

**İŞLEMSEL VE KAVRAMSAL BİLGİNİN GELİŞİMİNİN CEBİRSEL  
KESİRLERİ İÇEREN DENKLEMLER BAĞLAMINDA İNCELENMESİ**

**Doktora Tezi**

**Mehtap TAŞTEPE**

**Eskişehir 2018**

**İŞLEMSEL VE KAVRAMSAL BİLGİNİN GELİŞİMİNİN CEBİRSEL  
KESİRLERİ İÇEREN DENKLEMLER BAĞLAMINDA İNCELENMESİ**

**Mehtap TAŞTEPE**

**DOKTORA TEZİ**

**Fen ve Matematik Eğitimi Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. H. Bahadır YANIK**

**Eskişehir**

**Eskişehir**

**Anadolu Üniversitesi**

**Eğitim Bilimleri Enstitüsü**

**Mayıs 2018**

*Bu Tez Çalışması BAP Komisyonunca kabul edilen 1603E099 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.*

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Mehtap TAŞTEPE'nin "İşlemsel ve Kavramsal Bilginin Gelişiminin Cebirsel Kesirleri içeren denklemler bağlamında incelenmesi" başlıklı tezi .../.../2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, İlköğretim Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

### Unvanı-Adı Soyadı

Üye (Tez Danışmanı) : Doç. Dr. H. Bahadır YANIK :

Üye : Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ :

Üye : Prof. Dr. Savaş BAŞTÜRK :

Üye : Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Pınar KARAMAN :

Prof.Dr. Handan DEVECİ  
Anadolu Üniversitesi  
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

### FINAL APPROVAL FOR THESIS

This thesis titled “Examination of the development of operational and conceptual knowledge in the context of equations involving algebraic fractions” has been prepared and submitted by ..... in partial fulfillment of the requirements in “Anadolu University Directive on Graduate Education and Examination” for the Degree of Master of Science/Master of Arts/Doctor of Philosophy (PhD)/Proficiency in Arts in ..... Department has been examined and approved on ...../...../.....

Committee Members Signature

#### Committee Members

#### Signature

Member (Supervisor) : Assoc. Prof. Dr. H. Bahadır YANIK :

Member : Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ :

Member : Prof. Dr. Savaş BAŞTÜRK :

Member : Assoc. Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN :

Member : Dr. Instructor Pınar KARAMAN :

Director

Graduate School of .....

## ÖZET

### İŞLEMSEL VE KAVRAMSAL BİLGİNİN GELİŞİMİNİN CEBİRSEL KESİRLERİ İÇEREN DENKLEMLER BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

Mehtap TAŞTEPE

Fen ve Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi,

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Mayıs 2018

Danışman: Doç. Dr., H. Bahadır YANIK

Bu araştırmanın amacı, cebirsel kesirlerde toplama ve çıkarma işlemini içeren denklemlerde işlemsel bilgi ve kavramsal bilgilerindeki gelişimi incelemektir.

Araştırma 2015-2016 öğretim yılında Sinop ilinde iki farklı lisede öğrenim gören 4 dokuzuncu sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Öncelikle Sinop merkezde bulunan liselerde ön uygulama soruları uygulanmış ardından 4 öğrenci belirlenmiştir. İlk klinik görüşmenin ardından haftada bir olmak üzere 7 öğretim seansı uygulanmış, son klinik görüşme ve 3 ay sonra kalıcılık klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın modelini nitel araştırma yaklaşımlarından biri olan “öğretim deneyi”, bunu desteklemek için yapılan “klinik görüşmeler” ve “doküman incelemesi” oluşturmaktadır.

Elde edilen veriler işlem esnekliği boyutunda çoklu çözüm stratejisi bilgisi göstermek, bu çözüm stratejileri arasında bilinçli tercihlerde bulunmak ve tercih edilen çözümü uygulayabilmek şeklinde üç başlık altında incelenmiştir. Çoklu strateji bilgisi bölümünde veriler kodlanarak puanlanmış ve dört düzey belirlenmiştir. Bilinçli tercihlerde bulunma ve tercih ettiği çözümü uygulayabilme durumları içerik analizi yöntemi kavramsal anlama boyutu ise betimsel analiz ve içerik analizi yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir.

Araştırma sonucunda katılımcıların bu süreçte işlemsel ve kavramsal bilgileri gelişme göstermiştir. İşlemsel anlamda çoklu strateji bilgisi geliştikçe işlem esnekliğinin geliştiği, çözümlü örneklerin bunda önemli bir rol oynadığı, çoklu strateji bilgisi gelişiminin ve çözüm için etkili stratejiyi seçerek doğru stratejileri belirleme becerisinin karşılıklı olarak birbirini olumlu etkilediği görülmüştür. Çoklu strateji bilgisinin gelişimi tercih nedeninin matematiksel olmasını sağlamıştır. Verilen denklemlere yazılan sözel problemlerde kullanılan anlamların ve problem yazarken

yapılan hataların kesrin türüne göre farklılaştığı belirlenmiştir. Denklemlerin çözümünde özellikle kesrin bölüm anlamının kullanılması iki bilgi türünün birbirini olumlu etkilediğini göstermiştir.

**Anahtar sözcükler:** İşlemsel bilgi, Kavramsal bilgi, Cebirsel kesirler, Denklemler, İşlem esnekliği, Problem kurma.

## **ABSTRACT**

### **EXAMINATION OF THE DEVELOPMENT OF OPERATIONAL AND CONCEPTUAL KNOWLEDGE IN THE CONTEXT OF EQUATIONS INVOLVING ALGEBRAIC FRACTIONS**

Mehtap TAŞTEPE

Science and Mathematics Education

Anadolu University

Graduate School of Educational Sciences May 2018

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. H. Bahadır YANIK

The purpose of this research is to examine the development of operational knowledge and conceptual knowledge in equations involving addition and subtraction in algebraic fractions.

The research was carried out by 4 ninth grade students who attended two different high schools in Sinop province in 2015-2016 academic year. Firstly, pre-application questions were applied in high school in Sinop center and 4 students were identified. Following the first clinical interview, 7 teaching sessions were held once a week, and the last clinical interview and persistence clinical interview were performed 3 months later. The model of the research constitutes the "teaching experiment" which is one of the qualitative research approaches, the "clinical interviews" and the "document examination" which are made to support this.

The obtained data are examined under three headings: to show information of multiple solution strategy in terms of transaction flexibility, to make conscious preferences among these solutions and to implement preferred solution. In the multi-strategy information section, the data were coded and scored and four levels were determined. The content analysis method and the conceptual understanding dimension are analyzed by using descriptive analysis and content analysis method.

As a result of the research, the participants have developed operational and conceptual knowledge in this process. As multi-strategy knowledge has developed in

operational sense, it has been seen that process flexibility develops, analytical examples play an important role in this, the development of multi-strategy information, and the ability to select the right strategies for the solution have mutually positive effects. The development of multi-strategy knowledge has made mathematical reason for preference. It has been determined that the meanings used in the verbal problems written in the given equations and the errors made when writing the problem differ according to the specific type. The use of the notion of a definite part in the solution of the equations has shown that the two sets of information affects each other positively.

**Keywords:** Operational knowledge, Conceptual knowledge, Algebraic fractions, Equations, Process flexibility, Problem formulation.

## Önsöz

Doktora öğrenimi boyunca herkes çeşitli zorluklar yaşamış ve bu zorluklara göğüs germede birçok insandan destek almıştır. Öncelikle araştırma sürecim boyunca gerek manevi desteğini, gerekse bilimsel katkılarını esirgemeyen, eleştirel bakış açısı, ılımlı yaklaşımı, bana olan sabrı ve deneyimi ile gelişimime yön veren, çok değer verdiğim ve yaşadığım sürece değer vereceğim hocam ve danışmanım Sayın Doç. Dr. H. Bahadır YANIK'a minnettarım. Tez önerim ve tez izleme komitelerime yoğun çalışmalarına rağmen katılarak araştırmama katkı sağlayan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Sayın hocalarım Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ ve Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yine tez savunma jürime katılarak önerileriyle ufku açan ve her zaman desteğini yanımda hissettiğim hocam Sayın Prof. Dr. Savaş BAŞTÜRK'e ve yine tez savunma jürime katılarak önerileriyle ufku açan Sayın Yrd. Doç. Dr. Pınar KARAMAN'a da sonsuz teşekkürler.

Benden hiçbir problem konusunda desteğini esirgemeyen, hem doktoramın ders aşamasında, hem de araştırma sürecinde yanımda olarak her ihtiyacım olduğunda yardımına koşan ve ömrüm boyunca minnettar kalacağım arkadaşım Sayın Arş. Gör. Osman BAĞDAT'a teşekkürü bir borç bilirim. Bana güç veren, yeri geldiğinde dertlerime ortak olup yeri geldiğinde heyecanımı paylaşan ve hep yanımda olmalarını dilediğim çalışma arkadaşlarım ve dostlarım Sayın Okt. Sabri BOZTEPE'ye, Öğr. Gör. Ayşegül USTAOĞLU'na, Yrd. Doç. Dr. Binhan KOYUNCUOĞLU'na ve Arş. Gör. Pınar UZUN'a, Arş. Gör. Dr. Gülfem Dilek Yurttaş KUMLU'ya ve Arş. Gör. Şeyda ÖZCAN'a teşekkür ederim. Doktora öğrenimim boyunca danışmanımın yürütücülüğündeki proje ile tezime teknik destek ve araştırma desteği sağlayan Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu'na da ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak yine bu süreçte ve zorlandığım her süreçte yanımda olan aileme minnettar olduğumu bildirmek isterim.

Mehtap TAŞTEPE

Eskişehir, 2018

## **ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ**

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu, çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Mehtap TAŞTEPE

**Bu belgenin ciltlenmiş tezin “Abstract”tan sonraki sayfasında ıslak imzanız ile (fotokopi olmayacak) yer alması gerekmektedir.**

.../.../20....

## **STATEMENT OF COMPLIANCE WITH ETHICAL PRINCIPLES AND RULES**

I hereby truthfully declare that this thesis is an original work prepared by me, that I have behaved in accordance with the scientific ethical principles and rules throughout the stages of preparation, data collection, analysis and presentation of my work, that I have cited the sources of all the data and information that could be obtained within the scope of this study, and included these sources in the references section, and that this study has been scanned for plagiarism with “scientific plagiarism detection program” used by Anadolu University, and that “it does not have any plagiarism” whatsoever. I also declare that, if a case contrary to my declaration is detected in my work at any time, I hereby express my consent to all the ethical and legal consequences that are involved.

Mehtap TAŞTEPE

\* This document has to be included with your original signature (no photocopies) on the page following the “Abstract” page of the bound copy of the thesis.

## İÇİNDEKİLER

TABLolar LİSTESİ .....	xviii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	xxii
EKLER .....	xxvii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	xxviii
BİRİNCİ BÖLÜM .....	1
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Problem Durumu .....	1
1.2. Araştırmanın Önemi.....	3
1.3. Araştırmanın Amacı ve Araştırma Soruları .....	4
1.4. Sayıtlar.....	5
1.5. Sınırlılıklar .....	5
1.6. Kavramsal Çerçeve.....	7
1.6.1. Cebir.....	7
1.6.1.1. Cebirsel kesirler.....	9
1.6.1.2. Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler .....	15
1.6.1.3. Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde işlemler .....	17
1.6.2. İşlem esnekliği .....	21
1.6.2.1. Çözümlü Örnekler .....	23
1.6.2.2. Rasyonel sayılarda temel aksiyomlar .....	23
1.6.2.3. Denklem çözümünde kullanılan dönüşümler .....	24
1.6.1.3.1. Benzer değişkenleri birleştirme .....	31
1.6.1.3.2. Benzer değişkenleri ve sabitleri sadeleştirme .....	32
1.6.1.3.3. Önce çarpma.....	32
1.6.1.3.4. Önce bölme.....	33
1.6.1.3.5. Önce toplama-çıkarma.....	33

1.6.1.3.6. Ortak paranteze alma.....	34
1.6.1.3.7. Kesrin anlamı: Yarım ve çeyrek.....	34
1.6.1.3.8. Değişkenleri düzenleyerek benzer değişkenleri birleştirme.....	35
1.6.1.3.9. Değişkenleri düzenleyerek benzer değişkenleri sadeleştirme.....	36
1.6.3. Kavramsal anlama.....	36
1.6.3.1. Semboller ve Referanslar Arasında Bağ Kurulması.....	39
1.6.3.2. Sözel hikâye problemi.....	41
1.6.3.3. Kesirlerin temsil türleri.....	42
1.6.2.3.1. Parça-bütün anlamı.....	43
1.6.2.3.2. Ölçme anlamı.....	44
1.6.2.3.3. İşlemci (Operatör) anlamı.....	44
1.6.2.3.4. Oran anlamı.....	44
1.6.2.3.5. Bölüm anlamı.....	44
1.7. İlgili Araştırmalar.....	45
1.7.1. Cebirsel kesirler.....	45
1.7.2. İşlem esnekliği.....	46
1.7.2.1. Öğretmen ya da öğretmen adayları ile yapılan araştırmalar.....	46
1.7.2.2. Öğrenciler ile yapılan araştırmalar.....	47
1.7.3. Sözel problem kurma.....	48
1.7.3.1. Cebirsel denklemler ve sözel problem.....	50
2. YÖNTEM.....	51
2.1. Araştırmanın Modeli.....	51
2.2. Pilot Çalışma ve Katılımcıların Belirlenmesi.....	53
2.3. Veri Toplama Süreci.....	54
2.3.1. Veri toplama araçları.....	56
2.3.1.1. Görüşmeler.....	56

2.3.1.2. Gözlemler .....	57
2.3.2. Öğretim Seansları.....	57
2.3.2.1. İşlem esnekliği boyutu .....	58
2.3.2.2. Kavramsal boyut .....	59
2.4. Veri Analizi.....	60
2.4.1. İşlem esnekliği.....	62
2.4.1.1. Çoklu çözüm stratejisi bilgisinin analiz edilmesi.....	62
2.4.1.2. Çözüm stratejileri arasında bilinçli tercihte bulunma durumlarının analiz edilmesi .....	68
2.4.1.3. Tercih ettiği uygulayabilme durumlarının analiz edilmesi .....	69
2.4.2. Kavramsal anlama .....	69
2.5. Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği .....	70
3. BULGULAR VE YORUM .....	71
3.1. Katılımcıların İşlem Esnekliği Durumlarına İlişkin Bulgu ve Yorumlar .....	71
3.1.1. Katılımcıların çalışma öncesi mevcut durumları.....	71
3.1.1.1. Katılımcıların çoklu strateji bilgileri.....	71
3.1.1.1.1. Temel düzey .....	72
3.1.1.1.2. Orta düzey.....	73
3.1.1.1.3. Üst düzey .....	73
3.1.1.1.4. İleri düzey.....	73
3.1.1.2. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumları.....	74
3.1.1.3. Katılımcıların stratejileri doğru bir şekilde uygulayabilme durumları .....	75
3.1.2. Katılımcıların değişim süreçlerine ilişkin bulgu ve yorumlar .....	76
3.1.2.1. Katılımcıların çoklu strateji bilgilerinin değişim süreci .....	76
3.1.2.1.1. Temel düzey .....	79

3.1.2.1.2. Orta düzey.....	79
3.1.1.1.3. Üst düzey .....	89
3.1.1.1.4. İleri düzey.....	104
3.1.2.2 Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim süreci.....	116
3.1.2.2.1. Ayşegül'ün bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim süreci .....	117
3.1.2.2.2. Berna'nın bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim süreci .....	119
3.1.2.2.3. Erdem'in bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim süreci .....	122
3.1.2.2.4. Serkan'ın bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim süreci .....	124
3.1.2.3. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma bu tercihlerini uygulayabilme durumlarının değişim süreci .....	128
3.1.2.3.1. Ayşegül'ün bilinçli tercihlerde bulunma ve uygulayabilme durumlarının değişim süreci .....	129
3.1.2.3.2. Berna'nın bilinçli tercihlerde bulunma ve uygulayabilme durumlarının değişim süreci .....	131
3.1.2.3.3. Erdem'in bilinçli tercihlerde bulunma ve uygulayabilme durumlarının değişim süreci .....	134
3.1.2.3.4. Serkan'ın bilinçli tercihlerde bulunma ve uygulayabilme durumlarının değişim süreci .....	135
3.1.3. Son klinik görüşmeden elde edilen bulgu ve yorumlar .....	138
3.1.3.1. Katılımcıların çoklu strateji bilgileri.....	138
3.1.3.1.1. Temel düzey .....	138
3.1.3.1.2. Orta düzey.....	138
3.1.3.1.3 .Üst düzey .....	139

3.1.3.1.4. İleri düzey .....	139
3.1.3.2. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumları .....	140
3.1.3.3. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunarak bu tercihlerini uygulayabilme durumları .....	142
3.1.4. Kalıcılık klinik görüşmeden elde edilen bulgu ve yorumlar .....	143
3.1.4.1. Katılımcıların çoklu strateji bilgileri .....	143
3.1.4.1.1. Temel düzey .....	143
3.1.4.1.2. Orta düzey .....	143
3.1.4.1.3. Üst düzey .....	144
3.1.4.1.4. İleri düzey .....	144
3.1.4.2. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumları .....	145
3.1.4.3. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunarak bu tercihlerini uygulayabilme durumları .....	146
3.2.1. Katılımcıların çalışma öncesi mevcut kavramsal bilgileri .....	147
3.2.1.1. Bölüm anlamı .....	149
3.2.1.2. Oran anlamı .....	152
3.2.1.3. Ölçme anlamı .....	153
3.2.1.4. İşlemci anlamı .....	153
3.2.1.5. Parça-bütün anlamı .....	154
3.2.2. Katılımcıların kavramsal değişim süreçleri .....	156
3.2.2.1. Bölüm anlamı .....	163
3.2.2.1.1. Payı cebirsel paydası nümerik kesirli ifadeleri içeren denklemler .....	163
3.2.2.1.2. Payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler .....	174
3.2.2.1.3. Payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler .....	180

<b>3.2.2.2. Oran anlamı.....</b>	<b>184</b>
<b>3.2.2.2.1. Payı cebirsel paydası nümerik kesirli ifadeleri içeren denklemler</b> .....	<b>184</b>
<b>3.2.2.2.2. Payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler</b> .....	<b>187</b>
<b>3.2.2.2.3. Payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler .....</b>	<b>193</b>
<b>3.2.2.3. Ölçme anlamı .....</b>	<b>198</b>
<b>3.2.2.3.1. Payı cebirsel paydası nümerik kesirli ifadeleri içeren denklemler</b> .....	<b>198</b>
<b>3.2.2.3.2. Payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler</b> .....	<b>204</b>
<b>3.2.2.3.3. Payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler .....</b>	<b>208</b>
<b>3.2.2.4. İşlemci anlamı .....</b>	<b>214</b>
<b>3.2.2.4.1. Payı cebirsel paydası nümerik kesirli ifadeleri içeren denklemler</b> .....	<b>214</b>
<b>3.2.2.4.2. Payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler</b> .....	<b>217</b>
<b>3.2.2.4.3. Payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler.....</b>	<b>218</b>
<b>3.2.2.5. Parça-bütün anlamı .....</b>	<b>219</b>
<b>3.2.2.5.1. Payı cebirsel paydası nümerik kesirli ifadeleri içeren denklemler</b> .....	<b>219</b>
<b>3.2.2.5.2. Payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler</b> .....	<b>222</b>
<b>3.2.2.5.3. Payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler .....</b>	<b>224</b>
<b>3.2.3. Son klinik görüşme.....</b>	<b>227</b>
<b>3.2.3.1. Bölüm anlamı .....</b>	<b>230</b>
<b>3.2.3.2. Oran anlamı.....</b>	<b>232</b>
<b>3.2.3.3. Ölçme anlamı .....</b>	<b>234</b>

3.2.3.4. İşlemci anlamı .....	237
3.2.3.5. Parça-bütün anlamı .....	238
3.2.4. Kalıcılık klinik görüşme.....	240
3.2.4.1. Bölüm anlamı .....	243
3.2.4.2. Oran anlamı.....	245
3.2.4.3. Ölçme anlamı .....	247
3.2.4.4. İşlemci anlamı .....	249
3.2.4. Parça-bütün anlamı .....	251
4. SONUÇ .....	253
4.1. İşlem Esnekliğine Yönelik Sonuçlar.....	253
4.2. Kavramsal Anlamaya Yönelik Sonuçlar .....	256
5. TARTIŞMA.....	260
6. ÖNERİLER.....	268
6.1. Öğretimde Uygulamaya Yönelik Öneriler .....	268
6.2. Gelecekteki Araştırmalara Yönelik Öneriler.....	270
KAYNAKÇA .....	271
EKLER .....	291
ÖZGEÇMİŞ .....	297

## TABLolar LİSTESİ

Tablo 1. 1. Ashlock'un (2006) kesirlerle ilgili belirlediği öğrenci hataları .....	11
Tablo 1. 2. Kesirler konusunun öğretim programındaki yeri .....	12
Tablo 1. 3. Cebirsel ifadeler konusunun öğretim programındaki yeri.....	13
Tablo 1. 4. Cebirsel kesirlerin gösterim yolları .....	13
Tablo 1. 5. Cebir ve cebirsel kesirlerin öğretim programındaki yeri	14
Tablo 1. 6. Rasyonel sayılar için temel aksiyomlar .....	23
Tablo 1. 7. Rasyonel sayılarda işlemlere dair aksiyomlar .....	24
Tablo1.8.Doğrusal denklemlerin çözümünde kullanılan dönüşümler .....	25
Tablo 1. 9. Çözüm taksonomileri .....	25
Tablo 1. 10. Denklem çözümünde kullanılan dönüşümler .....	26
Tablo 1. 11. Çözüm taksonomileri .....	27
Tablo 1. 12. Bir cebirsel kesirli denklemin iki farklı çözümünün karşılaştırılması	28
Tablo 1. 13. Çözüm taksonomileri .....	29
Tablo 1. 14. Benzer değişkenleri birleştirme dönüşümüne örnek .....	31
Tablo 1. 15. Benzer değişkenleri ve sabitleri sadeleştirme dönüşümlerine örnek	32
Tablo 1. 16. Önce çarpma dönüşümüne örnek .....	32
Tablo 1. 17. Önce bölme dönüşümüne örnek .....	33
Tablo 1. 18. Önce toplama-çıkarma dönüşümüne örnek .....	34
Tablo 1. 19. Ortak paranteze alma ve değişkenle çarpma dönüşümlerine örnek ..	34
Tablo 1. 20. Kesrin anlamı dönüşümüne örnek .....	35
Tablo1.21. Değişkenleri düzenleyerek benzer değişkenleri birleştirme dönüşümüne örnek.....	35
Tablo1.22.Değişkenleri düzenleyerek benzer değişkenleri sadeleştirme dönüşümüne örnek.....	36
Tablo 1. 23. Kavramsal bilgi tanım türlerinin özeti Crooks ve Alibali (2014, s. 348)	
Tablo 2. 1. Cebirsel kesirli ifadeleri içeren örnek sorular .....	56
Tablo 2. 2. Soru kodlama örnekleri .....	61

Tablo 2. 3. Çözüm stratejileri puanlama rubriği .....	62
Tablo 2. 4. Klinik görüşme çözüm puanlama rubriği .....	63
Tablo 2. 5. İşlem esnekliği çoklu strateji bilgi düzeylerinin özellikleri .....	64
Tablo 2. 6. Öğretim seanslarının içeriği ve amaçları .....	65
Tablo 2. 7. İşlem esnekliği düzey belirleme rubriği .....	66
Tablo 2. 8. İşlem esnekliği düzeyleri ve aralıkları .....	67
Tablo 2. 9. Çözümlerin puanlamasına dair örnek çözümler .....	68
Tablo 3. 1. Katılımcıların ilk klinik görüşmedeki çoklu strateji bilgi düzeyleri.....	72
Tablo 3.2. İlk klinik görüşmede katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve tercih edilen çözüm frekansları .....	74
Tablo 3. 3. Katılımcıların Stratejileri doğru uygulayabilme durumları .....	75
Tablo 3. 4. Katılımcıların çoklu strateji bilgilerinin düzeylere göre değişimi.....	76
Tablo 3. 5. Tercih edilen çözüm frekansları.....	116
Tablo 3. 6. Ayşegül'ün çoklu stratejisi bilgisi ve tercihleri .....	117
Tablo 3. 7. Berna'nın çoklu stratejisi bilgisi ve tercihleri .....	120
Tablo 3. 8. Erdem'in çoklu stratejisi bilgisi ve tercihleri .....	122
Tablo 3. 9. Serkan'ın çoklu stratejisi bilgisi ve tercihleri.....	125
Tablo 3. 10. Gösterilen çözüm sayısı .....	128
Tablo 3. 11. Gösterilen çözüm sayısı ve niteliği.....	129
Tablo 3. 12. Ayşegül'ün çoklu stratejisi bilgisi, gösterilen çözüm sayısı ve tercihleri .....	130
Tablo 3. 13. Berna'nın çoklu stratejisi bilgisi, gösterilen çözüm sayısı ve tercihleri .....	132
Tablo 3. 14. Erdem'in çoklu stratejisi bilgisi, gösterilen çözüm sayısı ve tercihleri .....	134
Tablo 3. 15. Serkan'ın çoklu stratejisi bilgisi, gösterilen çözüm sayısı ve tercihleri .....	136
Tablo 3. 16. Katılımcıların son klinik görüşmedeki çoklu strateji bilgisi durumları .....	138
Tablo 3. 17. Son klinik görüşmede katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve tercih edilen çözüm frekansları.....	140
Tablo 3. 18. Katılımcıların kalıcılık klinik görüşmedeki işlem esneklik durumları .....	143

Tablo 3. 19.	Kalıcılık klinik görüşmede katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve tercih edilen çözüm frekansları.....	145
Tablo 3. 20.	Katılımcıların ilk klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....	147
Tablo 3. 21.	Katılımcılara cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere problem yazmaları için tasarlanan öğretim seansları.....	156
Tablo 3. 22.	Katılımcıların öğretim seanslarında verilen denklemlere cebirsel kesir türüne göre problem yazabilme durumları .....	158
Tablo 3. 23.	Kesrin anlamlarına göre çözdürülen problem frekansları .....	162
Tablo 3. 24.	Katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair sözel problem yazma durumları .....	164
Tablo 3. 25.	Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair sözel problem yazabilme durumları.....	174
Tablo 3.26.	Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları .....	180
Tablo 3.27.	Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....	185
Tablo 3.28.	Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....	187
Tablo 3.29.	Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....	193
Tablo 3.30.	Katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....	199
Tablo 3.31.	Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....	204
Tablo 3.32.	Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....	209
Tablo 3.33.	Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....	214
Tablo 3.34.	Katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....	220
Tablo 3.35.	Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....	222

<b>Tablo 3.36.</b>	<b>Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları .....</b>	<b>224</b>
<b>Tablo 3.37.</b>	<b>Katılımcıların son klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları.....</b>	<b>227</b>
<b>Tablo 3.38.</b>	<b>Katılımcıların kalıcılık klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları .....</b>	<b>240</b>

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. 1. Çalışmadaki referansiyel ilişki.....	39
Şekil 2. 1. Öğretim deneyi uygulama aşamaları.....	55
Şekil 2. 2. İşlem esnekliği uygulama yönerge şeması.....	58
Şekil 2. 3. Kavramsal anlama uygulama yönerge şeması.....	59
Şekil 3. 1. Ayşegül, Berna ve Erdem'e ait çözüm örnekleri.....	72
Şekil 3. 2. Serkan, İlk klinik görüşme, Yenilikçi çözüm.....	73
Şekil 3. 3. Katılımcıların çoklu bilgi stratejisi bilgi puanlarının değişimi.....	78
Şekil 3. 4. Ayşegül, Öğretim seansı 1.....	80
Şekil 3. 5. Berna, Öğretim seansı 1.....	81
Şekil 3. 6. Serkan, Öğretim seansı 1.....	82
Şekil 3. 7. Berna, Öğretim seansı 1.....	83
Şekil 3. 8. Berna, Öğretim Seansı 1.....	84
Şekil 3. 9. Erdem, Öğretim seansı 1.....	84
Şekil 3. 10. Serkan, Öğretim seansı 1.....	85
Şekil 3. 11. Ayşegül, Öğretim seansı 1.....	86
Şekil 3. 12. Berna, Öğretim seansı 1.....	86
Şekil 3. 13. Berna, Öğretim seansı 2.....	90
Şekil 3. 14. Berna, Öğretim seansı 4.....	91
Şekil 3. 15. Ayşegül, Öğretim seansı 2.....	92
Şekil 3. 16. Berna, Öğretim seansı 2.....	93
Şekil 3. 17. Erdem, Öğretim seansı 2.....	94
Şekil 3. 18. Ayşegül, Öğretim seansı 3.....	95
Şekil 3. 19. Berna, Öğretim seansı 3.....	96
Şekil 3. 20. Öğretim seansı 4.....	97
Şekil 3. 21. Ayşegül, Öğretim seansı 2.....	98
Şekil 3. 22. Berna, Öğretim seansı 3.....	99
Şekil 3. 23. Ayşegül, Öğretim seansı 4.....	100
Şekil 3. 24. Berna, Öğretim seansı 4.....	101
Şekil 3. 25. Erdem, Öğretim seansı 4.....	102
Şekil 3. 26. Serkan, Öğretim seansı 4.....	103
Şekil 3. 27. Öğretim seansı 6.....	105
Şekil 3. 28. Öğretim seansı 5.....	106

Şekil 3. 29. Öğretim seansı 7 .....	107
Şekil 3. 30. Ayşegül, Öğretim seansı 5.....	108
Şekil 3. 31. Öğretim seansı 5 .....	109
Şekil 3. 32. Öğretim seansı 6 .....	110
Şekil 3. 33. Öğretim Seansı 6, Berna .....	110
Şekil 3. 34. Berna, Öğretim seansı 7.....	111
Şekil 3. 35. Öğretim seansı 5 .....	112
Şekil 3. 36. Öğretim seansı 5 .....	113
Şekil 3. 37. Öğretim seansı 7 .....	113
Şekil 3. 38. Öğretim seansı 6 .....	114
Şekil 3. 39. Berna, Öğretim seansı 6.....	115
Şekil 3. 40. Ayşegül, Öğretim seansı 4.....	118
Şekil 3. 41. Ayşegül, Öğretim seansı 5.....	119
Şekil 3. 42. Berna, Öğretim seansı 3.....	120
Şekil 3. 43. Berna, Öğretim seansı 1.....	121
Şekil 3. 44. Erdem, Öğretim seansı 1.....	122
Şekil 3. 45. Erdem, Öğretim seansı 1.....	123
Şekil 3. 46. Erdem, Öğretim seansı 3.....	123
Şekil 3. 47. Erdem, Öğretim seansı 4.....	124
Şekil 3. 48. Serkan, Öğretim seansı 1 .....	125
Şekil 3. 49. Serkan, Öğretim seansı 1 .....	126
Şekil 3. 50. Serkan, Öğretim seansı 2 .....	126
Şekil 3. 51. Serkan, Öğretim seansı 3 .....	127
Şekil 3. 52. Serkan, Öğretim seansı 7.....	127
Şekil 3. 53. Ayşegül, Öğretim seansı 4.....	130
Şekil 3. 54. Ayşegül, Öğretim seansı 5.....	131
Şekil 3. 55. Berna, Öğretim seansı 1 .....	133
Şekil 3. 56. Berna, Öğretim seansı 4.....	133
Şekil 3. 57. Erdem, Öğretim seansı 3.....	135
Şekil 3. 58. Serkan, Öğretim seansı 1,6 ve 7 .....	136
Şekil 3. 59. Serkan, Öğretim seansı 5 .....	137
Şekil 3. 60. Serkan ve Erdem'e ait çözüm örnekleri.....	139
Şekil 3. 61. Ayşegül ve Berna'ya ait çözüm örnekleri.....	140

Şekil 3.62. Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'a ait çözüm örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme.....	144
Şekil 3. 63. Erdem'e ait problem örneği .....	150
Şekil 3. 64. Ayşegül ve Berna'ya ait problem örnekleri .....	151
Şekil 3. 65. Berna ve Erdem'e ait problem örnekleri .....	151
Şekil 3. 66. Erdem ve Serkan'a ait problem örnekleri .....	152
Şekil 3. 67. Serkan ve Ayşegül'e ait problem örnekleri.....	153
Şekil 3. 68. Ayşegül ve Serkan'a ait problem örnekleri .....	154
Şekil 3. 69. Kesrin türüne göre verilen anlamlar .....	160
Şekil 3. 70. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri ve yorumları.....	166
Şekil 3. 71. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri.....	166
Şekil 3. 72. Serkan ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri .....	167
Şekil 3. 73. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2 ..	168
Şekil 3. 74. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2 ....	169
Şekil 3. 75. Ayşegül'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2.....	169
Şekil 3. 76. Berna ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2.....	170
Şekil 3. 77. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2.....	170
Şekil 3. 78. Serkan ve Erdem'e ait eksik sözel problem örnekleri, Öğretim seansı .....	171
Şekil 3. 79. Berna ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3.....	172
Şekil 3. 80. Ayşegül ve Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3 ...	172
Şekil 3. 81. Erdem'e ait eksik sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3.....	173
Şekil 3. 82. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4 ..	176
Şekil 3. 83. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4.....	177
Şekil 3. 84. Serkan'a ait sözel problem örneği, Öğretim seansı 4.....	178
Şekil 3. 85. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 5 ..	178
Şekil 3. 86. Berna ve Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 6 .....	182
Şekil 3. 87. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 7...	182
Şekil 3. 88. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3 ..	186
Şekil 3. 89. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4 ..	189
Şekil 3. 90. Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4.....	190
Şekil 3. 91. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 5...	191
Şekil 3. 92. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 5.....	191

Şekil 3. 93. Ayşegül, Berna ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 6 .....	195
Şekil 3. 94. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 6.....	195
Şekil 3. 95. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 7...	196
Şekil 3. 96. Ayşegül'e ait sözel problem örneği ve yorumu, Öğretim seansı 1 .....	201
Şekil 3. 97. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 1 ....	201
Şekil 3. 98. Ayşegül ve Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2 ...	202
Şekil 3. 99. Ayşegül'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3.....	203
Şekil 3. 100. Berna ve Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4 ....	206
Şekil 3. 101. Ayşegül ve Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4 .	206
Şekil 3. 102. Berna'ya ait sözel problem örneği, Öğretim seansı 4.....	207
Şekil 3. 103. Serkan'a ait sözel problem örneği, Öğretim seansı 4.....	207
Şekil 3. 104. Berna, Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 5 .....	208
Şekil 3. 105. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 6.	210
Şekil 3. 106. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 7.	211
Şekil 3. 107. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 7.....	212
Şekil 3. 108. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 1 ..	216
Şekil 3. 109. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3 ..	216
Şekil 3. 110. Berna'ya ait sözel problem örneği, Öğretim seansı 3.....	217
Şekil 3. 111. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3 ..	221
Şekil 3. 112. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 5.	223
Şekil 3. 113. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 6.	225
Şekil 3. 114. Ayşegül ve Erdem 'e ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme .....	230
Şekil 3. 115. Berna ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme	231
Şekil 3. 116. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme .....	232
Şekil 3. 117. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme .....	233
Şekil 3. 118. Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme .....	234

Şekil 3. 119. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme .....	235
Şekil 3. 120. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme .....	236
Şekil 3. 121. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme .....	237
Şekil 3. 122. Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme .....	238
Şekil 3.123. Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme .....	243
Şekil 3.124. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme .....	244
Şekil 3.125. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme .....	245
Şekil 3.126. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme .....	246
Şekil 3.127. Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme .....	247
Şekil 3.128. Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme .....	248
Şekil 3. 129. Erdem'e ait sözel problem örneği, Kalıcılık klinik görüşme.....	250
Şekil 3.130. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme.....	251
Şekil 4. 1. Katılımcıların klinik görüşmeler ve öğretim seansları arasındaki çoklu strateji bilgisi düzey geçişleri.....	254
Şekil 4. 2. Bölüm ve oran anlamı .....	257
Şekil 4. 3. Ölçme ve İşlemci anlamı .....	258
Şekil 4. 4. Parça-bütün anlamı.....	258

## **EKLER**

<b>EK 1. Sinop Milli Eğitim Müdürlüğü'nden alınan izin belgesi.....</b>	<b>291</b>
<b>EK 2. Öğretmen Bilgilendirme ve İzin Formu.....</b>	<b>292</b>
<b>EK 3. Veli Bilgilendirme ve İzin Formu .....</b>	<b>293</b>
<b>EK 4. Öğrenci Bilgilendirme ve İzin Formu .....</b>	<b>294</b>
<b>EK 5. Klinik Görüşme Soru Örnekleri.....</b>	<b>295</b>

## **SİMGELER VE KISALTMALAR**

**NCTM:** National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)

**SPÖ:** Standart pratik yöntem öncesi

**SP:** Standart pratik yöntem

**YAÇ:** Yenilikçi alternatif çözüm

**PE:** Paydaları eşitleme

**D:** Dağılma özelliğini kullanma

**SE:** Sabit ekleme-çıkarma

**DE:** Değişken ekleme-çıkarma

**İDÇ:** İçler dışlar çarpımı yapma

**ÇA:** Çarpanlara ayırma

**SBö:** Sabitle bölme

**PE:** Paydaları eşitleme

**SB:** Benzer olan terimleri ve sabitleri birleştirme

**DBö:** Değişkenle bölme

**ÇA:** Çarpanlara ayırma

**Pc Pdn:** Payı cebirsel paydası nümerik

**Pn Pdc:** Payı nümerik paydası cebirsel

**Pc Pdc:** Payı ve paydası cebirsel

## BİRİNCİ BÖLÜM

### 1. GİRİŞ

Bu bölümde öncelikle problem durumu, araştırmanın önemi, araştırmanın amacı ve araştırma problemleri, sayıtlar ve sınırlılıklara yer verilmiş olup ardından cebir ve cebirsel kesirler, teorik–kavramsal çerçeve ve ilgili araştırmalara değinilmiştir.

#### 1.1. Problem Durumu

Matematik bireyin eğitim süreci boyunca aldığı temel derslerden biridir. Bu kadar uzun bir zaman dilimine yayılmasının birçok sebebi olmakla birlikte yoğun bir içeriğe sahip olması bu nedenlerin başında gösterilebilir. Matematiğin bu yoğun içeriği sayılar, işlemler, cebir, geometri, veri analizi ve olasılık olmak üzere 5 konu alanına ayrılmıştır (National Council of Teachers of Mathematics Standarts (NTCM), 2000).

Bu beş konu alanından biri olan cebir, içeriği en fazla olan konu alanlarından biridir. Hem matematikte hem de matematik eğitiminde önemli bir yere sahiptir, çünkü okul öncesinden üniversiteye kadar bütün sınıf düzeyleri için bir konu alanı olarak planlanmıştır (Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013). Bu nedenle matematik dersi öğretim programlarında geniş yer tutar.

Bu konu alanının alt öğrenme alanlarından biri ise cebirsel kesirli ifadeleri de içeren denklemlerdir. Eğer bir eşitlik içerdiği bilinmeyen veya bilinmeyenlerin her değeri için sağlanıyorsa bu eşitliğe özdeşlik, bir kısmı için sağlanıyor veya hiçbir değer için sağlanmıyorsa bu eşitliğe de denklem denir (Altun, 2004). Denklemler iki cebirsel niceliğin birbirine karşı olan eşitlik durumunu gösterir. Eşitlik, değişkenler ve cebirsel ifadeler denklemlerin bileşenlerini oluşturmaktadır (Council of Chief State School Officers (CCSSO), 2010a). Ancak bu bileşenlerin anlaşılması ile cebirsel denklemleri anlamak mümkündür. Yapılan araştırmalara göre, ortaokul öncesinde öğrenciler eşit işaretinin ilişkisel bir sembol olduğunu ve toplam değer her iki tarafta da aynı olmasıyla ilgili bir denge görevi gördüğünü nadiren anlamaktadırlar (Falkner, Levi ve Carpenter, 1999; Baroudi, 2006).

NCTM'e (2011) göre öğrencilerin cebirsel ifade, denklem ve fonksiyonu anlamaları değişkenlerin çoklu anlamını öğrenmelerine bağlıdır. Bu durum kesirli

ifadeleri içeren denklemlerde daha karmaşık bir hal almaktadır. Booth (1986), Boothand Watson (1990), Stacey ve MacGregor (1997b) ve Kilpatrick vd. (2001) öğrencilerin cebirsel ifadelerle mücadele ettiklerini, çünkü değişkenin anlamını anlamadıklarını ve sayıdan başka bir şey olan bir probleme verilen cevabı anlamada zorlandıklarını (örneğin  $3x + 1$ ) bulmuşlardır. Sasman, Linchevski ve Olivier (1997) cebirin öğrenciler tarafından anlaşılmasının nedenlerini cebirin yapısı, öğrencilerin zihinsel gelişimleri, hazırbulunuşluk düzeyleri ve cebirin öğretimindeki eksiklikler olarak belirtmişlerdir.

Cebirin anlamlı bir şekilde öğrenilebilmesi noktasında bilginin zihinde yapılandırılabilmesi önemlidir. Birey yeni bir bilgi ile karşılaştığında ancak bir dizi zihinsel süreçten geçerek bilgiyi anlamlandırabilir. Bu süreç gelen bilginin incelenmesi, yeni bilginin bireyin mevcut bilgileri ile olan benzerlik ve farklılıklarının irdelenerek ilişkilendirilmesi ve zihinde bulunan bilgi şemasında yerini almasını içerir. Bu aşamada bilginin yapısı önemli bir yere sahiptir, çünkü bu süreci doğrudan etkiler. Matematik eğitimindeki bilgi türlerinden ikisi ise işlemsel ve kavramsal bilgidir (Skemp, 1978; Yanık, 2016.). Bu bilgi türleri işlemsel anlama ve kavramsal anlama olarak da karşımıza çıkabilmektedir.

İşlemsel bilgi problem çözümede kullanılan işlemlerin adımlarını içeren bilgi (Star, 2005, 2007), işlemsel anlama ise öğrencilerin ve hatta öğretmenlerin bir kurala sahip olmaları, bu kuralı anlamlandırmaksızın tanımlamaları ve kullanmalarıdır (Skemp, 1976). Kavramsal bilgi “matematiksel kavramların, işlemlerin ve ilişkilerin anlaşılması” olarak ifade edilebilir (Kilparick, Swafford ve Findell, 2001, s.5). Kavramsal anlama ise öğrencilerin yaptıkları şeyi anlamalarıdır (Skemp, 1987). Geçmişte kavramsal ve işlemsel bilgi birbirinden farklı bilgiler olarak ele alınmış ve birçok bilim adamı (Resnick, Cauzinille-Marmeche, ve Mathieu, 1987; Booth, 1989; Kaput, 1989; Payne ve Squibb, 1990) tarafından kavramsal bilgi daha üst düzey bir bilgi olarak nitelendirilmiştir. Ancak zamanla bu düşünce değişmiş işlemsel bilginin de kavramsal bilgi gibi önemli olduğu vurgulanmaya başlanmıştır (Yanık, 2016).

Bu araştırmada cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler kapsamında dokuzuncu sınıf öğrencilerin işlemsel ve kavramsal bilgileri incelenmiştir.

## 1.2. Araştırmanın Önemi

Matematiğin en geniş problem konusu alanlarından biri olan cebir matematik eğitiminde üzerine en çok çalışılan problem konularından biri olmuştur. Ancak cebir problem konusunda yapılan araştırmaların çoğu cebirsel işlemleri çözebilme ve hatalar boyutu üzerine odaklanmış ve nihayetinde öğrenci zorlukları üzerine şekillenmiştir (MacGregor ve Stacey, 1996; Dooren, Verschaffel ve Ongehena, 2003; Van Ameron, 2003). İşlem esnekliği problem konusunda ve kavramsal anlama üzerine yapılan araştırmalar ise son derece sınırlı kalmıştır.

Star (2003, 2005, 2007, 2015) yaptığı çalışmalarla işlemsel bilginin önemini matematik eğitiminde yeniden gündeme getirerek bu alanda daha çok çalışmaların yapılması gerektiğini belirtmiştir. Son 30 seneyi göz önüne alırsak işlemsel bilgi ve işlemsel bilginin gelişimine yönelik yapılan çalışmalar son derece sınırlıdır. Bu çalışma bu açıdan alanyazındaki önemli bir eksikliği giderme yönünde yapılan çalışmalara katkıda bulunmayı hedeflemektedir.

Bu araştırmanın diğer araştırmalardan birkaç yönüyle farklı yanları bulunmaktadır. Öncelikle, çalışma cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler bağlamında öğrencilerin işlemsel bilgilerinin (özellikle işlem esnekliğinin) zamanla gelişiminin nasıl olduğuna odaklanmıştır. Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler üzerine matematik eğitimi alanyazınında (Öksüz, 2004; Yantz, 2013) çok sınırlı çalışmalar bulunmaktadır. Özellikle cebir kavramının kendine has karmaşıklığı kesrin anlamı ile birleştiğinde daha karmaşık bir hal almaktadır. Literatürde (Lewis, 1981; Star, 2011) işlem esnekliği üzerine yapılan diğer araştırmaların ise kesirli olmayan denklemler üzerine (Lewis, 1981 ve Star, 2011) ya da orantı problem konusundaki problemler üzerine (Berk ve Taber, 2009) yapıldığı görülmüştür. Araştırmalarda genellikle öğretmen adayları (Berk ve Taber, 2009), üniversite öğrencileri, uzman matematikçiler (Lewis, 1981) ya da ortaokul öğrencileri (Star, 2001) ele alınırken, bu araştırmada lise öğrencileri örneklem olarak incelenmiştir.

Bu araştırmanın diğer araştırmalardan diğer bir farkı işlem esnekliğinin cebirsel kesirli denklemler bağlamında gerçekleştirilmiş olmasıdır. Cebirsel kesirler matematik eğitimi alanyazınında az çalışılan konular arasında yerini almaktadır. Alanyazında bu konu ile ilgili iki araştırma tespit edilmiştir (Öksüz, 2004; Yantz, 2013).

Kavramsal boyutunda ise genellikle bir kavram üzerine odaklanılmış, değişkene ve eşitlik sembolüne yüklenen anlam ve hatalar bu çalışmaların odak noktası olmuştur (Keiran, 1981; Schoenfeld ve Arcavi, 1988; Pope, 1994; Crooks ve Alibali, 2014). Bu araştırmada cebirsel kesirli denklemler hem türlerine hem de kesrin farklı anlamlarına göre ele alınmıştır. Özellikle, öğrencilerin bu denklemleri nasıl yorumladıkları, değişkenlere ne gibi anlamlar yükledikleri ve bu anlamların kesirlerin farklı yorumları ile nasıl ilişkili olduğu incelenmiştir. Bu açıdan alanyazında diğer çalışmalardan ayrılmaktadır.

### **1.3. Araştırmanın Amacı ve Araştırma Soruları**

Genel olarak bu araştırmanın amacı öğrencilerin cebirsel kesirli denklemlerde işlemsel ve kavramsal bilgilerinin gelişimini incelemektir. Bu kapsamda özellikle işlemsel açıdan öğrencilerin cebirsel kesirli denklemlerdeki işlem esnekliği durumları ve zamanla bu durumlardaki değişimler araştırılmıştır. Ayrıca kavramsal boyutta öğrencilerin cebirsel kesirli denklemleri anlamlandırma süreçleri incelenmiştir.

Cebir alanyazında üzerine yoğun çalışılan konulardan biri olmakla birlikte az sayıda çalışma (Darley, 2005; Öksüz, 2004; Yantz, 2013) özellikle öğrencilerin cebirsel kesirlere yönelik düşünce yapıları hakkında bilgi vermektedir. Buna karşın, bu çalışmalarda öğrencilerin işlemsel bilgilerinin gelişimine odaklanılmamış ya da hem işlemsel hem de kavramsal açıdan ele alınmamıştır. Matematik eğitimcileri öğrencilerin matematiksel kuralları genellikle ezberlediklerini ve bu yüzden kolay unuttuklarını ifade etmişlerdir. Bu nedenle matematiksel işlemlerin anlaşılmasını sağlamak için kavramsal bilgiyle bağlantı kurulması gerektiğini vurgulamışlardır (Hiebert ve Carpenter, 1992; Star, 2001). Bu araştırma, cebirsel kesirli denklemlerde işlemsel anlamaya dair işlem esnekliği bağlamında, kavramsal anlamaya dair ise cebirsel kesirli denklemlerin sözel probleme dönüştürülmesi bağlamında alanyazında önemli bir boşluğu doldurmayı amaçlamaktadır. Bu bağlamda bu araştırmada şu sorulara cevap aranmıştır,

1. Katılımcıların cebirsel kesirli denklemlerde işlemsel esneklikleri nasıl gelişmektedir?

- Katılımcıların cebirsel kesirli denklemlerde uygulama öncesi işlem esneklikleri ne durumdadır?

- Katılımcıların işlem esnekliklerinin gelişimine etki eden faktörler nelerdir?

2. Katılımcılar cebirsel kesirli denklemleri anlamlandırma durumları nasıl gelişmektedir?

- Katılımcılar verilen cebirsel kesirli denklemlere yönelik sözel-hikâye problemlerini uygulama öncesinde ne ölçüde yazabilmektedirler?
- Katılımcıların verilen cebirsel kesirli denklemlere sözel hikâye problemi yazabilme becerileri zamanla nasıl bir değişim göstermektedir?

#### 1.4. Sayılılar

Bu bölümde araştırma sürecinde müdahale edilemeyen ya da kontrol altına alınamayan ya da kanıtlanamadığı için var olduğu kabul edilen durumlar ele alınmıştır.

- Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere dair katılımcıların önceden var olan bilgi ve deneyimlerinin, katılımcıların denklem çözme ve kavramsal anlamaya dair kararlarını etkileyeceği varsayılmaktadır.
- Katılımcıların uygulamalar esnasında bulunduğu diğer eğitim-öğretim ortamlarından etkilenmediği varsayılmaktadır.
- Katılımcılar faaliyetlere aktif olarak dâhil oldukları için kavram ve prosedürler geliştireceklerdir.
- Katılımcıların içten ve samimi olduğu varsayılmaktadır.
- Katılımcıların işlem esnekliği ve kavramsal anlama durumlarının değişimi ve gelişimi için 7 öğretim seansının yeterli olduğu varsayılmaktadır.

#### 1.5. Sınırlılıklar

Bu bölümde bu araştırmanın problem konusu, örneklem, veri toplama araçları vb. açılardan sınırlılıklarına yer verilmiştir.

- Araştırma cebirsel kesirleri içeren denklemlerde sadeleştirme, toplama ve çıkarma işlemleri ile sınırlıdır.
- Araştırma Sinop il merkezindeki liselerde okuyan 4 tane 9. sınıf öğrencisi ile sınırlıdır.

- Araştırmanın verileri, araştırmacı-öğretmen tarafından düzenlenen öğretim seansları ve bu seanslar esnasında çekilen video kayıtları, uygulama kâğıtları, alan notları ve katılımcı günlükleri ile sınırlıdır.

## 1.6. Kavramsal Çerçeve

Bu bölümde araştırmanın dayandığı kavramsal çerçeve cebir, işlem esnekliği ve kavramsal anlama boyutunda sunulmuştur.

### 1.6.1. Cebir

Sfard (1995) cebiri “genel bir hesaplama bilimi” olarak tanımlarken, O’Bannon, Reed ve Jones (2002) örüntü, kural ve sembollerin bir dili olduğunu belirtmişlerdir. Usiskin (1997) ise cebiri bilinmeyenler, formüller, örüntüler, değişkenlerin yerini alan yer tutucular ve ilişkiler gibi bileşenlerden oluşan matematiğin bir dili olarak ifade etmiştir. Bu sebeple cebir matematikte soyutlamanın en çok yapılabildiği konu alanıdır (Altun, 2005). Lacampagne’a (1995) göre cebir temel cebirsel kavramların tam öğrenilmesi durumunda ileri matematiksel konuların kapısını açar.

Ayrıca, Lee (1996) de, cebirin matematiğin geniş bir kültürünü içine alan bir mini kültür olduğunu belirterek, öğrencilerin eski kültürden (aritmetik) bu yeni kültüre (cebir) geçerken zorlandıklarını söylemektedir. Lee’ye göre, kendisini bu yabancı kültürün (cebir) içinde bulan öğrenciler “kültürel şok” olarak adlandırılacak bir durum yaşamaktadırlar. Bu durum ise, matematik programı içinde oldukça fazla öneme sahip olan cebirin, öğrenciler tarafından ortaokuldan başlayarak üniversiteye kadar endişe ve korkuya neden olan ve anlaşılmasında büyük zorlukların çekildiği bir konu olarak görülmesine neden olmaktadır.

Ülkemizde de, öğrencilerin cebiri anlama düzeylerini belirlemek üzere yapılan araştırmalarda, yukarıda bahsedilen araştırmalara benzer veriler elde edilmiştir. Örneğin, Milli Eğitim Bakanlığı (MEB)’na bağlı Eğitim Araştırma ve Geliştirme Daire Başkanlığı (EARGED) (1996) tarafından, içinde cebir programının da bulunduğu bir araştırma raporu hazırlanmıştır. Araştırma raporu sonuçları, öğrencilerden bazılarının birinci dereceden denklemlerin çözümlerini bulamadıklarını ve cebirsel ifadeleri anlamakta belirli zorluklara sahip olduklarını ortaya koymuştur. Genel olarak bakıldığında öğrencilerin büyük çoğunluğu cebirin yapısal boyutuna geçememektedirler. Dolayısıyla da cebiri anlamakta zorlanırlar. Öğrencilerin cebirsel kavramları ve yapıları anlayabilmeleri için bazı ön bilgilere sahip olmaları gerekmektedir. Bunlar, eşitlik kavramı, değişken kavramı ve aritmetik işlem kavramıdır (Dede ve Argün, 2003).

a) Eşitlik Kavramı: Öğrencilerin eşitlik konusundaki kavram yanılgıları denklemlerle ilgili ilk deneyimlerinden kaynaklandığı belirlenmiştir. Öğrencilere çok sıklıkla denklemler aynı formatta sunulmakta ve böylece eşit işareti ile denklemin sonucunu ifade eden “cevap şudur” kavramını geliştirmektedirler (Baroudi, 2006; Falkner vd., 1999; Kieran, 1980, 1981; Van Dooren vd., 2002).

Kieran (1980, 1981, 1988, 2008) öğrencilerin eşitliği anlamasıyla ilgili 10 yıl süren bir araştırma yürütmüştür. Bu çalışmasında Kieran (1981) okul öncesinden üniversiteye kadar öğrencilerin eşit kavramlarını incelemiştir. Okul öncesi çocukların eşiti anlamaları farklı iki kümeyi hesaplamak ve her bir kümedeki toplam elemanları karşılaştırarak iki kümenin “aynı” olması ile sınırlı kalmıştır. Kieran ilkököl ve ortaokulda öğrencilerin eşit işaretini sıklıkla bir işlem yapmak olarak gördüklerini doğrulamış ve öğrencilerin eğer  $2 + 1 = 3$  yerine  $3 = 2 + 1$  yazılırlarsa denklemlerin geriye doğru yazıldıklarına inandıklarını bulmuştur. Yaklaşık 13 yaşındaki öğrencilerin Eşit işaretini “cevabın sorulması” sembolü olarak düşünmekten, eşit işaretini eşitliği sunan bir kavram olarak anlamaya doğru bir geçiş olduğunu bulmuştur. Bununla birlikte, öğrenci çalışmalarının incelenmesi yoluyla, Kieran (1981) öğrencilerin lisede yapmaya devam ettikleri hataların eşitliği doğru bir şekilde anlamadıklarını ve cevabın sorulmasının bir sembolü olarak eşit işaretini yanlış bir şekilde kullanmaya geri döndükleri belirtmiştir.

b) Değişken Kavramı: Değişken bir sayının rolünü üstlenen bir harf veya harflerin bir dizisidir. Herhangi bir anda bu harf veya harf dizileri özel bir sayının rolünü üstlenir. Buradaki sayıya ise değişkenin değeri adı verilir ve bu değer her zaman değişebilir (Schoenfeld ve Arcavi, 1988). NCTM’e (2011) göre öğrencilerin cebirsel ifade, denklem ve fonksiyonu temel olarak anlaması öğrencilerin değişkenlerin çoklu anlamını öğrenmelerine bağlıdır. Fonksiyon, denklemler, kümeler, ispat ve genelleme kavramlarının öğrenilebilmesi için öncelikle değişken kavramının doğru bir şekilde öğrenilmesi gerekir (Schoenfeld ve Arcavi, 1988).

c) Aritmetik İşlem Bilgisi: Öğrencilerin çoğunun, aritmetik işlem bilgilerinde eksiklerinin olduğunu ve bu öğrencilerin cebiri anlamadaki zorluklarının çoğunlukla, aritmetik işlem bilgisi eksikliğinden kaynaklandığını ortaya koyan birçok araştırma mevcuttur (Cortes ve Pfaff, 2000; Lee, 2002; Şandır, Ubuz ve Argün, 2003; Tsamir ve Bazzini, 2004 vb.). Bu araştırmalara göre, öğrencilerin cebirsel işlemleri (yapılar)

anlamakta zorlanmalarının nedeni, aritmetiğin temel kavramı olan sayı kavramını iyi bir şekilde kavrayamadıklarından kaynaklanmaktadır. Öğrencilerin, aritmetikten cebire geçişteki zorluklarının giderilmesi kolay değildir. Bu geçişin sağlanabilmesi, aritmetik kavram bilgisinin sürekliliğinden ziyade yeniden yapılandırılması ile mümkün olabilecektir (Booth, 1988; Kieran, 1992; Herscovics ve Linchevski, 1994; Gürbüz ve Akkan, 2008).

Genel olarak cebir sembollerin, örüntülerin ve ilişkilerin bir dilidir ve kendi kuralları, işlemleri, tanımları olan soyut bir sistemdir. Cebir, nicelikler, fonksiyonlar dâhil matematiksel ilişkilerin temsil yolları arasındaki ilişkileri vurgular. Bunlara ek olarak cebir, soyut yapılarla ve sembolle ifade edilen problem çözme yapılarının kullanım ilkeleriyle ilgilidir. Cebir, denklemlerdeki bilinmeyen değişkenleri temsil etmek için, sembollerin özellikle harflerin kullanıldığı aritmetik işlemlerin bir uygulamasıdır.

Bu öğrenme alanının ilişkili olduğu diğer bir kavram ise hem kendine özgü bir aritmetik işlem uygulaması gerektiren hem de cebir kapsamında karşımıza çıkabilen kesrin anlamıdır. Bir sonraki bölümde bu kapsamda cebirsel kesirler konusu ele alınmıştır.

#### ***1.6.1.1. Cebirsel kesirler***

Cebirsel kesirler hem matematikte önemli bir yeri olan kesirleri, hem de cebiri içermesi bağlamında önemli bir matematiksel gösterim biçimidir. Bu bölümde cebirsel kesirleri daha iyi ifade etmek için önce kesirler ele alınmış, ardından cebirsel kesirler incelenmiştir.

Kesirler başta rasyonel sayılar olmak üzere ondalık gösterimler, oran, işlemler ve cebir gibi cebirin kendisi ve alt alanlarıyla yakından ilişkilidir (Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983; Kieren, 1988; Saxe, vd., 2001). Olkun ve Uçar'a (2007) göre kesirler, ilkokuldaki matematik konularının çoğundan daha ağır ve karışıktır. Çünkü öğrenciler kesirleri sayı olarak algırlar ve daha önce öğrendikleri sayılarla ilişkilendirmede zorlanırlar. Olkun ve Uçar (2007) kesirlerin sayma sayılarından iki şekilde farklılık gösterdiğini belirtmişlerdir. Bunlardan ilki çevredeki varlıkları bir doğal sayı ile gösterebilirken, kesirleri bölme ve ölçme yaparak göstermek için 2 doğal sayıya ihtiyacımızın olmasıdır. İkincisi ise cevabı doğal sayı olan sorularda "Kaç tane?"

sorusunu sorarken cevabı kesir olan sorularda “Ne kadar?” sorusunun sorulmasıdır. Doğal sayılarda geçerli olan kuralların kesirlerde her zaman geçerli olmaması bu konunun öğrenciler tarafından zor anlaşılmasına neden olmaktadır. Bu farklılıklardan dolayı kesirler konusu öğrenciler tarafından anlaşılması zor bir konu olarak belirlenmiştir.

Kerslake (1995) kesirlerde başarılı olmanın matematikte başarı sağlamanın bir ölçütü olduğunu ve bu durumun kesirler konusunda öğrencilerde kaygı oluşmasına neden olduğunu belirtmiştir, çünkü başlangıçta da belirtildiği gibi kesirler birçok konu alanı ile ilişkilidir.

Çocuklar sağlam bir kesir kavrayışına sahip olduklarında, bu bilgiyi gerçek yaşam olgularını betimlemek ve onu ölçme, olasılık ve istatistiği içeren problemlere uygulamak için kullanabilirler. Sağlam bir kesir ve ondalık kesir kavrayışı, öğrencilerin sayıların gücünden ve kullanılabilirliğinden haberdar olmalarını sağlar ve onların sayı sistemi bilgisini büyütür (NCTM, 2000, s. 57).

Diğer bir durum ise yapılan araştırmaların, kesrin, yani “a/b” sembolünün birden fazla şekilde yorumlanabileceğini göstermesidir (Kieren, 1976; Behr vd., 1983; Behr vd., 1992). Bir kesirli sayı, verilen problemin durumuna ve içeriğine göre, parça–bütün, bir ölçüm, bir bölüm, bir orantı ya da bir işlemci anlamını barındırabilir. Bu anlam fazlalığı öğrencilerin bu sayıları ve bu sayılara ilişkin kavramları öğrenmelerini zorlaştırmaktadır (Toluk, 2001).

Alanyazında kesirlerin öğretimi ve öğrenimine dair çeşitli araştırmalar mevcuttur. Kesirlerin anlamının ve kesirlerle işlemlerin öğretimi ve öğrenimi uzun zaman almaktadır. Araştırmacılar ve program geliştiricileri bunun için çok zaman harcamışlardır (Williams, 1894; Aksu, 1997; Ma, 1999; NCTM, 2000; Toluk, 2001, Brown ve Quinn, 2006; Petit, Laird ve Marsden, 2010; Lamon, 2012; Van de Walle vd., 2013). Örneğin Williams (1984) ilköğretim matematik programlarının kesirler konusu üzerinde özellikle durduğunu, çünkü öğrencilerin kesrin anlamını ve kesirlere dair farklı durumları gerçek hayatla ilişkilendirmede ve kesirlerin farklı temsillerini göstermekte ve kullanmakta zorlandıklarını belirtmiştir. Aksu (1997) çalışmasında öğrencilerin kendilerine sembolik olarak sunulan problemlerde, sözel ve kavramsal olarak sunulan problemlere göre daha başarılı olduklarını belirlemiştir. Buradan öğrencilerin kesirleri kavramsaldan ziyade işlemsel olarak öğrendikleri şeklinde bir

yorum yapılabilir. Olkun ve Uçar (2007) çocukların kesirleri, daha önce öğrendikleri sayılardan farklı olduğu için, sayı olarak algılamalarının ve bu nedenle bu sayılarla yapılan dört işlemi anlamalarının zor olduğunu söylemişlerdir. Kesirlerde işlemler konusunda yapılan en önemli hatalardan biri tamsayılarda olduğu gibi işlem yapmaktır. (Crouse ve Sloyer, 1987; Haser ve Ubuz, 2000; McLeod ve Newmarch, 2006). Örneğin,  $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3}{9}$  gibi. Ashlock (2006) ise alanyazına dayalı olarak kesirlerde karşılaşılan öğrenci hatalarını kategorilere ayırarak ele almıştır (bkz. Tablo 1.1.).

**Tablo 1. 1.** *Ashlock'un (2006) kesirlerle ilgili belirlediği öğrenci hataları*

Kavram	Öğrenci Hataları
Bir şeklin taralı kısmını sunmak için bir kesri yazma	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Taralı parça/taralı olmayan parça ilişkisini parça/bütün yerine yazmak</li> <li>2. Her parçanın eşit parça olması gerektiğini fark etmede başarısızlık</li> </ol>
Düşük terimlerle kesirleri sadeleştirme	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Eşit bölemediğinde tahmin ederek düşük terimde bir kesri yazmak için (sadeleştirmek) girişimde bulunmak (3/8'i 1/4)</li> <li>2. Paydayı değil payı sadeleştirme</li> </ol>
Kesirlerde toplama ve çıkarma	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Payı toplama çıkarma ve paydayı toplama çıkarma (sayı işlemlerini fazla genelleme)</li> <li>2. Ortak bir payda tanımlama fakat paydayı eşitlemede başarısız olmak</li> <li>3. Gerekli yeni gruplamaları yapmaksızın karışık sayıları birbirinden çıkarma ve küçük sayıyı çıkarma işleminde büyüğün yerine koymak</li> <li>4. Yanlış bir şekilde yeniden gruplama-ya 10 temel muhakemeyi yanlış bir şekilde kullanarak ya da başka hatalardan</li> </ol>
Kesirlerde çarpma ve bölme	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Çapraz çarpma yaparak kesirleri yanlış bir şekilde çarpma ve cevap vermek için icat edilmiş bir algoritma uygulama</li> <li>2. Bir kesrin içindeki tüm sayıları yanlış bir şekilde değiştirme (6 sayısını 6/1 yerine 6/6 yazma)</li> <li>3. Payları yanlış bir şekilde bölerek ve paydaları yanlış bir şekilde bölerek kesirleri bölme</li> <li>4. "Çevir ve çarp" algoritmasının sadece bir bölümünü uygulama-öğrenciler çarpacaklarını hatırlayabiliyorlar, ancak 2. kesri çevirmeyi unutabiliyorlar.</li> </ol>

Tablo 1.1.'de kesirlere dair öğrencilerde görülen hatalar sunulmaktadır. Bu hatalar 4 ana başlık altında toplanmıştır. Bunlar, bir şeklin taralı kısmını sunmak için bir kesri yazmak, düşük terimlerle kesirleri sadeleştirme, kesirlerde toplama ile çıkarma ve kesirlerde çarpma ile bölmedir. Kesirleri sadeleştirme ve kesirlerde toplama ile

çıkarmada görülen hataların cebirsel kesirlerde de görülmesi olasıdır. Aynı zamanda kesirlerin farklı anlamları (parça-bütün, ölçme, oran, bölüm, işlemci), cebirsel kesirlerde işlem esnekliği ve cebirsel kesirlerin sözel-hikâye problemi olarak ifade edilmesi açısından önemli görülmüştür. Bu araştırmaya katılan öğrencilerin kesirlere dair problemler konusunda ortaokul düzeyinde ne gibi kazanımları gördüklerini 2013 matematik öğretim programı bağlamında tablo 1.2.'de sergilenmiştir.

**Tablo 1. 2.** Kesirler konusunun öğretim programındaki yeri (MEB, 2013)

Sınıf Seviyesi	Kazanımlar
5. Sınıf	<p>5.1.3. Kesirler</p> <p>5.1.3.5. Sadeleştirme ve genişletmenin kesrin değerini değiştirmeyeceğini anlar ve bir kesre denk olan kesirler oluşturur.</p> <p>5.1.4. Kesirlerle İşlemler: Toplama ve Çıkarma</p> <p>5.1.4.1. Paydaları eşit veya birinin paydası diğerinin katı olan iki kesrin toplama ve çıkarma işlemini yapar ve anlamlandırır.</p> <p>5.1.4.2. Paydaları eşit veya birinin paydası diğerinin katı olan kesirlerle toplama ve çıkarma işlemleri gerektiren problemleri çözer.</p>
6. Sınıf	<p>6.1.4. Kesirlerle İşlemler</p> <p>6.1.4.2. Kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapar.</p> <p>6.1.4.9. Kesirlerle işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer.</p> <p>6.1.5.1. Bölme işlemi ile Kesrin anlamını ilişkilendirir.</p>
7. Sınıf	<p>7.1.2. Rasyonel Sayılar</p> <p>7.1.3. Rasyonel Sayılarla İşlemler</p> <p>Terimler: Etkisiz eleman, yutan eleman, ters eleman</p> <p>7.1.3.1. Rasyonel sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapar.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Rasyonel sayılarda toplama işleminin değişme, birleşme, etkisiz eleman ve ters eleman özellikleri incelenir.</li> </ul> <p>7.1.3.5. Rasyonel sayılarla işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer.</p>

Tablo 1.3.'te ise cebirsel ifadelere dair 2013 öğretim programında yer alan kazanımlar bulunmaktadır.

**Tablo 1. 3.** *Cebirsel ifadeler konusunun öğretim programındaki yeri (MEB, 2013)*

Sınıf Seviyesi	Kazanımlar
8. Sınıf	8.2.1. Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler Terimler: Özdeşlik, çarpanlara ayırma 8.2.1.1. Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar. 8.2.1.2. Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar. • Cebirsel ifadelerdeki katsayılar tam sayılar içinde kalacak biçimde seçilir. 8.2.1.4. Cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır. • Ortak çarpan parantezine alma ile iki kare farkı ve $a^2 \pm 2ab + b^2$ biçimindeki ifadelerin çarpanlara ayırma işlemleri ele alınır. Cebirsel ifadelerdeki katsayılar ve kökleri tam sayılar içinde kalacak biçimde seçilir.
9. Sınıf	9.2.1.1. İrrasyonel sayılar ve gerçek sayılar kümesini açıklar. Doğal sayı, tam sayı ve rasyonel sayı kavramları hatırlatılır.

Genel olarak bakıldığında, 5. sınıfta kesirlerde toplama ve çıkarma işlemi, 6. sınıfta kesirlerde toplama ve çıkarma işlemlerine dair problem çözme ve bölme işlemi ile kesrin ilişkisi ele alınmıştır. 7. sınıfta rasyonel sayılar kümesinin özellikleri, rasyonel sayılarda toplama ile çıkarma işleminde etkisiz eleman, yutan eleman ve ters eleman bulunmaktadır. Ayrıca rasyonel sayılarda toplama ve çıkarma işlemlerine dair problem çözme yer almaktadır. 8. sınıfta bu konuya dair kazanım yer almazken, 9. sınıfta irrasyonel sayılara değinebilmek için rasyonel sayıların hatırlatılması söz konusudur.

Bu çalışma kapsamında cebirsel kesirli ifadeleri içeren toplama ve çıkarma işlemlerine ve bu ifadelere yüklenen anlamlara odaklanılmıştır. Cebirsel kesirler içerisinde değişken ve sabit bulunan kesirli ifadeler olarak tanımlanmıştır. Örneğin,  $\frac{5x-8}{x-3}$ ,  $\frac{x+1}{2}$  veya  $\frac{3}{x-2}$ . Öksüz'e (2004) göre cebirsel kesirler payı cebirsel paydası nümerik (Pc Pdn), payı nümerik paydası cebirsel (Pn Pdc) ve pay ve paydası cebirsel (Pc Pdc) olarak 3 şekilde gösterilebilir (bkz. Tablo 1.4.). Bu çalışmada cebirsel kesirler kapsamında sadece birinci dereceden bir bilinmeyenli cebirsel ifadelere yer verilmiştir.

**Tablo 1. 4.** *Cebirsel kesirlerin gösterim yolları*

Sınıflandırma	Örnek
Pc Pdn kesirli ifade	$\frac{x+1}{2}$
Pn Pdc kesirli ifade	$\frac{3}{x-2}$
Pc Pdc kesirli ifade	$\frac{5x-8}{x-3}$

2013 matematik öğretim programındaki cebirsel kesirli ifadeleri incelemek amacıyla cebir konusuna değinmenin gerekli olduğu düşünölmüş, bu nedenle cebir ve cebirsel kesirler konularına ait bazı kazanımlar tablo 1.5.'te sunulmuştur (bkz. Tablo 1.5.). Program çerçevesinde her ne kadar cebirsel kesirli ifadelere doğrudan bir atıf olmasa da cebirsel ifadeleri içeren toplama ve çıkarma işlemlerine yönelik kazanımlar olduğu görölmektedir.

**Tablo 1. 5. Cebir ve cebirsel kesirlerin öğretim programındaki yeri (MEB, 2013)**

Sınıf Seviyesi	Kazanımlar
5. Sınıf	-
6. Sınıf	<p>6.2.1.2. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cebirsel ifadelerde kullanılan harflerin sayıları temsil ettiği ve “değişken” olarak adlandırıldığı belirtilir. En az bir değişken ve işlem içeren ifadelerin “cebirsel ifadeler” olduğu vurgulanır.</li> </ul> <p>6.2.1.4. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Bu düzeyde, <math>4a</math>, <math>a/5</math>, <math>2a/5</math> biçimindeki cebirsel ifadelerin anlaşılmasına yönelik çalışmalara yer verilir.</li> </ul> <p>6.2.1.5. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar.</p>
7. Sınıf	<p>7.2. Cebir</p> <p>7.2.1.1. Gerçek yaşam durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri kurar.</p> <p>7.2.1.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.</p> <p>7.2.1.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer.</p>
8. Sınıf	<p>8.2.1.1. Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar.</p> <p>8.2.1.2. Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar.</p> <p>8.2.1.4. Cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır.</p> <p>8.2.2.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Bu sınıf düzeyinde katsayıları rasyonel olan denklemlere yer verilir.</li> </ul>
9. Sınıf	<p>9.2.4.2. Denklem ve eşitsizlikleri gerçek/gerçekçi hayat durumlarını modellemede ve problem çözmeye kullanır.</p> <p>Gerçek/gerçekçi hayat durumlarını temsil eden sözel ifadelerdeki ilişkilerin cebirsel, grafiksel ve numerik (nümerik) temsilleri ile ilgili uygulamalar yapılır.</p>

8. sınıfta katsayıları rasyonel olan denklemlere yer verilmesi ayrıca vurgulanmıştır. 9 sınıfta “denklemleri gerçek/gerçekçi hayat durumlarını modellemede ve problem çözümede kullanır” ifadesi bulunmaktadır. Bu kazanımlar incelendiğinde üstü kapalı da olsa cebirsel kesirli ifadeleri içeren ve toplama-çıkarma işlemlerini gerektiren problem durumları olduğu görülmektedir.

#### ***1.6.1.2. Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler***

Denklemler iki cebirsel niceliğin birbirine karşı olan eşitlik durumunu göstermektedir. Bu nedenle “eşitlik”, “değişkenler” ve “cebirsel ifadeler” denklemlerin bileşenlerini oluşturmaktadır (CCSSO, 2010a). Ancak bu bileşenlerin anlaşılması ile cebirsel denklemleri anlamak mümkündür.

Eşitlik, “ile aynı”, “denge anlamı” ve “ilişki gösteren” şeklinde yorumlanmaktadır. “İle aynı” anlamı eşitliğin her iki tarafının da aynı çokluğu ifade etmesidir. Denge anlamı bir tarafta ne varsa diğer tarafı dengeleme veya diğer tarafa eşittir anlamına gelmektedir. “İlişki gösteren” ise eşitliğin iki tarafında bulunan sayılar arasındaki ilişkileri gösterme anlamına gelmektedir. Eşit işaretinin öğrenciler tarafından doğru bir şekilde algılanması denklem çözümlerinde önemli bir yere sahiptir. Nitekim Knuth, Stephens, McNeil ve Alibali (2006) eşit işaretinin gelişiminin cebirsel düşüncenin gelişimini de destekleyeceğini belirtmişlerdir. Ortaokul öncesinde öğrenciler eşit işaretinin ilişkisel bir sembol olduğunu ve toplam değer her iki tarafta da aynı olmasıyla ilgili bir denge görevi gördüğünü nadiren anlamaktadırlar. Falkner, Levi, ve Carpenter (1999) öğrencilerin  $4 + 5 = [] + 6$  gibi problemleri çözmek için mücadele etmelerine rağmen, doğru cevabı modellemede problem yaşadıklarını bulmuşlardır.

Öğrencilere eşit işaretinin aynı anlamına gelen ilişkisel sembolünü öğretmek ortaokulda onların denklemleri soyut olarak çözmelerine yardımcı olur (Stacey ve MacGregor, 1997b). Cebir öğrenme konusunda öğrencilerin ilerlemesinde, öğrenciler çok adımlı denklemleri ve eşitsizlikleri çözümede nihayetinde yetkin hale gelmelidir. Eğer öğrenciler bir denklemi bir denge olarak görselleştirebilirler ve eşitlik kavramını anlayabilirlerse, bilinmeyeni bulmak için işlemleri ters çevirmeyi daha kolay anlayabilirler (Falkner vd., 1999). Baroudi (2006) 27 sekizinci sınıf öğrencisinden eşit işaretini tanımlamalarını istemiştir. Eşit işaretinin ilişkisel anlamı daha önce

tartışılmasına rağmen, öğrencilerin üçte birinin doğru cevabı ya da doğru cevaba yakın cevapları verdiklerini bulmuştur.

Knuth vd. (2011) eşit işaretini anlamaları konusunda 6. sınıftan 8. sınıfa kadar öğrencilerle bir çalışma yürütmüştür. 8. sınıflar yüzdesi az olmasına karşın, eşit işaretini işlemselden ziyade ilişkisel olarak anlamışlardır. 6. sınıflarda eşit işaretini ilişkisel olarak anlayan öğrenci %30'un altındadır. Tüm öğrencilerin %46'sı ilişkisel anlama göstermiştir.

Genel olarak, öğrencilerin eşitlik konusundaki kavram yanlışlarının denklemlerle ilgili ilk deneyimlerinden kaynaklandığı görülmektedir. Öğrencilere çok sık olarak denklemler aynı formatta sunulmaktadır ve böylece eşit işareti ile ilgili "cevap şudur" kavramını geliştirmektedirler (Kieran, 1980, 1981; Falkner, vd., 1999; Baroudi, Van Dooren, vd., 2002, 2006). Denklemlerin en önemli bileşenlerinden bir diğeri ise değişken kavramıdır.

Değişken Altun'a göre (2014) tanım kümesi olarak adlandırılan ve incelenmesi için göz önüne alınan bazı sayı kümelerinin herhangi bir elemanı ile yer değiştirebilen bir semboldür. Genelleme yapmak ve genellenenin sonucunu göstermek değişken kullanmakla mümkün olur. Usiskin'in (1988) belirttiği gibi denklem çözümleri, örüntülerin genellenmesi ve fonksiyon konuları değişkenlerin karşımıza çıktığı alanlar arasında yer alır. Değişkenler matematikte denklem çözümlerinde bilinmeyenler, örüntüler ve genel sayılar ve fonksiyonlarda bağımlı bağımsız değişkenler olarak karşımıza çıkmaktadır.

Öğrencilerin değişkenlerle ilgili kavram yanlışlarına ilişkin çok sayıda araştırma mevcuttur. Bu kavram yanlışları, değişkenleri etiket olarak incelemek, aynı denklemdaki iki farklı değişkenin (x, y gibi) aynı değeri alamayacağını düşünme (Stephens, 2005; Swan, 2000), bir değişkenin değerinin alfabeadaki yeri ile yapılacak şeye sahip olduğuna inanma (Kieran, 1980; Herscovics, MacGregor ve Stacey, 1997; Asquith vd., 2007) ve değişkenleri bilinmeyenden ziyade değişen miktar şeklinde anlama (Usiskin, 1988; Stacey ve MacGregor, 2000; Stephens, 2005; Asquith vd., 2007; akt. Bush ve Karp, 2013).

Kriegler (2007) temel cebirsel ifadeleri modeller, değişkenler ve fonksiyonlar olarak nitelendirmiştir. Alanyazın incelendiğinde öğrencilerin cebirsel sembolleri

anlamakta zorlandıkları görülmüştür. Öncelikle öğrenciler çoklu anlam ve değişkenleri kullanmada zorlanmaktadır (Küchemann, 1978; Philipp, 1992a; Stacey ve MacGregor, 2000; Swan, 2000; Stephens, 2005; Asquith, vd. 2007). Diğer bir neden öğrencilerin cebirsel gösterimin yazımı ile ilgili zorluk yaşamalarıdır (Warren, 2003, Novotna ve Hoch, 2008). Başka bir neden ise öğrencilerin cebirsel ifadeleri zor bulmalarıdır. Çünkü terimlerin ve ifadelerin ne anlama geldiğini anlamamaktadırlar (Booth ve Watson, 1990; Van Amerom, 2003; Carraheret vd, 2008,).

Denklem bilginin ve bilgiler arasındaki ilişkilerin sembolle gösterilmesidir ve değişken içeren bir eşitliktir. Eğer eşitlik değişkenlerin alacağı her değer için sağlanıyorsa bu eşitliğe özdeşlik, bir kısmı için sağlanıyorsa ya da hiçbir değer için sağlanmıyorsa bu eşitliğe denklem denir. Bazı araştırmacılar öğrencilerin her iki tarafta bilinmeyen bulunan bir bilinmeyenli denklem çözmeye zorlandıklarını belirtmişlerdir (Kieran, 1980; Herscovics ve Linchevski, 1994).

Genel olarak, ifadelerin ve denklemlerin CCSSM'nin (Common Core State Standarts for Mathematical) uygulandığı bölgelerde, öğrenciler cebirsel ifadeleri çözmeye ve yazmada çeşitli zorluklara sahiptirler. Öğrenciler özellikle çözümlerini kontrol etmede, sembolik gösterimlerde, terimleri toplama ya da çıkarmada ve dağılma özelliğinde zorluk yaşamaktadırlar. Bu nedenle cebirsel ifadeleri öğretmede kavramsal yaklaşım önerilmektedir (Bush ve Karp, 2013). Tablo ve grafikte bir denklemi ilişkilendirme öğrencilerin karmaşık konuları anlamalarına yardımcı olur. "Matematikselsel olarak yeterli öğrenci, denklemler, sözel tanımlar, tablolar ve grafikler ya da önemli özelliklerin ve ilişkilerin diyagramını çizme, verilerin grafiğini oluşturma, düzenlilik veya eğilimleri ve araştırma arasındaki ilişkiyi açıklayabilir." (CCSSO, 2010a, s. 6).

Bu bağlamda bu araştırma kapsamında katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde işlemleri esnek ve etkili bir şekilde yapabilme durumları ve bu durumdaki değişim ve bu denklemleri nasıl anlamlandırdıkları incelenmiştir.

### ***1.6.1.3. Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde işlemler***

Kesirler matematikte öğretmenlere ve öğrencilere en zor gelen konular arasında belirlenmiştir. İşlemler bu durumu daha da zorlaştırmaktadır. Bu durumun en önemli sebeplerinden biri öğrencilerin formülleri ve çözüm adımlarını ezberlemesidir. Diğer bir

sebepler ise kesirlerin pay ve paydalarının farklı tam sayılar olarak algılanmasıdır (Şiap ve Duru, 2004). Örneğin Thurston (1990) öğrencilerin özellikle sembolik olan kesirleri toplamada hata yaptıklarını bulmuştur. Örneğin  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$  gibi hatalar (Yantz, 2013).

