dolayısıyla, $\bar{u}$ noktası (P) probleminin bir kritik noktasıdır. Elde edilen bu sonuç aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.



Şekil 4.7. g fonksiyonunun grafiği

Teorem 4.2.1. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun, (4.20) ile verilen (P') problemi göz önüne alınsın ve bu problemin h değer fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonlu değer alan, üstten yarı sürekli ve 0_n'da alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, E^*, h'nin bir üst exhausterı olmak üzere, (4.21) ile verilen $(P')^*$ dual probleminin çözüm kümesi*

$$\bigcap_{C \in E^*} C$$

kümesidir.

Teorem 4.2.1'de elde edilen sonuç aşağıda örneklendirilmiştir.

Örnek 4.2.2. *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(u_1, u_2) = \min \{(|u_1| + |u_2|), \max \{|u_1|, |u_2|\}\}$ konveks fonksiyonu verilsin ve*

$$(P) \quad \inf_{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2} f(u_1, u_2) \tag{4.23}$$

problemi göz önüne alınsın. f fonksiyonu p.h. olduğundan, $\bar{u} = (0, 0)$ için

$$g(x_1, x_2) = f'((0, 0); (x_1, x_2)) = \min \{(|x_1| + |x_2|), \max \{|x_1|, |x_2|\}\}$$

elde edilir (Şekil 4.7). g'nin Fenchel sarsım fonksiyonu, $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \min \{(|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|), \max \{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\}\}$$

biçimindedir. Bununla birlikte,

$$(P') \quad \inf_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2)$$

probleminin değer fonksiyonu

$$h((y_1, y_2)) = \inf_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \{\min \{(|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|), \max \{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\}\}\} = 0$$

biçimindeki sabit $\mathbf{0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *fonksiyonudur. Dolayısıyla,* $E^* = \{(0, 0)\}$ *kümesi* h *değer fonksiyonunun bir üst exhausterı olduğuna göre, Teorem 4.2.1'den* $(P')^*$ *dual probleminin çözüm kümesi* $\{(0, 0)\}$ *tek nokta kümesidir. Bu küme boştan farklı olduğundan ve* h *değer fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan*

$$\mathrm{Inf}P' = \mathrm{Sup}(P')^* = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle, $\bar{u} = (0, 0)$ *noktası* f *fonksiyonu için minimalleştirici olmaya aday bir kritik noktadır.*

4.3 Zayıf Eşlenik-Duallik ve Zayıf Exhausterlar

Bu kesimde, amaç fonksiyonu konveks olmayan problemlerin, zayıf Fenchel eşlenik duallik ve zayıf exhausterlar yardımıyla kritik noktalarının belirlenebilmesi için bir yöntem verilmiştir. Asıl problemin zayıf Fenchel dualinin çözüm kümesi, problemin değer fonksiyonunun zayıf üst exhausterlarıyla karakterize edilerek, asıl problemin kritik noktalarına ulaşılmıştır. Elde edilen bu sonuçlar aşağıda ifade edilmiştir.

Herhangi bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve (4.20) ile verilen (P') problemi göz önüne alınsın. (P') probleminin duali, zayıf Fenchel eşlenik duallik [54] kullanılarak oluşturulsun. Bunun için, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pozitif homojen fonksiyonunun

$$\varphi(x, y) = g(x + y)$$

biçimindeki $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Fenchel sarsım fonksiyonunu alalım. g p.h. olduğundan φ de p.h. fonksiyondur. φ'nin zayıf eşleniği

$$\varphi^w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned}\varphi^w(x_0, x^*, c, y_0, y^*, d) &= \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ y\in\mathbb{R}^n}} \{\langle x^*, x\rangle - c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + \langle y^*, y\rangle \\ &\qquad -d\|y - y_0\| + d\|y_0\| - g(x, y)\}\end{aligned}$$

şeklindedir. O halde

$$\varphi^w(0, 0, 0, 0, y^*, d) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ y\in\mathbb{R}^n}} \{\langle y^*, y\rangle - d\|y\| - g(x + y)\}$$

olur. Böylece, $(0, 0, 0, 0) = \mathbf{0}$ olmak üzere

$$(P')^w \sup_{(y^*,d)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} \{-\varphi^w(\mathbf{0}, y^*, d)\} = \sup_{(y^*,d)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle y^*, \rangle + d\|x\| - g^w(x, y^*, d)\} \tag{4.24}$$

dual problemi elde edilir. Ek olarak,

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^n &\to \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto h(y) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x, y)\end{aligned}$$

değer fonksiyonu göz önüne alınsın. h p.h. fonksiyondur ve Yardımcı Teorem 2.2.12'den

$$h^w(\mathbf{0}, y^*, d) = \varphi^w(\mathbf{0}, y^*, d)$$

eşitliği elde edilir.

Ek olarak, (P') probleminin kararlı olduğu kabul edilsin. O halde, Yardımcı Teorem 2.2.14'den

$$\mathrm{Inf}P' = \mathrm{Sup}(P')^w$$

olur ve $\underline{\partial}^w h(0_n)$ kümesine ait her zayıf subgradient $(P')^w$ probleminin bir çözümüdür. Öte yandan, Teorem 2.2.7'den

$$\begin{aligned}\underline{\partial}^w h(0_n) &= \{(y^*, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid h(0_n) + h^w(\mathbf{0}, y^*, d) = d\|0_n\| + \langle 0_n, y^*\rangle\} \\ &= \{(y^*, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid h^w(\mathbf{0}, y^*, d) = 0\}\end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. O halde, (4.25)'den $\mathrm{Inf}P' = \mathrm{Sup}(P')^w = 0$ bulunur, yani güçlü duallik sağlanır.

Bunlara ek olarak, h değer fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonlu değerler alan, üstten yarı sürekli bir fonksiyon olduğu kabul edilsin. O halde, h, E^w zayıf üst exhausterına sahiptir, yani h fonksiyonu her $y \in \mathbb{R}^n$ için

$$h(y) = \inf_{(x^*,c)\in\overline{\partial}^w h(0_n)} \max_{v\in\bar{B}(x^*,c)} \langle v, y\rangle$$

biçiminde yazılır. Dual problemin çözümlerinin

$$\underline{\partial}^w h(0_n) = \{y^* \in \mathbb{R}^n \mid h^w(\mathbf{0}, y^*, d) = 0\}$$

kümesinin elemanları olduğu göz önüne alınarak, $h^w(\mathbf{0}, y^*, d) = 0$ olacak biçimdeki $(y^*, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ vektörleri, h'nin zayıf üst exhausterı yardımıyla aşağıdaki biçimde belirlenmiştir:

$$\begin{aligned}
h^w(\mathbf{0}, y^*, d) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{-d\|y\| + \langle y^*, y\rangle - h(y)\} = 0 \\
&\Leftrightarrow\; -d\|y\| + \langle y^*, y\rangle - h(y) \leq 0\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow\; -d\|y\| + \langle y^*, y\rangle \leq h(y)\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow\; -d\|y\| + \langle y^*, y\rangle \leq \inf_{(x^*,c)\in\overline{\partial}^w h(0_n)} \max_{v\in\bar{B}(x^*,c)} \langle v, y\rangle\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow\; \min_{w\in\bar{B}(y^*,d)} \langle w, y\rangle \leq -\sup_{(x^*,c)\in\overline{\partial}^w h(0_n)} \left(-\max_{v\in\bar{B}(x^*,c)} \langle v, y\rangle \right)\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow\; -\max_{w\in-\bar{B}(y^*,d)} \langle w, y\rangle \leq -\sup_{(x^*,c)\in\overline{\partial}^w h(0_n)} \left(-p_{\bar{B}(x^*,c)}(y)\right)\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow\; \sup_{(x^*,c)\in\overline{\partial}^w h(0_n)} \left(-p_{\bar{B}(x^*,c)}(y)\right) \leq p_{-\bar{B}(y^*,d)}(y)\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow\; \sup_{(x^*,c)\in\overline{\partial}^w h(0_n)} \left(-p_{\bar{B}(x^*,c)}\right) \leq p_{-\bar{B}(y^*,d)} \\
&\Leftrightarrow\; -p_{\bar{B}(x^*,c)} \leq p_{-\bar{B}(y^*,d)}\ ,\ \forall (x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n) \\
&\Leftrightarrow\; 0 \leq p_{\bar{B}(-y^*,d)} + p_{\bar{B}(x^*,c)}\ ,\ \forall (x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n) \\
&\Leftrightarrow\; p_{\{0_n\}} \leq p_{\bar{B}(-y^*,d)+\bar{B}(x^*,c)}\ ,\ \forall (x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n) \\
&\Leftrightarrow\; \{0_n\} \subseteq \bar{B}(-y^*, d) + \bar{B}(x^*, c)\ ,\ \forall (x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n) \\
&\Leftrightarrow\; 0_n \in \bar{B}(-y^*, d) + \bar{B}(x^*, c)\ ,\ \forall (x^*, c) \in \overline{\partial}^w h(0_n) \\
&\Leftrightarrow\; 0_n \in \bar{B}(-y^*, d) + \bigcap_{(x^*,c)\in\overline{\partial}^w h(0_n)} \bar{B}(x^*, c)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $(P')^w$ dual probleminin çözümleri

$$0_n \in \bar{B}(-y^*, d) + \bigcap_{(x^*,c)\in\overline{\partial}^w h(0_n)} \bar{B}(x^*, c)$$

koşulunu sağlayan (y^*, d) vektörleriyle belirlenir. Bu vektörlerin oluşturduğu kümenin boştan farklı olduğu durumda, $\bar{u}$ noktası f'nin minimalleştiricisi olmaya aday bir kritik noktadır. Elde edilen bu sonuç aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

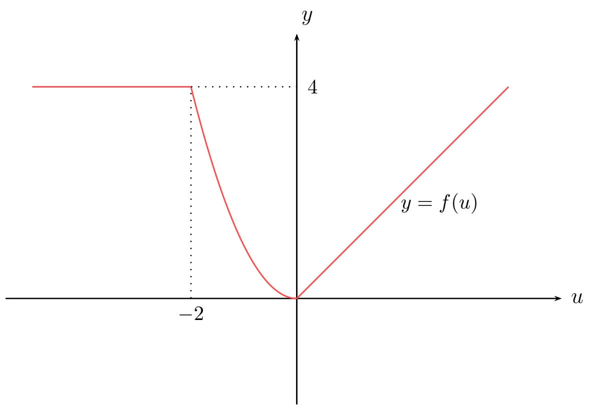
Teorem 4.3.1. *Bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin, (4.20) ile ifade edilen (P') problemi göz önüne alınsın ve bu problemin değer fonksiyonu h, $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonlu değer alan, üstten yarı sürekli ve 0_n'da zayıf subdiferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, (4.24) ile verilen $(P')^w$ zayıf Fenchel dual probleminin çözüm kümesi*

$$\{(y^*, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid 0_n \in \bar{B}(-y^*, d) + \bigcap_{(x^*,c)\in\overline{\partial}^w h(0_n)} \bar{B}(x^*, c)\}$$

kümesidir.

Aşağıda verilen örnek, konveks olmayan bir fonksiyonun kritik noktalarının, Teorem 4.3.1 kullanılarak nasıl belirlenebileceğini göstermektedir.

Örnek 4.3.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(u) = \begin{cases} 4 & , \quad u \le -2 \\ u^2 & , \quad -2 < u \le 0 \\ u & , \quad u \ge 0 \end{cases}$ *fonksiyonu verilsin (Şekil 4.8).*



Şekil 4.8. f fonksiyonunun grafiği

$\bar{u} = 0$ noktası için

$$g(x) = f'(0, x) = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

bulunur. Buna göre, g fonksiyonunun Fenchel sarsımı

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x + y & , \quad y > -x \\ 0 & , \quad y \leq -x \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla (P') probleminin değer fonksiyonu

$$h(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x, y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \begin{cases} x + y & , \quad y > -x \\ 0 & , \quad y \leq -x \end{cases}$$

biçiminde hesaplanarak, $h(y) = \mathbf{0}$ sıfır fonksiyonu elde edilir. Bu dönüşümün zayıf üst exhausterı

$$E^w = \{\bar{B}(x^*, c) \mid |x^*| \leq c\}$$

kümesi olduğundan ve

$$\bigcap_{|x^*| \leq c} \bar{B}(x^*, c) = \{0\}$$

eşitliği sağlandığından, $(P')^w$ dual probleminin çözüm kümesi $\mathbb{P}^w$ ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^w &= \{(y^*, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid 0 \in \bar{B}(-y^*, d) + \{0\}\} \\ &= \{(y^*, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid |-y^* - 0| \leq d\} \\ &= \{(y^*, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid |y^*| \leq d\} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Bu küme boştan farklı olduğundan ve h değer fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\mathrm{Inf} P' = \mathrm{Sup}(P')^w = 0$$

güçlü dualliği gerçeklenir. Dolayısıyla, $\bar{u} = 0$ noktası f'nin minimalleştiricisi olmaya aday bir kritik noktadır.

5 KUASİDİFERANSİYELLENEBİLİR FONKSİYONLARIN OPTİMİZASYONU İÇİN OPTİMALLİK KOŞULLARI

Bu bölümde, kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonların optimizasyonu üzerine elde edilen sonuçlar verilmiştir.