Bu araştırmada ise cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde toplama ve çıkarma işlemi ele alınmıştır. Bunun temel nedeni çarpanlara ayırma konusunu yeni görmüş öğrencilerin (8. sınıfın 2. döneminde) cebirsel kesirlerde çarpma ve bölme işlemini yaparken 3. dereceden hatta 4. dereceden özdeşlik kurallarına odaklanmalarını ve araştırmanın ana amaçlarından sapmalarını önlemektir. Nitekim Scofield (2003) yaptığı çalışmada öğrencilerin cebir öncesi ve cebirle ilgili hatalarını incelemiş ve öğrencilerin cebirsel kesirlerle karşılaştığında pay ve paydayı öncelikle çarpanlara ayırma eğiliminde olduklarını gözlemlemiştir.

Alanyazın incelendiğinde, matematiğe dair hemen hemen her konuda öğrenci hatalarının ele alındığı araştırmalar ile karşılaşmak mümkündür (örneğin Thurston, 1990; Scofield, 2003; Ashlock, 2006; Yantz, 2013; Baştürk, 2016 vb.). Araştırmacılar tarafından bu hatalara dair farklı sebepler sunulmakla birlikte temel sebeplerden birinin bilginin yapısı olduğu birçok araştırma sonucunda vurgulanmıştır (örneğin, Kieran, 1992; Kieran ve Sfard, 1999; Kalchman ve Koedinger, 2005; Capraro ve Joffrion, 2006; Soylu ve Aydın, 2006).

Cebirin anlamlı bir şekilde öğrenilebilmesi noktasında bilginin zihinde yapılandırılabilmesi önemlidir. Birey yeni bir bilgi ile karşılaştığında ancak bir dizi zihinsel süreçten geçerek bilgiyi anlamlandırabilir. Bu süreç gelen bilginin incelenmesi, yeni bilginin bireyin mevcut bilgileri ile olan benzerlik ve farklılıklarının irdelenerek ilişkilendirilmesi ve zihinde bulunan bilgi şemasında yerini almasını içerir. Bu aşamada bilginin yapısı önemli bir yere sahiptir, çünkü bu süreci doğrudan etkiler. Matematik eğitimindeki bilgi türlerinden ikisi işlemsel ve kavramsal bilgidir (Skemp, 1978). Bu bilgi türleri matematik eğitiminde işlemsel ve kavramsal anlama kavramlarını da beraberinde getirmiştir.

İşlemsel bilgi problem çözümede kullanılan işlemlerin adımlarını içeren bilgi (Star, 2005, 2007), işlemsel anlama ise öğrencilerin ve hatta öğretmenlerin bir kurala sahip olmaları, bu kuralı anlamlandırmaksızın tanımlamaları ve kullanmalarınıdır (Skemp, 1976). Kavramsal bilgi “matematiksel kavramların, işlemlerin ve ilişkilerin anlaşılması”

olarak ifade edilebilir (Kilparick, Swafford ve Findell, 2001, s.5). Kavramsal anlama ise öğrencilerin matematiksel süreçleri anlamalarıdır (Skemp, 1987).

Kavramsal ve işlemsel çözücüler arasındaki fark (Skemp, 1876) kavramsal çözücülerin matematiksel kurallar altında yatan bağlantıyı daha iyi bilmeleridir. Bu bakış açısı öğrencilerin matematiksel işlemlerin sözdizimsel bilgileriyle anlamsal bilgileri arasındaki ayrımdır. Sözdizimsel bilgiler (syntactic knowledge) sembollerin belli işlem kurallarına göre nasıl işlediği bilgisi olarak tanımlanan bilgi, anlamsal bilgiler (semantic knowledge) ise, ifade ya da dönüşümün anlamı, ardındaki mantığı ve gerekçesine dair bilgi olarak tanımlanan bilgidir (Resnick, Cauzinille-Marmeche ve Mathieu, 1987; Booth, 1989; Kaput, 1989; Payne ve Squibb, 1990; akt. Star, 2001).

Skemp (1976) işlemsel ve kavramsal anlamamanın avantajlarını özetle şöyle belirtmiştir, işlemsel anlama genelde çok daha kolay anlaşılırdır, dönütler daha hızlı ve net olarak görülebilir (alıştırmaları doğru çözdüğünü görmek gibi), sorular daha kısa ve güvenilir biçimde çözülebilir. Kavramsal anlamada ise, bilgi anlaşıldığı için farklı durumlara çok daha kolay aktarılabilir. Ezberlenen bilgiye göre hatırlanması daha kolaydır, kavramların arasındaki nedenler bilinirse öğrenilen bilgi kolay kolay unutulmaz. Nedeni ve amacı anlamaya çalışmak daha etkili bir öğrenme sunar, çünkü bu şekilde çalışma kişiye içsel bir motivasyon sağlar. Son olarak nitelikli zihinsel şemalar oluşturulur.

Geçmişte kavramsal ve işlemsel bilgi birbirinden farklı bilgiler olarak ele alınmış ve yukarıda da belirtildiği gibi birçok bilim adamı (Resnick, Cauzinille-Marmeche ve Mathieu, 1987; Booth, 1989; Kaput, 1989; Payne ve Squibb, 1990) tarafından kavramsal bilgi daha üst düzey bir bilgi olarak nitelendirilmiştir (Yanık, 2016).

Ancak Hiebert ve Lefevre (1986) işlem bilgisinin kavram bilgisiyle ilişkilendirilmesi gerektiğini ve aksi takdirde kuralların nedenlerinin anlaşılmadığı ezbere dayalı öğrenme gerçekleşeceğini belirtmişlerdir. Bu nedenle bu iki bilgi türünün de önemli olduğunu ve bu bilgilerin birbiriyle ilişkili ve yeterli düzeyde öğretilmesi gerektiğini vurgulamışlardır. Çünkü bu iki bilgi türü birbirini geliştiren bilgi türleridir. Nitekim Kieran ve Sfard (1999) tarafından yapılan araştırma sonucunda işlemsel öğrenmiş bir öğrencinin kuralları bildiğini ancak kuralların neden işlediğine dair kavramsal anlamaya sahip olmadığını belirtmişlerdir.

Hiebert ve Carpenter da (1992) matematik uzmanlığı için her iki bilginin de gerekli olduğunu ifade etmişlerdir. Kavramsal bilginin iç temsiller (sunumlar) için zengin bir ağ, işlemsel bilginin işlemin adımları arasında oluşturulan bağlarla bir dizi eylemin içsel bir temsili olarak tanımlamışlardır. Hiebert ve Carpenter'ın çatısında önemli olan diğer bir öge, matematiksel işlemlerin her zaman kavramsal bilgiye bağlı olduğu fikridir. Alanyazın ayrıca kavramsal ve işlemsel bilginin öğrenme sırasının da anlamaya etkisi olduğunu belirtmiştir.

“Kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkiye yönelik alanyazında dört farklı teorik yaklaşım mevcuttur: 1) Önce kavram yaklaşımı (Gelman ve Williams, 1998; Haapasalo ve Kadıjevich, 2000; Rittle-Johnson ve Siegler, 1998), 2) Önce işlem yaklaşımı (Schneider, Rittle-Johnson ve Star, 2011; Siegler ve Stern, 1998), 3)Bağımsız/ilişkisiz yaklaşım (Haapasalo ve Kadıjevich, 2000) ve 4) Dönüşümlü yaklaşım (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999; Schneider, Rittle-Johnson ve Star, 2011)” (Yanık, 2016, s.110).

Önce kavram yaklaşımına göre çocuklarda işlemsel bilgiden önce kavramsal bilgi gelişir. Çocuklar önce kavramsal bilgiyi öğrenir. Ardından kazandığı kavramsal bilgiyi problem çözme süreci içerisinde kullanarak işlemsel bilgiyi öğrenir (Rittle-Johnson ve Siegler, 1998; Haapasalo ve Kadıjevich, 2000). Önce işlem yaklaşımında ise çocuklar önce işlemsel bilgiyi öğrenirler. Ardındanda bilginin kavramsal boyutunu öğrenebilirler (Schneider, Rittle-Johnson ve Star, 2011, akt. Yanık, 2016). Örneğin önce kavram yaklaşımında dikdörtgenin alanının  $a \times b$  olduğu önce kavramsal olarak öğretilir ardından işlemsel olarak öğretilir. Önce işlem yaklaşımında ise öğrenciye dikdörtgenin alanının  $a \times b$  olduğu işlemsel olarak öğretilir, ardından kavramsal olarak öğretilir.

Bağımsız/ilişkisiz yaklaşım ise işlemsel ve kavramsal bilginin birbiriyle ilişkisiz olarak geliştiğini savunmaktadır (Haapasalo ve Kadıjevich, 2000). Bu yaklaşıma göre bu bilgilerin gelişimi birbirini etkilemez. Doğal olarak biri daha çok gelişmişken, diğeri az gelişmiş olabilir.

Dönüşümlü yaklaşıma göre her iki bilginin değişimi birbirini etkiler, yani birbiriyle ilişkilidir (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999; Schneider, Rittle-Johnson ve Star, 2011). Bu nedenle öğrenciler önce işlemsel bilgiyi sonra kavramsal bilgiyi ya da önce kavramsal bilgiyi sonra işlemsel bilgiyi öğrenebilirler.

Son yıllarda yapılan matematik eğitimindeki araştırmalarda (örneğin Star, 2005, 2007; Star ve Stylianides, 2013) kavramsal ve işlemsel bilginin ağırlıklı olarak niteliksel açıdan değerlendirilip bilginin ne kadar iyi anlaşıldığına odaklanılmaya

başlanmıştır. İşlemsel anlama bu kapsamda bireylerin işlemleri esnek, etkili, bilinçli tercihlere dayalı olarak ve doğru bir şekilde kullanabilmesidir.

Star (2001, 2005, 2007, 2015) bu geleneksel tariflerin işlemsel bilginin doğasını tam olarak yansıtamadığını belirtmiş ve yetersiz olduğunu ileri sürerek işlem esnekliği (strategic flexibility) kavramını ortaya atmıştır.

İşlemsel bilgi denilince matematiğin beş konu alanından biri olan cebir ilk akla gelen konu alanlarından biri olmaktadır. Ancak yapısı açısından bakıldığında cebir, hem işlemsel hem de kavramsal boyutu olan bir konu alanıdır. Cebir sadece harfli semboller ile nicelikleri temsil etmeyen, genel sayı ilişkilerini ve özelliklerini gösteren, aynı zamanda sembollerle işlem yapılabilen bir alandır (Keiren, 1999). Bu nedenle kavramsal bir boyuta da sahiptir.

Bu araştırmanın bir boyutunda toplama ve çıkarma işlemini içeren cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde işlem esnekliği incelenmiştir. Diğer bir boyutunda ise toplama ve çıkarma işlemini içeren cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kavramsal anlama incelenmiştir.

### **1.6.2. İşlem esnekliği**

Star (2001, 2005, 2007, 2011, 2015) son yıllarda yaptığı çalışmalarla bilginin doğasına yönelik tartışmalara yeni bir boyut kazandırmıştır. Bu yeni yaklaşımdan biri de işlemsel bilgi ve anlamayla ilgilidir. Geleneksel olarak işlemsel bilgi ve anlama alanyazında (örneğin, Skemp, 1978; Hiebert ve Lefevre, 1986) kurala-dayalı anlama olarak ifade edilmiştir. Bu anlama ya da bilgi türü (Alanyazında işlemsel anlama ve işlemsel bilgi eş anlamlı olarak kullanılabilir.) problem çözmede kullanılan işlem adımları ve algoritmaları içeren bilgi olarak adlandırılmaktadır. Bu açıdan bakıldığında, işlemsel bilgiye bireyler anlamadan da sahip olabilirler (Skemp, 1978; Hiebert ve Lefevre, 1986).

Star (2005), Hiebert ve Lefevre'nin (1986) işlemsel bilgiyi, işlem adımlarının genel bir sıralaması ve bu sıralamaya ait yöntem bilgisi olarak ifade ettiklerini ve işlemsel bilgideki ilişkilerin sadece bu adımlar arasındaki ilişkilerle kısıtlanmış olduğunu vurgulamıştır. Star (2005, 2007) bu yaklaşımda işlemsel bilginin yüzeysel ve çok fazla ilişki içermeyen bir bilgi türü olduğunu ancak bilinen işlem adımları ve bu adımlar arasındaki ilişkiden daha farklı işlemlerin ve bilinen işlem adımlarından farklı adımların olduğunu belirtmiştir. Ayrıca bu farklılıkların çok çeşitli işlemler olduğunu ve

her bir işlemin içerisindeki ilişkilerin farklı karmaşıklık düzeylerine sahip olabileceğini ifade etmiştir. Bilinen bir çözümün adım adım uygulanması ve doğru sonuca ulaşılması şaşırtıcı değildir. Bu uygulama esnasında bireyin yoğun bir zihinsel performans sergilemesi beklenmez.

Star (2001) işlemsel ve kavramsal bilginin birbirinden ayrı olmadığını ve işlemsel bilginin kavramsal bilgiyi geliştirebileceğini düşünmüştür. Ona göre sadece doğru çözmek bir öğrencinin anladığının göstergesi değildir. Daha kısa yolla ya da daha az işlem yoğunluğu ile çözen ya da farklı yöntemler kullanarak çözen öğrencinin bir farklılığı olmalıdır. Star (2001) bunu işlem esnekliği olarak tanımlamıştır.

Star (2005) algoritmalar dışında da problem çözmeye yardımcı olabilecek, sezgilere, deneyimlere, bulgulara ve buluşlara dayalı yaklaşık sonuçlar verebilen daha soyut yöntemlerin olduğundan bahsetmiştir. Bu yöntemlerin kullanımının problem çözme sürecinde akıllı tercihler yapmayı gerektirdiğini belirtmiş, bunun da ancak bireyin derin ve ileri bir bilgi düzeyine sahip olması (gerek kavramsal gerekse işlemsel açıdan) ve daha kapsamlı ilişkileri görmesi durumunda gerçekleşebileceğini ifade ederek işlemsel bilginin dar bir bakış açısı ile ele alınmaması gerektiğini vurgulamıştır. Bu bakış açısından bakıldığında işlemsel anlamının sadece ezberlenmiş kuralları kullanabilme becerisi ile değerlendirilemeyeceğini ifade eden Star (2005), işlemsel anlamının aslında işlem bilgilerini esnek bir şekilde kullanmayı, bilinçli tercihler yapabilmeyi ve eleştirel bir değerlendirmeyi içerebileceğini belirtmiştir.

Esnek işlem becerisi derin bir işlem bilgisinin göstergesidir. Esnek işlem becerisine sahip kişiler bir işlemi farklı çözüm stratejileri kullanarak çözebilirler ve problem durumlarına göre bilinçli tercihler yaparak bu çözüm stratejilerinden birini diğerine tercih edebilirler. Esnek işlem bilgisine sahip olmayanlar ise standart çözümlerin dışına çıkmakta zorlanırlar ve gereksiz ya da tekrarlayan çözüm adımlarını gerçekleştirerek işlemi uzatabilirler (Star, 2001). Bu nedenle esnek işlem becerisine sahip olmanın en temel bileşenlerinden birisi farklı çözüm stratejileridir. Bu nedenle bu araştırmada katılımcıların farklı çözüm stratejileri oluşturabilmeleri amacıyla çözümlü örnekler kullanılmıştır.

### 1.6.2.1. Çözümlü Örnekler

Çözümlü örnekler bir problemin çözüm adımlarını ve son çözümü içerir. İlk becerinin kazanılması için büyük önem taşımaktadırlar. Çözümlü örnekler ile öğrenme, anlamayı desteklemek için çözümden önce bir takım örnekler sağlamak anlamına gelir (Hilbert, Schworm ve Renkl, 2004). Renkl, 2005; Hattie, 2009 ve Retnowati vd. (2010) özellikle çözümlü örneklerin eğitimin bir parçası olarak kullanıldığında, öğrenmeye, öğrenmeyi keşfetmeye etki ettiğini gözlemlendiğini belirtmiştir.

Aynı zamanda çözümlü örnekler bilişsel yükü azaltarak öğrenmeyi geliştirir. Birey kendisine sunulan çözüm ile birkaç şemaya ulaştığında, başlangıçtaki bilişsel yük azalır. Beceri kazanımının başlangıcında çözümlü örneklerle beraber bireyin problem konusu ile ilgili kendi kendine açıklama isteği kullanıldığında artabilir ve öğrenme daha hızlı gerçekleşir (Mwangi ve Sweller, 1998; Paas vd., 2003; Retnowati vd., 2010 ve Van Loon-Hillen vd. 2012).

Bu araştırmada da öğretim seanslarının işlemsel bölümünde eğer katılımcı soruya bir çözüm geliştiremediyse bir çözümün önce ilk adımı gösterilerek nasıl devam edebileceği sorulmuş, eğer devam edemediyse ikinci adım gösterilerek nasıl devam edebileceği sorulmuştur. Süreç bu şekilde devam etmiş ve en son aşamada çözümün tamamı katılımcıya sunularak çözümü açıklaması istenmiştir. Bu kapsamda cebirsel kesirli denklemlerdeki çözüm adımlarını ve dönüşümleri incelemeyen önce rasyonel sayılardaki temel aksiyomlar ele alınmıştır.

### 1.6.2.2. Rasyonel sayılarda temel aksiyomlar

Rasyonel sayılar sahip oldukları özellikler bağlamında, doğal sayıların ve tam sayıların bazı özellikleriyle ilişkilendirilebilmesine karşın, farklı ve daha karmaşık özellikler içeren bir sayı sistemidir (Durmuş, 2005). Bu nedenle öncelikle rasyonel sayılara ait temel aksiyomların incelenmesinin yararlı olacağı düşünülmüştür (bk. Tablo 1.6.).

**Tablo 1. 6.** Rasyonel sayılar için temel aksiyomlar

Eşitlik Aksiyomları	
Yansıma Aksiyomu	$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
Simetri Aksiyomu	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ 'dir.
Geçişme Aksiyomu	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ve $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ise $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ 'dir.
Toplama Aksiyomu	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ 'dir.
Çarpma Aksiyomu	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ 'dir.

Tablo 1.6.'da rasyonel sayılara ait temel aksiyomlar belirtilmiştir. Bunlar, yansıma aksiyomu, simetri aksiyomu, geçişme aksiyomu, toplama aksiyomu ve çarpma aksiyomudur. Belirtilen bu aksiyomlar bütün rasyonel sayılar için geçerlidir. Bu temel aksiyomlar dışında rasyonel sayılarda işlemlere dair aksiyomlar da mevcuttur (bkz. Tablo 1.7.)

**Tablo 1. 7. Rasyonel sayılarda işlemlere dair aksiyomlar**

Dağılma Aksiyomu	$\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$
Toplama İşlemi İçin Değişme Aksiyomu	$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{e}{f} + \frac{a}{b}$
Çarpma İşlemi İçin Değişme Aksiyomu	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
Toplama işlemi İçin Birleşme (İlişkilendirme) Aksiyomu	$\frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f}$
Çarpma işlemi İçin Birleşme (İlişkilendirme) Aksiyomu	$\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) = (\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f}$
Toplama İşleminde Etkisiz Eleman Aksiyomu	$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$
Çarpma İşleminde Etkisiz Eleman Aksiyomu	1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$
Toplama İşleminde Ters Eleman Aksiyomu	$\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = 0$
Çarpma İşleminde Ters Eleman Aksiyomu	$\frac{a}{b} \cdot (\frac{b}{a}) = 1$

Tablo 1.7'de rasyonel sayılarda işlemler için temel aksiyomlar belirtilmiştir. Bunları genel olarak dağılma aksiyomu, değişme aksiyomu, birleşme aksiyomu, etkisiz eleman aksiyomu ve ters eleman aksiyomu olarak ifade edebiliriz. Bu aksiyomlar rasyonel sayılarda işlemler konusunda önemli bir yere sahiptir. Aynı zamanda rasyonel ya da kesirli ifadeler içeren denklemlerin çözümünde kullanılacak dönüşümlerin belirlenmesi ve uygulanmasında etkili olmuştur.

### **1.6.2.3. Denklem çözümünde kullanılan dönüşümler**

Star (2001) çalışmasında birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerde işlemler için belli dönüşümler tanımlamıştır (bkz. Tablo 1.8.). Bu dönüşümler denklem çözümlerinde kullanılan temel stratejilerdir.

**Tablo 1. 8.** Doğrusal denklemlerin çözümünde kullanılan dönüşümler (Star,2001, s.11)

Dönüşümler
Sabitleri Birleştirme ( <b>SB</b> )
Değişkenleri Birleştirme ( <b>DB</b> )
Dağılma Özelliğini Kullanma ( <b>D</b> )
Her İki Tarafa Bir Sabit Ekleme ( <b>SE</b> )
Her iki Tarafa Bir Değişken Ekleme (ekleme çıkarma aynı kategoride ele alınmış) ( <b>DE</b> )
Her İki Tarafı Bir Sabitle (Sabit 0'dan farklı olmak üzere) Bölme (çarpma ve bölme aynı kategoride ele alınmıştır) ( <b>SBö</b> )

Star (2001) Tablo 1.8'de belirtilen dönüşümler kullanılarak yapılabilecek çözümleri incelemiş ve olası çözümler arasında bir kıyaslama yapmıştır. Bu dönüşümleri temel alarak bazı karşılaştırmalar yapmış ve bu karşılaştırmalar sonucunda hiyerarşik bir ilişkiye sahip olan çözüm taksonomileri oluşturmuştur (bkz. Tablo 1.9.).

**Tablo 1. 9.** Çözüm taksonomileri (Star, 2001)

Taksonomi adı	Taksonomi özelliği
Standart Pratik Yöntem öncesi (Sezgisel yöntem)	<ul style="list-style-type: none"><li>• Birleştirmeden önce hareket et</li></ul>
Standart pratik yöntem	<ul style="list-style-type: none"><li>• Hareket etmeden önce birleştir</li><li>• Önce dağılma, sonra değişkenleri ve sabitleri birleştirme sonra sabitle bölme yani sadeleştirme, standart pratik yöntem= verimli pratik yöntem</li></ul>
Yenilikçi Alternatif Çözüm	<ul style="list-style-type: none"><li>• Daha verimli çözümlerle sonuçlanan, alışılmamış dönüşümleri kullanabilme.</li></ul>

Bunlar neticesinde *Standart Pratik Yöntem Öncesi (SPÖ)*, ve *Standart Pratik Yöntem (SP)* ve *Yenilikçi Alternatif Çözüm (YAÇ)* olmak üzere, 3 taksonomi belirlemiştir. Bu çalışmada Star'ın (2001) çalışması göz önünde bulundurularak toplama ve çıkarma işlemini içeren cebirsel kesirli denklemlerde öğrenciler tarafından oluşturulabilecek çözümler kapsamında bir taksonomi oluşturulmuştur. Öncelikle olası dönüşümler irdelenmiştir (bkz. Tablo 1.10.).

**Tablo 1. 10.** Denklemlerin çözümünde kullanılan dönüşümler (Star, 2001)

Dönüşümler	Örnekler	Dönüşümler	Örnekler
Paydaları eşitleme (payda hem nümerik hem cebirsel olduğunda) <b>(PE)</b>	$\frac{2x}{5} + \frac{3x}{2} = \frac{4x}{10} + \frac{15x}{10}$	Her İki Tarafı Bir Sabitle (Sabit 0'dan farklı olmak üzere) Bölme (çarpma ve bölme aynı kategoride ele alınmış) <b>(SBö)</b>	$7x+14=21$
	$\frac{3x}{2} + 4 + 8 = 20$		$\frac{7x+14}{7} = \frac{21}{7}$
	$\frac{3x}{2} + 12 = 20$		$x+2=3$
Sabitleri Birleştirme <b>(SB)</b>	$\frac{3x}{2} = 8 \quad x = \frac{16}{3}$		$x=1$
Değişkenleri Birleştirme <b>(DB)</b>	$\frac{2x}{5} + \frac{3x}{2} = 19$	Her iki tarafı bir değişkenle çarpma bölme <b>(DBö)</b>	$\frac{x+10}{x^2-4} = \frac{4x-8}{x^2-4}$
	$\frac{4x}{10} + \frac{15x}{10} = 19$		$\frac{x+10}{x^2-4} \cdot (x^2-4) = \frac{4x-8}{x^2-4} \cdot (x^2-4)$
	$\frac{19x}{10} = 19$		$x+10 = 4x-8 \quad (x \neq 2, x \neq -2)$
	$x=10$		$3x = 18 \quad x=6$
Dağılım Özelliğini Kullanma <b>(D)</b>	$3\left(\frac{x}{x+3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{3x}{x+3} + \frac{6}{5}$	Çarpanlara ayırma <b>(ÇA)</b>	$\frac{x^2}{x-3} + \frac{6x-9}{3-x} = \frac{-2}{x}$
Her İki Tarafa Bir Sabit Ekleme <b>(SE)</b>	$\frac{2x}{x+5} + \frac{3}{5} = \frac{15}{5}$	Her iki Tarafa Bir Değişken Ekleme (ekleme çıkarma aynı kategoride) <b>(DE)</b>	$\frac{x^2}{x-3} + \frac{-6x+9}{x-3} = \frac{-2}{x}$
	$\frac{2x}{x+5} + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = \frac{15}{5} - \frac{3}{5}$		$\frac{x^2-6x+9}{x-3} = \frac{-2}{x}$
	$\frac{2x}{x+5} = \frac{12}{5}$		$\frac{(x-3)(x-3)}{x-3} = \frac{-2}{x} \quad (x \neq 3)$
	$10x = 12x + 60$		$(x-3) = \frac{-2}{x}$
	$2x = -60$		$x \cdot (x-3) = -2$
	$x = -30$		$x^2 - 3x = -2$
			$x^2 - 3x + 2 = 0$
	$(x-2) \cdot (x-1) = 0$		
	$x=2, x=1$		
		Ortak paranteze almak <b>(OP)</b>	$\frac{1}{2x+6} + \frac{x-2}{3x+9} = \frac{2x-1}{x+3}$
			$\frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} = \frac{2x-1}{x+3}$
			$\frac{x}{x+3} - \frac{x}{3} = 0$
			$\frac{x}{x+3} - \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3}$
			$\frac{x}{x+3} = \frac{x}{3}$
		Her iki Tarafa Bir Değişken Ekleme <b>(DE)</b>	$3x = x^2 + 3x$
			$x^2 = 0, x=0$

Bu dönüşümler kullanılarak çok sayıda çözüm yapılabilir. Bu çözümlerin belirleyiciliğini ise dönüşümlerin farklı şekilde sıralanması oluşturmaktadır (bkz. Tablo1.11.).

**Tablo 1. 11. Çözüm taksonomileri (Star, 2001)**

Cebirsel kesirli denklem	Çözüm 1	Çözüm 2	Çözüm 3
$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = x+6$	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = \frac{3(x+6)}{3}$	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = \frac{3(x+6)}{3}$	$x+3+\frac{5x+4}{3} = x+6$
	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	$\frac{5x+4}{3}=3$
	$\frac{3x+5x+9+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	$\frac{3x+5x+9+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	$5x+4 = 9$
	$\frac{3x+5x+9+4-9}{3} = \frac{3x+18-9}{3}$	$\frac{3x+5x+13}{3} = \frac{3x+18}{3}$	$5x = 5$
	$\frac{3x+5x+4}{3} = \frac{3x+9}{3}$	$\frac{3x+5x+13-13}{3} = \frac{3x+18-13}{3}$	<b>x=1(5 adım)</b>
	$\frac{3x+5x+4-4}{3} = \frac{3x+9-4}{3}$	$\frac{3x+5x}{3} = \frac{3x+5}{3}$	
	$\frac{3x+5x}{3} = \frac{3x+5}{3}$	$3(3x+5x) = 3(3x+5)$	
	$\frac{3x+5x-3x}{3} = \frac{3x+5-3x}{3}$	$9x+15x = 9x+ 15$	
	$\frac{5x}{3} = \frac{5}{3}$	$9x+15x-9x = 9x+ 15-9x$	
	$15x = 15$	$15x = 15$	
	<b>x=1 (11 adım)</b>	<b>x= 1 (11 adım)</b>	

Tablo 1.11.'de bir cebirsel kesirli denklemin olası 3 çözümü mevcuttur. Bir denklem çözümünde en önemli unsur şüphesiz doğru çözüme ulaşmaktır. Nitekim 3 çözümde de doğru çözüme ulaşılmıştır, ancak bunun dışında bu çözümlerden hangisi en iyisi ya da hangisi en kötüsüdür? Bunu sağlayan unsurlar nelerdir? Star'a (2001) göre bunun en belirleyici ögesi kullanılan dönüşüm sayısı yani işlem adımlarıdır. Bunun en temel özelliklerinden biri de gereksiz adım kullanmamaktır. Burada çözüm (1) ve çözüm (2) 11 adımda yürütülürken, çözüm (3) 5 adımda yürütülmüştür. Bu durumda çözüm (3)'ün en iyi çözüm olduğu söylenebilir. Ancak çözüm (1) ve çözüm (2)'yi adım sayısına bakarak kıyaslamak mümkün değildir. Tablo 1.12.'de çözüm (1) ve çözüm (2) ayrıntılı olarak incelenmiştir.

**Tablo 1. 12.** Bir cebirsel kesirli denklemin iki farklı çözümünün karşılaştırılması

Cebirsel Kesirli Denklemler	Çözüm 1	Dönüşümler	Çözüm 2	Dönüşümler
$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = x+6$	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = \frac{3(x+6)}{3}$	Paydaları eşitleme	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = \frac{3(x+6)}{3}$	Paydaları eşitleme
	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	Dağılma	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	Dağılma
	$\frac{3x+5x+9+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	Kesirlerde toplama işlemi	$\frac{3x+5x+9+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	Kesirlerde toplama işlemi
	$\frac{3x+5x+9+4-9}{3} = \frac{3x+18-9}{3}$	Her iki tarafın payından 9 çıkarma	$\frac{3x+5x+13}{3} = \frac{3x+18}{3}$	Sabitleri Birleştirme (9+4)
	$\frac{3x+5x+4}{3} = \frac{3x+9}{3}$	Her iki tarafın payından 4 çıkarma	$\frac{3x+5x}{3} = \frac{3x+5}{3}$	Her iki tarafın payından 13 çıkarma
	$\frac{3x+5x+4-4}{3} = \frac{3x+9-4}{3}$		$3(3x+5x) = 3(3x+5)$	İçler dışlar çarpımı
	$\frac{3x+5x}{3} = \frac{3x+5}{3}$	Her iki tarafın payından 3x çıkarma	$9x+15x = 9x+15$	Dağılma
	$\frac{3x+5x-3x}{3} = \frac{3x+5-3x}{3}$	İçler dışlar çarpımı	$9x+15x-9x = 9x+15-9x$	Her iki tarafın payından 9x çıkarma
	$\frac{5x}{3} = \frac{5}{3}$	Bölme	$15x = 15$	İçler dışlar çarpımı
	$15x = 15$		$x = 1$ ( <b>11 adım</b> )	Bölme
	$x=1$ ( <b>11 adım</b> )			

Tablo 1.12.'deki çözümlere ve çözüm adımlarına bakıldığında, adımların sıralamasında farklılıklar söz konusudur. İşlem yoğunluğu açısından çözüm (1) daha verimli görünmektedir. Bunun nedeni dönüşümlerin sıralamalarının farklı olmasıdır. Örneğin çözüm (1)'de içler dışlar çarpımı son aşamada yapılırken, çözüm (2)'de 7. adımda yapılmıştır. Bu çözümler kapsamında çözümler üç kategoriye ayrılmıştır. Bunlar, *standart pratik yöntem öncesi (SPÖ)*, *standart pratik yöntem (SP)*, *yenilikçi alternatif yöntemdir (YAÇ)* (bkz. Tablo 1.13.).

**Tablo 1. 13. Çözüm taksonomileri**

Yöntem	Adımlar	Örnekler
<i>SPÖ</i> (Sezgisel Yöntem)	1. Paydaları eşitleme (PE)	$\frac{7 \cdot (x+3)}{3} = \frac{56}{3}$
	2. Dağılıma özelliğini kullanma (D)	$\frac{7x+21}{3} = \frac{56}{3}$
	3. Sabit ekleme-çıkarma (SE)	$21x+63 = 168$
	4. Değişken ekleme-çıkarma(DE)	$21x = 105$
	5. İçler dışlar çarpımı yapma (İDÇ)	$x = 5$ (5 adım) (SPÖ)
	6. Çarpanlara ayırma (ÇA)	
	7. Değişkenin katsayısıyla bölerek değişkeni izole etme (SBö)	
	8. Kesirli sayıları ondalık gösterimya dönüştürerek işlem yapmaya çalışmak, ardından yeniden kesre dönmek. (Gereksiz strateji)	
	9. Önce dağılıma özelliğini kullanıp ardından yeniden ortak paranteze almak(Gereksiz strateji)	
	10. Paydaları eşit olan cebirsel kesirli eşitliklerde İçler dışlar çarpımı yapıp ardından yeniden aynı sayıya bölmek (Gereksiz strateji)	
<i>SP</i>	1. Paydaları eşitleme (payda hem nümerik hem cebirsel olduğunda) (PE)	$\frac{3}{(x-2)} - \frac{2}{(x+2)} = \frac{4}{(x+2)}$
	2. Mümkün olduğu yerde dağılıma özelliğini kullanma parantezi dağıtmak (D)	$\frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)}$
	3. Pay kısmında benzer olan terimleri ve sabitleri birleştirme(SB)	$\frac{3x+6}{x^2-4} - \frac{2x-4}{x^2-4} = \frac{4x-8}{x^2-4}$ $\frac{3x+6-2x+4}{x^2-4} = \frac{4x-8}{x^2-4}$
	4. Sadece paydaları sabit içeren kesirlerde paydaları sadeleştirme ya da paydaları cebirsel ifade içeren kesirlerde paydaları sadeleştirme ancak cebirsel ifadede ki değişkenin payda 0 olduğunda aldığı değer için çözüm kümesi dışında olduğunu bilme (DBö)	$\frac{x+6+4}{x^2-4} = \frac{4x-8}{x^2-4}$ $\frac{x+10}{x^2-4} = \frac{4x-8}{x^2-4}$

**Tablo 1. 13.** (Devam) *Çözüm taksonomileri*

Yöntem	Adımlar	Örnekler
	5. Gerektiği durumda çarpanlara ayırma (ÇA)	$x+10 = 4x-8$ ( $x \neq 2, x \neq -2$ )
	6. Değişkenin katsayısıyla bölerek değişkeni izole etmek (SBö)	$3x = 18, x=6$ (7 adım) SP
YAÇ	1. Farklı bir sıralama kullanmak. 2. Benzer terimleri birleştirmek. 3. Sadece paydaları sabit içeren kesirlerde paydaları sadeleştirme ya da paydaları cebirsel ifade içeren kesirlerde paydaları sadeleştirme ancak cebirsel ifadedeki değişkenin payda 0 olduğunda aldığı değerün çözüm kümesi dışında olduğunu bilme 4. Bölme 5. Denklemin karşı tarafında bulunan bir değişkeni ya da sabiti yalnız bırakmak (başka bir yenilikçi strateji) 6. Ortak paranteze alarak genel yenilikçi stratejinin kurallarını uygulamak (başka bir yenilikçi strateji) 7. Kesrin anlamlarını kullanarak çözüme ulaşmak (başka bir yenilikçi strateji) vb.	Soru $\frac{2(x+1)}{6} + \frac{3(x+1)}{6} = \frac{15}{6}$ $\frac{5(x+1)}{6} = \frac{15}{6}$ $5(x+1) = 15$ $x+1 = 3$ $x = 2$

Çözüm taksonomileri tablo 1.13.'te gösterildiği gibi belirlenmiştir. Özellikle SPÖ çözümlerinde farklı gereksiz stratejiler bulunarak tabloya eklenebilir. Bu taksonomiler hiyerarşik bir yapı içermektedir. Örneğin bir birey SP'ye ulaşmadan önce bazı gereksiz adımlar kullanır. Ancak bu gereksiz adımların farkına vararak SP'ye ulaşabilir. En üst düzey YAÇ'dir. Bu yenilikçi yetenek kavramsal ve işlemsel çözümlerin çözümleri arasındaki belirleyici unsurdur. Bu araştırmada öğrencilerin YAÇ'ler oluşturmasının yanı sıra diğer yöntemleri de kullanması amaçlanmaktadır.

Bu araştırma kapsamında Star'ın (2001) birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler kapsamında tanımladığı yenilikçi çözüm stratejileri, benzer değişkenleri birleştirme, benzer değişkenleri ve sabitleri sadeleştirme, önce çarpma, önce bölme, önce toplama (değişkene benzetmek için) ve ortak paranteze alma YAÇ'leri cebirsel kesirli ifadelerle ilişkilendirilerek yerini korumaktadır. Ancak "Kesrin anlamı" gibi yeni dönüşümlerde eklenmiştir.

### 1.6.1.3.1. Benzer değişkenleri birleştirme

Benzer değişkenleri birleştirme çözümleri cebirsel ifadelerde benzer olan değişkenleri bir araya getirerek bunlar arasında işlem yapma olarak ifade edilebilir (Star, 2005). Bu çözümleri cebirsel kesirlerde Pc Pdn olanlarda, Pn Pdc olanlarda ya da Pc Pdc olanlarda kullanılabilir.

Benzer değişkenleri birleştirme çözümleri benzer yönleri olmakla birlikte kesir türlerine göre farklı özelliklerde barındırabilmektedir. Örneğin Pc Pdn olan kesirlerde paydaları nümerik olarak eşitlerken benzer olan değişkenleri koruyarak (dağılma özelliğini kullanmamak ya da ortak paranteze almak vb.) aralarında işlem yapılabilir (bkz. Tablo 1.14.). Bu, öğrenciyi çoğu zaman işlem hatalarına sebep olabilen dağılma özelliğinden kurtarır. Aynı zamanda önce bölme stratejisini görmesini kolaylaştırır. Bu durum değişkenleri birleştirme çözümlerinin avantajlı olmasını sağlar.

**Tablo 1. 14.** Benzer değişkenleri birleştirme dönüşümüne örnek

Örnek Çözüm 1	Örnek Çözüm 2	Dönüşüm
$\frac{3}{(x-2)} - \frac{2}{(x+2)} = \frac{4}{(x+2)}$	$\frac{5x-8}{x-3} - \frac{2}{3} = \frac{7}{x-3}$	Benzer değişkenleri birleştirme.
$\frac{3}{(x-2)} = \frac{6}{(x+2)}$	$\frac{5x-8}{x-3} - \frac{7}{3} = \frac{2}{x-3}$	
$\frac{1}{(x-2)} = \frac{2}{(x+2)}$	$\frac{x-3}{5x-15} = \frac{2}{3}$	
$x+2 = 2x-2$	$\frac{x-3}{5(x-3)} = \frac{2}{3} (X \neq 3)$	
$x = 4$	$\frac{x-3}{5} = \frac{2}{3}$	
	$5 = \frac{2}{3}$	
	$\text{Ç.K.} = \{\}$	

Pn Pdc olan kesirli ifadelerde paydası aynı olan ifadeleri bir araya getirerek bu kesirler arasında işlem yapmak söz konusudur. Kesirlerde toplama ve çıkarma işleminin en temel çözümleri olan paydaları eşitleme konusunda değişkenleri birleştirme stratejisi daha önemli bir hal alır. Çünkü çoğu zaman öğrenciyi ikinci dereceden denklemlerle uğraşmaktan kurtarır. Bu durum bu çözümlerin avantajlı bir çözümleri olmasını sağlar.

Pc Pdc olan kesirli ifadelerde ise sorunun özelliklerine göre ilk iki cebirsel kesirli ifade kullanılarak yöntemler, bütünleşik olarak kullanılabilir. Bu ise çözümlerin en avantajlı olabileceği durumdur. Bu üç durum da göz önünde bulundurulduğunda değişkenleri birleştirme stratejisinin YAÇ olarak nitelendirilmesi yerinde bir karar olur.

### 1.6.1.3.2. Benzer değişkenleri ve sabitleri sadeleştirme

Bu çözüml stratejisi cebirsel kesirlerde Pn Pdc olanlarda ya da Pc Pdc olanlarda kullanılabilir (bkz. Tablo 1.15). Benzer değişkenleri sadeleştirme çözüml stratejisi kesir türlerine göre farklı özellikler göstermemektedir. Bu çözüml stratejisinin temel prensibi benzer değişkenleri ve sabitleri fark edip sadeleştirebilmektir.

**Tablo 1. 15.** Benzer değişkenleri ve sabitleri sadeleştirme dönüşümlerine örnek

Çözüm	Dönüşüm
$\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-1} + 2$	Benzer değişkenleri sadeleştirme
$\frac{2}{x+1} = 2$	Önce bölme
$2 = 2 \cdot (x+1)$	
$x+1=1$	
$x=0$	

Bu çözüml stratejisi denklem çözümlerinde özellikle çözümlün ilk adımında kullanıldığında işlem yoğunluğunu azaltır ve işlem hatası yapma olasılığını düşürdüğü için doğru sonuca daha hızlı ve etkili ulaşmayı sağlar.

### 1.6.1.3.3. Önce çarpma

Bu çözüml stratejisi cebirsel kesirlerde Pn Pdc ya da Pc Pdc olanlarda kullanılabilir (bkz. Tablo 1.16.).

**Tablo 1. 16.** Önce çarpma dönüşümlerine örnek

Çözüm	Dönüşüm
$\frac{1}{2x+6} + \frac{x-2}{3x+9} = \frac{2x-1}{x+3}$	Ortak paranteze alma
$\frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} = \frac{2x-1}{x+3}$	Her 2 tarafı x+3 ile çarpma (x≠-3 olduğunu bilmeli.)
$\frac{1}{2} + \frac{x-2}{3} = \frac{2x-1}{x+3}$	
$\frac{3}{3} + \frac{2(x-2)}{3} = \frac{6(2x-1)}{6(x+3)}$	Paydaları eşitleme
$\frac{6}{3} + \frac{2x-4}{3} = \frac{12x-6}{6}$	Dağılma
$\frac{6}{3+2x-4} = \frac{12x-6}{6}$	
$\frac{6}{2x-1} = \frac{12x-6}{6}$	
$2x-1 = 12x-6$	
$10x = 5$	
$x = \frac{1}{2}$	

Önce çarpma çözüm stratejisi özellikle paydada değişken olduğunda paydası cebirsel ifadelerde payda eşitleme çözüm stratejisini yapmaktan kurtarır. Ancak bu aşamada denklemi çarpan cebirsel ifadeyi 0 yapan x değeri çözüm kümesinin elemanı değildir. Pc Pdn ifadeleri içeren denklemlerde ise denklemi sabit ile çarpmak paydaları eşitleme çözüm stratejisini yapmaktan kurtarır. Ayrıca sabit ile çarpmak çözüm kümesini etkilemez.

#### **1.6.1.3.4. Önce bölme**

Bu çözüm stratejisi, eğer bölme imkânı varsa diğer stratejilerden önce bölme işlemini yapmaktır. Cebirsel kesirlerde Pc Pdn olanlarda, Pn Pdc olanlarda ya da Pc Pdc olanlarda kullanılabilir (bkz. Tablo 1.17.).

**Tablo 1. 17. Önce bölme dönüşümüne örnek**

Çözüm	Dönüşüm
$\frac{12}{x+4} = 4$	Önce bölme
$\frac{3}{x+4} = 1$	
$x+4= 3$	
$x=1$	

Önce bölme çözüm stratejisinde önce çarpma çözüm stratejisi benzer şekilde önce sabit ile bölmek işlem yoğunluğunu azaltan aynı zamanda çözüm kümesini etkilemeyen bir durumdur (bkz. Tablo 1.17.). Özellikle Pc Pdn ifadeleri içeren denklemlerde eşitliğin her iki tarafı aynı cebirsel ifadeye bölünebilir. Ancak bu durum işlem yoğunluğunu azaltmakla birlikte çözüm kümesini etkileyen bir durumdur. Denklemi böldüğümüz cebirsel ifadeyi 0 yapan x değeri çözüm kümesinin elemanı değildir.

#### **1.6.1.3.5. Önce toplama-çıkarma**

Bu çözüm stratejisi cebirsel kesirli ifadeleri toplama ve çıkarmanın ötesinde daha çok benzer değişkenleri elde etmek için kullanılan amaçlı bir toplama ve çıkarmadır. Devamında başka çözüm stratejileri gerçekleştirmek için önemli bir çözüm stratejisidir. Bu çözüm stratejisi cebirsel kesirlerde Pc Pdn olanlarda, Pn Pdc olanlarda ya da Pc Pdc olanlarda kullanılabilir (bkz. Tablo 1.18.).

**Tablo 1. 18.** *Önce toplama-çıkarma dönüşümüne örnek*

Çözüm	Dönüşüm
$\frac{2x+5}{x} + \frac{4x+3}{x} = \frac{2x-2}{x} + \frac{2}{3}$	Önce çıkarma
$\frac{2x+5}{x} + \frac{4x+3}{x} - \frac{2x-2}{x} = \frac{2}{3}$	
$\frac{x}{2x+5} + \frac{x}{2x+5} = \frac{2}{3}$	
$\frac{x}{2(2x+5)} = \frac{5}{3}$	Benzer değişkenleri birleştirme
$12x+30 = 5x$	
$7x = -30$	
$x = \frac{-30}{7}$	

Tablo 1.18. incelendiğinde, bütün cebirsel ifadelerin paydaları aynı olmasına karşın amaçlı çıkarma işlemi yapılmış ve benzer ifadeler elde edilmiştir. Ardından benzer değişkenleri birleştirme çözüm stratejisi kullanılarak çözüm tamamlanmıştır.

#### **1.6.1.3.6. Ortak paranteze alma**

Bu çözüm stratejisi cebirsel bir ifadeyi nümerik ya da cebirsel bir ifadenin ortak parantezine almaktır. Bu çözüm stratejisi cebirsel kesirlerde Pc Pdn olanlarda, Pn Pdc olanlarda ya da Pc Pdc olanlarda kullanılabilir (bkz. Tablo 1.19.).

**Tablo 1. 19.** *Ortak paranteze alma ve değişkenle çarpma dönüşümlerine örnek*

Çözüm	Dönüşüm
$\frac{1}{2x+6} + \frac{x-2}{3x+9} = \frac{2x-1}{x+3}$	Ortak paranteze alma
$\frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} = \frac{2x-1}{x+3}$	
$\frac{1}{2} + \frac{x-2}{3} = \frac{2x-1}{x+3}$	(her 2 tarafı x+3 ile çarpma) x≠-3 olduğunu bilmeli.)
$\frac{3}{2} + \frac{2(x-2)}{3} = \frac{6(2x-1)}{x+3}$	
$\frac{6}{3} + \frac{2x-4}{3} = \frac{12x-6}{x+3}$	
$\frac{6}{3+2x-4} = \frac{12x-6}{x+3}$	
$\frac{6}{2x-1} = \frac{12x-6}{x+3}$	
$\frac{6}{2x-1} = \frac{6}{x+3}$	
$2x-1 = 12x-6$	
$10x = 5$	
$x = \frac{1}{2}$	

Ortak paranteze alma hem işlem kolaylığını sağlama hem de başka çözüm stratejileri gerçekleştirmek için önemli bir çözüm stratejisidir.

#### **1.6.1.3.7. Kesrin anlamı: Yarım ve çeyrek**

Bu çözüm stratejisi kesrin daha çok bölüm anlamını kullanarak denklemi çözmektir. Kesrin pay ve payda durumundan kurtularak kesirli olmayan ifadelerde denklem çözmeye

kolaylığını sağlar. Cebirsel kesirlerde Pc Pdn olanlarda, Pn Pdc olanlarda ya da Pc Pdc olanlarda kullanılabilir (bkz. Tablo 1.20.).

**Tablo 1. 20.** Kesrin anlamı dönüşümüne örnek

Örnek Çözüm 1	Örnek Çözüm 1	Dönüşüm
$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = 6$	$\frac{x+5}{3} - \frac{x+5}{9} = 16$	
$\frac{1}{x} = m$ olsun.	$\frac{x+5}{9} = k$ olsun.	
$\frac{2}{x} = 2m$ olur.	$\frac{x+5}{3} = 3k$ olur.	
$3m=6$	$4k=16$	Kesrin anlamı
$m=2$	$k=4$	
$\frac{1}{x} = 2$	$\frac{x+5}{3} = 4$	
$x = \frac{1}{2}$	$x+5 = 12$	
	$x = 7$	

Tablo 1.20. incelendiğinde kesrin bölüm anlamı kullanılarak cebirsel kesirli ifadelerde değişken değiştirilmiş ve işlem kolaylığı sağlanarak çözüm sağlanmıştır.

#### 1.6.1.3.8. Değişkenleri düzenleyerek benzer değişkenleri birleştirme

Değişkenleri birleştirme cebirsel ifadelerde benzer olan değişkenleri bir araya getirerek bunlar arasında işlem yapmaktır (Star, 2005). Değişkenleri düzenleyerek birleştirmek cebirsel kesirli denklemler kapsamında oluşturulmuş yeni bir yenilikçi alternatif çözüm stratejisidir. Bu çözüm stratejisi cebirsel kesirlerde Pc Pdn olanlarda, Pn Pdc olanlarda ya da Pc Pdc olanlarda kullanılabilir (bkz. Tablo 1.21.).

**Tablo 1. 21.** Değişkenleri düzenleyerek benzer değişkenleri birleştirme dönüşümüne örnek

Çözüm	Dönüşüm
$\frac{3x+4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{6x+18}{3} = 12$	Önce toplama Ortak paranteze alma
$\frac{3x+9}{3} + \frac{6x+18}{3} = 12$	Benzer değişkenleri birleştirme
$\frac{3(x+3)}{3} + \frac{6(x+3)}{3} = 12$	Önce bölme
$\frac{9(x+3)}{3} = 12$	
$3(x+3)=12$	
$x+3=4$	
$x=1$	

Bu stratejide denklemden bulunan cebirsel kesirlerin durumuna göre farklı stratejiler kullanarak değişken içeren ifadeleri birbirine benzetmek ve ardından değişkenleri birleştirme stratejisi söz konusudur. Tablo 1.21. incelendiğinde önce

toplama ve ortak paranteze alma stratejileri kullanılarak değişkenler birbirine benzetilmiş ve ardından benzer değişkenler birleştirilerek çözüm tamamlanmıştır.

#### 1.6.1.3.9. Değişkenleri düzenleyerek benzer değişkenleri sadeleştirme

Bu çözüm stratejisi değişkenlerin ya da sabitlerin benzer hale getirilerek sadeleştirilmesidir. Cebirsel kesirlerde Pc Pdn olanlarda, Pn Pdc olanlarda ya da Pc Pdc olanlarda kullanılabilir (bkz. Tablo 1.22.).

**Tablo 1. 22.** Değişkenleri düzenleyerek benzer değişkenleri sadeleştirme dönüşümüne örnek

Çözüm	Dönüşüm
$\frac{4x+6}{2x+6} + \frac{x-2}{2x+9} - \frac{x+3}{12x+36} = \frac{6x+9}{3x+9} + \frac{x-2}{3x-6}$	Ortak paranteze alma
$\frac{2(2x+3)}{2(x+3)} + \frac{x-2}{2x+9} - \frac{x+3}{12(x+3)} = \frac{3(2x+3)}{3(x+3)} + \frac{x-2}{3(x-2)}$	Benzer değişkenleri sadeleştirme
$\frac{x-2}{2x+9} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$	
$\frac{x-2}{2x+9} = \frac{12}{36} + \frac{3}{36}$	
$\frac{x-2}{2x+9} = \frac{15}{36}$	
$\frac{x-2}{2x+9} = \frac{5}{12}$	
$10x+45 = 12x-24$	
$69 = 2x$	
$x = \frac{69}{2}$	

Bu stratejide denklemden bulunan cebirsel kesirlerin durumuna göre farklı stratejiler kullanarak değişkenleri birbirine benzetmek ve ardından değişkenleri sadeleştirme stratejisi söz konusudur. Tablo 1.22. incelendiğinde önce ortak paranteze alma ardından pay ve payda arasında sadeleştirmeler yapılarak değişkenler birbirine benzetilmiş ve benzer değişkenler sadeleştirilerek çözüm tamamlanmıştır.

#### 1.6.3. Kavramsal anlama

Kavramsal bilgi verilen bir duruma hangi işlemin uygun olduğunu değerlendirmede insanlara yardımcı olmaktadır (örneğin, Brownell, 1935; Greeno, 1978; Garofalo ve Lester, 1985; Byrnes ve Wasik, 1991; Carr, Alexander ve Folds-Bennett, 1994; Schneider ve Stern, 2012). Kavramsal bilgi ayrıca daha esnek problem çözümüne izin verir. Böylece işlemin kavramsal temellerini anlayan insanlar yeni problemleri genellemede daha başarılı olurlar (örneğin, Blöte, Klein ve Beishuizen, 2000; NCTM, 2000; Rittle-Johnson, Siegler ve Alibali, 2001; Baroody ve Dowker, 2003; Baştürk,

2005; Baroody, Feil ve Johnson, 2007). “Bir problem çözüldüğünde, kavramsal bilgi çözümün mantıklı olup olmadığını kontrol etmek için ayrıca kullanılabilir (örneğin, Brownell, 1935; Garofalo ve Lester, 1985; Carr vd., 1994; akt. Crooks ve Alibali, 2014, s. 345).”

Kavramsal bilgi, bilgiyi almada ve kullanmada esneklik sağlayan bilgi düğümleri arasındaki ilişkilerin zengin bir ağını içeren bilgidir (Hiebert ve Lefevre, 1986). Bruner (1966) işlemsel bilgiyi kavramsal bilginin görünür ispatı olarak tanımlamıştır. Araştırmacılara göre,

- Kavramsal olarak iyi ilişkilendirilmiş fikirler yeni durumlara daha kolay uyum sağlar (Skemp, 1976; Hiebert ve Carpenter, 1992).
- Öğrencilerin işlemsel ve kavramsal bilgi arasında bağ kurmaları gerektiğinde, onun yapısını incelemek amacıyla kuralları bireysel adımlara ayırmada zorlanırlar (Hatano, 1988).
- “Öğrenciler matematiğin nedeni hakkında düşünmek için ve düşüncelerini diğerlerinin sonuçları ile ilişkilendirmek için zorlandıklarında, kendi matematiksel bilgilerini güçlendirirler (NCTM, 2000, akt. Darley, 2005, s.20).”

Matematik eğitimcileri öğrencilerin matematiksel kuralları daha çok ezberleyerek öğrendiklerini ve bu bilginin de kolay unutulduğunu belirtmişlerdir. Bu nedenle matematiksel işlemlerin anlaşılmasını sağlamak için kavramsal bilgiyle bağlantı kurulması gerektiğini ifade etmişlerdir (Hiebert ve Carpenter, 1992; Star, 2001). Araştırmaları sonucunda Kieran ve Sfard (1999) işlemsel bilgiyi öğrenmiş bir öğrencinin kuralları bildiğini ancak kuralların neden işlediğine dair kavramsal anlamaya sahip olmadığını belirtmişlerdir. Öğrenci kuralların herkes aynı şekilde çözdüğü için basitçe ortaya çıktığını düşündüğünü ifade etmiştir. Wu (2001) ise bazı öğrencilerin denklem çözümünü kavramsal olarak anlayabildiklerini, ancak özellikle negatif sayılar, ondalık gösterimler ve kesirlerle hesaplama olayına saplanıp kalmış olduklarını belirtmiştir.

Kavramsal anlama, matematiksel kavramların, bu kavramlara ait tanımların ve ilkelerin kişinin zihninde anlam kazanmasıdır. Bu ise kişinin ilk defa karşılaştığı bir bilgiyi var olan bilgileri ve algılayışı çerçevesinde değerlendirip ilişkisel ve sistemli bir yapıya ulaşma sürecidir (Yanık, 2015).

Şu ana kadar yapılan kavramsal bilgi tanımlarından da anlaşılacağı üzere, araştırmacılar kavramsal bilginin ve kavramsal anlamının önemli ve gerekli olduğunu

belirtmişlerdir. Genel tanım “iyi ilişkilendirilmiş fikirler” (Skemp, 1976; Hiebert ve Carpenter, 1992) olarak görünmektedir, ancak Crooks ve Alibali (2014) yoğun bir alanyazın çalışması sonucunda kavramsal bilginin mevcut tanımlarını kategorilere ayırmışlardır (bkz. Tablo 1.23.).

**Tablo 1. 23.** *Kavramsal bilgi tanım türlerinin özeti Crooks ve Alibali (2014, s. 348)*

Tanım türü	Açıklama	Örnek
Bağlantılı Bilgi	Bir etki alanı içindeki ilişkiler	“...ilişkiler açısından zengin bilgi. Bilginin bağlantılı bir ağı gibi düşünülebilir. Bir ağ içinde bağlantılı ilişkiler bilginin ayrı parçaları gibi belirgindir.”(Hiebert ve Lefevre, 1986, s. 3–4)
Genel İlkeler Bilgisi	Genel kurallar, gerçekler ve tanımlar	“... gerçekler hakkında statik bilgi, kavramlar ve belirli bir etki alanı içinde geçerli olan ilkeler.” (de Jong ve Ferguson-Hessler,1996, s. 107)
Prosedürlerin Dayandığı İlkeler Bilgisi	İlkelerin temelleri	“...konuya özel prosedürleri destekleyen kavramsal...” (Pardhan ve Mohammad, 2005, s. 7)
Kategori Bilgisi	Bilgiyi organize eden kategoriler	“Kavramların alt sınıflarını içeren taksonomik kategoriler...” (Byrnes, 1992, s. 236)
Alan Yapı Bilgisi	Matematiğin organizasyonu	“... matematiğin altında yatan yapıların anlaşılması.” (Robinson & Dube, 2009a, p. 193)
Sembol Bilgisi	Sembolün anlamları	“... kavramsal bilgi matematiksel bilginin ne anlama geldiğinin farkındalığı olarak tanımlanabilir...” (Ploger ve Hecht, 2009, s. 268)

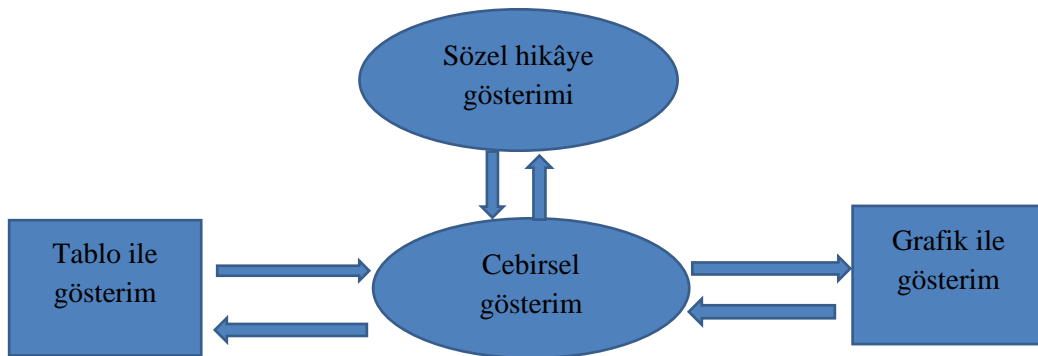
Crooks ve Alibali (2014) alanyazından yola çıkarak kavramsal bilgiye dair 6 kategori oluşturmuşlardır. Bu kategoriler dâhilinde araştırmanın diğer bir boyutunu sembol bilgisi, yani sembollerin anlamı oluşturmaktadır. Alibali vd. (2014) denklemlerde sembollerin kavramsal anlamada önemli bir yeri olduğunu ve cebirin sembollerle oluşumunun sembolleri anlamayı (Looking through) içerdiğini ifade etmişlerdir. Pope’e (1994) göre öğrencilerin denklemleri günlük hayatta farklı bir şey

gibi algılamaları denklemleri anlama konusunda zorluk yaşamalarına neden olmaktadır. Gerçek yaşamla ilişkilendirme anlamında sembollerin farklı temsilleri önemli bir yere sahiptir.

### **1.6.3.1. Semboller ve Referanslar Arasında Bağ Kurulması**

Semboller bir diyagram, bir tablo, bir sözel açıklama ya da fiziksel bir canlandırma ile ilişkilendirilebilir. Chae (2005) cebirsel gösterimin sözel hikâye gösterimine, tablo ile gösterime ya da grafik ile gösterime dönüştürülebileceğini belirtmiş ayrıca sözel hikâye gösteriminin, tablo ile gösterimin ya da grafik ile gösterimin cebirsel gösterime dönüştürülebileceğini de vurgulamıştır (bkz. Şekil 1.1).

Crooks ve Alibali (2014) cebirsel sembollerini anlamının bir kavramsal anlama şekli olduğunu belirtmişlerdir. Semboller bir diyagram, bir tablo, bir sözel açıklama ya da fiziksel bir canlandırma ile ilişkilendirilebilir. Alibali vd. (2014) sembollerin tek başına verilmesinden ziyade bu referanslarla (diyagram, tablo, sözel açıklama vb.) ilişkili bir şekilde verilmesinin denklemleri anlamlı bir şekilde öğrenmek açısından önemli olduğunu vurgulamışlardır. Bu ilişkilendirmenin sonucunda örneğin bir öğrenci sembolik olarak verilen bir denklemi sözel olarak açıklayabilir veya sözel olarak verilen bir ifadeyi sembolik olarak gösterebilir. Öğrenci sembolik ifadeleri zamanla soyutlansa bile ihtiyacı olduğunda orijinal içerikle bağlantı kurabilir. Kavramsal anlama cebirsel gösterimlerin farklı temsillerle (tablo, grafik, fiziksel, sözel-hikâye vb.) ifade edilebilmesini içerir (Alibali, vd., 2014). Sembolleri anlamak, semboller ve referansları arasında bir bağ kurmaktır (bkz. Şekil 1.1.).



**Şekil 1. 1.** Çalışmadaki referansiyel ilişki (Chae, 2005, s.51)

Sembollerin günlük hayatla ilişkilendirilmesinde diyagram, tablo, sözlü açıklama, fiziksel canlandırma, sözel, yazılı ya da çizilerek oluşturulan farklı temsiller sunulabilir. Cebirsel sembollerin anlamını anlamak kavramsal öğrenmenin bir

göstergesi olarak belirlenmiştir. Birey bu sembollere bakarak orijinal bağlamla ya da önceki sembolleştirmeye ilişki kurabilir (Alibali vd., 2014).

Farklı temsiller rasyonel sayılar için de söz konusudur. Rasyonel sayılar sözel, sembolik, nesne ve model olmak üzere dört farklı biçimde gösterilebilmektedir (Birgin ve Gürbüz, 2009). Farklı temsillerin kullanımı önemlidir. Panasuk ve Beyranvand (2010) farklı sunumlar kullanılarak sunulan aynı ilişkiyi tanıyabilen öğrencilerin standart bir testte daha yüksek performans gösterdiklerini bulmuşlardır.

Ayrıca Panasuk (2010) cebirde öğrencilerin kavramsal anlamalarını değerlendirmek için üç aşamalı sıralama çerçevesi geliştirmiştir. Bu aşamalara göre; denklem çözme ile ilgili 0 seviyesindeki öğrenciler sembol ile ya da kelime ile basitçe verilen problemin doğru çözümünü bulabilirler. Fakat görsel bir şekilde verilen soruları çözmeye ya da bir denklemi diyagram olarak sunmada zorlanabilirler. Seviye 1’de bir denklemi çözmeye adımları açıklayabilirler, ancak tamamen rahat bir şekilde çözmeye ve özellikleri anlamada eksiktirler ve adımların nedenlerini gerektiği gibi anlamazlar. 2. Seviyede öğrenciler denklemleri hem etkili bir şekilde işleyebilir hem de çözebilirler ve özellikleri rahat bir şekilde anlarlar.

Öğrencilerin bilinmeyenler, denklemlerin tanımlanması ve çözülmesiyle ilgili düşüncelerini inceleyen bir çalışmada ise program daha çok kavrama dayalı olduğunda bile, öğrencilerin işlemsel becerilerini geliştirecekleri gösterilmiştir (Cai, Moyer, Wang ve Bikai, 2011). Kieran ve Sfard (1999) ve Kalchman ve Koedinger (2005) denklemlerin yanında ilgili tablo ve grafiklerinde kullanılması gerektiğini belirtmişlerdir. Onlara göre öğrenciler sunumlar arasında ilişki kurmalıdırlar. Kelime problemlerinin tablo ve grafiklerle bağlantılı olması gerektiğini belirtmişlerdir. Böylece öğrenciler doğrusal olan ve doğrusal olmayan denklemleri oluşturan durumlar arasındaki farklılıkları görebilirler.

Cebirsel kesirli denklemlerin ise hem cebirsel sembollerin hem de kesrin farklı anlamlara sahip olması nedeniyle temsil edilebilme manasında daha karmaşık bir yapıya sahip olduğu düşünülmektedir. Bu açıdan bakıldığında, cebirsel kesirli bir ifadenin sözel hikâye gösterimi cebirsel sembollerin ve kesirlerin sözel-hikâye gösterimini bir arada içermektedir. Bu çalışmada, cebirsel kesirli denklemler günlük hayatla ilişkili sözel hikâye problemleri kapsamında kavramsal olarak incelenmiştir.

### ***1.6.3.2. Sözel hikâye problemi***

Cebir öğrenme alanı ile ilgili araştırmalar incelendiğinde öğrencilerin cebirsel ifadeleri anlamlandırmada ve cebirsel ifadelere dair yorum yapmada zorluklar yaşadıkları belirlenmiştir (Stacey ve MacGregor, 1997; Graham ve Thomas, 2000; Panasuk, 2010). Brown vd. (1988) araştırmalarında öğrencilerin cebir konusunda iyi olsalar dahi cebirsel denklemlere dair problemleri çözemediklerini bulmuşlardır. NCTM'in standartlarından biri olan problem çözme hem dünyada hem de Türkiye'de (MEB, 2013) önemli görülen süreç standartlarından biridir. MEB (2013) ortaokul matematik öğretim programında problem çözme için ayrıca bir bölüm oluşturulmuş ve hem bir öğretim yöntemi hem de bir öğrenme biçimi olarak ele alınmıştır.

Bir süreci ifade eden problem çözmenin ilk basamağını problem oluşturur. Problem bireyde çözme isteği uyandıran, çözüm kurallarının hazırda bulunmadığı ve üst düzey düşünmeyi gerektiren durumdur (Krutick ve Rudnick, 1987; Schoenfeld, 1992; NCTM, 2000).

Mayer'e (1985) göre problem çözme, bir problemi çözüme ulaştırma sürecinde bireyin ortaya koyduğu zihinsel performanstır. Polya (1962) ise problem çözme için çözümün bilinmediği durumlarda çözüme ulaşmak için izlenen yol olarak tanımlamıştır. Problem çözme farklı birçok boyut içermekle birlikte problem kurma bu boyutlar içerisinde önemli bir yere sahiptir. NCTM (2000) de öğrencilere problem kurabilmeleri için imkân sağlanması gerektiği ayrıca vurgulanmıştır. MEB (2013) yayınladığı programda öğrencilerin problem çözme süreçlerini problemi anlama, çözümü planlama, planı uygulama, çözümü kontrol etme, çözümü genelleme ve problem kurma süreçleri şeklinde ifade ederek "*problem kurma*" ya vurgu yapmıştır.

Geçmişte araştırmacılar öğrencilerden ya cebirsel bir denklemin çözümünü istemişler ya da sözel problemleri cebirsel denklemlere dönüştürmelerini istemişlerdir. Bu çalışmalar çok yapıldığı için öğrenci artık bu tür problemlere dair bir alışkanlık geliştirmiş olabilir, ancak öğrenciler kendilerine sunulan bir görevi tamamlamak için alışılmış işlemlere sahip olmamalıdır. Çünkü sözel problemleri sembole çevirmek rutine dönüşebilir ve sadece bu görev öğrencinin kavramsal anladığını göstermez. Öğrencinin kavramsal anlayıp anlamadığını tespit etmek için yeni görevler verilmesi gerekmektedir (Alibali, 2014).

Problem kurma öğrencilerin matematiği anlayarak öğrenmelerini sağlar (Stoyanova, 2003), matematiksel yaratıcılıklarını geliştirir (Sheffield ve Cruikshank,

2005; Van Harpen ve Sriraman, 2013) ve öğrencilerin kavram yanılgılarını anlamalarını ve gidermelerini sağlar (Ticha ve Hospesova, 2009).

Stoyanova ve Ellerton (1996) problem kurmayı serbest, yarı-yapılandırılmış ve yapılandırılmış şeklinde üç gruba ayırmıştır. Serbest problem kurmada verilen bir duruma uygun problem kurma söz konusu iken yarı yapılandırılmış problem kurmada yarım bırakılmış problem ya da durumların tamamlanması istenmektedir. Yapılandırılmış problem kurmada ise öğrencilerden verilen problem durumlarına uygun problem kurmaları istenmektedir.

Diğer bir sınıflamada ise problem kurma, verilen matematiksel bir ifadeye problem kurma, çözülmüş bir problemi yeniden oluşturma ya da olan bir problemi değiştirerek yeni problem kurma olarak üç şekilde gerçekleştirilmiştir (Silver, 1994). Bu çalışmada, katılımcılardan verilen cebirsel kesirli ifadelerle sözel hikâye problemi kurmaları istenmiştir.

Problem kurmaya dair yapılan çalışmalar incelendiğinde, kümeler (Şengül ve Katrancı, 2012), geometri (Vacc, 1993 Lavy ve Bershadsky, 2003; Van Harpen ve Sriraman, 2013), olasılık (Yıldız ve Baltacı, 2015; Silber ve Cai, 2017), oran-orantı (Şengül ve Katrancı, 2015), mutlak değer (Güveli, 2015) ve kesirler (Toluk-Uçar, 2009; Işık, 2011; Ünlü ve Ertekin, 2012; Kılıç, 2013) konusunda çalışmalar mevcuttur.

Alanyazında cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere problem kurma konusunda herhangi bir çalışma yapılmadığı tespit edilmiştir. Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere problem kurma hem cebirsel ifadelerin hem de kesirlerin sahip olduğu kavramsal boyutu içermektedir. Kesirlerin kavramsal boyutunda ise kesirlerin temsil türlerinin önemli olduğu düşünülmektedir.

### ***1.6.3.3. Kesirlerin temsil türleri***

Olkun ve Uçar (2007) yapılan araştırmaların (Kieren, 1980; Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983; Behr, Harel, Post ve Lesh, 1993) alanyazın ışığında rasyonel sayıların değişik problem türlerine göre değişik şekillerde yorumlanabildiğini ve bu yorum farklılıklarının konunun anlaşılmasını zorlaştırdığını, aynı durumun kesirler için de geçerli olduğunu belirtmiştir.

Kesirler birçok araştırmacı tarafından cebir öğrenme alanında en çok zorluk yaşanan konulardan biri olarak belirlenmiştir (Peck ve Jenck, 1981; Bulgar, 2003; Liu, Xin ve Li, 2011). Bu nedenle kesirler üzerine çok sayıda araştırma gerçekleştirilmiştir

(Kieren, 1976; Behr vd., 1983; Behr vd., 1992; Şengül ve Öz, 2008; Liu, Xin ve Li, 2011). Bu durum kesirlerin kavramsal olarak anlaşılabilmesi için de geçerlidir.

Örneğin, Peck ve Jenck (1981) kesirlerle ilgili fiziksel bir deneyim verildiğinde çocukların kesirleri zihinsel olarak nasıl yapılandırdıklarını belirlemek için ortaokul öğrencileri ile görüşmeler yapmışlardır. 20 çocuktan 19'unun ancak fiziksel deneyimlerle kesirleri zihinsel olarak kavramsallaştırabildiklerini bulmuşlardır. Bu zorluğun nedenlerinden biri de kesrin farklı anlamlara sahip olmasıdır (Olkun ve Uçar, 2007). Yapılan araştırmalar, kesrin, yani "a/b" sembolünün birden fazla şekilde yorumlanabileceğini göstermiştir (Kieren, 1976; Behr vd., 1983; Behr vd., 1992, Akt: Toluk, 2001). Bir kesirli sayı, verilen problemin durumuna ve içeriğine göre, parça-bütün, ölçüm, bölüm, orantı ya da işlemci anlamını barındırabilir.

Bu anlam fazlalığı öğrencilerin bu sayıları ve bu sayılara ilişkin kavramları öğrenmelerini zorlaştırmaktadır (Toluk, 2001). Örneğin, Liu, Xin ve Li (2011) 5, 6, 7 ve 8. sınıfta okuyan Çinli öğrencilerin kesirleri nasıl anlamlandırdıklarını incelemişlerdir. Öğrencilerin kesirleri daha çok parça bütün anlamıyla anlamlandırdıklarını diğer anlamlara (oran, bölüm, işlemci, ölçüm) dair çok değinmediklerini, parça bütün anlamına karşın pay ve payda arasındaki ilişkiyi anlamadıklarını, pay ve paydayı ayrı sayılar olarak düşündüklerini işlemlerde ve kesirleri sıralamada bu ayrımı yaptıklarını ifade etmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin parça bütün anlamını anlamlandırabilmelerinin öğretmenin derslerinde daha çok kesrin bu anlamını öne çıkarmalarından kaynaklandığını belirtmişlerdir. Baştürk (2016) sınıf öğretmeni adayları ile gerçekleştirdiği araştırmada, 126 öğretmen adayına kesirlerle ilgili açık uçlu sorulardan oluşan bir anket uygulamıştır. Elde ettiği en önemli sonuçlardan biri, öğretmen adaylarının kesirlere dair akıllarına gelen ilk anlamın kesrin parça-bütün anlamı olmasıdır.

Lamon (2007) ilgili alanyazından a/b ifadesinin beş farklı biçimde yorumlanabileceğini ifade etmiştir: (1) parça-bütün, (2) ölçme, (3) oran, (4) bölüm, (5) işlemci. Sonraki kısımda kesrin bu anlamlarının özellikleri yer almaktadır.

#### ***1.6.2.3.1. Parça-bütün anlamı***

MEB öğretim programı incelendiğinde, ilköğretimin birinci kademesinde, kesir öğretimi parça-bütün yaklaşımını temel alarak başlar. Kesir öğretiminde vurgu,

oluşturulan kesirlerin anlamlarından çok, uygun sembolleştirme ve terminolojinin geliştirilmesi üzerindedir.

Bu tür bir yaklaşıma göre kullanılan etkinliklerde, öğrenciler verilen nesnelere parçalar ve ortaya çıkan parçaları birim bütüne göre “kesir” olarak ifade etmeyi öğrenirler. Parçaları “kesir” olarak tanımladıkça, kesrin pay ve paydasının neyi ifade ettiğini öğrenirler (Toluk, 2001).

#### **1.6.2.3.2. Ölçme anlamı**

Ölçme bir uzunluğu belirlemeyi ve daha sonra başka bir nesnenin uzunluğunu ölçmek için o uzunluğu ölçme aracı olarak kullanmayı içerir (Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013).

“Ölçme durumlarında  $a/b$  gibi bir kesirle ilgileniyorsak  $b$  eşit parçaya bölünmüş herhangi bir nesnenin parçalarının  $a$  tanesinden bahsediyoruz demektir. Ölçme birimimiz  $1/b$ ’dir (Acar, 2010, s. 6).” Buradaki asıl mevzu bir ölçme birimine sahip olmamızdır. Bu sahip olduğumuz birimle, ölçmek istediğimiz şeyin niteliğine de bağlı olmakla birlikte, (uzunluk, ağırlık, miktar vb.) ölçüm yapabiliriz.

#### **1.6.2.3.3. İşlemci (Operatör) anlamı**

Bu anlam rasyonel sayının bir işlemin ana unsuru olduğu durumlarda söz konusudur. Örneğin bir vazodaki çiçeklerin  $1/3$ ’ünü bulmanız isteniyorsa, buradaki  $1/3$  rasyonel sayısı bir işlemci görevi görmektedir.

#### **1.6.2.3.4. Oran anlamı**

“Oran, iki niceliğin arasındaki ilişkidir. Oran parça-parça kıyaslaması (kız:erkek=3:1), parça-bütün kıyaslaması (kız:toplam=3:4) ya da iki farklı niceliğin kıyaslaması (1 saatte 80 km yol almak) şeklinde olabilir (Acar, 2010, s. 8).”

#### **1.6.2.3.5. Bölüm anlamı**

Bölüm anlamı bir miktar çokluğun belli sayıda kişilere veya şeylere (bardaklara, sınıflara, kutulara, hayvanlara, vb.) paylaşılması, genel olarak bir rasyonel sayının iki doğal sayının bölümünü gösterdiği daha matematiksel olarak ise bir  $a$  miktarının  $b$  tane gruba eşit olarak paylaştırıldığı durumlardır (Acar, 2010; Alacaci, 2012).

Rasyonel sayıların bölüm anlamı eşit paylaşma mantığından gelmektedir. Eşit paylaşma anlamı hem kesrin anlamının hem de kesirlerle ilgili kavramların öğretimi için

zengin bir içeriğe sahiptir (Streefland, 1991; Empson, 1995). Bu nedenle bu araştırmanın bir boyutunda cebirsel kesirlerde sadeleştirme, toplama ve çıkarma işlemlerindeki işlem esnekliği araştırılacaktır. İkinci boyutta ise cebirsel kesirli denklemlerde kavramsal öğrenme sembolik açıdan incelenecektir.

### **1.7. İlgili Araştırmalar**

Bu bölümde cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde işlem esnekliği ve kavramsal anlamaya dair alan yazın incelenerek elde edilen araştırmalar cebirsel kesirler, işlem esnekliği ve kavramsal anlama başlıkları altında incelenmiştir.

#### **1.7.1. Cebirsel kesirler**

Alanyazın incelendiğinde cebirsel kesirlere dair yapılan araştırmalarda cebirsel kesirli ifadelerin kesirlerle olan ilişkilerinin ele alındığı belirlenmiştir. İlgili alanyazında bu konuyla ilgili iki çalışma bulunabilmiştir. İlk çalışmada Öksüz (2004) cebirsel kesirlerde kesrin bölüm anlamını incelemiştir. Öğrencilerin yapabildikleri bütün çözümleri yapmalarına izin verilmiş ve öğrencilerden cebirsel çözümlerle aritmetik çözümler arasında ilişki kurmaları istenmiştir. Elde edilen verilere göre kesirden cebirsel kesirlere geçiş karmaşık bir süreçtir ve pek çok kavram yanılgısı ve yanlış anlama bu geçişi zorlaştırmaktadır. Bu çalışmada ayrıca, öğrencilerin kesrin gelişim sürecinde öncelikle parça bütün anlayışına sahip oldukları daha sonra kesri paylaşırma olarak algıladıkları ve kesirler ve cebirsel kesirlerle ilgili farklı anlayışlara sahip oldukları vurgulanmıştır.

Öksüz'e (2004) göre öğrencilerin cebirsel kesir ve nümerik kesre verdikleri anlamlar arasındaki farklılıklar, öğrencilerin cebirsel kesirde kullandıkları işlem anlamını nümerik kesirlere verememeleri ve cebirsel kesirlerde denklik anlamını kullanamamaları ama nümerik kesirlerde kullanabilmeleridir. Öğrenciler işlemci anlamını cebirsel kesirlerde kullanıp nümerik kesirlerde kullanmamışlardır. Öksüz'e (2004) göre bunun nedeni öğrencilerin algoritmik işlemlerle cebirsel kesirler arasında hızlı bir ilişki kurma istekleri olabilir. Öğrenciler değişkenleri kavramsallaştırmada eksiklikler göstermektedirler, çünkü  $x$ 'e karşı bir güven eksikliği vardır. Araştırmacı öğrencilerin düşüncelerinde kavramsal olarak bir analogi (benzeşim) kavrayamamıştır. Bölüm açısından öğrenciler genelleme yapabilmişler ve aynı yorumu kullanmışlar. Nümerik ya da cebirsel kesrin sembolünün  $(a/b)$  ve  $a/b = a \div b$  olduğunu söyleyebilmişler. Öğrenciler bölüm olarak cebirsel kesri anladıklarında, cebirsel kesir için bölme

cümlelerini verebilmişlerdir. Kesrin bölüm anlamını geliştirdikten sonra sorunun başka boyutlarını kurabilmişlerdir.

İkinci çalışmada ise Yantz (2013) lisans öğrencilerinin cebirsel rasyonel ifadeleri sadeleştirme ve işlemleri gerçekleştirme yetenekleri ve rasyonel sayılarda aynısını yapma yetenekleri arasında var olan (varsa) ilişkiyi incelemiştir. Ayrıca işlem yapmak için kullandıkları çözüm stratejileri ve bu çözüm stratejilerin onların temel numerik işlemleri anlayışlarıyla nasıl ilişkili olduğunu araştırmıştır.

Elde edilen sonuçlara göre toplama işleminde numerik ve cebirsel bağlam arasında işlem seçimlerinde çok çeşitlilik vardır. Görüşmelerde katılımcıların çoğunun ortak payda da ya da cebirsel ya da numerik ifadelerde gereksiz çözüm stratejileri seçtikleri belirlenmiştir. Doğru çözüm stratejilerin başarı oranı numerik ve cebirsel bağlam arasında çok farklıdır. Katılımcılar numerik sorularda cebirsel sorulara göre çok daha fazla hata yapmışlardır. Çarpma ve bölme işleminde daha çok hata bulunmuştur. Öğrenci yorumları numerik ve cebirsel işlemlerle ilgili bilgi ağlarının ayrı şekillendiğini göstermiştir.

Bu araştırmada cebirsel kesirli ifadelerde toplama ve çıkarma işlemini içeren denklemlerde işlem esnekliği ve kavramsal boyut incelenmiştir. Kavramsal açıdan bakıldığında Öksüz'den (2014) farklı olarak kesrin bütün anlamlarına odaklanılmış ve kesrin kavramsal boyutu sözel hikâye problemi yazma açısından incelenmiş ve cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde sembollerde sözel hikâye gösterimi ele alınmıştır.

### **1.7.2. İşlem esnekliği**

İşlem esnekliği üzerine yapılan araştırmalar incelendiğinde genellikle birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler konusu kapsamında gerçekleştirildiği belirlenmiştir. Genellikle öğretmen, öğretmen adayları ya da öğrencilerin işlem esnekliği üzerine çalışılmıştır. Bu araştırmada da lise öğrencileri ile cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde işlem esnekliği değişim süreci incelenmiştir. Bu nedenle araştırmanın yöntemi olarak öğretim deneyi modeli belirlenmiştir.

#### ***1.7.2.1. Öğretmen ya da öğretmen adayları ile yapılan araştırmalar***

Lewis (1981) çalışmasında uzman matematikçilere ve başka bölümlerde okuyan öğrencilere cebirsel denklem soruları sormuştur. Bulduğu temel fark uzmanların çözümlerinin daha kısa olduğu çünkü bazı işlemleri zihinsel olarak yaptıkları olmuştur.

Yine de beklenilenin aksine uzmanların en verimli çözümleri seçmediklerini belirtmiş ve buna 2 neden sunmuştur. İlki, uzman matematikçilerin çalışma hayatlarında bu tarz problemlerin muhtemelen daha az olması, çünkü uzmanların daha üst seviye matematiğe odaklanmalarıdır, ikincisi, uzmanların hesaplamaları zihinsel ve hızlı bir şekilde yapabilmeleridir.