İlk olarak, amaç fonksiyonu kuasidiferansiyellenebilir olan bir optimizasyon probleminin, yönlü türevini amaç fonksiyonu kabul eden yeni bir optimizasyon problemi kurulmuştur. Üstelik, bu problem de, eşlenik duali de DC programlama problemleridir. Öncelikle, DC-duallik kullanılarak, bu problemin veya dualinin çözümlerinin varlığı araştırılmış, asıl ve dual çözüm kümeleri için birer karakterizasyon verilmiştir. Daha sonra, kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonların minimizasyonu, zayıf Fenchel eşlenik duallik açısından da incelenmiş ve kümelerin Minkowski toplam ve fark işlemleri yardımıyla bu problemlerin zayıf dualinin çözüm kümesi için de geometrik bir karakterizasyon verilmiştir.

5.1 DC-Duallik Yaklaşımıyla Optimallik Koşulları

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde, her $u \in \mathbb{R}^n$ için f, u noktasında yönlü türevlenebilirdir ve

$$f'(u;x) = p_A(x) - p_B(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

olacak şekilde $A = \underline{\partial} f(u), B = \bar{\partial} f(u) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt konveks kümeleri vardır. Buna göre, bir $\bar{u}$ noktası

$$(P) \left\{ \inf_{u \in \mathbb{R}^n} f(u) \right.$$

asıl probleminin bir çözümü ise, her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $f'(\bar{u};x) \geq 0$ olduğu açıktır. O halde, herhangi bir $u \in \mathbb{R}^n$ için $f'(u;x) = p_A(x) - p_B(x)$ fonksiyonunu amaç fonksiyonu kabul eden

$$(P') \left\{ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ p_{\underline{\partial} f(u)}(x) - p_{\bar{\partial} f(u)}(x) \} \right. \quad \equiv \quad \left\{ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ p_A(x) - p_B(x) \} \right.$$

biçimindeki DC programlama problemi oluşturulsun. $\bar{u}$ noktası (P)'nin bir çözümü ise $\text{Inf}P' = 0$ olacaktır. Başka bir deyişle, $\text{Inf}P' = 0$ olacak şekildeki $\bar{u}$ noktaları (P) probleminin kritik noktalarını verecektir. Üstelik (P') probleminin duali

$$(D') \left\{ \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{ p_B^*(y) - p_A^*(y) \} \right.$$

biçimindeki DC programlama problemidir.

Aşağıda, (P') ve (D') problemlerinin çözümlerinin birer karakterizasyonu verilmiştir.

Teorem 5.1.1. *(P') ve (D') problemleri göz önüne alınsın.*

(a) Bir x^* noktasının (P') probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ için

$$F_{B,\varepsilon}(x^*) \subseteq F_{A,\varepsilon}(x^*)$$

olmasıdır.

(b) Bir y^* noktasının (D') probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ için

$$N_{A,\varepsilon}(y^*) \subseteq N_{B,\varepsilon}(y^*)$$

olmasıdır.

Kanıt. (a) x^* noktası (P') probleminin bir çözümü olsun. Sonuç 2.2.5'den, her $\varepsilon > 0$ için $\partial_\varepsilon p_B(x^*) \subseteq \partial_\varepsilon p_A(x^*)$'dır. ε-subdiferansiyelin tanımından

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon p_B(x^*) &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, x - x^*\rangle - \varepsilon \leq p_B(x) - p_B(x^*),\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid p_B(x^*) \leq \langle s, x^*\rangle - \langle s, x\rangle + p_B(x) + \varepsilon,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{s \in B \mid p_B(x^*) \leq \langle s, x^*\rangle + \varepsilon,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifade de (2.2) eşitliğinden dolayı $F_{B,\varepsilon}(x^*)$'a eşittir. Dolayısıyla

$$\partial_\varepsilon p_B(x^*) = F_{B,\varepsilon}(x^*) \tag{5.26}$$

ve benzer şekilde

$$\partial_\varepsilon p_A(x^*) = F_{A,\varepsilon}(x^*) \tag{5.27}$$

bulunur. Böylelikle, her $\varepsilon > 0$ için $\partial_\varepsilon p_B(x^*) \subseteq \partial_\varepsilon p_A(x^*)$ olması

$$F_{B,\varepsilon}(x^*) \subseteq F_{A,\varepsilon}(x^*), \quad \forall \varepsilon > 0$$

olması demektir.

Tersine, her $\varepsilon > 0$ için $F_{B,\varepsilon}(x^*) \subseteq F_{A,\varepsilon}(x^*)$ kapsamı sağlansın. O halde, (5.26) ve (5.27)'den her $\varepsilon > 0$ için $\partial_\varepsilon p_B(x^*) \subseteq \partial_\varepsilon p_A(x^*)$ elde edilir. Böylece Sonuç 2.2.5'den x^*, (P') probleminin bir çözümüdür.

(b) $y^* \in A$ noktası (D') probleminin bir çözümü olsun. Sonuç 2.2.5'den her $\forall \varepsilon > 0$ için $\partial_\varepsilon p_A^*(y^*) \subseteq \partial_\varepsilon p_B^*(y^*)$'dır. Öncelikle $p_A^*(y^*)$ ve $p_B^*(y^*)$ fonksiyonları hesaplansın. Lineer fonksiyonlar kapalı ve konvekstir. Üstelik,

p_A destek fonksiyonu lineer fonksiyonların supremumu biçiminde tanımlı olduğundan ve $p_A(0_n) \not\equiv +\infty$ olduğundan, ([44], Teorem 2.4.4)'den

$$\begin{aligned} p_A^*(y^*) &= \overline{\text{co}}\left(\inf_{z\in A}\{i_{\{z\}}(y^*)\}\right) \\ &= \overline{\text{co}}(i_A(y^*)) = i_A(y^*) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $i_A(y^*)$, A kümesinin indikatör fonksiyonunu göstermektedir. Bu fonksiyonun ε-subdiferansiyeli

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon i_A(y^*) &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid i_A(y) - i_A(y^*) \geq \langle y - y^*, s\rangle - \varepsilon,\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - y^*, s\rangle \leq \varepsilon,\ \forall\, y \in A\} \\ &= N_{A,\varepsilon}(y^*) \end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. Yani

$$\partial_\varepsilon p_A^*(y^*) = N_{A,\varepsilon}(y^*) \tag{5.28}$$

ve benzer şekilde

$$\partial_\varepsilon p_B^*(y^*) = N_{B,\varepsilon}(y^*) \tag{5.29}$$

elde edilir. Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$ için $\partial_\varepsilon p_A^*(y^*) \subseteq \partial_\varepsilon p_B^*(y^*)$ olması

$$N_{A,\varepsilon}(y^*) \subseteq N_{B,\varepsilon}(y^*), \quad \forall\varepsilon > 0$$

ifadesinin sağlandığını gösterir.

Tersine, $\forall\varepsilon > 0$ için $N_{A,\varepsilon}(y^*) \subseteq N_{B,\varepsilon}(y^*)$ kapsamı sağlansın. O halde, (5.28) ve (5.29)'den $\forall\varepsilon > 0$ için $\partial_\varepsilon p_A^*(y^*) \subseteq \partial_\varepsilon p_B^*(y^*)$ elde edilir. Böylece Sonuç 2.2.5'den y^*, (D') probleminin bir çözümüdür.

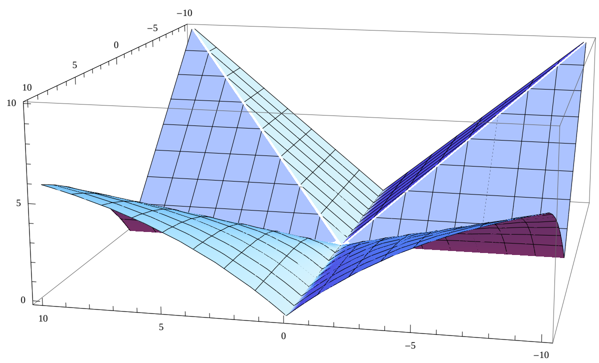
□

Aşağıda, Teorem 5.1.1 kullanılarak kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonların kritik noktalarının nasıl hesaplanabileceğini gösteren bir örnek verilmiştir.

Örnek 5.1.2. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| - \sqrt{x^2+y^2} &, \quad x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ |x| + |y| + y &, \quad x \in \mathbb{R}, y \leq -|x| \\ |y| &, \quad x \in \mathbb{R}, -|x| \leq y \leq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin (Şekil 5.9). Bu fonksiyon



Şekil 5.9. h fonksiyonunun grafiği

$$A = [-1,1] \times [-1,1]$$

$$B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\} \ \cup \ \{(x,y) \mid y \geq |x| - 1,\ y \leq 0\}$$

olmak üzere, $h(x,y) = p_A(x,y) - p_B(x,y)$ *biçiminde yazılabilir (Şekil 5.10).*

$$(P')\left\{ \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \{p_A(x) - p_B(x)\} \right.$$

ve

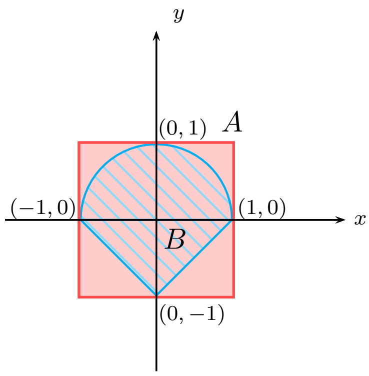
$$(D')\left\{ \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \{p_B^*(y) - p_A^*(y)\} \right.$$

problemleri göz önüne alınsın.

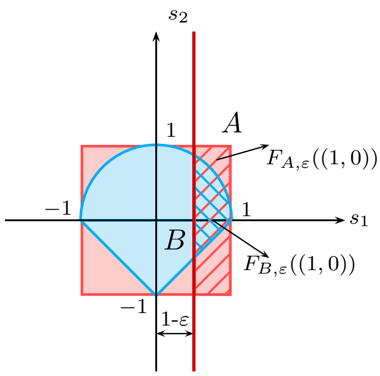
Bu problemlerin çözüm kümeleri sırasıyla $\mathbb{P}'$ *ve* $\mathbb{D}'$ *ile gösterilsin. İlk olarak,* $\mathbb{P}'$ *kümesinin elemanlarının belirlenebilmesi için* $F_{B,\varepsilon}(x^*,y^*) \subseteq F_{A,\varepsilon}(x^*,y^*)$ *olan* $(x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2$ *noktaları hesaplansın. Bir vektör yönündeki* ε*-yüzün geometrik anlamından yola çıkarak, istenen kapsamı sağlayan noktaların bu iki kümenin sınırlarının kesiştiği* $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ *noktaları ve bu bunların skaler katları olacağı görülebilir.*

Gerçekten, örnek olarak $(x^*,y^*) = (1,0)$ *alınırsa, keyfi* $\varepsilon > 0$ *için*

$$\begin{aligned} F_{A,\varepsilon}((1,0)) &= \{(s_1,s_2) \in A \mid p_A(1,0) \leq \langle (s_1,s_2),(1,0)\rangle + \varepsilon\} \\ &= \{(s_1,s_2) \in A \mid 1 \leq s_1 + \varepsilon\} \end{aligned}$$



Şekil 5.10. A ve B kümeleri



Şekil 5.11. $F_{B,\varepsilon}((1,0))$ ve $F_{A,\varepsilon}((1,0))$ kümeleri

ve

$$\begin{aligned} F_{B,\varepsilon}((1,0)) &= \{(s_1,s_2)\in B \mid p_B(1,0)\le \langle (s_1,s_2),(1,0)\rangle+\varepsilon\} \\ &= \{(s_1,s_2)\in B \mid 1\le s_1+\varepsilon\} \end{aligned}$$

olduğundan, $B\subseteq A$ *olduğu da göz önüne alınarak*

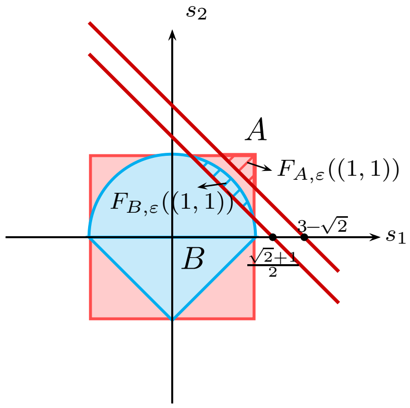
$$F_{B,\varepsilon}((1,0)) = \{(s_1,s_2)\in B \mid 1\le s_1+\varepsilon\}\subseteq \{(s_1,s_2)\in A \mid 1\le s_1+\varepsilon\} = F_{A,\varepsilon}((1,0))$$

elde edilir (Şekil 5.11). Ancak, $(x^*,y^*)=(1,1)$ *alınırsa, keyfi* $\varepsilon>0$ *için*

$$\begin{aligned} F_{A,\varepsilon}((1,1)) &= \{(s_1,s_2)\in A \mid p_A(1,1)\le \langle (s_1,s_2),(1,1)\rangle+\varepsilon\} \\ &= \{(s_1,s_2)\in A \mid 2\le s_1+s_2+\varepsilon\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{B,\varepsilon}((1,1)) &= \{(s_1,s_2)\in B \mid p_B(1,1)\le \langle (s_1,s_2),(1,1)\rangle+\varepsilon\} \\ &= \{(s_1,s_2)\in B \mid \sqrt{2}\le s_1+s_2+\varepsilon\} \end{aligned}$$

olur.