Yakes ve Star (2011) ise, matematik öğretmenleri için öğrencilerin işlem esnekliğini geliştirmeye yönelik bir öğretim aracı olarak karşılaştırma kullanımını teşvik etmek amacıyla bir günlük mesleki gelişim etkinliği düzenlemiştir. Mesleki gelişim etkinliğinin amacı, öğretmenlerin öğretimde etkili bir şekilde çözümleri karşılaştırmayı nasıl kullanacaklarının farkında olmalarını sağlamak ve öğretmenlerin mesleki gelişim sırasında öğretim yoluyla çözümleri karşılaştırmayı kullanarak cebirde kendi işlem esnekliklerini etkilemektir. Uygulama sonucunda öğretmenlere karşılaştırmayı etkili bir şekilde kullanma teknikleri sunulduğunda, çoklu çözüm yöntemlerine ilişkin anlayışlarının güçlendiği belirlenmiştir. Ayrıca, öğretmenler kendilerini tek bir yöntem kullanma konusunda eleştirmeye başlamışlardır. İşlem esnekliğini kendi öğretim uygulamalarında da kullanacaklarını belirtmişlerdir.

Berk ve Taber (2009) ilköğretim matematik öğretmen adayları ile orantı problemlerinde işlem esnekliği üzerine çalışmışlardır. Araştırmada öğretim deneyi modeli kullanılmıştır. Bu araştırmanın sonuçlarına göre, ön testin sonucunda öğretmen adaylarının sınırlı esnekliğe sahip oldukları bulunmuştur. Diğer bir sonuç, araştırmacıların müdahalelerinin öğretmen adaylarının işlem esnekliklerinin 6 ay sonra bile kalıcı olan bir değişime sebep olmasıdır. Katılımcıların problem çözümlerini karşılaştırmalarının işlem esneklikleri üzerinde önemli bir etkisinin olmadığını belirlemişlerdir.

#### ***1.7.2.2. Öğrenciler ile yapılan araştırmalar***

Bu konuda alanyazında karşılaşılan ilk araştırma Star (2001) tarafından gerçekleştirilmiştir. Star (2001) çalışmasında ortaokul öğrencilerinin 1. dereceden 1 bilinmeyenli denklemlerde işlem esnekliklerini deneysel yöntem kullanarak araştırmıştır. Uygulama sonucunda öğrenciler hiçbir örnek çalışma ve dönüşümleri zincirleme bilgileri olmamasına karşın çok karmaşık soruları çözmeyi öğrenmişlerdir ve güvenilir ve tutarlı pratik çözümler kullanmışlardır.

Lynch ve Star (2014) birden fazla strateji geliştirmeye yönelik akademik olarak iyi olduğu belirlenen 6 öğrenci ile öğretim yılı sonunda bir araştırma yapmışlardır ve öğrencilerin çoklu stratejileri öğrenme uygulamasını nasıl gördüklerini araştırmışlardır. Bu amaçla, öğrencilerle görüşme yapılmıştır. Elde edilen verilere göre öğrencilerin denklem çözümünde karşılaştıkları karmaşaları azalttığını ve doğru yönergeler ışığında çoklu strateji ile birlikte eğitimi tercih ettikleri belirlenmiştir.

Diğer bir araştırmada Rittle-Johnson, Star ve Durkin (2012) farklı iki okuldan 198 sekizinci sınıf öğrenci ile işlem esnekliği üzerine deneysel bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Öğrenciler çok adımlı denklem çözüme konusunda daha önce ders almamışlardır. Öğrencilerle çok adımlı denklemlerin üç farklı çözüm yöntemini kullanarak çok adımlı denklem çözümüne dair 3 saatlik ders gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre 1 aylık test uygulamalarında hemen işlemleri karşılaştıranların karşılaştırmayanlara göre daha esnek oldukları belirlenmiştir. Buna göre, karşılaştırma yeni başlayanlarda esnekliği destekleyebilir ve çoklu prosedürlerin erken başlaması önemli bir sebep olabilir.

### **1.7.3. Sözel problem kurma**

Alanyazında sözel problemler üzerine yapılan araştırmaların genellikle verilen problemi çözüme şeklinde yapıldıkları belirlenmiştir (Leon, 1992; Soylu, 2007; Chang, 2010; Kılıç, 2011; Karal, Çebi, Pekşen ve Turgut, 2010; Wong ve Ho, 2017; Morin, Watson, Hesterand Raver, 2017; Shin ve Bryant, 2017, vb.). Sözel problem kurma üzerine yapılan araştırmalar ise çok daha sınırlı sayıdadır.

Bu konuda yapılan çalışmalardan biri Cankoy ve Darbaz (2010) tarafından gerçekleştirilmiştir. Araştırmada deneysel yöntem uygulanarak kontrol grubuna geleneksel problem çözüme eğitimi verilmiş, deney grubuna ise problem kurma temelli problem çözüme eğitimi verilmiştir. Elde edilen verilere göre deney grubu uygulanan problemi anlama testinde problemi yeniden ifadelendirme, görselleştirme ve özellikle niteliksel akıl yürütme konularında kontrol grubundan çok daha üst düzeyde başarılı olmuştur. Sidney ve Alibali (2015) ilköğretimin sonlarındaki öğrencilerle kesirlerde bölme işlemine dair böyle bir çalışma yapmıştır. Ma (1999) da aynı konu üzerine öğretmenlerle çalışmıştır.

Işık, Işık ve Kar (2011) ise matematik öğretmenlerinin görsel ve sözel temsillere yönelik problem kurabilme durumlarını araştırmışlar ve genellikle başarısız olduklarını belirlemişlerdir. Başka bir araştırmada Işık ve Kar (2012) 7. sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine dair problem kurabilme durumlarını incelemişler ve öğrencilerin yaşayabilecekleri zorlukları araştırmışlardır. Öğrencilerin kurdukları problemlerde, toplanan ikinci kesri bütünün kalanı üzerinden ifade etme, parça-bütün ilişkisini kuramama, işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme, birim kargaşası, toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme, işlemi soru köküne yansıtamama ve tamsayılı kesirlerin tam kısımlarına anlam yükleyememe şeklinde yedi güçlük tespit edilmiştir. En fazla güçlük sonucun tamsayılı kesir olduğu iki basit kesrin toplamına, en az güçlük ise sonucun basit kesir olduğu iki basit kesrin toplamına yönelik problem kurmada görülmüştür.

Kılıç (2012), sınıf öğretmenlerinin problem kurmada nasıl sorunlarla karşılaştıklarını araştırmıştır. Elde edilen bulgulara göre öğretmenlerin belirttikleri sorunların, öğrenci merkezli olan ve olmayan olmasının yanı sıra, bazı öğretmenler problem kurma ile ilgili herhangi bir sorunla karşılaşmadıklarını belirtmişlerdir. Bazıları problem kurma ile ilişkili olmayan problemlerden söz etmişlerdir. Bazı öğretmenler ise problem kurmada karşılaştıkları problemlere yönelik çözüm önerileri de geliştirmişlerdir.

Başka bir araştırmada ise ilköğretim matematik öğretmenlerinin, problem kurmaya yönelik düşüncelerini öğrenmek amacıyla Erzurum il merkezinde görev yapan 6 ilköğretim matematik öğretmeni ile 2010-2011 eğitim-öğretim yılı ikinci döneminde problem kurmaya yönelik hazırlanan görüşme soruları kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Araştırmada, öğretmenlerin problem kurmaya dair genellikle olumlu düşündükleri ve geometri dışındaki diğer öğrenme alanlarında problem kurma etkinliklerini derslerinde uyguladıkları belirlenmiştir. Ancak öğretmenlerin genellikle yapılandırılmış ve yarı-yapılandırılmış problem kurma etkinliklerini uyguladıkları, fakat serbest problem kurma etkinlikleri yaptırmadıkları tespit edilmiştir (Işık ve Kar, 2012). Pedagojik formasyon eğitimi almakta olan matematik bölümü öğrencileriyle yaptıkları çalışmada Aydoğdu-İskenderoğlu ve Güneş (2016) öğrencilerin eksik, açık uçlu ya da matematiksel veri içeren ifadeleri değiştirerek problem yazabilmede zorlanırken verilen matematiksel bir eşit için çok daha rahat problem kurabildiklerini belirlemişlerdir.

### ***1.7.3.1. Cebirsel denklemler ve sözel problem***

Cebirsel denklemlerin sözel probleme dönüştürülmesi ile alakalı alanyazında birkaç çalışma ile karşılaşmıştır. Stephens (2003) lise öğrencileriyle bir ve iki işlem içeren cebirsel denklemler üzerine çalışmıştır. Işık ve Kar (2012a) ise tek bilinmeyenli doğrusal ve ikinci dereceden denklemlere öğretmen adaylarının kurdukları problemleri araştırmışlar ve matematiksel öğeleri sözel ifadeye yanlış çevirdiklerini, değişkenlere günlük hayatla ilişkili olmayan değerlerin verilmesi ve problem yazarken denklemin değiştirilmesi gibi hatalar yaptıklarını bulmuşlardır.

Alibali vd. (2014) ortaokul öğrencilerinden birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem sorularının (bilinmeyenin yeri, işlem sayısı ve işlem türü olarak çeşitlendirilmiş) çözümünü, daha sonra bir set halinde oluşturulmuş denklem sorularını sözel probleme dönüştürmelerini istemişlerdir. Sonuç olarak, öğrencilerin denklemleri sözel probleme dönüştürürken çeşitli hatalar yaptıklarını belirtmişlerdir ve bu hatalar neticesinde öğrencilerin kavramsal anlamalarında iki boşluk belirlemişlerdir. İlki, öğrencilerin çarpma işlemi ile sembolik sunumu arasındaki bağı anlamada eksikliklerinin olmasıdır. İkincisi, öğrencilerin tutarlı bir hikâyeye içerisinde çoklu matematiksel işlemleri göstermede zorluk yaşamalarıdır.

Ünlü ve Sarpkaya Aktaş (2017) ise ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ifade ve denklemlere ilişkin kurdukları problemleri incelemişlerdir. Araştırmada, öğretmen adaylarından verilen cebirsel ifade ve denklemlere uygun problem kurmaları istenmiştir. Elde edilen sonuçlara göre öğretmen adaylarının cebirsel ifade ve denklemlere yönelik genel olarak sözel ve çözülebilen problemler kurdukları, kurulan problemlerde genellikle günlük dili kullandıkları tespit edilmiştir.

Bu araştırmada ise 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere problem kurabilme durumlarının gelişim süreci incelenmiştir. Bu amaçla diğer araştırmalardan farklı olarak öğretim deneyi modeli kullanılmıştır.

## 2. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın yaklaşımı, araştırmanın modeli, katılımcılar, veri toplama araçları, veri analizi ve araştırmanın geçerliği ve güvenilirliğine yönelik bilgiler verilmiştir.

### 2.1. Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel kesirli denklemlerde sadeleştirme, toplama ve çıkarma işlemlerine dair işlemsel bilgilerinin ve kavramsal bilgilerinin değişim süreci ve bu süreci etkileyen faktörler incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda bu araştırmada nitel bir yaklaşımı benimsenmiştir. Nitel araştırma nitel veri toplama araçlarının kullanıldığı, kişilerin ya da olayların izlendiği ve olay ya da durumların daha çok nedenini ve nasılını inceleyen araştırma yaklaşımıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Bu araştırmada araştırmacı-öğretmen tarafından yürütülen bir öğretim sürecinde cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler konusuna ilişkin katılımcıların işlemsel ve kavramsal anlamaya dair bilişsel yapılarının değişimleri izlenmiştir. Bu nedenle katılımcılarla uzun süreli etkileşim içerisine girilerek onların düşüncelerine dayalı öğretimi şekillendirme söz konusu olmuştur. Bu amaç doğrultusunda araştırmada nitel araştırma yaklaşımları kapsamında ele alınan “öğretim deneyi” (Steffe ve Thompson, 2000) modeli kullanılmıştır.

Araştırmanın modelini “öğretim deneyi”, bunu desteklemek için yapılan “klinik görüşmeler” ve “doküman incelemesi” oluşturmaktadır. Öğretim deneyi Piaget'nin klinik görüşme yönteminden türetilmiş bir araştırma aracı olmakla birlikte öğretim sürecinin iyileştirilmesine yönelik deneysel bir boyut içermesi sebebiyle klinik görüşme yönteminden daha geniş ve derin incelemelerin yapıldığı bir yöntemdir (Steffe ve Thompson, 2000).

Klinik görüşme, standart test gibi yöntemlerden daha ayrıntılı incelemeler yapmaktadır. Ayrıca standart testlerden farklı olarak öğrenci ve araştırmacı-öğretmen arasında bir iletişim söz konusudur (Hunting, 1983). “Sözel olan ve sözel olmayan davranışlar aracılığıyla katılımcıların matematiksel düşünceleri ortaya çıkarılır ve bunlar üzerinden çıkarımlar yapılır. Bu çıkarımlar sayesinde bireylerin matematik öğrenme ve problem çözme süreçlerinin derinlemesine incelenmesi beklenilmektedir (Goldin, 2000, s.519).”

Klinik görüşmeler araştırmalarda genelde iki amaç için kullanılmaktadır

- Problem özme sürecinde bireylerin matematiksel davranışları üzerinden zihinlerinde meydana gelen işlemleri anlama
- Problem çözücülerin matematiksel bilgi yapılarında ve bilişsel süreçlerinde meydana gelen değişiklikler hakkında sonuç ıkarma (Goldin, 1998, s.40):

Yeni bilginin ön bilgilerle bağ kurularak öğrenildiği düşüncesine dayanan yapılandırmacılık kuramından beslenen ğretim deneyi, öğrencilerin matematiksel bilgiyi kazanma sürecinde zihinlerinde meydana gelen eylemleri anlamayı, elde edilen verilerin yorumlanarak ğretim sürecinin yeniden düzenlenmesini ve yeniden düzenlenen öğretimin denenerek sürecin tekrardan incelenmesini içermektedir (Steffe, 1991).

Öğretim deneyi matematiksel bilginin oluşumunun nasıl gerçekleştiğini ve öğrenme üzerinde hangi değişkenlerin etkili olduğunu derinlemesine inceleyen, öğrenme-öğretme yollarına ilişkin varsayımlar ortaya koyan ve bu varsayımları test etmeyi içeren nitel bir araştırma yöntemi olarak ele alınmaktadır (Steffe, 1991). Bu araştırmada ğretim deneyi özümlü örnekler üzerine kurulmuş ve varsayımlar bunun üzerine oluşturulmuştur.

Öğretim deneyi, öğrencilerin matematiksel etkinliklerinin açıklanması ve keşfedilmesi için tasarlanmış bir dizi ğretim seanslarını içeren bir yöntemdir (Steffe ve Thompson, 2000). Araştırma sürecinde öğrencilerin matematik bilgi düzeylerinin ne olduğu klinik görüşmeyle ortaya problem konur ve devamında öğrencinin matematik bilgisi temel alınarak ğretim seanslarında varsayımlar oluşturulur ve bu varsayımlar üzerine süreç planlanır. Bu süreçte araştırmacının öğrencilerle iyi bir iletişim kurması önemlidir (Steffe,1991).

Öğretim deneyi ile ilgili uygulamalar iki temel şekilde gerçekleştirilmiştir (Hunting, 1983):

- *Mikro Şema*: Araştırmada odaklanılan nokta, öğrencinin kavramsal gelişimi veya problem çözme uygulamaları süresince kurduğu bilişsel bağlantılar ve geçişlerdir. Bu bilişsel süreçler gözlem ve yorumlar aracılığıyla ortaya konmuştur. Matematik konularının öğrenimi içinde tek bir öğrencinin gelişimi araştırılmıştır

- *Makro Şema*: Araştırmalar bir öğretim düzeyinden diğerlerine geçilirken öğrencilerin zihinsel anlamda yaşadıkları değişimleri incelemektedir. Bu araştırmalar öğrencilerin tüm sınıf düzeyleri boyunca gerçekleştirdikleri zihinsel değişimleri ortaya çıkarmak amacıyla yıllarca da sürebilmektedir.

Bu araştırmada, *Micro Şema* uygulamasından yararlanılmıştır. Katılımcılar ile bireysel olarak çalışılmış ve öğretim seansları süresince kurdukları bilişsel bağlantılar, bu bağlantılar arasındaki geçişler ve zihinsel değişimler incelenmiştir.

## **2.2. Pilot Çalışma ve Katılımcıların Belirlenmesi**

Çalışmaya başlamadan önce 2015-2016 güz dönemi gerek değerlendirme sorularının (ön uygulama ve klinik görüşme soruları) katılımcılar tarafından anlaşılabilirliğini, öğrenci seviyesine uygunluğunu, araştırma kapsamında amaçlanan hedefleri kapsama durumunu belirlemek, gerekse öğretim seanslarının taslak içeriklerinin oluşturulması ve araştırmacının bu konudaki deneyimini (müdahale durumu, katılımcı ile olan ilişki vb.) arttırmak amacıyla iki dokuzuncu sınıf öğrencisiyle bir pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma kapsamında iki katılımcı ile ilk ve son klinik görüşmeler ve bireysel yedi öğretim seansı gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmanın ardından ön değerlendirme ve klinik görüşmelerin son halleri verilerek asıl çalışmanın öğretim seansları için ve olası durumlar için hazırlıklar yapılmıştır.

2015-2016 öğretim yılı bahar döneminin başında araştırmanın katılımcılarının belirlenmesi amacıyla ilk olarak Sinop ilinde bulunan toplam dört lisede (bir fen lisesi ve üç tane Anadolu lisesi) 240 dokuzuncu sınıf öğrencisine açık uçlu sorular içeren ön değerlendirme soruları yöneltilmiştir. Ön değerlendirme soruları dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde kesirleri içeren işlemsel sorulara, ikinci bölümde cebirsel kesirleri içeren denklemlere, üçüncü bölümde cebirsel kesirli denklemlere sözel problem yazma görevlerine ve dördüncü bölümde verilen sözel problemlere denklem yazma görevlerine yer verilmiştir. Bu sorular öğrencilerin mevcut işlemsel becerileri, işlem esnekliği ve sözel-hikâye problemleri ve denklem yazabilme becerileri hakkında fikir sahibi olmak amacıyla sorulmuştur.

Araştırmada katılımcıların belirlenmesinde, derinlemesine çalışmayı olanaklı kıldığı için amaçlı örnekleme (Patton, 1997) yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Ölçüt örnekleme yönteminde, araştırma konusuna göre daha önce

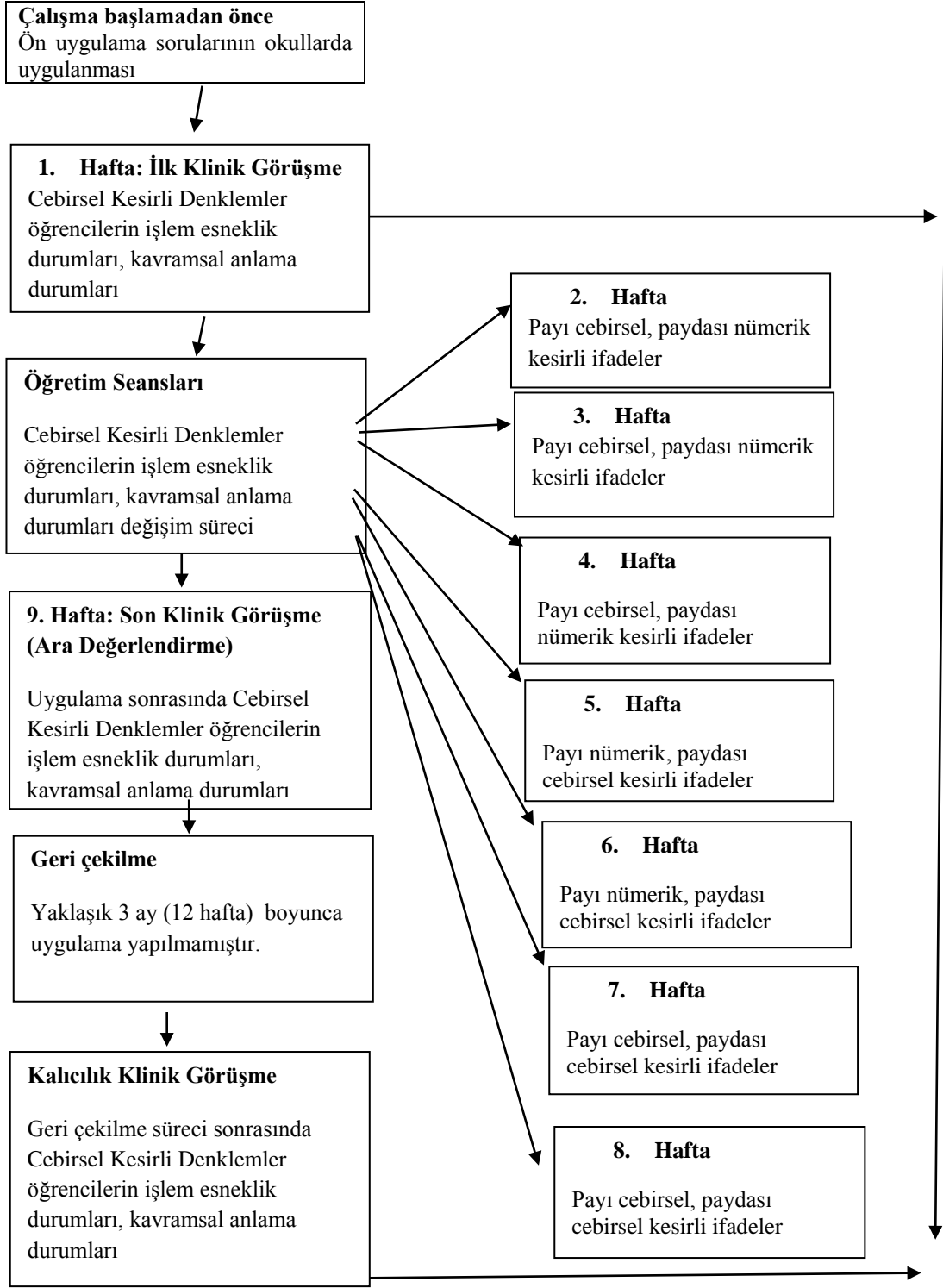
belirlenmiş olan ölçütleri sağlayan durumlar üzerinde derinlemesine çalışılabilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Katılımcılar üç temel ölçüte göre belirlenmiştir. İlk ölçüt ön uygulama sorularının ilk bölümünden hata yapmamalarıdır. İkinci ölçüt ön uygulama sorularının ikinci bölümündeki sorulara sadece bir yolla cevap verebilmeleridir. Üçüncü ölçüt ise cebirsel ifadelerle yönelik sözel problem yazmada güçlükler yaşıyor olmalarıdır. Bu üç ölçütün olmasının nedeni öğretim seansları ile yapılması planlanan uygulamanın varsa sonuçlarını daha açık bir şekilde görebilmektir. Bu ölçütlerin yanı sıra katılımcıların öğretmenlerinden düşüncelerini açıkça ifade edebilen öğrencilerin belirlenmesine yönelik tavsiyeler de alınmıştır. Bu sürecin sonunda 4 öğrenci (Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan kod isimleri verilmiştir) çalışmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir.

Bu katılımcılardan ikisi (Ayşegül ve Serkan) Fen Lisesi'nde, ikisi ise (Berna ve Erdem) Anadolu lisesinde öğrenim görmektedirler. Katılımcıların tamamı kesirlerde işlemleri doğru bir şekilde yapabilmişlerdir. Üç katılımcı cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere tek çözüm geliştirebilirken Fen Lisesi'nde öğrenim görmekte olan erkek katılımcı bu denklemlerin birkaçına farklı çözümler geliştirebilmiştir. Katılımcıların tamamı verilen denklemlerin sadece bazılarını problem yazabilmişlerdir.

### **2.3. Veri Toplama Süreci**

Katılımcıların belirlenmesinin ardından asıl çalışmaya başlanmıştır. Öncelikle katılımcılarla ilk klinik görüşmeler yapılmış ardından birer hafta ara ile öğretim seansları uygulanmış (toplam yedi hafta) ve son aşamada başlangıçta yapılan klinik görüşme öğretim seanslarından 1 hafta sonra yeniden uygulanmıştır. Yaklaşık 3 aylık bir geri çekilme sürecinin ardından kalıcılık klinik görüşmesi gerçekleştirilmiştir. Bu aşamaların her birinde gerçekleştirilen etkinliklerin özeti, uygulama sürecinin tamamına ilişkin bir akış şeması verilerek şekil 2.1.'de ortaya koyulmuştur.



**Şekil 2. 1. Öğretim deneyi uygulama aşamaları**

### 2.3.1. Veri toplama araçları

Çalışma kapsamında veriler görüşmeler, bireysel gözlemler (alan notları) ve doküman incelemesi yoluyla toplanmıştır. Aşağıda bu araçların her biri ile ilgili detaylı bilgi verilmiştir.

#### 2.3.1.1. Görüşmeler

Çalışmada yapılan bireysel görüşmeler ön ve son görüşmeler (yapılandırılmış), öğretim seansları sonunda yapılan görüşmeler (yarı-yapılandırılmış) ve kalıcılık görüşmeleri (yapılandırılmış) şeklinde sınıflandırılmıştır.

Ön görüşme soruları katılımcıların çalışmanın başında cebirsel kesirli denklemlere yönelik mevcut işlem esnekliklerinin ve kavramsal bilgilerinin değerlendirilmesi amacıyla yöneltilmiştir. İşlem esnekliğini belirlenmesi amacıyla katılımcılara cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler verilmiş ve yapabildikleri ölçüde farklı yollarla çözmeleri istenmiştir (bkz. Tablo 2.1. örnek sorular için). Mevcut kavramsal bilgilerinin değerlendirilmesi amacıyla katılımcılara farklı yapılarda (payı cebirsel paydası nümerik, payı nümerik paydası cebirsel, pay ve paydası cebirsel) denklemler verilerek bunlara sözel problemler yazmaları istenmiştir (bkz. Tablo 2.1 örnek sorular için). Görüşme soruları belirlenirken alanyazından yararlanılmıştır. Bazı sorular alanyazına dayanarak yeniden düzenlenmiş (Star, 2001), bazıları da araştırmacı tarafından oluşturulmuştur.

**Tablo 2. 1.** Cebirsel kesirli ifadeleri içeren örnek sorular

	İşlem esnekliği	Kavramsal bilgi
PcPdn	$\frac{x+5}{3} - \frac{x+5}{9} = 16$	$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 6$
PnPdc	$\frac{4}{x+4} + \frac{8}{x+4} = 3$	$\frac{3}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{4}$
Pc Pdc	$\frac{1}{2x+6} + \frac{x-2}{3x+9} = \frac{2x-1}{x+3}$	$\frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x-2} = 10$

Son görüşme soruları ön görüşme soruları ile aynı olup çalışma sonunda katılımcıların işlem esnekliği ve kavramsal bilgilerinin mevcut durumunu belirlemek ve varsa süreçte ne gibi değişimlerin yaşandığını saptamak amacıyla sorulmuştur.

Öğretim seansları arasında yapılan yarıyapılandırılmış görüşmelerin amacı ise her öğretim seansı öncesinde belirlenen hedeflere ne ölçüde ulaşıldığını belirlemek ve bir sonraki öğretim seansını tasarlamaktır. Bu görüşmeler küçük farklılıklar olmakla birlikte işlem esnekliği ve kavramsal bilgi temalarına odaklanmıştır.

Kalıcılık klinik görüşmeleri ön ve son görüşmelerle aynı olup çalışmanın ardından verilen üç aylık süre sonunda katılımcıların ne gibi bilgi ve becerileri hala barındırabildiklerini ortaya koymak amacıyla yapılmıştır. Katılımcıların durumunu etkileyecek herhangi bir eğitim olmamasını sağlamak amacı ile geri çekilme süreci okulların kapalı olduğu yaz tatiline denk getirilmiştir. Kalıcılığın uygulanan eğitimin ne kadar etkili olduğunu görebilme açısından önemli bir yere sahip olduğu düşünülmektedir. Kielhofner'ın (1992) da belirttiği gibi belli bir program dâhilinde yeni kazanılan davranışların aynı şekilde sürekli çalışılması sonucunda davranış genellenerek birey tarafından her ortamda uygulanır hale gelmektedir. Bu araştırmada işlem esnekliğine ve kavramsal anlamaya dair kazanılan davranışları katılımcıların ne kadar genelledebildiklerini belirlemek önemli görülmüştür. Tüm görüşmeler ortalama 150 dk sürmüştür, video ve ses kaydına alınmış, ardından dökümleri yapılarak analiz edilmiştir.

### **2.3.1.2. Gözlemler**

Katılımcılar öğretim seansları boyunca araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir. Araştırmacı öğretim seansları boyunca araştırmacı-öğretmen rolü üstlenerek öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtları ve düşünce yapılarını anlamaya çalışmıştır. Gözlemler araştırmacının tuttuğu alan notları ve video kayıtları yoluyla tutulmuş ve her öğretim seansının sonunda dökümü yapılan video kayıtları ve tutulan alan notları karşılaştırılarak sürecin nasıl geliştiği anlaşılmasına çalışılmıştır.

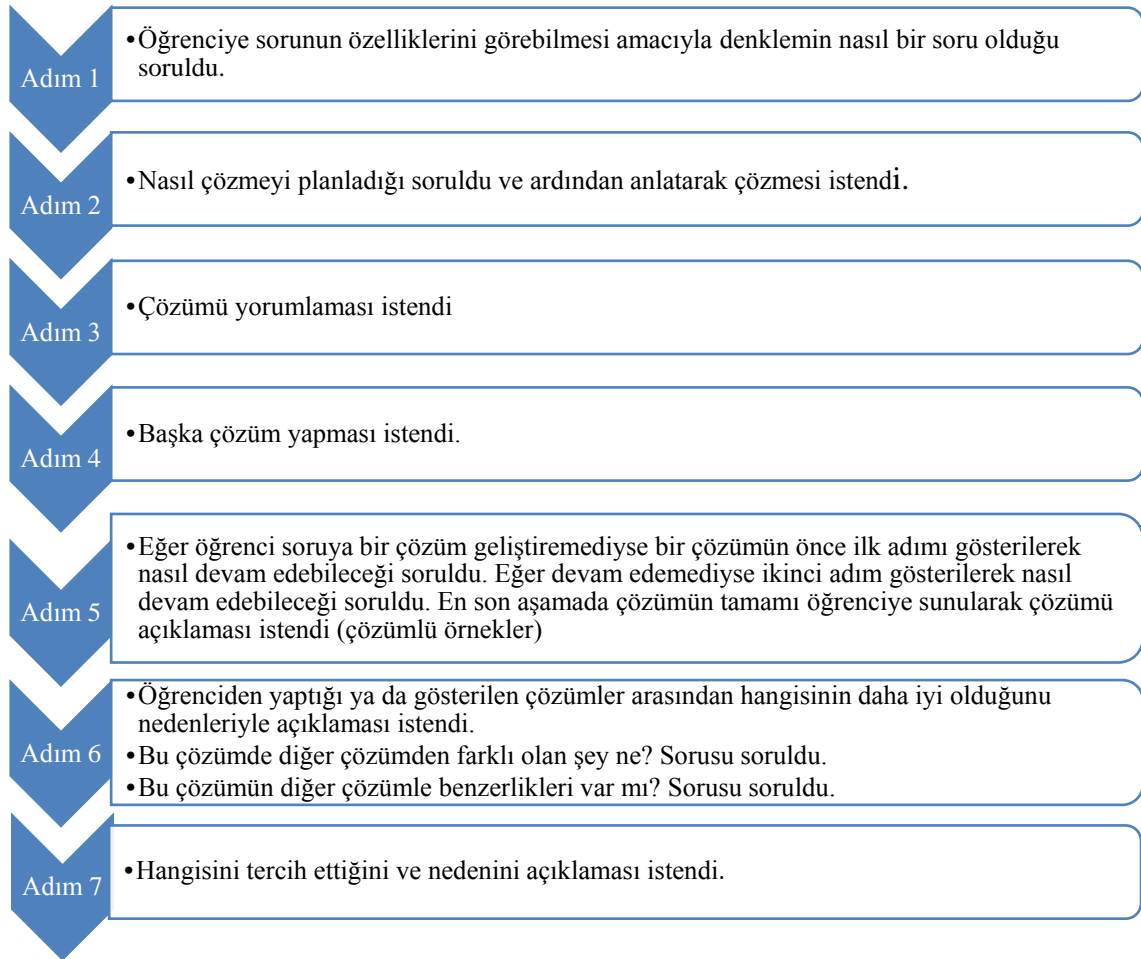
### **2.3.2. Öğretim Seansları**

Çalışma kapsamındaki bireysel öğretim seanslarının amacı, katılımcıların düşüncelerini değiştirmeye teşvik edecek ortamlar yaratarak onların değişen işlem esneklik durumlarını ve kavramsal yapılarını derinlemesine incelemektir. Bu kapsamda araştırmacı her bir katılımcı ile ayrı ayrı haftada bir kere bir araya gelerek ortalama 150 dk süresince öğretim seanslarını gerçekleştirmiştir (Bkz. Şekil 2.1). Bu seansların iki boyutu vardır: 1) İşlem esnekliği boyutu ve 2) kavramsal boyut. Aşağıda her iki boyutun detayları açıklanmıştır.

### 2.3.2.1. İşlem esnekliği boyutu

Öğretim deneyi modelinde katılımcıların düşüncelerini değiştirmeleri istenen bir sonuçtur. Bu amaçla bu araştırmanın işlem esnekliği boyutunda araştırmacı-öğretmen tarafından çözümlü örnekler (Work-out examples) kullanılmıştır. Çözümlü örnekler ile öğrenme, anlamayı desteklemek için çözümden önce bir takım örnekler sağlamak anlamına gelir (Hilbert, Schworm ve Renkl, 2004). Bu çalışmada da katılımcıların işlem esnekliğini geliştirebilmek amacıyla çözümlü örnekler kullanılmıştır. Çözümler katılımcının çözümü kendisinin devam ettirebilmesi amacı ile adım adım gösterilmiştir.

Katılımcıların verilen cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemle alakalı var olan düşüncelerini belirlemek ve bu düşüncelerini yenilemeleri için cesaretlendirerek yenilikçi çözümler yapmaları amacı ile şekil 2.2.'de verilen yönergeler kullanılmıştır.



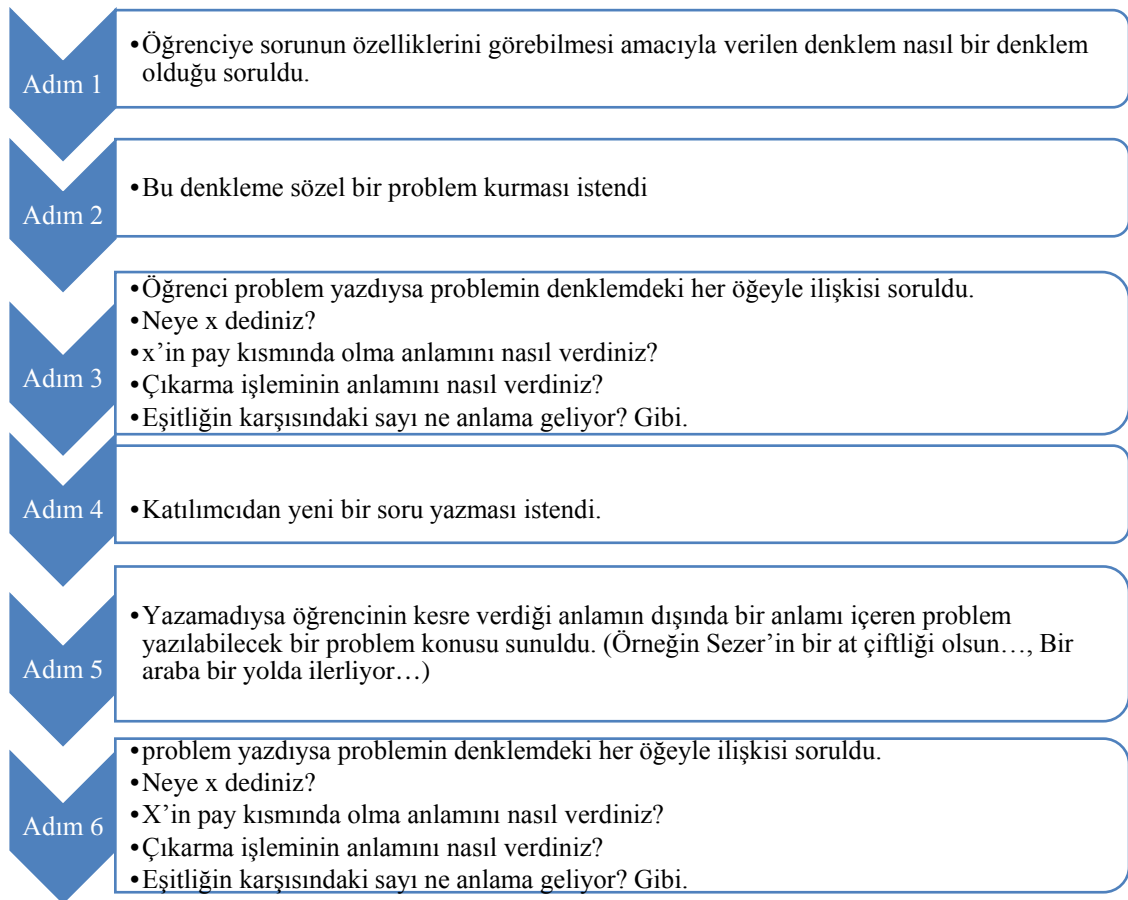
Şekil 2. 2. İşlem esnekliği uygulama yönerge şeması

Her bir katılımcı için, her bir öğretim seansında bu bölüme ait bütün sorularda benzer süreç döngüsel olarak devam etmiştir.

### 2.3.2.2. Kavramsal boyut

Araştırmanın kavramsal anlama boyutunda katılımcıların problem kurma süreçleri irdelenmiştir. Katılımcıların problem kurma sürecinde farklı düşünebilmeleri ve farklı problemler yazabilmeleri amacıyla kesrin farklı anlamalarını içerebilecek problem konuları katılımcılara sunulmuştur. Problem kurma süreci bittikten sonra ise katılımcılara problem verilerek verilen probleme uygun denklemi yazmaları istenmiştir.

Bu süreçte öncelikle katılımcının verilen cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerle alakalı var olan düşüncelerini belirlemek amaçlanmıştır. Ardından var olan düşüncelerini yenilemeleri için kesrin farklı anlamlarını içeren doğru problemler yazabilmeleri amaçlanmıştır. Bu kapsamda şekil 2.3'te verilen yönergeler kullanılmıştır (bkz. Şekil 2.3.)



Şekil 2.3. Kavramsal anlama uygulama yönerge şeması

Her bir katılımcı için, her bir öğretim seansında kavramsal anlama bölümüne ait bütün sorularda benzer süreç döngüsel olarak devam etmiştir.

#### 2.4. Veri Analizi

Bu araştırmada öğretim deneyi uygulamalarında benzer sorular farklı zamanlarda sorularak çözüm konusundaki değişim irdelenmiştir. Aynı tip kodlu soruların sorulma nedeni denklemlerin özel katsayılar ve sabitler değiştiğinde bile eşit karmaşıklığa sahip olmaları ve yapısal olarak benzemeleridir (Star, 2001). Kodlanma nedenlerine genel olarak bakıldığında,

- Soruların sistematik olarak çeşitlendirilmesine ve öğrencilere çözmeleri için verilen problemlerin zorluklarını takip etmeye izin vermesi ve
- Kod türü kullanımı problemlerin kolay tanımlamalarını sağlar. Bunun nedeni aynı tip kodlu problemlerin özel katsayılar ve sabitler değiştiğinde bile eşit karmaşıklığa sahip olmaları ve yapısal olarak benzer olmalarıdır (Star, 2001).

Şeklinde özetlemek mümkündür. Sorulara dair kodlamalar ise denklemin özellikleri göz önünde bulundurularak oluşturulmuştur. İlk 3 basamak (Star, 2001)

1. Basamak dağılma özelliği gerektiren durum sayısı (örneğin  $5(x+7)$ ,  $3(x+1)$  içeren bir denklemde 2 dağılma özelliği vardır. Gizli dağılma özelliği de dâhil)
2. Basamak değişken sayısı (bir değişkenli denklemler kullanılacağı için değişken sayısından kasıt örneğin bir denklemde  $2x$ ,  $x$ ,  $(x+1)$ ,  $(3x+5)$  varsa 4 değişken vardır anlamına gelir.)
3. Basamak sabit sayısı (sabit sayı tam sayı da rasyonel sayıda olabilir.)

İlk 3 basamaktan sonrası (Öksüz, 2004)

- Cebirsel ifade pay kısmında olan P (Örneğin 1 tane P varsa P1 eğer 2 tane varsa P2 gibi)
- Cebirsel İfade payda kısmında olan Pd (Örneğin 1 tane Pd1 gibi)
- Cebirsel ifade hem pay hem payda da olan İ (Örneğin 1 tane İ1 gibi)
- Son olarak paydaları aynı ise A, paydaları farklı ise F

Soruların kodlanmasına dair örnek kodlamalar tablo 2.2.'de sunulmuştur.

**Tablo 2. 2. Soru kodlama örnekleri**

Soru	Kod	Açıklama
$4/(x+4) + 8/(x+4) = 4$	011P0Pd2 İ0A	0: Dağılma özelliği gerektiren durum yok 1: 1 değişken var. (x+4)
$4/(x+4) + 8/(x+4) = 4$	011P0Pd2 İ0A	1: 1 sabit sayı var. (4) P0: Pay kısmında cebirsel ifade yok. Pd2: Payda kısmında 2 tane cebirsel ifade var. (x+4) İ0: Cebirsel ifade hem payında hem paydasında olan kesir yok. A: Paydaları aynı.
$7(x-8)/(x-3) - 21/(x-3) = 14$	121P1Pd2 İ1A	1: Dağılma özelliği gerektiren 1 durum var. $7(x-8)$ 2: 2 değişken var. ((x-8), (x-3)) 1: 1 sabit sayı var. (14) P1: Pay kısmında bir cebirsel ifade var. (x-8) Pd2: Payda kısmında 2 tane cebirsel ifade var. (x-3) İ1: Cebirsel ifade hem payında hem paydasında olan kesir bir tane var. $(7(x-8)/(x-3))$ A: Paydaları aynı.

Verilen denkleme problem yazma bölümünde de benzer bir kodlama kullanılmıştır. Öğretim seanslarında ve klinik görüşmelerde elde edilen veriler (video kayıtları ve dokümanlar) incelenmiş ve belirlenen kategoriler altında nitel çözümlenmeler yapılmıştır. Araştırmanın verileri uygulama esnasında çekilen video kayıtları, uygulama kâğıtları, araştırmacı-öğretmen tarafından alınan alan notları ve öğrenci günlüklerinden oluşmaktadır.

Araştırma öğretim deneyi modelinde bir araştırma olduğu için sürekli ve geriye dönük analizler yapılmıştır. Her hafta video kayıtları, alan notları ve uygulama kâğıtları her bir öğrenci için gruplanmış ve belirlenen kategoriler kapsamında kodlanarak içerik analizi yapılmıştır. Elde edilen veriler işlem esnekliği kapsamında SPÖ, SP ve YAÇ stratejilerini içeren taksonomiler çerçevesinde analiz edilmiş, elde edilen bulgular ışığında genel çerçeveler benzer olmakla birlikte her bir öğrenci için bir sonraki öğretim seansı hazırlanmıştır. Ancak analiz esnasında doğru yorumlamalar ve karşılaştırmalar

yapabilmek amacıyla bütün katılımcılara sorulan ortak sorular analiz edilmiştir. Elde edilen verilerin analiz yöntemi işlem esnekliği ve kavramsal anlama başlıkları altında ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

#### **2.4.1. İşlem esnekliği**

İşlem esnekliğine dair elde edilen veriler (video kayıtları, alan notları ve uygulama kâğıtları) betimsel ve içerik çözümlemesine tabi tutulmuştur. İçerik çözümlemesi, verilerin kodlanması, temaların belirlenmesi, kod ve temaların organize edilmesi, bulguların tanımlanması ve yorumlanması olmak üzere dört aşamada gerçekleşmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 1999). Bu çalışmada elde edilen veriler 3 başlık altında analiz edilmiştir. Bunlar, cebirsel kesirli ifadeler içeren denklemlere dair çoklu çözüm stratejisine sahip olmak, bu çözüm stratejileri arasında bilinçli tercihlerde bulunmak ve tercih edilen çözümü uygulayabilmektir (Star, 2005).

##### **2.4.1.1. Çoklu çözüm stratejisi bilgisinin analiz edilmesi**

Katılımcıların cebirsel kesirli ifadeler içeren denklemlere dair çoklu çözüm stratejisi bilgisini analiz etmek amacıyla katılımcılardan elde edilen veriler daha önce belirlenen SPÖ, SP ve YAÇ stratejileri şeklinde kodlanmıştır. Tablo 2.3.'te belirtildiği şekilde puanlanarak her bir öğrenci ve her bir öğretim bölümü için rubrikler hazırlanmıştır. Bu şekilde nitel veriler nicelleştirilmiş ve bu sayede güvenilirliği arttırmak, yanlılığı azaltmak ve kategoriler arasında daha doğru karşılaştırmalar yapmak amaçlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 1999).

**Tablo 2. 3. Çözüm stratejileri puanlama rubriği**

Çözüm stratejisi	Puanlama
SPÖ	1
SP	2
1 YAÇ stratejisi kullanılan çözüm	3
Önce bölme	+1
Ortak paranteze alma	+1
Değişkenleri birleştirme	+1
Değişkenleri sadeleştirme	+1
Değişkenle çarpma	+1
Kesrin anlamı	+1
Değişkenleri düzenleme	+1

Bu puanlamanın ardından klinik görüşmeler ve her bir öğretim seansı için iki araştırmacı tarafından çoklu stratejiler kapsamında olası çözümler irdelenmiş ve

puanlama rubriği oluşturulmuştur. Tablo 2.4.'te klinik görüşmelerde bulunan sorulara dair puanlama rubriği yer almaktadır.

**Tablo 2. 4.** Klinik görüşme çözüm puanlama rubriği

	1 Puan	2 Puan	3 Puan	4 Puan	5 Puan	6 Puan	7 Puan	Toplam	Çözüm sayısı
Soru 1	X	X	X (ÖB) X (DÇ) X (KA)	-	-	-	-	12	5
Soru 2	X	X	X (KA) X (ÖB)	X (OP-DB) X (OP-KA)	X (OP-DB-ÖB)	-	-	26	8
Soru 3	X	X	X (DB) X (DÇ) X (ÖB)	X (DB-ÖB) X (DÇ-OP)	X (DÇ-OP-ÖB)	-	-	25	8
Soru 4	X	X	X (OP)	X (OP-ÖB) X (DD-OP) X (DD-KA)	X (DD-OP-DB) X (DD-OP-KA)	X (DD-OP-DB-ÖB)	X (DD-OP-ÖB-DB-ÖB)	41	10
Soru 5	X	X	X (DB) X (DÇ)	X (DB-OP) X (DB-DÇ)	X (DB-OP-ÖB)	-	-	22	7
Soru 6	X	X	X (OP)	X (OP-ÖB) X (OP-DÇ)	X (OP-ÖB-DB) X (OP-DÇ-DB)	-	-	25	7
Soru 7	X	X	X (OP)	X (OP-DD) X (OP-DÇ) X (OP-ÖB)	X (OP-DD-DB) X (OP-DD-DÇ) X (OP-DD-DS)	X (OP-DD-DB-ÖB) X (OP-DD-DB-KA)	-	37	11
Soru 8	X	X	X (OP)	X (OP-ÖB)	X (OP-ÖB-DS)	-	-	15	5
Soru 9	X	X	X (OP)	X (OP-ÖB) X (DD-OP) X (DD-KA)	X (DD-OP-DB) X (DD-OP-KA)	X (DD-OP-DB-ÖB)	-	34	9
<b>Toplam</b>								<b>237</b>	<b>70</b>

Klinik görüşmelerde ve öğretim seanslarında soru sayıları, olası çözümler ve çözüm puanları farklılık göstermektedir. Bu nedenle katılımcıların değişimini takip edebilmek amacı ile her bir seans için temel düzey, orta düzey, üst düzey ve ileri düzey olmak üzere dört düzey ve farklı düzey aralıkları belirlenmiştir. Bu düzeyler tablo 2.5.'te belirtilen kriterlere göre oluşturulmuştur.

**Tablo 2. 5. İşlem esnekliği çoklu strateji bilgi düzeylerinin özellikleri**

Alt sınır	Düzye	Üst sınır
Çözüm yok	Temel Düzey	Sorulara sadece standart çözümler ya da standart çözümlerin yanı sıra yenilikçi alternatif çözümlerden daha fazla SPÖ çözümler geliştirme
Tüm sorulara standart çözümler yanı sıra en az 1 soruya yenilikçi alternatif çözüm geliştirme	Orta Düzey	Tüm sorulara standart çözümlerin yanı sıra en fazla 1'er tane yenilikçi alternatif çözüm geliştirme
Tüm sorulara standart çözümlerin yanı sıra 1'er taneden daha fazla yenilikçi alternatif çözüm geliştirmeye başlama	Üst Düzey	Tüm sorulara standart çözümler ve tüm sorulara olası bütün yenilikçi alternatif çözümleri geliştirme
Olası bütün yenilikçi alternatif çözümün yanı sıra standart çözümü terk etmeye başlama	İleri Düzey	Standart çözümü tamamen terk etme

Öğretim seanslarının amaçlarının farklı olması (bkz. Tablo 2.6.), değişik yenilikçi alternatif çözüm stratejilerinin ve bu çözüm stratejilerinin çoklu kullanılabilme durumlarının söz konusu olması ve öğretim seanslarının soru sayılarının değişik olması her bir seans için farklı aralıkların oluşturulmasını gerekli kılmıştır.

**Tablo 2. 6. Öğretim seanslarının içeriği ve amaçları**

Öğretim Seansı	İçerik	Amaç
Öğretim Seansı 1	Pc Pdn kesirli ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Ortak paranteze alma, değişkenleri birleştirme, önce bölme, kesrin anlamı stratejilerini kullanma süreçlerini ve bu süreç içerisindeki değişimleri incelemek
Öğretim Seansı 2	Pc Pdn kesirli ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Değişkenleri düzenleyerek birleştirme, ortak paranteze alma, benzer değişkenleri sadeleştirme stratejilerini kullanma süreçlerini ve bu süreç içerisindeki değişimleri incelemek
Öğretim Seansı 3	Pc Pdn kesirli ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Değişkenleri düzenleyerek birleştirme, değişkenleri düzenleyerek sadeleştirme stratejilerini kullanma süreçlerini ve bu süreç içerisindeki değişimleri incelemek
Öğretim Seansı 4	Pn Pdc kesirli ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Değişkenleri birleştirme ve kesrin anlamı stratejilerini kullanma süreçlerini ve bu süreç içerisindeki değişimleri incelemek
Öğretim Seansı 5	Pn Pdc kesirli ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Değişkenleri düzenleyerek birleştirme, değişkenle çarpma, benzer değişkenleri sadeleştirme ve benzer değişkenleri düzenleyerek sadeleştirme stratejilerini kullanma süreçlerini ve bu süreç içerisindeki değişimleri incelemek
Öğretim Seansı 6	Pc Pdc kesirli ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Değişkenleri birleştirme, değişkenleri düzenleyerek birleştirme ve kesrin anlamı stratejilerini kullanma süreçlerini ve bu süreç içerisindeki değişimleri incelemek
Öğretim Seansı 7	Pc Pdc kesirli ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Değişkenleri düzenleyerek birleştirme ve değişkenleri düzenleyerek sadeleştirme stratejilerini kullanma süreçlerini ve bu süreç içerisindeki değişimleri incelemek

Bu nedenle öğretim seanslarında ortak olan sorular iki uzman tarafından incelenmiş ve SPÖ, SP ve YAÇ stratejileri açısından olası bütün çözümler incelenerek puanlanmış ve çözüm sayısına bölünerek oransal aralıklar belirlenmiştir. Klinik görüşmeler ve her öğretim seansı için temel düzey, orta düzey, üst düzey ve ileri düzey olmak üzere dört düzey oluşturulmuştur. Bu sayede kod ve temaların organize edilmesi ve bu düzeyler kapsamında bulguların analizi ve yorumlanması sağlanmıştır (bkz. Tablo 2.7.).

**Tablo 2. 7. İşlem esnekliği düzey belirleme rubriği**

Klinik görüşme ve seanslar	Temel düzey	Orta düzey	Üst düzey	İleri düzey
Klinik görüşme	SPÖ-SP 9 puan 9 çözüm (SPÖ) (1) 18 puan 9 çözüm (SPÖ) 27 puan 18 (1,5) çözüm (SPÖ+SP) Hiç çözüm yok (0)	SP+ 1 yenilikçi çözüm stratejisi (18+27 puan, 18 çözüm) (2,5)	SP+ çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (3,73) 228 puan 61 çözüm	Çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) 210 puan 52 Çözüm (4,03)
Öğretim seansı 1	En yüksek 14 puan 7 çözüm (2)	(2,5) 35 puan 14 çözüm	SP+ çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (3,14) 110 puan 35 çözüm	Çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) 96 puan 28 çözüm (3,42)
Öğretim seansı 2	En yüksek 10 puan 5 çözüm (2)	(2,5) 25 puan 10 çözüm	SP+ çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (3,82) 130 puan 34 çözüm	Çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) 120 puan 29 çözüm (4,13)
Öğretim seansı 3	En yüksek 10 puan 5 çözüm (2)	(2,5) 25 puan 10 çözüm	SP+ çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (4,06) 175 puan 43 çözüm	Çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) 165 puan 38 çözüm (4,34)
Öğretim seansı 4	En yüksek 10 puan 5 çözüm (2)	(2,5) 25 puan 10 çözüm	SP+ çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (3,17) 89 puan 28 çözüm	Çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (3,43) 79 puan 23 çözüm

**Tablo 2. 7.** (Devam) *İşlem esnekliği düzey belirleme rubriği*

Klinik görüşme ve seanslar	Temel düzey	Orta düzey	Üst düzey	İleri düzey
Öğretim seansı 5	En yüksek 10 puan 5 çözüm (2)	(2,5) 25 puan 10 çözüm	SP+ çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (3,09) 122 puan 33 çözüm	Çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (3,28) 112 puan 28 çözüm
Öğretim seansı 6	En yüksek 10 puan 5 çözüm (2)	(2,5) 25 puan 10 çözüm	SP+ çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (3,18) 70 puan 22 çözüm	Çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (3,52) 60 puan 17 çözüm
Öğretim seansı 7	En yüksek 10 puan 5 çözüm (2)	(2,5) 25 puan 10 çözüm	SP+ çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (3,68) 107 puan 29 puan	Çok yenilikçi çözüm stratejisi (bütün olasılıklar) (4,04) 97 puan 24 çözüm

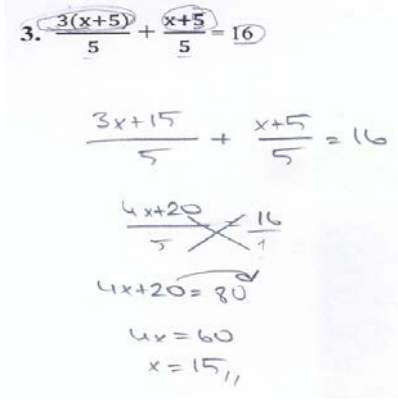
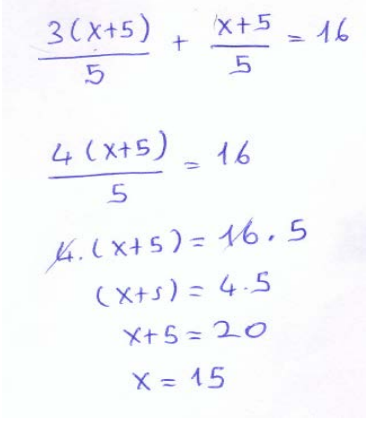
Tablo 2.8.'de belirtilen şekilde düzey aralıkları her bir seans için belirlenmiş ve düzenlenmiştir.

**Tablo 2. 8.** *İşlem esnekliği düzeyleri ve aralıkları*

	Temel düzey	Orta düzey	Üst düzey	İleri düzey
Klinik görüşme	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51 - 3,73	3,74- 4,03 ve üstü
Öğretim seansı 1	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51– 3,14	3,15- 3,42 ve üstü
Öğretim seansı 2	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51– 3,82	3,83- 4,13 ve üstü
Öğretim seansı 3	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51– 4,06	4,07- 4,34 ve üstü
Öğretim seansı 4	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51 - 3,17	3,18- 3,43 ve üstü
Öğretim seansı 5	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51 – 3,69	3,10- 4,00 ve üstü
Öğretim seansı 6	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51 – 3,18	3,19- 3,52 ve üstü
Öğretim seansı 7	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51 – 3,68	3,69- 4,04 ve üstü

Elde edilen puanlar yapılan çözüm sayısına oranlanarak tablo 2.8'de belirtilen düzeylere göre öğrencilerin gelişimleri içerik çözümlemesi ile analiz edilmiştir. Puanlaya dair bir örnek tablo 2.9.'da sunulmuştur.

**Tablo 2. 9. Çözümlerin puanlamasına dair örnek çözümler**

	Örnek Çözüm 1	Örnek Çözüm 2
Çözümler		
Puanlar	SP çözüm: 2 p	1 YAÇ (DB): 3 Önce bölme: +1
Toplam Puan		6 p
Çözüm sayısı		2
Aldığı puan		6 p/2 = 3 p

Tablo 2. 9.'da bir soruya dair gerçekleştirilen 2 farklı çözüm ve bu çözümlerin puanlamaları yer almaktadır. Alınan toplam puan çözüm sayısına bölünerek katılımcının hangi düzey aralığında olduğu belirlenmiştir.

#### **2.4.1.2. Çözüm stratejileri arasında bilinçli tercihte bulunma durumlarının analiz edilmesi**

Katılımcıların çözüm stratejileri arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumları içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. İçerik analizinde, dokümanlardan elde edilen nitel araştırma verilerinin işlenmesi, verilerin kodlanması, temaların bulunması, kodların ve temaların düzenlenmesi, bulguların tanımlanması ve yorumlanması şeklinde dört aşama bulunmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Bu çalışmada işlem esnekliği kapsamında belirlenen kategorilere katılımcıların tercihleri kodlanmış ve bu kapsamda çeşitli temalara ulaşılmıştır. Daha sonra veriler düzenlenmiş, temalara göre gruplanmış ve uygun olduğu durumlarda veriler numerik hale getirilerek sunulmuştur. Son olarak, elde edilen bulgular yorumlanmıştır.

#### **2.4.1.3. Tercih ettiği uygulayabilme durumlarının analiz edilmesi**

Katılımcıların tercih ettikleri çözümleri uygulayabilme durumları içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Bu çalışmada çözümlü örnekler ele alınmış ve katılımcıların uygulayabilme durumları gösterilen çözüm sayısı ve çözümün niteliği (gösterilen adım sayısı) incelenerek kodlanmıştır. Uygun olduğu durumlarda veriler numerik hale getirilerek sunulmuştur. Son olarak, elde edilen bulgular yorumlanmıştır.

#### **2.4.2. Kavramsal anlama**

Katılımcıların cebirsel kesirli denklemleri kavramsal olarak nasıl anlamlandırdıklarını belirleyebilmek amacıyla toplanan nitel veriler betimsel analiz ve içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Öncelikle video çözümlenmeleri, uygulama kâğıtları, araştırmacı-öğretmenin almış olduğu alan notları ve katılımcıların günlükleri her uygulama için incelenmiştir.

Yazılan problemler hem doğru, yanlış ya da eksik olma durumuna göre hem de kesrin farklı anlamlarına göre irdelenmiştir. Ayrıca problem yazarken yapılan hatalar alanyazında mevcut olan hata türleri (Alibali, Stephens ve Brown, 2014, Ünlü ve Sarpkaya Aktaş, 2017 vb.) ve araştırmacılar tarafından belirlenen hata türleri kapsamında belirlenmiştir. Yazılan problemler analiz edilirken dikkat edilen diğer bir durum ise problemin sözel, sözel-matematiksel ya da matematiksel olup olmadığıdır. Eğer bir problem günlük hayatla ilişkili ve hikâyeleştirilerek kurulmuşsa sözel, hikâyeleştirilememişse matematiksel, bu ikisi arasında kalmış ise sözel matematiksel olarak kodlanmıştır (Ünlü ve Sarpkaya Aktaş, 2017). Örneğin “*Ayşe bayramda elindeki parayı Kader, Fatma ve Mehmet’e eşit bir şekilde dağıttığında her birine 5 lira düştüğüne göre, Ayşe’nin elinde başlangıçta kaç lirası vardı?*” problemi günlük hayatla ilişkili ve hikâyeleştirilmiş bir problem olduğu için sözel bir problemdir. “*Mehmet 20 litre suyu  $2x$  litre su alan kaplara boşalttığında, 5 kap suyu oluyor. Buna göre bir kap kaç litre su almaktadır?*” probleminde ise sözel ve matematiksel dil bir arada kullanıldığı için sözel matematiksel problem olarak kodlanmıştır. Diğer bir problemde ise “*Bir sayının iki fazlasının yarısı 5 ise bu sayı kaçtır?*” hikâyeleştirilemediği için matematiksel bir problem olarak kodlanmıştır.

## 2.5. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Bilimsel araştırmalarda araştırma sonuçlarının inandırıcılığını sağlamada en belirleyici olan faktörler geçerlik ve güvenirliktir. Bu kavramlar daha çok nicel araştırma yöntemlerine ait kavramlar olmasına karşın nitel araştırmalarda da geçerlik ve güvenirliliği sağlayan faktörler vardır. Bunlar iç geçerlik yerine inandırıcılık, dış geçerlik yerine aktarılabirlik, iç güvenirlilik yerine tutarlık, dış güvenirlilik yerine teyit edilebilirliktir (Yıdırım ve şimşek, 2008).

Bu nedenle bu araştırmanın inandırıcılığını sağlamak amacıyla katılımcılarla uzun süreli etkileşim sağlanmış ve uygulama esnasında katılımcılara herhangi bir zaman sınırlaması getirilmemiş ve not verilmemiştir. Farklı veri toplama araçları ile çeşitleme (triangulation) yapılmış ve katılımcıların günlüklerinde ifade ettikleri işlem esnekliği ve verilen denkleme problem yazabilme durumlarına dair yorumların araştırmacı-öğretmenin alan notlarından, video kayıtlarından ve uygulama kâğıtlarından kontrol edilmesi yoluyla elde edilen verinin inandırıcılığı arttırılmıştır. Araştırmada verinin doğasına sadık kalınarak ayrıntılı betimlemeler ve doğrudan alıntılarla aktarılabirlik sağlanmışır. Araştırma tutarlık ve teyit incelemesinin sağlanması için farklı iki matematik eğitimcisi tarafından veriler ve kodlamalar incelenmiştir.

Katılımcıların görüşlerinden bölümlerin sunulması ise güvenirlilik konusuna ışık tutmaktadır. Ayrıca çözdürülen denklemler, olası çözümler açısından ve yazılan problemler, kullanılan kesir anlamı açısından farklı iki matematik eğitimcisi araştırmacı tarafından incelenerek görüş birliği sağlanmaya çalışılmışır. Öncelikle yazılan problemler araştırmacılar tarafından incelenerek “Görüş Birliği” ve “Görüş Ayrılığı” olan maddeler belirlenmiştir. Araştırmanın güvenirliliğinde Miles ile Huberman’ın (1994) (Uzlaşma Yüzdesi) =  $[Na \text{ (Görüş Birliği)} / Na \text{ (Görüş Birliği)} + Nd \text{ (Görüş Ayrılığı)}] \times 100$  formülü aracılığıyla belirlenmiş ve uzlaşma % 94 bulunarak bu araştırmanın güvenilir olduğu kabul edilmiştir.

Son aşamada bulgular açıklanmış, katılımcıların kendi değişimleri ve bu değişimin diğer katılımcıların değişim süreci ile olan benzerlik ve farklılıkları incelenmiş ve değişimi etkileyen faktörler ele alınarak yorumlanmıştır. Ayrıca kullanılan etkinlikler için alan uzmanı görüşü alınmış, süreçte yapılan uygulamaların tamamı video kaydına alınmış ve yapılan video kayıtlarının tamamı yazıya aktarılmıştır.

### **3. BULGULAR VE YORUM**

Bu bölüm araştırma problemleri kapsamında toplanan bulgular çerçevesinde düzenlenmiştir. İlk olarak katılımcıların cebirsel kesirleri çözerken göstermiş oldukları işlem esneklik durumları, işlem esneklik değişim süreçleri, son aşamadaki işlem esneklik durumları ve işlem esneklik durumlarının kalıcılığı incelenmiştir. Diğer bölümde katılımcıların bu denklemleri anlamlandırma durumları, denklemi anlamlandırma değişim süreçleri, son aşamadaki denklemi anlamlandırma durumları ve denklemi anlamlandırma durumlarının kalıcılığı incelenmiştir.

#### **3.1. Katılımcıların İşlem Esnekliği Durumlarına İlişkin Bulgu ve Yorumlar**

Bu bölümde katılımcılarla ilk klinik görüşme, öğretim seansları, son klinik görüşme ve kalıcılık klinik görüşmeden elde edilen bulgular yer almaktadır. Katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere dair öğretim seansları başlamadan önceki işlem esneklik durumları, öğretim seanslarındaki işlem esneklik durumlarının değişimi, öğretim seansları sonundaki işlem esneklik durumları ve yaklaşık 3 ay sonraki işlem esneklik durumları ele alınmıştır.

Bütün uygulamalardan elde edilen veriler, cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere dair çoklu strateji bilgisi, bu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunmak ve tercih edilen çözümü uygulayabilmek şeklinde 3 tema altında analiz edilmiştir (Star, 2005).

##### **3.1.1. Katılımcıların çalışma öncesi mevcut durumları**

Bu bölümde katılımcıların ilk klinik görüşme sorularına verdikleri yanıtların analizi sonucunda işlem esnekliğine dair mevcut durumları değerlendirilmiştir. Katılımcıların cebirsel kesirli denklemlerde işlem esneklik durumlarının belirlenmesi amacı ile toplam 9 soru (bkz. Ek 5 örnek sorular için) bulunmaktadır. Elde edilen veriler, cebirsel kesirli ifadeler içeren denklemlere dair çoklu strateji bilgisi, bu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunmak ve tercih edilen çözümü uygulayabilmek şeklinde 3 tema altında analiz edilmiştir.

##### **3.1.1.1. Katılımcıların çoklu strateji bilgileri**

Katılımcıların ilk klinik görüşmede verdikleri yanıtlar ilk olarak çoklu strateji bilgileri açısından değerlendirilmiştir. Çoklu strateji bilgileri temel düzey, orta düzey, üst düzey ve ileri düzey olmak üzere dört kaegori kapsamında ele alınmıştır. Ağırlıklı olarak

katılımcıların temel düzeyde oldukları belirlenmiştir. Tablo 3.1.'de katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri, çözüm sayıları ve performanslarına dair bilgilere yer verilmiştir. Bazı çözümler hiçbir kategoriye girmediği için değerlendirmeye alınmamıştır.

**Tablo 3. 1.** Katılımcıların ilk klinik görüşmedeki çoklu strateji bilgi düzeyleri

	Düzye	Çözüm sayısı	D-Y- E-B
Ayşegül	1,63	11	7D, 4Y, 1B
Berna	1,75	8	3D, 5E
Erdem	1,76	13	12 D, 1Y, 1B
Serkan	2,20	15	13D, 1Y, 1E

(Temel düzey:0-2,00, Orta düzey: 2,01- 2,50) (Doğru (D)-Yanlış (Y) – Eksik (E) –Boş (B))

Katılımcıların çoklu strateji bilgilerine ilişkin belirlenen kategorilere (bkz. Tablo 2.8.) göre mevcut durumları ele alındığında 3 katılımcı temel düzeyde, 1 katılımcı temel düzyeye yakın olmakla birlikte orta düzeyde çoklu strateji bilgisine sahip olarak belirlenmiştir.

### 3.1.1.1.1. Temel düzye

Tablo 3.1. incelendiğinde Ayşegül, Berna ve Erdem'in temel düzyede, Serkan'ın ise orta düzyede bir katılımcı olduğu görülmüştür. Ayşegül 9 soruya 7 SP, 4SPÖ çözüm geliştirebilmiş, Berna'da benzer şekilde 7SP ve 1SPÖ çözüm geliştirebilmiştir. Erdem 7SP, 5SPÖ çözümün yanı sıra 1 soruda da ortak paranteze alma ve önce bölme stratejilerini uygulayabilmiştir. Ancak çözümlerinin büyük bir kısmını SPÖ çözümler oluşturmaktadır. Aşağıda Ayşegül, Berna ve Erdem'e ait çözüm örnekleri verilmiştir. (bkz. Şekil 3.1.)

$$\frac{6x}{8} + \frac{15}{8} + \frac{2x+5}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{8x+20}{8} = \frac{5}{8}$$

$$8x+20 = 40$$

$$8x = 20$$

$$x = 20/8$$

Ayşegül, İlk klinik görüşme, SPÖ çözüm

$$7. \frac{1}{3x+6} + \frac{x-2}{3x+9} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\frac{3x+9}{6x^2+18x+54} + \frac{2x^2-4x+6x-12}{6x^2+18x+54} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\frac{5x+2x^2-3}{6x^2+36x+54} = \frac{2x-1}{x+3}$$

Berna, İlk klinik görüşme,

$$\frac{1}{x-2} + \frac{x-2}{x+3} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{x-2}{3} = \frac{2x-1}{6}$$

$$\frac{2}{6} + 2x-4 = 2x-6$$

$$5 = 10x$$

$$\frac{1}{2} = x$$

Erdem, İlk klinik görüşme, Yenilikçi çözüm

**Şekil 3. 1.** Ayşegül, Berna ve Erdem'e ait çözüm örnekleri

Katılımcılardan Ayşegül eşitliğin sağ tarafındaki sayının paydasını da eşitleyerek gereksiz bir strateji kullanmış ve SPÖ çözüm gerçekleştirmiştir. Berna paydada bulunan cebirsel ifadeleri birbiri ile çarparak paydaları eşitlemeye çalışarak SP çözüm yapmış ancak çözümü devam ettirememiştir. Erdem ise çözümünde ortak paranteze alma ve değişkenle çarpma stratejisini kullanarak yenilikçi alternatif bir çözüm gerçekleştirmiştir. Ancak ağırlıklı olarak SP ve SPÖ çözüm geliştirmiş ve işlem esneklik düzeyi temel düzey olarak belirlenmiştir.

### 3.1.1.1.2. Orta düzey

Bu düzeyin özelliklerini gösteren katılımcılardan sadece Serkan olmuştur. Serkan 2 soruda paydası benzer ifadeleri birleştirerek çözümünü tamamlamış, 2 soruda ise ortak paranteze alarak önce bölme stratejisini uygulamıştır (bkz. Şekil 3.2.).

$$3. \frac{3}{(x-2)} - \frac{2}{(x+2)} = \frac{4}{(x+2)}$$

$$\frac{3}{(x-2)} = \frac{4}{(x+2)} + \frac{2}{(x+2)}$$

$$\frac{3}{(x-2)} = \frac{6}{(x+2)}$$

$$3x+6 = 6x-12$$

$$18 = 3x$$

$$6 = x$$

$$\frac{3x+4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{6x+18}{3} = 12$$

$$\frac{3x+4+5+6x+18}{3} = 12$$

$$\frac{9x+27}{3} = 12$$

$$\frac{9(x+3)}{3} = 12$$

$$x+3=4$$

$$x=1$$

Şekil 3. 2. Serkan, İlk klinik görüşme, Yenilikçi çözüm

Serkan 7SP ve 3SPÖ çözümlerinin yanı sıra 4 çözümünde de yenilikçi stratejileri kullanmış ve temel düzeye yakın olmakla birlikte çoklu strateji bilgisi düzeyi orta düzey olarak belirlenmiştir. Şekil 3.2.'de ilk çözümünde benzer değişkenleri birleştirerek YAÇ gerçekleştirmiştir. İkinci çözümünde ise ortak paranteze alma ve önce bölme stratejilerini kullanarak YAÇ gerçekleştirmiştir.

### 3.1.1.1.3. Üst düzey

İlk klinik görüşme verilerine göre bu kategoride hiçbir katılımcı bulunmamaktadır.

### 3.1.1.1.4. İleri düzey

İlk klinik görüşme verilerine göre bu kategoride de hiçbir katılımcı bulunmamaktadır.

### 3.1.1.2. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumları

Katılımcıların öğretim seansları öncesinde çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumlarını belirlemek amacı ile klinik görüşmelerde katılımcılara uygulama esnasında hangi çözümü tercih ettikleri ve nedeni sorulmuş ve başlangıçtaki tercihleri belirlenmiştir. Bu esnada sahip oldukları çoklu strateji bilgisi önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle, elde edilen verilere göre katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve çözüm tercihleri tablo 3.2.'de sunulmuştur.

**Tablo 3. 2.** İlk klinik görüşmede katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve tercih edilen çözüm frekansları

	Çoklu strateji bilgi düzeyi	Çözüm sayısı	Çözüm türü	Çözüm tercihi
Ayşegül	1,63	11	7 SP 4 SPÖ	7 SP
Berna	1,75	8	7 SP, 1 SPÖ	1 SPÖ, 7 SP
Erdem	1,76	13	7 SP 5 SPÖ 1 YAÇ	5 SPÖ, 2 SP, 1 YAÇ
Serkan	2,20	14	8 SP, 3 SPÖ 3 YAÇ	2 SPÖ 4 SP 3 YAÇ

Katılımcıların çözümler arasındaki tercihleri incelendiğinde genel olarak SP çözüm kullandıkları çözümleri SPÖ çözümleri kullandıkları çözümlere, YAÇ kullandıkları çözümleri SP çözümleri kullandıkları çözümlere tercih ettikleri görülmüştür.

Katılımcılarda çözümleri çoklu strateji bilgisi açısından temel düzeyde olan Ayşegül 9 sorudan 7 soruya 7 SP ve 4 SPÖ olmak üzere 11 çözüm yapmış ve 7 soruda da SP kullandığı çözümleri tercih etmiştir. Tercih sebebini de genel olarak daha az işlem gerektirmesi şeklinde belirtmiştir. Yine temel düzeyde olan Berna 9 sorudan 8

soruya 7 SP ve 1 SPÖ olmak üzere 8 çözüm yapmış ve her soruya 1 çözüm yaptığı için tek tercihi bu olmuştur. Diğer temel düzeyde olan katılımcı Erdem 9 sorudan 8 soruya 7 SP, 5 SPÖ ve 1 YAÇ olmak üzere 13 çözüm geliştirmiştir. Tercihlerinde ise yenilikçi alternatif stratejiyi kullandığı çözümü diğer çözüme tercih ederken SPÖ çözümün sürekli kullandığı çözüm olmasını gerekçe göstererek SP çözümlere tercih etmiştir. Orta düzeyde bir katılımcı olan Serkan 9 soruya 8 SP, 3 SPÖ ve 3 YAÇ olmak üzere 13 çözüm geliştirmiştir. Tercihlerine bakıldığında, 2 soruda SPÖ, 4 soruda SP ve 3 soruda YAÇ kullandığı çözümü tercih etmiştir. SPÖ çözümleri SP çözümlere tercih etme nedenini paydalardan kurtulmak olarak belirtmiştir. Yenilikçi alternatif stratejileri kullandığı çözümleri daha pratik olarak ifade ederek genellikle bu çözümleri tercih etmiştir.

### **3.1.1.3. Katılımcıların stratejileri doğru bir şekilde uygulayabilme durumları**

Bu bölümde katılımcıların cebirsel kesirli ifadeler içeren denklemlere dair çoklu stratejiler arasında tercih ettikleri çözümleri uygulayabilme durumları incelenmiştir. Katılımcıların geliştirdikleri çözümler arasında doğru yanlış ve eksik çözümler bulunmaktadır. Bazı sorulara ise çözüm geliştiremeyerek boş bırakmışlardır (bkz. Tablo 3.3.).

**Tablo 3. 3. Katılımcıların Stratejileri doğru uygulayabilme durumları**

Katılımcılar	İlk klinik görüşme
Ayşegül	7D, 4Y, 1B
Berna	3D, 5E
Erdem	12 D, 1Y, 1B
Serkan	13D, 1Y, 1E

İlk klinik görüşmede araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi bulunmamaktadır. Nitekim katılımcıların tercih ettikleri çözümler kendilerinin uygulayabildikleri çözümler olmuştur. Bazı çözümlerini işlem hatası yaparak yanlış yapmışlardır. Bazı çözümlerini ise uygulayamayarak devam ettirememişlerdir (bkz. Şekil 3.1, Berna). Tercih ettikleri çözümler kendilerinin uygulayarak tamamladıkları ve genellikle doğru olan çözümler olmuştur.

### 3.1.2. Katılımcıların değişim süreçlerine ilişkin bulgu ve yorumlar

Bu bölümde ön görüşmeler kapsamında elde edilen bulgulara göre tasarlanan bireysel öğretim seanslarına, her bir öğretim seansı için katılımcıların cebirsel kesirli denklemler kapsamında gösterdikleri işlem esneklikleri değişim sürecine yer verilmiştir.

Araştırmanın ilk bulgularına göre çalışma başında 3 katılımcının temel düzeyde, 1 katılımcının orta düzeyde olduğu belirlenmiştir. Genel tutumları katılımcıların SP stratejisine hâkim olduklarını göstermektedir. Bu nedenle, araştırmacı-öğretmen ilk öğretim seansından itibaren yenilikçi hareket stratejilerinin anlaşılması ve uygulanmasına odaklanmıştır.

#### 3.1.2.1. Katılımcıların çoklu strateji bilgilerinin değişim süreci

Bu bölümde öncelikle katılımcıların çoklu strateji bilgileri değişim süreci nicel verilere dayalı olarak verilmiş, ardından süreç betimsel olarak açıklanmıştır. Katılımcıların çoklu strateji bilgilerinin değişim sürecini belirlemek amacı ile uygulama kâğıtları incelenerek her bir klinik görüşme ve öğretim seansı sonunda hangi düzeyde oldukları Tablo 2.8.'e göre belirlenmiştir. Elde edilen verilere göre katılımcıların çoklu strateji bilgilerinin düzeylere göre değişimi tablo 3.4'te sunulmuştur.

**Tablo 3. 4.** Katılımcıların çoklu strateji bilgilerinin düzeylere göre değişimi

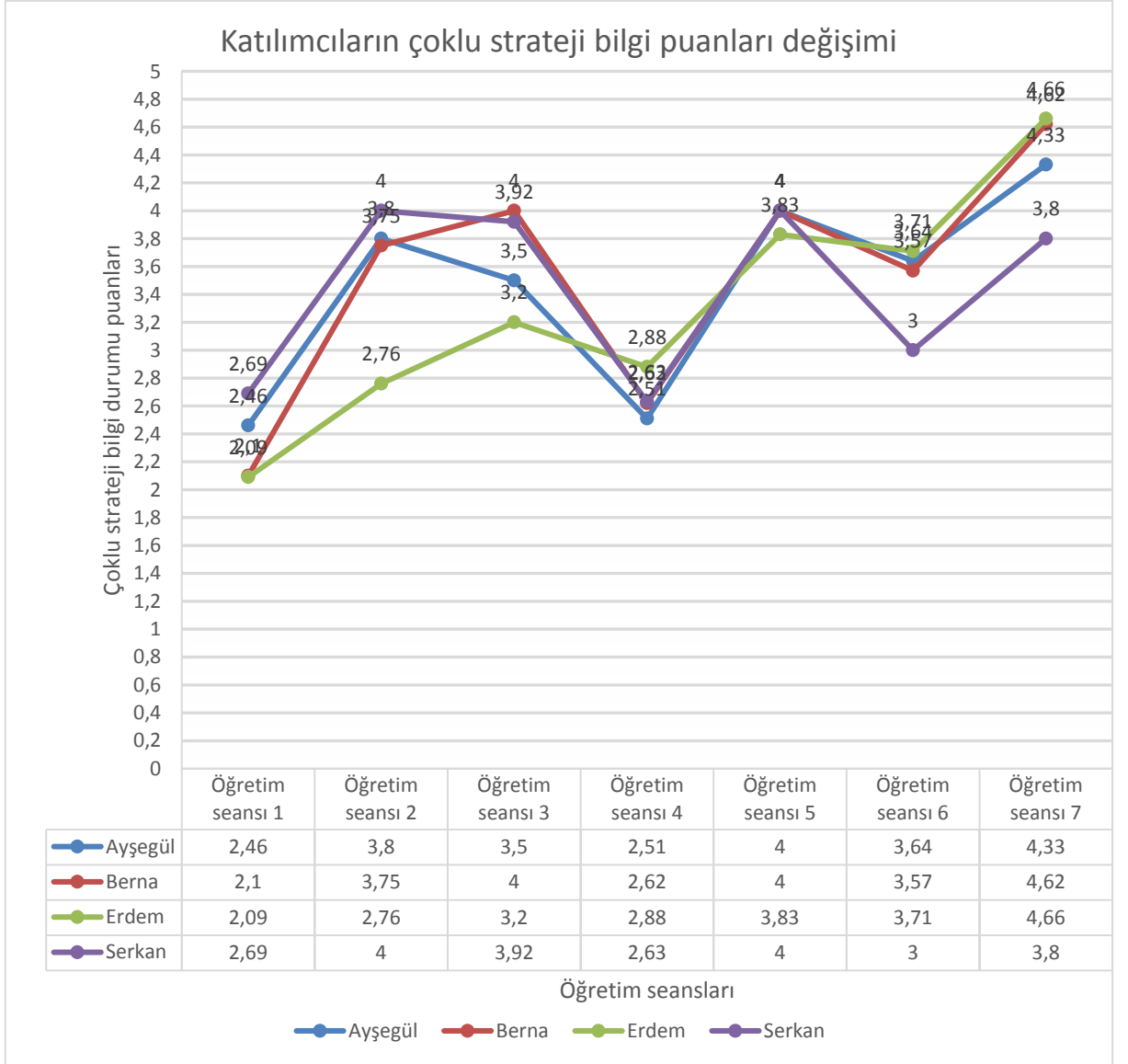
	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7
<b>Temel düzey</b>	0-2,00	0-2,00	0-2,00	0-2,00	0-2,00	0-2,00	0-2,00 ve üzeri
<b>Orta düzey</b>	2,01-2,50	2,01-2,50	2,01-2,50	2,01-2,50	2,01-2,50	2,01-2,50	2,01-2,50 ve üzeri
<b>Üst düzey</b>	2,51-3,14	2,51-3,82	2,51-4,06	2,51-3,17	2,51-3,69	2,51-3,18	2,51-3,68 ve üzeri
<b>İleri düzey</b>	3,15-3,42	3,83-4,13	4,07-4,37	3,18-3,43	3,70-4,00	3,19-3,52	3,69-4,04 ve üzeri
Ayşegül	2,46	3,80	3,50	2,51	4,00	3,62	4,33
Berna	2,10	3,75	4,00	2,62	4,00	3,57	4,62
Erdem	2,09	2,76	3,20	2,88	3,83	3,71	4,66
Serkan	2,69	4,00	3,92	2,63	4,00	3,00	3,80

Tablo 3.4.'te görüldüğü üzere oranlar arasında farklılık olmakla birlikte Ayşegül, Berna ve Erdem ilk öğretim seansı ile beraber temel düzeyden orta düzeye geçmişlerdir. Öğretim seansı 2'de üst düzeye çıkmışlar ve öğretim seansı 3 ve 4'te üst düzeyde kalmışlardır. Öğretim seansı 5, 6 ve 7'de ise ileri düzeye çıkarak öğretim

seanslarını tamamlamışlardır. Temel düzeyden orta düzeye, orta düzeyden üst düzeye çıkmaları için birer seans yeterli olurken, üst düzeyden ileri düzeye çıkmak için 3 seans gerekli olmuştur. Ancak son üç seansta ileri düzeyde kalmaya devam etmişlerdir.