Şekil 5.12. $F_{B,\varepsilon}((1,1))$ ve $F_{A,\varepsilon}((1,1))$ kümeleri

$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ *seçilirse*

$$F_{A,\varepsilon}((1,1)) = \{(s_1,s_2) \in A \mid s_1 + s_2 \geq 3 - \sqrt{2}\}$$

$$F_{B,\varepsilon}((1,1)) = \{(s_1,s_2) \in B \mid s_1 + s_2 \geq \frac{\sqrt{2}+1}{2}\}$$

bulunur. $\frac{\sqrt{2}+1}{2} < 3 - \sqrt{2}$ *olduğundan,* $F_{B,\varepsilon}((1,1)) \nsubseteq F_{A,\varepsilon}((1,1))$ *olduğu açıktır (Şekil 5.12).*

Yukarıda gösterildiği gibi, $(1,0),(-1,0),(0,1)$ *ve* $(0,-1)$ *vektörleri bu problemin çözümleridir. Üstelik, bu vektörlerden birinin bir skaler katı alındığında,* A *ve* B *kümeleri için* ε*-yüzleri hesaplamak için kullanılan hiperdüzlemlerde sadece katsayılar değişeceğinden, yine kapsamanın korunacağı açıktır. Dolayısıyla,* (P') *probleminin çözüm kümesi*

$$\mathbb{P} = \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\} \;\cup\; \{(t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

olarak elde edilir. Yani, çözüm kümesi x*-ekseni ile* y*-ekseninin birleşimidir.*

(D') *dual probleminin çözüm kümesini bulmak amacıyla, her* $\varepsilon > 0$ *sayısı için* $N_{A,\varepsilon}(y^*) \subseteq N_{B,\varepsilon}(y^*)$ *kapsamını sağlayan* y^* *vektörleri belirlenmelidir. Bir* C *kümesinin,* ε*-normal kümesi* $N_{C,\varepsilon}(x)$ *sadece* $x \in C$ *noktaları için tanımlı olduğundan, istenen kapsamayı sağlayan noktaların* $A \cap B = B$ *kümesi üzerinde aranması yeterli olacaktır. Örneğin,* B *kümesinin uç noktalarından biri olan* $(0,1)$ *noktası için*

$$\begin{aligned} N_{A,\varepsilon}((0,1)) &= \{(s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_A(s_1,s_2) \leq \langle (s_1,s_2),(0,1) + \varepsilon\} \\ &= \mathrm{conv}\{(-\varepsilon,0),(\varepsilon,0),(0,-\tfrac{\varepsilon}{2})\} \;\cup\; ([-\varepsilon,\varepsilon] \times \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

ve

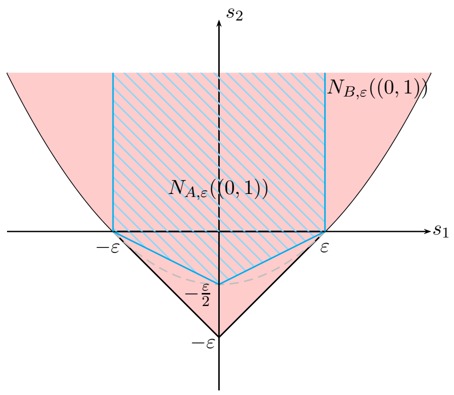
$$
\begin{aligned}
N_{B,\varepsilon}((0,1)) &= \{(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2 \mid p_B(s_1,s_2)\le s_2+\varepsilon\}\\
&= \operatorname{conv}\{(-\varepsilon,0),(\varepsilon,0),(0,-\varepsilon)\} \;\cup\; \{(s_1,s_2) \mid s_1^2-2\varepsilon s_2\le\varepsilon^2,\ s_2\ge 0\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu kümeler Şekil 5.13'de verilmiştir. Grafiklerden de görülebileceği gibi $N_{A,\varepsilon}((0,1))\subseteq N_{B,\varepsilon}((0,1))$ *kapsaması her* $\varepsilon>0$ *sayısı için sağlanmaktadır.*

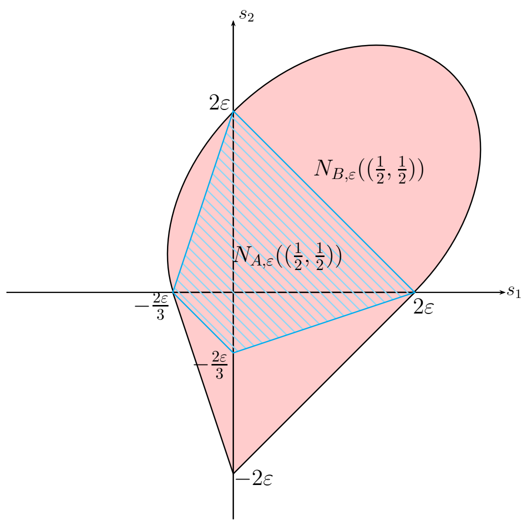
B kümesinin içinden alınan bir noktanın da istenen kapsamayı sağlayacağı açıktır. Örneğin, $(x^*,y^*)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\in \operatorname{int}B$ *noktası seçilirse, kapsamasının sağlandığı Şekil 5.14'de açıkça görülmektedir. O halde,* (D') *probleminin çözüm kümesi*

$$\mathbb{D}=B$$

olarak elde edilir.



Şekil 5.13. $N_{A,\varepsilon}((0,1))$ ve $N_{B,\varepsilon}((0,1))$ kümeleri



Şekil 5.14. $N_{A,\varepsilon}((\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ ve $N_{B,\varepsilon}((\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ kümeleri

Sonuç olarak, herhangi bir $\bar{u}$ noktasındaki kuasidiferansiyeli $Df(\bar{u}) = [A, B]$ olan bir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $\mathrm{Inf}P' = 0$ $(\mathrm{Sup}D'=0)$ *eşitliğini veren, yani her $\varepsilon > 0$ sayısı için $F_{B,\varepsilon}(x^*, y^*) \subseteq F_{A,\varepsilon}(x^*, y^*)$ $(N_{A,\varepsilon}(x^*, y^*) \subseteq N_{B,\varepsilon}(x^*, y^*))$ kapsamasını sağlayan $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ vektörleri yukarıda gösterildiği şekilde var olduğundan, $\bar{u}$ noktası f fonksiyonunun minimalleştiricisi olmaya aday bir kritik noktadır.*

Özel olarak, f fonksiyonu pozitif homojen ve $(0,0)$'daki yönlü türevi h fonksiyonuna eşit ise, yani

$$Df((0,0)) = [\underline{\partial} f(0,0), \bar{\partial} f(0,0)] = [A, B]$$

ise, bu durumda $f = h$ olacağından $(0,0)$ noktasının f fonksiyonunun bir kritik noktası olduğu sonucu ortaya çıkar.

5.2 Zayıf Fenchel Duallik Yaklaşımıyla Optimallik Koşulları

Bu kesimde, kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonların, bir noktadaki yönlü türevini amaç fonksiyonu kabul eden problemin zayıf eşlenik dönüşüm yardımıyla oluşturulan dualinin çözüm kümesi için, kuasidiferansiyelleri cinsinden bir karakterizasyon verilmiştir.

$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $Df(u) = [\underline{\partial} f(u), \bar{\partial} f(u)]$ olsun.

$$(P) \left\{ \inf_{u \in \mathbb{R}^n} f(u) \right.$$

ve

$$(P') \left\{ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ p_{\underline{\partial} f(u)}(x) - p_{\bar{\partial} f(u)}(x) \} \right.$$

problemleri ele alınsın. $\bar{u}$, (P) probleminin bir çözümü ise, $\mathrm{Inf}P' = 0$'dır. Bu durumda, $\mathrm{Inf}P' = 0$ olacak şekildeki $\bar{u}$ noktalarının, (P) probleminin kritik noktaları olduğu bilinmektedir.

Aşağıdaki teoremde, (P) probleminin kritik noktalarının bulunabilmesi için oluşturulan zayıf Fenchel dual problemin çözümleri, fonksiyonun kuasidiferansiyeli yardımıyla elde edilmiştir.

Teorem 5.2.1. *(P) ve (P') problemleri göz önüne alınsın. (P') probleminin (4.24) ile verilen zayıf Fenchel duali olan $(P')^w$ probleminin değer fonksiyonu h, 0_n'da zayıf subdiferansiyellenebilir ve has bir fonksiyon ise, $(P')^w$'nun çözüm kümesi*

$$\{(y^*, d) \mid y^* \in 2\underline{\partial} f(u) + d\mathbb{B} \dot{-} 2\bar{\partial} f(u)\}$$

dir.

Kanıt. Bir $u \in \mathbb{R}^n$ seçilip sabitlensin, $A := \underline{\partial} f(u)$ ve $B := \bar{\partial} f(u)$ olmak üzere $Df(u) = [A, B]$ olsun. $g(\cdot) = f'(u;\cdot)$ olmak üzere, $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ p.h. fonksiyonunun

$$\varphi(x, y) = g(x + y)$$

biçimindeki $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Fenchel sarsım fonksiyonu ele alınsın. φ'nin zayıf eşleniği

$$\varphi^w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$$

$$\varphi^w(x, x^*, c, y, y^*, d) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{-\langle y^*, x\rangle - d\|x\| + g^w(x, y^*, d)\}$$

dönüşümüdür. $\mathbf{0} = (0_n, 0_n, 0, 0_n)$ olmak üzere

$$(P')^w \sup_{(y^*,d)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} \{-\varphi^w(\mathbf{0}, y^*, d)\} = \sup_{(y^*,d)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle y^*, x\rangle + d\|x\| - g^w(x, y^*, d)\}$$

problemi, (P') probleminin zayıf Fenchel dualidir. Ek olarak, bu problemin değer fonksiyonu

$$\begin{aligned} h(y) &= \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x, y) \\ &= \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \{p_A(x) - p_B(x)\} + p_A(y) - p_B(y) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Üstelik, h fonksiyonu has ve 0_n'da zayıf subdiferansiyellenebilir olduğundan Yardımcı Teorem 2.2.14'den $\mathrm{Inf}P' = \mathrm{Sup}(P')^w = 0$'dır ve $\underline{\partial}^w h(0_n)$ kümesi $(P')^w$ probleminin çözüm kümesidir. Bu küme

$$\begin{aligned} \underline{\partial}^w h(0_n) &= \{(y^*, d) \mid \langle y^*, y\rangle - d\|y\| \le \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \{p_A(x) - p_B(x)\} + p_A(y) - p_B(y), \forall y \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{(y^*, d) \mid p_{\{y^*\}}(y) - p_{d\mathbb{B}}(y) \le \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \{p_A(x) - p_B(x)\} + p_A(y) - p_B(y), \forall y \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{(y^*, d) \mid p_{\{y^*\}}(y) - p_{d\mathbb{B}}(y) \le p_A(y) - p_B(y) + p_A(y) - p_B(y), \forall y \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{(y^*, d) \mid p_{\{y^*\}} - p_{d\mathbb{B}} \le 2p_A - 2p_B\} \\ &= \{(y^*, d) \mid p_{\{y^*\}} + p_{2B} \le p_{2A} + p_{d\mathbb{B}}\} \\ &= \{(y^*, d) \mid \{y^*\} + 2B \subseteq 2A + d\mathbb{B}\} \\ &= \{(y^*, d) \mid y^* \in 2A + d\mathbb{B} \dot{-} 2B\} \end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır.

Böylece dual problemin çözüm kümesi geometrik olarak ve asıl problemin amaç fonksiyonunun kuasidiferansiyeli cinsinden elde edilmiş olur. □

Aşağıda verilen örnek, önceki kesimde Örnek 5.1.2'de incelenen fonksiyonun bir kritik noktasının Teorem 5.2.1 kullanılarak belirlenişini gösterecektir.

Örnek 5.2.2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(u_1,u_2) = \begin{cases} |u_1| + |u_2| - \sqrt{u_1^2+u_2^2} & , \quad u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \geq 0 \\ |u_1| + |u_2| + u_2 & , \quad u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \leq -|u_1| \\ |u_2| & , \quad u_1 \in \mathbb{R}, -|u_1| \leq u_2 \leq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin (Şekil 5.9). f fonksiyonu $\bar{u} = (0,0)$ noktasında kuasidiferansiyellenebilirdir ve bu noktadaki kuasidiferansiyeli

$$A = [-1,1] \times [-1,1]$$

ve

$$B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\} \ \cup\ \{(x,y) \mid y \geq |x|-1,\ y \leq 0\}$$

olmak üzere $Df(\bar{u}) = [A,B]$'dir (Şekil 5.15).

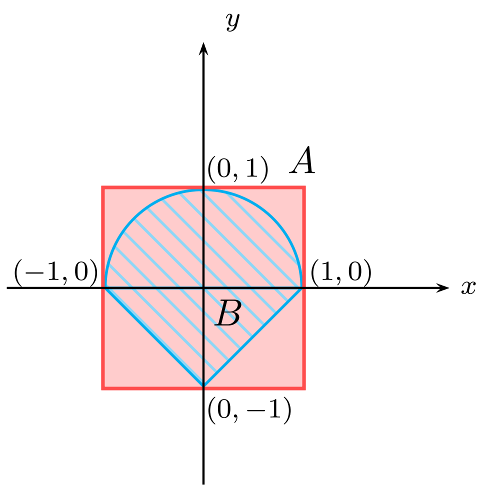
$$(P) \left\{ \inf_{u \in \mathbb{R}^n} f(u) \right.$$

ve

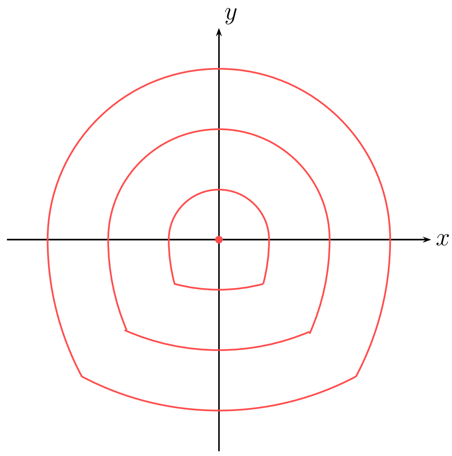
$$(P') \left\{ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{p_A(x) - p_B(x)\} \right.$$