Başlangıçta orta düzeyde başlayan Serkan öğretim seansı 1 ile beraber üst düzeye çıkmış, öğretim seansı 2’de ise ileri düzeye çıkmıştır. Ancak, öğretim seansı 3 ve 4’te üst düzeye inmiştir. Öğretim seansı 5’te ileri düzeye çıkarken, öğretim seansı 6’da üst düzeye inmiş, öğretim seansı 7’de yeniden ileri düzeye çıkabilmiştir. Serkan’ın orta düzeyden üst düzeye, üst düzeyden ileri düzeye çıkması için birer seans yeterli olmuş ancak üst düzey ile ileri düzey arasında iniş-çıkışlar yaşamıştır.

Katılımcıların değişim süreçlerine genel olarak bakıldığında Pc Pdn ifadeleri içeren denklemlerden, Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere geçişin olduğu öğretim seansı 4’te ve Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere geçişin olduğu öğretim seansı 6’da katılımcıların çoklu strateji bilgi puanlarında düşüş olmuştur (bkz. Şekil 3.3.).



**Şekil 3.3.** Katılımcıların çoklu bilgi stratejisi bilgi puanlarının değişimi

Bu bölümde katılımcıların düzeyler kapsamındaki değişim süreçleri ve bu değişimin nedenleri çoklu strateji düzeyleri (Temel düzey, Orta düzey, Üst düzey, İleri düzey) kapsamında incelenmiştir.

### **3.1.2.1.1. Temel düzey**

Katılımcılardan Ayşegül, Berna ve Erdem ilk klinik görüşmede temel düzeyde olmalarına karşın ilk öğretim seansı ile beraber SP çözümlerin yanısıra YAÇ'ler geliştirmeye başlamışlar ve bu seanstan itibaren temel düzeyden orta düzeye geçebilmişler ve hiçbir öğretim seansında temel düzeye inmemişlerdir. İlk klinik görüşmede orta düzeyde olan Serkan da tüm öğretim seansları boyunca temel düzeye inmemiştir. Aşağıda klinik görüşmeler sonucunda üç katılımcının çoklu strateji bilgi düzeyi temel düzeyde, bir katılımcının orta düzeyde olduğu görülmüştür. Bu nedenle öğretim seansı 1'de bu öğrencilerin bir üst düzeye çıkarılması amaçlanmıştır.

### **3.1.2.1.2. Orta düzey**

Katılımcılardan Ayşegül, Berna ve Erdem öğretim seansı 1'de orta düzeyde çoklu strateji bilgisine sahip olarak belirlenmişlerdir. Serkan ise bu seansta orta düzeye yakın olmakla birlikte ileri düzeye çıkabilmiştir. En düşük puanın ise Erdem'e ait olduğu görülmüştür. Nitekim Erdem de öğretim seansı 1'de temel düzeye yakın olan orta düzeyde bir katılımcıdır.

Öğretim seansı 1, Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır. Bu bölümün ortak amacı benzer değişkenleri birleştirme, kesrin anlamı ve önce bölme stratejilerini Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde katılımcıların nasıl oluşturduğu, bu stratejileri kullanma süreçlerini ve bu süreç içerisindeki değişimlerini incelemektir.

### ***Benzer değişkenleri birleştirme***

Benzer değişkenleri birleştirme stratejisi hem çözümlerde işlem yoğunluğunda hem de çözüm adımı sayısında ekonomiklik sağlamaktadır. Serkan dışında katılımcılardan hiç biri ilk klinik görüşmede bu stratejiyi kullanmamıştır. Bu nedenle, Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde bu stratejinin kullanabileceği 5 soru hazırlanmıştır. Bu seans sonunda Ayşegül, Erdem ve Serkan'ın benzer değişkenleri birleştirme stratejisini bu kesir türünde yardım almaksızın uygulayabilecekleri söylenebilir. Ancak Berna bu stratejiyi kullanabileceği durumlara dair bir farkındalık kazanmış olmasına karşın kendi başına uygulayabilecek düzeye gelememiştir.

Ayşegül ilk aşamada  $(x+5)$ 'li ifadeleri dağıtmadan işlemi uygulayarak bu stratejiyi kendisi gerçekleştirmiştir. Ancak, soruda ufak bir değişiklik (parantez

işaretinin kullanılmaması, paydaların değişik olması, değişkenin eşitliğin karşı tarafında olması vb.) olduğunda yeniden SP stratejisini kullanmıştır. Benzer değişkenleri birleştirme stratejisini kullanabilmesi için Ayşegül'e çözümün ilk adımını ya da başlangıcını göstermek yeterli olmuştur. Rahat bir şekilde çözümü devam ettirebilmiştir (bkz. Şekil 3.4.).

I

$$3 \cdot \frac{3(x+5)}{5} + \frac{(x+5)}{5} = 16$$

$$\frac{4(x+5)}{5} = \frac{16}{5}$$

$$4(x+5) = 16$$

$$x+5 = 4$$

$$x = -1$$

II

$$\frac{x+2}{2} - \frac{x+2}{4} = 12$$

$$\frac{2(x+2)}{4} - \frac{x+2}{4} = 12$$

$$\frac{x+2}{4} = 12$$

$$x+2 = 48$$

$$x = 46$$

III

$$\frac{2(x+2)}{2} - \frac{x+2}{4} = 12$$

$$\frac{2(x+2)}{4} - \frac{x+2}{4} = 12$$

$$\frac{x+2}{4} = 12$$

$$x+2 = 48$$

$$x = 46$$

İlk Soru Yapılan Çözüm

Diğer Soru Gösterilen Çözüm

Diğer Soru Yapılan Çözüm

### Şekil 3.4. Ayşegül, Öğretim seansı 1

İlerleyen aşamada geliştirdiği çözümleri küçük değişiklikler içeren yeni sorularda uygulayabilmiştir. Bu öğretim bölümü sonunda, Ayşegül'ün Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde değişkenleri birleştirme stratejisini uygulayabilecek düzeye geldiği söylenebilir. Ayşegül 3 soruda değişkenleri birleştirme stratejisini kendisi kullanarak çözümlerini tamamlayabilmiştir. Nitekim tercihleri de bu yönde olmuştur.

Berna ilk soruda çözümün başlangıcını gördükten sonra devamını getirebilmiş, başka bir soruda (bkz. Şekil 3.5) öncelikle benzer değişkenleri birleştirme stratejisini kullanmaya çalışmış, ancak devamını getirememiştir. Berna'nın kesirli ifadeyi eşitliğin karşı tarafına geçirmede bir yanılığa sahip olduğu belirlenmiştir. Kesirli ifadenin payını ve paydasını ayrı ayrı eşitliğin karşı tarafına atmaya çalışmış, ama yapamamıştır. Bu nedenle, ilk çözümünde SP stratejisini kullanmıştır.

Bu noktada Berna'nın benzer değişkenleri birleştirme stratejisini kullanabileceği durumlara dair bir farkındalık kazanmış olduğu, ancak uygulamada problem yaşadığı söylenebilir. Araştırmacı-öğretmen tarafından ilk düşündüğü çözüm yeniden irdelenmiş,

ancak katılımcı değişkenleri birleştirme stratejisini uygulayamamıştır. Ardından değişkenleri birleştirme stratejisinin kullanıldığı çözümün başlangıcı gösterilmiş ve nasıl ilerleyebileceği sorulmuştur (bkz. Şekil 3.5.).

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

Diğer soruda yapılan çözüm

### Şekil 3. 5. Berna, Öğretim seansı 1

Berna çözümün ilk adımını gördükten sonra  $x+1$ 'li ifadeleri dağıtmadan aralarındaki işlemi uygulamıştır ve benzer değişkenleri birleştirme stratejisini doğru bir şekilde gerçekleştirebilmiştir. İlk çözümde, ilk adımın ardından değişkenleri birleştirme stratejisinin devamını getirmiş ve benzer başka bir soruda da bu stratejiyi rahatlıkla uygulayabilmiştir. Diğer soruda eşitliğin karşı tarafında değişken varken bu stratejinin kullanılabileceğini fark etmiş, ancak payı ve paydayı ayrı ayrı karşıya atmaya çalıştığı için başarılı olamamıştır. İki soru dışında araştırmacı-öğretmenden yardım almıştır. Ancak değişkenleri birleştirme stratejisini kullanabilmesi için Berna'ya çözümün ilk adımını ya da başlangıcını göstermek devamını getirmesi için yeterli olmuştur.

Erdem ilk aşamada bu stratejiyi uygulamış, ancak soruda ufak bir değişiklik olduğunda yeniden SP'ye dönmüştür ya da başka stratejileri kullanmıştır. 4 soruda benzer değişkenleri birleştirme stratejisini kendisi oluşturmuş, sadece 1 soruda araştırmacı-öğretmen tarafından çözümün ilk adımı gösterilmiştir. Erdem rahatlıkla devamını getirebilmiştir. Geliştirdiği çözümleri küçük değişiklikler içeren yeni sorularda uygulayabilmiştir. Tercih konusunda ise henüz kararsız olduğu söylenebilir. SP ilk aklına gelen çözüm olduğundan onun için önemli bir yere sahiptir.

Serkan  $x+1$ 'li ifadeleri dağıtmadan aralarında işlem yaparak değişkenleri birleştirme stratejisini kendisi uygulamış ve soru tipinde değişiklikler olmasına karşın

stratejiyi uygulamada problem yaşamamıştır. Ancak değişken eşitliğin iki tarafında da olduğunda küçük değişkenin yanına büyük değişkeni aldığı için negatif sayılarla uğraşmak zorunda kalmış, bu da çözümü kolaylaştırmaktan ziyade zorlaştırmıştır (bkz. Şekil 3.6.).

$$6. \frac{2x-3}{5} + \frac{(x+1)}{10} = \frac{3(x+1)}{10}$$

$$\frac{(x+1)}{10} - \frac{3(x+1)}{10} = -\frac{2x-3}{5}$$

$$\frac{\cancel{x}+1}{\cancel{10}} - \frac{3(\cancel{x}+1)}{\cancel{10}} = -\frac{2x-3}{5}$$

$$-5x - 5 = -10x + 15$$

$$-20 = -5x$$

$$4 = x$$

“(Güler.) Çok karmaşık oldu... Burada önce sayılar eksi olduğu için...Eksileri...Eksi, artı... Karıştırdım yerlerini... O yüzden...”

Yapılan Çözüm

Serkan'ın Yorumu

### Şekil 3. 6. Serkan, Öğretim seansı 1

Bu öğretim seansı sonunda Serkan Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde değişkenleri birleştirme stratejisini uygulayabilecek düzeydedir. Nitekim bu stratejiyi kullandığı çözümleri araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmaksızın kendisi oluşturmuştur.

#### ***Kesrin anlamı: Yarım ve çeyrek***

İlk klinik görüşmede katılımcıların verdikleri cevaplar incelendiğinde çözümlerinde yarım ve çeyrek gibi kesir kavramlarını hiç kullanmadıkları belirlenmiştir. Hem çözümlerde işlem yoğunluğunda hem de çözüm adımı sayısında ekonomiklik sağladığı ve hatta bazı durumlarda işlem gerektirmediği için Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde bu kavramları kullanabilecekleri 4 soru hazırlanmıştır.

Ayşegül yarım ve çeyrek kavramlarını ilk örnek çözümle beraber uygulayabilmiştir. Değişkenleri birleştirme stratejisi ile kıyaslandığında soru tipi değiştiğinde de Ayşegül bu kavramları rahatlıkla uygulayabilmiştir. Uygulamada problem yaşayarak yeniden standart çözüme başvurma gibi bir durum söz konusu olmamıştır. Yarım ve çeyrek dışında diğer kesirlere de bu anlamı kolaylıkla aktarabilmiş, hatta değişkenin değişmesine karşın bu stratejiyi rahatlıkla

kullanabilmiştir. Ayrıca başlangıçtan itibaren işlem azlığını ve Kesrin anlamının daha kolay olduğunu belirterek kesrin anlamının kullanıldığı çözümleri tercih etmiştir.

Berna ise ilk soruda öncelikle SPÖ kullanarak çözüm yapmıştır. Başka bir çözüm geliştirmesi istediğinde yapamayacağını belirtmiş, bunun üzerine araştırmacı-öğretmen tarafından yarım ve çeyrek kavramının kullanıldığı çözümün ilk adımı sunulmuştur. Ancak, Berna çözümün devamını getirememiştir. Bu nedenle, çözümün tamamı sunularak yorumlaması istenmiştir (bkz. Şekil 3.7.). Berna gösterilen çözümü doğru bir şekilde yorumlayabilmiştir.

“Tamam. İm... burada  $x/2$  yarım. Yarımdan çeyreği çıkarmışız 8 bulmuşuz. İm... tıkanıyorum... Yarımdan çeyrek çıkarsa... bilmiyorum.”

“İm... dediğim gibi  $x/2$  yarım,  $x/4$  çeyrek olmuş. Yarımdan çeyreği çıkarmışız, çeyrek bulmuşuz. Çeyrek te 8 miş. Çeyreği 8 ise bütünü 32 imiş. Ha... mesela pasta düşünelim. Onu 4'e böldüm. Her bir parçası 8 olsun. Yani öyle bulmuşuz.”

Gösterilen Çözüm 1

Yapılan Yorum

Gösterilen Çözüm 2

Berna'nın Yorumu

### Şekil 3. 7. Berna, Öğretim seansı 1

Ancak, daha matematiksel olduğunu belirterek SPÖ stratejisini kullandığı ilk çözümünü tercih etmiştir. Kesrin anlamının kullanılabilceği 2. soruda (bkz. Şekil 3.8) ise bu stratejiyi kullanabileceğini fark etmiş ama uygulayamamıştır.

Diğer soruda ise ilk çözüm olarak yine SPÖ stratejisini kullanmıştır. Farklı bir çözüm istendiğinde kesrin anlamı stratejisi aklına gelmiş, bu sefer neye yarım, neye çeyrek diyeceğini belirleyerek uygulamaya çalışmış, ancak çözümü tamamlayamamıştır. Değişken  $x$ 'ten farklı olduğunda bütün olarak neyi nitelendirdiğine dair bir kargaşa yaşamaktadır (bkz. Şekil 3.8.). Sadece 1 soruda kendisi uygulayabilmiştir.

$$2. \frac{3x}{4} - \frac{x}{4} = 16$$

$$\frac{2x}{4} \times \frac{16}{1}$$

$$2x = 64$$

$$x = 32$$

$$5. \frac{x+2}{2} - \frac{x+2}{4} = \frac{12}{4}$$

$$\frac{x+2}{2} = \text{yarım} \quad \frac{x+2}{4} = \text{çeyrek}$$

$$\text{yarım} - \text{çeyrek} = \text{çeyrek} = 12$$

$$\frac{12}{4}$$

$$x = 48$$

“Tamamı m... 4’le çarpıyorum tamamını bulmak için. Çünkü burada çeyreğimiz 3. İm... 48 çıkıyor ama biz bu işlemimizde 46 bulduk... İm... bence şura da ki +2’lerin bir şeyi var. Etkisi var gibi... İm.... Bilmiyorum.”

İkinci soru

Diğer soru-Yapılan Çözüm

Diğer soru-Berna’nın Yorumu

### Şekil 3. 8. Berna, Öğretim Seansı 1

Birinci öğretim seansının sonunda Berna’nın yarım ve çeyrek kavramlarını Pcdn kesirleri içeren denklemlerde tam anlamıyla uygulayamadığı söylenebilir. Genel olarak çözümlerinde daha matematiksel olduğunu belirterek SPÖ yöntemi ya da SP yöntemi tercih ettiği görülmüştür. Bu nedenle her ne kadar orta düzey özelliklerini göstermeye başlamış olsa da birinci seans sonunda hala temel düzeye yakın olduğu söylenebilir (bkz. Tablo 3.4.).

Erdem yarım ve çeyrek kavramlarını ilk örnek çözümle beraber anlamlandırabilmiştir. Ancak bu çözümü ilk soruda uygulayabilmesine karşın diğer soruda bu stratejiyi uygulayamamıştır. Farklı kesirli ifadelerde bulunan x’leri farklı bütünlükler olarak ele almış ve çözümü tamamlayamamıştır (bkz. Şekil 3.9.).

$$2. \frac{3x}{4} - \frac{x}{4} = 16$$

$$3x - x = 64$$

$$\frac{2x}{4} = 64$$

$$x = 32$$

“Önce yorumlayayım. 3x’in çeyreğiyle x’in çeyreği arasındaki fark 16’yımsı. İm... o zaman x’in çeyreğiyle, 3x’in çeyreği (kısık sesle söyler.)... hayır.”

Yapılan Çözüm-Standart Pratik Öncesi

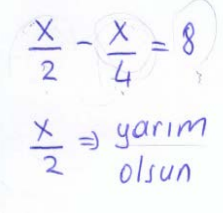
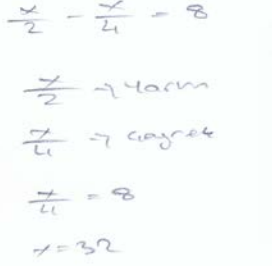
Erdem’in Yorumu

### Şekil 3. 9. Erdem, Öğretim seansı 1

Diğer sorularda da kesrin anlamı stratejisini kullanarak çözüme başlamış ve standart çözümlerle devam etmeye çalışmıştır. Daha kolay olduğunu belirterek kesrin

anlamı stratejisini kullandığı çözümleri tercih etmiştir. Öğretim seansı 1 sonunda Erdem'in yarım ve çeyrek kavramlarını tercih etmesine rağmen Pc Pdn kesirleri içeren denklemlerde bu stratejiyi tam anlamıyla uygulayamadığı söylenebilir.

Serkan yarım ve çeyrek kavramlarını ilk örnek çözümle anlamlandırabilmiştir. Bu aşamadan sonra bu stratejiyi kullanabileceği bütün sorulara rahatlıkla uygulayabilmiştir (bkz. Şekil 3.10.)

		<p>“Yani yarım-çeyrek diyerek, burada payda eşitleme sıkıntısından kurtuluyorsun”</p>
Gösterilen Çözüm	Yapılan Çözüm	Serkan'ın Yorumu

### Şekil 3. 10. Serkan, Öğretim seansı 1

İlk sorularda standart çözümle çözümlerine başlamış ve bu stratejiyi ilk çözümünde kullanmasına karşın ikinci soruda hatırlayamamış, daha sonra ise bu stratejiyi kullandığı çözüm ilk çözümü ve tercih ettiği çözümü olmuştur. Bu çözüm ile ilgili yorumlarına bakıldığında katılımcının kesrin anlamından yaralanarak işlem yapma ihtiyacı duymadığı ve bu nedenle tercih ettiği görülmüştür. Öğretim seansı 1 sonunda Serkan'ın kesrin anlamı stratejisini rahatlıkla uygulayabildiği söylenebilir.

### Önce bölme (Sadeleştirme)

İlk klinik görüşmede katılımcıların verdiği cevaplar incelendiğinde önce bölme stratejisini de Serkan dışında hiçbir katılımcının kullanmadığı belirlenmiştir. Hem çözümlerde işlem yoğunluğunda hem de çözüm adımı sayısında ekonomiklik sağladığı ve bu nedenle işlem hatası yapma olasılığını azalttığı için Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde bu stratejinin kullanabileceği 4 soru hazırlanmıştır.

Ayşegül 4 soruda da araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan ortak değişkenleri fark edip önce bölme stratejisini kolaylıkla uygulayabilmiştir (bkz. Şekil 3.11.).

$$3. \frac{3(x+5)}{5} + \frac{(x+5)}{5} = 16$$

$$\frac{4(x+5)}{5} = \frac{16}{1}$$

$$4(x+5) = 80$$

$$x+5 = 20$$

$$x = 15$$

Yapılan Çözüm

“... Im... önceki kısımda 3 taneye 1 tane deyip, toplam 3 tane dedim ve parantezin içine dağıtmadım. Ama bu kısımda parantezin içine dağıttım ve bu şekilde toplama yaptım. Onun haricinde bir değişiklik yok.”

Ayşegül’ün Yorumu

### Şekil 3. 11. Ayşegül, Öğretim seansı 1

Yorumları incelendiğinde bu stratejiyi değişkenleri birleştirme stratejisinin bir getirisi olduğu söylenebilir. Diğer 2 soruda da benzer yorumları getirerek önce bölme stratejisini uygulamıştır. Özetle Ayşegül’ün bu seanstan sonra değişkenleri birleştirme stratejisinin bir getirisi olarak önce bölme stratejisini anladığı, benimsediği, uyguladığı ve dağılma işlemi kullanarak çözümü tamamlama hareketini terk ettiği söylenebilir.

Berna ise benzer değişkenleri birleştirme stratejisini kullanabilmesine karşın çözümün devamında standart pratik yöntemi kullanarak çözümünü tamamlamıştır. Başka bir çözüm geliştirmesi istediğinde ise yapamayacağını belirtmiştir. Bunun üzerine araştırmacı-öğretmen tarafından önce bölme stratejisini içeren çözüm sunulmuştur (bkz. Şekil 3.12.).

$$3. \frac{3(x+5)}{5} + \frac{x+5}{5} = 16$$

$$\frac{3x+15}{5} + \frac{x+5}{5} = 16$$

$$\frac{4x+20}{5} = 16$$

$$4x+20 = 80$$

$$4x = 60$$

$$x = 15$$

$$\frac{3(x+5)}{5} + \frac{x+5}{5} = 16$$

$$\frac{4(x+5)}{5} = 16$$

$$4 \cdot (x+5) = 16 \cdot 5$$

$$(x+5) = 4 \cdot 5$$

$$x+5 = 20$$

$$x = 15$$

$$4. \frac{2(x+1)}{7} + \frac{(x+1)}{7} = 6$$

$$\frac{3(x+1)}{7} = 6$$

$$3(x+1) = 6 \cdot 7$$

$$x+1 = 14$$

$$x = 13$$

Yaptığı Çözüm

Gösterilen Çözüm

Diğer soruda yapılan çözüm

### Şekil 3. 12. Berna, Öğretim seansı 1

Bu çözümle beraber Berna önce bölme stratejisini fark etmiş ve bu çözümü daha güzel bir çözüm olarak yorumlamıştır. İlk iki stratejiden farklı olarak, Berna bu stratejiyi diğer sorularda da rahatlıkla uygulayabilmiş ve dağılma özelliğini kullandığı işlemi terk etmiştir.

Erdem de Berna gibi değişkenleri birleştirme stratejisini kullanabilmesine karşın çözümün devamında SP yöntemi kullanarak çözümünü tamamlamıştır. Ardından şekil 3.12’de Berna’ya gösterilen çözüm Erdem’e de gösterilmiş ancak ilk aklına gelen çözüm olmasını gerekçe göstererek SP yöntemi kullandığı ilk çözümü tercih etmiştir. Buna karşın diğer sorularda önce bölme stratejisini rahatlıkla kullanmıştır.

Serkan ise Ayşegül gibi 4 soruda da araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan önce bölme stratejisini kolaylıkla uygulayabilmiştir. Yorumları incelendiğinde, bu strateji değişkenleri birleştirme stratejisinin bir getirisi olarak yorumlanabilir.

Öğretim seansı 1 sonunda Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde Ayşegül’ün benzer değişkenleri birleştirme stratejisini uygulayabilecek düzeye geldiği söylenebilir. Berna’nın değişkenleri birleştirme stratejisini uygulayabileceğine dair bir farkındalık kazandığını ve bazı soru tiplerinde uygulayabileceği söylenebilir. Ancak, farklı durumlarda ya da farklı kesir türleri ile karşılaştığında bu stratejiyi uygulayamayabilir. Erdem sadece 1 soruda çözümün ilk adımını görme ihtiyacı duymuştur. Diğer 4 soruda bu stratejiyi kendisi uygulamıştır. Serkan ise bu stratejiyi kendisi oluşturmuş ve uygulamıştır.

Ayşegül ve Serkan kesrin anlamı stratejisini ilk çözümün ilk adımını inceledikten sonra diğer sorulara rahatlıkla uygulayabilmişlerdir. Bu durum ise Ayşegül’ün üst düzeye yakın ancak orta düzeyde bir katılımcı olmasını, Serkan’ın ise orta düzeyden üst düzeye çıkmasını sağlamıştır (bkz. Tablo 3.4.).

Berna ve Erdem kesrin anlamı stratejisini bu denklem türünde tam olarak anlayamamış ve uygulayamamışlardır. Erdem ilk soruda uygulayabilmesine karşın diğer soruda farklı kesirli ifadelerde bulunan x’leri farklı bütünler olarak ele almış ve çözümü tamamlayamamıştır. Nitekim bu kesir türünde tam olarak uygulayamadığı söylenebilir. Nitekim her iki katılımcının temel düzeye yakın ama orta düzeyde olan katılımcılar oldukları belirlenmiştir. Önce bölme stratejisini ise Serkan ve Ayşegül değişkenleri

birleştirme stratejisinin de bir getirisi olarak bütün sorularda kendileri rahatlıkla uygulayabilmişlerdir. Berna ve Erdem ilk sorunun üzümünü inceledikten sonra diğer sorularda da rahatlıkla uygulayabilmişlerdir.

Sonuç olarak, Ayşegül, Berna ve Erdem ilk klinik görüşmeden farklı olarak Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere SP üzümlerin yanı sıra yenilikçi strateji içeren zmleri kendileri gerçekleştirebilmeye başlamışlar ve böylece çoklu strateji bilgi düzeyleri temel düzeyden orta düzeye geçebilmiştir. Serkan ise ilk klinik görüşmede SP üzümlerin yanı sıra az sayıda da olsa YA'ler geliştirerek çoklu strateji bilgi düzeyi orta düzeyde bir katılımcı olarak ğretim seanslarına başlamıştır.

Genel olarak bakıldığında bu seansların ardından Pc Pdn ve Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde katılımcılar SP üzümlerin yanısıra yenilikçi strateji içeren zmleri daha fazla yapmaya başlamış ve çoklu strateji bilgi düzeyleri üst düzeye çıkmıştır.

### **3.1.1.1.3. Üst düzey**

Katılımcılardan Ayşegül, Berna ve Erdem öğretim seansı 2, 3 ve 4'te üst düzey çoklu strateji bilgisine sahip olarak belirlenmişlerdir. Serkan ise öğretim seansı 1 ile üst düzeye çıkmış, öğretim seansı 3, 4 ve 6'da da çoklu strateji bilgi düzeyi üst düzey olarak belirlenmiş ve üst düzey ve ileri düzey arasında iniş çıkışlar yaşamıştır.

Katılımcıların  $P_c$   $P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemler ve  $P_n$   $P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerin yer aldığı öğretim seanslarında üst düzeyde oldukları belirlenmiştir. Bu seanslarda amaçlanan ortak stratejiler ortak paranteze alma, benzer değişkenleri birleştirme, benzer değişkenleri düzenleyerek birleştirme, benzer değişkenleri sadeleştirme, benzer değişkenleri düzenleyerek sadeleştirme, kesrin anlamı, değişkenleri düzenleyerek kesrin anlamını kullanma stratejileri olarak belirlenmiş ve bu başlıklar altında katılımcıların bu stratejileri nasıl oluşturdukları, bu stratejileri kullanma süreçleri ve bu süreç içerisindeki değişimleri incelenmiştir.

#### ***Ortak paranteze alma***

Ortak paranteze alma stratejisinde amaç denklemlerdeki işlem yoğunluğunu azaltmak ve benzer değişkenleri birleştirme, önce bölme gibi diğer stratejileri uygulayabilmektir. Bu strateji bütün kesir türlerinde kullanılabilir bir strateji olmakla birlikte öğretim seansı 2'de bu stratejinin kullanabileceği 4 soru hazırlanmıştır. İlk klinik görüşmede Ayşegül ve Berna ortak paranteze alma stratejisini hiç kullanmamalarına karşın Ayşegül öğretim seansı 2'de araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan uygulayabilmiştir.

Berna ise ilk soruda benzer değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisinin bir getirisi olarak ortak paranteze alma stratejisini uygulamıştır (bkz. Şekil 3.13.). Ancak, diğer soruda yeniden SP stratejisini kullanmıştır. Bunun üzerine araştırmacı-öğretmen önce çözümün ilk adımını, daha sonra ikinci adımını, ardından tamamını göstermiş ve yorumlamasını istemiştir (bkz. Şekil 3.13.).

$$1. \frac{4(x+5)}{7} + \frac{5+x}{7} = \frac{40}{7}$$

$$\frac{4(x+5)}{7} + \frac{x+5}{7} = \frac{40}{7}$$

$$\frac{5(x+5)}{7} = \frac{40}{7}$$

$$5x+25=40$$

$$5x=15$$

$$x=3$$

İlk yapılan çözüm

$$\frac{x+2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{5x+15}{3} = 12$$

$$\frac{x+2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5x+15}{3} = 12$$

$$\frac{x+3}{3} + \frac{5x+15}{3} = 12$$

$$\frac{x+3}{3} + \frac{5(x+3)}{3} = 12$$

$$\frac{6(x+3)}{3} = 12$$

$$2(x+3) = 12$$

$$x+3 = 6$$

$$x = 3$$

Gösterilen Çözüm

### Şekil 3. 13. Berna, Öğretim seansı 2

Çözümün tamamını gördükten sonra işlem karışıklığı olmadığı ve daha küçük sayılarla uğraştığını belirterek bu çözümü daha güzel olarak yorumlamıştır. Berna üç soruda ortak paranteze alma stratejisini kendisi uygulayabilmiştir. Berna'nın bu seanstan sonra ortak paranteze alma stratejisini uygulayabildiği söylenebilir. İlk klinik görüşmede ortak paranteze alma stratejisini kullanan Erdem ve Serkan ise bu öğretim seansında da rahatlıkla bu stratejiyi kullanabilmişlerdir.

#### **Benzer değişkenleri birleştirme**

Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde bu stratejiyi kullanıp kullanmadığını görebilmek amacı ile bu seansta bu stratejinin kullanımına yönelik 1 soru bulunmaktadır.

Ayşegül, Erdem ve Serkan ilk çözümlerinde bu stratejiyi uygulayabilmiş ve tercih etmişlerdir. Berna ise SP stratejisini kullanarak ilk çözümünü gerçekleştirmiştir. Bu çözümün ardından başka bir çözüm geliştiremeyeceğini belirtmiş ve araştırmacı-öğretmen tarafından çözümün ilk adımı gösterilmiştir. Berna çözümün devamını rahatlıkla getirebilmiştir (bkz. Şekil 3.14.).

$$\textcircled{4} \quad \frac{5}{(x-4)} - \frac{3}{(x+4)} = \frac{7}{(x+4)}$$

$$\frac{5}{(x-4)} = \frac{7}{(x+4)} + \frac{3}{(x+4)}$$

...

$$\frac{5}{(x-4)} = \frac{3}{(x+4)} + \frac{7}{(x+4)}$$

$$\frac{5}{(x-4)} = \frac{10}{(x+4)}$$

$$\frac{1}{(x-4)} = \frac{2}{(x+4)}$$

$$2x - 8 = x + 4$$

$$x = 12,1$$

*Bu daha kolay...  
Burada payda eşitlemekle uğraşmadık. İm... direkt karşıya attık. Yani paydaları aynı olanların işlemlerini yaptık. Sonra sadeleştirme yaptık. Bu kadar.”*

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

Berna'nın Yorumu

### Şekil 3. 14. Berna, Öğretim seansı 4

Berna çözümü tamamlamış ve ne yaptığını adım adım açıklayabilmiştir. Bu aşamada yeni stratejiyi anlamış olduğu söylenebilir. Berna daha kolay olduğunu belirterek bu çözümü tercih etmiş, ancak çözümün ilk adımını gördükten sonra çözümün devamını getirebilmiş ve bu çözümü SP stratejisini kullandığı çözüme tercih etmiştir. Bu tür başka denklemlerde bu stratejiyi uygulayıp uygulamayacağı ve benimseyip benimsemeyeceğine dair bir bulgu bu seansta mevcut değildir.

#### ***Değişkenleri düzenleyerek birleştirme***

Bu stratejinin amacı değişkenleri toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi işlemlerle benzer cebirsel ifadeler haline getirmek ve bu benzer ifadeleri değiştirmeden aralarında işlem yapmaktır. Benzer değişkenleri düzeltmeden farklı olarak önce değişkenler benzer hale getirilir. Bu strateji işlem yoğunluğunu azaltmakta aynı zamanda kesrin anlamı, önce bölme gibi başka stratejilerin kullanılmasını sağlamaktadır.

Öğretim seansı 2'de bu stratejinin kullanabileceği 4 soru hazırlanmıştır. İlk klinik görüşmede Serkan dışında katılımcılardan hiçbiri bu stratejiyi kullanmamıştır. Öğretim seansı 2'de de Serkan dışındaki katılımcılar bu stratejiyi uygulayabilmek için çözümlü örnek görme ihtiyacı duymuşlardır. Nitekim bu seansta Serkan ileri düzeyde bir katılımcı olarak belirlenirken diğer katılımcılar üst düzeyde katılımcılar olarak belirlenmiştir.

Öğretim seansı 2 ile beraber Ayşegül'ün ilk soruda bu stratejiyi kendisi uygulayabilmiş, diğer soruda ise çözümün ikinci adımını gördükten sonra devamını getirebilmiştir (bkz. Şekil 3.15.)

$$1. \frac{4(x+5)}{7} + \frac{5}{7} + \frac{x}{2} = \frac{40}{7}$$

$$\text{I} \quad \frac{4 \cdot (x+5)}{7} + \frac{(5+x)}{2} = \frac{40}{7}$$

$$\frac{5 \cdot (x+5)}{7} = \frac{40}{7}$$

$$5(x+5) = 40$$

$$x+5 = 8$$

$$x = 3$$

$$\frac{x+2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{5x+15}{3} = 12$$

$$\frac{x+2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5x+15}{3} = 12$$

$$\frac{x+3}{3} + \frac{5x+15}{3} = 12$$

$$\text{I} \quad \frac{x+2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5x+15}{3} = 12$$

$$\frac{x+3}{3} + \frac{5(x+3)}{3} = 12$$

$$\frac{2}{6}(x+3) = 12$$

$$2(x+3) = 12$$

$$x+3 = 6$$

$$x = 3$$

İlk soru-Yapılan Çözüm

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

### Şekil 3. 15. Ayşegül, Öğretim seansı 2

Nitekim Ayşegül daha küçük sayılarla uğraştığı için bu çözümü tercih edeceğini belirtmiştir. Diğer 2 soruda benzer değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini rahatlıkla uygulayabilmiş ve ilk çözüm olarak yapmıştır. Nitekim Ayşegül bu seansta ileri düzeye çok yakın olan üst düzeyde bir katılımcı olarak belirlenmiştir.

İlk klinik görüşmede Berna'nın da verdiği cevaplar incelendiğinde bu stratejiyi hiç kullanmadığı belirlenmiştir. Berna ilk soruda Ayşegül gibi benzer değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan kendisi uygulayabilmiştir. Diğer soruda ise SP yöntemi kullanarak çözüm yapmıştır. Başka bir çözüm yapması istendiğinde paydayı 6'nın katı olan farklı sayılarda eşitleyebileceğini belirtmiş ve aşamalı olmakla birlikte benzer değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisi kullanılarak yapılan çözümün tamamını görme ihtiyacı duymuştur. Bu çözümde değişkenler düzenlenerek  $x+3$ 'lü ifadeler benzer hale getirilmiş ve bu değişkenler arasında işlem yapılarak denklem çözülmüştür (bkz. Şekil 3.16.).

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{5x+15}{3} &= 12 \\ \frac{x+2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5x+15}{3} &= 12 \\ \frac{x+3}{3} + \frac{5x+15}{3} &= 12 \\ \frac{x+3}{3} + \frac{5(x+3)}{3} &= 12 \\ \frac{6(x+3)}{3} &= 12 \\ 2(x+3) &= 12 \\ x+3 &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

“Benzer uzunlukta duruyor ama burada işlem karışıklığı yok. Yani biz burada 6 ile 12’yi çarpıyoruz falan. Yani büyük sayılara yöneliyoruz. Burada öyle bir şey yok... Direkt sadeleştirme. Küçük sayılarla uğraşyoruz. O yüzden daha böyle çabuk.”

Gösterilen Çözüm

Berna’nın Yorumu

### Şekil 3. 16. Berna, Öğretim seansı 2

Berna öğretim seansı 2’de benzer değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisinin kullanıldığı bu çözümü daha kolay olarak nitelendirmiştir. Bunun nedenini daha küçük sayılar kullanmak olarak belirtmiştir. Nitekim bu çözümü tercih etmiştir. Diğer sorularda ise bu stratejiyi rahatlıkla kullanmıştır. Berna bu öğretim seansı sonunda benzer değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini anlamış, 2 soruda kendisi uygulayabilmiş ve diğer çözüme tercih etmiştir. Nitekim bu seansta Berna ileri düzeye yakın olan üst düzey bir katılımcı olarak belirlenmiştir.

Erdem de Ayşegül ve Berna gibi ilk soruda benzer değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan kendisi uygulayabilmiştir. İkinci soruda ise paydaları 3’te eşitleyebileceğini fark etmesine karşın SP stratejisini kullanarak çözümüne devam etmiştir. Değişkenleri birleştirme stratejisinin kullanıldığı çözümün tamamını görme ihtiyacı duymuştur. Ancak çözümü doğru bir şekilde yorumlamış ve diğer çözümlerinde bu stratejiyi kullanabilmiştir (bkz. Şekil 3.17.).

$$3 \cdot \frac{10x+15}{5} - \frac{14x+21}{7} = 10$$

$$\frac{5(2x+3)}{5} + \frac{1(2x+3)}{1} = 10$$

$$2(2x+3) = 10$$

$$4x+6 = 10$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Erdem, Öğretim seansı 2

$$\frac{4(2x+1)}{3} + \frac{1(2x+1)}{5} = \frac{23}{15}$$

$$20(2x+1) + 3(2x+1) = 345$$

$$23(2x+1) = 345$$

$$(2x+1) = 15$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

Erdem, Öğretim seansı 2

$$\frac{x+2}{3} + \frac{x-1}{6} + \frac{5x+15}{3} = 12$$

$$\frac{x+2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5(x+3)}{3} = 12$$

$$\frac{x+3}{3} + \frac{5(x+3)}{3} = 12$$

$$\frac{6(x+3)}{3} = 12$$

$$2(x+3) = 6$$

$$x+3 = 3$$

$$x = 0$$

Serkan, Öğretim seansı 2

### Şekil 3. 17. Erdem, Öğretim seansı 2

Erdem'in bu bölümün sonunda değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini Pc Pdn kesirli ifadelerde uygulayabildiği söylenebilir. Tercih açısından bakıldığında Erdem bir strateji ile ilk defa karşılaştığında kendisinin bulmadığını ya da ilk aklına gelen olmadığını gerekçe göstererek genellikle SP yöntemi kullandığı çözümü tercih etmiş, ancak yöntemi anladıktan sonra daha kolay ve az işlem içerdiğini belirterek yeni öğrendiği yöntemi tercih etmiştir. Bu durumda Erdem'in yeni stratejileri uyguladığında, diğer çözümlere tercih ettiğini söylenebilir. Ancak Erdem Öğretim seansı 2'de orta düzeye yakın üst düzey bir katılımcı olarak belirlenmiştir. Serkan ise araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan bu stratejiyi kendisi rahatlıkla uygulayabilmiştir. Nitekim bu seansta ileri düzeyde bir katılımcıdır (bkz. Şekil 3.17).

Katılımcılardan Ayşegül, Berna ve Erdem'in öğretim seansı 2'de değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini uygulayabilmeleri için farklı adımlarda olmakla birlikte çözümlü örnek görmeleri gerektiği belirlenmiştir. Serkan ise bu stratejiyi kendisi oluşturmuştur. Bu nedenle, değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisi öğretim seansı 3'te yeniden uygulanmıştır. Bu bölümde bu stratejinin kullanılabileceği 4 soru bulunmaktadır.

İlk soruda Ayşegül değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini rahatlıkla uygulayabilmiştir. Ancak, sonraki soruda araştırmacı-öğretmen tarafından çözümün ilk iki adımı gösterilmiş, Ayşegül çözümün devamını getirebilmiştir (bkz. Şekil 3.18.).

$$\textcircled{2} \frac{x}{2} + \frac{3}{5} + \frac{x}{1} + \frac{6}{5} = 6$$

$$(5) (2) (10) (2)$$

$$\frac{5x}{10} + \frac{6}{10} + \frac{10x}{10} + \frac{12}{10} = 6$$

$$\frac{5x+6}{10} + \frac{10x+12}{10} = 6$$

---

$$\frac{5x+6}{10} + \frac{10x+12}{10} = 6$$

$$\frac{5x+6}{10} + \frac{2(5x+6)}{10} = 6$$

$$\frac{3(5x+6)}{10} = 6$$

$$3(5x+6) = 60$$

$$5x+6 = 20$$

$$5x = 14$$

$$x = 14/5$$

“Yorum olarak Hım... bence ben halen şununla (standart çözüm) aynı yere geldiği düşüncesi içerisindeyim.”

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

Ayşegül'ün Yorumu

### Şekil 3. 18. Ayşegül, Öğretim seansı 3

Ayşegül devamında diğer sorulara kendisi çözüm geliştirebilmiştir. Ancak, standart pratik yöntemi kullandığı çözümler Ayşegül için ön plandadır. SP stratejisini kullandığı çözümü daha kolay olarak nitelendirmektedir. Bu stratejiyi Ayşegül'ün anladığı ve uygulayabildiği rahatlıkla söylenebilir. Nitekim 3 soruda kendisi uygulayabilmiştir. Ancak, soru tipine göre tercihleri de değişim göstermektedir. Bu öğretim bölümünde bu strateji ile çözdüğü bütün sorularda bu çözümün standart pratik yöntemi kullanarak yaptığı çözümle bir farkının olmadığını belirtmiştir. Nitekim öğretim seansı 2'ye göre orta düzeye daha yakın olan üst düzey bir katılımcı olarak belirlenmiştir.

Berna ise 2 soruda bu stratejiyi kendisi uygulayabilmiştir. İlk soruda Berna değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini rahatlıkla uygulayabilmiştir. Fakat diğer soruda araştırmacı-öğretmen tarafından çözümün ilk iki adımı gösterilmesine karşın devamını getirememiştir. Nitekim bu seansta ileri düzeye yakın olan üst düzeyde bir katılımcı olarak belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.19.).

$$1. \frac{3x+6}{3} + \frac{6x+18}{3} = 12$$

$$\frac{3x+6}{3} + \frac{6x+18}{3} = 12$$

$$\frac{3(x+3)}{3} + \frac{6(x+3)}{3} = 12$$

$$\frac{3(x+3)}{3} = 12$$

$$x+3=4$$

$$x=1$$

$$2. \frac{x}{2} + \frac{3}{5} + \frac{x}{5} + \frac{6}{5} = 6$$

$$(5) (2) \quad (10) (2)$$

$$\frac{5x}{10} + \frac{6}{10} + \frac{10x}{10} + \frac{12}{10} = 6$$

$$\frac{5x+6}{10} + \frac{10x+12}{10} = 6$$

$$---$$

“... sonra bunları bir yere toplayacak ama nasıl toplayacak? Şimdi... um... bir bakayım. Bu bunun 2 katı. Bu da bunun 2 katı. Ama bunlar nerede birleşiyor. Şimdi bunu 5’le çarpsam,...”

İlk soru-Berna’nın çözümü

Gösterilen Çözüm-İkinci soru

Berna’nın yorumu-İkinci soru

### Şekil 3. 19. Berna, Öğretim seansı 3

Berna 2 katı olduğunu fark etmiş ama çözümü devam ettirememiştir. Bu yorumun ardından çözmek istemediğini belirtmiştir. Bu soruyu diğer sorularla kıyaslandığında diğerlerinden farklı olarak, ortak paranteze alındığı zaman x’in katsayısının 5 olmasıdır. Uygulama esnasında Berna 5 parantezine alarak x’in katsayısını 1 yapmaya çalışmış, ama ilerleyememiştir. Bu noktada x’in katsayısı 1’den farklı olduğu için Berna’nın bir kargaşa yaşadığı söylenebilir. Ancak daha öğretim seansı 2’de x’in katsayısı 1’den farklı olduğu durumlarda rahatlıkla ortak paranteze alabilmiştir. Ortak paranteze aldığı x’in katsayısı 1 olan başka bir soruda ise bu stratejiyi kendisi uygulayabilmiştir.

Erdem’de Ayşegül gibi çözümün ilk iki adımından sonra devamını getirebilmiş ve 3 çözümünde bu stratejiyi kendisi uygulayabilmiştir. Ancak, tercihleri diğer çözümlerden yana olmuştur. Erdem bir önceki seansta olduğu gibi orta düzeye yakın üst düzey bir katılımcı olarak belirlenmiştir. Serkan ise değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini bütün sorularda araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan uygulayabilmiş ve bu stratejiyi kullandığı çözümleri tercih etmiştir. Ancak bu seansta ileri düzeye yakın olmakla birlikte üst düzey bir katılımcı olarak belirlenmiştir. Bu durumun başka çözüm stratejileri ile ilgili olabileceği düşünülmüştür.

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde bu stratejiyi kullanıp kullanmadığını görebilmek amacı ile Öğretim seansı 4’te bu stratejinin kullanımına yönelik 1 soru bulunmaktadır. Bütün katılımcılar araştırmacının herhangi bir

müdahalesi olmadan Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini kendileri uygulayabilmişlerdir (bkz. Şekil 3.20.).

The image shows three handwritten mathematical solutions for the equation  $\frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x+2)} = \frac{3}{2(x+1)}$ .

**Solution 1 (Ayşegül):**

$$\frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x+2)} = \frac{3}{2(x+1)}$$

$$\frac{3}{2(x+2)} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{3}{2(x+1)}$$

$$\frac{3}{2(x+2)} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{6}{2(x+1)}$$

$$\frac{3}{2(x+2)} = -\frac{3}{2(x+1)}$$

$$2(x+2) = -2(x+1)$$

$$4x+4 = -2x-2$$

$$6x = -6$$

$$x = -1$$

**Solution 2 (Erdem):**

$$\frac{3}{(x+1)} + \frac{3}{2(x+2)} = \frac{3}{2(x+1)}$$

$$\frac{3}{2(x+2)} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{3}{(x+1)}$$

$$\frac{3}{2(x+2)} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{6}{2(x+1)}$$

$$\frac{3}{2(x+2)} = -\frac{3}{2(x+1)}$$

$$-2(x+2) = 2(x+1)$$

$$-2x-4 = 2x+2$$

$$-4x = 6$$

$$-x = \frac{6}{4}$$

$$+x = -\frac{6}{4}$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

**Solution 3 (Serkan):**

$$\frac{3}{(x+1)} + \frac{3}{2x+4} = \frac{3}{2x+2}$$

$$\frac{3}{2x+4} = \frac{3}{2x+2} - \frac{3}{2x+2}$$

$$\frac{3}{2x+4} = -\frac{3}{2x+2}$$

$$6x+6 = -6x-12$$

$$12x = -18$$

$$x = \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2}$$

Ayşegül

Erdem

Serkan

### Şekil 3. 20. Öğretim seansı 4

Bu seansta bütün katılımcılar üst düzey katılımcı olarak belirlenmiştir. Ancak öğretim seansı 4'te katılımcılar orta düzeye yakın üst düzeyde katılımcılar olarak belirlenmiştir. Orta düzeye en yakın katılımcı ise Ayşegül'dür. Bu nedenle kesir türünün değişmesinin en çok Ayşegül'ü etkilediği söylenebilir. Ancak kesir türünün değişmesi bu stratejinin katılımcılar tarafından uygulanabilmesini etkilememiştir.

### **Benzer değişkenleri sadeleştirme**

Benzer değişkenleri sadeleştirme stratejisinde benzer olan değişkenleri sadeleştirerek işlem yoğunluğunu azaltmak amaçlanmaktadır. Benzer değişkenleri sadeleştirme stratejisini katılımcılardan hiçbiri ilk klinik görüşmede uygulamamıştır. Öğretim seansı 2'de kolay görülebilir bir denklemde bu stratejinin kullanılabileceği 1 soru bulunmaktadır (bkz. Şekil 3.21.).

$$5. \frac{\frac{9}{4} \cdot \frac{x+5}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{12}{5} + \frac{9}{4}}$$

1

$$\frac{x+5}{5} \cdot \frac{x}{2}$$

$$5x = 2x + 10$$

$$3x = 10$$

$$x = \frac{10}{3}$$

“... aslında ben bunu hiç uzatmasam. Nasıl olsa bunlar birbirine eşittir diye şuradaki birbiri ile aynı olan sayıları götürsem... daha kısa oldu..”

Yapılan Çözüm

Ayşegül'ün Yorumu

### Şekil 3. 21. Ayşegül, Öğretim seansı 2

Katılımcıların tamamı şekil 3.21’de Ayşegül’ün yaptığı gibi bu seansta bu stratejiyi kendileri oluşturmuşlardır. Bu seans sonunda katılımcıların tamamı benzer değişkenleri sadeleştirme stratejisini kendileri oluşturmuş, uygulamış ve bu stratejiyi kullandıkları çözümü tercih etmişlerdir.

#### **Değişkenleri düzenleyerek sadeleştirme**

Bu stratejide amaç, değişkenleri düzenleyerek benzer değişkenler elde etmek ve benzer değişkenleri sadeleştirerek işlem yoğunluğunu azaltmaktır. Öğretim seansı 2’de değişkenleri sadeleştirme stratejisini katılımcıların kendileri uygulayabilmişlerdir. Değişkenleri düzenleyerek sadeleştirme stratejisi ise katılımcıların daha önce hiç uygulamadıkları bir stratejidir. Öğretim seansı 3’te bu stratejinin kullanımına yönelik 1 soru bulunmaktadır.

Ayşegül ve Serkan ortak paranteze alma, sadeleştirme gibi daha önceki stratejilerden yararlanarak değişkenleri düzenlemiş ve benzer olanları sadeleştirerek yeni stratejiyi kendileri oluşturmuşlardır. Öğretim seansı 3’te her iki katılımcı da ileri düzeyde katılımcılar olarak belirlenmiştir.

Berna öncelikle payı ve paydası nümerik olan kesirli ifadelerde sadeleştirme yaparak iki kesri sadeleştirmiştir. Ancak, içerisinde değişken olan benzer ifadeleri düzenlemeden SP yöntemle çözümüne devam etmiş, diğer değişkenlerin de düzenlenebileceğini fark etmemiştir (bkz. Şekil 3.22). Ardından araştırmacı-öğretmen tarafından çözümün ilk iki adımı gösterilmiştir. Berna bu çözümü yorumlamış ve şekil 3.22’ deki çözümü yapmıştır. Buna karşın Berna öğretim seansı 3’te ileri düzeye yakın üst düzey bir katılımcı olarak belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.22.).

$$\begin{aligned} 5) \frac{x+3}{3} + \frac{x+6}{5} + \frac{3}{5} &= \frac{x}{3} + \frac{12}{20} + \frac{5x+15}{15} \\ \frac{x+3}{3} + \frac{3x+18}{15} + \frac{12}{20} &= \frac{x}{3} + \frac{12}{20} + \frac{5x+15}{15} \\ 1 + \frac{3x+18}{15} - \frac{5x+15}{15} &= 0 \\ 1 + \frac{-2x+3}{15} &= 0 \\ \frac{-2x+3}{15} &= -1 \\ -2x+3 &= -15 \\ -2x &= -18 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \frac{x+3}{3} + \frac{x+6}{5} + \frac{3}{5} &= \frac{x}{3} + \frac{12}{20} + \frac{5x+15}{15} \\ \frac{x+3}{3} + \frac{x+6}{5} + \frac{3}{5} &= \frac{x}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5x+15}{15} \\ \frac{x+3}{3} + \frac{x+6}{5} &= \frac{x}{3} + \frac{5(x+3)}{15} \\ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{3} + \frac{x+6}{5} &= \frac{x}{3} + \frac{5(x+3)}{15} \\ \frac{5(x+3)}{15} + \frac{3(x+6)}{15} &= \frac{5x}{5} + \frac{5(x+3)}{15} \\ \frac{3(x+6)}{15} - \frac{5x}{15} &= 0 \\ \frac{3x+18}{15} - \frac{5x}{15} &= 0 \\ \frac{-2x+18}{15} &= 0 \\ -2x+18 &= 0 \\ -2x &= -18 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Yapılan ilk çözüm

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

### Şekil 3. 22. Berna, Öğretim seansı 3

Berna'nın çözümünü ele alındığında, ilk çözümündeki gibi 3/5'leri sadeleştirdikten sonra paydaları eşitlemiş, farklı olarak ortak paranteze almış ve sadeleştirmeleri yapmıştır. Bu aşamada bu stratejiyi anladığı, ancak yeni stratejiyi henüz benimsemediği ve SP yöntemi kullandığı stratejiyi terk etmediği söylenebilir. Çünkü bu çözümün ardından SP stratejisini kullandığı çözümle bir farkı olmadığını belirtmiştir. Bu öğretim bölümü sonunda Berna'nın bu stratejiyi başka sorularda kullanıp kullanamayacağını ifade etmek zordur.

Erdem de Berna gibi 3/5'leri sadeleştirdikten sonra paydaları eşitleyerek çözümüne devam etmiştir. Ardından araştırmacı-öğretmen tarafından çözümün ilk iki adımı gösterilmiş ve Erdem çözümü uygulayabilmiştir. Yorum olarak ise bu çözümün daha kolay olduğunu belirtmiştir. Nitekim Erdem de bu seansta üst düzey bir katılımcı olarak belirlenmiştir.

#### **Kesrin anlamı: yarım ve çeyrek**

Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde Ayşegül ve Serkan ilk soruda çözümün ilk adımıyla beraber bu stratejiyi uygulayabilmiş ve diğer çözümlere de aktarabilmişlerdir. Berna ve Erdem ise kesrin anlamı stratejisini tam anlamıyla uygulayamamış, değişken değiştiğinde bu stratejiyi kullanmaya çalışmış ama çözümü tamamlayamamışlardır. Bu bölümde katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde uygulayıp

uygulamadıklarını belirleyebilmek amacıyla bu stratejinin kullanılabilceği 3 soru bulunmaktadır.

Ayşegül kesrin anlamı stratejisinin kullanılabilceği Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denkleme dair ilk soruda SPÖ stratejisini kullanarak ilk çözümünü gerçekleştirmiştir. Başka bir çözüm yapması istendiğinde yapamayacağını belirtmiş ve araştırmacı-öğretmen tarafından kesrin anlamı stratejisinin kullanıldığı çözümün ilk adımı sunulmuş ve yorumlayarak çözümü devam ettirmesi istenmiştir (bkz. Şekil 3.23.).

Neye  $m$  dediniz orada?

“Hım... 1 bölü... tabii burada  $1/x$ 'e  $m$ ,  $2/x$ 'e  $2m$  dedik... şurada  $1/x$  kısmına  $m$  dediğimiz çıktı aklımdan.”

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

Ayşegül'ün yorumu

### Şekil 3. 23. Ayşegül, Öğretim seansı 4

Kesrin anlamı stratejisinin kullanıldığı çözümün ilk adımını inceledikten sonra Ayşegül payı cebirsel ve paydası nümerik kesirleri içeren denklemlerde bu stratejiyi rahat bir şekilde kullanmasına rağmen, çözümüne başlarken  $1/x$  ve  $m$  arasında bir karmaşa yaşamıştır. Başlangıçta  $1/x$ 'e  $m$  demesine karşın son aşamada  $x$ 'e  $m$  dediğini düşünerek çözümünü tamamlamaya çalışmıştır.

Bu şekilde bu stratejiyi kullanarak çözümü tamamlayabilmiştir. Tercihini ise daha bilindik olduğu gerekçesi ile ilk çözümünden yana olmuştur. Diğer soruda bu stratejiyi kendisi kullanmış, ancak ikinci çözüm olarak gerçekleştirmiştir. Başka bir soruda ise soruda ilk aklına gelen çözüm kesrin anlamı stratejisini kullandığı çözüm olmuştur. Bu durum bu çözümü uyguladığı ve tercih ettiğinin bir göstergesidir. Nitekim Ayşegül öğretim seansı 4'te orta düzeye çok yakın üst düzeyde bir katılımcı olarak belirlenmiştir.

Berna kesrin anlamı stratejisinin kullanılabilceği Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denkleme dair ilk soruda SP stratejisini kullanarak ilk çözümünü gerçekleştirmiştir

(bkz. Şekil 3.24.). Başka bir çözüm geliştirmesi istendiğinde yapamayacağını belirtmiş ve araştırmacı-öğretmen tarafından kesrin anlamı stratejisinin kullanıldığı çözümün ilk adımı sunulmuştur. Sonra yorumlayarak çözümü devam ettirmesi istenmiştir. Berna çözümün devamını rahatlıkla getirebilmiştir (bkz. Şekil 3.24.).

$$\textcircled{1} \quad \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 6$$
$$\frac{1}{x} = m \text{ olsun}$$

...

$$2m + \frac{m}{3} = 6$$
$$3m = 6$$
$$m = 6/3$$
$$m = 2$$
$$\frac{1}{x} = 2$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

### Şekil 3. 24. Berna, Öğretim seansı 4

İki çözüm arasında tercih yapması istendiğinde her ikisini de kolay olarak yorumlamıştır. Bu durum bu yeni stratejiyi benimsediğinin bir göstergesi olabilir. Berna diğer iki soruda değişken değişmesine rağmen, ikinci ve üçüncü çözümlerde bu stratejiyi rahatlıkla uygulayabilmiştir. Berna bu seansta üst düzey bir katılımcı olarak belirlenmiştir. Ancak, tercihleri konusunda kararsız kalmıştır. Berna öğretim seansı 1’de Pn Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kesrin anlamı stratejisini uygulayamazken Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde rahatlıkla anlayabilmiş, benimsemiş ve uygulayabilmiştir. Fakat diğerini terk etme konusunda kararsız kalmıştır.

Erdem daha önceki öğretim seanslarında kesrin anlamı stratejisini uygulayamamış ve bütün sorularda araştırmacı-öğretmenin müdahalesi olmuştur. Nitekim, öğretim seansı 4’te de benzer bir durum söz konusudur. 1 soruda bu çözümü yapmazken 2 soruda ise çözümlerin ilk adımlarını inceledikten sonra devamını getirebilmiştir (bkz. Şekil 3.25.). Ancak Erdem bu seansta ileri düzeyi en yakın üst düzey katılımcı olarak belirlenmiştir. Bu durumun diğer stratejilerle ilgili olabileceği düşünülmektedir.

$$\textcircled{1} \quad \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 6$$

$$\frac{1}{x} = m \text{ olsun}$$

...

$$\frac{1}{x} = m$$

$$\frac{2}{x} = 2m$$

$$2m + m = 6$$

$$3m = 6$$

$$m = 2$$

$$\frac{1}{x} = 2$$

$$1 = 2x$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{3}{x+3} + \frac{9}{x+3} = 4$$

$$\frac{3}{x+3} = m \text{ olsun}$$

...

$$\frac{3}{x+3} + \frac{9}{x+3} = 4$$

$$\frac{12}{x+3} = 4$$

$$12 = 4x + 12$$

$$0 = 4x$$

$$x = 0$$

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

### Şekil 3. 25. Erdem, Öğretim seansı 4

Serkan öğretim seansı 4'te araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan paydası cebirsel ifadeleri içeren kesirli ifadelerde kesrin anlamı stratejisini kendisi uygulayabilmiştir. Nitekim bu seansta üst düzey bir katılımcıdır.

#### ***Değişkenleri düzenleyerek kesrin anlamını kullanma***

Bu stratejide öncelikle değişkenleri düzenleyerek benzer duruma getirme, ardından bu değişkenlerde kesrin anlamı stratejisini uygulama söz konusudur. Bu nedenle bu stratejiyi kullanabilmek için değişkenleri düzenleyebilmek ve kesrin anlamı stratejisini uygulayabilmek gerekmektedir. Katılımcılar daha önceki seanslarda değişkenleri düzenleme stratejisini uygulayabilmişlerdir. Erdem şimdiye kadar kesrin anlamı stratejisini uygulayamazken diğer katılımcıların uygulayabildikleri görülmüştür.

Değişkenleri düzenleyerek kesrin anlamını verme stratejisi ile ilk defa öğretim seansı 4'te karşılaşmaktadırlar. Bu seansta bu kesir türüne ait iki seans olması ve farklı stratejilerinde amaçlanmış olması nedeniyle bu stratejinin kullanılabileceği 1 soru bulunmaktadır.

Berna ve Serkan bu soruda bu stratejiyi çözümün ilk adımını gördükten sonra uygulayabilmişlerdir. Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde bu stratejiyi rahatlıkla anlayabilmiş, benimsemiş ve uygulayabilmişlerdir. Nitekim daha kolay olduğunu belirterek bu çözümü tercih etmişlerdir. Serkan'ın geçirdiği bu süreç şekil 3.26.'da sunulmuştur.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x} + \frac{10}{x} = 3$$

$$\frac{5}{x} + \frac{10}{x} = 3$$

$$\frac{5}{x} \rightarrow 1a$$

$$\frac{10}{x} \rightarrow 2a$$

$$3a = 3$$

$$a = 1$$

“ Bu daha mantıklı... Burada 3a buldum. Burada 15a buldum. Daha fazla sayı olsaydı daha da büyüyecekti. Burada küçük sayılarla yaptım. Burada daha büyük olduğu için.”

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

Serkan'ın yorumu

### Şekil 3. 26. Serkan, Öğretim seansı 4

Ayşegül ise ancak çözümün ilk 2 adımını gördükten sonra devamını getirebilmiştir. Tercihi ise başka bir çözümden yana olmuştur. Erdem bu soruda SP kullanarak çözümünü gerçekleştirmiş ve başka bir çözüm yapmak istememiştir.

Sonuç olarak öğretim seansı 2, 3 ve 4 sonunda Ayşegül, Berna ve Erdem ilk öğretim seansından farklı olarak Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere ve Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere SP çözümlerin yanı sıra olası yenilikçi strateji içeren çözümleri kendileri gerçekleştirebilmişlerdir. Böylece üst düzeyde çoklu strateji bilgisine sahip olabilmişlerdir. Serkan ise diğer katılımcılardan farklı olarak öğretim seansı 1 ile beraber üst düzeyde çoklu strateji bilgisine sahip olabilmıştır. Öğretim seansı 3, 4 ve 6'da da üst düzeyde çoklu strateji bilgisine sahip olabilmıştır.

Bu seansların ardından paydası cebirsel ifadeleri içeren öğretim seansı 5, 6 ve 7'de katılımcılar SP çözümleri terk ederek olası yenilikçi strateji içeren çözümleri daha fazla yapmaya başlamış ve çoklu strateji bilgi düzeyleri ileri düzeye çıkmıştır.

#### **3.1.1.1.4. İleri düzey**

Ayşegül, Berna ve Erdem öğretim seansı 5, 6 ve 7’de çoklu strateji bilgi düzeyleri ileri düzey olarak belirlenmiştir. Serkan’ın ise öğretim seansı 2, 5 ve 7’de çoklu strateji bilgisi açısından ileri düzey bir katılımcı olduğu görülmüştür. Öğretim seansı 6’da üst düzeydedir, çünkü diğer katılımcılardan farklı olarak Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde YAÇ stratejilerin yanı sıra SP çözümleri de yaptığı görülmüştür. Bunun nedeninin kesir türünün değişmesi olduğu düşünülmektedir. Nitekim o da diğer katılımcılar gibi son öğretim seansında ileri düzeyde kalarak öğretim seanslarını tamamlamıştır.

Katılımcıların genel olarak Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerin yer aldığı öğretim seansı 5’te ve Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerin yer aldığı öğretim seansları 6 ve 7’de ileri düzeyde oldukları belirlenmiştir. Bu seanslarda amaçlanan ortak stratejiler benzer değişkenleri birleştirme, değişkenleri düzenleyerek birleştirme, değişkenleri düzenleyerek değişkenle çarpma, benzer değişkenleri sadeleştirme, değişkenleri düzenleyerek sadeleştirme, kesrin anlamı stratejileri olarak belirlenmiş ve bu başlıklar altında katılımcıların bu kesir türlerinde bu stratejileri nasıl oluşturdukları, bu stratejileri kullanma süreçleri ve bu süreç içerisindeki değişimleri incelenmiştir. Bu stratejilerden ilki benzer değişkenleri birleştirme stratejidir.

#### ***Benzer değişkenleri birleştirme***

Katılımcılar şimdiye kadar Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde ve Pn Pdc kesirli cebirsel ifadeleri içeren denklemlerde bu stratejiyi çözümün uygulayabilmiş ve devamında diğer soruları bu stratejiyi kullanarak çözebilmişlerdir. Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde benzer değişkenleri birleştirme stratejisini uygulayıp uygulayamadıklarını belirlemek amacıyla bu öğretim seansında bu stratejinin kullanımına yönelik 3 soru bulunmaktadır.

3.  $\frac{2x-4}{x-3} + \frac{5x}{3x+1} = \frac{2}{x-3}$

$\frac{2x-4}{x-3} - \frac{2}{x-3} = \frac{5x}{3x+1}$

$\frac{2(x-2)}{x-3} = \frac{5x}{3x+1}$

$\frac{2}{1} = \frac{5x}{3x+1}$

$5x = 6x + 2$

$-x = 2$

$x = -2$

$\frac{x}{x} + \frac{x}{x+1} = \frac{4}{3}$

$1 + \frac{x}{x+1} = \frac{4}{3}$

$\frac{x}{x+1} = \frac{4}{3} - 1$

$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{3}$

$3x = x+1$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{4}{3}$

$\frac{1}{4} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{4}{3}$

$1 + \frac{x}{x+1} = \frac{4}{3}$

$\frac{x}{x+1} = \frac{4}{3} - 1$

$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{3}$

$3x = x+1$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

Berna

Ayşegül

Erdem

### Şekil 3. 27. Öğretim seansı 6

Şekil 3.27.'de de görüldüğü gibi, katılımcılar 3 soruda da benzer değişkenleri birleştirme stratejisini rahatlıkla uygulayabilmişlerdir. Ancak bu seansta Ayşegül, Berna ve Erdem çoklu strateji bilgi düzeyi olarak ileri düzeyde iken, Serkan üst düzeyde bir katılımcı olarak belirlenmiştir. Bu durumun başka stratejilerle ilgili olduğu düşünülmektedir.

Katılımcıları genel olarak ileri düzeyde olarak belirlendikleri seanslarda kullanılan stratejilerden bir diğeri ise değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisidir.

#### **Değişkenleri düzenleyerek birleştirme**

Daha önceki öğretim seanslarında Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde Ayşegül, Erdem ve Serkan'ın bu stratejiyi rahatlıkla uygulayabildikleri belirlenirken Berna'nın uygulamada problem yaşadığı görülmüştür. Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini uygulayıp uygulayamadıklarını belirlemek amacıyla öğretim seansı 5'te bu stratejinin kullanımına yönelik 1 soru bulunmaktadır. Bütün katılımcılar çözüm görme ihtiyacı duymuşlardır. Bu durum katılımcıların kesir türü değiştiğinde değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini uygulamada problem yaşadıklarını göstermektedir.

$$\frac{4}{x-3} - \frac{4}{3-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + 1$$

$$\frac{4}{x-3} - \frac{4}{-(x-3)} + \dots$$

$$\frac{4}{x-3} - \frac{4}{-(x-3)} = 1$$

$$\frac{-4}{-(x-3)} - \frac{4}{-(x-3)} = 1$$

$$\frac{-8}{-(x-3)} = 1$$

$$-8 = -(x-3)$$

$$-8 = -x + 3$$

$$-11 = -x$$

$$x = 11$$

$$\frac{4}{x-3} - \frac{4}{3-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + 1$$

$$\frac{4}{x-3} - \frac{4}{-(x-3)} = 1$$

$$\frac{4+4}{x-3} = 1$$

$$\frac{8}{x-3} = 1$$

$$8 = x-3$$

$$11 = x$$

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm-Ayşegül

Yapılan Çözüm-Serkan

### Şekil 3. 28. Öğretim seansı 5

Katılımcılardan Ayşegül ve Serkan çözümün ilk adımını gördükten sonra devamını getirebilmişlerdir. Berna ve Erdem ise çözümün tamamını görme ihtiyacı duymuşlar ancak gösterilen çözümü doğru bir şekilde yorumlayabilmişlerdir (bkz. Şekil 3.28.). Erdem daha önce uygulayabilmesine karşın farklı kesir türlerinde bu stratejiyi kullanmakta zorluk yaşamıştır. Nitekim üst düzeye yakın ileri düzeyde bir katılımcı olarak belirlenmiştir.

Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 7’de bu stratejinin kullanımına yönelik 2 soru bulunmaktadır. Katılımcıların tamamı bu seansta benzer değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan kendileri uygulamışlardır (bkz. Şekil 3.29.).

$$2. \frac{25}{x-5} + \frac{7x-10}{5-x} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{25}{x-5} + \frac{7x-10}{-(x-5)} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{25}{x-5} - \frac{7x-10}{x-5} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{35-7x}{x-5} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{7(5-x)}{x-5} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{-7(x-5)}{x-5} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{-7 + 12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$12x+20 = 8x$$

$$20 = -4x$$

$$x = -5$$

$$3. \frac{7x+14}{7x} - \frac{6x+24}{6x} = 2$$

$$\frac{7(x+2)}{7x} - \frac{6(x+4)}{6x} = 2$$

$$\frac{x+2}{x} - \frac{x+4}{x} = 2$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

$$2. \frac{25}{x-5} + \frac{7x-10}{5-x} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{25}{x-5} - \frac{7x-10}{x-5} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{-7x+35}{x-5} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{-7(x-5)}{x-5} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$-7 + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$-7x + 6x + 10 = 4x$$

$$-x + 10 = 4x$$

$$10 = 5x$$

$$2 = x$$

Berna

Erdem

Serkan

### Şekil 3. 29. Öğretim seansı 7

Tercihleri de bu stratejiyi kullandıkları çözümlerden yana olmuştur. Hepsi ilk çözümlerinde bu stratejiyi kullanmışlar, SP stratejisini kullanarak yapacakları çözümün uzun olacağını belirterek yapmak istememişlerdir. Bu öğretim seansı sonunda katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde değişkenleri düzenleyerek birleştirme stratejisini rahatlıkla uygulayabildikleri söylenebilir. Bu seans sonunda Serkan üst düzeye yakın ileri düzeyde bir katılımcı olarak belirlenirken, diğer katılımcılar ileri düzey üst sınırının da üstüne çıkmışlardır. Serkan'ın bu durumunun başka stratejilerle ilgili olabileceği düşünülmektedir. Bu stratejiye benzer bir strateji ise değişkenleri düzenleyerek değişkenle çarpma stratejisidir.

#### **Değişkenleri düzenleyerek değişkenle çarpma**

Değişkenle çarpma stratejisi paydası cebirsel olan ifadelerde kullanılacak bir stratejidir. Bu strateji paydadaki cebirsel ifadelerden kurtularak paydası nümerik ifadelerle işlem yapmayı sağlar. Bu durum ise cebirsel paydaları eşitleme zorluğunu ortadan kaldırır. Değişkenleri düzenleyerek değişkenle çarpma stratejisi ise değişkenle çarpma stratejisinden farklı olarak öncelikle değişkenleri düzenlemeyi gerektirir.

Erdem bu stratejiyi kendisi oluşturmuştur. Ancak katılımcıların tamamının öğretim seansları sonlarına doğru bu stratejiyi rahatlıkla uygulayabildiği söylenebilir. Bu değişim ele alındığında, öğretim seansı 5'te değişkenleri düzenleme ve ardından değişkenle çarpma stratejisinin kullanılabilceği 1 soru bulunmaktadır. Ayşegül, Berna ve Serkan çözümün tamamını inceleme ihtiyacı duymuşlardır.

Ayşegül daha önce bu stratejiyi hiç kullanmamıştır. Nitekim SP stratejisini kullanarak ilk çözümünü gerçekleştirmiştir. Başka bir çözüm yapması istendiğinde yapamayacağını belirtmiş ve araştırmacı-öğretmen tarafından değişkenle çarpma stratejisinin kullanıldığı çözümün ilk adımı sunulmuş ve yorumlayarak çözümü devam ettirmesi istenmiştir (bkz. Şekil 3.30.).

$$\frac{1}{2x+4} + \frac{4}{3x+6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{3(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{6(x+2)} + \frac{8}{6(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$(x+2) \cdot ( \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{3} = x+2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{6} + \frac{8}{6} = \frac{x+2}{6}$$

$$\frac{11}{6} = \frac{x+2}{6}$$

$$x+2 = 11$$

$$x = 9$$

“...Paydada bilinmeyen kalmıyor... Paydaları, çünkü yani, düşündüğün zaman paydada olduğu zaman bilinmeyen, daha zor oluyor. Ama payda olduğu zaman daha basitleştiği için daha basit yapmak için yapmıştır.”

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

Ayşegül'ün Yorumu

### Şekil 3. 30. Ayşegül, Öğretim seansı 5

Ayşegül çözümü rahatlıkla tamamlayabilmiştir. Ancak, daha garanti olduğunu belirterek ilk çözümü olan standart çözümü tercih etmiştir. Ayşegül'ün bu stratejiyi anladığı, ancak henüz benimsemediği söylenebilir.

Öğretim seansı 5'e kadar Berna ve Serkan da değişkenle çarpma stratejisini kullanmamıştır. Berna SP stratejisini kullanarak ilk çözümünü gerçekleştirmiştir. Başka bir çözüm yapması istendiğinde yapamayacağını belirtmiş ve araştırmacı-öğretmen tarafından değişkenle çarpma stratejisinin kullanıldığı çözümün ilk adımı gösterilmiştir. Ancak Berna devamını getirememiştir. Bunun üzerine çözümün tamamı gösterilmiş ve yorumlaması istenmiştir. Serkan ise bu soruya başka bir alternatif yenilikçi çözüm geliştirmekle birlikte değişkenle düzenleyerek çarpma stratejisinin ilk adımı

gösterildikten sonra devamını getirememiş ve Berna gibi çözümün tamamını incelemek durumunda kalmıştır (bkz. Şekil 3.31.).

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{1}{2x+4} + \frac{1}{3x+6} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{3(x+2)} &= \frac{1}{6} \\ (x+2) \cdot \left( \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{3(x+2)} \right) &= (x+2) \cdot \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{x+2}{6} \\ \text{(3)} \quad \text{(2)} \\ \frac{3+2}{6} &= \frac{x+2}{6} \\ 5 &= x+2 \\ 3 &= x \end{aligned}$$

“x’leri yok im... x+2’leri payda da yok etmeye çalışmış. Daha sonra im... 3/6 ile 8/6 kalmış. Buradakileri yok edemediğimiz için direkt çarpmış. Im... sonrada paydaki işlemleri yapmış. Zaten paydalar eşit. x’i de 9 bulmuş... x+2’leri yok etmeye çalışmış... Daha basit.”

“Yani bu benim yaptığım işlemde daha kolay olmuş sanırım... Çünkü, burada bana paydada bilinmeyenle uğraşmak daha zor geliyor... Yani pay kısmında olunca bilinmeyen daha rahat yapabildiğim için... Bu çözümü görebilseydim bunu tercih ederdim.”

Gösterilen Çözüm

Berna’nın Yorumu

Serkan’ın Yorumu

### Şekil 3. 31. Öğretim seansı 5

Berna ve Serkan çözümü doğru bir şekilde yorumlamışlar ve bu stratejinin x+2’leri yok etmeyi amaçladığını fark etmişlerdir. Bu öğretim bölümü sonunda Berna ve Serkan değişkenle çarpma stratejisinin kullanıldığı bu çözümü anlamışlardır. Ancak uygulayıp uygulayamayacakları daha sonraki öğretim seanslarında görülebilir. Nitekim bu çözümü daha basit olarak nitelendirerek diğer çözüme tercih etmişlerdir. Erdem ise bu stratejiyi Öğretim seansı 4’te kendisi bulmuş ve neredeyse bütün sorularda kullanmıştır. Öğretim seansı 5’te ise bu stratejiyi kullanarak bir çözüm gerçekleştirmedeği görülmüştür.

Katılımcıların başka sorularda bu stratejiyi kullanma süreçlerini belirlemek amacıyla öğretim seansı 6’da da bu stratejinin kullanılabileceği 1 soru bulunmaktadır.

Ayşegül ve Serkan ilk çözüm olarak başka çözüm yapmakla birlikte değişkenleri düzenleyerek değişkenle çarpma stratejisinin kullanıldığı çözümün ilk adımını gördükten sonra devamını getirebilmişlerdir (bkz. Şekil 3.32.).

$$\textcircled{4} \frac{1}{2x+6} + \frac{x-2}{3x+9} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$(x+3) \cdot \left( \frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} \right) = (x+3) \cdot \left( \frac{2x-1}{x+3} \right)$$

$$\textcircled{4} \left( \frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} \right) = \left( \frac{2x-1}{x+3} \right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{x-2}{3} = \frac{2x-1}{1}$$

$$\frac{3}{6} + \frac{2x-4}{6} = \frac{2x-1}{1}$$

$$\frac{2x-1}{6} = \frac{2x-1}{1}$$

$$2x-1 = 12x-6$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{4} \left( \frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} \right) = \left( \frac{2x-1}{x+3} \right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{x-2}{3} = 2x-1$$

$$3 + 2x-4 = 12x-6$$

$$2x-1 = 12x-6$$

$$5 = 10x$$

$$\frac{1}{2} = x$$

Gösterilen Çözüm

Ayşegül

Serkan

### Şekil 3. 32. Öğretim seansı 6

Berna bu stratejinin kullanılabileceği ilk çözüm olarak ortak paranteze almış, paydaları eşitlemiş ve son aşamada paydadaki değişkenleri sadeleştirerek çözümünü tamamlamıştır. Ardından araştırmacı-öğretmen tarafından çözümün ilk adımı gösterilerek incelemesi istenmiştir (bkz. Şekil 3.33.).

$$\textcircled{4} \frac{1}{2x+6} + \frac{x-2}{3x+9} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$(x+3) \cdot \left( \frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} \right) = (x+3) \cdot \left( \frac{2x-1}{x+3} \right)$$

$$\textcircled{4} \left( \frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} \right) = \left( \frac{2x-1}{x+3} \right)$$

$$\frac{x+3}{2(x+3)} + \frac{x^2-2x+3x-6}{3(x+3)} = \frac{2x^2-x+6x-3}{x+3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{x^2+x-6}{3(x+3)} = \frac{2x^2+5x-3}{x+3}$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{2x+6} + \frac{x-2}{3x+9} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$(x+3) \cdot \left( \frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} \right) = (x+3) \cdot \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\frac{(x+3)}{2(x+3)} + \frac{(x-2)(x+3)}{3(x+3)} = \frac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{x-2}{3} = \frac{2x-1}{1}$$

$$\frac{3}{6} + \frac{2x-4}{6} = \frac{12x-6}{6} \Rightarrow 2x-1 = 12x-6$$

$$10x = 5$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Gösterilen Çözüm 1

Berna'nın çözümü

Gösterilen Çözüm 2

### Şekil 3. 33. Öğretim Seansı 6, Berna

İlk adımı incelemiş, ancak paydalardaki değişkenleri sadeleştirmeden çözüme devam etmiştir. Ardından araştırmacı-öğretmen tarafından çözümün tamamı sunulmuş ve yorumlaması istenmiştir. Berna çözümün tamamında ne yapıldığını adım adım anlatmış ve bu çözümü tercih edeceğini belirtmiştir. Ancak, ilerleyen aşamada bu

stratejiyi uygulayıp uygulayamayacağını söyleyebilmek bu aşamada mümkün değildir. Erdem ise bu öğretim seansında araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan bu stratejiyi kendisi uygulamıştır.

Son öğretim seansı olan ve Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 7’de bu stratejinin kullanımına yönelik 1 soru hazırlanmıştır. Berna araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan ilk çözümünde bu stratejiyi uygulayabilmiştir (bkz. Şekil 3.34.). Ayşegül, Serkan ve Erdem ise bu soruya başka alternatif yenilikçi çözümler geliştirmişlerdir.

$$\frac{x}{x-7} + \frac{x-5}{x-7} = \frac{x}{x-7}$$
$$\frac{2x-5}{x-7} = \frac{x}{x-7}$$
$$(x-7) \cdot \left( \frac{2x-5}{x-7} \right) = (x-7) \cdot \left( \frac{x}{x-7} \right)$$
$$\frac{(2x-5)(x-7)}{x-7} = \frac{x(x-7)}{x-7}$$
$$2x-5 = 4x-28-5$$
$$2x-5 = 4x-33$$
$$-2x = -28$$
$$x = 28/2$$
$$x = 14$$

**Şekil 3. 34.** Berna, Öğretim seansı 7

Berna bu soruya 3 çözüm geliştirebilmiş ve değişkenleri birleştirme stratejisini kullandığı ikinci çözümünü tercih etmiştir. Bu öğretim seansı sonunda Berna’nın Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde değişkenle çarpma stratejisini rahatlıkla kullanabildiği söylenebilir. Nitekim Berna’nın puanı bu seansta ileri düzeyin üst sınırının çok daha üstüne çıkmıştır. Ayşegül ve Erdem’in de puanı Berna’ya yakın durumdadır. Serkan’ın puanı ise üst düzeye yakın olarak belirlenmiştir.

Katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyi açısından ileri düzeyde oldukları seanslarda bulunan bir diğer strateji ise benzer değişkenleri sadeleştirme stratejisidir.

### ***Benzer değişkenleri sadeleştirme***

Benzer değişkenleri sadeleştirme stratejisini katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde uygulayıp uygulayamadıklarını görebilmek amacı ile bu bölümde bu stratejinin kullanımına yönelik 2 soru bulunmaktadır.

Ayşegül

Erdem

Serkan

### Şekil 3.35. Öğretim seansı 5

Kesrin türünün değişmesi katılımcıların bu stratejiyi oluşturmalarını ve uygulamalarını etkilememiştir. SP stratejisini uygulamayı ise düşünmemişlerdir (bkz. Şekil 3.35.). Öğretim seansı 5'te çoklu strateji bilgi düzeyi açısından katılımcıların tamamı ileri düzey olarak belirlenmiştir. Bu seansta kullanılan stratejilerden bir diğeri ise değişkenleri düzenleyerek sadeleştirmedir.

#### ***Değişkenleri düzenleyerek sadeleştirme***

Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde Ayşegül ve Serkan bu stratejiyi kendileri oluştururken, Berna ve Erdem çözüm inceleme ihtiyacı duymuşlardır.

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 5'te ise katılımcıların tamamı araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan değişkenleri düzenleyerek sadeleştirme stratejisini kendileri uygulamışlardır (bkz. Şekil 3.36.). Öğretim seansı 5'te bu stratejinin kullanımına yönelik 3 soru bulunmaktadır.



Tercihleri de bu stratejiyi kullandıkları çözümlerden yana olmuştur. Bu öğretim seansı sonunda katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde değişkenleri düzenleyerek sadeleştirme stratejisini rahatlıkla kullanabildikleri söylenebilir. Bu düzeyde bulunan stratejilerden bir diğeri ise kesrin anlamı stratejisidir.

### ***Kesrin anlamı***

Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde ve Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde Serkan'ın bu stratejiyi uygulayabildiği belirlenmiştir. Diğer katılımcılar ise araştırmacı-öğretmenden yardım alarak bu stratejiyi uygulayabilmişlerdir. Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6'da katılımcıların bu stratejiyi uygulayıp uygulayamadıklarını belirlemek amacıyla 1 soru hazırlanmıştır.

Ayşegül ve Erdem ilk çözüm olarak SP stratejisini kullanarak çözümlerini tamamlamışlardır. Ardından araştırmacı-öğretmen tarafından çözümün ilk adımı gösterilerek incelemeleri istenmiştir (bkz. Şekil 3.38.).

$$\textcircled{5} \quad \frac{x}{x+6} + \frac{4x}{x+6} = 15$$

$$\frac{x}{x+6} = m \text{ olsun}$$

$$m + 4m = 15$$

$$5m = 15$$

$$m = 3$$

$$\frac{x}{x+6} = 3$$

$$x = 3(x+6)$$

$$x = 3x + 18$$

$$-2x = 18$$

$$x = -9$$

Gösterilen Çözüm

$$\frac{x}{x+6} = m, \quad \frac{4x}{x+6} = 4m$$

$$m + 4m = -5$$

$$5m = -5$$

$$m = -1$$

$$\frac{x}{x+6} = -1$$

$$x = -x - 6$$

$$2x = -6$$

$$x = -3$$

Yapılan Çözüm-Ayşegül

$$\frac{x}{x+6} + \frac{4x}{x+6} = -5$$

$$\frac{x}{x+6} = m$$

$$m + 4m = -5$$

$$5m = -5$$

$$m = -1$$

$$\frac{x}{x+6} = -1$$

$$x = -x - 6$$

$$2x = -6$$

$$x = -3$$

Yapılan Çözüm-Erdem

### **Şekil 3. 38. Öğretim seansı 6**

Her ikisi de çözümün ilk adımını inceledikten sonra devamını getirebilmişlerdir. Ancak Ayşegül çözümü tamamlama aşamasında öğretim seansı 4'tekine benzer bir karmaşa yaşayarak m dediği şeyi karıştırmış, x'e m dediğini düşünerek m'yi bulduğunda çözümü tamamladığını düşünmüştür. Bu öğretim seansı sonunda Ayşegül'ün Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde bu stratejiyi tam olarak anlamadığı söylenebilir. Erdem ise hatırlamadığı için kendisinin uygulayamadığını belirtmiştir.

Berna bu stratejinin kullanılabileceği soruda ilk çözümünde SP stratejisini kullanarak çözümünü tamamlamıştır. İkinci çözümünde ise kesrin anlamı stratejisini kendisi oluşturmuştur (bkz. Şekil 3.39.). Serkan ise ilk çözüm olarak bu stratejiyi kullanmıştır (bkz. Şekil 3.39.).

Yapılan Çözüm 1-Berna

Yapılan Çözüm 2-Berna

Yapılan Çözüm 1-Serkan

### Şekil 3. 39. Berna, Öğretim seansı 6

Berna ikinci çözümünü kendisi oluşturmuştur. İkinci çözümünü yaptıktan sonra iki çözümün sonuçlarının farklı olduğunu görmüş ve ilk çözümüne bakarak işlem hatası yaptığını fark edip düzeltmiştir. Sonuçların farklı olduğunu fark ettiğinde öncelikle ilk çözümüne bakmasına karşın iki çözümün de pratik olduğunu belirterek herhangi bir tercih yapmamıştır. Bu bölüm sonunda Ayşegül dışındaki katılımcıların bu stratejiyi Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde rahatlıkla uygulayabildikleri söylenebilir. Ancak öğretim seansı 6'da Serkan üst düzeyde bir katılımcı olarak belirlenirken diğer katılımcılar ileri düzeyde katılımcılar olarak belirlenmişlerdir. Bu durumun bu seansta Serkan'ın YAÇ'leri yapmasının yanısıra SP çözümleri de yapmaya devam etmesi ile ilgili olduğu görülmüştür. Ancak tercihleri YAÇ'lerden yanadır.

İşlem esnekliğinde katılımcıların çoklu strateji bilgilerinin yanısıra, bu stratejileri karşılaştırmak ve yapılan çözümler arasında bilinçli ve etkili tercihler yapabilmekte önemlidir ve bu tercihler zamanla değişim gösterebilir.

### 3.1.2.2 Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim süreci

Bu araştırma kapsamında içeriği ve amaçları farklı olan 7 öğretim seansı düzenlenmiştir (bkz. Tablo 2.5.). Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim sürecini belirlemek amacı ile klinik görüşmeler ve öğretim seanslarını uygulama esnasında hangi çözümü tercih ettikleri ve nedeni sorulmuştur. Katılımcıların verdikleri cevaplar incelenerek her bir klinik görüşme ve öğretim seansı için tercihleri ve tercihlerindeki değişim belirlenmiştir. Elde edilen verilere göre katılımcıların çözüm tercihlerine göre değişimi tablo 3.5.'te sunulmuştur.

**Tablo 3. 5. Tercih edilen çözüm frekansları**

	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Toplam
	1	2	3	4	5	6	7	
Ayşegül	7 YAÇ	5 YAÇ	2 SP, 3YAÇ	1 SPÖ, 2 SP, 3 YAÇ	6 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	1 SPÖ, 4 SP, 34 YAÇ
Berna	2 SP, 6 YAÇ	6 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	5 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	6 YAÇ	5 SP, 38 YAÇ
Erdem	3 SP, 4 YAÇ	1 SPÖ, 1 SP, 3 YAÇ	1 SP, 4 YAÇ	2 SP, 3 YAÇ	1 SP, 4 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	5 YAÇ	1 SPÖ, 9 SP, 28 YAÇ
Serkan	2 SP, 5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	2 SP, 35 YAÇ
Toplam	6 SP, 22 YAÇ	1 SPÖ, 1 SP, 19 YAÇ	4 SP, 17 YAÇ	1 SPÖ, 5 SP, 16 YAÇ	1 SP, 20 YAÇ	2 SP, 20 YAÇ	21 YAÇ	2 SPÖ, 20 SP, 135YAÇ

Tablo 3.5. incelendiğinde genel olarak yenilikçi alternatif stratejilerin kullanıldığı çözümlerin SPÖ stratejisi ve SP stratejisine göre katılımcılar tarafından çok daha yüksek sayıda tercih edildiği belirlenmiştir. Özellikle SP stratejisi tercih edilebilirliğini korumakla birlikte yenilikçi alternatif çözümler uygulama sonlarına doğru ön plana çıkmıştır.

Katılımcıların tercih nedenleri ise kişisel nedenler (KN), öğretimsel nedenler (ÖN) ve matematiksel nedenler (MN) olmak üzere kategorilere ayrılmıştır. Kişisel nedenler, sevmek sevmemek, istemek istememek gibi kişinin daha çok kendisine atfettiği nedenler olarak belirlenmiştir. Öğretimsel nedenler ise öğretmenimiz böyle gösterdi, aşına olduğum çözüm bu gibi kişinin daha çok eğitimi ile ilgili nedenler olarak belirlenmiştir. Matematiksel nedenler ise çözümün matematiksel olarak irdelenmesine dayalı oluşan daha kısa, daha kolay, daha az işlem yoğunluğu var, işlem hatası yapmadım gibi söylemlere dayalı olarak belirlenmiştir. Bu kapsamda Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'ın tercihlerindeki değişim çoklu strateji bilgi düzeylerindeki değişim, tercihleri ve tercih nedenleri ele alınarak incelenmiştir.

### 3.1.2.2.1. Ayşegül'ün bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim süreci

Ayşegül çoklu strateji bilgisi açısından öğretim seansı 1'de orta düzeyde, öğretim seansı 2, 3 ve 4'te üst düzeyde, öğretim seansı 5, 6 ve 7'de ileri düzeyde olan bir katılımcıdır. Tercihlerine bakıldığında ise sadece Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 3 ve 4'te SP stratejisini tercih etmiş, onun dışında bütün öğretim seanslarında YAÇ kullandığı çözümleri tercih etmiştir (bkz. Tablo 3.6.).

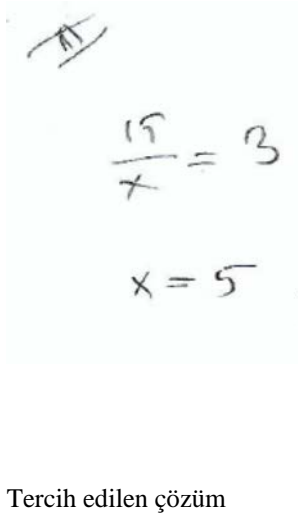
**Tablo 3. 6.** Ayşegül'ün çoklu stratejisi bilgisi ve tercihleri

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7
Çoklu strateji bilgisi	2,46	3,80	3,50	2,51	4,00	3,62	4,33
Tercihler	7 YAÇ	5 YAÇ	2 SP, 3YAÇ	1 SPÖ, 2 SP, 3 YAÇ	6 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ

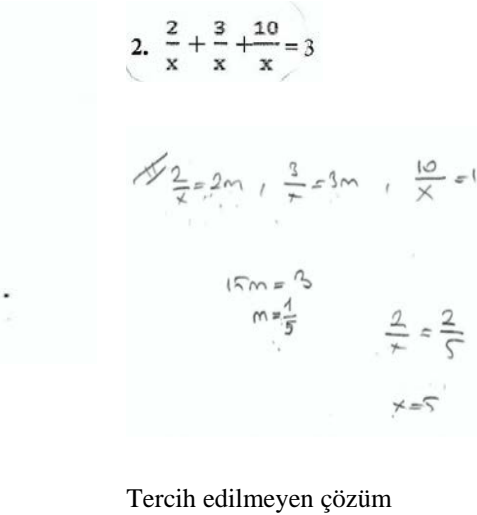
**Tablo 3. 6.** (Devam) *Ayşegül'ün çoklu stratejisi bilgisi ve tercihleri*

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7
Çoklu strateji bilgisi	2,46	3,80	3,50	2,51	4,00	3,62	4,33
Tercihler	7 YAÇ	5 YAÇ	2 SP, 3YAÇ	1 SPÖ, 2 SP, 3 YAÇ	6 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ
Tercih nedeni	2 ÖN 7 MN -	- 5 MN -	1 ÖN 5 MN -	4 ÖN 3 MN -	1 ÖN 5 MN 1 KN	- 5 MN -	- 5 MN -

Ayşegül'ün genel olarak bilinçli tercihlerde bulunduğu belirlenmiştir. Genellikle yenilikçi alternatif çözümleri tercih etmekle birlikte, bazı sorularda uzun adımlı, işlem yoğunluğu olan YAÇ kullanarak çözüm geliştirebilmesine rağmen kısa adımlı SP stratejisini kullandığı çözümü tercih etmiştir (bkz. Şekil 3.40.).



Tercih edilen çözüm



Tercih edilmeyen çözüm

“Pek fazla mantık yormaya gerek yok.”

(MN)

Ayşegül'ün Yorumu

**Şekil 3. 40.** *Ayşegül, Öğretim seansı 4*

Bu durum katılımcının efektif (etkili) çözümü fark edebildiğine ve işlem esneklik düzeyinin geliştiğine bir işarettir. Tercih nedenleri daha çok matematiksel olmakla birlikte öğretimsel nedenler de mevcuttur. Sadece öğretim seansı 5'te kişisel bir neden sunmuştur (bkz. Şekil 3.41.).

$$1. \frac{3}{x+1} + \frac{4}{2x+2} = -5$$

$$\frac{6}{2(x+1)} + \frac{4}{2(x+1)} = -5$$

$$\frac{10}{2(x+1)} = -5$$

$$10 = -10(x+1)$$

$$1 = -x-1$$

$$-x = 2$$

$$x = -2$$

“Yani basit... İlk akla gelecek.” (ÖN)

$$2. \frac{1}{2x+4} + \frac{4}{3x+6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{3(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{6(x+2)} + \frac{8}{6(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{11}{6(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$66 = 6(x+2)$$

$$11 = x+2$$

$$x = 9$$

“Ya ne bileyim. Bu daha garanti gibime geldi.” (KN)

Tercih edilen çözüm

Ayşegül’ün Yorumu

Tercih edilen çözüm

Ayşegül’ün Yorumu

### Şekil 3. 41. Ayşegül, Öğretim seansı 5

İlk çözümüne bakıldığında içerisinde çok sayıda yenilikçi strateji içeren YAÇ mevcuttur. Ayşegül bu çözümü tercih etmiştir ve aklına gelecek ilk çözüm olarak nitelendirmiştir. Bu durum bu stratejileri öğrendiğinin ve bu nedenle tercih ettiğinin bir göstergesidir. Diğer çözümde ise tercih sebebi olarak daha garanti olduğunu belirterek kişisel bir neden sunmuştur. Ayşegül’ü bilinçli tercihlerde bulunan ve efektif çözümleri tercih eden bir katılımcı olarak nitelendirebiliriz.


#### 3.1.2.2.2. Berna’nın bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim süreci

Berna da çoklu strateji bilgisi açısından öğretim seansı 1’de orta düzeyde, öğretim seansı 2, 3 ve 4’te üst düzeyde, öğretim seansı 5, 6 ve 7’de ileri düzeyde olan bir katılımcıdır. Berna Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 1 ve 3’te, ilk defa Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4’te ve ilk defa Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6’da SP stratejisini kullandığı çözümleri tercih etmiştir (bkz. Tablo 3.7.).

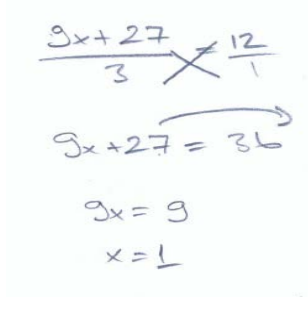
**Tablo 3. 7.** Berna'nın çoklu stratejisi bilgisi ve tercihleri

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7
Çoklu strateji bilgisi	2,10	3,75	4,00	2,62	4,00	3,57	4,62
Tercihler	3 SP, 5 YAÇ	6 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	5 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	6 YAÇ
Tercih nedeni	7 MN 1 ÖN	6 MN	6 MN	6 MN	5 MN	6 MN	6 MN

Tercihlerine bakıldığında SP stratejisini kullandığı çözümleri en çok tercih ettiği seans ilk öğretim seansıdır. Öğretim seansı 1'de 7 soru bulunmaktadır. Berna 2 soruda SP stratejisini kullandığı çözümleri tercih etmiştir. Genel olarak öğretim seansı 1'e bakıldığında YAÇ geliştirebildiği sorularda tercihi bu yönde olmuş, geliştiremediği sorularda ise çözümü tamamlayabildiği için SP stratejisini uyguladığı çözümleri tercih etmiştir. Üst düzeye çıktığı öğretim seansı 2'de ise bütün sorularda YAÇ stratejisini uygulayabildiği çözümleri tercih etmiştir. Yine ileri düzeyde olduğu öğretim seansı 3'te ise 1 soruda SP stratejisini uyguladığı çözümü tercih etmiştir. Berna'nın genel olarak bilinçli tercihlerde bulunduğu belirlenmiştir. Genellikle YAÇ'leri tercih etmekle birlikte, bazı sorularda uzun adımlı, işlem yoğunluğu olan YAÇ kullanarak çözüm geliştirebilmesine rağmen kısa adımlı SP stratejisini kullandığı çözümleri tercih etmiştir (bkz. Şekil 3.42.).



İlk çözüm



İkinci çözüm

"İm... şu an bana bu (İkinci çözüm) daha basit geldi... Çünkü işlem az." (MN)

Berna'nın Yorumu

**Şekil 3. 42.** Berna, Öğretim seansı 3

Bu durum katılımcının daha az işlem ve işlem yoğunluğu içeren efektif (etkili) çözümünü fark edebildiğine ve işlem esneklik düzeyinin geliştiğine bir işarettir. Tercih nedeni olarak ise işlem azlığını belirtmiştir. İkinci çözüm daha az adım sayısı içermektedir. Sayılar çok yüksek olmadığı için adım sayısının az olması çözümün daha hızlı yapılabilmesini sağlamıştır. Tercih nedenleri daha çok matematiksel olmakla birlikte sadece öğretim seansı 1’de öğretimsel bir neden sunmuştur (bkz. Şekil 3.43.).

“Benim kendi çözümlüm geliyor. Yine paydaları eşitleyip çapraz çarpım... İkisi de pratik. Yani ikisi de iyi.” (ÖN)

İlk çözüm

İkinci çözüm

Berna'nın Yorumu

### Şekil 3. 43. Berna, Öğretim seansı 1

İlk çözümüne bakıldığında ortak paranteze alma, benzer değişkenleri birleştirme gibi içerisinde çok sayıda yenilikçi strateji içeren YAÇ mevcuttur. Diğer çözüm ise SP stratejisini içermektedir. Berna iki çözüm arasında kararsız kalmış ve iki çözümü de pratik olarak nitelendirmiştir. İkinci çözümün bu soruya gerçekleştirdiği ikinci çözüm olmasına karşın ilk aklına gelen çözüm olarak nitelendirmiştir. Öğretim seansı 1’de ve öğretim seansı 3’teki çözümlerinde Berna öğretim seansı 1’de kararsız kalırken öğretim seansı 3’te daha az sayıda adım ve daha az işlem yoğunluğu içeren SP stratejisini kullandığı çözümü tercih etmiştir. Nitekim öğretim seansı 1’de çoklu strateji bilgisi açısından orta düzeyde olan Berna, öğretim seansı 3’te üst düzeye çıkmıştır. Bu durum Berna’nın zamanla bilinçli tercihlerde bulunmaya başladığının bir göstergesi olarak nitelendirilebilir. Nitekim Berna’yı da bilinçli tercihlerde bulunan ve efektif çözümleri tercih eden bir katılımcı olarak nitelendirebiliriz.

### 3.1.2.2.3. Erdem'in bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim süreci

Erdem çoklu strateji bilgisi açısından öğretim seansı 1'de orta düzeyde, öğretim seansı 2, 3 ve 4'te üst düzeyde, öğretim seansı 5, 6 ve 7'de ileri düzeyde olan bir katılımcıdır. Erdem'in öğretim seansı 7'ye kadar SP stratejisini uyguladığı çözümlerin tercihleri arasında olduğu belirlenmiştir (bkz. Tablo 3.8.).

**Tablo 3. 8.** Erdem'in çoklu stratejisi bilgisi ve tercihleri

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7
Çoklu strateji bilgisi	2,09	2,76	3,20	2,88	3,83	3,71	4,66
Tercihler	3 SP, 4 YAÇ	1 SPÖ, 1 SP, 3 YAÇ	1 SP, 4 YAÇ	2 SP, 3 YAÇ	1 SP, 4 YAÇ	1 SP, 6 YAÇ	5 YAÇ
Tercih nedeni	3 ÖN 4 MN	1 ÖN 4 MN	1 ÖN 4 MN	5 MN	5 MN	2 ÖN 5 MN	5 MN

Erdem ilk öğretim seanslarında ilk aklına gelen çözüm olarak nitelendirerek SPÖ stratejisini ya da SP stratejisini kullandığı çözümleri tercih etmiştir (bkz. Şekil 3.44.).

İlk çözüm

İkinci çözüm

Üçüncü çözüm

“Bu çözümler arasında ilk yaptığımı tercih ederdim. Çünkü bunu biraz düşünerek buldum. Yani daha sonradan buldum...” (ÖN)

Erdem'in yorumu

**Şekil 3. 44.** Erdem, Öğretim seansı 1

Bir sonraki soruda ve ilerleyen öğretim seanslarında ise (bkz. Şekil 3.45.) YAÇ stratejilerini kullandığı çözümleri tercih etmiştir.

$$4. \frac{2(x+1)}{7} + \frac{x+1}{7} = 6$$

$$2x+2 + x+1 = 42$$

$$3x+3 = 42$$

$$3x = 39$$

$$x = 13$$

İlk çözüm

$$\frac{2(x+1)}{7} + \frac{x+1}{7} = \frac{6}{1}$$

$$\frac{2(x+1)}{7} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{x+1}{7} = 2$$

$$x+1 = 14$$

$$x = 13$$

İkinci çözüm

“Bu sefer bu daha kolay geliyor. ... Neden dersem? Sürekli daha büyük sayılar çıkıyor bu tarafta. Bu tarafta daha küçük sayılar. İşlem hatası yapma olasılığım daha aşağıya iniyor. O yüzden artık bu taraftaki çözümü. Yani ikinci yaptığım çözümü tercih ederim.” (MN)

Erdem'in yorumu

Şekil 3. 45. Erdem, Öğretim seansı 1

Tercih nedenleri daha çok matematiksel olmakla birlikte öğretimsel nedenler de sunmuştur (bkz. Şekil 3.46.). Öğretim seansı 1’de matematiksel olarak iki çözümü yorumlamış ve YAÇ stratejisini kullandığı çözümü tercih etmiştir. Sonraki öğretim seanslarında ise kendi yaptığı çözümler olarak nitelendirerek YAÇ stratejisini kullandığı çözümleri tercih etmiş ve çözümleri kendine mal etmiştir. Bu durumu bu stratejileri öğrendiğinin bir göstergesi olarak nitelendirebiliriz.

$$1. \frac{3x+4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{6x+18}{3} = \frac{12}{1}$$

$$3x+4+5+6x+18 = 36$$

$$9x+27 = 36$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

İlk çözüm

$$\frac{3x+9}{3} + \frac{6x+18}{3} = \frac{12}{1}$$

$$\frac{3(x+3)}{3} + \frac{3(2x+6)}{3} = \frac{12}{1}$$

$$x+3+2x+6 = 12$$

$$3x+9 = 12$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

İkinci çözüm

$$\frac{3x+9}{3} + \frac{6x+18}{3} = \frac{12}{1}$$

$$\frac{1(3x+9) + 2(3x+9)}{3}$$

$$\frac{3(3x+9)}{3}$$

$$3x+9 = 12$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Üçüncü çözüm

“Bence benim yaptığım üçüncü çözüm yolu.” (ÖN)

Erdem'in yorumu

Şekil 3. 46. Erdem, Öğretim seansı 3

Ancak buna karşın öğretim seansı 7’ye kadar SP stratejisini kullandığı çözümler tercihleri arasındadır. Bu durumun nedeni, bazı sorularda uzun adımlı, işlem yoğunluğu

olan YAÇ kullanarak çözüm geliştirebilmesine rağmen kısa adımlı SP stratejisini kullandığı çözümü tercih etmesi olarak belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.47.).

$$2. \frac{-2}{x} + \frac{3}{x} + \frac{10}{x} = 3$$
$$\frac{15}{x} = 3$$
$$15 = 3x$$
$$x = 5$$

İlk çözüm

$$\frac{2x}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{10x}{x} = \frac{3x}{1}$$
$$15 = 3x$$
$$x = 5$$

İkinci çözüm

“Yine... yine ilk çözümü tercih ederim. Çünkü um... bütün paydaları eşitti. Toplama işlemi yapabileceğimi gördüm. Bu nedenle.” (MN)

Erdem’in yorumu

### Şekil 3. 47. Erdem, Öğretim seansı 4

Öğretim seansı 1’de (bkz. Şekil 3.44.) ve öğretim seansı 4’teki çözümleri (bkz. Şekil 3.47.) ele alındığında Erdem öğretim seansı 1’de SP stratejisini kullandığı çözümü tercih ederken öğretim seansı 4’te daha az işlem yoğunluğu içeren SP stratejisini kullandığı çözümü tercih etmiştir. Nitekim öğretim seansı 1’de çoklu strateji bilgisi açısından orta düzeyde olan Erdem, öğretim seansı 3’te üst düzeye çıkmıştır. Bu durum Erdem’in zamanla bilinçli tercihlerde bulunmaya başladığının bir göstergesi olarak nitelendirilebilir. Erdem’i de bilinçli tercihlerde bulunan ve efektif çözümleri tercih eden bir katılımcı olarak nitelendirebiliriz.

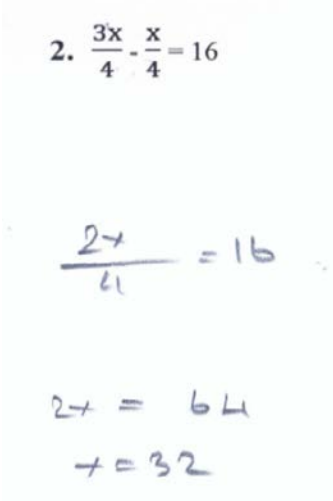
#### 3.1.2.2.4. Serkan’ın bilinçli tercihlerde bulunma durumlarının değişim süreci

Serkan çoklu strateji bilgisi açısından öğretim seansı 1’de üst düzeyde iken öğretim seansı 2’de ileri düzeye çıkmış, öğretim seansı 3 ve 4’te üst düzeye inmiştir. Öğretim seansı 5’te yeniden ileri düzeye çıkan Serkan öğretim seansı 6’da üst düzeye inmiş ve son öğretim seansını ileri düzeyde tamamlamıştır. Ancak, ilk öğretim seansı dışında tercihlerinin tamamı yenilikçi alternatif çözümü kullandığı çözümlerden yana olmuştur. Serkan öğretim seansı 1’de 2 soruda SP stratejisini kullandığı çözümü tercih etmiş, diğer öğretim seanslarında ise bütün tercihleri YAÇ stratejileri kullandığı çözümlerden yana olmuştur (bkz. Tablo 3.9.).

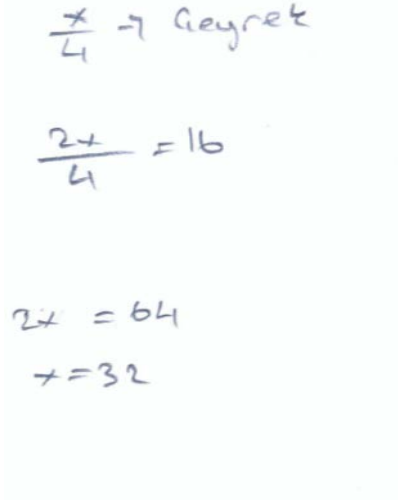
**Tablo 3. 9.** Serkan'ın çoklu stratejisi bilgisi ve tercihleri

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7
Çoklu strateji bilgisi	2,69	4,00	3,92	2,63	4,00	3,00	3,80
Tercihler	2 SP,	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ
Tercih nedeni	1 ÖN 6 MN	5 MN	5 MN	5 MN	1 ÖN 5 MN	2 ÖN 3 MN	5 MN

SP stratejisini tercih etme nedenleri ilk soruda (bkz. Şekil 3.48.) öğretimsel ve diğer soruda matematiksel olarak belirlenmiştir.



İlk çözüm



İkinci çözüm

“İl... Ben burada bunu şey yapmazdım. Çünkü burada... Yani belki göremezdim bunu.”  
(ÖN)

Serkan'ın yorumu

**Şekil 3. 48.** Serkan, Öğretim seansı 1

İlk soruda ikinci çözümü göremeyeceğini belirterek SP stratejisini kullandığı çözümü tercih ederken (bkz. Şekil 3.48.), diğer soruda zorlandığını belirterek SP stratejisini kullandığı çözümü tercih etmiştir (bkz. Şekil 3.49.).

$$7. \frac{2(x+3)}{5} + \frac{4(x+2)}{5} = \frac{4(x+3)}{15}$$

(3) (3)

$$6x + 18 + 12x + 24 = 4x + 12$$

$$18x + 42 = 4x + 12$$

$$18x - 4x = 12 - 42$$

$$14x = -30$$

$$x = -15/7$$

$$\frac{2(x+3)}{5} - \frac{4(x+3)}{15} = -\frac{4(x+3)}{5}$$

$$\frac{2(x+3)}{15} = -\frac{4(x+3)}{5}$$

$$x+3 = -6x-12$$

$$7x = -15$$

$$x = -15/7$$

“Ben ilk yaptığımı tercih ederdim. Benim için çok zor bu soru (güler)... Yani bilmiyorum. Burada zorlandım. Orada zorlanmadım. Yani daha rahat çözdüm orada. O yüzden onu tercih ederdim” (MN)

İlk çözüm

İkinci çözüm

Serkan'ın yorumu

### Şekil 3. 49. Serkan, Öğretim seansı 1

Tercih nedenleri daha çok matematiksel olarak belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.49., Şekil 3.50. ve Şekil 3.51.).

$$2. \frac{x+2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{5x+15}{3} = 12$$

$$\frac{x+2 + 1 + 5x+15}{3} = 12$$

$$6x + 18 = 36$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

$$\frac{x+2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{5x+15}{3} = 12$$

$$\frac{x+2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5(x+3)}{3} = 12$$

$$\frac{x+3}{3} + \frac{5(x+3)}{3} = 12$$

$$\frac{6(x+3)}{3} = 12$$

$$4(x+3) = 36$$

$$x+3 = 6$$

$$x = 3$$

“ Im... Bu (ikinci çözüm) daha kolay oldu.” (MN)

İlk çözüm

İkinci çözüm

Yapılan yorum

### Şekil 3. 50. Serkan, Öğretim seansı 2

Ancak, Serkan'ın matematiksel yorumlar yapmasına karşın daha çok adımlı ve daha fazla işlem yoğunluğu içeren YAÇ'leri daha az adımlı ve daha az yoğun işlem içeren SP stratejisi ile yaptığı çözümlere tercih ettiği görülmüştür (bkz. Şekil 3.51.).

$$1. \frac{3x+4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{6x+18}{3} = 12$$

$$3x+4+5+6(x+3) = 36$$

$$3x+9+6(x+3) = 36$$

$$3(x+3)+6(x+3) = 36$$

$$9(x+3) = 36$$

$$x+3 = 4$$

$$x = 1$$

$$\frac{3x+4+5+6x+18}{3} = 12$$

$$\frac{9x+27}{3} = 12$$

$$9x+27 = 36$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

“ İlk çözümü... Orada sayımı fazla büyütmeden çözdüğüm için.” (MN)

İlk çözüm

İkinci çözüm

Yapılan yorum

### Şekil 3. 51. Serkan, Öğretim seansı 3

Bu durumda Serkan'ın çoklu strateji bilgisinde ileri düzeye kadar çıkan bir katılımcı olmasına karşın efektif (etkili) bir çözücü olmadığını belirtebiliriz.

$$1. \frac{x}{x-7} + \frac{x-5}{x-7} = 4 - \frac{5}{x-7}$$

$$\frac{x}{x-7} + \frac{x-5}{x-7} = \frac{4x-28}{x-7} - \frac{5}{x-7}$$

$$2x-5 = 4x-33$$

$$33-5 = 4x-2x$$

$$28 = 2x$$

$$14 = x$$

$$\frac{x}{x-7} + \frac{x-5}{x-7} = 4 - \frac{5}{x-7}$$

$$\frac{x}{x-7} + \frac{x}{x-7} = 4$$

$$\frac{x}{x-7} + \frac{x-5}{x-7} + \frac{5}{x-7} = 4$$

$$\frac{2x}{x-7} = 4$$

$$2x = 2x - 14$$

$$x = 14$$

“Sanırım en sonuncu yaptığımı tercih ederdim.. Neden tercih ederdim? Çünkü, burada zaten aynı sayılar ve çıkan sonuçta küçük ve direk toplayıp içler dışlar çarpımı yapabiliyordum. Daha kolay.”(MN)

İlk çözüm

İkinci çözüm

Üçüncü çözüm

Yapılan yorum

### Şekil 3. 52. Serkan, Öğretim seansı 7

Ancak bazı sorularda daha kısa adımlı ve daha az işlem yoğunluğu içeren YAÇ'leri tercih edebilmiştir (bkz. Şekil 3.52.).

Katılımcıların tercihlerini etkileyen durumlardan bir diğeri ise tercih ettikleri çözümleri kendilerinin uygulayabilme durumlarıdır. Bu durum ise işlem esnekliğinin üçüncü bileşenini oluşturmaktadır.

### 3.1.2.3. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma bu tercihlerini uygulayabilme durumlarının değişim süreci

Bu araştırma kapsamında içeriği ve amaçları farklı olan 7 öğretim seansı düzenlenmiştir (bkz. Tablo 2.6.) ve katılımcıların yenilikçi stratejileri fark etmeleri, anlamaları ve uygulayabilmeleri amacıyla çözümlü örnekler kullanılmıştır. Bu esnada uygulamalar esnasında katılımcılara gösterilen çözüm frekansları tablo 3.10'da sunulmuştur.

**Tablo 3. 10. Gösterilen çözüm sayısı**

	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Toplam
	1	2	3	4	5	6	7	
Ayşegül	3	2	2	4	4	0	1	16
Berna	6	3	4	3	5	2	0	23
Erdem	3	1	5	2	3	2	4	20
Serkan	1	0	0	1	4	1	1	8
Toplam	13	6	11	10	16	5	6	67

Tablo 3.10. incelendiğinde Serkan en az sayıda çözüm inceleme ihtiyacı duyan katılımcı, Berna ise en çok sayıda çözüm inceleme ihtiyacı duyan katılımcı olarak belirlenmiştir. Serkan incelediği çözümlerin yarısını öğretim seansı 5'te incelemiştir. En çok çözüm inceleyen Berna ise en fazla öğretim seansı 1'de çözüm incelemiştir. Ayşegül en fazla öğretim seansı 4 ve 5'te çözüm inceleme ihtiyacı duyarken en az öğretim seansı 7'de çözüm incelemiştir. Erdem ise en fazla öğretim seansı 3'te, en az öğretim seansı 2'de çözüm incelemiştir. Öğretim seansı 5, katılımcılar tarafından en çok çözüm inceleme ihtiyacı duyulan, öğretim seansı 6 ise katılımcılar tarafından en az çözüm inceleme ihtiyacı duyulan öğretim seansı olarak belirlenmiştir. Gösterilen çözümlerin nitelikleri ise adım sayısına bağlı olarak değişmektedir (bkz. Tablo 3.11).

**Tablo 3. 11. Gösterilen çözüm sayısı ve niteliği**

	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Öğretim seansı	Toplam
	1	2	3	4	5	6	7	
Ayşegül	3 BA	1 BA 1 İA	2 İA	3 BA 1 İA	1 BA 1 ÜA 1 TM	0	1 İA	8 BA 5 İA 1 ÜA 1 TM
Berna	3 BA 3 TM	1 BA 1 İA 1 TM	2 BA 1 İA 1 ÜA	3 BA	1 BA 1 İA 1 TM	1 İA 1 TM	0	10 BA 4 İA 1 ÜA 6 TM
Erdem	2 BA 1 TM	1 TM	2 BA 3 İA	2 BA	1 BA 1 İA 1 TM	1 BA 1 İA	3 BA 1 TM	11 BA 5 İA 4 TM
Serkan	1 BA	0	0	1 BA	1 BA 2 İA 1 TM	1 ÜA	1 TM	3 BA 2 İA 1 ÜA 2 TM
Toplam	9 BA 4 TM	2 BA 2 İA 2 TM	4 BA 6 İA 1 ÜA	9 BA 1 İA	4 BA 4 İA 1 ÜA 4 TM	1 BA 2 İA 1 ÜA 1 TM	3 BA 1 İA 2 TM	32 BA 16 İA 3 ÜA 13 TM

(BA: Başlangıç adımı, İA: İkinci adım, ÜA: Üçüncü adım, TM: Tamamı)

Tablo 3.11. incelendiğinde katılımcılar genellikle çözümün ilk adımını ya da ikinci adımını gördükten sonra devamını getirebilmişlerdir. Sadece 13 çözümün tamamını görme ihtiyacı duymuşlardır.

### **3.1.2.3.1. Ayşegül'ün bilinçli tercihlerde bulunma ve uygulayabilme durumlarının değişim süreci**

Uygulamalar esnasında Ayşegül'ün çoklu strateji bilgisi değişim süreci, gösterilen çözüm frekansı ve çözümleri arasındaki tercihleri Tablo 3.12.'de sunulmuştur.

**Tablo 3. 12.** Ayşegül'ün çoklu stratejisi bilgisi, gösterilen çözüm sayısı ve tercihleri

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7
Çoklu strateji bilgisi	2,46	3,80	3,50	2,51	4,00	3,62	4,33
Gösterilen çözüm sayısı	3	2	2	4	4	0	1
Tercihler	7 YAÇ	5 YAÇ	2 SP, 3YAÇ	1 SPÖ, 2 SP, 3 YAÇ	6 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ

Genel olarak bakıldığında öğretim seanslarına göre incelediği çözüm frekansları arasında düzenli bir ilişki söz konusu değildir. Tercihlerinde ise ağırlıklı olarak yenilikçi alternatif stratejilerin kullanıldığı çözümleri tercih etmiştir. Ayşegül en çok çözümü Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşan öğretim seansı 4 ve 5'te incelemiştir (bkz. Şekil 3.53). Yenilikçi stratejileri oluşturabilmek için genellikle çözüm inceleme ihtiyacı duymuştur. Denklemlerde kullanılan kesir türünün değişmesi incelenen çözüm sayısını etkilemiş olabilir.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 6 \\ & \frac{3}{x} = \frac{6}{1} \\ & \frac{3}{x} = \frac{6x}{x} \\ & 3 = 6x \\ & x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

İlk yapılan çözüm

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 6 \\ & \frac{1}{x} = m \text{ olsun} \\ & \dots \end{aligned}$$

Gösterilen çözüm

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 6 \\ & \frac{1}{x} = m \quad \frac{2}{x} = 2m \\ & 2m + m = 6 \\ & 3m = 6 \\ & m = 2 \\ & x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

İkinci yapılan çözüm

“Birinci... Hım... çünkü ya ne bileyim daha çok bilindik. Daha ilk akla gelen. Daha böyle klasik yani o klasik.”

Ayşegül'ün yorumu

**Şekil 3. 53.** Ayşegül, Öğretim seansı 4

İlk defa Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşan öğretim seansı 4'te tercihleri değişkenlik gösterirken öğretim seansı 5'te tercihlerinin tamamı yenilikçi alternatif çözümlerden yana olmuştur (bkz. Şekil 3.54.)

$$2. \frac{1}{2x+4} + \frac{4}{3x+6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{3(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{6(x+2)} + \frac{8}{6(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{11}{6(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$6 \cdot 6 = 6(x+2)$$

$$x+2 = 11$$

$$x = 9$$

$$\frac{1}{2x+4} + \frac{4}{3x+6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{3(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{6(x+2)} + \frac{8}{6(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$(x+2) \cdot (- \dots)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{3} = x+2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{6} + \frac{8}{6} = \frac{x+2}{6}$$

$$\frac{11}{6} = \frac{x+2}{6}$$

$$x+2 = 11$$

$$x = 9$$

İki... Sanırım bunu tercih ederim (ilk çözüm)...

Ya ne bileyim. Bu daha garanti gibime geldi. Çünkü ben şurada mesela, u... şu hayır x artı 2 ye mesela kesirli olmayan yani, direk x artı 2 ile x artı 2 yi götürürüm. Şunu yapmazdım."

İlk yapılan çözüm

Gösterilen çözüm

İkinci yapılan çözüm

Ayşegül'ün yorumu

### Şekil 3. 54. Ayşegül, Öğretim seansı 5

Nitekim çoklu strateji bilgisi açısından öğretim seansı 4'te üst düzeyde iken öğretim seansı 5'te hızlı bir yükselişle ileri düzeye çıkmıştır. Çünkü SP stratejisinden ziyade YAÇ kullanmıştır. Ancak, gösterilen çözüm sayısı her iki seansta da aynıdır. Çoklu strateji bilgisi açısından gösterilen çözümlerin etkili olduğu çözümler puanlamaya dâhil edilmediği için Ayşegül'ün yenilikçi stratejileri kendisinin uyguladığı ve tercih ettiği söylenebilir. Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6'da çözüm inceleme ihtiyacı duymamıştır.

#### 3.1.2.3.2. Berna'nın bilinçli tercihlerde bulunma ve uygulayabilme durumlarının değişim süreci

Uygulamalar esnasında Berna'nın çoklu strateji bilgisi değişim süreci, gösterilen çözüm frekansı ve çözümleri arasındaki tercihleri tablo 3.13.'te sunulmuştur.

**Tablo 3. 13.** Berna'nın çoklu stratejisi bilgisi, gösterilen çözüm sayısı ve tercihleri

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7
Çoklu strateji bilgisi	2,10	3,75	4,00	2,62	4,00	3,57	4,62
Gösterilen çözüm sayısı	6	3	4	3	5	2	0
Tercihler	2 SP, 5 YAÇ	6 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	5 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	6 YAÇ

Tablo 3.13. incelendiğinde Berna en çok çözümü çoklu strateji bilgisi açısından orta düzeyde olduğu öğretim seansı 1'de incelemiştir. Son öğretim seansında ise üst düzeyde olmakla birlikte çözüm inceleme ihtiyacı duymamıştır. Yenilikçi stratejileri oluşturabilmek için genellikle çözüm incelemiştir. Denklemlerde kullanılan kesir türünün değişmesi incelenen çözüm sayısını etkilememiştir. Genel olarak bakıldığında öğretim seanslarına göre incelediği çözüm frekansları arasında düzenli bir ilişki söz konusu değildir. Tercihlerinde ise ağırlıklı olarak YAÇ'yi tercih etmiştir. Ancak, SP stratejisini kullandığı çözümlerde tercihleri arasında mevcuttur. Bu durumun temel nedeni bazı çözümlerde her iki çözümünde iyi olarak nitelendirilmesidir. SP stratejisinin kullanıldığı çözümü en çok tercih ettiği seans ise öğretim seansı 1'dir.

Berna yenilikçi stratejileri kullanmaya başlamasıyla beraber genellikle daha kısa olduğunu ve daha az işlem içerdiğini belirterek YAÇ'leri tercih etmiş ve ilk öğretim seansı ile birlikte uygulamaya başlayarak tercihlerine bu yönde devam etmiştir (bkz. Şekil 3.55.).

$$3. \frac{3(x+5)}{5} + \frac{x+5}{5} = 16$$

$$\frac{3x+15}{5} + \frac{x+5}{5} = 16$$

$$\frac{4x+20}{5} = 16$$

$$4x+20 = 80$$

$$4x = 60$$

$$x = 15$$

$$\frac{3(x+5)}{5} + \frac{x+5}{5} = 16$$

$$\frac{4(x+5)}{5} = 16$$

$$\frac{4(x+5)}{5} = 16$$

$$\frac{4x+20}{5} = 16$$

$$4x+20 = 80$$

$$4x = 60$$

$$x = 15$$

“Im... benim yaptığım çözüm daha böyle uzun. İşte im... şey eşitliyorsun, sonra topluyorsun falan. Burada direkt im... karşı taraftakini bu tarafa aktarmış. Yani daha pratik bir çözüm.”

İlk yapılan çözüm

Gösterilen çözüm

İkinci yapılan çözüm

Berna'nın yorumu

### Şekil 3. 55. Berna, Öğretim seansı 1

Bazı sorulara ise YAÇ geliştirmekte zorlandığı için SP stratejisini kullanarak tek çözüm geliştirmiş ve tercihi de bu yönde olmuştur. Ya da iki çözüm arasında tercih yapamamıştır (bkz. Şekil 3.56.).

$$1. \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 6$$

$$\frac{3}{x} = 6$$

$$6x = 3$$

$$x = 3/6$$

$$x = 1/2$$

$$① \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 6$$

$$\frac{1}{x} = m \text{ olsun}$$

$$\dots$$

$$2m + m = 6$$

$$3m = 6$$

$$m = 6/3$$

$$m = 2$$

$$\frac{1}{x} = 2$$

$$x = 1/2$$

“Im... ikisi de kolay.”

İlk yapılan çözüm

Gösterilen çözüm

İkinci yapılan çözüm

Berna'nın yorumu

### Şekil 3. 56. Berna, Öğretim seansı 4

Öğretim seansları kapsamında Berna çoklu strateji bilgisi açısından orta düzeyden üst düzeye, üst düzeyden ileri düzeye çıkmıştır. Yenilikçi stratejilerin kullanıldığı çözümleri ilk öğretim seansından itibaren daha kısa, daha kolay ya da daha az işlem gerektirdiğini belirterek tercih etmiş ve uygulayabildiğinden dolayı da çoklu strateji bilgisi açısından ilk klinik görüşmede temel düzeyde olan Berna son öğretim seansında ileri düzeye çıkmıştır.

### 3.1.2.3.3. Erdem'in bilinçli tercihlerde bulunma ve uygulayabilme durumlarının değişim süreci

Uygulamalar esnasında Erdem'in çoklu strateji bilgisi değişim süreci, gösterilen çözüm frekansı ve çözümleri arasındaki tercihleri tablo 3.14'te sunulmuştur.

**Tablo 3. 14.** Erdem'in çoklu stratejisi bilgisi, gösterilen çözüm sayısı ve tercihleri

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7
Çoklu strateji bilgisi	2,09	2,76	3,20	2,88	3,83	3,71	4,66
Gösterilen çözüm sayısı	3	1	5	2	3	2	4
Tercihler	3 SP, 4 YAÇ	1 SPÖ, 1 SP, 3 YAÇ	1 SP, 4 YAÇ	2 SP, 3 YAÇ	1 SP, 4 YAÇ	1 SP, 6 YAÇ	5 YAÇ

Tablo 3.14. incelendiğinde Erdem en çok çözümü çoklu strateji bilgisi açısından üst düzeyde olduğu öğretim seansı 3'te incelemiştir. En az çözümü ise öğretim seansı 2'de incelemiştir. YAÇ'leri oluşturabilmek için genellikle çözüm inceleme ihtiyacı duymuştur (bkz. Şekil 3.57.). Denklemlerde kullanılan kesir türünün değişmesi incelenen çözüm sayısını etkilememiştir. Genel olarak bakıldığında, öğretim seanslarına göre incelediği çözüm frekansları arasında düzenli bir ilişki söz konusu değildir.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{1} + \frac{9}{5} = 6$$

$$\frac{3x}{2} + \frac{9}{5} = 6$$

$$15x + 18 = 60$$

$$3(5x + 6) = 60$$

$$5x + 6 = 20$$

$$5x = 14$$

$$x = \frac{14}{5}$$

İkinci yapılan çözüm

#### Gösterilen Çözüm 1

$$\textcircled{2} \frac{x}{2} + \frac{3}{5} + \frac{x}{1} + \frac{6}{5} = 6$$

$$(5) (2) (40) (2)$$

$$\frac{5x}{10} + \frac{6}{10} + \frac{10x}{10} + \frac{12}{10} = 6$$

....

#### Gösterilen çözüm 2

$$\textcircled{2} \frac{x}{2} + \frac{3}{5} + \frac{x}{1} + \frac{6}{5} = 6$$

$$(5) (2) (40) (2)$$

$$\frac{5x}{10} + \frac{6}{10} + \frac{10x}{10} + \frac{12}{10} = 6$$

$$\frac{5x+6}{10} + \frac{10x+12}{10} = 6$$

---

Gösterilen çözüm

$$\frac{x}{2} + \frac{3}{5} + \frac{x}{1} + \frac{6}{5} = 6$$

$$(5) (2) (10) (2) (10)$$

$$5x + 6 + 10x + 12 = 60$$

$$\frac{5x+6}{10} + \frac{10x+12}{10} = \frac{6}{1}$$

$$5x + 6 \cdot (1+2) = 60$$

$$5x + 6 \cdot 3 = 60$$

$$5x + 6 = 20$$

$$5x = 14$$

$$x = \frac{14}{5}$$

Üçüncü yapılan çözüm

“İkinci çözümü tercih ederdim. ... İm... üçüncü çözüm yani im... aslında baktığın zaman bile yani zorlandığım bir çözüm oldu. Onun dışında payda eşitlemekle de uğraşmak istemezdim. Çünkü büyük sayılar çıktı tekrardan. İm... baktığım zaman, kendi bulduğum çözüm oldu. Yani zorlanmadan baktığım zaman yapabildiğim bir çözüm olduğu için bunu tercih ederdim.”

Erdem'in yorumu

### Şekil 3. 57. Erdem, Öğretim seansı 3

Tercihlerinde ise SP stratejisinin kullanıldığı çözümler yerini korumakla birlikte ağırlıklı olarak YAÇ'leri tercih etmiştir.

Öğretim seansları kapsamında Erdem çoklu strateji bilgisi açısından orta düzeyden üst düzeye, üst düzeyden ileri düzeye çıkmıştır. SP stratejisinin kullanıldığı çözümlerin yanı sıra ağırlıklı olarak ilk öğretim seansından itibaren YAÇ'leri daha kısa, daha kolay ya da daha az işlem gerektirdiğini belirterek tercih etmiş ve uygulayabildiği için de çoklu strateji bilgisi açısından ilk klinik görüşmede temel düzeyde olan Erdem son öğretim seansında ileri düzeye çıkmıştır.

#### 3.1.2.3.4. Serkan'ın bilinçli tercihlerde bulunma ve uygulayabilme durumlarının değişim süreci

Uygulamalar esnasında Serkan'ın çoklu strateji bilgisi değişim süreci, gösterilen çözüm frekansı ve çözümleri arasındaki tercihleri tablo 3.15'te sunulmuştur.

**Tablo 3. 15. Serkan'ın çoklu stratejisi bilgisi, gösterilen çözüm sayısı ve tercihleri**

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7
Çoklu strateji bilgisi	2,69	4,00	3,92	2,63	4,00	3,00	3,80
Gösterilen çözüm sayısı	1	0	0	1	4	1	1
Tercihler	2 SP, 5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ	5 YAÇ

Tablo 3.15. incelendiğinde Serkan en az çözüm inceleme ihtiyacı duyan katılımcı olmuştur. Birçok stratejiyi kendisi oluşturmakla birlikte en çok çözümü Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 5'te inceleme ihtiyacı duymuştur (bkz. Şekil 3.58).

**Gösterilen Çözüm**

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 8$$

$$\frac{x}{2} \Rightarrow \text{yarım olsun}$$

**Çözüm 2**

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 8$$

$$\frac{x}{2} \rightarrow \text{yarım}$$

$$\frac{x}{4} \rightarrow \text{çeyrek}$$

$$\frac{x}{4} = 8$$

$$x = 32$$

Öğretim seansı 1

**Gösterilen Çözüm**

$$\textcircled{4} \frac{1}{2x+6} + \frac{x-2}{3x+9} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$(x+3) \cdot \left( \frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-2}{3(x+3)} \right) = (x+3) \cdot \left( \frac{2x-1}{x+3} \right)$$

**Çözüm 2**

$$\cancel{(x+3)} \left( \frac{1}{2\cancel{(x+3)}} + \frac{x-2}{3\cancel{(x+3)}} \right) = \cancel{(x+3)} \left( \frac{2x-1}{\cancel{x+3}} \right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{x-2}{3} = 2x-1$$

$$137 \quad 127 \quad 16)$$

$$3+2x-4 = 12x-6$$

$$2x-1=12x-6$$

$$5=10x$$

$$\frac{1}{2} = x$$

Öğretim seansı 6

**Gösterilen Çözüm**

$$\frac{25}{x-5} + \frac{7x-10}{5-x} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{25}{x-5} + \frac{7x-10}{-(x-5)} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{25}{x-5} + \frac{-(10-7x)}{-(x-5)} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{25}{x-5} + \frac{10-7x}{x-5} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{35-7x}{x-5} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{-7(x-5)}{x-5} + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$-7 + \frac{12x+20}{2x} = 4$$

$$\frac{12x+20}{2x} = 11$$

$$12x+20 = 22x$$

$$10x = 20$$

$$x = 2$$

Öğretim seansı 7

**Şekil 3. 58. Serkan, Öğretim seansı 1,6 ve 7**

Genellikle çözümün ilk adımlarını gördükten sonra devamını getirebilmiştir. Öğretim seansı 7’de olduğu gibi bazı sorularda çözümün tamamı Serkan’a incelemesi için gösterilmiştir. En çok çözümü değişkenle çarpma stratejisinin kullanılacağı sorularda görme ihtiyacı duymuştur (bkz. Şekil 3.59.).

$$1. \frac{1}{2x+4} + \frac{4}{3x+6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{3(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3+8}{6(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{11}{6(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$66 = 6(x+2)$$

$$11 = x+2$$

$$9 = x$$

Yapılan çözüm

$$\textcircled{1} \frac{1}{2x+4} + \frac{4}{3x+6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{3(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{6(x+2)} + \frac{8}{6(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$(x+2) \cdot \dots$$

Gösterilen çözüm 1

$$\textcircled{1} \frac{1}{2x+4} + \frac{4}{3x+6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{3(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{6(x+2)} + \frac{8}{6(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$(x+2) \cdot \left( \frac{3}{6(x+2)} + \frac{8}{6(x+2)} \right) = \frac{1}{6} \cdot (x+2)$$

$$\frac{3}{6} + \frac{8}{6} = \frac{x+2}{6}$$

$$11 = x+2$$

$$9 = x$$

Gösterilen çözüm 2

“Yani bu benim yaptığım işlemden daha kolay olmuş sanırım. Çünkü, burada bana payda da bilinmeyenle uğraşmak daha zor geliyor. Yani pay kısmında olunca bilinmeyen daha rahat yapabildiğim için... Bu çözümü görebilseydim bunu tercih ederdim.” Serkan’ın yorumu

Şekil 3. 59. Serkan, Öğretim seansı 5

Öğretim seansları kapsamında Serkan birçok stratejiyi kendisi oluşturduğu için çoklu strateji bilgisi açısından üst düzeyden birden ileri düzeye çıkmış, ardından üst düzeye inmiş ve ileri düzey ve üst düzey arasında değişimler gösterirken son öğretim seansını diğer katılımcılar gibi ileri düzeyde tamamlamıştır. YAÇ’leri ilk öğretim seansından itibaren daha kısa, daha kolay ya da daha az işlem gerektirdiğini belirterek tercih etmiş ve uygulayabildiği için de çoklu strateji bilgisi açısından ilk klinik görüşmede orta düzeyde olan Serkan son öğretim seansında ileri düzeye çıkmıştır.

### 3.1.3. Son klinik görüşmeden elde edilen bulgu ve yorumlar

Bu bölümde katılımcıların karşılaştırmalı olarak öğretim seanslarından yaklaşık 1 hafta sonra son klinik görüşme sorularına verdikleri cevapların analizi sonucunda işlem esneklik durumları değerlendirilmiştir.

Bu amaçla toplam 9 soru (bkz. Ek 5. örnek sorular) sorulmuştur. Elde edilen veriler cebirsel kesirli ifadeler içeren denklemlere dair çoklu strateji bilgisi, bu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma ve tercih edilen çözümü uygulayabilme şeklinde 3 tema altında analiz edilmiştir.

#### 3.1.3.1. Katılımcıların çoklu strateji bilgileri

Katılımcıların 9 soruya son klinik görüşmede verdikleri doğru ve yanlış cevap frekansları ve çözüm kategorilerinin dağılımı tablo 3.16.'da sunulmuştur. Yapılan bütün çözümler herhangi bir kategoriye dâhil edilmiştir.

**Tablo 3. 16.** Katılımcıların son klinik görüşmedeki çoklu strateji bilgisi durumları

	Düzye	Çözüm sayısı	Doğru-Yanlış-Eksik-Boş
Ayşegül	3,70	27	27 D
Berna	3,76	20	20 D
Erdem	3,00	26	26 D
Serkan	3,19	26	26 D

Katılımcıların çoklu strateji bilgilerine ilişkin belirlenen kategorilere göre mevcut durumları ele alındığında 2 katılımcı üst düzeyde, 2 katılımcı ileri düzeyde çoklu strateji bilgisine sahip olarak belirlenmiştir. Erdem ve Serkan'ın ileri düzeyde olduğu, Ayşegül ve Berna'nın ise üst düzeyde olduğu görülmüştür.

##### 3.1.3.1.1. Temel düzey

Son klinik görüşme verilerine göre bu kategoride de hiçbir katılımcı bulunmamaktadır.

##### 3.1.3.1.2. Orta düzey

Son klinik görüşme verilerine göre bu kategoride de hiçbir katılımcı bulunmamaktadır.

### 3.1.3.1.3. Üst düzey

Erdem 9 soruya 4 SPÖ, 6 SP ve 16 YAÇ geliştirebilmiş, Serkan ise 9 soruya 4 SPÖ, 5 SP ve 17 YAÇ geliştirebilmiştir. Erdem ve Serkan'a ait çözümler Şekil 3.60.'da sunulmuştur.

The image shows two handwritten mathematical solutions. The left solution, labeled 'Serkan, Son klinik görüşme', shows the equation  $\frac{x+5}{3} - \frac{x+5}{9} = 16$ . It is multiplied by 9 to get  $3(x+5) - \frac{x+5}{3} = 144$ , then  $2(x+5) = 144$ , leading to  $x+5 = 72$  and  $x = 67$ . The right solution, labeled 'Erdem, son klinik görüşme', shows the equation  $\frac{3}{(x-2)} - \frac{2}{(x+2)} = \frac{4}{(x+2)}$ . It is simplified to  $\frac{3}{(x-2)} = \frac{4+2}{(x+2)}$ , then  $\frac{3}{(x-2)} = \frac{6}{(x+2)}$ , leading to  $\frac{1}{(x-2)} = \frac{2}{(x+2)}$ , then  $2x - 4 = x + 2$ , and finally  $x = 6$ .

Serkan, Son klinik görüşme

Erdem, son klinik görüşme

### Şekil 3. 60. Serkan ve Erdem'e ait çözüm örnekleri

Serkan çözümünde ortak paranteze alma, değişkenleri birleştirme ve önce bölme stratejisini kullanarak YAÇ gerçekleştirmiştir. Erdem ise benzer değişkenleri birleştirmiş, ardından önce bölme stratejisini kullanarak YAÇ uygulamıştır. Katılımcılardan Erdem ve Serkan ağırlıklı olarak yenilikçi alternatif çözümler geliştirdikleri için işlem esneklik düzeyleri üst düzey olarak belirlenmiştir.

### 3.1.3.1.4. İleri düzey

İleri düzey katılımcıların cebirsel kesirli denklemleri içeren sorulara çözüm geliştirebilmek için SP stratejisini terk ederek olası bütün alternatif yenilikçi stratejileri kullanmalarını ve YAÇ'leri yapmalarını içermektedir.

Ayşegül 9 soruya 7 SP ve 20 YAÇ geliştirebilirken, Berna 9 soruya 3 SP ve 17 YAÇ geliştirebilmiştir. Düzey olarak bakıldığında her iki katılımcıda ileri düzey olmasına karşın Berna'nın puan oranı 3,76 iken, Ayşegül'ün 3,70 olarak belirlenmiştir. Nicelik olarak bakıldığında ise Ayşegül 20 YAÇ geliştirirken, Berna 17 YAÇ geliştirmiştir. Buna karşın Berna'nın puan oranının daha fazla çıkmasının sebebi Ayşegül'e göre daha fazla sayıda bütünleşik yenilikçi stratejiler kullanarak YAÇ'ler yapması ve az sayıda SP uygulaması olarak belirlenmiştir. Aşağıda Ayşegül ve Berna'ya ait çözüm örnekleri verilmiştir (bkz. Şekil 3.61.).

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-2} &= \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x+4} \\ \frac{2x}{x-2} &= \frac{4x}{x+2} \\ \frac{1}{x-2} &= \frac{2}{x+2} \\ 2x-4 &= x+2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+2) \left( \frac{3}{x-2} \right) &= (x+2) \left( \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x+2} \right) \\ \frac{3x+6}{x-2} &= \frac{4 \cdot (x+2)}{x+2} + \frac{2 \cdot (x+2)}{x+2} \\ \frac{3x+6}{x-2} &= 6 \\ \frac{1}{x-2} &= \frac{2}{x+2} \\ \frac{2x-4}{x-2} &= \frac{2x-4}{x-2} \end{aligned}$$

Ayşegül, Son klinik

Berna, Son klinik

### Şekil 3. 61. Ayşegül ve Berna'ya ait çözüm örnekleri

Şekil 3.61. incelendiğinde Ayşegül çözümünde değişkenleri birleştirip önce bölme stratejilerini kullanırken, Berna değişkenleri birleştirme, değişkenle çarpma ve önce bölme stratejilerini kullanarak çözümünü tamamlamıştır.

#### 3.1.3.2. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumları

Katılımcıların öğretim seansları sonrasında çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumlarını belirlemek amacı ile klinik görüşmelerde katılımcılara uygulama esnasında hangi çözümü tercih ettikleri ve nedeni sorulmuş ve tercihleri belirlenmiştir. Bu esnada sahip oldukları çoklu strateji bilgisi önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle, elde edilen verilere göre katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve çözüm tercihleri tablo 3.17.'de sunulmuştur.

**Tablo 3. 17.** Son klinik görüşmede katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve tercih edilen çözüm frekansları

	Ayşegül	Berna	Erdem	Serkan
Çoklu strateji bilgi düzeyi	3,70	3,76	3,00	3,19
Çözüm sayısı	27	20	26	26
Çözüm türü	7 SP 20 YAÇ	3 SP, 17 YAÇ	6 SP 4 SPÖ 16 YAÇ	5 SP, 4 SPÖ 17 YAÇ

**Tablo 3. 17.** (Devam) *Son klinik görüşmede katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve tercih edilen çözüm frekansları*

	Ayşegül	Berna	Erdem	Serkan
Tercihler	10 YAÇ	13 YAÇ	2 SPÖ 3 SP 13 YAÇ	9 YAÇ
Tercih nedeni	1 ÖN 9 MN	13 MN	18 MN	9 MN

Katılımcıların stratejiler arasındaki tercihleri incelendiğinde genel olarak yenilikçi alternatif stratejileri kullanarak yaptıkları çözümleri SPÖ ya da SP'lere tercih etmişlerdir.

Katılımcılardan çözümleri çoklu strateji bilgisi açısından üst düzeyde olan Serkan 9 soruya 4 SPÖ, 5 SP ve 17 YAÇ olmak üzere 26 çözüm gerçekleştirmiş ve kararlı bir tutum sergileyerek her bir soru için 1 yenilikçi alternatif çözümü tercih etmiş ve tercih ettiği çözümleri daha kısa olarak nitelendirmiştir. Erdem ise 9 soruya 4 SPÖ, 6 SP ve 16 YAÇ olmak üzere 26 çözüm gerçekleştirmiştir. Daha çok yenilikçi alternatif çözümleri tercih etmekle birlikte SPÖ ve SP'ler de tercihleri arasındadır. Ancak Erdem'in söylemleri ele alındığında tercih etmekten ziyade yapabilirim bakış açısıyla tercihlerini yansıtmıştır.

Çoklu strateji bilgisi açısından ileri düzeyde olan Ayşegül 9 soruya 7 SP ve 20 YAÇ olmak üzere 27 çözüm gerçekleştirmiştir. YAÇ'leri tercih etmekle birlikte değişkenleri birleştirerek önce bölme stratejisini kullandığı çözümle, kesrin anlamı stratejisini kullandığı çözüm arasında kararsız kalmıştır. Genel olarak tercih sebeplerini ise daha kısa olması ve işlem hatası yapma olasılığının daha düşük olması şeklinde belirtmiştir. Berna 9 soruya 3 SP, 17 YAÇ olmak üzere 20 çözüm geliştirebilmiştir. 9 soru için 13 YAÇ'yi tercih etmiştir. Bu durum Berna'nın yenilikçi alternatif çözümler arasında kararsız kaldığını göstermektedir. Genel olarak tercih sebebini ise daha pratik olması şeklinde belirtmiştir.

### ***3.1.3.3. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunarak bu tercihlerini uygulayabilme durumları***

Son klinik görüşmede araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi bulunmamaktadır. Nitekim katılımcıların tercih ettikleri çözümler kendilerinin uygulayabildikleri çözümler olmuştur ve bütün katılımcılar çözümlerini doğru bir şekilde uygulayabilmişlerdir.

### 3.1.4. Kalıcılık klinik görüşmeden elde edilen bulgu ve yorumlar

Bu bölümde katılımcıların karşılaştırmalı olarak çalışma sonrası yaklaşık 3 aylık bir geri çekilme sürecinin ardından yapılan kalıcılık klinik görüşme sorularına verdikleri cevapların analizi sonucunda işlem esnekliği açısından mevcut durumlarının değerlendirilmesi amacıyla diğer klinik görüşmelerde uygulanan sorular yeniden sorulmuştur. Elde edilen veriler cebirsel kesirli ifadeler içeren denklemlere dair çoklu strateji bilgisi, bu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma ve tercih edilen çözümü uygulayabilme şeklinde 3 tema altında analiz edilmiştir.

#### 3.1.4.1. Katılımcıların çoklu strateji bilgileri

Katılımcıların 9 soruya kalıcılık klinik görüşmede verdikleri doğru ve yanlış cevap frekansları ve çözüm kategorilerinin dağılımı tablo 3.18.'de sunulmuştur. Yapılan bütün çözümler herhangi bir kategoriye dâhil edilmiştir.

**Tablo 3. 18.** Katılımcıların kalıcılık klinik görüşmedeki işlem esneklik durumları

	Düzye	Çözüm sayısı	Doğru-Yanlış-Eksik-Boş
Ayşegül	3,65	24	24 D
Berna	3,54	22	22 D
Erdem	3,16	24	24 D
Serkan	3,31	29	29 D

Katılımcıların çoklu strateji bilgilerine ilişkin belirlenen kategorilere göre mevcut durumları ele alındığında, 4 katılımcı da üst düzeyde çoklu strateji bilgisine sahip olarak belirlenmiştir. Ayşegül en fazla çoklu strateji bilgisine sahip katılımcı olarak belirlenmiştir.

##### 3.1.4.1.1. Temel düzey

Kalıcılık klinik görüşme verilerine göre bu kategoride de hiçbir katılımcı bulunmamaktadır.

##### 3.1.4.1.2. Orta düzey

Kalıcılık klinik görüşme verilerine göre bu kategoride de hiçbir katılımcı bulunmamaktadır.

### 3.1.4.1.3. Üst düzey

Katılımcıların tamamı SP geliştirebilmenin yanı sıra ağırlıklı olarak YAÇ geliştirdikleri için işlem esneklik düzeyleri üst düzey olarak belirlenmiştir. Ayşegül 9 soruya 1 SPÖ, 7 SP ve 16 YAÇ, Berna 7 SP ve 15 YAÇ, Erdem 3 SPÖ, 7 SP ve 14 YAÇ ve Serkan 2 SPÖ, 8 SP ve 19 YAÇ geliştirebilmiştir. Puan oranı açısından bakıldığında Ayşegül 3,65 ile en fazla üst düzey puanına sahip katılımcı olarak belirlenirken, Erdem 3,26 ile en az üst düzey puanına sahip katılımcı olarak belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.62.).

The image shows four handwritten solutions for the equation  $1. \frac{4}{x+4} + \frac{8}{x+4} = 3$ .  
1. Ayşegül:  $\frac{4}{x+4} + \frac{8}{x+4} = 3$   
 $\frac{12}{x+4} = \frac{3}{1}$   
 $12 = 3x + 12$   
 $x = 0$   
2. Berna:  $1. \frac{4}{x+4} + \frac{8}{x+4} = 3$   
 $\frac{12}{x+4} = \frac{3}{1}$   
 $12 = 3x + 12$   
 $x = 0$   
3. Erdem:  $s. \frac{5x-8}{x-1} = \frac{5}{2}$   
 $\frac{5x-8-7}{x-1} = \frac{5}{2}$   
 $\frac{5x-15}{x-1} = \frac{5}{2}$   
 $10x-30 = 5x-5$   
 $5x = 25$   
 $x = 5$   
4. Serkan:  $\frac{4}{x+4} + \frac{8}{x+4} = 3$   
 $\frac{4+8}{x+4} = \frac{3}{1}$   
 $12 = 3x + 12$   
 $x = 0$

Ayşegül, SP, Kalıcılık klinik görüşme

Berna, YAÇ, Kalıcılık klinik görüşme

Erdem, YAÇ, Kalıcılık klinik görüşme

Serkan, SPÖ, Kalıcılık klinik görüşme

**Şekil 3. 62.** Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'a ait çözüm örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme

### 3.1.4.1.4. İleri düzey

Kalıcılık klinik görüşme verilerine göre bu kategoride de hiçbir katılımcı bulunmamaktadır.

### 3.1.4.2. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumları

Elde edilen verilere göre katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve çözüm tercihleri tablo 3.19.'de sunulmuştur.

**Tablo 3. 19.** Kalıcılık klinik görüşmede katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve tercih edilen çözüm frekansları

	Ayşegül	Berna	Erdem	Serkan
Çoklu strateji bilgi düzeyi	3,65	3,54	3,16	3,31
Çözüm sayısı	24	22	24	29
Çözüm türü	1 SPÖ 7 SP 16 YAÇ	7 SP, 15 YAÇ	3 SPÖ 7 SP 14 YAÇ	2 SPÖ 8 SP 19 YAÇ
Tercihler	9 YAÇ	9 YAÇ	1 SPÖ 2 SP 6 YAÇ	9 YAÇ
Tercih nedeni	9 MN	9 MN	9 MN	9 MN

Katılımcıların stratejiler arasındaki tercihleri incelendiğinde genel olarak YAÇ'leri SPÖ ya da SP'lere tercih ettikleri görülmektedir.

Katılımcılardan çözümleri çoklu strateji bilgisi açısından üst düzeyde olan katılımcılardan Ayşegül, Berna ve Serkan 9 soruya SPÖ, SP ve YAÇ'ler geliştirebilmiş ve kararlı bir tutum sergileyerek her bir soru için 1 YAÇ'yi tercih etmişlerdir. Tercih ettikleri çözümleri daha kısa ve güzel olarak nitelendirmişlerdir. Erdem ise 9 soruya 3 SPÖ, 7 SP ve 14 YAÇ olmak üzere 24 çözüm gerçekleştirmiştir. Daha çok YAÇ'leri tercih etmekle birlikte SPÖ ve SP'ler de çözümlerde tercihleri arasındadır. Tercih nedenini daha kısa olması olarak belirtmiştir. Bazı durumlarda SP ve SPÖ çözümlerin daha ideal olabileceği düşünüldüğünde, Erdem'in diğer katılımcılara göre işlemsel açıdan daha esnek bir katılımcı olduğu söylenebilir.

### ***3.1.4.3. Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunarak bu tercihlerini uygulayabilme durumları***

Kalıcılık klinik görüşmede araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi bulunmamaktadır. Nitekim katılımcıların tercih ettikleri çözümler kendilerinin uygulayabildikleri çözümler olmuştur ve bütün katılımcılar çözümlerini doğru bir şekilde uygulayabilmişlerdir.

### 3.2. Katılımcıların Kavramsal Bilgi Durumları

Bu bölümde katılımcılarla ilk klinik görüşme, öğretim seansları, son klinik görüşme ve kalıcılık klinik görüşmeden elde edilen bulgular yer almaktadır. Katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere dair öğretim seansları başlamadan önceki kavramsal durumları, öğretim seanslarındaki kavramsal durumlarının değişimi, öğretim seansları sonundaki kavramsal durumları ve yaklaşık 3 ay sonraki kavramsal durumları ele alınmıştır. Bütün uygulamalardan elde edilen veriler katılımcılar tarafından cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere verilen kesrin anlamları ve yapılan hatalar kapsamında incelenmiştir.

#### 3.2.1. Katılımcıların çalışma öncesi mevcut kavramsal bilgileri

İlk klinik görüşmede katılımcılara 6 farklı denklem sunulmuş ve bu denklemlere sözel problem yazmaları istenmiştir. İlk klinik görüşmede katılımcıların verilen denklemlere yazdıkları sözel problemlere ait doğru, eksik, yanlış ve boş cevap frekansları, sözel problem frekansları ve kullanılan kesrin anlamı kategorilerinin dağılımı tablo 3.20.'de sunulmuştur.

**Tablo 3. 20.** Katılımcıların ilk klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları

	Soru sayısı	Doğru	Eksik	Yanlış	Toplam	Kesrin anlamı	Sözel	Yanlış notasyon - Denklem değiş.	Nümerik ifade- cebirsel ifadeyi karş.	Kesirli olmaya n denkle m gibi davran ma	Eksi notasyon	Pay-payda karştırma
Ayşegül												
Pc Pdn	3	1	1	1	3	1 Bölüm 1Parça -bütün	3	0	1	0	0	0
Pn Pdc	2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
Pc Pdc	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
İlk klinik görüşme	6	1	2	1	4	1 Bölüm 1Parça -bütün	4	0	1	0	0	0

**Tablo 3.20.** (Devam) *Katılımcıların ilk klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Doğru	Eksik	Yanlış	Toplam	Kesrin anlamı	Sözel	Yanlış notasyon-Denklemi değiş.	Nümerik ifade ile cebirsel ifadeyi karış.	Kesirli olmayan denklem gibi davranma	Eksik notasyon	Pay-payda karıştırma
<b>Berna</b>												
Pc Pdn	3	1	0	1	2	2 Bölüm	2	0	0	1	0	0
Pn Pdc	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Pc Pdc	0 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
İlk klinik görüşme	6	1	0	1	2	2 Bölüm	2	0	0	1	0	0
<b>Erdem</b>												
Pc Pdn	3	2	0	1	3	3 Bölüm	3	0	0	1	0	0
Pn Pdc	2	0	0	2	2	1 Bölüm 1 Oran	2	0	0	1	1	0
Pc Pdc	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
İlk klinik görüşme	6	2	1	3	6	4 Bölüm 1 Oran	6	0	0	2	1	0
<b>Serkan</b>												
Pc Pdn	3	1	0	1	2	1 Ölçme 1Parça -bütün	2	1	0	0	0	0
Pn Pdc	2	0	1	1	1	1 Oran	1	0	0	0	0	1
Pc Pdc	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
İlk klinik görüşme	6	1	1	2	3	1 Ölçme 1 Oran 1Parça -bütün	3	1	0	0	0	1

**Tablo 3.20.** (Devam) *Katılımcıların ilk klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

Toplam	24	5	4	8	15	7 Bölüm	15	1	1	3	1	1
						1 Ölçme						
						2 Oran						
						2Parça-bütün						

Tablo 3.20. incelendiğinde katılımcıların kendilerine verilen denklemlerin çok azına doğru sözel problem yazabildikleri belirlenmiştir. Yanlış yazdıkları problemlerde pay, payda karıştırma gibi kesirle ilgili hatalar bulunurken eksik notasyon gibi kesirle ilgili olmayan hatalar da tespit edilmiştir. Katılımcıların boş bıraktıkları denklemler daha çok  $P_n P_d$  ya da  $P_c P_d$  kesirli ifadeleri içeren denklemler olmuştur. Yazılan problemlere en fazla kesrin bölüm anlamı verilebilmekle birlikte kesrin işlemci anlamı dışında diğer anlamlar da kullanılmaya çalışılmıştır. Yazılmaya çalışılan problemlerin tamamının sözel olduğu belirlenmiştir.

İlk klinik görüşmeden elde edilen veriler katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazarken kesrin hangi anlamlarını nasıl ve ne ölçüde kullanabildiklerini belirleyebilmek amacıyla kesrin bölüm, oran, ölçme, işlemci ve parça-bütün anlamı alt başlıkları altında incelenmiştir.

### **3.2.1.1. Bölüm anlamı**

Kesrin “bölüm anlamı” eşit paylaşırma, dağıtma ve bölme gibi ifadeleri içeren problemlerden oluşmaktadır. İlk klinik görüşmede katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazarken Serkan dışındaki katılımcıların, yazdıkları problemlere genellikle kesrin bölüm anlamını içeren problem yazmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Erdem’in 1 örneği dışında katılımcıların kesrin payının cebirsel paydasının nümerik olduğu durumlarda kesrin bölüm anlamını kullanmaya çalıştıkları görülmüştür. Kesrin bölüm anlamını genellikle bölme, paylaşırma ve dağıtma ifadelerini kullanarak problemlerine yansıtmışlardır.

Berna ve Erdem’in kesrin bu anlamını içeren problemlerinde kesirli değişkenle kesirli olmayan değişkeni karıştırdıkları görülmüştür. Ancak katılımcıların kesrin farklı anlamlarını içeren problemlerde de bu hatayı yaptıkları görülmüştür. Bu nedenle hatanın kesrin bölüm anlamı ile ilgili olmadığı söylenebilir.

Numerik olarak ele alındığında, katılımcıların yazılan 12 problemin 7'sine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Bu problemlerin 6'sı  $P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılmıştır. En fazla denklemin  $P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluştuğu göz önünde bulundurulursa bu olası bir durumdur. Diğer bir neden ise, katılımcıların bu kesir türüne daha aşina olmaları olabilir. Erdem 1 soruda  $P_n P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren bir denkleme kesrin bölüm anlamına dair problem yazmaya çalışmış ancak yanlış yazmıştır (bkz. Şekil 3.63.).

5.  $\frac{3}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

$\frac{2}{x} + \frac{1}{4} = 6$

B'in pullarına bölümlüyle B'in, Kalem: B kişiyi dağıtmam ile (B) kişiyi min iki fazlasına sahip - ablamın dağıtmam arasındaki fark 6'dır. Kaç kalem yısında - farkı  $\frac{1}{4}$ 'tür. Pul sayım im vardır? tr?

Erdem, İlk klinik görüşme, Bölüm anlamı, Yanlış, Kesirli değişkenle kesirli olmayan değişkeni karıştırma

Erdem, İlk klinik görüşme, Bölüm anlamı

### Şekil 3. 63. Erdem'e ait problem örneği

Erdem ilk probleminde doğrudan bölme ifadesini kullanarak yazdığı problemde kesrin bölüm anlamını kullanmaya çalışmıştır. Ancak denkleminde bulunan ikinci cebirsel kesirli ifadeyi sadece  $x+2$  şeklinde problemde ele almış ve kesirli değişkenle kesirli olmayan değişkeni karıştırmıştır. Diğer problemde ise kalemelerini kişilere dağıtarak kesrin bölüm anlamını doğru bir şekilde kullanabilmiştir. İlk klinik görüşmede yazdığı problemlere en fazla bölüm anlamını kullanmaya çalışan katılımcı Erdem olarak belirlenmiştir. Ancak, Erdem kesrin bölüm anlamına dair yazdığı 4 problemde 2'sini yanlış yazmıştır. Serkan'ın ise kesrin bölüm anlamına dair problem yazmadığı görülmüştür.

Ayşegül yazdığı 1 probleme kesrin bölüm anlamını kullanırken, Berna sadece 2 problem yazabilmiş ve yazdığı 2 problemde de kesrin bölüm anlamını kullanmaya çalışmış ancak sadece 1'ini doğru yazabilmiştir (bkz. Şekil 3.64.).

Alırdığı ekmeğin

$$3. \frac{x+2}{3} + \frac{x+5}{2} = 9$$

Yan

Alırdığı ekmeğin 2 fazlasının 3'e 5 ve Ayşenin aldığı ekmeğin aynı miktarında aldığı ekmeğin 5 fazlasının yarısını kaçar ekmeğin toplamı 9'ya alınıyor ekmeğin ne kaçar?

1.  $\frac{2+x}{3} = 4$  Başlangıçta iki bilyesi olan üç arkadaş bakkaldan bir miktar daha bilye alıyor ve daha sonra bunları kendi aralarında bölüşürüyorlar. Her birine dörder tane bilye düşmesine göre bakkaldan kaç tane daha bilye almışlardır?

Ayşegül, İlk klinik görüşme, bölüm anlamı

Berna, İlk klinik görüşme, bölüm anlamı

### Şekil 3. 64. Ayşegül ve Berna'ya ait problem örnekleri

Ayşegül probleminde doğrudan bölüm ifadesini kullanarak kesrin bölüm anlamını kullanırken, Berna paylaşmayı ifade ederek kesrin bölüm anlamını problemde kullanabilmiştir. Kesrin bölüm anlamına dair yazılan problemlerde Berna'nın da Erdem'in de kesirli denklemi kesirli olmayan denklem olarak ifade ederek problemlerini yanlış yazdıkları belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.65.).

$$3. \frac{x+2}{3} + \frac{x+5}{2} = 9$$

x tane şeker vermiş. Bu şekerler ilk önce 3 otula dağıtmışız fakat 2 sıra daha eklemiş ve bu şekerler 3 otulumuza eşit olarak dağıtılmıştır. Aynı şekilde bu şekerleri iki otula daha dağıtmışız ve yetmeyeince 5 sıra daha eklemiş ve bu dağıtılan şekerlerin sayısı 9'ya eşitmiş. Buna göre başlangıçtaki sıra sayısı kaçtır?

Şekerlerime iki ekleyip 3 kardeşime dağıttım. İki şekerlerime 5 ekleyip anne-babama dağıttığımda toplam 9 şeker harcamış oluyorum. Kaç şeker vardır?

Berna, İlk klinik görüşme, Bölüm anlamı, Yanlış, Kesirli değişkenle kesirli olmayan değişkeni karıştırma

Erdem, İlk klinik görüşme, Bölüm anlamı, Yanlış, Kesirli değişkenle kesirli olmayan değişkeni karıştırma

### Şekil 3. 65. Berna ve Erdem'e ait problem örnekleri

Berna ve Erdem problemlerinde bölüm anlamını dağıtma ifadesi ile kullanmaya çalışmışlardır. Ancak problemlerindeki sözel ifadelerin her bir bölüme düşen nesne sayısını ifade etmesi gerekirken, toplam nesne sayısını göstermektedir. Örneğin Erdem şekerlerine 2 ekleyip 3 kardeşine ve şekerlerine 5 ekleyip anne ve

babasına dağıttığını belirtmiş ve bölüm anlamını vermiştir. Ancak, sonuçta kişi başına düşen şekerlerin toplamı yerine toplam dağıttığı şeker sayısını ifade etmiştir. Bu ise  $x+2+x+5=9$  denklemini karşılamaktadır.

### 3.2.1.2. Oran anlamı

Katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazarken ağırlıklı olarak kullandıkları diğer bir anlam kesrin “oran anlamı” olmuştur. Kesrin oran anlamı, problemde kesre ait iki nicelik arasındaki ilişkiyi ve kıyaslanmayı ifade eden problemlerden oluşmaktadır. Katılımcılardan Erdem ve Serkan’ın verilen denklemlere kesrin oran anlamını içeren problem yazmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Kesrin oran anlamını oran ve orantı kelimelerini kullanarak problemlerinde yansıtmışlardır.