problemleri göz önüne alınsın. (P') probleminin (4.24) ile verilen $(P')^w$ zayıf Fenchel dualinin çözüm kümesinin Teorem 5.2.1 yardımıyla elde edilmesi için

$$\{(y^*,d) \mid y^* \in 2A + d\mathbb{B} \dot{-} 2B\}$$



Şekil 5.15. A ve B kümeleri



Şekil 5.16. $d = 2,\ d = 2\sqrt{2},\ d = 3\sqrt{2}$ ve $d = 4\sqrt{2}$ için $d\mathbb{B} - 2B$ kümeleri

kümesi hesaplanmalıdır. $d\mathbb{B} \dot{-} 2B$ *Minkowski farkını boş kümeden farklı yapan en küçük* $d \geq 0$ *sayısı* 2*'dir.* $d \geq 2$ *olan gerçel sayılar için* $d\mathbb{B} \dot{-} 2B$ *farkları hesaplandığında, Şekil 5.16'da gösterilen kümeler elde edilir.*

Buradan, her bir $d \geq 2$ *sayısı için elde edilen kümelere* $2A$ *kümesi eklenirse*

$$\begin{aligned} P_d &:= \{(x, y) \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq (d-2)^2,\ d \geq 2\} \\ Q_d &:= \{(x, y) \mid (x+2)^2 + (y-2)^2 \leq (d-2)^2,\ d \geq 2\} \\ R_d &:= \{(x, y) \mid x^2 + (y+2)^2 \leq (d+2)^2 \ \wedge \\ &\qquad ((x+2)^2 + y^2 \leq (d+2)^2 \ \vee \ (x-2)^2 + y^2 \leq (d+2)^2),\ d \geq 2\} \end{aligned}$$

olmak üzere, her $d \geq 2$ *için* $2A + d\mathbb{B} \dot{-} 2B$ *kümeleri* d*'ye bağlı*

$$\overline{conv}\{P_d \cup Q_d \cup R_d\} \tag{5.30}$$

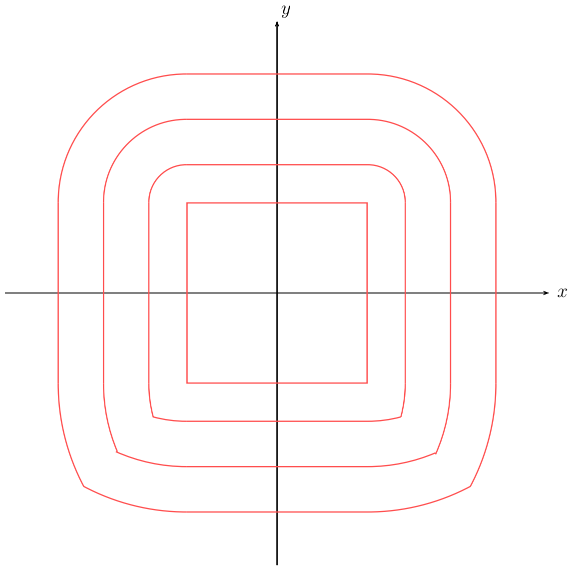
kümelerini oluştururlar. Bu kümeler, bazı özel d *sayıları için Şekil 5.17'de gösterilmiştir.*

Böylece, $(P')^w$ *dual probleminin, kesitleri (5.30) ile verilen kümeler olan çözüm kümesi*

$$\{(x, y, d) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mid (x, y) \in \overline{conv}\{P_d \cup Q_d \cup R_d\}\}$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç olarak, $(P')^w$ *zayıf Fenchel dual probleminin çözümü var olduğundan,* $\mathrm{Inf}P' = \mathrm{Sup}(P')^w = 0$*'dır ve böylece* $\bar{u} = (0, 0)$ *noktası* f *fonksiyonunun bir kritik noktasıdır.*



Şekil 5.17. $d = 2,\ d = 2\sqrt{2},\ d = 3\sqrt{2}$ ve $d = 4\sqrt{2}$ için $2A + d\mathbb{B} - 2B$ kümeleri

KAYNAKLAR

[1] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, New Jersey, A.B.D., 1970.

[2] Moreau, J.J., *Fonctions convexes en dualité*, Faculte des Sciences, Seminaires de Mathematiques, Universite de Monpellier, Montpellier, Fransa, 1962.

[3] Clarke, F.H., "Generalized gradients and applications," Trans. Amer. Math. Soc., **205(2)**, 247-262, 1975.

[4] Clarke, F.H., *Optimization and non-smooth analysis*, Wiley Interscience, New York, A.B.D., 1983.

[5] Azimov, A.Y. ve Kasimov, R.N., "On weak conjugacy, weak subdifferentials and duality with zero gap in nonconvex optimization", Int. J. of Appl. Math., **1**, 171-192, 1999.

[6] Gasimov, R.N., "Augmented Lagrangian duality and nondifferentiable optimization methods in nonconvex programming," J. Global Optim., **24**, 187-203, 2002.

[7] Kasimbeyli, R. ve Mammadov, M., "Optimality conditions in nonconvex optimization via weak subdifferentials," Nonlinear Analysis, **74**, 2534-2547, 2011.

[8] Kasimbeyli, R. ve Mammadov, M., "On weak subdifferentials, directional derivatives, and radial epiderivatives for nonconvex functions," SIAM J. Optim., **20**, 841-855, 2009.

[9] Demyanov, V.F. ve Rubinov, A.M., "On quasidifferantiable functionals", Doklady of USSR Acad. of Sci., **250**, 21-25, 1980.

[10] Demyanov, V.F. ve Rubinov, A.M., "Elements of quasidifferential calculus", *Nonsmooth Problems in the Theory of Optimization and Control*, (Ed: Demyanov, V.F.), Leningrad University Press, Rusya, 5-127, 1982.

[11] Demyanov, V.F. ve Dixon, L.C.W., *Quasidifferantial calculus*, Mathematical Prog. Society Inc., Amsterdam, Hollanda, 1986.

[12] Demyanov, V.F. ve Rubinov, A.M., *Constructive nonsmooth analysis*, Verlag Peter Lang, Frankfurt, Almanya, 1995.

[13] Demyanov, V.F., "An introduction to quasidifferential calculus," Quasidifferentiability and Related Topics (Ed: Demyanov, V.F. ve Rubinov, A.M.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1-32, 2000.

[14] Grzybowski, J., "Minimal pairs of compact convex sets," Archiv der Mathematika **63**, 173-181, 1994.

[15] Grzybowski, J. ve Urbanski, R., "Minimal pairs of bounded closed convex sets," Studia Math. **126**, 95-99, 1997.