Serkan  $P_c$   $P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denkleme kesrin oran anlamını kullanarak problem yazabilirken, Erdem  $P_n$   $P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren bir denkleme kesrin oran anlamını içeren problem yazabilmiştir (bkz. Şekil 3.66.).

The image shows two handwritten mathematical problems and solutions. On the left, Erdem's problem is written in Turkish: "Dedemin yaşının benim yaşına oranından anneannemin benim yaşına oranları arasındaki fark 2'dir. Yaşım kaçtır?". Above it is a handwritten equation:  $\frac{90}{x} - \frac{70}{x} = 2$ . On the right, Serkan's problem is written in Turkish: "Ali ve Mehmet'in bir miktar parası vardır. Ali ve Mehmet'in aldığı para miktarı 3 ve 4 sayılarıyla ters orantılıdır. Ali'nin parası Mehmet'in parasından 6 lirası fazla olduğuna göre Toplam para kaçtır?". Above it is a handwritten equation:  $2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = 6$ .

Erdem, İlk klinik görüşme, Oran anlamı, Eksik veri kullanma

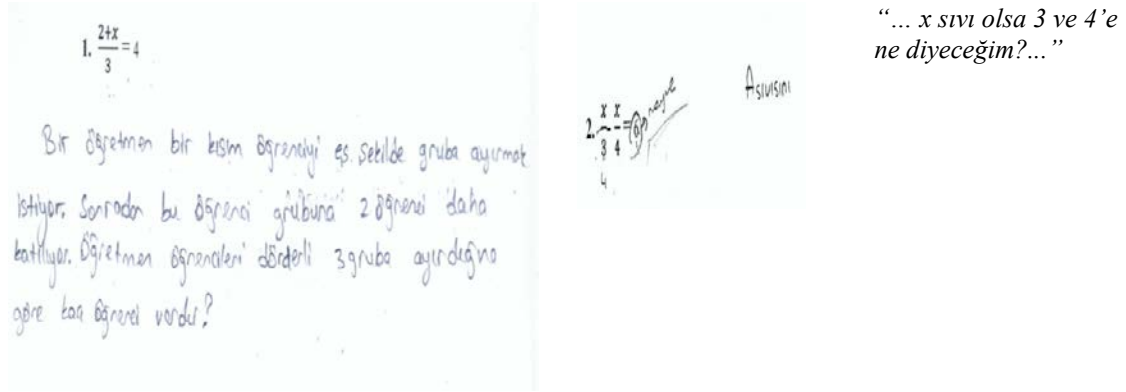
Serkan, İlk klinik görüşme, Oran anlamı, denklemi değiştirme

### Şekil 3. 66. Erdem ve Serkan'a ait problem örnekleri

Serkan ve Erdem problemlerini doğrudan orantı ifadesini kullanarak yazmışlar ve kesrin oran anlamını vermeye çalışmışlardır. Erdem kesirlerin pay kısmında bulunan 90 ve 70 sayılarını “dedemin ve anneannemin yaşı” olarak ifade etmesine rağmen problemde 90 ve 70’i kullanmamıştır. Bu nedenle eksik veri kullanma hatası yapmıştır. Serkan ise ters orantıyı problemde kullanmış ancak denklemini değiştirme hatası yapmıştır.

### 3.2.1.3. Ölçme anlamı

Ölçme anlamı, "ne kadar?" ve "kaç tanedir?" gibi soruları cevaplayabilen problemlerden oluşmaktadır. Verilen ifadenin birim kesri aynı zamanda ölçme birimini oluşturur. İlk klinik görüşmede katılımcıların yazılan 12 problemin 1'ine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabildikleri belirlenmiştir. Serkan tarafından yazılan problem ise  $\frac{Pc}{Pdn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemden oluşmaktadır. Ayşegül yarım bıraktığı bir soruda bilinmeyene sıvı demiştir. Ancak, payda kısmında verilen sayıları nasıl anlamlandıracağını belirleyememiştir (bkz. Şekil 3.67.).



Serkan, İlk klinik görüşme, ölçme anlamı, yanlış notasyon

Ayşegül, İlk klinik görüşme, Ayşegül'ün yorumu

### Şekil 3. 67. Serkan ve Ayşegül'e ait problem örnekleri

Serkan probleminde "kaç grup?" sorusunu cevaplayabilen bir problem yazmaya çalışmış ve kesrin ölçme anlamını kullanmıştır ancak "öğrencileri 4'erli 3 gruba ayırma" ifadesi  $\frac{x+2}{4} = 3$  denklemini karşılamaktadır. Bu durumda Serkan'ın denklemi değiştirerek notasyon hatası yaptığı görülmüştür.

### 3.2.1.4. İşlemci anlamı

Kesrin işlemci anlamı kesrin bir işlemin bir parçası şeklinde ifade edildiği problemlerden oluşmaktadır. Katılımcıların verilen denklemlere kesrin işlemci anlamını içeren problem yazamadıkları belirlenmiştir.

### 3.2.1.5. Parça-bütün anlamı

Katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazarken ağırlıklı olarak kullandıkları diğer bir anlam, kesrin “parça-bütün anlamı” olmuştur. Kesrin parça bütün anlamı, verilen nesnelere parçalamak ve ortaya çıkan parçaları bütüne göre “kesir” olarak ifade etmektir.

İlk klinik görüşmede Ayşegül ve Serkan’ın kesrin parça bütün anlamına dair problem yazmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Yazılan problemlerden biri Ayşegül tarafından  $P_c P_d$  kesirli ifadeleri içeren denkleme yazılmaya çalışılmıştır. Diğer Serkan tarafından  $P_n P_d$  kesirli ifadeleri içeren denkleme yazılmaya çalışılmış ve tamamlanamayarak eksik bırakılmıştır. Katılımcıların yazılan 12 problemin 2’sine kesrin parça-bütün anlamını içeren problem yazmaya çalıştıkları, ancak yazamadıkları belirlenmiştir.

Ayşegül probleminde belirli bir kısmını alma ifadesini kullanmış ve kesrin parça-bütün anlamını vermeye çalışmıştır. “Ali  $2/3$  oranında alırken Ayşe kalan kısmını almıştır...” şeklinde belirterek  $2/3$  nümerik ifadesini  $2x/3$  olarak problemde ifade etmiştir. Ayrıca problemin başlangıcında bütünü 4 kutu şeker olarak ifade etmiştir. Ancak problemine bakıldığında  $x$ ’i bütün olarak ele almıştır (bkz. Şekil 3.68.).

1.  $\frac{2x}{3} = 4$

4 kutu şeker Ali  $\frac{2}{3}$  oranında alırken Ayşe bu şekerin kalan kısmını alıyor. Ayşe ne kadar şeker almıştır?

5.  $\frac{3}{3} - \frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{2}{4}$

Ali okula giderken ben yol gitmedim. Ali ile başta yolun bir kısmını gittikten sonra yürümüş ve biraz daha vermiş. Dinlendikten sonra da gittiği yolun ben fazlasını daha gidiyorum.

“Ben şey yapmak istedim,  $x$ 'e yol demek istedim... yol uzunluğu demek istedim...  $x$ 'e de yolun bir kısmı,  $x+2$ 'ye de yolun bir kısmı demek istedim. Sonra bunların farkı yolun  $1/4$ 'ü olur gibi bir şey

A: Anladım. Peki, ben şeyi merak ettim, şu an  $1/4$ 'ü veremedik sanırım.  $3/x$  ne anlama geliyor?...

“ $3/x$ .”

A: Hı hı... yani  $3/x$  ile biz neyi buluyoruz?

“...”

A: Gelmiyor mu? Tamam.

Serkan'ın yorumu

Ayşegül, İlk klinik görüşme, parça-bütün anlamı, Yanlış, denklemi değiştirme

Serkan, İlk klinik görüşme, parça-bütün anlamı, Eksik, pay-payda karıştırma

Şekil 3. 68. Ayşegül ve Serkan'a ait problem örnekleri

Serkan ise probleminde yolu bir bütün olarak almış ve problemine kesrin parça-bütün anlamını vermeye çalışmıştır. Yorumlarında  $x$ 'i bütün olarak ifade etmiş ancak  $x+2$ ,  $x$ 'ten büyük olmasına karşın  $x$ 'in bir parçası olarak belirtmiştir. Problemde ise Serkan'ın 3'ü bütün olarak ifade etmeye çalıştığı,  $x$  ve  $x+2$ 'yi 3'ün bir parçası olarak belirtmeye çalıştığı gözlenmiştir. Bu durumda pay ve paydayı karıştırdığı belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.68.).

İlk klinik görüşmede genel olarak katılımcıların özellikle  $P_c/P_d$  kesirli ifadelerle problem yazmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Sadece Erdem ve Serkan  $P_n/P_d$  kesirli ifadelerle problem yazmaya çalışırken,  $P_c/P_d$  kesirli ifadeye hiçbir katılımcının problem yazamadığı belirlenmiştir. Katılımcıların yazdıkları problemlere kesrin 5 anlamı olmasına karşın daha çok bölüm anlamını vermeye çalıştıkları görülmüştür. Bu süreçte katılımcıların yaptıkları hatalar olmuştur. Yazdıkları problemlerde kesirli değişkenle kesirli olmayan değişkeni karıştırma, denklemleri değiştirme, kesrin pay ve paydayını karıştırma, eksik veri kullanma ve nümerik ifade ile cebirsel ifadeyi karıştırma gibi hatalar mevcuttur.

Nitekim katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazmada zorlandıkları, kesirli ifadelerde değişkene anlam verme konusunda sıkıntı çektikleri, bu nedenle de genellikle notasyon hataları yaptıkları belirlenmiştir.

### 3.2.2. Katılımcıların kavramsal değişim süreçleri

Bu bölümde ön görüşmeler kapsamında elde edilen bulgulara göre tasarlanan bireysel öğretim seanslarında katılımcıların cebirsel kesirli denklemlere dair kavramsal değişim süreçleri ele alınmıştır. Bu değişim süreci kesrin bölüm anlamı, oran anlamı, ölçme anlamı, işlemci anlamı ve parça bütün anlamı başlıkları altında incelenmiştir.

Öğretim seansları tasarlanırken katılımcılarla öncelikle cebirsel kesirli üç farklı durumu (Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemler, Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemler, Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemler) içeren denklemlere problem yazdırma çalışmaları yapılmıştır. Devamında katılımcılar tarafından yazılan problemlere kesrin farklı anlamlarına dair sözel problemlerin yazılabilmesini desteklemek amacıyla sözel problemler verilir katılımcılardan bu problemleri çözmeleri istenmiştir.

**Tablo 3. 21.** *Katılımcılara cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere problem yazmaları için tasarlanan öğretim seansları*

Öğretim seansı	İçerik	Amaç
Öğretim seansı 1	Pc Pdn kesirli ifadeler bulunan, toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Verilen denkleme kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilme düzeyleri ve gelişim süreci
Öğretim seansı 2	Pc Pdn kesirli ifadeler bulunan, toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Verilen denkleme kesrin ölçme ve işlemci anlamını içeren problem yazabilme düzeyleri ve gelişim süreci
Öğretim seansı 3	Pc Pdn kesirli ifadeler bulunan, toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Verilen denkleme kesrin oran ve parça-bütün anlamını içeren problem yazabilme düzeyleri ve gelişim süreci
Öğretim seansı 4	Pn Pdc kesirli ifadeler bulunan, toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Verilen denkleme kesrin bölüm anlamını ve ölçme anlamını içeren problem yazabilme düzeyleri ve gelişim süreci
Öğretim seansı 5	Pn Pdc kesirli ifadeler bulunan, toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Verilen denkleme kesrin oran anlamını işlemci anlamını ve parça-bütün anlamını içeren problem yazabilme düzeyleri ve gelişim süreci
Öğretim seansı 6	Pc Pdc kesirli ifadeler bulunan, toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Verilen denkleme kesrin bölüm anlamını ve parça-bütün anlamını içeren problem yazabilme düzeyleri ve gelişim süreci

**Tablo 3.21.** (Devam) *Katılımcılara cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere problem yazmaları için tasarlanan öğretim seansları*

Öğretim seansı	İçerik	Amaç
Öğretim seansı 7	Pc Pdc kesirli ifadeler bulunan, toplama ve çıkarma işlemi içeren denklemler	Verilen denkleme kesrin ölçme anlamını, işlemci anlamını ve oran anlamını içeren problem yazabilme düzeyleri ve gelişim süreci

Tablo 3.21.'de öğretim seanslarında katılımcılara problem yazmaları için sunulan denklemlerin özellikleri ve öğretim seanslarının amaçları sunulmaktadır.

Bu öğretim seansları kapsamında tablo 3.22.'de ise katılımcıların verilen cebirsel kesirli denklemlere problem yazabilme durumları sözel olup olmama, doğru yanlış, eksik olma ve kesrin farklı anlamlarını verebilme açısından incelenmiştir.

**Tablo 3. 22.** Katılımcıların öğretim seanslarında verilen denklemlere cebirsel kesir türüne göre problem yazabilme durumları

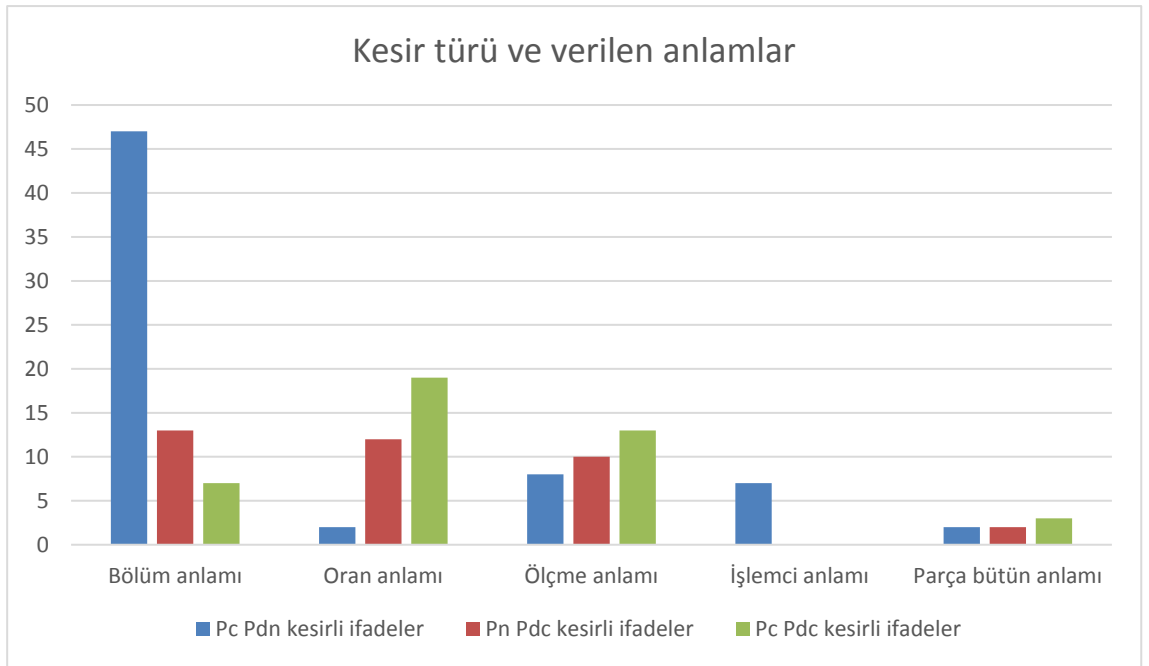
	Aysegül				Berna				Erdem				Serkan				Genel toplam
	Pc Pdn	Pn Pdc	Pc Pdc	Toplam	Pc Pdn	Pn Pdc	Pc Pdc	Toplam	Pc Pdn	Pn Pdc	Pc Pdc	Toplam	Pc Pdn	Pn Pdc	Pc Pdc	Toplam	
Sorulan soru sayısı	13	8	8	29	14	8	8	30	13	8	8	29	13	8	8	29	117
Yazılan problem sayısı	15 (1,15)	8 (1,00)	12 (1,5)	35 (1,20)	14 (1,00)	9 (1,12)	8 (1,00)	31 (1,03)	22 (1,69)	11 (1,37)	11 (1,37)	44 (1,51)	17 (1,30)	10 (1,25)	11 (1,37)	38 (1,31)	148 (1,26)
Sözel	15	8	11	34	14	9	8	31	19	10	11	40	15	8	11	34	139
Sözel-Mat.	0	0	1	1	0	0	0	0	3	1	0	4	2	2	0	4	9
Doğru	13	7	10	30	9	8	6	23	13	7	8	28	8	6	8	22	103
Eksik	0	0	0	0	1	0	0	1	2	3	1	6	1	0	1	2	9
Yanlış	2	1	2	5	4	1	2	7	7	1	2	10	8	4	2	14	36
Boş	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	2
<b>Bölüm</b>	10	4	1	15	12	4	3	19	12	3	1	16	13	2	2	17	67
Sözel	10	4	1	15	12	4	3	19	11	3	1	15	12	2	2	17	32
Sözel-Mat.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	2
Doğru	8	4	1	13	8	4	3	15	7	2	1	10	6	1	1	8	46
Eksik	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	2	3
Yanlış	2	0	0	2	4	0	0	4	5	0	0	5	6	1	0	7	18
<b>Oran</b>	1	2	6	9	1	2	3	6	0	3	7	10	0	5	3	8	33
Sözel	1	2	5	8	1	2	3	6	0	3	7	10	0	3	3	8	32
Sözel-Mat.	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	3
Doğru	1	2	6	9	0	2	3	5	0	2	6	8	0	2	3	5	27
Eksik	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Yanlış	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	0	3	0	3	5

**Tablo 3.22.** (Devam) *Katılımcıların öğretim seanslarında verilen denklemlere cebirsel kesir türüne göre problem yazabilme durumları*

	Ayşegül				Berna				Erdem				Serkan				Genel toplam
	Pc Pdn	Pn Pdc	Pc Pdc	Toplam	Pc Pdn	Pn Pdc	Pc Pdc	Toplam	Pc Pdn	Pn Pdc	Pc Pdc	Toplam	Pc Pdn	Pn Pdc	Pc Pdc	Toplam	
<b>Ölçme</b>	4	1	3	8	0	3	2	5	3	4	3	10	1	2	5	8	31
Sözel	4	1	3	8	0	3	2	5	3	3	3	9	1	2	5	8	30
Sözel- Mat.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
Doğru	4	0	1	0	0	2	2	4	2	3	1	6	0	2	3	5	15
Eksik	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	2
Yanlış	0	1	2	3	0	1	2	3	1	0	1	2	1	0	2	3	11
<b>İşlemci</b>	0	0	0	0	1	0	0	1	4	0	0	4	2	0	0	2	7
Sözel	0	0	0	0	1	0	0	1	3	0	0	3	1	0	0	2	6
Sözel- Mat.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	2
Doğru	0	0	0	0	1	0	0	1	3	0	0	3	1	0	0	1	5
Eksik	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Yanlış	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	2
<b>Parça-Bütün</b>	0	1	2	3	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	3	7
Sözel	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	6
Sözel- Mat.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
Doğru	0	1	2	3	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	3	7
Eksik	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Yanlış	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Toplam</b>	15	8	12	35	14	9	8	31	20	10	11	41	17	10	11	38	145

Elde edilen verilere göre problemler genellikle doğru ve sözel olarak yazılabilmektedir. Ancak eksik ya da yanlış yazılmış problemler ya da tamamen boş bırakılmış denklemler de mevcuttur. Eksik bırakılma durumu ise bütün kesir türlerinde yapılmıştır. Problemlerin doğruluğu öğretim seansları ilerledikçe artış gösterirken yanlışlığı da azalmıştır. Sözel olarak yazılamamış problemlerde sözel ve matematiksel dil bir arada kullanılmıştır. Yazılan problemlerin çoğu kesrin bir anlamını içermekle birlikte eksik problemler arasında anlam verilemeden eksik bırakılmış problemler de bulunmaktadır.

En çok kesrin bölüm anlamına dair problem yazılabilmektedir. Kesrin işlemci ve parça-bütün anlamı ise en az verilen anlamlar olmuştur. Kesrin işlemci anlamına sadece  $P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren ilk üç öğretim seansında problem yazılabılırken, kesrin bölüm anlamına dair bütün öğretim seanslarında problem yazılabilmektedir. Kesrin diğer anlamları da farklı kesir türünü içeren denklemlere verilebilmiştir (bkz. Şekil 3.69.).



**Şekil 3. 69.** Kesrin türüne göre verilen anlamlar

$P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde problem yazabilme çabasının en çok Erdem’de olduğu belirlenmiştir. Ancak verilen denklemlere yazdığı sözel problemleri en çok doğru yazabilen katılımcı Ayşegül olarak belirlenmiştir. Ayşegül hiçbir sözel

problemi eksik bırakmamıştır. En az doğru problemi ise Serkan yazabilmiştir. En çok yanlış sözel problem yazan yine Serkan olarak belirlenmiştir.

Katılımcıların  $P_n$   $P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemleri kullanarak yazdıkları sözel problemlere bakıldığında problem yazabilme çabasının ilk üç öğretim seansında olduğu gibi en çok Erdem'de olduğu belirlenmiştir. Bu kesir türünde en çok doğru sözel problemi Berna'nın yazabildiği belirlenmiştir. En az doğru problemi ise Ayşegül ve Serkan yazabilmişlerdir. Tüm yazdığı problemler içerisinde en az doğru yazabilme oranı da Serkan'a aittir. Ancak ilk üç öğretim seansına göre doğru sözel problem yazabilme oranının arttığı belirlenmiştir.

En çok yanlış sözel problem yazan yine Serkan olarak belirlenmiştir. Yazdığı sözel problemleri yanlış yazma konusundaki en fazla oran da ilk üç öğretim seansına göre azalmakla birlikte Serkan'a aittir. Ayşegül, Berna ve Serkan hiçbir sözel problemi eksik bırakmazken, Erdem bazı sözel problemleri tamamlayamamıştır. Yine Ayşegül, Berna ve Serkan yazdıkları problemlerin tamamını sözel olarak ifade edebilirken, Erdem'in sözel-sembolik dil kullandığı belirlenmiştir. Serkan boş bırakan tek katılımcı olmuştur.

Yazılan sözel problemlerin ilk üç öğretim seansına göre çok daha düşük kısmı kesrin bölüm anlamını içeren problemlerden oluşmaktadır. Kesrin ölçme anlamını içeren problemler ilk üç öğretim seansına göre yükselmiş, kesrin işlemci anlamına dair ise problem yazılmamıştır. İlk üç öğretim seansına göre çok daha fazla kısmı kesrin oran anlamını içerirken problemlerin çok azı kesrin parça-bütün anlamını içermektedir (bkz. Şekil 3.69.).

$P_c$   $P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde yazılan problemlerin büyük bir kısmı doğru olarak belirlenmiştir. En çok doğru problemi ise diğer seansların aksine Serkan'ın yazabildiği belirlenmiştir. Berna ise en az yanlış yapan katılımcı olarak belirlenmiştir. Yazılan problemler genellikle sözel olarak yazılabilmektedir. Yazılan problemlerde en fazla oran ve daha sonra ölçme anlamı kullanılırken, kesrin parça-bütün anlamına dair çok az problem yazılabilmiş, kesrin işlemci anlamına dair ise hiç problem yazılamamıştır (bkz. Şekil 3.69.).

Öğretim seanslarında denklem yazımından sonra katılımcılara kesrin farklı anlamlarına göre çözmeleri için verilen sözel problem örnekleri tablo 3.23.'te sunulmaktadır.

**Tablo 3. 23.** Kesrin anlamlarına göre çözdürülen problem frekansları

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7	Toplam
Bölüm anlamı	2	2	0	1	0	1	1	7
Oran anlamı	0	0	0	1	1	3	1	6
Ölçme anlamı	1	2	2	2	2	0	1	10
İşlemci anlamı	1	0	2	0	0	0	0	3
Parça bütün anlamı	0	0	0	0	1	0	1	2
Toplam	4	4	4	4	4	4	4	28

Tablo 3.23.'de cebirsel kesirli ifadeler bulunan ve toplama-çıkarma işlemi içeren denklemlerden oluşan öğretim seanslarında çözdürülen problem frekansları sunulmuştur. Kesrin bölüm anlamı ve ölçme anlamına dair bütün seanslarda problem çözdürülürken Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kesrin oran ve parça bütün anlamına dair problem çözdürülmemiştir. Kesrin işlemci anlamına dair ise Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemler dışında problem çözdürülmemiştir.

Bu bölümde bu veriler kapsamında katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazarken kesrin hangi anlamlarını nasıl ve ne ölçüde kullanabildikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Elde edilen veriler, katılımcılar tarafından en çok kullanılan kesrin anlamından en az kullanılan doğru sınıflandırılmıştır. Bu kapsamda bulgular bölüm anlamı, oran anlamı, ölçme anlamı, işlemci anlamı ve parça-bütün anlamı başlıkları altında incelenmiştir.

### **3.2.2.1. Bölüm anlamı**

İlk klinik görüşmeden elde edilen verilere göre katılımcılar  $P_c/P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde hatalar yapmakla birlikte, kesrin bölüm anlamını içeren problemler yazmaya çalışmışlardır. Ancak  $P_n/P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere ve  $P_c/P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamını içeren problem yazamadıkları belirlenmiştir. Bu nedenle öğretim seanslarında katılımcıların farklı cebirsel kesir türlerini içeren denklemlere kesrin bölüm anlamını içeren, günlük hayatla ilişkili, sözel ve doğru problemler yazmaları amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda katılımcılardan ilk klinik görüşme verilerine göre daha aşına oldukları düşünülen  $P_c/P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bu anlamına dair problem yazmaları istenmiş ve bu kesir türünde kesrin bölüm anlamını kullanma süreçleri incelenmiştir.

#### **3.2.2.1.1. Payı cebirsel paydası nümerik kesirli ifadeleri içeren denklemler**

İlk uygulanan öğretim seansları öğretim seansı 1, 2 ve 3  $P_c/P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır. Yaklaşık 1 hafta önce yapılan klinik görüşmede katılımcıların daha çok bu kesir türünün bulunduğu denklemlere problem yazmaya çalıştıkları gözlenmiştir. Ayrıca ilk klinik görüşmede katılımcılardan kesrin bölüm anlamını içeren 3 sözel problemi çözmeleri istenmiştir.

İlk üç öğretim seansında, katılımcıların bazen araştırmacı-öğretmenden problem konusu almakla birlikte, genellikle kesrin bölüm anlamına ilişkin problem yazabildikleri belirlenmiştir. Kesrin bu anlamı kapsamında en çok yapılan hata, denklemi değiştirerek notasyon hatası yapma şeklinde olmuştur. Ancak bu durumun kesrin bölüm anlamı ile ilgili olmadığı düşünülmektedir. Diğer yapılan hatalar, kesirli denkleme kesirli olmayan denklem gibi davranma, değişkenin anlamında kargaşa yaşamak ya da bazı sorularda soru olmaması şeklinde belirlenmiştir. Bu durum cevabın içinde olduğu ya da soru kökünün olmadığı durumlar olarak tespit edilmiştir. Kesirli denkleme kesirli olmayan denklem gibi davranma ve değişkenin anlamında kargaşa yaşama hatalarının kesrin bölüm anlamı ile ilgili olabileceği düşünülmektedir. Eksik bırakılan problemlerde ise cebirsel ifadeyi sözel olarak ifade edememe ya da günlük hayatla ilişkilendirememe görülmüştür.

Katılımcıların kesrin bölüm anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.24.'te sunulmuştur.

**Tablo 3. 24.** Katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair sözel problem yazma durumları

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Bölüm anlamı doğru sayısı	Bölüm anlamı Eksik sayısı	Bölüm anlamı Yanlış sayısı	Bölüm anlamı - Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Kesirli olmayan denklemler gibi davranma	Yanlış Notasyon denklemlerini değiştirmeye	Soru yok	Değişkenin anlamı
<b>Ayşegül</b>	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
Öğr. Seansı 1	5	5	4 Bölüm 1 Ölçme	4	0	0	4	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	5	5	4 Bölüm 1 Ölçme	3	0	1	4	0	0	1	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	2 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran	1	0	1	2	0	0	1	0	0
<b>Toplam</b>	15	15	10 Bölüm 4 Ölçme 1 Oran	8	0	2	10	0	0	2	0	0
<b>Berna</b>												
Öğr. Seansı 1	5	5	5 Bölüm	4	0	1	5	0	0	1	0	0
Öğr. Seansı 2	4	4	4 Bölüm	1	0	3	4	0	0	3	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	3 Bölüm 1 İşlemci 1 Oran(E)	3	0	0	3	0	0	0	0	0
<b>Toplam</b>	14	14	12 Bölüm 1 İşlemci 1 Oran(E)	8	0	4	12	0	0	4	0	0
<b>Erdem</b>												
Öğr. Seansı 1	5	8	4 Bölüm 2 Ölçme 2 İşlemci	4	0	0	3	1	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	4	8	5 Bölüm 1 Ölçme 1 İşlemci	1	0	4	5	0	0	2	0	2
Öğr. Seansı 3	5	6	3 Bölüm 1 İşlemci 1 Parça-Bütün	2	0	1	3	0	1	0	0	0
<b>Toplam</b>	14	22	12 Bölüm 3 Ölçme 4 İşlemci 1 Parça-Bütün	7	0	5	11	1	1	2	0	2
<b>Serkan</b>												
Öğr. Seansı 1	4	6	4 Bölüm 1 Ölçme 1 İşlemci	1	0	3	4	0	0	2	1	0
Öğr. Seansı 2	4	6	5 Bölüm 1 İşlemci	1	1	3	4	1	0	2	0	1
Öğr. Seansı 3	5	5	4 Bölüm 1 Parça-Bütün (E)	4	0	0	4	0	0	0	0	0

**Tablo 3.24.** (Devam) *Katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair sözel problem yazma durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Bölüm anlamı doğru sayısı	Bölüm anlamı Eksik sayısı	Bölüm anlamı Yanlış sayısı	Bölüm anlamı - Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Kesirli olmayan denklemler gibi davranma	Yanlış Notasyon denklemler değiştirme	Soru yok	Değişkenin anlamı
<b>Serkan</b>												
Toplam	13	17	13 Bölüm 1 Ölçme 2 İşlemci 1 Parça-Bütün	6	1	6	12	1	0	4	1	1
Genel Toplam	53	68	47 Bölüm 8 Ölçme 7 İşlemci 2 Oran 2 Parça-Bütün	29	1	17	45	2	1	12	1	3

Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 1, 2 ve 3'te yazdığı problemler arasında en fazla Berna kesrin bölüm anlamına dair problem yazabilirken, ilk klinik görüşmede kesrin bölüm anlamına dair problem yazmayan Serkan yazdığı problemler arasında kesrin bu anlamına dair en çok problem yazabilen ikinci katılımcı olmuştur. Yazdığı problemler arasında kesrin bu anlamına dair en az problem yazan katılımcı ise Erdem olarak belirlenmiştir (bkz. Tablo 3.24.). Katılımcıların tamamı bazı durumlarda araştırmacı-öğretmenden problem konusu alma ihtiyacı duymuşlardır. Katılımcılar kesrin bölüm anlamına dair problemler yazabilmelerine karşın, Ayşegül'de daha az olmak üzere, yazdıkları problemlerde denklemleri değiştirme, değişkenin anlamı, sorunun olmaması ve kesirli olmayan denklemler gibi davranma hataları tespit edilmiştir.

Öğretim seansı 1'de Ayşegül ve Berna'nın verilen denklemlere dair yazdıkları sözel problemlere bakıldığında, her iki katılımcı da araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmaksızın paylaşırma şeklinde yorumlayarak kesrin bölüm anlamını içeren sözel problemler yazabilmişlerdir (bkz. Şekil 3.70.). Diğer problemlerinde de genellikle rahat yazmakla birlikte bazen araştırmacı-öğretmenden problem konusu alma ihtiyacı duymuşlardır.

1.  $\frac{x}{3} = 2$   
 Manav elindeki elmaları üç peşete eşit bir peşe kaydıran zaman her peşette 2 elma olduğunu Manavın elinde başlangıçta kaç elma vardır?

3.  $\frac{4x}{3} = 8$   
 Bir otelede 3 tane havuz bulunmaktadır. Oteledeki insan sayısının 4 katı kadar insan gelmekte. Bu insanlar otele bulunan havuza girdiğine göre her bir havuzda ise 8 insan bulur olduğuna göre başlangıçtaki kişi sayısı kaçtır?

Im... o 4 katı insan 3 tane havuza giriyor.... Her birine düşen insan sayısı 8 kişiymiş... 3 tane havuza bölüştüreceğimiz için insanları o yüzden pay kısmında."

Ayşegül, Öğretim Seansı 1

Berna, Öğretim Seansı 1

Berna'nın Yorumu

**Şekil 3. 70.** Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri ve yorumları

Ayşegül probleminde elmaları paylaştırarak kesrin bölüm anlamını kullanırken, Berna'da havuz başına düşen insan sayısı ile kesrin bölüm anlamını kullanmıştır.

Erdem ve Serkan'da Ayşegül ve Berna gibi araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmaksızın verilen denklemlere kesrin bölüm anlamını içeren sözel problemler yazabilmişlerdir (bkz. Şekil 3.71.). Her iki katılımcıda paylaşırma ifadesini kullanarak kesrin bölüm anlamına dair problemler yazabilmişlerdir.

2.  $\frac{2x}{3} = 4$   
 Elmalarımın 2 katı sayısındaki elmaları Serkan'ın daşına dağıttığımda 4'er adet düşüyor. Kaç elma vardır?

Ahmet elindeki bilyeleri 3 arkadaşına eşit şekilde paylaştırıyor. Ahmet'in her bir arkadaşına 2 bilye olduğuna göre Ahmet'in kaç bilyesi vardır?

Erdem, Öğretim seansı 1

Serkan, Öğretim seansı 1

**Şekil 3. 71.** Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri

Erdem ve Ayşegül'ün yazdıkları problemler doğru olmakla birlikte Serkan ve Berna'nın kesrin bölüm anlamını verdikleri sözel problemlerde denklemi değiştirdikleri belirlenmiştir. En çok Serkan'ın bu hatayı yaptığı görülmüştür (bkz. Şekil 3.72.).

$2 \frac{2x}{3} = 4$

Bir terzi elindeki kumaş 3 eşit parçaya böldüğünde her bir parçanın 2 cm olduğunu görüyor. Bu terzi elindeki kumaşın 2 katı uzunluğunda bir parçayı da 3 eşit parçaya ayırduğunda her bir parçanın 4 cm uzunluğunda olduğunu görüyor. Buna göre kumaş kaç cm'dir?

“Burada  $x$  i bir terzinin elindeki bir top kumaş olarak belirttim. bu kumaşa sonradan kendisi kadar bir kumaş ekleniyor. bölü 3’ü 3 eşit parçaya böldüğümü söyleyerek sağladım. 4 ü, bölünen parçaların uzunluğu olarak söyledim.”

Serkan, Öğretim seansı 1, Yanlış notasyon- Denklemi değiştirme

Serkan’ın yorumu

Elimizde bulunan 4 şişeye çay koyulacaktır. Aynı şişelere paylaştırılmadan önce iki katı daha çay eklenmelidir. Daha sonra her şişeye 2 litre çay dağılır. Buna göre ilk başta elimizde kaç çay vardı?

Berna, Öğretim seansı 1, Yanlış notasyon- Denklemi değiştirme

### Şekil 3. 72. Serkan ve Berna’ya ait sözel problem örnekleri

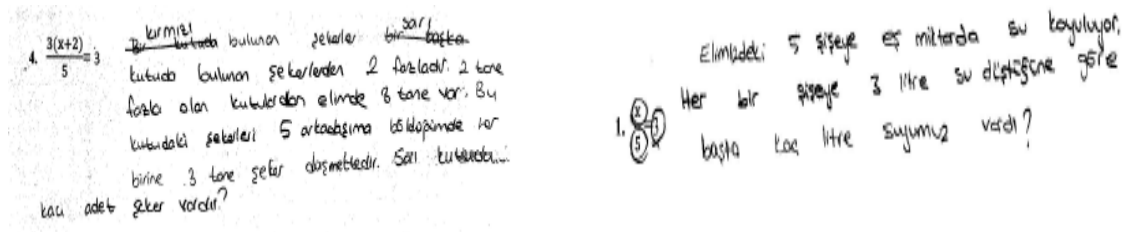
Şekil 3.72.’de Serkan’ın yazdığı problemde terzinin elinde bir top kumaş olduğunu ve bu kumaşa aynı uzunlukta kumaş parçası eklediğini belirtmiştir. Bu ifade cebirsel olarak  $x+x$ ’e karşılık gelmektedir. Serkan bu ifade ile  $2x$ ’i belirtmeye çalışmıştır. Berna’da ise daha farklı bir durum mevcuttur. Berna denklemi karşılamayan bir ifade kullanmıştır. Verilen denklemin pay kısmında  $4x$  ifadesi varken Berna  $3x$  anlamına gelen “elimizdeki çayın 2 katı daha kadar çay ekleniyor.” sözel ifadesini kullanmıştır. Nitekim her ikisi de paylaştırmayı ifade ederek kesrin bölüm anlamını kullanmışlardır.

Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 2’de de katılımcıların en çok yazdıkları sözel problem türü, kesrin bölüm anlamını içeren sözel problemler olmuştur. Yaklaşık 1 hafta önce yapılan öğretim seansı 1’de de katılımcılardan kesrin bölüm anlamını içeren 2 sözel problemi çözmeleri istenmiştir. Genel olarak katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair sözel problem yazabildikleri gözlenmiştir.

Katılımcılar kesrin bölüm anlamına dair problemler yazabilmelerine karşın yazdıkları problemlerde yanlış notasyon ve değişkenin anlamı hatalarının olduğu tespit

edilmiştir. Katılımcıların tamamı yanlış notasyon hatasını yapmışlardır. Ayrıca Erdem ve Serkan'ın değişkenin anlamı hatasını da yaptıkları gözlemlenmiştir.

Öğretim seansı 2'de Ayşegül verilen denklemlere yazdığı 5 sözel problemin 4'ünde kesrin bölüm anlamını kullanırken, Berna öğretim seansı 1'de olduğu gibi yazdığı 4 sözel problemin 4'üne de kesrin bölüm anlamını vermiştir. Ayşegül ve Berna'nın verilen denklemlere dair yazdıkları sözel problemlere bölüm anlamını rahatlıkla verebilmişlerdir. Ayşegül ve Berna araştırmacı-öğretmenden problem konusu (Sezer'in at çiftliği var, Zeliha kırtasiyede alışveriş yapıyor... vb.) alma ihtiyacı duymuşlardır (bkz. Şekil 3.73.).



Ayşegül, Öğretim seansı 2, Bölüm anlamı

Berna, Öğretim seansı 2, Bölüm anlamı, yanlış notasyon, denklemleri değiştirme

### Şekil 3. 73. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2

Ayşegül probleminde şekerlerini arkadaşlarına dağıtarak kesrin bölüm anlamına dair problem yazabilmiştir. Berna ise kesrin bölüm anlamına dair problem yazmaya çalışmış ancak "5 çarpı 3" işlemine dair bir problem oluşturmuştur. Erdem verilen denklemlere yazdığı 7 sözel problemin 5'ine kesrin bölüm anlamını verirken, Serkan yazdığı 5 sözel problemin 4'üne kesrin bölüm anlamını vermiştir. Erdem ve Serkan'da araştırmacı-öğretmenden problem konusu alma ihtiyacı duymuşlardır. Verilen denklemlere kesrin bölüm anlamını içeren sözel problemler yazabilmişlerdir (bkz. Şekil 3.74.).

1.  $\frac{x}{5}=3$   
 $\times 5$   
 $x=15$   
 Kalemlerimin hepsini 5 farklı kartasıyeden  
 eşit ölüörük aldım. Bir kartasıyeden 3 kalem  
 aldığıma göre kaç kalemim vardır?

1.  $\frac{x}{5}=3$   
 Sezer'in bir at çiftliği var. Sezer bu at çiftliğini  
 5 bölüme ve her bölümde 3 at düşecek şekilde bölüyor.  
 Buna göre sezerin kaç atı vardır?

Erdem, Öğretim seansı 2, Bölüm anlamı, yanlış  
 notasyon, denklemi değiştirme

Serkan, Öğretim seansı 2, Bölüm anlamı

**Şekil 3. 74.** Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2

Erdem probleminde kesrin bölüm anlamını içeren problem yazmaya çalışmış ancak Berna'nın yaptığı gibi çarpma işlemine dair bir problem yazmıştır. Serkan ise her bir bölmeye düşen atı belirterek toplam at sayısını sormuş ve kesrin bölüm anlamına dair doğru bir problem yazabilmiştir.

Şekil 3.75. incelendiğinde Ayşegül bir önceki soruda denklemi değiştirirse yanlış yapacağını belirtmesine karşın, 3. soruda denklemi değiştirerek yanlış notasyon hatası yapmıştır. "bir sınıfta bulunan kız sayısının 2 katının 6 fazlası kadar erkek" ifadesi  $2x+6$  cebirsel ifadesine karşılık gelmektedir.

2.  $\frac{3x}{5}=9$   
 Sezer'in at çiftliğinde 3 tane atır ve her atı ahırda atlar vardır.  
 Sezer atları 5 tane gruba ayırıp yarış yaptırıyor. Her yarışta  
 9 tane at olduğuna göre bir ahırda kaç at vardır?

"bir miktar  
 olduktan  
 sonra 2 katı  
 daha  
 ekleniyor.  
 Ama o zaman  
 ekleniyor  
 olduğu için  
 artı da  
 olurdu.  
 Denklem  
 değişmiş olur  
 o zaman."

Ayşegül, Öğretim seansı 2, Bölüm anlamı

Ayşegül'ün  
 yorumu

3.  $\frac{3x+6}{5}=3$   
 Bir sınıfta bulunan kız sayısının 2 katının  
 6 fazlası kadar erkek vardır. Bu sınıf 5  
 ayrı gruba ayırılarak her gruba 8 kişi dışlanmıştır.  
 Bu sınıftaki kız sayısı kaçtır?

Ayşegül, Öğretim seansı 2, Bölüm anlamı,  
 yanlış notasyon-denklemleri değiştirme

**Şekil 3. 75.** Ayşegül'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2

Şekil 3.76. incelendiğinde Berna ve Serkan'ın yazdıkları sözel problemleri araştırmacı-öğretmenin soruları dâhilinde irdelemelerine rağmen notasyon hatası yaptıkları belirlenmiştir.

Zelina elindeki paranın 2 katı kadar  
kumbaradan para alıyor, daha sonra kalması  
6 TL daha veriyor ve Zelina kirtasiyeye  
gidip 5 adet kalem alıyor. Bu 5 kalemin  
fiyatları aynıdır ve Zelina her birine 3  
TL para vermektedir. Buna göre Zelina'nın  
elinde başlangıçta kaç TL vardı?

$$4 \cdot \frac{3(x+2)}{5} = 3$$

Beden öğretmeni bir grup öğrenciyi dersin için  
sıralamıştır. Öğretmen öğrencileri gruplara ayırmak istediğinde  
öğrencilerin eşit şekilde dağılmadığını görüyor ve 2 öğrenci  
ekliyor. Sonradan öğrencilerin az olduğunu fark ediyor  
öğrencilerin 3 katı kadar öğrenci daha ekliyor. Bütün  
öğrencileri 5 gruba ve her grupta da 3 öğrenci gelecek  
şekilde ayırıyor. Buna göre ilk başta kaç öğrenci vardı?

“  $X+2$  ye  
burada 2  
öğrenci  
eklediğini  
söyleyerek  
sağladım.  
 $X+2$  nin 3  
katını,  
burada  
sonradan  
öğrenci  
azaldığımı  
fark ediyor.  
Öğrencinin  
3 katı kadar  
öğrenci  
daha ekliyor  
ifadesiyle  
sağladım.”

Berna Öğretim seansı 2, yanlış notasyon,  
denklemini değiştirme

Serkan, Öğretim seansı 2, yanlış  
notasyon, denklemini değiştirme

Serkan'ın  
yorumu

### Şekil 3. 76. Berna ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2

Serkan'ın sözel probleminde ifade ettiği denklemin pay kısmı  $4(x+2)$ 'ye karşılık gelmektedir. Erdem ise öğretim seansı 2'de en çok yanlış yapan katılımcı olarak belirlenmiştir. Erdem'in yaptığı hatalar yanlış notasyon şeklinde belirlenmiştir. Yanlış notasyon hatasını diğer katılımcılarınkine benzer şekilde, denklemini değiştirerek yani  $3x$ 'i  $x+2x$  şeklinde ifade ederek yapmıştır (bkz. Şekil 3.77.).

2  
Elindeki paraya dedim paranın 2 katını  
5 torunuma dağıt dedi. Her bir torunu  
düş tüküne göre, başta benim ne ka  
ram vardır?

Ahmet amca elindeki parayın 3 katını  
6 litreye daha fazla boyayla 5'e 3'lü  
nı boyayabilir. Ahmet amcanın ne ka  
sı vardır?

Kalemimin 2 fazlasının 3 katı da  
kalemim tonası 5 liradan 3 tane, a.  
Kaç kalemim vardır?

Erdem, Öğretim seansı 2,  
Bölüm anlamı, yanlış  
notasyon, denklemini  
değiştirme

Erdem, Öğretim seansı 2, Bölüm  
anlamı, Değişkenin anlamında  
karmaşa

Erdem, Öğretim seansı 2, Bölüm  
anlamı, Değişkenin anlamında  
karmaşa

### Şekil 3. 77. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2

Şekil 3.77.'de ilk problemde elindeki paraya 2 katı kadar para ekleyerek 5 kişiye dağıtmış ve kesrin bölüm anlamına dair problem yazmıştır ancak “3x” ifadesini “x+2x” şeklinde belirterek notasyon hatası yapmıştır. İkinci sözel problem örneğine bakıldığında, boya miktarını litre olarak sormaktadır. Ancak 5 evin 3 odasını boyayan boya miktarında litre sonucuna ulaşamadığı için problem çözülemez. Diğer bir soru ise, odaların aynı olup olmamasıdır. Bu da kesrin bölüm anlamı ile çelişen bir durumdur. Son sözel probleme bakıldığında pay kısmındaki kalem sayısını paraya bölerek yeniden kalem sayısı elde edilmiştir. Denklemin çözümünde kalem sayısını bulmak için eşitliğin karşısındaki para ile işlem yapmak gerekmektedir. Bu da çözümü olanaksız hale getirmektedir.

Diğer karşılaşılan durumlardan biri ise yazılmaya başlanan problemin eksik bırakılmasıdır. Öğretim seansı 2’de Serkan ve Erdem’de böyle bir durumla karşılaşılmıştır (bkz. Şekil 3.78.).

<p>Meral kek yapmak istiyor ve sonradan 2 tane daha kek yapıyor. Meral bu kekleri 5 parçaya böldüğünde</p>	<p>“Meral 2 tane daha kek yapmak istiyor dedim. Meral bu kekleri 5 eş parçaya bölüyor dedim. 5 parçaya böldüğümde im... 9 parça çıksa? Bir kekten denklemini sadece x’i bulduğumda, 15 parça çıkması gerekiyor ve buda olmuyor yani.” “Im... 3’ünden 9 parça çıkıyorsa 1 tanesinden 15 parça nasıl çıkacak”</p>	<p><math>\frac{3(x+2)}{5} = 3</math> <math>3(x+2)</math> At çiftliğimdeki beyaz ve kahverengi a vardır. Beyaz atların sayısı kahverengi atların sayısının 2 fazlasının 3 katı kadardır.</p>
<p>Serkan, öğretim seansı 2, Eksik problem, bölüm anlamı</p>	<p>Serkan’ın yorumu</p>	<p>Erdem, öğretim seansı 2, Eksik problem</p>

**Şekil 3. 78.** Serkan ve Erdem’e ait eksik sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2

Serkan  $3x/5=15$  şeklinde verilen denkleme ikinci sözel problemini yazmaya çalışmış ancak tamamlayamamıştır. Yorumlarına bakıldığında değişkenin numerik sonucunu günlük hayatla ilişkilendirmiş ve mantıksız bulunduğu için devam etmek istememiştir. Erdem ise verilen denklemin pay kısmında bulunan  $3(x+2)$  ifadesindeki çarpım durumunda bulunan 3’ü sözel olarak ifade edememiştir.

Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 3'te de katılımcıların en çok yazdıkları sözel problem türü, kesrin bölüm anlamını içeren sözel problemler olmuştur. Yaklaşık 1 hafta önce yapılan öğretim seansı 2'de de katılımcılardan kesrin bölüm anlamını içeren 2 sözel problemi çözmeleri istenmiştir. Genel olarak katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair sözel problem yazabildikleri gözlenmiştir (bkz. Şekil 3.79. ve Şekil 3.80.).

Bir firma ilk ay elindeki suyun 2 katı kadarını 10 markete dağıtmıştır, 2. ay ise elindeki suyun 3 katı kadarını 12 markete dağıtmıştır. İlk ay bir markete verilen su ile 2. ay bir markete verilen su şişesinin toplamı 36 olduğuna göre başlangıçta bu firmanın elinde kaç adet su şişesi vardı?

$3 \cdot \frac{2x}{10} + \frac{3x}{12} = 36$

Mehmet öğretmen bir grup öğrenciyi önce kaç gruba ayırmak istiyordu Mehmet öğretmen ilk önce öğrencileri 4 gruba sonra da 7 gruba ayırmıştır. İlk gruptaki öğrencilerin sayısı ikinci gruptaki öğrencilerin sayısından 90 fazla ise ilk başta kaç öğrenci vardı?

$1. \frac{x}{4} - \frac{x}{7} = 90$

Berna, Öğretim seansı 3, Bölüm anlamı

Serkan, Öğretim seansı 3, Bölüm anlamı

**Şekil 3. 79.** Berna ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3

Berna probleminde elindeki suyu dağıtarak kesrin bölüm anlamını kullanırken, Serkan öğrencileri gruplara ayırarak kesrin bölüm anlamını probleminde kullanabilmiştir. Kesre bölüm anlamını vererek problem yazmaya çalışan Ayşegül ve Erdem'in birer problemde yanlış yaptıkları görülmüştür (bkz. Şekil 3.80.).

Ali ve Ahmet karşılıklı evlerde oturmaktadırlar. Alı, 6 arkadaşıyla kalırken Ahmet, 6 arkadaşıyla kalıyordus. Alı ve Ahmetin kaldığı evlerin kirası aynıdır. Alının evindeki kirası bir kişi, Ahmetin evindeki kirası bir kişiden 90 TL daha fazla edermektedir. Bu evin kirası kaç TL'dir.

$1. \frac{x}{4} - \frac{x}{7} = 90$

Elmalarımın 2 katını 10 kişilik, 3 katını ise 12 kişilik gruplara eşit sayıda dağıtacağım. Dağıttığım toplam elma sayısı 36 ise benim kaç elmam vardır?


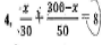
$3 \cdot \frac{2x}{10} + \frac{3x}{12} = 36$

Ayşegül, Öğretim seansı 3, Bölüm anlamı, Yanlış notasyon

Erdem, Öğretim seansı 3, Bölüm anlamı, yanlış notasyon, kesirli olmayan denklem gibi davranma

**Şekil 3. 80.** Ayşegül ve Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3

Ayşegül payda kısmındaki nümerik ifadelerde denklemi değiştirerek yani 4'ü 3+1, 7'yi 6+1 şeklinde ifade ederek yapmıştır. Ancak parayı paylaştırarak kesrin bölüm anlamını probleminde kullanabilmiştir. Erdem ise kesirli ifadeyi kesirli olmayan denklem şeklinde ifade etmiş ve kişi başına düşen elmaların toplamı yerine dağıttığı toplam elma sayısını sormuştur. Kesrin bölüm anlamını vermeye çalışmış ancak yanlış notasyon kullanmıştır. Çünkü probleminde göre payda kısımlarında bulunan 10 ve 12 çözüm esnasında yazılan denklemde yerini bulamamaktadır. Diğer karşılaşılan durumlardan biri ise yazılmaya başlanan problemin eksik bırakılmasıdır. Öğretim seansı 3'te 2. soruda Erdem'de böyle bir durumla karşılaşılmıştır. Bölüm anlamını vermeye çalıştığı 2 problemi yarım bırakmıştır (bkz. Şekil 3.81.).

 <p>Ali bey,</p>	<p>“...Im... x pay kısmında olduğu için benim elimde bir şey olmalı. Im... öncelikle ben elimdeki bir şeye x dersem, im... 7x'te elimdekinin 7 katı”</p>	 <p>Kitabımı bir ayda</p>	<p>“ben kitabın sayfa sayısına x demeyi düşündüm. Bir ayda 30 günü 1 ay olarak aldığım, bir ayda okuduğu sayfa sayısıyla... 30'la 50... Gün sayısı diyeyim”</p>
Erdem, Öğretim seansı 3	Erdem'in yorumu	Erdem, Öğretim seansı 3	Erdem'in yorumu

**Şekil 3. 81.** Erdem'e ait eksik sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3

Erdem Şekil 3.81'deki denklemlere kesrin bölüm anlamını içeren problemler yazmaya çalışmış ama tamamlayamamış ve bu duruma neden sunmamıştır. Genel olarak bakıldığında, öğretim seansı 1, 2 ve 3'ün sonunda katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair problem yazabildikleri belirlenmiştir. Yapılan hatalardan notasyon hatasının ve soru olmamasının kesrin bölüm anlamı ile ilgili olmadığı ancak değişkenin anlamında kargaşa yaşama ve kesirli olmayan denklem gibi davranma hatalarının kesrin bu anlamı ile ilgili olabileceği görülmüştür. Bu hatalar araştırmacı-öğretmen ile katılımcı arasında soru cevap şeklinde irdelenerek ve öğretim seanslarının son bölümünde kesrin bu anlamını içeren sözel problemler sorularak giderilmeye çalışılmıştır.

Diğer kesir türlerini içeren denklemlere kesrin bu anlamına dair problem yazıp yazamadıklarını belirleyebilmek amacıyla öğretim seansı 4 ve 5'te Pn Pdc kesirli ifadeler yazdıkları problemlerde kesrin bölüm anlamını kullanma süreçleri incelenmiştir.

### 3.2.2.1.2. Payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler

Öğretim seansı 4 ve 5 Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır. İlk klinik görüşmede Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere genel olarak problem yazılamamakla birlikte kesrin bölüm anlamı açısından bakıldığında Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren sadece 1 denkleme problem yazılmaya çalışılmış, ancak yanlış yazılmıştır. Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere göre daha az yazılmasına karşın katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere problem yazmaya çalıştıkları görülmüştür. Yazdıkları problemlerin tamamı sözel olmakla birlikte hata sayısı da ilk üç öğretim seansına göre oldukça azdır. Sadece 1 hata yapılmış, bu da pay-payda karıştırma hatası olmuştur. Eksik bırakılan problemde ise önceki seanslara benzer şekilde cebirsel ifadeyi sözel olarak ifade edememe söz konusu olmuştur. Katılımcıların kesrin bölüm anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.25.'te sunulmuştur.

**Tablo 3. 25.** Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair sözel problem yazabilme durumları

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Bölüm anlamı doğru sayısı	Bölüm anlamı Eksik sayısı	Bölüm anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Pay-payda karıştırma
<b>Ayşegül</b>								
Öğr. Seansı 4	4	4	2 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	2	0	0	2	0
Öğr. Seansı 5	4	4	2 Bölüm 1 Parça- Bütün 1 Oran	2	0	0	2	0
Toplam	8	8	4 Bölüm 1 Ölçme 2 Oran 1 Parça- Bütün	4	0	0	2	0
<b>Berna</b>								
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran	2	0	0	2	0
Öğr. Seansı 5	4	5	3 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	3	0	0	3	0
Toplam	8	10	5 Bölüm 3 Ölçme 2 Oran	5	0	0	5	0

**Tablo 3.25.** (Devam) *Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Bölüm anlamı doğru sayısı	Bölüm anlamı Eksik sayısı	Bölüm anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Pay-payda karıştırma
<b>Erdem</b>								
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 3 Ölçme	1	1	0	2	0
Öğr. Seansı 5	4	6	1 Bölüm 1 Ölçme 3 Oran	1	0	0	1	0
Toplam	8	11	3 Bölüm 4 Ölçme 2 Oran	2	1	0	3	0
<b>Serkan</b>								
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 3 Oran	1	0	1	2	1
Öğr. Seansı 5	4	5	1Parça- Bütün 2 Ölçme 2 Oran	0	0	0	0	0
Toplam	8	10	2 Bölüm 2 Ölçme 5 Oran 1Parça- Bütün	1	0	1	2	1
Genel Toplam	32	39	14 Bölüm 10 Ölçme 11 Oran 2Parça- Bütün	12	1	1	14	1

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4’de katılımcılar kesrin bölüm anlamını içeren sözel problemler yazabilmişlerdir. Daha önce yapılan öğretim seanslarında katılımcılardan kesrin bölüm anlamını içeren sözel problem çözmeleri istenmiş ve nitekim kendileri de yazabilmişlerdir.

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4 ve 5’te Ayşegül yazdığı 8 problemden 4’üne, Berna yazdığı 10 problemden 5’ine kesrin bölüm anlamını vererek bu kesir türünde en fazla bölüm anlamını kullanan katılımcılar olmuştur. Erdem yazdığı 9 problemden 3’üne, Serkan ise yazdığı 10 problemden 2’sine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilmiştir. Uygulama esnasında Berna ve Serkan araştırmacı-öğretmenden problem konusu almazken, Erdem ve Ayşegül problem konusu alma ihtiyacı duymuşlardır. Katılımcıların kesrin bölüm anlamına dair yazdıkları problemler

genellikle doğru olmakla birlikte sadece Serkan'ın 1 denklemde kesrin payını ve paydasını anlamsal açıdan karıştırdığı belirlenmiştir.

Öğretim seansı 4'te Ayşegül verilen denklemlere yazdığı 4 sözel problemin 2'sinde kesrin bölüm anlamını kullanırken, Berna yazdığı 4 problemin 1'inde kesrin bölüm anlamını kullanabilmiştir. Bu esnada araştırmacı-öğretmen tarafından Ayşegül'e problem konusu verilmiş (bkz. Şekil 3.82.) ancak, problemi kendisi oluşturmuştur. Berna'ya ise araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmamıştır.

The image shows two handwritten mathematical problems and their solutions. On the left, Ayşegül's problem is written in Turkish, involving a fraction  $\frac{120}{3x} = 2$  and a word problem about books on shelves. On the right, Berna's problem is written in Turkish, involving a fraction  $\frac{24}{4} = 6$  and a word problem about reading a book.

**Ayşegül, Öğretim seansı 4, Bölüm anlamı**

2.  $\frac{120}{3x} = 2$

Odanda ki kitaplıkta 3 tane bölme bulunmaktadır ve her bölme eşit sayıda raf bulunmaktadır. Elindeki toplam 120 tane kitabı raflara bölüp her bölme her rafa 2 tane kitap olmaktadır. Kitaplığımın her bölümünde kaç adet raf bulunmaktadır.

**Berna, Öğretim seansı 4, Bölüm anlamı**

1.  $\frac{24}{4} = 6$

Berna 24 sayfalık bir çocuk kitabı okumaktadır. Berna bu kitabı 4 günde bitirdiğine göre her gün kaç sayfa kitap okumuştur?

A: İm...  
şöyle bir şey olsa, mesela Meltem öğretmen ilkokul öğretmenini olsun. Öğrencilerin i tören için sıraya soksun...  
"Tamam."

### Şekil 3. 82. Ayşegül ve Berna 'ya ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4

Ayşegül probleminde kitaplarını raf sayısına bölerek her bir rafa düşen kitap sayısını sormuş ve kesrin bölüm anlamını problemde kullanmaya çalışmıştır. Berna da benzer şekilde kitap sayfa sayısını gün sayısına bölerek kesrin bölüm anlamını kullanarak problemini oluşturmuştur.

Erdem verilen denklemlere yazdığı 5 sözel problemin 2'sine kesrin bölüm anlamını verirken, Serkan yazdığı 5 sözel problemin 2'sine kesrin bölüm anlamını vermiştir. Her iki katılımcı da verilen denklemlere kesrin bölüm anlamını içeren sözel problemler yazabilmişlerdir. Erdem bir soruda kesrin bölüm anlamına dair problem yazmaya başlamış ama devamını getirememiştir (bkz. Şekil 3.83.).

(24/2)

24 bilyemi arkadaşlarıma eşit olarak dağıtıyorum. Her birine 4 bilye vermiş olduğuma göre bilyelerimi kaç arkadaşlarıma vermişimdir?  
Bahar 24 sayfalık kitabını her gün 2 olarak okumak şartıyla günde kaç sayfa okursa 4 günde bitirebilir?

Erdem, Öğretim seansı 4, Bölüm anlamı

36/4

Ahmet Bey sınıfındaki 36 sıraya

A: Sema öğretmen sınıfındaki öğrencileri sıralara yerleştirmek istiyor.

"... (29 saniye düşünür.)"

A: Tamam. şöyle toparlayalım.

Şimdi, 36 tane öğrencimiz olsun sınıfta. Tamam.  $x$  neye diyelim?

"... yani, sıra

sayısına.... Bir

sıraya oturabilecek

kişiye mi?

Erdem, Öğretim seansı 4,  
Eksik problem, Bölüm  
anlamı

Erdem'in Yorumu

### Şekil 3. 83. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4

Erdem ilk probleminde bilyelerini arkadaşlarına paylaşarak probleminde kesrin bölüm anlamını kullanmıştır. Eksik bırakılan soruda araştırmacı-öğretmen tarafından Erdem'e problem konusu verilmiş ve Erdem bu problem konusunu kullanarak kesrin bölüm anlamını verebilmiş, ancak değişkenin ne ifade edeceğini belirleyememiştir. Nitekim değişkeni  $2x$  olarak probleminde ifade etmiş ve günlük dil ile matematiksel dili bir arada kullanmıştır.

Katılımcıların kesrin bölüm anlamına dair yazdıkları problemler genellikle doğru olmakla birlikte, sadece Serkan'ın 1 denklemde kesrin payını ve paydasını anlamsal açıdan karıştırdığı belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.84.).

$$3. \frac{18}{x+4} = 3$$

Ali'nin 18 tane kitaplığı vardır. Ali kitaplarını kitaplığa yerleştiriyor. Sonradan 4 tane daha kitap alıyor ve toplam kitapları kitaplıklara eşit şekilde dağılmak üzere paylaştığından her kitaplıkta 3 kitap olduğuna göre Ali'nin başlangıçta kaç kitabı vardı?

A: Evet. Şimdi 18 neye dedik?  
 “ Ali'nin kitaplık sayısına dedim. X, ilk baştaki kitap sayısı. X+4 de sonradan 4 kitap daha aldığını söyleyerek sağladım. 3 ü de her kitaplıktaki kitap sayısı olarak belirttim.”  
 A: Tamam. Peki, problemimize göre 18 neden pay kısmında, x+4 neden payda kısmında?  
 “Kitaplığa kitapları paylaştıracam için...”

Serkan, Öğretim seansı 4, Bölüm anlamı, Yanlış, Pay-payda Serkan'ın yorumu karıştırma

### Şekil 3. 84. Serkan'a ait sözel problem örneği, Öğretim seansı 4

Oluşturduğu problemde Serkan'ın kitaplığa kitapları bölerek her bir kitaplıktaki kitabı bulunduğunu ifade ettiği belirlenmiştir. Bu durum araştırmacı-öğretmen tarafından sorgulanmasına karşın Serkan farkına varmamıştır (bkz. Şekil 3.84. ).

Öğretim seansı 5'te ise Ayşegül verilen denklemlere yazdığı 4 sözel problemin 2'sinde, Berna yazdığı 5 problemin 4'ünde) Erdem ise yazdığı 4 problemin 1'inde kesrin bölüm anlamını kullanabilmiştir (bkz. Şekil 3.85.). Her üçünde de araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmamıştır. Serkan'ın ise Öğretim seansı 5'te kesrin bölüm anlamını içeren sözel bir problem yazmadığı belirlenmiştir. Araştırmacı-öğretmen tarafından problem konusu sunulmuş ancak Serkan verilen problem konusunu kullanarak kesrin başka anlamını içeren problemler yazmıştır.

A evinde bulunan öğrenciler 50 TL'lik kirayı adalarında eşit bir şekilde paylaşmışlardır. B evinde ise A evinde bulunan öğrencilerden 2 öğrenci daha fazla bulunmaktadır. ve B evinin kirası ile A evinin kirası aynıdır. A ve B evlerinde bulunan bir öğrenci aylık toplam 240 TL öderseniz A evinde kaç öğrenci vardır?

$$3. \frac{450}{x} + \frac{450}{x+2} = 240$$

Zelma 200 sayfalık kitabı günde belirli miktarda sayfa okuyarak bitiriyor. Berna sonra 300 sayfalık kitabı ilki başta okuduğu kitaba göre 10 fazla okuyarak bitiriyor. Bu iki kitabı bitirme süresinin farkı 1 gün olduğuna göre Zelma 200 sayfalık kitabı 1 günde kaç sayfa okuyarak bitirmiştir?

$$2. \frac{300}{x+10} - \frac{200}{x} = 1$$

Ayşegül, Öğretim seansı 5, Bölüm anlamı

Berna, Öğretim seansı 5, Bölüm anlamı

### Şekil 3. 85. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 5

Ayşegül probleminde ev kirasını kişilere eşit bir şekilde paylaştırırken, Berna kitap sayfa sayısını günlere bölerek problemde kesrin bölüm anlamını kullanmıştır.

Genel olarak bakıldığında, öğretim seansı 4 ve 5'in sonunda katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair problem yazabildikleri belirlenmiştir. Sadece kesrin payını ve paydasını karıştırma hatası yapılmıştır. Bu hatanın kesir türünün değişmesi ve kesrin bölüm anlamı ile ilgili olduğu düşünülmektedir. Bu hata araştırmacı-öğretmen ile katılımcı arasında soru cevap şeklinde irdelenerek, ayrıca öğretim seanslarının son bölümünde kesrin bu anlamını içeren sözel problemler sorularak giderilmeye çalışılmıştır.

Son 2 öğretim seansında ise katılımcıların ilk klinik görüşmede hiç problem yazamadıkları Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair problem yazma süreçleri araştırılmıştır.

### 3.2.2.1.3. Payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler

İlk klinik görüşmeden elde edilen verilere göre katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere hiçbir şekilde problem yazamadıkları belirlenmiştir. Öğretim seansı 6 ve 7 Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır. Bu bölümde katılımcıların bu denklem türünde kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilme durumları irdelenmiştir.

Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere verilen bölüm anlamı diğer kesir türlerini içeren denklemlere göre daha az olmakla birlikte tamamı sözel problem olarak yazılmıştır. Sadece 1 tanesi eksik bırakılmış geri kalanın tamamı doğru olarak yazılabilmektedir. Öğretim seanslarının sonlarına doğru katılımcıların kesrin bölüm anlamına dair problem yazma konusunda hatalarını giderdikleri, Pc Pdc kesirli ifadeler kesrin bölüm anlamına dair problemi rahatlıkla yazabildikleri görülmüştür.

Katılımcıların kesrin bölüm anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.26.'da sunulmuştur (bkz. Tablo 3.26.)

**Tablo 3. 26.** Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Bölüm anlamı doğru sayısı	Bölüm anlamı Eksik sayısı	Bölüm anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Sözel olmayan sözel eşitlik
<b>Ayşegül</b>									
Öğr. Seansı 6	4	7	1 Ölçme 4 Oran 2 Parça-bütün	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 7	4	5	1 Bölüm 2 Ölçme 2 Oran	1	0	0	1	0	0
Toplam	8	12	1 Bölüm 3 Ölçme 6 Oran 2 Parça-bütün	1	0	0	1	0	0
<b>Berna</b>									
Öğr. Seansı 6	4	4	1 Bölüm 1 Ölçme 2 Oran	1	0	0	1	0	0
Öğr. Seansı 7	4	4	2 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	2	0	0	2	0	0
Toplam	8	8	3 Bölüm 2 Ölçme 3 Oran	3	0	0	3	0	0

**Tablo 3.26.** (Devam) *Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Bölüm anlamı doğru sayısı	Bölüm anlamı Eksik sayısı	Bölüm anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Sözel olmayan sözel eşitlik
<b>Erdem</b>									
Öğr. Seansı 6	4	6	1 Bölüm 5 Oran	1	0	0	1	0	0
Öğr. Seansı 7	4	5	3 Ölçme 2 Oran	0	0	0	0	0	0
Toplam	8	11	1 Bölüm 2 Ölçme 7 Oran	1	0	0	1	0	0
<b>Serkan</b>									
Öğr. Seansı 6	4	5	1 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran 2 Parça-bütün	0	1	0	1	0	0
Öğr. Seansı 7	4	6	1 Bölüm 3 Ölçme 2 Oran	1	0	0	1	0	0
Toplam	8	11	2 Bölüm 5 Ölçme 3 Oran 2 Parça-bütün	1	1	0	0	0	0

Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6'da Berna ve Erdem kesrin bölüm anlamını içeren sözel problemler yazabilmişlerdir. Daha önce yapılan öğretim seanslarında katılımcılardan kesrin bölüm anlamını içeren sözel problemleri çözmeleri istenmiş ve nitekim kendileri de yazabilmişlerdir.

Katılımcılardan Ayşegül ve Serkan'ın öğretim seansı 6'da araştırmacı-öğretmen tarafından problem konusu verilmesine karşın kesrin bölüm anlamını içeren problem yazmadıkları belirlenmiştir. Verilen problem konularını kesrin başka anlamlarını içeren problemler yazmak için kullanmışlardır. Berna yazdığı 4 problemin 1'inde kesrin bölüm anlamını kullanırken, Erdem yazdığı 6 problemin 1'inde kesrin bölüm anlamını kullanabilmiştir. Bu esnada araştırmacı-öğretmen tarafından hem Berna'ya hem de Erdem'e problem konusu verilmiştir (bkz. Şekil 3.86.).

2.  $\frac{x+3}{x+2}$  2

Elimizde bulunan belli sayıda kitaplara 3 tane kitap ekleniyor. Daha sonra bu kitapları kitaplığa yerleştireceğiz. Kitapların bulunan raflar en başta elimizde bulunan kitaplardan 1 fazladır. Kitapları raflara yerleştiğimizde her rafa 2'şer kitap düşmesine göre en başta elimizde kaç kitap vardı?

Bir sınıfta öğrenci sayısı sıra sayısından 3 fazladır. Ahmet öğretmen yer planı yaparken başta öğrenciler sınıfa 1 sıra daha getiriyorlar. Ahmet öğretmen öğrencilerini sıralara oturttüğünde bir sıraya 2 öğrenci oturuyor baştaki 5 sıra sayısı kaçtır?

A: Kemal öğretmen sınıfındaki öğrencileri sıralara oturtmak istiyor....

Berna, Öğretim seansı 6, Bölüm anlamı

Erdem, Öğretim seansı 6, Bölüm anlamı

Erdem'in yorumu

### Şekil 3. 86. Berna ve Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 6

Berna ve Erdem problemleri kendileri oluşturmuş ve yorumlamışlardır. Berna kitapları raflara yerleştirerek raf başına düşen kitap sayısını ifade ederek kesrin bölüm anlamını kullanmıştır. Erdem ise sıra başına düşen öğrenci sayısı ifadesini kullanmış ve kesrin bölüm anlamına dair doğru bir problem oluşturabilmiştir.

Son öğretim seansı olan öğretim seansı 7'de ise Erdem dışındaki katılımcıların tamamı kesrin bölüm anlamını içeren problemler yazabilmişlerdir. Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6'da kesrin bölüm anlamını içeren problem yazmayan katılımcılardan Ayşegül'ün yazdığı 5 problemin 1'ine, Serkan'ın da yazdığı 6 problemin 1'ine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabildikleri belirlenmiştir. Bu esnada araştırmacı-öğretmen tarafından Ayşegül'e problem konusu verilmiş, Serkan'a herhangi bir müdahalede bulunulmamıştır. Berna ise yazdığı 4 problemin 2 tanesine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazmıştır (bkz. Şekil 3.87.).

Bir okulda her sınıfta eşit miktarda öğrenci vardır. Ve her sınıfta öğrencilerin iki eksiği kadar sıra bulunmaktadır. Bu sınıflardan birine bulunduğu öğrenci kadar öğrenci getirilir. Diğer bir sınıfa ise bulunduğu öğrencilerin iki katı daha öğrenci alınır. Bu iki sınıfta birer sırada oturan öğrenci sayıları toplamı 10 ise bu sınıflarda başta kaç öğrenci vardır?

A: Mesela, öğrenciler ve sıralar olsa, ona bir şey yazabilir misiniz bu denklemde ?

Engin'in bir at çiftliği vardır. Engin atlarını bölmelere yerleştirmek istiyor. Bölmelerinden üçü fazla at vardır. Hakan'ın da at çiftliği vardır. Hakan'ın çiftliğinde at sayısı Engin'in çiftliğindeki at sayısına eşittir ve Hakan'ın çiftliğindeki bölme sayısı Engin'in çiftliğindeki bölme sayısı 2 katıdır. Engin'in çiftliğindeki bir bölmeye düşen at sayısı Hakan'ın çiftliğindeki bir bölmeye düşen at sayısından kaç kat fazladır? Hakan'ın kaç bölmeye ihtiyacı vardır?

Ayşegül, Öğretim seansı 7, Bölüm anlamı

Ayşegül'ün yorumu

Serkan, Öğretim seansı 7, Bölüm anlamı

### Şekil 3. 87. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 7

Ayşegül probleminde öğrencileri sıralara eşit bir şekilde dağıtarak kesrin bölüm anlamını problemde kullanabilmiştir. Serkan verilen denkleme ilk probleminden sonra

başka problem yazmak istememiş ve araştırmacı-öğretmen tarafından “*basit düşünelim*” ifadesi kullanılmıştır. Bu ifadenin ardından Serkan kesrin bölüm anlamını içeren bir problem yazmıştır. Bu durum Serkan’ın kesrin bölüm anlamına dair problem yazmama sebebini, yazamamaktan ziyade daha karmaşık ve zor olarak nitelendirdiği ve kesrin farklı anlamlarını içeren problemleri yazmak istediği şeklinde yorumlanabilir. Nitekim Serkan atları bölmelere eşit bir şekilde yerleştirme şeklinde problemini oluşturmuş ve kesrin bölüm anlamını kullanmıştır.  $Pc$   $Pdc$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere katılımcıların tamamı kesrin bölüm anlamını içeren problemler yazabilmişlerdir. Berna en fazla sayıda kesrin bölüm anlamını içeren problem yazan katılımcı olarak belirlenmiştir. Öğretim seansı 6’da araştırmacı-öğretmen tarafından problem konusu verilmekle birlikte kesrin bölüm anlamını içeren 1 problem yazan Berna öğretim seansı 7’de kesrin bu anlamını içeren 2 problemi de kendisi oluşturmuştur.

Erdem öğretim seansı 6’da araştırmacı-öğretmen tarafından problem konusu verilmesinin ardından kesrin bölüm anlamını içeren 1 problem yazmış ancak öğretim seansı 7’de bu anlamı içeren problem yazmamıştır. Öğretim seansı 6’da kesrin bölüm anlamını içeren problem yazmayan Ayşegül ve Serkan ise öğretim seansı 7’de 1’er tane problem yazmışlardır. Ayşegül araştırmacı-öğretmen tarafından verilen problem konusunun ardından kesrin bölüm anlamını içeren 1 problem yazarken, Serkan problemi kendisi yazmış, ancak kolay olarak nitelendirmiştir. Kesrin bu anlamına dair yazılan problemlerin tamamının doğru olduğu belirlenmiştir.

Bölüm anlamına genel olarak bakıldığında, öğretim seanslarında en çok Berna yazmakla birlikte bütün kesir türlerine dair katılımcıların kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabildikleri belirlenmiştir.  $Pc$   $Pdn$  kesirli ifadeleri içeren ilk üç öğretim seansında en fazla kesrin bölüm anlamına dair problem yazılmış ancak en fazla hatalar bu kesir türünde yapılmıştır. Kesrin bölüm anlamına dair en az yazılan problem sayısı  $Pc$   $Pdc$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerin olduğu öğretim seansı 6 ve 7’de belirlenmiştir. Ancak bu problemlerde yanlış bulunmamaktadır. Nitekim öğretim seansları sonunda katılımcıların tamamının farklı kesir türlerini içeren denklemlere kesrin bölüm anlamına dair doğru ve sözel problemler yazabilecekleri söylenebilir.

Katılımcıların problem yazarken kesrin en çok kullandıkları anlamlardan bir diğeri oran anlamıdır.

### **3.2.2.2. Oran anlamı**

İlk klinik görüşmeden elde edilen verilere göre katılımcılardan Serkan Pc Pdn kesirli ifadeler içeren bir denkleme kesrin oran anlamına dair problem yazabilirken, Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren bir denkleme kesrin oran anlamına dair problem yazmaya çalışmış, ancak yanlış yazmıştır. Hiçbir katılımcı tarafından bütün kesir türlerini içeren denklemlere kesrin bu anlamına dair problem yazılamamıştır. Bu nedenle öğretim seanslarında katılımcıların farklı cebirsel kesir türlerini içeren denklemlere kesrin oran anlamını içeren, günlük hayatla ilişkili, sözel ve doğru problemler yazmaları amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda katılımcılardan öncelikle Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bu anlamına dair problem yazma süreçleri incelenmiştir.

#### **3.2.2.2.1. Payı cebirsel paydası nümerik kesirli ifadeleri içeren denklemler**

İlk uygulanan öğretim seansları öğretim seansları 1, 2 ve 3 Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır. Yaklaşık 1 hafta önce yapılan klinik görüşmede katılımcıların daha çok bu kesir türünün bulunduğu denklemlere problem yazmaya çalıştıkları, ancak sadece öğretim seansı 3'te oran anlamının ilk defa kullanıldığı gözlemlenmiştir. Daha önceki öğretim seanslarında kesrin oran anlamına dair katılımcılar tarafından problem yazılamamıştır. Öğretim seansı 1 ve 2'de de kesrin oran anlamını içeren sözel problem sorusu sorulmamıştır.

Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kesrin oran anlamına dair problem konusu verilmesine rağmen iki katılımcı dışında katılımcılar tarafından kesrin bu anlamını içeren problem yazılamadığı belirlenmiştir. Nümerik olarak bakıldığında, katılımcıların kesrin oran anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış ve eksik olma durumları ve hata türlerine dair durumları tablo 3.27.'de sunulmuştur.

**Tablo 3. 27.** Katılımcıların  $Pc$   $Pdc$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Oran anlamı doğru sayısı	Oran anlamı Eksik sayısı	Oran anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil
<b>Ayşegül</b>								
Öğr. Seansı 1	5	5	4 Bölüm 1 Ölçme	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	5	5	4 Bölüm 1 Ölçme	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	2 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran	1	0	0	1	0
Toplam	15	15	10 Bölüm 4 Ölçme 1 Oran	1	0	0	1	0
<b>Berna</b>								
Öğr. Seansı 1	5	5	5 Bölüm	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	4	4	4 Bölüm	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	3 Bölüm 1 İşlemci 1 Oran(E)	0	1	0	1	0
Toplam	14	14	12 Bölüm 1 İşlemci 1 Oran(E)	0	1	0	1	0
<b>Erdem</b>								
Öğr. Seansı 1	5	8	4 Bölüm 2 Ölçme 2 İşlemci	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	4	8	5 Bölüm 1 Ölçme 1 İşlemci	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	6	3 Bölüm 1 İşlemci 1 Parça-Bütün	0	0	0	0	0
Toplam	14	22	12 Bölüm 3 Ölçme 4 İşlemci 1 Parça-Bütün	0	0	0	0	0
<b>Serkan</b>								
Öğr. Seansı 1	4	6	4 Bölüm 1 Ölçme 1 İşlemci	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	4	6	5 Bölüm 1 İşlemci	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	4 Bölüm 1 Parça-Bütün (E)	0	0	0	0	0
Toplam	13	17	13 Bölüm 1 Ölçme 2 İşlemci 1 Parça-Bütün	0	0	0	0	0
Genel Toplam	53	68	47 Bölüm 8 Ölçme 7 İşlemci 2 Oran 2 Parça-Bütün	1	1	0	0	0

Öğretim seansı 3'te Ayşegül araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmaksızın kesrin oran anlamına dair sözel problem yazarken, Berna'nın kesrin oran anlamını içeren bir problem yazmaya çalıştığı, ancak eksik yazdığı belirlenmiştir.

4.  $\frac{x}{30} + \frac{300-x}{50} = 8$

300 kilometrelit bir yolda A aracı gitmiş mesafeyi 30 km/s hızla gitmiştir. B noktasında kalan yolu başta bir aracı 50 km/s hızla devam ettirince B noktasına 8 saatte varmıştır. Buna göre A aracı ne kadar yol gitmiştir?

Levent arkadaşına arabayla gitmeye karar vermektedir. Levent ilk önce 30 km/s ile gitmek daha sonra hızını 50 km/s'e çıkarmaktadır. Levent'in gideceği yolun toplamı 300 km'olması göre

A: Peki, ben problem konusu vereyim mi o zaman? Levent arkadaşının yanına gitmek istiyor "arabayla gitsin. O zaman x Levent'in aldığı yol olsun. 30 Levent'in hızı olsun. 300 o da toplam yol olsun 8... blmiyorum. Aldığı yol bölü sürat eşittir zaman."

Ayşegül, Öğretim seansı 3, Oran anlamı      Berna, Öğretim seansı 3, Oran anlamı      Berna'nın yorumu

**Şekil 3. 88.** Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3

Ayşegül yolu ve hızı birbirine oranlayarak zamanı bulmuş ve kesrin oran anlamına dair problemini oluşturmuştur. Berna'ya ise araştırmacı-öğretmen tarafından problem konusu verilmiş, ancak Berna birimleri karıştırmış ve problemi tamamlayamamıştır. Genel olarak bakıldığında, Pc Pdn kesirli ifadeler içeren denklemlere katılımcıların tamamının kesrin oran anlamına dair problem yazabildiği söylenemez. Sadece bir katılımcı kesrin bu anlamına dair doğru ve sözel bir problem yazabilmiştir. Bir katılımcı da birimleri denkleme yerleştirememiş ve eksik bırakmıştır. Bu aşamada kesrin bu anlamına dair katılımcıların ne tür hatalar yapabileceği de belirlenememiştir.

Diğer kesir türlerini içeren denklemlere kesrin bu anlamına dair problem yazıp yazamadıklarını belirleyebilmek amacıyla öğretim seansı 4 ve 5'te Pn Pdc kesirli ifadeler yazdıkları problemlerde kesrin oran anlamını kullanma süreçleri ele alınmıştır.

### 3.2.2.2.2. Payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler

Daha önce yapılan ilk klinik görüşme ve öğretim seanslarında katılımcılardan Ayşegül ve Serkan kesrin oran anlamını içeren problem yazabilirken, Berna ve Erdem yazmaya çalışmış ancak yazamamışlardır. İlk üç öğretim seansında kesrin oran anlamını içeren sözel problem çözmeleri istenmemiştir.

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4 ve 5'te Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerin aksine bütün katılımcılar tarafından kesrin oran anlamına dair problem yazılabiliştir. Yazılan problemlerin çoğu sözeldir, ancak sözel-matematiksel problemler de mevcuttur. Problemler arasında eksik bırakılmış problem olmamakla birlikte yanlış ve doğru problemler bulunmaktadır. Yapılan yanlışlar denklemi değiştirerek notasyon hatası yapma, pay-payda karıştırma ve kesirli olmayan denklem gibi davranma şeklinde belirlenmiştir. Denklemi değiştirerek notasyon hatası yapma kesrin oran anlamı ile ilgili bir hata değildir. Kesrin oran anlamına dair problemlerde pay-payda karıştırma hatası yapmak ise bölüm anlamından farklı olarak birimlerle alakalı yapılan bir hata türü olarak belirlenmiştir. Nitekim bu hata oran anlamına ait bir hata türü olarak değerlendirilmektedir. Kesirli olmayan denklem gibi davranma hatasında da bölüm anlamına benzer olarak kesir olma durumu problemde verilmemiştir. Katılımcıların kesrin oran anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.28.'de sunulmuştur.

**Tablo 3. 28.** Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Oran anlamı doğru sayısı	Oran anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Yanlış Notasyon-denklemleri değiştirme	Pay-payda karıştırma	Kesirli olmayan denklem gibi davranma
Ayşegül Öğr. Seansı 4	4	4	2 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	1	0	1	0	0	0	0
Öğr. Seansı 5	4	4	2 Bölüm 1 Parça-Bütün 1 Oran	1	0	1	0	0	0	0
Toplam	8	8	4 Bölüm 1 Ölçme 2 Oran 1 Parça-Bütün	2	0	2	0	0	0	0

**Tablo 3. 28.** (Devam) *Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Oran anlamı doğru sayısı	Oran anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Yanlış Notasyon-denklemleri değiştirme	Pay-payda karıştırmaları	Kesirli olmayan denklemler gibi davranma
<b>Berna</b>										
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran	1	0	1	0	0	0	0
Öğr. Seansı 5	4	5	3 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	1	0	1	0	0	0	0
Toplam	8	10	5 Bölüm 3 Ölçme 2 Oran	2	0	2	0	0	0	0
<b>Erdem</b>										
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 3 Ölçme	0	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 5	4	6	1 Bölüm 1 Ölçme 3 Oran	2	1	3	0	0	0	1
Toplam	8	11	3 Bölüm 4 Ölçme 3 Oran	2	1	3	0	0	0	1
<b>Serkan</b>										
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 3 Oran	2	1	1	2	1	0	0
Öğr. Seansı 5	4	5	1Parça-Bütün 2 Ölçme 2 Oran	0	2	2	0	1	2	0
Toplam	8	10	2 Bölüm 2 Ölçme 5 Oran 1Parça-Bütün	2	3	3	2	2	2	0
Genel Toplam	32	39	14 Bölüm 10 Ölçme 12 Oran 2Parça-Bütün	8	4	10	2	2	2	1

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4 ve 5'te Ayşegül yazdığı 8 problemden 2'sine, Berna yazdığı her 10 problemden 2'sine, Erdem yazdığı her 10 problemden 3'üne kesrin oran anlamına dair problem yazabilmişlerdir. Yazdığı 10 problemden 5'ine kesrin oran anlamına dair problem yazabilen Serkan problemlerinde kesrin bu anlamını en çok kullanan katılımcı olmuştur. Ancak bu anlamı kullanırken bazı problemlerinde sözel ve matematiksel dili bir arada kullanmış ve pay ve paydayı karıştırma hataları yapmıştır. Aynı zamanda bazı problemlerini araştırmacı-

öğretmenden aldığı problem konusu dâhilinde yapmıştır. Berna problemlerini doğru yazmış ancak o da araştırmacı-öğretmenden problem konusu alma ihtiyacı duymuştur. Ayşegül ve Erdem ise problemlerini kendileri doğru bir şekilde oluşturabilmişlerdir.

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4'te katılımcılardan Ayşegül'ün 1, Berna'nın 1, Serkan'ın 3 tane probleme kesrin oran anlamını verirken, Erdem'in öğretim seansı 4'te kesrin oran anlamına dair problem yazmadığı belirlenmiştir. Ayşegül Şekil 3.89'deki problemi yazarken, araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmazken, Berna'ya kesrin oran anlamına dair problem oluşturabilmesi amacıyla araştırmacı-öğretmen tarafından problem konusu verilmiştir (bkz. Şekil 3.89.).

$3. \frac{18}{x+4} = 3$	<p>Bir sınıfta <del>bulunan</del> 18 erkeğin bulunmakta-tadır. Bu sınıfta bulunan kızlara farklı bir sınıftan 4 kız daha eklendiğinde erkeklerin kızlara oranı üç ise sınıfta <del>iki</del> başka kaç kız vardı?</p>	<p>Bir ahırda 18 inegimiz vardır. Her bir inelerin 4 koyunumuz vardır. Daha sonra 4 kane daha koyun aldık. İnegimizin koyuna oranı 3 olduğuna göre başlangıçta kaç koyunumuz vardı?</p>	<p>A: Şöyle bir problem konusu vereyim, inekler ve koyunlar olsun. (Problemi yazar.) A: Peki 18 neden pay kısmında, <math>x+4</math> neden payda kısmında? "Çünkü inegün koyuna oranı." Berna'nın yorumu</p>
<p>Ayşegül, Öğretim seansı 4, Oran anlamı</p>	<p>Berna, Öğretim seansı 4, Oran anlamı</p>		

**Şekil 3. 89.** Ayşegül ve Berna 'ya ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4

Ayşegül ve Berna problemlerinde iki çokluğun birbirine oranını ifade ederek kesrin oran anlamını kullanmışlardır. Serkan'a da Berna ile benzer şekilde kesrin oran anlamına dair problem oluşturabilmesi için problem konusu verilmiştir. Serkan bu problem konusunu kullanarak kesrin oran anlamını içeren sözel bir problemi rahatlıkla yazabilmiştir. Ardından 1'i yanlış olmak üzere kesrin oran anlamına dair 2 problem daha oluşturmuştur (bkz. Şekil 3.90.).

$$2. \frac{120}{3x} = 2$$

Bir aracı 120 km/h hızla 2 kilometrelik bir yolu gitmekte  
Aracı 2 kilometrelik yolu 3x saatte gittiğine göre x kaçtır?

Bir aracı 120 kilometrelik bir yolu 3x saatte gid  
Aracı saatte 2 km/h hızla gittiğine göre x kaçtır?

Serkan, Öğretim seansı 4, Oran anlamı, Günlük-  
matematiksel dil, denklemi değiştirme, pay-  
payda karışımı

Serkan, Öğretim seansı 4, Oran anlamı, Günlük-  
matematiksel dil

**Şekil 3. 90.** Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4

Serkan probleminde yolu ve hızı birbirine oranlayarak zamanı ifade etmiş ve kesrin oran anlamını kullanmıştır. Ancak Serkan'ın oluşturduğu yanlış problem ele alındığında, öncelikle 2 kesrin payda kısmında 3x eşitliğin karşı tarafında gibi ifade ederek denklemi değiştirmiştir. Diğer taraftan hızın, yolun ve saatin birimlerini karıştırarak pay ve payda da bir karmaşa yaşamıştır. Ayrıca bilinmeyeni x şeklinde ifade ederek günlük dil ve matematiksel dili bir arada kullanmıştır. Benzer şekilde bu denkleme yazdığı diğer problemde de 3x'i ve x'i doğrudan kullanarak günlük-matematiksel dili içeren bir problem oluşturmuştur.

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 5'te ise katılımcılardan Ayşegül yazdığı 4 problemden 1'ine ve Berna yazdığı 5 problemden 1'ine kesrin oran anlamını içeren problem yazmışlardır (bkz. Şekil 3.91.). Serkan'ın ise yazdığı 5 problemden 2'sinde kesrin oran anlamını kullandığı belirlenirken bir önceki öğretim seansında kesrin oran anlamına dair hiç problem yazamayan Erdem'in yazdığı 6 problemden 3'üne kesrin oran anlamını kullanabildiği belirlenmiştir. Bir önceki öğretim seansı 4'te kesrin bu anlamına dair 1 problem çözmeleri için sorulmuştur.

$$2. \frac{300}{x+10} - \frac{200}{x} = 1$$

$$15 - 14 = 1$$

a)

b)

Birbirine paralel iki ayrı yolda birinci yol 300 km ikinci yol ise 200 km'dir. Birinci yolda hareket eden araç ikinci yolda hareket eden araçtan 10 km/s daha hızlı ilerlemektedir. Birinci yolda hareket eden araç ikinci yolda hareket eden araçtan 1 saat daha geç gitmesi problemin sorulduğu ikinci yolda hareket eden aracın hız kaç km/s'tir?

$$2. \frac{300}{x+10} - \frac{200}{x} = 1$$

Bir helikopter A şehrinde B şehrine gidiyor. A şehrinde B şehrine giderken saatte 200 km/h hızla gidiyor. B şehrinde A şehrine giderken saatte 300 km/h hızla gidiyor ve 10 km daha fazla yol alıyor. Helikopter A şehrinde B şehrine giderken harcadığı zaman, B şehrinde A şehrine giderken harcadığı zamandan 1 saat az ise A şehriyle B şehri arası kaç km'dir?

Ayşegül, Öğretim seansı 5, Oran anlamı

Serkan, Öğretim seansı 5, Oran anlamı, pay-payda karıştırma

### Şekil 3. 91. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 5

Ayşegül de Serkan da hız problemi yazarak kesrin oran anlamını kullanmışlardır. Serkan bir soruda hız zaman problemini oluşturmaya çalışmış, ancak bir önceki öğretim seansında olduğu gibi birimleri karıştırmış ve neyin payı, neyin paydaya geleceği konusunda problem yaşamıştır.

Erdem ise ilk problemi araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmaksızın oluştururken, diğer problemde araştırmacı-öğretmen tarafından problem konusu verilmiştir. Erdem bu problem konusuna dair problemi rahatlıkla yazabilmiştir (bkz. Şekil 3.92.).

$$\frac{3}{x+2} = 1$$

Yapılması gereken 3'ü boyaya isini bir grup işçi kendilerinden 2 fazla işçiye göre için fazla sürede yapmaktadırlar. İşçi sayısı kaçtır?

Erdem, Öğretim seansı 5, Oran anlamı

3 sınıflı bir okulda okuma ve yazma bilenler eşit sayıdadır. Hem okuma hem de yazma bilenler okuma bilenlerin 2/3'ü kadar diler. Ali öğretmen okulda okuma bilenlere kırmızı kurdele, hem okuma hem de yazma bilenlere mavi kurdele takmıştır. Toplamda 1 sınıftaki bütün öğrencilerde kurdele olduğuna göre okuma bilenler kaç kişidir?

Erdem', Öğretim seansı 5, Yanlış, denklemin değişirme

### Şekil 3. 92. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 5

Böylece ilk defa oran anlamına dair problemleri öğretim seansı 5'te oluşturabilmiştir. Bu durumun oluşmasında Erdem'in aşına olduğu işçi ve hız problemlerinin etkisi olduğu düşünülmektedir. Yanlış yazdığı problemde ise oran kurmaya çalıştığını belirtmiş ancak sözel olarak kesir anlamını verememiştir.

Genel olarak Pn Pdc kesirli ifadelerle, katılımcıların hatalar yapmakla birlikte, kesrin oran anlamına dair problem yazabildikleri belirlenmiştir. Yazılan problemlerde denklemleri değiştirme, pay-payda karıştırma ve kesirli olmayan denklem gibi davranma hataları belirlenmiştir. Bu hatalardan pay-payda karıştırma hatası katılımcılar tarafından paya hangi birimin, paydaya hangi birimin gelmesi gerektiği bilinmediği için yapılmıştır. Bu nedenle bu hata türü kesrin oran anlamına ait bir hata olarak kabul edilmiştir. Hatalar araştırmacı-öğretmen ile katılımcı arasında soru cevap şeklinde irdelenerek, ayrıca öğretim seanslarının son bölümünde kesrin bu anlamını içeren sözel problemler sorularak giderilmeye çalışılmıştır. İlk klinik görüşmede hiç problem yazılamayan Pc Pdc kesirli ifadelerine öğretim seansı 6 ve 7'de yer verilmiş ve bu seanslarda katılımcıların kesrin oran anlamına dair problem yazma süreçleri incelenmiştir.

### 3.2.2.2.3. Payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler

İlk klinik görüşmede  $P_c$   $P_{dc}$  ifadeleri içeren hiçbir denkleme katılımcılar tarafından problem yazılamamıştır. Daha önce yapılan öğretim seanslarında ise  $P_c$   $P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere katılımcılardan Ayşegül ve Berna kesrin oran anlamına dair problem yazabilirken, Erdem ve Serkan yazamamışlardır.

$P_n$   $P_{dc}$  ifadeleri içeren denklemlere ise katılımcıların tamamının kesrin oran anlamına dair problem yazabildikleri belirlenmiştir. Daha önce yapılan öğretim seanslarında katılımcılardan kesrin oran anlamını içeren sözel problem çözmeleri istenmiş ve nitekim kendileri de yazabilmişlerdir.

$P_c$   $P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6 ve 7 katılımcılar tarafından kesrin oran anlamına dair en fazla problem yazılan öğretim seansları olmuştur. Yazılan problemlerin çoğu sözeldir, ancak sözel-matematiksel problem de mevcuttur. Problemler arasında eksik bırakılmış problem olmamakla birlikte, Erdem 1 soruda kesrin oran anlamına dair problem yazmaya çalışmış, ancak yazamamış ve tamamen boş bırakmıştır.

Katılımcılar tarafından sadece 1 problem yanlış yazılmıştır. Yapılan yanlış ise kesirli olmayan denklem gibi davranma şeklinde olmuştur. Kesirli olmayan denklem gibi davranmada, bölüm anlamına benzer olarak, kesir olma durumu problemde verilmemiştir. Katılımcıların kesrin oran anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.29.'da verilmiştir.

**Tablo 3. 29.** Katılımcıların  $P_c$   $P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Oran anlamı doğru sayısı	Oran anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Kesirli olmayan denklem gibi davranma
<b>Ayşegül</b>								
Öğr. Seansı 6	4	7	1 Ölçme 4 Oran 2 Parça-bütün	4	0	3	1	0
Öğr. Seansı 7	4	5	1 Bölüm 2 Ölçme 2 Oran	2	0	2	0	0

**Tablo 3. 29.** (Devam) *Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Oran anlamı doğru sayısı	Oran anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Kesirli olmayan denklem gibi davranma
Toplam	8	12	1 Bölüm 3 Ölçme 6 Oran 2 Parça-bütün	6	0	5	1	0
<b>Berna</b>								
Öğr. Seansı 6	4	4	1 Bölüm 1 Ölçme 2 Oran	2	0	2	0	0
Öğr. Seansı 7	4	4	2 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	1	0	1	0	0
Toplam	8	8	3 Bölüm 2 Ölçme 3 Oran	3	0	3	0	0
<b>Erdem</b>								
Öğr. Seansı 6	4	6	1 Bölüm 5 Oran	4	1	5	0	1
Öğr. Seansı 7	4	5	3 Ölçme 2 Oran	2	0	2	0	0
Toplam	8	11	1 Bölüm 3 Ölçme 7 Oran	6	1	7	0	1
<b>Serkan</b>								
Öğr. Seansı 6	4	5	1 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran 2 Parça-bütün	1	0	1	0	0
Öğr. Seansı 7	4	6	1 Bölüm 3 Ölçme 2 Oran	2	0	2	0	0
Toplam	8	11	2 Bölüm 5 Ölçme 3 Oran 2 Parça-bütün	3	0	3	0	0
Genel Toplam	32	42	7 Bölüm 12 Ölçme 19 Oran 4 Parça-bütün	18	1	18	1	1

Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6’da katılımcılardan Ayşegül yazdığı 7 problemde 4’ün de, Berna yazdığı 4 problemde 2’sinin de kesrin oran anlamını kullanmıştır. Öğretim seansı 6’da 6 problem yazan Erdem 5 tanesinde kesrin oran anlamını kullanırken, Serkan sadece yazdığı 4 problemde 1’inde kesrin oran

anlamını kullanabilmiştir. Ayşegül ve Serkan'a şekil 3.93'teki problemi yazarken araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmazken, Berna'ya kesrin oran anlamına dair problem oluşturabilmesi amacıyla araştırmacı-öğretmen tarafından problem konusu verilmiştir (bkz. Şekil 3.93.). Nitekim Berna problemi rahatlıkla oluşturabilmiştir.

3.  $\frac{x-2}{3x+2} = \frac{1}{4}$

Bir ağaçtan belli miktarda elma toplanıyor. Bu elmaların 2 tanesi önceki altmış gün toplanıyor. İkinci gün 8 ağaç her birinden ilk başta toplanan elma kadar elma toplanıyor. Berna sonra 2 elma ekleniyor. İlk gün toplanan elma sayısına, ikinci gün toplanan elma sayısına oranı  $\frac{1}{4}$  olduğuna göre elimizde ne kadar elma vardı?

A: Peki, ben ağaçtaki elmalar desem, bir şey gelir mi?

1.  $\frac{x}{x+4} = \frac{1}{5}$

Kesrin oranı elma farklı uzunlukta iki tahta parçası vardır. Küçük tahta büyük tahtadan 4 cm kısa ve oranları  $\frac{1}{5}$  olduğuna göre küçük tahta kaç cm'dir?

Berna, Öğretim seansı 6, Oran anlamı

Berna'nın Yorumu

Serkan, Öğretim seansı 6, Oran anlamı

### Şekil 3. 93. Ayşegül, Berna ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 6

Berna, probleminde doğrudan ağaçtaki elmaları birbirine oranlarken, Serkan tahta uzunluklarını birbirine oranlayarak kesrin oran anlamını kullanmıştır. Yazdığı problemlerde oran anlamını en fazla kullanan katılımcı olan Erdem ise bir soruda denklemi değiştirerek kesirli olmayan denkleme dönüştürmüştür. Diğer soruda ise sözel matematiksel dili bir arada kullanmıştır (bkz. Şekil 3.94.).

1.  $\frac{x}{x+4} = \frac{1}{5}$

2.  $\frac{x-2}{3x+2} = \frac{1}{4}$

Bir sınıfta kızların sayısının 4 fazlası erkeklerin sayısına eşittir. Erkeklerin sayısı kızların 5 katı sayıdadır. Sınıfta kaç kız vardır?

3.  $\frac{x-2}{3x+2} = \frac{1}{4}$

$\frac{x-2}{3x+2} = \frac{1}{4}$

2 sene önceki yaşımın simdiki yaşımın 3 katının 2 fazlasına oranı  $\frac{1}{4}$ 'tür. Bugünkü yaşım kaçtır?

Erdem, öğretim sayısı 6, Oran anlamı, Yanlış notasyon, kesirli olmayan denklem gibi davranma

Erdem, öğretim sayısı 6, Oran anlamı, Sözel-Matematiksel dil

### Şekil 3. 94. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 6

Erdem ilk probleminde kesrin oran anlamını kullanmış ancak kesir vurgusunu yapamamıştır. Yazdığı problem " $x+4 = 5x$ " cebirsel ifadesini karşılamaktadır. Diğer problemde ise " $3$  katının  $2$  fazlası" ifadesi ile matematiksel dil kullanmıştır. Başka bir

soruda ise işçi problemi yazmak istemiş ve problem konusunu bu şekilde belirlemiş, ancak devamını getirememiş ve boş bırakmıştır.

Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 7’de ise katılımcıların tamamının kesrin oran anlamını içeren problem yazabildikleri belirlenmiştir. Bir önceki öğretim seansında katılımcıların çözmeleri için kesrin bu anlamını içeren 3 problem sorulmuş ve çözmeleri istenmiştir. Öğretim seansı 7’de Ayşegül yazdığı 5 problemden 2’sine kesrin oran anlamını verirken, yazdıkları 4’er problemden Berna 1’ine, Erdem ise 2’sine kesrin oran anlamını verebilmiştir. Serkan ise yazdığı 6 problemden 2’sine kesrin oran anlamını vermiştir. Şekil 3.95.’te verilen sözel problem örneklerinde Ayşegül ve Serkan’a araştırmacı-öğretmen tarafından problem konusu verilmiştir. Berna ve Erdem problemlerini kendileri oluşturmuşlardır.

$$2. \frac{x+3}{x} - \frac{x+3}{2x} = 2$$

Bir sınıfta eşit sayıda kız ve erkek bulunmaktadır. Bu sınıfta belki daha geldiğindeki erkeklerin kızlara oranı sınıfta suan bulunan erkeklerin ilk başteki sınıf mevcuduna oranının 2 fazladır. Buna göre sınıfta ilk başta kaç erkek vardı?

$$3. \frac{40+x}{100+x} - \frac{20+x}{80+x} = \frac{1}{10}$$

Serkan'ın elinde 100 gramlık ve 80 gramlık tuz su karışımı bulunmaktadır. 100 gramlık karışımın 40 gramı 80 gramlık karışımın da 20 gramı tuzdur. Bu iki karışımı aynı miktarda paket tuz ekliyor, 100 gramlık karışımın tuz oranı 80 gramlık karışımın tuz oranından fazla ise tuz paketini kaç gramdır?

Ayşegül, Öğretim seansı 7, Oran anlamı

Serkan, Öğretim seansı 7, Oran anlamı

### Şekil 3. 95. Ayşegül ve Serkan’a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 7

Ayşegül probleminde kız ve erkeklerin birbirine oranından bahsederken, Serkan ise tuz su karışımına dair bir problem yazarak kesrin oran anlamını kullanmıştır. Sadece 1 problem yanlış yazılmış, geri kalanı doğru olarak yazılmıştır. Yapılan yanlış ise kesirli olmayan denklem gibi davranma şeklinde olmuştur. Kesirli olmayan denklem gibi davranmada bölüm anlamına benzer olarak kesir olma durumu problemde verilmemiştir. Bu hata türü kesrin oran anlamına ait bir hata olarak belirlenmiştir. Hatalar araştırmacı-öğretmen ile katılımcı arasında soru cevap şeklinde irdelenerek, ayrıca öğretim seanslarının son bölümünde kesrin bu anlamını içeren sözel problemler sorularak giderilmeye çalışılmıştır.

Oran anlamına genel olarak bakıldığında, öğretim seanslarında en çok Erdem'in bu anlama dair problem yazabildiği belirlenmiştir. Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere sadece Ayşegül ve Berna kesrin oran anlamına dair problem yazabilirken, diğer kesir türlerine tüm katılımcılar kesrin bu anlamını içeren problem yazabilmişlerdir. Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren ilk üç öğretim seansları kesrin oran anlamına dair en az problem yazılabilen seanslar olmuştur.

Kesrin oran anlamına dair en fazla yazılan problem sayısı Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerin olduğu öğretim seansı 6 ve 7'de belirlenmiştir ve bu problemlerde sadece 1 tane yanlış bulunmaktadır. En çok yanlış ise Pn Pdc ifadeleri içeren öğretim seansı 4 ve 5'te bulunmaktadır. Nitekim öğretim seansları sonunda katılımcıların tamamının Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere ve Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin oran anlamına dair sözel problemler yazabilecekleri söylenebilir. Ancak Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemler için aynı şey söylenemez.

Katılımcıların problem yazarken kesrin bölüm ve oran anlamından sonra en çok kullandıkları diğer anlam ise kesrin ölçme anlamıdır.

### **3.2.2.3. Ölçme anlamı**

İlk klinik görüşmeden elde edilen verilere göre katılımcıların yazılan 12 problemin 1'ine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabildikleri belirlenmiştir. Yazılan problem ise  $Pc Pdn$  kesirli ifadeleri içeren denkleme yazılabilmektedir. Ayrıca bütün kesir türlerini içeren denklemlere hiçbir katılımcı tarafından kesrin bu anlamını içeren problem yazılamamıştır. Bu nedenle öğretim seanslarında katılımcıların farklı cebirsel kesir türlerini içeren denklemlere kesrin ölçme anlamını içeren, günlük hayata ilişkili, sözel ve doğru problemler yazmaları amaçlanmıştır. Öncelikle katılımcıların  $Pc Pdn$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazdıkları problemlerde kesrin ölçme anlamını kullanma süreçleri irdelenmiştir.

#### **3.2.2.3.1. Payı cebirsel paydası nümerik kesirli ifadeleri içeren denklemler**

İlk uygulanan öğretim seansları öğretim seansı 1,2 ve 3  $Pc Pdn$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır. Katılımcılardan Berna'nın bu kesir türünü içeren denklemlere kesrin ölçme anlamına dair problem yazmadığı belirlenirken, Serkan'ın sadece 1 tane yanlış problem yazabildiği görülmüştür. Ayşegül bütün öğretim seanslarında kesrin ölçme anlamını içeren problemler yazabilirken, Erdem'in öğretim seansı 1 ve 2'de kesrin bu anlamına dair problem yazabildiği belirlenmiştir.

Yazılan problemlerin tamamı sözel olarak yazılabilmektedir. Yapılan hatalar yanlış notasyon ve değişkenin anlamı şeklinde belirlenmiştir. Yanlış notasyon hatasının yine kesrin anlamı ile ilgili olmadığı düşünülürken, değişkenin anlamı hatasının kesrin ölçme anlamı ile ilgili olduğu görülmüştür.  $Pc Pdn$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde araştırmacı-öğretmen tarafından kesrin ölçme anlamına dair problem konusu verilmiş ancak katılımcıların kesrin bu anlamından ziyade başka anlamları kullandıkları görülmüştür.

Katılımcıların kesrin ölçme anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.30'da sunulmuştur (bkz. Tablo 3.30.).

**Tablo 3. 30.** Katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Ölçme anlamı doğru sayısı	Ölçme anlamı Eksik sayısı	Ölçme anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Yanlış Notasyon-denklemleri değiştirme	Değişkenin anlamı
<b>Ayşegül</b>										
Öğr. Seansı 1	5	5	4 Bölüm 1 Ölçme	1	0	0	1	0	0	0
Öğr. Seansı 2	5	5	4 Bölüm 1 Ölçme	1	0	0	1	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	2 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran	2	0	0	2	0	0	0
Toplam	15	15	10 Bölüm 4 Ölçme 1 Oran	4	0	0	4	0	0	0
<b>Berna</b>										
Öğr. Seansı 1	5	5	5 Bölüm	0	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	4	4	4 Bölüm	0	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	3 Bölüm 1 İşlemci 1 Oran(E)	0	0	0	0	0	0	0
Toplam	14	14	12 Bölüm 1 İşlemci 1 Oran(E)	0	0	0	0	0	0	0
<b>Erdem</b>										
Öğr. Seansı 1	5	8	4 Bölüm 2 Ölçme 2 İşlemci	2	0	0	2	0	0	0
Öğr. Seansı 2	4	8	5 Bölüm 1 Ölçme 1 İşlemci	0	0	1	1	0	0	1
Öğr. Seansı 3	5	6	3 Bölüm 1 İşlemci 1 Parça-Bütün	0	0	0	0	0	0	0
Toplam	14	22	12 Bölüm 3 Ölçme 4 İşlemci 1 Parça-Bütün	2	0	1	3	0	0	0
<b>Serkan</b>										
Öğr. Seansı 1	4	6	4 Bölüm 1 Ölçme 1 İşlemci	0	0	1	1	0	1	0
Öğr. Seansı 2	4	6	5 Bölüm 1 İşlemci	0	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	4 Bölüm 1 Parça-Bütün (E)	0	0	0	0	0	0	0
Toplam	13	17	13 Bölüm 1 Ölçme 2 İşlemci 1 Parça-Bütün	0	0	1	0	0	0	0

**Tablo 3. 30.** (Devam) *Katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Ölçme anlamı doğru sayısı	Ölçme anlamı Eksik sayısı	Ölçme anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Yanlış Notasyon-denklemleri değiştirme	Değ işke nin anlamı
Genel Toplam	53	68	47 Bölüm 8 Ölçme 7 İşlemci 2Oran 2Parça-Bütün	6	0	2	8	0	1	1

Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 1, 2 ve 3'te Ayşegül yazdığı 15 problemden 4'üne, Erdem yazdığı 20 problemden 3'üne ve Serkan yazdığı 17 problemden 1'ine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabilmiştir. Berna ise hiçbir problemde kesrin ölçme anlamını kullanmamıştır. Elde edilen verilere göre Ayşegül yazdığı problemlerde en fazla kesrin ölçme anlamını kullanan katılımcı olarak belirlenmiştir. Aynı zamanda yazdığı problemlerin hepsini doğru yazabilmiştir. Katılımcıların tamamı bazı durumlarda araştırmacı-öğretmenden problem konusu alma ihtiyacı duymuşlardır. Yapılan yanlışlar, yanlış notasyon ve değişkenin anlamında karmaşa şeklinde tespit edilmiştir.

Öğretim seansı 1'de katılımcılardan Ayşegül, Erdem ve Serkan'ın 1'er tane kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabildikleri belirlenmiştir. Yaklaşık 1 hafta önce yapılan klinik görüşmede de katılımcılardan kesrin ölçme anlamını içeren 2 sözel problemi çözmeleri istenmiştir. Ayşegül verilen denklemlere yazdığı 5 sözel problemin 1'inde kesrin ölçme anlamını kullanmıştır (bkz. Şekil 3.96.).

5.  $\frac{x+1}{2} = 5$

Bir anasınıfındaki öğrenciler yılsonu için ikişer kişilik dans grupları oluşturuluyor. Bir kişi daha gelirse 5 tane dans grubu oluşuyor. Sınıfta kaç kişi vardır?

A: Tamam. Grup ayırma olayına bakalım. Gruplara farklı şekilde yaklaşsak mesela.

"2 tane grup dışında nasıl yaklaşabilirim ki?... 2 kişi."

A: Mesela anaokulu öğrencilerine dans gösterisi yaptıracağız...

"bölü 2, 2'şer kişilik dans grupları olduğu için bölü 2 diyorum. İm...  $x+1$ 'in pay da olmasının nedeni im...  $x+1$  tane kişiyi 2'li 2'li ayıracaklar. Bu yüzden  $x+1$  pay kısmında. 5, 5 tane dans grubu oluşuyor."

Ayşegül, Öğretim seansı 1, Ölçme anlamı

Ayşegül'ün Yorumu

**Şekil 3. 96.** Ayşegül'e ait sözel problem örneği ve yorumu, Öğretim seansı 1

Şekil 3.96.'da problem yazılmadan önce araştırmacı-öğretmen ile Ayşegül arasındaki diyaloga bakıldığında araştırmacı-öğretmen probleme farklı bir şekilde yaklaşılmasını istemiştir. Ayşegül probleminde öğrencileri gruplara bölerek grup başına düzen öğrenci sayısından farklı olarak öğrenci sayısını gruplardaki kişi sayısına bölerek grup sayısını bulmuş ve ölçme yapmıştır. Nitekim Ayşegül verilen denkleme kesrin ölçme anlamını içeren sözel bir problem yazabilmiş ve kesrin bölüm anlamını içeren problemlerle olan farklılığını doğru bir şekilde yorumlayabilmiştir. Erdem ve Serkan ise araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmaksızın verilen denklemlere 1'er tane kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabilmişlerdir (bkz. Şekil 3.97).

3.  $\frac{4x}{3} = 8$

4 kitabımı günde 3'er saatte okursam 8 günde bitirebilirim. Bir kitabı kaç günde bitirebilirim?

4.  $\frac{x}{2} = 3$

Bir sınıfta eşit sayıda kız ve erkek bulunmaktadırlar.

Bir sınıfta öğrenciler bir kız bir erkek şeklinde oturacaklardır. Öğrenciler ikişerli şekilde üç masaya oturduklarında gençe öğrenci kalmıyor. Buna göre sınıfta kaç öğrenci vardır?

Erdem, Öğretim seansı 1, Ölçme anlamı

Serkan, Öğretim seansı 1, Ölçme anlamı, yanlış notasyon- denklemleri değiştirme

**Şekil 3. 97.** Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 1

Erdem verilen denkleme yazdığı problemde  $1/3$ 'ü birim olarak almış ve sonuçta 4 kitabın kaç günde bitirildiğini bularak bir zaman ölçü birimi elde etmiştir. Serkan ise verilen denklemde  $1/2$ 'yi ölçme birimi olarak almış ve öğrencilerin 2'şerli şekilde oturduklarında 3 masaya oturabileceklerini belirterek kullanılacak masa adedini ölçmüştür. Ancak yazdığı problem " $x=2$  çarpı 3" ifadesini vermektedir. Denklemi değiştirerek notasyon hatası yapmıştır.

Öğretim seansı 2'de ise Ayşegül ve Erdem kesrin ölçme anlamını içeren 1'er sözel problem yazabilmişlerdir. Yaklaşık 1 hafta önce yapılan öğretim seansı 1'de de katılımcılardan kesrin ölçme anlamını içeren 1 sözel problemi çözmeleri istenmiştir. Ayşegül probleminde bahçede 5 metrede bir su içerek toplamda kaç bardak su içildiğini ifade etmiş ve kesrin ölçme anlamını probleminde kullanmıştır. Erdem pay kısmına para yerine kalem sayısı olarak ifade etmiş ve paraya bölerek kalem sayısını bulmaya çalışmıştır. Değişkene verdiği anlamı düzenleyememiştir. Ancak paraya bölüp kaç kalem aldığını ölçmeye çalıştığı için probleminde kesrin ölçme anlamını kullanmıştır (bkz. Şekil 3.98.).

<p>1. <math>\frac{x}{5} = 3</math></p> <p>→ Ali bahçesindeki çimlere bakıyordu. Her 5 metrede bir bardak su içer. Ali çimlere bakarken bir çimle beraber 5 metrede kaç bardak su içtiğini hesaplıyor. Bu bahçe kaç metredir?</p> <p>Ayşegül, Öğretim seansı 2, ölçme anlamı</p>	<p>4. <math>\frac{3(x+2)}{5} = 3</math></p> <p>Kalemlerimin 2 fazlasının 3 katı kadar kalemim 5 liradan 3 tane aldım. Kaç kalemim vardır?</p> <p>Erdem, Öğretim seansı 2, Ölçme anlamı, değişkenin anlamında karmaşa</p>
---	--

**Şekil 3. 98.** Ayşegül ve Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 2

Öğretim seansı 3'te ise sadece Ayşegül kesrin ölçme anlamına dair problem yazabilmiştir. Yaklaşık 1 hafta önce yapılan öğretim seansı 2'de kesrin ölçme anlamını içeren 2 tane sözel problem sorusu bulunmaktadır (bkz. Şekil 3.99.).

$$2. \frac{7x}{3} + \frac{2x}{3} = 10$$

7 damacana da bulunan suyu 3'er litrelik kaplara ayırdığımızda, 2 damacana da bulunan suyu 3'er litrelik kaplara boşalttığımızda 10 kap daha fazla elde ederiz bir damacana da kaç litre su vardır?

$$3. \frac{2x}{10} + \frac{3x}{12} = 36$$

İki etek sepetinde bulunan etekleri orantılı şekilde ayırdık poşetlere koydık. Ardından 3 etek sepetinde bulunan etekleri orantılı poşetlere ayırdığımızda elimizde toplam 76 tane poşet bulunuyorsa bir sepette toplam kaç etek vardır?

Ayşegül, Öğretim seansı 3, Ölçme anlamı

Ayşegül, Öğretim seansı 3, Ölçme anlamı

### Şekil 3.99. Ayşegül'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3

Ayşegül damacana suları belli litre su alabilen kaplara boşaltmış, kap sayısını bularak kesrin ölçme anlamını probleminde kullanmıştır (bkz. Şekil 3.99.). Diğer katılımcılara problem konusu verilmesine karşın kesrin ölçme anlamına dair problem yazamamışlardır.

Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere Berna'nın kesrin ölçme anlamına dair problem yazmadığı belirlenirken, Serkan'ın sadece 1 tane yanlış problem yazabildiği görülmüştür. Ayşegül bütün öğretim seanslarında kesrin ölçme anlamına dair problem yazabilirken, Erdem'in öğretim seansı 1 ve 2'de kesrin bu anlamına dair problem yazabildiği belirlenmiştir.

İlk üç öğretim seansı sonunda, bütün katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin ölçme anlamına dair problem yazabildiğini söylemek mümkün değildir. Yazılan problemlerin tamamı sözel olarak ifade edilebilmiştir. Problemlerde yapılan hatalar yanlış notasyon ve değişkenin anlamı şeklinde belirlenmiştir. Yanlış notasyon hatasının yine kesrin anlamı ile ilgili olmadığı düşünülürken, değişkenin anlamı hatasının kesrin ölçme anlamı ile ilgili olabileceği görülmüştür. Hangi birimin hangi birime bölünerek neyin ölçüleceğini belirleyebilmek için değişkenin ne anlam ifade edeceğinin önemli olduğu düşünülmektedir.

Hatalar araştırmacı-öğretmen ile katılımcı arasında soru cevap şeklinde irdelenerek, ayrıca öğretim seanslarının son bölümünde kesrin bu anlamını içeren sözel problemler sorularak giderilmeye çalışılmıştır. Diğer kesir türlerini içeren denklemlere kesrin bu anlamına dair problem yazıp yazamadıklarını belirleyebilmek amacıyla öğretim seansı 4 ve 5'te Pn Pdc kesirli ifadelere yazdıkları problemlerde kesrin ölçme anlamını kullanma süreçleri incelenmiştir.

### 3.2.2.3.2. Payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler

Daha önce yapılan öğretim seanslarında katılımcılardan kesrin ölçme anlamını içeren sözel problem çözmeleri istenmiş ve Berna dışında hepsi yazabilmişlerdir. Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4 ve 5'te katılımcıların tamamının kesrin ölçme anlamını içeren problemler yazabildikleri görülmüştür. Ayşegül sadece öğretim seansı 4'te Serkan ise sadece öğretim seansı 5'te kesrin ölçme anlamına dair problem yazabilirken, Berna ve Erdem her iki öğretim seansında da kesrin bu anlamına dair problem yazabilmişlerdir. Yazılan 10 problemde 7'si doğru, 1'i eksik 2'si yanlış olarak belirlenmiştir.

Ayşegül dışındaki diğer katılımcılar, kesrin ölçme anlamına dair problem yazabilmek için araştırmacı-öğretmenden problem konusu alma ihtiyacı duymuşlardır. Yazılan problemlerin sadece 1 tanesi sözel-matematiksel ifade içermektedir. Erdem yazmaya çalıştığı problemde matematiksel ifadeyi karşılayan sözel bir ifade bulamamıştır. Günlük dil ile matematiksel dili bir arada kullanarak ifade etmeye çalışmış ve problemi tamamlayamayarak eksik bırakmıştır. Yapılan yanlış notasyon ve matematiksel içerik eklemek hatalarının ise kesrin ölçme anlamı ile ilgili olmadığı belirlenmiştir.

Katılımcıların kesrin ölçme anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.31.'de sunulmuştur (bkz. Tablo 3.31.).

**Tablo 3. 31.** Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Ölçme anlamı doğru sayısı	Ölçme anlamı Eksik sayısı	Ölçme anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Yanlış Notasyon-denkleme değiştirme	Matematiksel içerik eklemek
<b>Ayşegül</b>										
Öğr. Seansı 4	4	4	2 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	0	0	1	1	0	1	0
Öğr. Seansı 5	4	4	2 Bölüm 1 Parça-Bütün 1 Oran	0	0	0	0	0	0	0
Toplam	8	8	4 Bölüm 1 Ölçme 2 Oran 1 Parça-Bütün	0	0	1	1	0	1	0

**Tablo 3. 31.** (Devam) *Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Ölçme anlamı doğru sayısı	Ölçme anlamı Eksik sayısı	Ölçme anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Yanlış Notasyon-denklemleri değiştirme	Matematiksel içerik eklemek
<b>Berna</b>										
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran	1	0	1	2	0	0	1
Öğr. Seansı 5	4	5	3 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	1	0	0	1	0	0	0
Toplam	8	10	5 Bölüm 3 Ölçme 2 Oran	2	0	1	3	0	0	1
<b>Erdem</b>										
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 3 Ölçme	2	1	0	2	1	0	0
Öğr. Seansı 5	4	6	1 Bölüm 1 Ölçme 3 Oran	1	0	0	1	0	0	0
Toplam	8	11	3 Bölüm 4 Ölçme 3 Oran	3	1	0	3	1	0	0
<b>Serkan</b>										
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 3 Oran	0	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 5	4	5	1Parça-Bütün 2 Ölçme 2 Oran	2	0	0	2	0	0	0
Toplam	8	10	2 Bölüm 2 Ölçme 5 Oran 1Parça-Bütün	2	0	0	2	0	0	0
Genel Toplam	32	39	14 Bölüm 10 Ölçme 12 Oran 2Parça-Bütün	7	1	2	9	1	1	1

Genel olarak bakıldığında, yazdığı 9 problemden 4'üne kesrin ölçme anlamını vererek en başarılı katılımcı Erdem olmuştur. Ayşegül yazdığı 8 problemden 1'ine, Berna yazdığı 9 problemden 3'üne, Serkan ise yazdığı 10 problemden 2'sine kesrin ölçme anlamını verebilmiştir. Erdem ve Serkan değişkene anlam verme konusunda problem yaşarken, Ayşegül denklemleri değiştirme hatası yapmıştır. Berna, Erdem ve Serkan araştırmacı-öğretmenden problem konusu alma ihtiyacı duyarken, Ayşegül problem konusunu kendisi bulmuştur.

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4'te katılımcılardan Ayşegül 1, Berna 2, Erdem 3 tane probleme kesrin ölçme anlamını verirken, Serkan'ın öğretim seansı 4'te kesrin ölçme anlamına dair problem yazmadığı belirlenmiştir. Berna'ya ve Erdem'e “Bahar kitap okuyor...” şeklinde problem konusu verilmiş ve verilen problem konusuna kesrin ölçme anlamına dair problem yazabildikleri belirlenmiştir. Her iki katılımcı da kitabın toplam sayfa sayısını bir günde okunan sayfa sayısına bölerek kaç günde kitabın bittiğini belirtmiş ve problemlerinde kesrin ölçme anlamını kullanmışlardır. Erdem'in kesrin ölçme anlamına dair yazdığı diğer problemlerde araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmamıştır (bkz. Şekil 3.100.).

1.  $\frac{24}{4}=6$   
Bahar 24 sayfalık bir çocuk kitabı okumak-  
tedir. Bahar bu kitabı 4 günde bitirdiğine  
göre her gün kaç sayfa kitap okumuştur?

Bahar 24 sayfalık kitabını her gün 6  
olarak okumak şartıyla günde kaç sayfa  
okursa 4 günde bitirebilir?

Berna, Öğretim seansı 4, Ölçme anlamı

Erdem, Öğretim seansı 4, Ölçme anlamı

**Şekil 3. 100.** Berna ve Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4

Ayşegül kesrin ölçme anlamını içeren 1 problem yazmış, ancak “24 km mesafeyi 4 defa koştuğunu” belirtmiş ve denklemini  $24/4=x$  şeklinde yazılabilen sözel ifadeler kullanıp değiştirerek notasyon hatası yapmıştır. Erdem ise kesrin ölçme anlamını içeren bir problem yazmaya çalışmış, ancak problemi eksik bırakmıştır (bkz. Şekil 3.101.).

1.  $\frac{24}{4}$   
Ali bir antrenmanda bisiklet  
pisti 4 defa dolaşmıştır. Toplam  
24 km mesafe koştuğuna göre bisiklet  
pistin çevresi kaç km'dir?

$$3. \frac{18^3}{x+4}=3$$

18 litre suyu 1 litre  $x+4$  litre daldurula  
bilen 3 şişeye daldurabildim. Şişe

A: Tamam. 18  
litre suyum  
olsun. Onu  
doldurayım ama  
 $x$  ve  $x+4$ 'e bir  
şey vermemiz  
gerekliyor. Nasıl  
bir şey  
verebiliriz?  
“... (17 saniye  
düşünür.)”

Ayşegül, Öğretim seansı 4, Ölçme anlamı,  
yanlış notasyon

Erdem, Öğretim seansı 4, Ölçme  
anlamı, Eksik

Erdem'in  
yorumu

**Şekil 3. 101.** Ayşegül ve Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 4

Erdem yazmaya çalıştığı problemde  $x+4$ 'ü karşılayan sözel bir ifade bulamamıştır. Şekil 3.101.'de görüldüğü gibi günlük dil ile matematiksel dili bir arada

kullanarak ifade etmeye çalışmıştır. Bu nedenle de eksik bırakmayı tercih etmiştir. Berna ise problemde tarlayı işçilerin çalışma miktarına bölüp 2 haftada tarlanın sürüldüğünü ifade etmeye çalışmış ve kesrin ölçme anlamını kullanmayı düşünmüştür. Ancak birkaç gün ifadesini kullanarak farklı bir matematiksel içerik daha eklemiştir (bkz. Şekil 3.102.).

2.  $\frac{120}{30} = 24$

Bir tarla sahibi 120 dönümlük tarlasını biçirecektir. Tarlasını biçmeye başladıktan bir kaç gün sonra etindeki işçilerin 3 katı işçi çalışmaya başlıyor. Tarlanın biçimi 2 hafta sürdüğüne göre ilk başta tarlada kaç işçi çalışmaktaydı?

A: Oldu mu?  
 “Şey burada tarlanın biçilmesi 2 hafta sürüyor ama biz burada bir işçinin ne kadar iş yapabildiğini bilmiyoruz. O yüzden.”  
 A: Ha ondan kaynaklı bir sorun mu var diyorsunuz?  
 A: Bir de ben şeye takıldım, şimdi tarla 120 dönümlük. Siz diyorsunuz ki işçiler birkaç gün çalışıyor, sonra şey oluyor. O zaman bu birkaç günde tarlanın bir kısmı biçilmiş olmuyor mu?  
 “Oluşuyor. O zaman 120 dönüm kalmıyor değil mi?”  
 Berna'nın yorumu

Berna, Öğretim seansı 4, yanlış notasyon, Matematiksel içerik eklemek

**Şekil 3. 102.** Berna'ya ait sözel problem örneği, Öğretim seansı 4

Kesrin ölçme anlamına dair öğretim seansı 4'te hiç problem yazmadığı belirlenen Serkan'ın araştırmacı-öğretmen tarafından verilen problem konusuna dair ölçme anlamını oluşturabildiği ancak Erdem'in durumuna benzer şekilde  $2x+1$ 'e anlam veremediği belirlenmiştir. Bu nedenle Serkan bu soruyu boş bırakmıştır (bkz. Şekil 3.103.).

4.  $\frac{36}{2x+1} = 4$

A: Toz şekerimiz olsun. Toz şeker.  
 “ 10 saniye düşünür.)  
 “ 36 kg toz şekerim olsa. Bunları  $2x+1$  kilogramlık poşetlere, paketlere koysak..... Diye düşündüm ama  $2x+1$  i nasıl bir anlam vereceğimi bulamadım.”  
 A: Evet  $2x+1$  e bir anlam verebilirsek iyi olur. (31 saniye düşünür.)  
 “ Şu an gerçekten kuramıyorum bir şey.”  
 Serkan'ın yorumu

Serkan, Öğretim seansı 4, Ölçme anlamı

**Şekil 3. 103.** Serkan'a ait sözel problem örneği, Öğretim seansı 4

Öğretim seansı 5'te ise katılımcılardan Ayşegül'ün kesrin ölçme anlamını içeren problem yazmadığı görülmüştür. Erdem'in ve Berna'nın yazdıkları 4 problemde 1'ine kesrin ölçme anlamını verirken öğretim seansı 4'te kesrin ölçme anlamına dair hiç

problem yazmamış olan Serkan'ın bu seansta 5 problemde 2'sine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazdığı belirlenmiştir. Bir önceki öğretim seansı 4'te kesrin bu anlamına dair 2 problem çözmeleri için sorulmuştur.

<p>3. <math>\frac{450}{x} + \frac{450}{x+2} = 240</math></p> <p>450 kilogram elmayı belirli kilogram elma alabilen kasalara ve aynı miktar elmayı ilk uygulamada kullandığım kasaların iki fazlası elma alabilen kasalara koyduğumda 240 kasa kullanmış olurum. Bir kasa ne kadar elma alabilir?</p> <p>Erdem, Öğretim seansı 5, Ölçme anlamı</p>	<p>4. <math>\frac{90}{x} - \frac{70}{x} = 2</math></p> <p>90 kilogramlık ve 70 kilogramlık şekerleri bulduğum bu şekerleri paketlere ayırdım. Paketlerin ağırlığı kilogramlar eşit ve 90 kilogramlık şekerlerin 70 kg'lık şeker 2 paket fazla çıktığına göre 11 paket kaç kilogramlık şeker alır?</p> <p>Serkan, Öğretim seansı 5, Ölçme anlamı</p>
---	---

**Şekil 3. 104.** Berna, Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 5

Erdem probleminde elmalarını belli miktarda elma alabilen kasalara boşaltarak kaç kasa kullandığını belirtmiş ve kesrin ölçme anlamını kullanmıştır. Serkan'da benzer şekilde şekerleri paketlere ayırmış ve kullandığı paket sayısını belirterek problemine kesrin ölçme anlamını verebilmiştir. Katılımcılar şekil 3.104.'teki problemleri araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmadan yazabilmişlerdir.

Öğretim seansı 4 ve 5 sonunda Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere katılımcıların tamamı kesrin ölçme anlamına dair problem yazabilmişlerdir. Yazılan problemler genellikle sözel olarak ifade edilebilmiştir. Yapılan yanlış notasyon ve matematiksel içerik eklemek hatalarının ise kesrin ölçme anlamı ile ilgili olmadığı belirlenmiştir. Hatalar araştırmacı-öğretmen ile katılımcı arasında soru cevap şeklinde irdelenerek, ayrıca öğretim seanslarının son bölümünde kesrin bu anlamını içeren sözel problemler sorularak giderilmeye çalışılmıştır. Öğretim seansı 6 ve 7'de katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin ölçme anlamını kullanma süreçleri incelenmiştir.

### 3.2.2.3.3. Payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler

Daha önce yapılan öğretim seanslarında katılımcılardan kesrin ölçme anlamını içeren sözel problem çözmeleri istenmiş ve nitekim kendileri de yazabilmişlerdir. Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6 ve 7'de katılımcıların tamamının kesrin ölçme

anlamını içeren problemler yazabildikleri görülmüştür. Erdem sadece öğretim seansı 7’de kesrin ölçme anlamına dair problem yazabilirken, diğer katılımcılar her iki öğretim seansında da kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabilmişlerdir. Yazılan 13 problemden 6’sı doğru, 1’i eksik, 6’sı yanlış olarak belirlenmiştir. Ancak, tamamı sözel olarak yazılabilmektedir. Yapılan yanlış notasyon hatalarının kesrin ölçme anlamı ile ilgili olmadığı belirlenirken, değişkenin anlamı hatasının kesrin ölçme anlamı ile ilgili olduğu düşünülmektedir. Katılımcıların kesrin ölçme anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.32.’de sunulmuştur.

**Tablo 3. 32.** *Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Ölçme anlamı doğru sayısı	Ölçme anlamı Eksik sayısı	Ölçme anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Yanlış notasyon-Denklemi değiştirme	Değişkenin anlamı
<b>Ayşegül</b>									
Öğr. Seansı 6	4	7	1 Ölçme 4 Oran 2 Parça-bütün	0	0	1	1	1	0
Öğr. Seansı 7	4	5	1 Bölüm 2 Ölçme 2 Oran	1	0	1	2	1	0
Toplam	8	12	1 Bölüm 3 Ölçme 6 Oran 2 Parça-bütün	1	0	2	3	2	0
<b>Berna</b>									
Öğr. Seansı 6	4	4	1 Bölüm 1 Ölçme 2 Oran	0	0	1	1	1	0
Öğr. Seansı 7	4	4	2 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	1	0	0	1	0	0
Toplam	8	8	3 Bölüm 2 Ölçme 3 Oran	1	0	1	2	1	0
<b>Erdem</b>									
Öğr. Seansı 6	4	6	1 Bölüm 5 Oran	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 7	4	5	3 Ölçme 2 Oran	1	1	1	3	0	1
Toplam	8	11	1 Bölüm 2 Ölçme 7 Oran	1	1	1	3	0	1

**Tablo 3. 32.** (Devam) *Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Ölçme anlamı doğru sayısı	Ölçme anlamı Eksik sayısı	Ölçme anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Yanlış notasyon-Denklemi değiştirme	Değişkenin anlamı
<b>Serkan</b>									
Öğr. Seansı 6	4	5	1 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran 2 Parça-bütün	0	0	2	2	2	0
Öğr. Seansı 7	4	6	1 Bölüm 3 Ölçme 2 Oran	3	0	0	3	0	0
Toplam	8	11	2 Bölüm 5 Ölçme 3 Oran 2 Parça-bütün	3	0	2	5	2	0

Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6’da katılımcılardan Ayşegül’ün ve Berna’nın 1’er tane, Serkan’ın ise 2 tane probleme kesrin ölçme anlamını verirken, Erdem’in öğretim seansı 6’da kesrin ölçme anlamına dair problem yazmadığı belirlenmiştir. Araştırmacı-öğretmenin katılımcılara herhangi bir müdahalesi olmamıştır. Ayşegül, Berna ve Serkan yazdıkları problemlerde denklemi değiştirerek yanlış notasyon kullanmışlardır (bkz. Şekil 3.105.).

$$4. \frac{7x}{x+2} = 5$$

⇒ Alinin elinde bulunan paranın 6 katı kadar daha kabası para vermiştir. Ali bu parayı çikolata almak istenekteydi. bir çikolata Alinin ilk başta elinde bulunan paranın 2 TL daha fazlasıdır. Ali toplam 5 çikolata alabilmiştir. Buna göre Alinin elinde kaç TL vardı?

$$4. \frac{7x}{x+2} = 5$$

Bir alinin elinde belli miktarda ayakkabı vardır. Daha sonra bu aile alışverişe çıkarak elindeki ayakkabıların 6 katı ayakkabı alıyor. Her bir rafta diğer ayakkabıların sayısı elinde ilk başta bulunan ayakkabıların 2 fazlası olup 5 tane rafta bulunduğu göre elimizde ilk başta kaç ayakkabı vardır?

Ayşegül, Öğretim Seansı 6, Ölçme anlamı, Yanlış notasyon, Denklemi değiştirme

Berna, Öğretim Seansı 6, Ölçme anlamı, Yanlış notasyon, Denklemi değiştirme

**Şekil 3. 105.** *Ayşegül ve Serkan’a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 6*

Yanlış notasyon hatasının hepsinde notasyonu değiştirme yapıldığı belirlenmiştir. Örneğin, Berna'nın problemde elindeki ayakkabıları  $x$  olarak ifade etmiş ve “elindeki ayakkabıların 6 katı ayakkabı alıyor.” ifadesini kullanmış ve  $7x$ 'i  $x+6x$  olarak ifade ederek denklemi değiştirmiştir. Ancak katılımcıların tamamı kesrin ölçme anlamını problemlerinde kullanabilmişlerdir. Ayşegül problemde toplam parasını çikolata parasına bölerek aldığı çikolata sayısını ölçmüştür. Berna da benzer şekilde ayakkabılar için kaç raf gerektiğini ölçerek problemde kesrin ölçme anlamını kullanabilmiştir (bkz. Şekil 3.105.).

Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren diğer öğretim seansı 7'de ise katılımcıların tamamının kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabildikleri belirlenmiştir. Bir önceki öğretim seansında katılımcılara çözmeleri için kesrin bu anlamına dair problem sorulmamıştır. Ayşegül yazdığı 5 problemde 2'sinde kesrin ölçme anlamını kullanabilirken, Berna'nın yazdığı 4 problemde 1'ine kesrin bu anlamını verebildiği belirlenmiştir. Serkan ise 6 problemde 3'ünde kesrin bu anlamını kullanabilmiştir (bkz. Şekil 3.106.). Ayşegül bir önceki öğretim seansında yaptığı denklemi değiştirme hatasını öğretim seansı 7'de yeniden yaparken, diğer katılımcılarda bu durum gözlenmemiştir.

4.  $\frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x-2} = 10$

⇒ Ali ve Ahmet babaları Ali'de bulunan paranın 4 katı kadar daha para varmıştır. Ali ve Ahmet bu parayı Aliye elinde bulunan paranın 2 katı kendine ise Ali'de başta bulunan paranın 3 katı şeklinde paylaşmıştı, ikiside bu parayı Ali'nin başta elinde bulunan paranın 2TL ekisi fiyatında ciğer alacakları. İkisi aldıktan sonra toplam 10 ciğer olduysa Ali'de başta kaç TL vardır?

4.  $\frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x-2} = 10$

Erca'nın evinin duvarlarını tahtalarla kaplamaya istiyyor. Erca'nın elinde uzunluğu bilinmeyen bir tahta parçası vardır. Erca bu tahtalardan ikisini birleştirip 11L boşluk oluşturuldu. 2Lm ekisi bleimide parçaları daha sonra bu tahtalardan 3 tanesi daha birleştirip duvarları aynı şekilde kaplamaya toplamda 10 tane parça olduğuna göre bir tahta parçası kaç cm'dir?

Ayşegül, Öğretim seansı 7, Ölçme anlamı, Serkan, Öğretim seansı 7, Ölçme Denklemi değiştirme

### Şekil 3. 106. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 7

Ayşegül, problemde elindeki paraya elindeki paranın 2 lira ekisi fiyatta olan ciğerlerden alarak aldığı ciğer sayısını ölçmüştür. Ancak  $5x$ 'i “ $x+4x$ ” şeklinde ifade etmiş ve notasyon hatası yapmıştır. Serkan'da benzer şekilde evinin duvarlarını

kaç tahta parçası ile kaplayacağını ölçmüş ve probleminde kesrin ölçme anlamını kullanabilmiştir.

Daha önceki öğretim seansında kesrin ölçme anlamına dair hiç problem yazamayan Erdem bu öğretim seansında yazdığı 4 problemde 2'sinde kesrin ölçme anlamını içeren problem yazdığı belirlenmiştir. İlk soruda Erdem araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmaksızın kesrin ölçme anlamını içeren doğru bir problem yazabilmiştir. Başka bir denklemde ise kendisine problem konusu verilmiş ancak devamını getirememiştir. Son denklemde ise probleminde ölçme anlamını vermeye çalışmış, ancak denklemin sonucundaki ifadeye raf sayısı yerine kitap sayısı diyerek birimi karıştırmıştır. Ayrıca  $2x$  ve  $3x$ 'i kitaplar şeklinde,  $x-2$ 'yi de bir rafın alabileceği kitap sayısı şeklinde ifade etmesi gerekmektedir. Değişkeni tam olarak anlamlandıramadığı için problem karışık ve yanlış hale gelmiştir (bkz. Şekil 3.107.).

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 12$

Elimde küçük, orta, büyük hacimli şişeler vardır.  
Küçük şişe ortanca şişenin 4 katı litre kadar dolabilir. Büyük şişe ise ortanca şişenin 3 katı kadar su almaktadır.  
Elimde ortanca şişe ve büyük şişeleri farklı olarak dolabileceği su vardır. Fakat bu suları küçük şişelere doluracağım. Uygulama sırasında 12 şişe kullanmış olsaydım ortanca şişe ne kadar su alabilir?

$x = 2 \frac{2x+3x}{x-2} = 10$

Elimdeki olan kitapların 2'si kayboldu. Kalanları toplamı ise kitaplığa dizeceğim.  
Bu işi 2 farklı kitaplığa deneceğim. Kitapları toplam, kitapların 2'si kaybolmadan önceki kitap sayısının 2 ve 3 katı sayıda kitap alabileceği. Toplam 10 kitap dizmiş olduğum göre başta kaç kitabım vardı?

"... kitaplarımın 2'si kaybolmadan önceki kitap sayısını yani  $x$  kadar kitabın 2 ve 3 katı kadar sayıda kitap alabilmekte.  $2x$ ,  $3x$  olarak düşündüm. toplam 10 kitap dizmiş olduğuma göre, bir kitaplığın alabileceği kitap sayısını kitaplarıma böldüğüm zaman dizdiğim kitapları dedim.

Erdem, Öğretim seansı 7, Ölçme anlamı

Erdem, Öğretim seansı 7, Ölçme anlamı, Yanlış, değişkenin anlamı

Erdem'in yorumu

### Şekil 3. 107. Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 7

Pc Pdc ifadeleri içeren denklemlere katılımcıların tamamı kesrin ölçme anlamına dair problemler yazabilmişlerdir. Serkan en fazla sayıda kesrin ölçme anlamını içeren problem yazan katılımcı olarak belirlenmiştir. Öğretim seansı 6'da denklemi değiştirme hatası yapmakla birlikte bir denkleme kesrin ölçme anlamını içeren 2 problem yazan Serkan öğretim seansı 7'de kesrin bu anlamını içeren 3 problemi kendisi yazmıştır.

Erdem öğretim seansı 6'da bu anlamı içeren problem yazmamıştır. Öğretim seansı 7'de ise 1 soruda bu anlamı kendisi rahatlıkla verebilirken başka bir problemde

değişkenin anlamını karıştırarak yanlış bir problem yazmıştır. Öğretim seansı 6'da katılımcılardan Ayşegül ve Berna 1'er tane probleme kesrin ölçme anlamını verirken denklemi değiştirme hatası yaptıkları belirlenmiştir. Ayşegül öğretim seansı 7'de bu hatayı devam ettirirken Berna ve Serkan'ın doğru problemler yazdıkları görülmüştür. Pc Pdc kesirli denklemleri içeren öğretim seansı 6 ve 7 sonunda katılımcıların tamamı kesrin ölçme anlamını içeren problemler yazabilmişlerdir. Yazılan 13 problemde 6'sı doğru, 1'i eksik, 6'sı yanlış olarak belirlenmiştir. Ancak, tamamı sözel olarak yazılabilmektedir. Yapılan yanlış notasyon hatalarının kesrin ölçme anlamı ile ilgili olmadığı belirlenirken, değişkenin anlamı hatasının kesrin ölçme anlamı ile ilgili olduğu düşünülmektedir.

Ölçme anlamına genel olarak bakıldığında, öğretim seanslarında en çok Ayşegül ve Serkan'ın kesrin bu anlamına dair problem yazabildikleri belirlenmiştir. Kesrin bu anlamına dair en çok problem Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılabilmektedir. İlk üç öğretim seansında Berna dışında katılımcıların tamamı yazdıkları problemlere kesrin ölçme anlamını verebilmişlerdir. Daha sonraki öğretim seanslarında farklı kesir türlerini içeren denklemlere bütün katılımcılar kesrin ölçme anlamına dair problem yazabilmişlerdir. Kesrin ölçme anlamına dair yapılan hatalar, denklemi değiştirme, değişkenin anlamını karıştırma, kesirli olmayan denklem gibi davranma ve pay-payda karıştırma şeklinde gerçekleşmiştir. Değişkenin anlamı, kesirli olmayan denklem gibi davranma ve pay-payda karıştırma hatalarının kesrin ölçme anlamı ile ilgili olduğu belirlenmiştir. En çok yanlış ise Pc Pdc ifadeleri içeren öğretim seansı 6 ve 7'de bulunmaktadır. Anlama dair yazılan en çok problemin bu seanslarda olduğu düşünülürse, bu olası bir durumdur. En çok yanlış yapan katılımcı ise Erdem olarak belirlenmiştir. Nitekim öğretim seansları sonunda katılımcıların tamamının Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere ve Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin ölçme anlamına dair doğru ve sözel problemler yazabilecekleri söylenebilir. Ancak Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemler için aynı şey söylenemez.

Yazılan problemlerde bölüm, oran ve ölçme anlamına göre daha az olmakla birlikte kesrin kullanılan anlamlarından bir diğeri ise işlemci anlamıdır.

### 3.2.2.4. İşlemci anlamı

İlk klinik görüşmede hiçbir katılımcı tarafından kesrin bu anlamına dair problem yazılamamıştır. Bu nedenle öğretim seanslarında katılımcıların farklı cebirsel kesir türlerini içeren denklemlere kesrin işlemci anlamını içeren, günlük hayatla ilişkili, sözel ve doğru problemler yazmaları amaçlanmıştır. Yaklaşık 1 hafta önce yapılan klinik görüşmede de katılımcılardan kesrin işlemci anlamını içeren 1 sözel problemi çözmeleri istenmiştir. Öncelikle katılımcıların  $P_c$   $P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazdıkları problemlerde kesrin işlemci anlamını kullanma süreçleri irdelenmiştir.

#### 3.2.2.4.1. Payı cebirsel paydası nümerik kesirli ifadeleri içeren denklemler

$P_c$   $P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kesrin işlemci anlamına dair Ayşegül'ün problem yazamadığı belirlenirken, Erdem üç öğretim seansında kesrin bu anlamına dair problem yazabilmiştir. Serkan öğretim seansı 2'de, Berna ise öğretim seansı 3'te 1'er tane kesrin işlemci anlamına dair problem yazabilmişlerdir.

Problemler genellikle sözel olarak yazılabilmektedir. Problemlerin 7'si doğru, 2'si yanlış olarak belirlenmiştir. Yapılan yanlışlar denklemi değiştirme ve problemde soru olmamasıdır. Bu hataların kesrin işlemci anlamı ile ilgili olmadığı belirlenmiştir.

Katılımcıların kesrin işlemci anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.33.'te sunulmuştur.

**Tablo 3. 33.** Katılımcıların  $P_n$   $P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	İşlemci anlamı doğru sayısı	İşlemci anlamı Eksik sayısı	İşlemci anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Yanlış Notasyon-denklemleri değiştirme	Soru yok
<b>Ayşegül</b>										
Öğr. Seansı 1	5	5	4 Bölüm 1 Ölçme	0	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	5	5	4 Bölüm 1 Ölçme	0	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	2 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran	0	0	0	0	0	0	0
Toplam	15	15	10 Bölüm 4 Ölçme 1 Oran	0	0	0	0	0	0	0

**Tablo 3. 33.** (Devam) *Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	İşlemci anlamı doğru sayısı	İşlemci anlamı Eksik sayısı	İşlemci anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Yanlış Notasyon-denklemleri değiştirme	Soru yok
<b>Berna</b>										
Öğr. Seansı 1	5	5	5 Bölüm	0	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	4	4	4 Bölüm	0	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	3 Bölüm 1 İşlemci 1Oran(E)	1	0	0	1	0	0	0
Toplam	14	14	12 Bölüm 1 İşlemci 1Oran(E)	1	0	0	1	0	0	0
<b>Erdem</b>										
Öğr. Seansı 1	5	8	4 Bölüm 2 Ölçme 2 İşlemci	1	0	1	2	0	1	0
Öğr. Seansı 2	4	8	5 Bölüm 1 Ölçme 1 İşlemci	1	0	0	1	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	6	3 Bölüm 1 İşlemci 1 Parça-Bütün	1	0	0	1	0	0	0
Toplam	14	22	12 Bölüm 3 Ölçme 4 İşlemci 1Parça-Bütün	3	0	1	4	0	1	0
<b>Serkan</b>										
Öğr. Seansı 1	4	6	4 Bölüm 1 Ölçme 1 İşlemci	0	0	1	1	0	0	1
Öğr. Seansı 2	4	6	5 Bölüm 1 İşlemci	1	0	0	0	1	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	4 Bölüm 1Parça-Bütün (E)	0	0	0	0	0	0	0
Toplam	13	17	13Bölüm 1 Ölçme 2 İşlemci 1Parça-Bütün	1	0	1	1	1	0	1
Genel Toplam	53	68	47Bölüm 8 Ölçme 7 İşlemci 2Oran 2Parça-Bütün	5	0	2	6	1	1	1

Öğretim seansı 1’de Erdem ve Serkan araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmaksızın verilen denklemlere 1’er tane kesrin işlemci anlamını içeren problem yazabilmişlerdir (bkz. Şekil 3.108.).

1.  $\frac{x}{3}=2$

4.  $\frac{3x}{2}=3$

Bir ağaç her yıl kendi boyunun  $\frac{1}{3}$ 'ü kadar yarı 2cm kadar uzamaktadır. Ağaç bir yılda kaç cm uzar?

Misketlerin yarısı 3 ise tamamı kaçtır?

Serkan, Öğretim seansı 1, İşlemci anlam, soru yok Erdem, Öğretim seansı 1, İşlemci anlamı

**Şekil 3. 108.** Erdem ve Serkan’a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 1

Serkan yazdığı problemde ağacın kendi boyunun 1/3’ü kadar uzadığını belirterek kesrin işlemci anlamını kullanmıştır. Ancak sorunun cevabını da yazmıştır. Bu nedenle problemde soru olmadığı düşünülmektedir. Erdem ise yarısı ifadesini kullanarak kesrin işlemci anlamına dair doğru bir problem yazabilmiştir. Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 2’de katılımcılardan Erdem ve Serkan’ın 1’er tane kesrin işlemci anlamını içeren problem yazabildikleri belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.109.). Yaklaşık 1 hafta önce yapılan öğretim seansı 1’de de katılımcılardan kesrin işlemci anlamını içeren 1 sözel problemi çözmeleri istenmiştir.

Kemal Bey tarlamızın  $\frac{1}{5}$ 'ini 3 saatte biçebiliyor. Tarlamızın tamamını kaç saatte biçer?

A: ... Kemal Bey çim biçme makinasıyla bahçelerindeki çimleri biçmek istiyor olsun... "önce tarlamıza x dedim. Tarlamızın  $\frac{1}{5}$ 'i yani x çarpı  $\frac{1}{5}$ .  $x/5$  anlamını bu şekilde verdim.  $x/5$ 'ini 3 saatte biçebiliyor. Tarlamızın tamamını kaç saatte biçebilir?"

3.  $\frac{3x+6}{5}=3$

Zeliha bir kırtasiyede alışveriş yapıyor. Zeliha kağıt alıyor. Kağıtların 3 katını b/forosların  $\frac{1}{5}$ 'i silgi alıyor. Zeliha 3 tane silgi aldığına göre kağıt almıştır?

$x \cdot \frac{1}{5} = \frac{x}{5}$

Erdem, Öğretim seansı 2, İşlemci anlamı Erdem’in yorumu Serkan, Öğretim seansı 2, İşlemci anlamı

**Şekil 3. 109.** Erdem ve Serkan’a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3

Erdem probleminde “tarlanın 1/3’ü” ifadesiyle kesrin işlemci anlamını kullanırken, Serkan “kâğıtların 3 katının 6 fazlasının 1/5’i ifadesini kullanarak 1/5’i doğrudan işlemin bir parçası olarak kullanmıştır. Ayşegül ve Berna’nın ilk klinik görüşmede ve ilk 2 öğretim seansında kesrin işlemci anlamını kullanmadıkları belirlenmiştir. Öğretim seansı 3’te daha önce kesrin işlemci anlamına dair problem yazmayan Berna 1 problemine işlemci anlamını verebilmiştir (bkz. Şekil 3.110.).

Bir mağazada ilk hafta ürünlerimizin 1/4’ü satıldı. İkinci hafta ise ürünlerin 1/7’si satıldı. İlk hafta satılan ürünler ile ikinci hafta satılan ürünlerimizin farkı 90’dır. Buna göre ilk hafta kaç ürün sattık?

1.  $\frac{x}{4} - \frac{x}{7} = 90$

“Im... aklıma... şimdi bir tane mağazamız olsun.... İlk hafta im... elimizde bulunan ürünlerin 4’te 1’i kadar mal satalım. Yok. Evet 4’te 1’i. Sonra ikinci hafta da elimizde olanların 7’de 1’i kadar mal satalım”

Berna, Öğretim seansı3, İşlemci anlamı

Berna’nın yorumu

**Şekil 3. 110.** Berna’ya ait sözel problem örneği, Öğretim seansı 3

Berna probleminde “ürünlerin 1/4’ü” ifadesini kullanarak 1/4’ü işlemin bir parçası olarak kullanmıştır. Bu esnada araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmamıştır. Daha önceki öğretim seanslarında kesrin işlemci anlamına dair problem yazan Serkan öğretim seansı 3’te kesrin bu anlamına dair problem yazmamıştır.

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde Ayşegül dışındaki katılımcıların kesrin işlemci anlamına dair problem yazabileceği belirlenmiştir. Kesrin işlemci anlamına dair en çok problemi yazan katılımcı Erdem’dir. Yazılan 7 problemin 5’i doğru, 2’si yanlış yazılmıştır. Yapılan yanlışlar, denkleme değiştirme ve soru olmaması şeklinde belirlenmiştir ve bu durumun kesrin işlemci anlamı ile ilgisi olmadığı düşünülmektedir.

Diğer kesir türlerini içeren denklemlere kesrin bu anlamına dair problem yazıp yazmadıklarını belirleyebilmek amacıyla öğretim seansı 4 ve 5’te Pn Pdc kesirli ifadeler ve Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazdıkları problemlerde kesrin işlemci anlamını kullanma süreçleri incelenmiştir.

### 3.2.2.4.2. Payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler

Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4 ve 5’te katılımcılar tarafından kesrin işlemci anlamını içeren sözel problem yazılmadığı belirlenmiştir.

#### **3.2.2.4.3. Payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler**

Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6 ve 7’de katılımcılar tarafından kesrin işlemci anlamını içeren sözel problem yazılmadığı belirlenmiştir.

Kesrin işlemci anlamına genel olarak bakıldığında, Öğretim seansları sonucunda katılımcılardan kesrin işlemci anlamına dair en çok problem yazan katılımcı Erdem olarak belirlenirken, Ayşegül’ün kesrin bu anlamına dair hiç problem yazmadığı görülmüştür. Ayşegül hiçbir cebirsel kesir türünü içeren denkleme kesrin işlemci anlamını veremezken, diğer katılımcılar sadece Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin işlemci anlamını verebilmişlerdir.

Yazılan problemler genellikle sözel olarak ifade edilebilmiştir. Yapılan yanlışlar, denkleme değiştirme ve soru olmaması şeklinde belirlenmiş ve bu hataların kesrin işlemci anlamı ile ilgili olmadığı görülmüştür. Öğretim seansları sonunda Berna, Erdem ve Serkan’ın sadece Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin işlemci anlamına dair problem yazabilecekleri söylenebilir.

Öğretim seanslarında katılımcılar tarafından yazılan problemlerde kesrin en az kullanılan anlamının kesrin parça-bütün anlamı olduğu görülmüştür.

### **3.2.2.5. Parça-bütün anlamı**

İlk klinik görüşmede Ayşegül ve Serkan'ın kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Yazılan problemlerden biri Ayşegül tarafından  $P_c$   $P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denkleme yazılmış, ancak yanlış yazılmıştır. Diğeri Serkan tarafından  $P_n$   $P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denkleme yazılmaya çalışılmış ve tamamlanamayarak eksik bırakılmıştır.

Bu nedenle, öğretim seanslarında katılımcıların farklı cebirsel kesir türlerini içeren denklemlere kesrin parça-bütün anlamını içeren, günlük hayatla ilişkili, sözel ve doğru problemler yazmaları amaçlanmıştır. Öncelikle katılımcıların  $P_c$   $P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazdıkları problemlerde kesrin parça-bütün anlamını kullanma süreçleri irdelenmiştir.

#### **3.2.2.5.1. Payı cebirsel paydası nümerik kesirli ifadeleri içeren denklemler**

$P_c$   $P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 3'te parça-bütün anlamı katılımcılar tarafından ilk defa kullanılmaya çalışılmıştır. Daha önceki öğretim seanslarında kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazılmamıştır. Öğretim seansı 1 ve 2'de de kesrin parça-bütün anlamını içeren sözel problem sorusu sorulmamıştır.

Kesrin parça-bütün anlamına dair Ayşegül ve Berna'nın problem yazmadığı belirlenirken, Erdem ve Serkan sadece öğretim seansı 3'te kesrin bu anlamına dair problem yazmışlardır. Serkan yazdığı problemi sözel olarak ifade edebilmiş, ancak Erdem sözel ve matematiksel dili bir arada kullanmıştır. Problemlerin 1'i doğru, 1'i eksik olarak belirlenmiştir. Eksik bırakılma nedeni ise günlük hayatla ilişkilendirememedir.

Katılımcıların kesrin parça-bütün anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.34.'te sunulmuştur.

**Tablo 3. 34.** *Katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	İşlemci anlamı doğru sayısı	İşlemci anlamı Eksik sayısı	İşlemci anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil
<b>Ayşegül</b>								
Öğr. Seansı 1	5	5	4 Bölüm 1 Ölçme	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	5	5	4 Bölüm 1 Ölçme	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	2 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran	0	0	0	0	0
Toplam	15	15	10 Bölüm 4 Ölçme 1 Oran	0	0	0	0	0
<b>Berna</b>								
Öğr. Seansı 1	5	5	5 Bölüm	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	4	4	4 Bölüm	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	3 Bölüm 1 İşlemci 1 Oran(E)	0	0	0	0	0
Toplam	14	14	12 Bölüm 1 İşlemci 1 Oran(E)	0	0	0	0	0
<b>Erdem</b>								
Öğr. Seansı 1	5	8	4 Bölüm 2 Ölçme 2 İşlemci	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	4	8	5 Bölüm 1 Ölçme 1 İşlemci	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	6	3 Bölüm 1 İşlemci 1 Parça-Bütün	1	0	0	0	1
Toplam	14	22	12 Bölüm 3 Ölçme 4 İşlemci 1 Parça-Bütün	1	0	0	0	1
<b>Serkan</b>								
Öğr. Seansı 1	4	6	4 Bölüm 1 Ölçme 1 İşlemci	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 2	4	6	5 Bölüm 1 İşlemci	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 3	5	5	4 Bölüm 1 Parça-Bütün (E)	0	1	0	1	0
Toplam	13	17	13 Bölüm 1 Ölçme 2 İşlemci 1 Parça-Bütün	0	1	0	1	0
Genel Toplam	53	68	47 Bölüm 8 Ölçme 7 İşlemci 2 Oran 2 Parça-Bütün	1	1	0	1	1

Öğretim seansı 3'te Erdem kesrin parça-bütün anlamını içeren problem yazabilirken, Serkan'ın kesrin parça-bütün anlamını içeren bir problem yazmaya çalıştığı ancak, eksik bıraktığı belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.111.).

$$1. \frac{4x}{4} + \frac{x}{7} = 90$$

Bahçemin çeyreğine dikebileceğim ağaç sayı  
sılla bahçemin  $\frac{1}{7}$ 'sine dikebileceğim  
ağaç sayısının farkı 90'dır. Bahçemin  
tamamı kaç ağaçtır?

$$4. \frac{x}{30} + \frac{300-x}{50} = 8$$

Levent arkadaşına arabayla gitmek istiyor. Arabaya bir  
süre gittikten sonra mola verir ve yolun  $\frac{1}{30}$ 'lik kısmını  
gittikçe dener

“İlk önce yolun  
1/30 luk kısmını  
gitse, yolun  
tamamı... Sonra  
300 - x i...”  
A: Sonrada 1/50  
lik kısmını mı  
gidecek?  
“Aynen. Sanırım  
ama... 300-x'i...  
Problemde bunun  
Levent' in  
arkadaşının  
evinin  
uzunluğundan  
küçük olması  
lazım. Bunu 50 ye  
bölmem lazım.  
(Güler.)  
Anlatamadım.”

Erdem, öğretim seansı 3, Parça-Bütün anlamı

Serkan, öğretim seansı 3, Eksik problem, Parça-Bütün anlamı

Serkan'ın yorumu

### Şekil 3. 111. Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 3

Erdem probleminde bahçeyi parçalara ayırmış ve belli bir kısmını alarak kesrin parça-bütün anlamını kullanmıştır. Serkan ise yolun belli bir bölümünü gitme vurgusu yapmış ama problemini tamamlayamamıştır.

Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 1, 2 ve 3 sonunda katılımcılardan 2'si kesrin bu anlamına dair hiç problem yazamazken, 1'i doğru 1'i de eksik 1'er problem yazabilmişlerdir. Yazılan problemin eksik bırakılma nedeni günlük hayatla ilişkilendirememiş şeklinde belirlenmiştir. Öğretim seansı 1, 2 ve 3 sonunda katılımcıların Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazabilecekleri söylenemez. Diğer kesir türlerini içeren denklemlere kesrin bu anlamına dair problem yazıp yazamadıklarını belirleyebilmek amacıyla öğretim seansı 4 ve 5'te Pn Pdc kesirli ifadelerle yazdıkları problemlerde kesrin parça-bütün anlamını kullanma süreçleri incelenmiştir.

### 3.2.2.5.2. Payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler

Daha önce yapılan ve Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren öğretim seanslarında katılımcılardan kesrin parça-bütün anlamını içeren sözel problem çözmeleri istenmemiş ve Erdem ve Serkan dışında kendileri yazamamışlardır. Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4 ve 5'te katılımcılardan Ayşegül ve Serkan'ın kesrin parça-bütün anlamını içeren problemler yazabildikleri görülmüştür. Her ikisi de sadece öğretim seansı 5'te kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazabilmişlerdir. Yazılan 2 problem de doğru ve sözel olarak belirlenmiştir. Katılımcıların kesrin parça-bütün anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.35.'te sunulmuştur.

**Tablo 3. 35.** Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları


	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Parça-bütün anlamı doğru sayısı	Parça-bütün anlamı Eksik sayısı	Parça-bütün anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Sözel olmayan sözel eşitlik
<b>Ayşegül</b>									
Öğr. Seansı 4	4	4	2 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 5	4	4	2 Bölüm 1 Parça-Bütün 1 Oran	1	0	0	1	0	0
Toplam	8	8	4 Bölüm 1 Ölçme 2 Oran 1 Parça-Bütün	1	0	0	1	0	0
<b>Berna</b>									
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 5	4	5	3 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	0	0	0	0	0	0
Toplam	8	10	5 Bölüm 3 Ölçme 2 Oran	0	0	0	0	0	0
<b>Erdem</b>									
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 3 Ölçme	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 5	4	6	1 Bölüm 1 Ölçme 2 Oran	0	0	0	0	0	0
Toplam	8	11	3 Bölüm 4 Ölçme 2 Oran	0	0	0	0	0	0
<b>Serkan</b>									

**Tablo 3. 35.** (Devam) *Katılımcıların Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Parça-bütün anlamı doğru sayısı	Parça-bütün anlamı Eksik sayısı	Parça-bütün anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Sözel olmayan sözel eşitlik
Serkan									
Öğr. Seansı 4	4	5	2 Bölüm 3 Oran	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 5	4	5	1 Parça-Bütün 2 Ölçme 2 Oran	1	0	0	1	0	0
Toplam	8	10	2 Bölüm 2 Ölçme 5 Oran 1 Parça-Bütün	1	0	0	1	0	0

$1. \frac{3}{x} - \frac{3}{x+2} = 1$

Br A bahçesini şerhlee bələp 3lük kismnin cimei bicilmistir. B bahçesi ise A bahçesinde bulunan şerhlerden 2 tone daha fazla şerhte bölünöp 3lük kismnin cimei bicilmistir. A bahçesinin bicilmis şerhlerden B bahçesinin bicilmis şerhlerin farkı 1 ise A bahçesi kaç şerhte ayrılmıştır?