[16] Grzybowski, J., Pallaschke, D. ve Urbanski, R., "On the reduction of pairs of bounded closed convex sets," Studia Math., **189**, 1-12, 2008.

[17] Grzybowski, J., Pallaschke, D. ve Urbański, R., "Minimal pairs of bounded closed sets as minimal representations of elements of the Minkowski–Rådström–Hörmander spaces," Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Banach Center Publications, **84(1)**, 31-55, 2009.

[18] Pallaschke, D. ve Urbanski, R., "Reduction of quasidifferentials and minimal representations," Mathem. Programming, **66**, 161-180, 1994.

[19] Pallaschke, D. ve Urbanski, R., "Quasidifferentiable functions and minimal pairs of compact convex sets," Dissertationes Math., **340**, 207-221, 1995.

[20] Pallaschke, D. ve Urbanski, R., "Quasidifferentiable functions and pairs of convex compact sets," Acta math. Vietnamica, **22**, 223-245, 1997.

[21] Pallaschke, D. ve Urbanski, R., *Pairs of Compact Convex Sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Hollanda, 2002.

[22] Demyanov, V.F., "Exhausters of a positively homogeneous function," Optimization, **45**, 13-29, 1999.

[23] Pschenichnyi, B.N., *Convex Analysis and Extremal Problems*, Nauka Publishers, Moskova, Rusya, 1980.

[24] Demyanov, V.F. ve Roshchina, V.A., "Constrained optimality conditions in terms of upper and lower exhausters," Appl. Comput. Math., **4(2)**, 25-35, 2005.

[25] Demyanov, V.F. ve Roshchina, V.A., "Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters," Optimization, **55(5-6)**, 525-540, 2006.

[26] Demyanov, V.F. ve Roshchina, V.A., "Exhausters and subdifferentials in non-smooth analysis," Optimization, **57(1)**, 41-56, 2008.

[27] Demyanov, V.F. ve Roshchina, V.A. "Generalized Subdifferentials and Exhausters in Nonsmooth Analysis", Doklady Mathematics, **76(2)**, 652-655, 2007.

[28] Roshchina, V.A., "Relationships between upper exhausters and the basic subdifferential in variational analysis," J. Math. Anal. Appl., **334**, 261-272, 2007.

[29] Fenchel, W., "On conjugate convex functions," Canad. J. Math., **1**, 73-77, 1949.

[30] Moreau, J.J., "Inf-convolution des fonctions numeriques sur un espace vectoriel," Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences Paris, **256**, 5047-5049, 1963.

[31] Azimov, A.Y. ve Gasimov, R.N., "Stability and duality of nonconvex problems via augmented Lagrangian," Cybernet. Systems Anal., **38**, 412-421, 2002.

[32] Küçük, Y., Atasever Güvenç, İ. ve Küçük, M., "Weak Fenchel and weak Fenchel-Lagrange conjugate duality for nonconvex scalar optimization problems," J Glob Optim, **54**, 813-830, 2012.

[33] Tanino, T. ve Sawaragi, Y., "Conjugate maps and duality in multiobjective optimization," Journal of Optimization Theory and Applications, **31(4)**, 473-499, 1980.

[34] Tanino, T., "Conjugate duality in vector optimization," J. Math. Anal. App., **167(1)**, 84-97, 1992.

[35] Song, W., "Conjugate duality in set-valued vector optimization," Journal of Mathematical Analysis and Applications, **216(1)**, 265-283, 1997.

[36] Luc, D.T., "On duality theory in multiobjective programming," Journal of Optimization Theory and Applications, **43(4)**, 557-582, 1984.

[37] Azimov, A.Y., "Duality for set-valued multiobjective optimization Problems, Part 1: Mathematical Programming," Journal of Optimization Theory and Applications, **137(1)**, 61-74, 2008.

[38] Jahn, J., "Duality in vector optimization", Mathematical Programming, **25(3)**, 343-353, 1983.

[39] Goh, C.J. ve Yang, X.Q., *Duality in optimization and variational inequailities*, Taylor and Francis, Londra, İngiltere, 2002.

[40] Küçük, Y., Atasever Güvenç, İ. ve Küçük, M., "Weak conjugate duality for nonconvex vector optimization," Pacific Journal of Optimization, (Yayıma kabul edildi), 2014.

[41] Küçük, M., Urbanski, R., Grzybowski J., Küçük, Y., Atasever Güvenç, İ., Tozkan, D., Soyertem, M., "Weak subdifferential/superdifferential, weak exhausters and optimality conditions," Optimization, DOI:10.1080/02331934.2014.929682, 2014.

[42] Küçük, M., Urbanski, R., Grzybowski J., Küçük, Y., Atasever Güvenç, İ., Tozkan, D., Soyertem, M., "Reduction of Weak Exhausters and Optimality Conditions via Reduced Weak Exhausters," Journal of Optimization Theory and Applications, DOI: 10.1007/s10957-014-0592-9, 2014.

[43] Hiriart-Urruty, J.P. ve Lemarechal C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms: Part II*, Springer Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften Series, Berlin, Almanya, 1993.

[44] Hiriart-Urruty, J.P. ve Lemarechal C., *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer Grundlehren Text Editions, Berlin, Almanya, 2001.

[45] Pinsker, A.G., "The space of convex sets of a locally convex space," Trudy Leningrad Engineering-Economic Institute, **63**, 13-17, 1996.

[46] Brøndsted, A., "Conjugate convex functions in topological vector spaces," Math. Fys. Medd. Danske vid. Selsk., **34(2)**, 1-26, 1964.

[47] Rockafellar, R.T., *Conjugate duality and optimization*, Conference Board of the Math. Sci. Reg. Conf. Series in App. Math., No. 16. Soc. for Ind. and App. Math., Philadelphia, A.B.D., 1974.

[48] Ekeland, I. ve Temam, R., *Convex analysis and variational problems*, Elsevier North-Holland, Amsterdam, 1976.

[49] Horst, R. ve Thoai, N.V., "DC programming: An Overview," Journal of Optimization Theory and Applications, **103**, 1-43, 1999.

[50] Rudin, C., *DC programming: The optimization method you never knew you had to know*, MIT OpenCourseWare, Lecture notes.

[51] Tao, P.D. ve Hoai An, L.T., "Convex analysis approach to D.C. programming," Acta Mathematica Vietnamica, **22(1)**, 289-355, 1997.

[52] Demyanov, V.F., "Exhausters and convexificators-new tools in nonsmooth analysis," Quasidifferentiability and Related Topics (Ed: Demyanov, V.F. ve Rubinov, A.M.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 85-137, 2000.

[53] Roshchina, V.A., "Reducing exhausters," Journal of Optimization Theory and Applications, **136(2)**, 261-273, 2008.

[54] Atasever, İ., *Zayıf eşlenik duallik ve konveks olmayan optimizasyon*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2011.