$1. \frac{3}{x} - \frac{3}{x+2} = 1$

Ali'nin elinde 3 tone kağıt bulunmaktadır. Bu kağıtlar eşit parçaya şerhler halinde kesiyor. Sonra aynı boyutlarda 3 kağıt daha alıyor. Bu kağıtlarda bir önceki parçaladığı şerhlerden 2 fazla çıkacak şekilde parçalıyor. İle kağıtları daha parçaları uzunluğu sanrak kağıtları daha parçaları uzunluğundan 1 fazla olduğuna göre ilk kağıtları daha parçaları uzunluğu ne kadardır?

Ayşegül, Öğretim seansı 5, Parça-Bütün anlamı      Serkan, Öğretim seansı 5, Parça-Bütün anlamı

**Şekil 3. 112.** *Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 5*

Ayşegül probleminde bahçeyi parçalara ayırıp içinden belli bir kısmının çimlerini biçerek, Serkan ise kâğıtlara parçaya ayırarak kesrin parça-bütün anlamını probleminde kullanmıştır. Bu problemlerin yazımında araştırmacı-öğretmenin herhangi bir müdahalesi olmamıştır (bkz. Şekil 3.112.). Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 4 ve 5 sonunda, katılımcıların tamamının bu öğretim seansları sonunda Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazabilecekleri söylenemez.

Öğretim seansı 6 ve 7'de ise katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin parça-bütün anlamını kullanma süreçleri incelenmiştir.

### 3.2.2.5.3. Payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler

Daha önce yapılan öğretim seanslarında katılımcılardan kesrin parça-bütün anlamını içeren sözel problem çözmeleri istenmiştir. Berna dışında diğer katılımcılar kesrin bu anlamına dair sözel problem yazabilmişlerdir. Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6 ve 7’de katılımcılardan Ayşegül ve Serkan’ın kesrin parça-bütün anlamını içeren problemler yazabildikleri görülmüştür. Her ikisi de sadece öğretim seansı 6’da kesrin parça-bütün anlamına dair problemler yazabilmişlerdir. Yazılan problemlerin doğru olduğu belirlenmiştir.

Katılımcıların kesrin parça-bütün anlamına dair yazdıkları problemlerin doğru, yanlış, eksik olma durumları ve hata türlerine dair veriler tablo 3.36.’da sunulmuştur.

**Tablo 3. 36.** Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Parça-bütün anlamı doğru sayısı	Parça-bütün anlamı Eksik sayısı	Parça-bütün anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Sözel olmaya n sözel eşitlik
<b>Ayşegül</b>									
Öğr. Seansı 6	4	7	1 Ölçme 4 Oran 2 Parça-bütün	2	0	0	2	0	0
Öğr. Seansı 7	4	5	1 Bölüm 2 Ölçme 2 Oran	0	0	0	0	0	0
Toplam	8	12	1 Bölüm 3 Ölçme 6 Oran 2 Parça-bütün	2	0	0	2	0	0
<b>Berna</b>									
Öğr. Seansı 6	4	4	1 Bölüm 1 Ölçme 2 Oran	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 7	4	4	2 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	0	0	0	0	0	0
Toplam	8	8	3 Bölüm 2 Ölçme 3 Oran	0	0	0	0	0	0
<b>Erdem</b>									
Öğr. Seansı 6	4	6	1 Bölüm 5 Oran	0	0	0	0	0	0
Öğr. Seansı 7	4	5	3 Ölçme 2 Oran	0	0	0	0	0	0
Toplam	8	11	1 Bölüm 2 Ölçme 7 Oran	0	0	0	0	0	0

**Tablo 3. 36.** (Devam) *Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Yazılan Problem Sayısı	Kesrin Anlamı	Parça-bütün anlamı doğru sayısı	Parça-bütün anlamı Eksik sayısı	Parça-bütün anlamı Yanlış sayısı	Sözel	Sözel-Matematiksel dil	Sözel olmayan sözel eşitlik
<b>Serkan</b>									
Öğr. Seansı 6	4	5	1 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran 2 Parça-bütün	1	0	0	1	0	0
Öğr. Seansı 7	4	6	1 Bölüm 3 Ölçme 2 Oran	0	0	0	0	0	0
Toplam	8	11	2 Bölüm 5 Ölçme 3 Oran 2 Parça-bütün	1	0	0	1	0	0
Genel Toplam	32	42	7 Bölüm 12 Ölçme 19 Oran 4 Parça-bütün	3	0	0	3	0	0

Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6’da parça-bütün anlamına dair Ayşegül’ün 1 ve Serkan’ın ise 2 problem yazabildikleri belirlenmiştir (bkz. Şekil 3.113.). Öğretim seansı 7’de ise katılımcılardan hiçbirinin kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazmadıkları görülmüştür.

$$3. \frac{x-2}{3x+2} = \frac{1}{4}$$

$$3. \frac{x-2}{3x+2} = \frac{1}{4}$$

A saksısı 3 torba toprak ve buna diti olarak 2 kg toprak ile tamamlanmıştır.  
B saksısı ise 1 torba toprağın içine 2 kg toprak azalmış halini almıştır. B saksısının dolu halini A saksısına boşalttıktan sonra A saksısının çeyreğini doldurmak için 8 kg toprak vardı.

Ahmet'in elinde bir ip bulunmaktadır. Ahmet bu ipin 2 cm kesiyor ve bu ipin 3 katının 2 fazlası kadar bir makaraya dolduğunda makaranın  $\frac{1}{4}$ 'ünü dolduruyor. İp kaç cm'dir?

Ayşegül, Öğretim seansı 6, Parça-bütün anlamı      Serkan, Öğretim seansı 6, Parça-bütün anlamı

**Şekil 3. 113.** *Ayşegül ve Serkan’a ait sözel problem örnekleri, Öğretim seansı 6*

Ayşegül probleminde bir saksıdan diğer saksıya boşaltılan toprağın saksının çeyreğini doldurduğunu belirterek kesrin parça-bütün anlamını probleminde

kullanabilmiştir. Serkan ise elindeki ipi makaraya dolayarak makaranın çeyreğini sarabildiğini belirterek kesrin parça-bütün anlamını probleminde vermiştir.

Öğretim seansları sonunda ise Berna'nın kesrin bu anlamına dair hiç problem yazamadığı, Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 6'da parça-bütün anlamına dair Ayşegül'ün 1, Serkan'ın ise 2 problem yazabildikleri belirlenmiştir. Öğretim seansı 7'de ise katılımcılardan hiçbirinin kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazmadıkları görülmüştür.

Kesrin parça-bütün anlamına genel olarak bakıldığında, öğretim seansları sonucunda katılımcılardan kesrin parça-bütün anlamına dair en çok problem yazan katılımcılar Ayşegül ve Serkan olarak belirlenirken, Berna'nın kesrin bu anlamına dair hiç problem yazmadığı görülmüştür. Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere sadece Erdem kesrin parça-bütün anlamını verebilirken, Ayşegül ve Serkan Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere ve Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere kesrin bu anlamına dair problem yazabilmişlerdir. Kesrin parça-bütün anlamına dair yazılan problemler en çok Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere aittir.

Yazılan problemler genellikle sözel olarak ifade edilebilmiştir. Yazılan problemler genellikle doğru olmakla birlikte eksik bırakılan problem de söz konusudur. Eksik bırakılan problemin eksik bırakılma nedeni, günlük hayatla ilişkilendirememe şeklinde belirlenmiştir.

### 3.2.3. Son klinik görüşme

Bu bölümde katılımcıların çalışma sonrasındaki son klinik görüşme sorularına verdikleri cevapların analizi sonucunda kavramsal durumları değerlendirilmiştir. Son klinik görüşmede verilen denklemlerin 3'ü Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerden, 2'si Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden, 1'i ise Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır.

Son klinik görüşmede katılımcıların problemleri genellikle doğru yazdıkları görülmüştür. Yaptıkları hataların ise gerçeğe uygunluk ve denklemi değiştirme hataları olduğu belirlenirken, eksik bırakılmış problemler de mevcuttur. Katılımcıların tamamı kesrin bölüm, oran, ölçme ve işlemci anlamına dair problem yazabilirken, Berna ayrıca kesrin parça-bütün anlamına dair de problem yazabilmiştir. Yazılan problemlere en çok kesrin ölçme anlamı verilmiş, en az ise kesrin parça-bütün anlamı verilebilmiştir.

En çok problem, Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılabilmektedir. Ancak problem yazılması için verilen denklemler arasında en çok denklemin bu kesir türünü içeren denklemlere ait olması bu durumu olası kılmıştır. Farklı kesir türlerini içeren denklemlerde denklem başına yazılan problemlere bakıldığında Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde (8) ve Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere denklem başına yazılan problem sayısının (8) aynı olduğu belirlenmiştir. Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere ise diğer kesir türünü içeren denklemlere göre denklem başına daha az sayıda (6,50 ) problem yazılabilmektedir.

Katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazmış oldukları problemlere dair doğru, eksik, yanlış ve boş frekansları, sözel ve sözel-matematiksel problem frekansları, yapılan hata frekansları ve kullandıkları kesrin anlamlarına dair frekanslar tablo 3.37.'de sunulmuştur.

**Tablo 3. 37.** *Katılımcıların son klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

Soru sayısı	Doğru	Eksik	Yanlış	Toplam	Kesrin anlamı	Sözel	Sözel-Matematiksel	Gerçeğe uygunluk	Yanlış Notasyon-denklemleri değiştirme	
<i>Ayşegül</i>										
Pc Pdn	3	6	0	0	6	2 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran 1 İşlemci	9	0	0	0

**Tablo 3. 37.** (Devam) *Katılımcıların son klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Doğru	Eksik	Yanlış	Toplam	Kesrin anlamı	Sözel	Sözel-Matematiksel	Gerçeğe uygunluk	Yanlış Notasyon-denkleme
<b>Ayşegül</b>										
Pn Pdc	2	3	0	0	3	1 Bölüm 2 Oran	3	0	0	0
Pc Pdc	1	2	0	0	2	2 Ölçme	2	0	0	0
Son klinik görüşme	6	11	0	0	11	3 Bölüm 4 Ölçme 3 Oran 1 İşlemci	11	0	0	0
<b>Berna</b>										
Pc Pdn	3	5	0	0	5	1 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran 1 Parça-bütün	5	0	0	0
Pn Pdc	2	3	0	0	3	1 Bölüm 2 Oran	3	0	0	0
Pc Pdc	1	0	0	1	1	1 Ölçme	1	0	0	1
Son klinik görüşme	6	8	0	1	9	2 Bölüm 3 Ölçme 3 Oran 1 Parça-bütün	9	0	0	1
<b>Erdem</b>										
Pc Pdn	3	6	0	0	6	1 Bölüm 2 Ölçme 1 Oran 2 İşlemci	6	0	0	0
Pn Pdc	2	3	0	1	4	3 Ölçme 1 Oran	0	0	1	0
Pc Pdc	1	1	2	0	3	1 Ölçme	3	0	0	0
Son klinik görüşme	6	10	2	1	13	1 Bölüm 6 Ölçme 2 Oran 2 İşlemci	11	0	1	0
<b>Serkan</b>										
Pc Pdn	3	6	0	1	7	1 Bölüm 4 Ölçme 1 Oran 1 İşlemci	0	0	0	1
Pn Pdc	2	3	0	0	3	1 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	0	0	0	0

**Tablo 3. 37.** (Devam) *Katılımcıların son klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Doğru	Eksik	Yanlış	Toplam	Kesrin anlamı	Sözel	Sözel-Matematiksel	Gerçeğe uygunluk	Yanlış Notasyon-denkleme
Serkan										
Pc Pdc	1	2	0	0	2	2 Ölçme				
Son klinik görüşme	6	11	0	1	12	2 Bölüm 7 Ölçme 2 Oran 1 İşlemci	12	0	0	1
Toplam	24	40	2	3	45	8 Bölüm 20 Ölçme 10 Oran 4 İşlemci 1Parça-bütün	45	0	1	2

Tablo 3.37. incelendiğinde katılımcıların kendilerine verilen denklemlerin çoğuna doğru sözel problem yazabildikleri belirlenmiştir. Yanlış yazdıkları problemlerde gerçeğe uygunluk ve notasyon hataları tespit edilmiştir. Gerçeğe uygunluk hatası Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde görülürken, denkleme değiştirme hatası Pc Pdn ve Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde görülmüştür. Yazılan problemlere en fazla kesrin ölçme anlamı verilebilmekle birlikte diğer anlamlarda kullanılmaya çalışılmıştır. İçerdikleri kesir türüne göre denklemlere yazılan problem sayısına oran olarak bakıldığında Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere 2,00 problem, Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere 1,62 problem ve Pc Pdc kesirleri içeren denklemlere 2,00 problem yazabilmişlerdir. Yazılan problemlerin genellikle sözel olduğu belirlenmiştir.

Son klinik görüşmeden elde edilen veriler katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazarken kesrin hangi anlamlarını nasıl ve ne ölçüde kullanabildiklerini belirleyebilmek amacıyla kesrin bölüm, oran, ölçme, işlemci ve parça-bütün başlıkları altında incelenmiştir.

### 3.2.3.1. Bölüm anlamı

Katılımcıların verilen denklemlere kesrin bölüm anlamını içeren problemleri rahatlıkla yazabildikleri belirlenmiştir. Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde daha fazla olmakla birlikte kesrin bütün türlerine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazılabildiği belirlenmiştir.

Sadece Berna'nın kesrin bu anlamını içeren problemde denklemi değiştirdiği belirlenmiş, ancak katılımcıların kesrin farklı anlamlarını içeren problemlerde de bu hatayı yaptıkları görülmüştür. Bu nedenle, hatanın kesrin bölüm anlamı ile ilgili olmadığı söylenebilir.

Katılımcıların yazılan 45 problemin 8'ine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilmişlerdir. Bu problemlerin 5'i Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılırken, 3'ü Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere aittir. Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde ise kesrin bölüm anlamına dair problem yazılamamıştır. Son klinik görüşmede en fazla denklemin Pc Pdn ifadeleri içeren denklemlerden oluştuğu göz önünde bulundurulursa, bu olası bir durumdur. Ayşegül son klinik görüşmede yazdığı 11 problemde 3'üne kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilirken, Erdem yazdığı 11 problemde sadece 1'ine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilmiştir. Katılımcıların tamamı yazdıkları problemlere kesrin bölüm anlamını rahatlıkla verebilmişlerdir (bkz. Şekil 3.114.).

$$5. \frac{3}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{4}$$

→ Bir terzi elinde bulunan kumaş  
bir arkadaş grubuna paylaştırılacaktır.  
Son anda bir değişiklik olmuş ve  
bu gruba 2 kişi daha eklenmiştir.  
Eğer iki kişi gelmeseydi bir kişiye  
düşecek kumaşın uzunluğu 1/4 daha  
fazla olacaktı. Buna göre bu arkadaş  
grubunda en başta kaç kişi vardı?

Ayşegül, Son klinik görüşme

$$2. \frac{x}{4} = 6$$

3 ve 4 kişili iki aileye para yardımı yapı  
cağım. 3 kişili ailede bir kişiye düşen para  
ile 4 kişili bir ailede bir kişiye düşen para ar  
sındaki fark 6 liradır.  
Bir aileye toplam ne kadar yardım yapmışım

Erdem, Son klinik görüşme

Şekil 3. 114. Ayşegül ve Erdem 'e ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme

Ayşegül probleminde bir miktar kumaş kişi sayısına paylaştırarak, Erdem ise probleminde parayı kişi sayısına paylaştırarak kesrin bölüm anlamını kullanmıştır. En fazla kesrin bölüm anlamına dair problem yazan Berna yazdığı 9 problemde 2'sine

kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilmiştir. Serkan ise yazdığı 12 problemden 2'sine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilmiştir (bkz. Şekil 3.115.).

6.  $\frac{x}{x-2} + \frac{3x}{x-2} = 10$

Elimizde belli miktarda çiçek vardır. Elimizde bulunan çiçeklerin 2 eksigi kadar buketimize vardır. Sonradan elimizde bulunan çiçeklerin 2 katı çiçek alırız ve bunları buketlere dağıttık. Başka bir gün elimizde yine ilk günkü gibi aynı sayıda çiçek vardır ve bunların 3 katı çiçek daha alıp bunları yine elimizde bulunan aynı sayıda buketlere dağıttık. Bu iki günün toplamında 1 bukete düşen çiçek sayıları 10 olduğuna göre elimizde en başta kaç çiçek vardır?

2.  $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 6$

1) Bir çiçekçi elindeki demetleri 3 sepete paylaşmak istiyor. Sonradan 2 tane demet unuttuğunu fark edip onları da alıyor. Demetleri paylaşırken her sepette 4 demet olduğuna göre ilk başta kaç demet vardı?

Berna, Son klinik görüşme, Yanlış notasyon, Denklemi değiştirme | Serkan, Son klinik görüşme

**Şekil 3. 115.** Berna ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme

Berna ve Serkan'da diğer katılımcılar gibi "paylaştırma" ifadesini kullanarak kesrin bölüm anlamını problemlerinde kullanabilmişlerdir. Ancak, Berna bir problemde denklemdeki  $3x$  ifadesini  $x+3x$ 'i karşılayan "elindeki çiçeklerin 3 katı daha çiçek alma" şeklinde ifade etmiş ve denklemi değiştirmiştir. Serkan'ın kesrin bölüm anlamına dair yazdığı problemler ise doğru olarak belirlenmiştir. Son klinik görüşmede katılımcılar tarafından en çok kullanılan diğer anlam ise kesrin oran anlamıdır.

### 3.2.3.2. Oran anlamı

Son klinik görüşmede katılımcıların verilen denklemlere kesrin oran anlamını içeren problemleri rahatlıkla yazabildikleri belirlenmiştir. Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kesrin oran anlamını içeren problemler daha fazla yazılmasına karşın, Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kesrin bu anlamını içeren problem yazılmadığı görülmüştür. Yazılan problemlerin tamamı doğrudur. Bu durum, katılımcıların kesrin oran anlamını rahatlıkla kullanabildikleri şeklinde yorumlanabilir.

Katılımcıların yazılan 45 problemin 10'una kesrin oran anlamını içeren problem yazabilmişlerdir. Katılımcılar tarafından problemlere en fazla verilen kesrin anlamlarından biri de kesrin oran anlamıdır. Bu problemlerin 4'ü Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılırken, 6'sı Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere aittir. Katılımcılar tarafından Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren öğretim seanslarında yazılabilirken son klinik görüşmede Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kesrin oran anlamını içeren problem yazılmadığı belirlenmiştir. Ancak son klinik görüşmede bu kesir türünü içeren 1 denklem olduğu göz önünde bulundurulursa bu olası bir durumdur.

Ayşegül son klinik görüşmede yazdığı 11 problemde 3'üne kesrin oran anlamını içeren problem yazabilirken, Berna yazdığı 9 problemde 3'ünde kesrin oran anlamını kullanabilmiştir (bkz. Şekil 3.116.).

$$4. \frac{90}{x} - \frac{70}{x} = 2$$

→ Bir araç A şehri ve B şehri arasındaki 90 km'yi gitmiştir. Deneyişe ise B şehrinde A şehre gelirken gitmekten hızıyla aynı hızda 70 km gitmiştir. Gitmeden deneyişe göre 2 saat daha fazla yol almıştır buna göre hız kaçtır?

5.  $\frac{3}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{4}$

Bir sınıfta 3 kız öğrenci vardır. Belli sayıda ise erkek öğrenci vardır. Daha sonraki sınıfta 2 tane daha erkek öğrenci geliyor. İlk başta kızların erkeklere oranının, daha sonradan kızların erkeklere oranının farkı  $\frac{1}{4}$  olduğuna göre sınıfta en başta kaç erkek öğrencimiz vardır?

Ayşegül, Son klinik görüşme

Berna, Son klinik görüşme

Şekil 3. 116. Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme

Ayşegül probleminde yol uzunluğunu hız oranlayarak zamanı bulmuş ve kesrin oran anlamını probleminde kullanmıştır. Berna ise sınıftaki kız sayısını erkek sayısına oranlayarak verilen denkleme kesrin oran anlamına dair problem yazabilmiştir.

Erdem yazdığı 11 problemde 2'sine, Serkan ise yazdığı 12 problemde 2'sine kesrin oran anlamını içeren problem yazabilmiştir. Yazdıkları problemlere kesrin oran anlamını rahatlıkla verebilmişlerdir (bkz. Şekil 3.117.).

1.  $\frac{2+2}{3} = 4$

Benim 2, ablamın 3 kalemı vardır. Babam, bana doğum günümde birçoğu kalem daha hediye etti. Son durumda benim kalemlerimin ablamın kalemlerine oranı 4 oluyor. Babam bana kaç kalem hediye etmiştir?

2.  $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = 6$

Bir karnıza bulunduğu noktadan yavaşça dönmek istiyorsun. Bu karnıza yavaşça dönerken 3m/s hızla gidiyorsun. Sonra tekrar geri dönüyorsun. Geri dönerken 4m/s hızla dönüyorsun. Bidederente zamanı geri dönene kadar zamanından önceki pozisyonuna göre konumunu gittiği yol kaç m'dir?

Erdem, Son klinik görüşme

Serkan, Son klinik görüşme

**Şekil 3. 117.** Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme

Erdem kalem sayılarını birbirine oranlayarak, Serkan ise hız zaman problemi yazarak problemlerinde kesrin oran anlamını kullanmıştır. Son klinik görüşmede yazılan problemlerde en çok kullanılan anlam ise kesrin ölçme anlamı olmuştur.

### 3.2.3.3. Ölçme anlamı

Katılımcılar verilen denklemlere kesrin ölçme anlamını içeren problemleri rahatlıkla yazabilmişlerdir. Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde daha fazla olmakla birlikte katılımcıların kesrin bütün türlerine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazılabildikleri belirlenmiştir.

Katılımcıların yazılan 45 problemin 20'sine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazmışlardır. Nitekim katılımcılar tarafından problemlere en fazla verilen kesrin anlamının da ölçme anlamı olduğu belirlenmiştir. Bu problemlerin 10'u Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılırken, 4'ü Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere aittir. Geriye kalan 6 tanesi ise Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere aittir. En fazla denklemin Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluştuğu göz önünde bulundurulursa, bu olası bir durumdur. Ayşegül son klinik görüşmede yazdığı 11 problemden 4'üne kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabilirken, Berna yazdığı 9 problemden 2'sine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabilmiştir (bkz. Şekil 3.118.).

3.  $\frac{x+2}{3} + \frac{x+5}{2} = 9$

→ Bir baloncu elinde bulunan balonlara 2 tane daha balon eklemiştir ve bu balonları 3'erli grup ayırmıştır. Ertesi gün yine ilk gün başlangıçta elinde olan balon sayısı kadar balona 5 balon daha ekleyip ikişerli grupla ayırmıştır. Bu iki parçede elinde toplam 9 grup balon olduğuna göre ilk gün elinde en başta kaç balon var?

Fatma bir kitabı günde 3 sayfa okuyarak, Ayşe ise aynı kitabı günde 4 sayfa okuyarak bitiriyor. Fatmanın kitabı bitirme süresi Ayşe'nin kitabı bitirme süresinden 6 gün daha fazla olduğuna göre bu kitap kaç sayfadır?

Ayşegül, Son klinik görüşme

Berna, Son klinik görüşme

**Şekil 3. 118.** Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme

Ayşegül balonları 3'erli ve 2'şerli gruplara ayırarak grup sayısını ölçmüştür ve kesrin ölçme anlamına dair doğru bir problem yazabilmiştir. Berna ise bir kitabı 3'er sayfa ve 4'er sayfa okuma ile kaç günde biteceğini ölçerek kesrin ölçme anlamını kullanmıştır.

Erdem yazdığı 11 problemde 6'sına kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabilmiştir. Kesrin ölçme anlamına dair en çok problem yazabilen katılımcı olan Serkan, yazdığı 12 problemde 7'sine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabilmiştir (bkz. Şekil 3.119.).

$$5 \cdot \frac{3}{x} \cdot \frac{3}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$1 \cdot \frac{2+x}{3} = 4$$

Benim 2 şişem vardı. Şişelerden biri öbür şişeden 2 litre fazla su alabilmektedir. Elimde ise 3 litre su vardır. Bu suyu önce küçük sonra ise büyük şişeye doldurdum.

Küçük şişelerin sayısından büyük şişelerin sayısını çıkardığımda 1 buluyorum. Küçük şişe kaç litre su alır?

Ali'nin 2 TL'si vardır. Ali kütüphaneden bir tane 3 TL olan silgilerden 4 tane almak istemektedir. Ali'nin kaç liraya ihtiyacı vardır?

Erdem, Son klinik görüşme, Yanlış, Gerçeğe uygunluk

Serkan, son klinik görüşme, Kesirli değişkenle kesirli olmayan denklemi karıştırma

**Şekil 3. 119.** Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme

Erdem probleminde elindeki suyu belli litrelik şişelere doldurarak şişe sayısını ölçmeye dair bir problem oluşturmuştur. Serkan ise para ile tanesi 3 lira olan silgilerden kaç tane alacağını ölçerek kesrin ölçme anlamını içeren bir problem oluşturmuştur. Yazdıkları problemlere kesrin ölçme anlamını rahatlıkla verebilmişlerdir, ancak yazdıkları problemlerden 1'inde Erdem "1/4 şişe" ifadesini kullanarak oluşturduğu problemin gerçek hayata uygun olmamasına neden olmuştur. Serkan ise kesirli değişkenle kesirli olmayan değişkeni karıştırmıştır. Denklemi kesirli ifade olarak değil de  $2+x=3.4$  şeklinde kesirli olmayan denklem olarak ifade etmiştir (bkz. Şekil 3.119.).

Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren son denkleme Erdem ölçme anlamına dair problem yazmaya çalışmış, ancak her ikisinin de devamını getiremeyeceğini söyleyerek eksik bırakmıştır (bkz. Şekil 3.120.).

$$6. \frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x-2} = 10$$

Elimdeki ipin 2 katı uzunluğundaki ipten ipin  
2 metre 1

Erdem, Son klinik görüşme, Eksik

$$6. \frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x-2} = 10$$

Bir sepete elma yerleştireceğim. Sepet

Erdem, Son klinik görüşme, Eksik

**Şekil 3. 120.** Erdem'e ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme

Erdem ilk probleminde ipi belli uzunluktaki parçalara ayırarak parça sayısını ölçmeye çalışmış ama problemini tamamlayamamıştır. Benzer şeyi ikinci problemde elmaları sepetlere ayırarak sepet sayısını ölçmek için yapmaya çalışmış ancak tamamlayamamıştır.

Katılımcılar tarafından problemlere yazılan bir diğer anlam kesrin işlemci anlamıdır.

### 3.2.3.4. İşlemci anlamı

Kesrin işlemci anlamını içeren problemlerin tamamı Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır. Öğretim seanslarında da sadece Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 1, 2 ve 3'te kesrin işlemci anlamına dair problemler yazılabilmektedir. Yazılan problemlerin tamamı doğru olarak belirlenmiştir. Katılımcıların yazılan 45 problemin 4'üne kesrin işlemci anlamını içeren problem yazdıkları görülmüştür. Katılımcılar tarafından kesrin parça bütün anlamından sonra problemlere en az verilen kesrin anlamının işlemci anlamı olduğu belirlenmiştir. Bu problemlerin 4'ü de Pc Pdn ifadeleri içeren denklemlere yazılmıştır. Bu durumun kesrin işlemci anlamı ile ilgili olduğu düşünülmektedir.

Ayşegül son klinik görüşmede yazdığı 11 problemden 1'ine, Serkan yazdığı 12 problemden 1'ine kesrin işlemci anlamını içeren problem yazabilmiştir (bkz. Şekil 3.121.). Berna'nın öğretim seanslarında kesrin bu anlamına dair problem yazmış olmasına karşın son klinik görüşmede yazmadığı görülmüştür. Kesrin işlemci anlamını içeren en çok problem yazabilen katılımcı Erdem, yazdığı 11 problemden 2'sine kesrin işlemci anlamına dair problem yazabilmiştir. Yazdıkları problemlere kesrin işlemci anlamını rahatlıkla verebilmişlerdir.

$$3. \frac{x+2}{3} + \frac{x+5}{2} = 9$$

→ Gamze elinde bulunan çiçeklere 2 çiçek daha ekledikten sonra bu çiçekleri 3/1'ine alıyor. Daha sonra ilk başta olan çiçeklerin yarısını kadar çiçeğe 5 çiçek daha ekleyip yarısını alıyor. Daha sonra bu çiçekleri denet yapıyor. Denette toplam 9 tane çiçek olduğunu görüyor. Buna göre en başta elinde kaç çiçek vardı.

Ayşegül, Son klinik görüşme

$$3. \frac{x+2}{3} + \frac{x+5}{2} = 9$$

3) Esra'nın elinde aynı miktarda limon suyu ve su bulun maktadır. Esra limon suyu 2 litre daha limon suyu suya da 5 litre daha su ekliyor. Toplam limon suyunun  $\frac{1}{3}$ 'ünü suyun  $\frac{1}{2}$ 'sini alıp karıştırdığında 9 litrelik karışım elde ediyor. Buna göre başlangıçtaki limon suyu kaç litredir?

Serkan, Son klinik görüşme

Şekil 3. 121. Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme

Her iki katılımcı da problemlerinde  $\frac{1}{3}$ 'ü bir işlemin bir parçası olarak ele almışlar ve kesrin işlemci anlamını kullanabilmişlerdir. Yazılan problemler arasında kesrin en az kullanılan anlamı ise parça-bütün anlamı olmuştur (bkz. Tablo 3.37.).

### 3.2.3.5. Parça-bütün anlamı

Son klinik görüşmede Berna dışındaki katılımcıların kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazmadıkları görülmüştür. Berna'nın yazdığı problem  $P_c P_{dn}$  ifadeleri içeren denklemler arasındadır. Diğer denklem türlerinde kesrin bu anlamını içeren problem yazılmamıştır. Berna problemini doğru bir şekilde yazabilmiştir (bkz. Şekil 122.).



Bir tarlanın  $\frac{1}{3}$ 'üne patates, aynı tarlanın  $\frac{1}{4}$ 'üne de domates ekiliyor. Patatesin ekildiği alan, domates'in ekildiği alandan  $6 m^2$  fazla olduğuna göre tarla kaç  $m^2$ 'dir?

"İm...  $x/3$  patatesin ekildiği alan.  $x/4$  domatesin ekildiği alan. Bunların farkı, yani  $x/3 - x/4$ 'te bize neyi veriyor? Patatesin ekildiği alandan, domatesin ekildiği alanı çıkartıyoruz. 6'da patatesin ekildiği alan  $6 m^2$  daha fazlaymiş domatesin ekildiği alandan. O."

A: Peki,  $x$  neden pay kısmında sizin yazdığınız probleme göre?

"Çünkü  $\frac{1}{3}$ 'ünü ekliyoruz tarlanın."

Berna, Son klinik görüşme

Berna'nın Yorumu

**Şekil 3. 122.** Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Son klinik görüşme

Berna probleminde tarlayı parçalara bölerek bir kısmını almış ve kesrin parça-bütün anlamını problemde kullanabilmiştir (bkz. Şekil 3.122.).

Genel olarak ele alındığında, son klinik görüşmede katılımcıların verilen denklemlere kesrin bölüm, ölçme ve oran anlamını içeren problemleri rahatlıkla yazabildikleri belirlenmiştir.  $P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde daha fazla olmakla birlikte kesrin bütün türlerine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazılabilmişlerdir. Sadece Berna'nın kesrin bu anlamını içeren problemde denklemi değiştirme hatası yaptığı görülmüştür. Ancak, katılımcıların kesrin farklı anlamlarını içeren problemlerde de bu hatayı yaptıkları ve bu hatanın kesrin bölüm anlamı ile ilgili olmadığı belirtilebilir.

$P_n P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kesrin oran anlamını içeren problemler daha fazla yazılmakla birlikte,  $P_c P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kesrin bu anlamını içeren problem yazılmadığı görülmüştür. Ancak, kesrin bu anlamına dair yazılan problemlerin tamamı doğru olarak yazılmıştır. Ölçme anlamında ise  $P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde daha fazla olmakla birlikte kesrin bütün türlerine kesrin bu anlamına dair problem yazabilmişlerdir.

Diğer anlamlarda Berna dışında katılımcıların verilen denklemlere kesrin işlemci anlamını içeren problemleri yazabildikleri belirlenmiştir. Kesrin işlemci anlamını içeren problemlerin tamamı  $P_c / P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır. Katılımcıların verilen denklemlere Berna dışında kesrin parça-bütün anlamını içeren problem yazmadıkları belirlenmiştir. Berna'nın yazdığı problem  $P_c / P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemler arasındadır. Diğer denklem türlerinde kesrin bu anlamını içeren problem yazılmadığı belirlenmiştir. Kesrin bu anlamına dair yazılan problem doğru olarak yazılmıştır.

### 3.2.4. Kalıcılık klinik görüşme

Son klinik görüşmeden sonra yaklaşık 3 aylık bir geri çekilme sürecinin ardından öğretim seanslarında yapılan uygulamaların kalıcılığını belirlemek amacıyla kalıcılık klinik görüşme uygulanmıştır. Kalıcılık klinik görüşmede verilen denklemlerin 3'ü Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerden, 2'si Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden, 1'i ise Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır.

Kalıcılık klinik görüşmede katılımcıların problemleri genellikle doğru yazdıkları görülmüştür. Yaptıkları hataların ise son klinik görüşmeye benzer şekilde gerçeğe uygunluk ve denklemi değiştirme hataları olduğu belirlenirken, eksik bırakılmış problem de mevcuttur. Yazılan problemlerde en çok kesrin ölçme anlamı kullanılırken, en az parça-bütün anlamı kullanılmıştır. Katılımcılardan sadece Ayşegül kesrin 5 farklı anlamını da içeren problem yazabilirken, Berna sadece kesrin üç farklı anlamına dair problem yazabilmiştir. Katılımcılar en çok problemi Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazabilmişlerdir. Ancak, problem yazılması için verilen denklemler arasında en çok denklemin bu kesir türünü içeren denklemlere ait olması bu durumu olası kılmıştır. Farklı kesir türlerini içeren denklemlerde, denklem başına yazılan problemlere bakıldığında Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere denklem başına yazılan problemler en fazla sayıda olduğu, Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılan problemlerin ise en az sayıda olduğu belirlenmiştir.

Katılımcıların Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazmış oldukları problemlere dair doğru, eksik, yanlış ve boş frekansları, yapılan hata frekansları ve kullandıkları kesrin anlamlarına dair frekanslar tablo 3.38.'de sunulmuştur.

**Tablo 3. 38.** *Katılımcıların kalıcılık klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Doğru	Eksik	Yanlış	Toplam	Kesrin anlamı	Sözel	Sözel olmayan	Gerçeğe uygunluk	Yanlış Notasyon-denklemleri değiştirme
<i>Ayşegül</i>										
Pc Pdn	3	5	0	0	5	2 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran 1 İşlemci	5	0	0	0
Pn Pdc	2	3	0	1	4	2 Bölüm 1 Oran 1 Parça-bütün	4	0	1	0

**Tablo 3. 38.** (Devam) *Katılımcıların kalıcılık klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Doğru	Eksik	Yanlış	Toplam	Kesrin anlamı	Sözel	Sözel olmayan	Gerçeğe uygunluk	Yanlış Notasyon-denklemini değiştirme
<b>Ayşegül</b>										
Pc Pdc	1	1	0	1	2	1 Bölüm 1 Oran	2	0	0	1
Kalıcılık klinik görüşme	6	9	0	2	11	5 Bölüm 1 Ölçme 3 Oran 1 İşlemci 1 Parça-bütün	11	0	1	1
<b>Berna</b>										
Pc Pdn	3	4	0	0	4	2 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	4	0	0	0
Pn Pdc	2	2	0	0	2	2 Oran	2	0	0	0
Pc Pdc	1	1	0	0	1	1 Ölçme	1	0	0	0
Kalıcılık klinik görüşme	6	7	0	0	7	2 Bölüm 2 Ölçme 3 Oran	7	0	0	0
<b>Erdem</b>										
Pc Pdn	3	6	0	0	6	1 Bölüm 4 Ölçme 1 İşlemci	5	1	0	0
Pn Pdc	2	2	1	0	3	1 Ölçme 2 Oran	3	0	0	0
Pc Pdc	1	1	0	0	1	1 Oran	1	0	0	0
Kalıcılık klinik görüşme	6	9	1	0	10	1 Bölüm 5 Ölçme 3 Oran 1 İşlemci	9	1	0	0
<b>Serkan</b>										
Pc Pdn	3	7	0	0	7	2 Bölüm 2 Ölçme 2 Oran 1 Parça-bütün	7	0	0	0
Pn Pdc	2	3	0	0	3	1 Bölüm 1 Ölçme 1 Oran	3	0	0	0

**Tablo 3. 38.** (Devam) *Katılımcıların kalıcılık klinik görüşmede cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazabilme durumları*

	Soru sayısı	Doğru	Eksik	Yanlış	Toplam	Kesrin anlamı	Sözel	Sözel olmayan	Gerçeğe uygunluk	Yanlış Notasyon-denklemleri değiştirme
<b>Serkan</b>										
Pc Pdc	1	1	0	0	1	1 Ölçme	1	0	0	0
Kalıcılık klinik görüşme	6	11	0	0	11	3 Bölüm 4 Ölçme 3 Oran 1 Parça-bütün	11	0	0	0
Toplam	24	36	1	2	39	11 Bölüm 12 Ölçme 12 Oran 2 İşlemci 2 Parça-bütün	38	1	1	1

Tablo 3.38. incelendiğinde katılımcıların kendilerine verilen denklemlere genellikle doğru ve sözel problem yazabilmişlerdir. Yanlış yazdıkları problemlerde gerçeğe uygunluk ve notasyon hatası tespit edilmiştir. Gerçeğe uygunluk hatası Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde görülürken, denklemleri değiştirme hatası Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerde görülmüştür. Yazılan problemlere en fazla kesrin ölçme anlamı verilebilmekle birlikte diğer anlamlarda kullanılmaya çalışılmıştır. İçerdikleri kesir türüne göre denklemlere yazılan problem sayısına oran olarak bakıldığında payı cebirsel paydası nümerik kesirleri içeren denklemlere 7,33 problem, Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere 6,00 problem ve Pc Pdc kesirleri içeren denklemlere 5,00 problem yazabilmişlerdir. Yazılan problemlerin genellikle sözel olduğu belirlenmiştir. Ancak sözel olmayan problem de mevcuttur.

Kalıcılık klinik görüşmeden elde edilen veriler katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere sözel problem yazarken kesrin hangi anlamlarını nasıl ve ne ölçüde kullanabildiklerini belirleyebilmek amacıyla kesrin bölüm anlamı, oran anlamı, ölçme anlamı, işlemci anlamı ve parça-bütün anlamı başlıkları altında incelenmiştir.

### 3.2.4.1. Bölüm anlamı

Kalıcılık klinik görüşmede katılımcıların verilen denklemlere kesrin bölüm anlamını içeren problemleri rahatlıkla yazabildikleri belirlenmiştir. Yazılan problemler içerisinde kesrin bölüm anlamını içeren problemlerin oranı, son klinik görüşmeye göre artış göstermiştir. Katılımcılar tarafından problemlere en fazla verilen kesrin anlamlarından birinin kesrin bölüm anlamı olduğu belirlenmiştir. Son klinik görüşmede olduğu gibi Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde daha fazla olmakla birlikte kesrin bütün türlerine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazılabildiği görülmüştür.

Katılımcıların yazılan 39 problemin 11'ine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilmişlerdir. Bu problemlerin 7'si Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılırken, 3'ü Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere aittir. Geriye kalan 1 tanesi ise Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılmıştır. Katılımcılar tarafından yazılan kesrin bölüm anlamını içeren problemlerin tamamı doğru olarak belirlenmiştir.

Kalıcılık klinik görüşmede, yazdığı problemlere en fazla bölüm anlamını veren katılımcı Ayşegül'dür. Ayşegül kalıcılık klinik görüşmede yazdığı 11 problemde 5'ine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilmiştir. Berna yazdığı 7 problemde 2'sine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazabilmiştir (bkz. Şekil 3.123.).

$$6. \frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x-2} = 10$$

→ Bir sepette bir miktar yumurta vardır. Bu yumurtaları yumurtaların iki katı kadar koliye bölünecekti, 2 sepet yumurtayı Ayşe 3 sepet yumurtayı da Ahmet kolilerle bölerek ikişerindeki birer koliye geçen yumurtaların sayısı 10 olduğuna göre bir sepette kaç yumurta vardır?

$$3. \frac{x+2}{3} + \frac{x+5}{2} = 9$$

1- Bir kitapçıda belli sayıda kitap vardır. Bu kitaplara 2 tane daha kitap ekleyerek 3 farklı kitaplığa bölüştürecektir. Daha sonra elimizde en başta bulunan kitaplara 5 kitap daha ekleyerek 2 tane kitaplığa bölüştürecektir. Bu iki dağıtımın her bir kitaplığa düşen kitap sayısının toplamı 9 olduğuna göre başlangıçta kaç kitap vardır?

Ayşegül, Kalıcılık klinik görüşme

Berna, Kalıcılık klinik görüşme

**Şekil 3. 123.** Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme

Ayşegül probleminde yumurtaları kolilere eşit miktarda dağıtarak kesrin bölüm anlamını kullanmıştır. Berna ise kitapları kitaplıklara yerleştirerek kesrin bölüm anlamına dair doğru ve sözel bir problem yazabilmiştir. Erdem yazdığı 9 problemlen 1'ine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazarken, Serkan yazdığı 11 problemlen 3'ünde kesrin bölüm anlamını kullanmıştır (bkz. Şekil 3.124.).

$$1. \frac{2x}{3} = 4$$

Elindeki 2 lirayı babamdan aldığım bir miktar parayı birleştirip 3 yegânime eşit olarak dağılıştığımda her birime 4 lira düşmektedir. Babamdan ne kadar para aldım?

$$5. \frac{3}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Ali'nin 3 m'lik iki tane kumaşı vardır. Ali birinci kumaşı 4 parçaya ikinci kumaşı da  $x+2$  m'lik parçalara böler. Birinci kumaşın bir parçasının uzunluğu ikinci kumaşın bir parçasının uzunluğundan  $\frac{1}{4}$  m uzun olduğuna göre ikinci kumaşın kaç parçaya ayrılmıştır?

Erdem, Kalıcılık klinik görüşme

Serkan, Kalıcılık klinik görüşme

**Şekil 3. 124.** Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme

Erdem elindeki parayı eşit bir şekilde 3 kişiye dağıtırken, Serkan kumaşı eşit parçalara bölerek kesrin bölüm anlamını probleminde kullanabilmiştir. Şekil 3.123 ve şekil 3.124'te de görüldüğü üzere katılımcılar farklı kesir türlerinde kesrin bölüm anlamını problemlerinde rahatlıkla kullanabilmişlerdir. Katılımcılar kalıcılık klinik görüşmede problem yazarken sıkça kullandıkları anlamlardan bir diğeri ise kesrin oran anlamıdır.

### 3.2.4.2. Oran anlamı

Katılımcıların verilen denklemlere kesrin oran anlamını içeren problemleri hatasız ve farklı kesir türlerine rahatlıkla yazabildikleri belirlenmiştir. Kalıcılık klinik görüşmede yazılan problemler içerisinde kesrin oran anlamını içeren problemlerin oranı son klinik görüşmeye göre genel olarak artış göstermiştir. Ancak, son klinik görüşmenin aksine bu anlama dair en fazla problemin Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluştuğu belirlenmiştir. Bununla birlikte, farklı cebirsel kesir türlerini içeren denklemlere de kesrin oran anlamına dair problem yazılabildiği görülmüştür. Kesrin bu anlamına dair yazılan problemlerin tamamı doğru olarak yazılmıştır.

Yazılan 39 problemde 12'si kesrin oran anlamını içeren problemde oluşmaktadır. Katılımcılar tarafından problemlere en fazla verilen kesrin anlamlarından birinin de oran anlamı olduğu belirlenmiştir. Bu problemlerin 4'ü Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılırken, 6'sı Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere aittir. Geriye kalan 2'si ise Pc Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır.

Ayşegül yazdığı 11 problemde 3'üne kesrin oran anlamını içeren problem yazabilmiştir. Berna yazdığı 7 problemde 3'üne kesrin oran anlamını verebilmiştir (bkz. Şekil 3.125.).

1.  $\frac{2+x}{3} = 4$  Bir sınıfta 3 erkek ve bir kaç kızdan oluşan bir grup vardır. Bu gruba iki adet kız eklendiğinde kızların erkekler oranı 4 olacaktır. Göre başlangıçta kaç adet kız vardır?

5.  $\frac{3}{x} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

1- Bir vazoda belli miktarda karanfil ve 3 adet gül vardır. Daha sonra vazoya 2 tane daha karanfil ekle vazoya 2 tane daha karanfil ekle den önceki çiçeklerin birbirine oranları ile 2 tane daha karanfil eklendikten sonraki çiçeklerin birer oranlarının farkı 1 olduğuna göre vazoda en başta kaç karanfil vardır?

Ayşegül, Kalıcılık klinik görüşme

Berna, Kalıcılık klinik görüşme

**Şekil 3. 125.** Ayşegül ve Berna'ya ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme

Her iki katılımcı da doğrudan ifadeleri birbirine oranlayarak kesrin oran anlamını problemlerinde kullanmışlardır. Erdem ise yazdığı 10 problemde 3'üne kesrin oran anlamına dair problem yazabilmiştir. Serkan 11 problemde 3'ünde kesrin

oran anlamını kullanmıştır (bkz. Şekil 3.126.). Katılımcılar yazdıkları problemlere kesrin oran anlamını rahatlıkla verebilmişlerdir.

The image shows two handwritten mathematical problems and their solutions. The first problem, written by Erdem, asks for the speed of a car that travels 90 km in 2 hours and 70 km in 1 hour, with a 2-hour time difference. The second problem, written by Serkan, asks for the distance between two cities, A and B, given that a car takes 3 hours to go from A to B and 4 hours to return, with a 6-hour time difference.

1.  $\frac{90}{x} - \frac{70}{x} = 2$

90 km'lik yolu belirli bir hızla gittim. 70 km'lik yolu aynı hızla gittim. 2 saatlik zaman farkı vardı. Hızım ne kadardır?

2.  $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 6$

A'den B şehrine giden bir araç B şehrine vardığında bir haber alıp A şehrine döner. A şehrinde B şehrine giderken 3 saat ... B şehri A şehrine dönerken de 4 saatte gider. A'den B'ye giderkenki hızı B'den A'ya giderkenki hızından 6 km/h daha fazla olduğuna göre A ile B şehri arası kaç km'dir?

Erdem, Kalıcılık klinik görüşme

Serkan, Kalıcılık klinik görüşme

**Şekil 3. 126.** Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme

Erdem ve Serkan'a ait problem örneklerinde ise her iki katılımcı hız problemi oluşturarak kesrin oran anlamına dair doğru ve sözel problem oluşturabilmişlerdir. Kalıcılık klinik görüşmede, katılımcılar tarafından yazılan problemlerde en çok kullanılan anlamlardan bir diğeri ise kesrin ölçme anlamıdır.

### 3.2.4.3. Ölçme anlamı


Kalıcılık klinik görüşmede yazılan problemler içerisinde kesrin ölçme anlamını içeren problemlerin oranı, son klinik görüşmeye göre genel olarak azalış göstermiştir. Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerde daha fazla olmakla birlikte kesrin bütün türlerine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabilmişlerdir. Yazılan problemlerin tamamı doğrudur. Bu durum kesrin ölçme anlamına dair problemlerin katılımcılar tarafından rahatlıkla yazılabildiğini göstermektedir.

Katılımcıların yazılan 39 problemin 12'sine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazdıkları görülmüştür. Bu problemlerin 8'i Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılırken, 3'ü Pn Pdc kesirli ifadeleri içeren denklemlere aittir. En fazla denklemin Pc Pdn kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluştuğu göz önünde bulundurulursa, bu olası bir durumdur. Geriye kalan 1 tanesi ise Pc Pdc ifadeleri içeren denklemlere aittir.

Ayşegül yazdığı 11 problemde sadece 1 tanesine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabilmiştir. Berna yazdığı 7 problemde 2'sine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazarak son klinik görüşmeye göre kesrin ölçme anlamına dair kendi problem yazabilme oranını arttırmıştır (bkz. Şekil 3.127.).

2.  $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 6$

→ Ayşe sâretin sınıfındaki öğrencileri her sıraya üç öğrenci oturacak şekilde yerleştirmiştir. Daha sonra öğrenciler tahtaya çok vakit kaldığı için bu sefer her sıraya 4 öğrenci oturacak şeklide yerleştirmiştir. İlk seferde göre 6 sıra daha az kullanıldığine göre bu sınıfta kaç öğrenci vardır?



1- Bir kempte belli gruplar oluşturulacaktır. Bu kempte 2 otobüs kişi vardır. Bu kişileri 1 otobüs kişi sayısının 2 eksiği kişilik gruplara dağıtacağız. Daha sonra 3 otobüs kişi sayısını 1 otobüs kişi sayısının 2 eksiği kişilik gruplara dağıtacağız. Bu dağıtılan grupların toplamı 10 olduğuna göre 1 otobüs kişi sayısı kaçtır?

Ayşegül, Kalıcılık klinik görüşme

Berna, Kalıcılık klinik görüşme

**Şekil 3. 127.** Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme

Her iki katılımcı da kişileri belli kişilik gruplara ayırarak grup sayısını ölçmüş ve problemlerinde kesrin ölçme anlamını kullanmışlardır. Erdem yazdığı 9 problemde 5'ine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazmış ve son klinik görüşmeye göre kesrin bu anlamına dair problem yazma oranını arttırmıştır (bkz. Şekil 3.128.). Son klinik

görüşmede yaptığı gerçeğe uygun olmama hatasını kalıcılık klinik görüşmede yapmamıştır. Serkan yazdığı 11 problemde 4'üne kesrin ölçme anlamını içeren problem yazarak son klinik görüşmeye göre kesrin ölçme anlamına dair problem yazabilme oranını azaltmıştır. Ayrıca son klinik görüşmede yaptığı kesirli değişkenle kesirli olmayan değişkeni karıştırma hatasını yapmamıştır. Nitekim yazdıkları problemlere kesrin ölçme anlamını rahatlıkla verebilmişlerdir (bkz. Şekil 3.128.).

$3. \frac{x+2}{3} + \frac{x+5}{2} = 9$ <p>Kitaplarına babamın hediyesi olan 2 kitabı ekleyip kitaplığımı üçer üçer dizdiğimde dışarı raf sayısı yla kitaplarımın annemin hediyesi olan 5 kitabı ekleyerek ikiser ikiser dizdiğimde dışarı raf sayısı toplam 9'dur. Başlangıçta kaç kitabım vardı?</p> <p>Erdem, Kalıcılık klinik görüşme</p>	$6. \frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x-2} = 10$ <p>Aşe'nin 2 kutu, Kübra'nın 3 kutu kitabı vardı. Aşe ve Kübra kitapların bir kutudan alabildikleri kitap sayısının 2 katı kadar olan raflara diziyorlar. Toplamda 10 raf olduğuna göre bir kutuda kaç kitap vardır?</p> <p>Serkan, Kalıcılık klinik görüşme</p>
--	--

**Şekil 3. 128.** Ayşegül, Berna, Erdem ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme

Her iki katılımcı da kitaplarını belli sayıda kitap alabilen raflara yerleştirerek raf sayısını ölçmüşler ve kesrin ölçme anlamını kullanarak doğru problemler yazabilmişlerdir. Kesrin ölçme anlamının aksine son klinik görüşmede en az kullanılan anlamlardan birini kesrin işlemci anlamı oluşturmaktadır.

#### **3.2.4.4. İşlemci anlamı**

Kalıcılık klinik görüşmede Erdem ve Ayşegül dışında katılımcıların verilen denklemlere kesrin işlemci anlamını içeren problem yazmadıkları belirlenmiştir. Kesrin işlemci anlamını içeren problem son klinik görüşmede olduğu gibi  $P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılabılmıştır. Öğretim seanslarında da sadece  $P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren öğretim seansı 1, 2 ve 3'te kesrin işlemci anlamını içeren problemler yazılabılmıştır. Erdem tarafından yazılan problem sözel olmayan, ancak doğru bir problem olarak belirlenmiştir (bkz. Şekil 3. 108). Yazılan problemler  $P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denkleme yazılmıştır. Bu durumun kesrin işlemci anlamı ile ilgili olduğu düşünülmektedir.

Son klinik görüşmede katılımcıların yazılan 45 problemin 4'üne kesrin işlemci anlamını içeren problem yazabildikleri belirlenmiştir. Kalıcılık klinik görüşmede ise katılımcıların yazılan 39 problemin 2'sine kesrin işlemci anlamını içeren problem yazabilmışlardır. Katılımcılar tarafından problemlere en az verilen kesrin anlamlarından birinin işlemci anlamı olduğu belirlenmiştir. Nitekim kalıcılık klinik görüşmede katılımcılar tarafından kesrin işlemci anlamını içeren problem yazabilme durumu son klinik görüşmeye göre azalma göstermiştir.

Ayşegül yazdığı 11 problemde 1'ine kesrin işlemci anlamını vermiştir. Berna'nın öğretim seanslarında kesrin bu anlamına dair problem yazmış olmasına karşın son klinik görüşmede de kalıcılık klinik görüşmede de kesrin bu anlamını içeren problem yazmadığı görülmüştür. Erdem ise yazdığı 9 problemde 1'ine kesrin işlemci anlamını içeren problem yazabilmıştır (bkz. Şekil 3.129.). Serkan'ın kesrin bu anlamını içeren problem yazmadığı belirlenmiştir.

$$2. \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 6$$

Bir sayının  $\frac{1}{3}$ 'ü ile  $\frac{1}{4}$ 'ü arasındaki fark  
dır. Bu sayı kaçtır?

Erdem, Kalıcılık klinik görüşme, sözel olmayan

**Şekil 3. 129.** Erdem'e ait sözel problem örneği, Kalıcılık klinik görüşme

Erdem probleminde  $\frac{1}{3}$  ve  $\frac{1}{4}$ 'ü işlemin bir parçası olarak kullanmış ve kesrin bu anlamına dair doğru ve sözel bir problem yazabilmiştir, ancak günlük hayatla ilgili sözel bir problem oluşturamamıştır. Oluşturduğu problem doğru ancak matematiksel bir problemidir.

Kesrin işlemci anlamı gibi diğer az kullanılan anlamlarından bir diğeri ise kesrin parça-bütün anlamıdır.

### 3.2.4. Parça-bütün anlamı

Kalıcılık klinik görüşmede son klinik görüşmeye göre daha yüksek oranda kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazılmıştır. Son klinik görüşmede katılımcıların verilen denklemlere Berna dışında kesrin parça-bütün anlamını içeren problem yazmadıkları belirlenirken, kalıcılık klinik görüşmede Ayşegül ve Serkan'ın kesrin parça-bütün anlamına dair 1'er problem yazabildikleri belirlenmiştir.

Son klinik görüşmede Berna'nın yazdığı problem,  $P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemler arasındadır. Diğer denklem türlerinde kesrin bu anlamını içeren problem yazılmadığı belirlenmiştir. Kalıcılık klinik görüşmede ise kesrin-parça bütün anlamına dair yazılan 2 problemde 1'i  $P_c P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemden oluşurken, 1'i  $P_n P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemden oluşmaktadır. Ancak kesrin bu anlamına dair yazılan problemlerden 1'i yanlış yazılmıştır. Çünkü 1/4 test kitabı ibaresinin gerçeğe uygun olmadığı düşünülmektedir. Son klinik görüşmede katılımcıların yazılan 45 problemin 1'ine kesrin parça-bütün anlamını içeren problem yazabildikleri belirlenirken, kalıcılık klinik görüşmede 39 problemde 2 problem şeklinde ortaya çıkmıştır.

Son klinik görüşmede kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazamayan katılımcılardan Ayşegül ve Serkan kalıcılık klinik görüşmede yazdıkları 11 problemde 1'er tanesine kesrin parça bütün anlamını verebilirken (bkz. Şekil 3.130.), Erdem kesrin parça-bütün anlamına dair problem yazamamıştır. Son klinik görüşmede Berna yazdığı 9 problemde 1'ine kesrin parça-bütün anlamını içeren problem yazabilmişken, kalıcılık klinik görüşmede kesrin bu anlamına dair problem yazmamıştır.

$$5. \frac{3}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{4}$$

→ 10. sınıfa geçen Duygu ilk dönem aldığı test kitaplarının 3'tesini almıştır. İkinci dönem ilk dönem aldığı test kitaplarından iki tane daha fazla test kitabı alıyor ve yine 3'tesini bitiriyor. İlk dönem ikinci dönem göre 1/4 daha fazla test kitabı bitirdiğine göre ilk dönem kaç tane test kitabı almıştır?

$$2. \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 6$$

Ali ve Ahmet eşit uzunlukta yollarda yarış yapmak istiyorlar. Ali yarışı başlatıp yolun  $\frac{1}{3}$  kısmını gidiyor ve aracı bırakıyor. Ahmet de yolun  $\frac{1}{4}$ 'ünü gittiğinde bacağı bitiyor. Arabanın aralarındaki mesafe bir olduğuna göre yolun uzunluğu kaç km'dir?

Ayşegül, Kalıcılık klinik görüşme, Yanlış, Serkan, Kalıcılık klinik görüşme gerçeğe uygunluk

**Şekil 3. 130.** Ayşegül ve Serkan'a ait sözel problem örnekleri, Kalıcılık klinik görüşme

Ayşegül probleminde “ $3/x$ 'i bütün test kitaplarının 3 tanesi” şeklinde ifade ederek kesrin parça-bütün anlamını kullanmaya çalışmıştır. Ancak sonuçtaki  $1/4$ 'ü “ $1/4$  test kitabı” şeklindeki ifadesi gerçeğe uygun bir ifade değildir. Erdem ise yolu bir bütün olarak ele almış ve “yolun 3'te 1'i ve 4'te 1'i” şeklinde yorumlamıştır.

Kalıcılık klinik görüşmede katılımcıların verilen denklemlere kesrin bölüm, oran ve ölçme anlamını içeren problemleri rahatlıkla yazabildikleri belirlenirken, kesrin diğer anlamlarını da problemlerinde kullandıkları görülmüştür.  $P_c/P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde daha fazla olmakla birlikte kesrin bütün türlerine kesrin bölüm anlamını içeren problem yazılabildiği belirlenmiştir. Katılımcılar tarafından yazılan kesrin bölüm anlamını içeren problemlerin tamamı doğru olarak belirlenmiştir.  $P_n/P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kesrin oran anlamını içeren problemler daha fazla yazılmakla birlikte kesrin bütün denklem türlerinde kesrin oran anlamına dair problem yazılabiliştir. Kesrin bu anlamına dair yazılan problemlerin de tamamı doğru olarak yazılmıştır.

Katılımcıların  $P_c/P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde daha fazla olmakla birlikte kesrin bütün türlerine kesrin ölçme anlamını içeren problem yazabildikleri görülmüştür. Katılımcılar tarafından yazılan kesrin ölçme anlamını içeren problemlerin tamamı doğru olarak belirlenmiştir. Berna dışında katılımcılar verilen denklemlere kesrin işlemci anlamını içeren problemleri yazabilmişlerdir. Kesrin işlemci anlamını içeren problemlerin ise tamamı  $P_c/P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerden oluşmaktadır.

Katılımcıların verilen denklemlere kalıcılık klinik görüşmede Ayşegül ve Serkan kesrin parça-bütün anlamına dair 1'er problem yazabilmişlerdir. Kesrin parça-bütün anlamına dair yazılan 2 problemde 1'i  $P_c/P_{dn}$  kesirli ifadeleri içeren denklemden oluşurken, 1'i  $P_n/P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemden oluşmaktadır. Kesrin bu anlamına dair yazılan problemlerden 1'i günlük hayatla ilişkilendirilememiş ve yanlış yazılmıştır.

## 4. SONUÇ

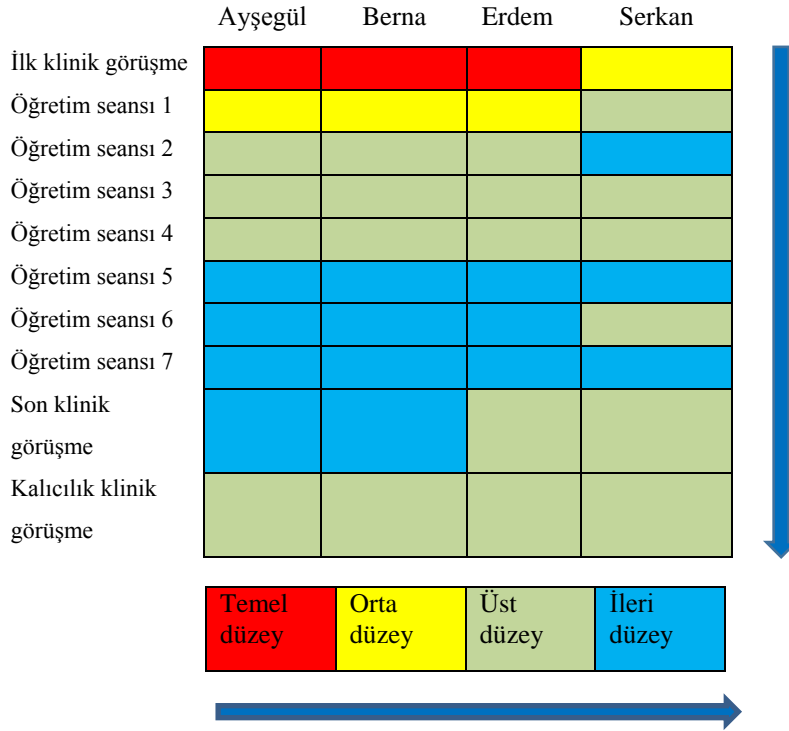
Bu bölümde işlem esnekliği ve kavramsal anlama değişim süreçleri ile bu iki bilgi arasındaki ilişkiye dair elde edilen sonuçlar ele alınmıştır.

### 4.1. İşlem Esnekliğine Yönelik Sonuçlar

Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerin işlemsel boyutu katılımcıların çoklu strateji bilgileri, çözüm tercihleri ve tercih edilen çözümü uygulayabilme çerçevesinde değerlendirilmiştir. Aşağıda bu kapsamda elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

- Uygulama sürecinde katılımcıların işlem esneklikleri gelişim göstermiştir. Bu gelişime etki eden en önemli faktörün çoklu strateji bilgisi olduğu belirlenmiştir. Katılımcıların çalışmanın başındaki sınırlı SP stratejisi kullanımları onların esnekliklerini temel düzeyde tutmuş, zamanla bunun gelişmesiyle işlem esneklikleri artış göstermiştir.
- Katılımcıların çoklu strateji bilgileri arttıkça bir stratejiyi diğeriyle karşılaştırma ve stratejileri ayırt etme fırsatları da artmıştır. Çoklu strateji bilgisi katılımcıların verilen denklemin çözümü için etkili stratejiyi seçerek doğru stratejileri belirleme becerilerinin artmasını sağlamıştır.
- Öğrendikleri stratejileri farklı cebirsel kesir türlerine aktarmada bazen zorlansalar da başarılı olabilmişlerdir. Kesrin anlamı stratejisi farklı kesir türlerinde en çok zorlanılan strateji olmuştur.
- Katılımcıların çoklu strateji bilgileri, belirlenen düzeyler (temel düzey, orta düzey, üst düzey ve ileri düzey) kapsamında ele alındığında, katılımcıların düzeyler arasındaki geçişinin aynı hızda gerçekleşmediği görülmüştür. Düzeyler arasındaki geçiş üç katılımcıda temel düzey ve orta düzey arasında 1'er öğretim seansı, orta düzeyden üst düzeye ve üst düzeyden ileri düzeye 3'er öğretim seansı sürmüştür. Dördüncü katılımcı olan Serkan ise orta düzeyde öğretim seanslarına başlamış, ilk öğretim seansı ile beraber üst düzeye, ikinci öğretim seansı ile ileri düzeye çıkmıştır. Diğer öğretim seanslarında ise üst düzey ve ileri düzey arasında geçişler yaparak devam etmiştir. Serkan'ın başlangıçta bazı stratejileri çözümlü örnek incelemeden kendi başına uygulayabildiği ve yeni öğrendiği stratejileri başka kesir türlerine diğer üç katılımcıya göre daha rahat aktarabildiği görülmüştür.

- Ancak son klinik görüşmeden 3 ay sonra gerçekleştirilen kalıcılık klinik görüşmede dört katılımcının da üst düzeyde işlem esnekliğine sahip oldukları görülmüştür (bkz. Şekil 4.1.).
- YAÇ çözümler önemini korumakla birlikte SP çözümler son klinik görüşmeye göre kalıcılık klinik görüşmede daha çok ön plana çıkmıştır.



**Şekil 4. 1.** Katılımcıların klinik görüşmeler ve öğretim seansları arasındaki çoklu strateji bilgisi düzey geçişleri

- Çözümlü örneklerin, farklı stratejilerin tanıtılmasında ve uygulanmasında etkili olduğu, dolayısıyla işlem esnekliğini geliştirdiği görülmüştür. 3 katılımcı yakın sayılarda çözümlü örnek incelemiş ve düzeyler arası geçiş için aynı sayıda öğretim seanslarına ihtiyaç duymuşlardır. Düzeyler arasında hızlı geçiş yaparak ilerleyen, üst düzey ve ileri düzey arasında gidiş gelişler yaşayan Serkan, en az çözüm inceleyen katılımcı olmuş, YAÇ'leri kendisi oluşturmaya ve diğer denklemlere uygulamaya çalışmıştır. Bu nedenle düzeyler arasında düzenli bir geçiş gösterememiştir.
- Katılımcıların çözümlü örnek inceleme sayıları çoklu strateji bilgi düzeylerinin ilerlemesinde etkili olmuştur. Ancak son aşamada varılan işlem esnekliği düzeyleri benzerdir. Stratejileri daha çok kendisi oluşturmaya çalışan ve diğer

katılımcılara göre daha az çözüm inceleyen Serkan kalıcılık klinik görüşmede en çok puana sahip olan katılımcı olmuştur.

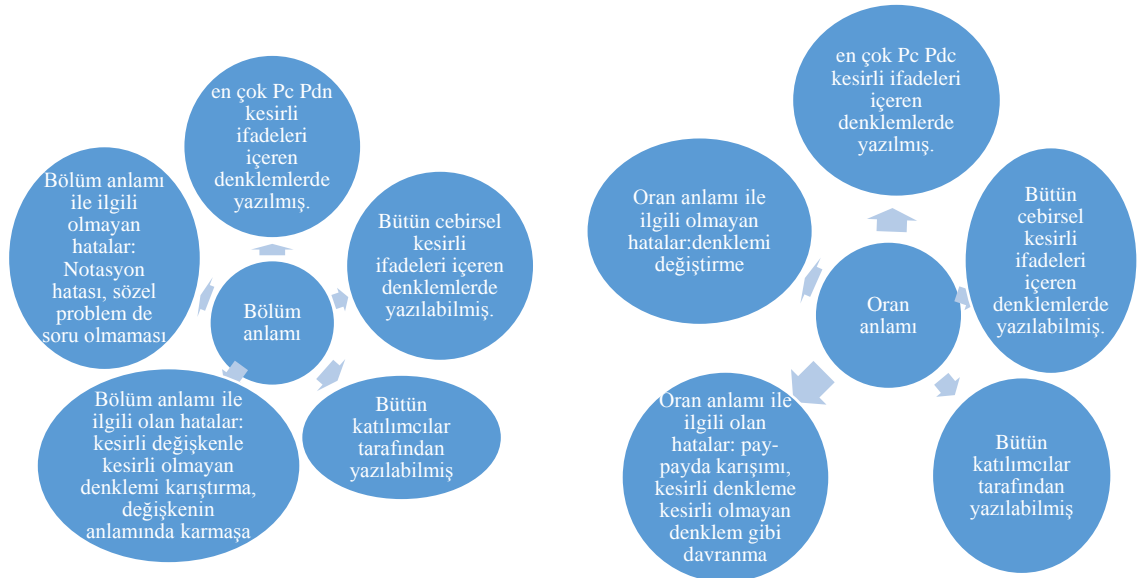
- Üç katılımcı genellikle YAÇ'lerin kullanıldığı çözümleri tercih etmişlerdir. Ancak bazı sorularda uzun adımlı, işlem yoğunluğu olan YAÇ'leri kullanarak çözüm geliştirebilmelerine rağmen kısa adımlı SP stratejisini kullandıkları çözümü tercih ettikleri görülmüştür. Bu durum etkili bir çözücü oldukları anlamına gelmektedir. Diğer katılımcı ise genellikle YAÇ'li çözümleri tercih etmiştir.
- Çözümleri yorumlamak ve çözümler arasında bilinçli tercihlerde bulunmak öğrenilen stratejilerin farklı kesir türlerine aktarılmasını sağlamış ve böylece katılımcıların çoklu strateji bilgilerini olumlu yönde etkilemiştir. Çünkü katılımcılar çözüm inceleme ihtiyacı duymamışlar ve oluşturdukları çözümler çoklu strateji bilgi puanlarına dâhil edilmiştir.
- Farklı stratejilerin karşılaştırılması öğrencilerin kendi stratejilerini belirlerken bireysel, öğretimsel ve matematiksel nedenler kullandıklarını göstermiştir. Tercih sebebi başlangıçta daha çok öğretimsel ya da kişisel nedenler olsa da ilerleyen süreçlerde katılımcıların daha çok matematiksel nedenler sundukları görülmüştür. Bu durumun öğretim seanslarında katılımcılardan çözümlerini ve farklı strateji ile çözülmüş örnekleri yorumlamaları ile ilgili olduğu görülmüştür.
- Öğretim seanslarının ilerlemesi ile beraber tercihler YAÇ'nin kullanıldığı çözümlere yönelmiştir. Özellikle  $P_n P_{dc}$  ya da  $P_c P_{dc}$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde bu tercih daha ön plana çıkmıştır. Çünkü cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde paydanın cebirsel olması ve kesirli ifadelerin toplama ve çıkarma işlemi gerçekleştirilirken cebirsel olan paydaların eşitlenmesinde YAÇ çözümlerin daha etkili olduğu görülmüştür.

## 4.2. Kavramsal Anlamaya Yönelik Sonuçlar

Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerin kavramsal boyutu katılımcıların ne ölçüde bu denklemlere dayalı problem kurabildikleri ve pay ve paydaya nasıl anlamlar yükledikleri çerçevesinde değerlendirilmiştir. Aşağıda bu kapsamda elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

- Katılımcılar cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere problem yazarken kesrin farklı anlamlarından yararlanmışlardır. Katılımcıların en çok kesrin bölüm anlamını kullandıkları görülmüştür. Cebirsel kesirli ifadelere en çok verilen diğer anlamlar oran ve ölçme, en az verilen anlamlar ise işlemci ve parça bütün anlamları olmuştur. Hatta bazı katılımcılar kesrin işlemci ya da parça bütün anlamını hiç kullanmamışlardır.
- Oran anlamı, özellikle paydası cebirsel ifadelerde iki şeyi birbirine oranlayarak rahat bir şekilde sözel problem yazılabilen anlamlardan biri olmuştur. Ölçme anlamı ise katılımcıların öğretim seanslarıyla beraber öğrendikleri ve yeni öğrendikleri için kullanmaya çalıştıkları anlamlardan biri olmuştur.
- Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılan sözel problemlerde kullanılan anlamların, kesrin türü ile ilgili olduğu görülmüştür. İşlemci anlamı sadece payı cebirsel paydası nümerik cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemde kullanılırken, bölüm anlamı en çok payı cebirsel paydası nümerik cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kullanılmıştır. Ölçme ve parça bütün anlamı, tüm kesir türlerinde kullanılmıştır. Oran anlamı ise daha çok payı cebirsel paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kullanılabilmiştir.
- Katılımcıların sözelden ziyade matematiksel problemler yazdıklarında probleme bölüm ve işlemci anlamını vermişlerdir. Sözel problemlerde diğer anlamları kullanabilmişlerdir.
- Öğretim seansları ile beraber yapılan hata sayısı azalmış, son klinik görüşme ve kalıcılık klinik görüşmede yapılan hata türleri aynı olmuştur. Katılımcıların notasyonu değiştirme, sözel problemde soru kökünün olmaması, eksik veri kullanma, matematiksel içerik ekleme, hatalarının kesrin anlamı ile ilgili olmadığı düşünülürken, kesirli değişken ile kesirli olmayan değişkeni karıştırma, değişkenin anlamında kargaşa, pay-payda karıştırma, günlük hayatla ilişkilendirememeye hatalarının kesrin anlamı ile ilgili olduğu görülmüştür.

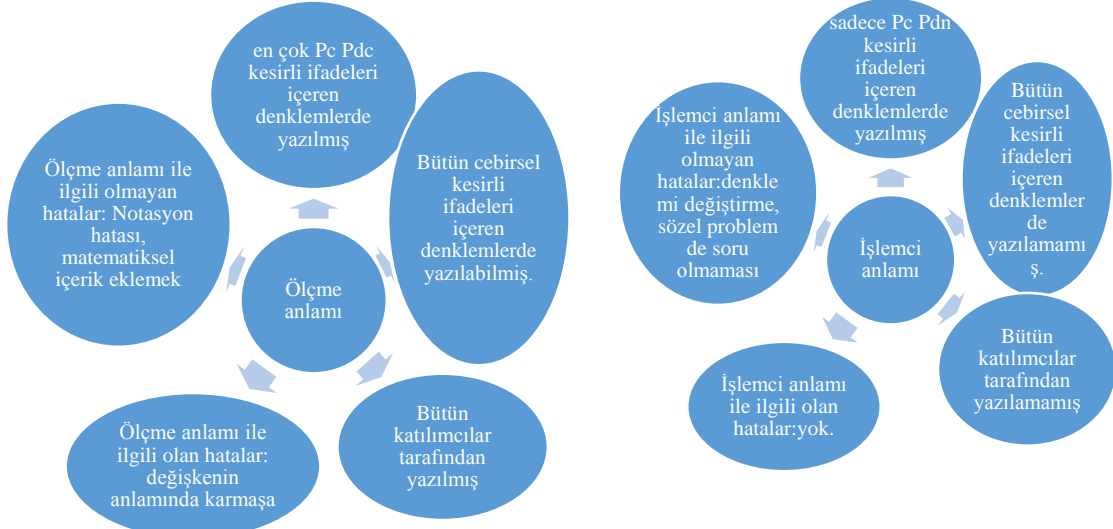
- Yapılan hatalar kesrin anlamına göre farklılıklar göstermektedir. Örneğin pay ve payda karışımı, kesrin ölçme anlamını içeren sözel problemlerde ölçmenin temel birimi ile ilgili iken, oran sözel problemlerinde, birimlerin birbirine oranı söz konusudur. Bu nedenle kesrin farklı anlamlarına göre yazılan problemlerde yapılan hatalar da farklılık göstermektedir. Şekil 4.2, şekil 4.3 ve şekil 4.4'te kesrin bölüm, oran, ölçme, işlemci ve parça-bütün anlamlarına dair yapılan hatalar, sözel problemlerin, hangi kesir türüne yazılabildiği ve katılımcılar tarafından sözel problemlerin yazılabılme durumu gösterilmiştir (bkz. Şekil 4.2., Şekil 4.3. ve Şekil 4.4.)



*Kesrin bölüm anlamına dair yazılan sözel problem durumları*

*Kesrin oran anlamına dair yazılan sözel problem durumları*

**Şekil 4. 2.** Bölüm ve oran anlamı



*Kesrin ölçme anlamına dair yazılan sözel problem durumları*

*Kesrin işlemci anlamına dair yazılan sözel problem durumları*

**Şekil 4. 3.** Ölçme ve İşlemci anlamı



*Kesrin parça bütün anlamına dair yazılan sözel problem durumları*

**Şekil 4. 4.** Parça-bütün anlamı

- İşlemsel ve kavramsal bilginin ilişkisi incelendiğinde, kesrin anlamı stratejisi, işlem esnekliğinde kullanılan ve kavramsal anlama ile en çok ilgili olduğu düşünülen strateji olarak belirlenmiştir. Bu strateji, cebirsel kesirli denklemler düzeyinde ele alındığında özellikle kesrin bölüm anlamının önemli olduğu görülmüştür. Bunun nedeni, kesrin kavramsal boyutunu içeren bölüm anlamını farklı cebirsel kesir türlerine aktarabilmektir. Kavramsal açıdan elde edilen bulgulara göre katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazdıkları problemlere, en çok kesrin bölüm anlamını verebildikleri belirlenmiştir.
- Kesrin anlamı stratejisi, kesrin kavramsal boyutu ile işlemsel boyutunun en ilişkili olduğu stratejidir. Bu stratejiyi katılımcılar kesrin bölüm anlamını farklı kesir türlerine aktarabildikleri takdirde kullanabilmektedirler. Nitekim katılımcılar öğretim seanslarının sonlarına doğru bu stratejiyi rahatlıkla uygulayabilmişlerdir. Bu durum, bu uygulamanın katılımcıların kavramsal ve işlemsel anlamalarını ilişkilendirebilme durumlarını olumlu etkilediğini göstermektedir. Çünkü katılımcılar, kesrin anlamını işlemsel boyuta, kesrin işlemsel boyutunu kavramsal boyuta aktarabilmişlerdir.

Bu araştırmadan elde edilen sonuçların diğer araştırmalarla olan ilişkisi ise tartışma bölümünde irdelenmiştir.

## 5. TARTIŞMA

Bu araştırmanın amacı dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebirsel kesirli denklemlerde işlemsel ve kavramsal bilgilerinin gelişimini incelemektir. Bu bölümde katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde işlemsel bilgi ve kavramsal anlamaya dair değişimleri ve bu değişimi etkileyen faktörler alanyazın bağlamında tartışılmıştır. Tartışılan diğer bir durum ise işlem esnekliği ve kavramsal anlama değişimi arasındaki ilişkidir.

İşlem esnekliği çoklu strateji bilgisi, bilinçli bir şekilde çözümü tercih etme ve tercih edilen çözümü uygulayabilme şeklinde üç bileşenden oluşmaktadır (Star, 2001; Berk ve Taber, 2009). Bu araştırmanın işlem esnekliğine dair elde edilen sonuçları, bu üç bileşen altında tartışılmıştır.

Başlangıçta üç katılımcının çoklu strateji bilgileri temel düzeyde, bir katılımcının ise orta düzeydedir. Çoklu strateji bilgi düzeyleri arasındaki geçişler farklılık gösterebilmiştir. Bu durumun nedeni her öğretim seansında belli sayıda stratejinin amaçlanması, bu üç katılımcının diğer katılımcıya göre daha fazla sayıda çözüm incelemeleri ve yeni öğrendikleri stratejileri diğer kesir türlerine aktarmada diğer katılımcılara göre daha fazla zaman harcamaları olabilir. Çözümlü örnek inceleyerek gerçekleştirilen çözümlerin katılımcıların çoklu strateji bilgisi puanlarına dâhil edilmediği göz önünde bulundurulursa kendisinin gerçekleştirebildiği çözümlerin Serkan'ın çoklu strateji bilgi puanlarının daha hızlı artış göstermesini sağlamıştır. Çalışma bittikten sonra 3 aylık bekleme sürecinin ardından, katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyi üst düzey olarak belirlenmiştir.

Katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeylerini geliştirmek amacıyla çözümlü örnekler kullanılmış ve çözümlü örneklerin farklı stratejilerin tanıtılmasında ve uygulanmasında etkili olduğu görülmüştür. Alanyazındaki birçok çalışma da çözümlü örneklerin öğrenmeye pozitif etkisi olduğu sonucunu desteklemektedir (van Merriënboer ve Paas, 1998; Mwangi ve Sweller 1998; Hattie, 2009; Retnowati vd., 2010; van Loon-Hillen, van Gog ve Brand-Gruwel, 2012; Renkl, 2014). Örneğin,

Mwangi ve Sweller (1998) dokuz yaşındaki öğrencilere iki aşamalı aritmetik kelime problemlerini çözmeleri için çözümlü örnekler kullanmışlardır. Deney grubu ve kontrol grubu benzer seviyelerde olmasına rağmen, çözümlü örneklerin uygulandığı

öğrencileri olumlu etkilediği tespit edilmiştir. Benzer şekilde Van Loon-Hillen vd. (2012) dokuz yaşındaki öğrencilerle deneysel bir çalışma gerçekleştirmişler ve bir grupta çözümlü örnekleri kullanırken diğer grupta kullanmamışlardır. İki sınıf başarı testi sonuçları farklı olmasa da, çözümlü örneklerle eğitim uygulanan sınıf daha hızlı öğrenmiştir.

Retnowati vd. (2010), 12 yaşındaki öğrencilere geometrik teoremleri problemlerine nasıl uygulayacaklarını öğretmek için kitaplarda yazılan örnekleri kullanmışlardır. Sonuç olarak, çözümlü örneklerin hem edinim hem de transfer testlerinde etkili olduğu belirlenmiştir.

Düzeyler arasındaki geçişi etkileyen diğer bir faktör ise çözümleri yorumlama ve karşılaştırmadır. Verimli çözümlü tercih etmek, işlem esnekliğinin önemli bileşenlerinden birini oluşturmaktadır. Genel olarak yenilikçi alternatif stratejilerin kullanıldığı çözümlerin, SPÖ stratejisi ve SP stratejisine göre katılımcılar tarafından çok daha yüksek sayıda tercih edildiği belirlenmiştir. Katılımcıların bazı sorularda uzun adımlı, işlem yoğunluğu olan YAÇ'leri kullanarak çözüm geliştirebilmelerine rağmen, kısa adımlı SP stratejisini kullandıkları çözümlü tercih ettikleri görülmüştür. Bu ise katılımcıların verimli çözümlü tercih edebildiklerinin bir göstergesidir. Elde edilen sonuçlara göre katılımcıların çözümleri karşılaştırmaları, işlem esnekliklerini olumlu yönde etkilemiştir. Yaptıkları araştırmada Silver vd. (2005) çoklu stratejilerin tartışılmasının ve karşılaştırılmasının, öğrencilerin belirli bir çözüm stratejisi veya çözüm adımının neden kabul edilebilir olduğunu haklı çıkarmalarına ve belirli problemler için neden daha verimli olduğunu anlamalarına yardımcı olduğunu belirtmişlerdir. Bu araştırmada da benzer şekilde katılımcılar ilk öğretim seanslarında öğretimsel ya da kişisel nedenler sunarken zamanla daha matematiksel nedenler sunmaya başlamışlardır. Star ve Seifert (2006) ise çoklu çözüm strateji bilgisinin, öğrencilerin problemleri çözdükçe çözümlerin verimlilik ve doğruluğunu daha kolay düşünmelerine yardımcı olduğunu vurgulamışlardır.

Bu sonucu destekler nitelikteki çalışmalarında Yakes ve Star (2011) matematik öğretmenlerinin öğrencilerin işlem esnekliğini geliştirmek için karşılaştırma kullanımını teşvik etmek amacıyla, bir günlük mesleki gelişim etkinliği düzenlemişlerdir. Mesleki gelişim etkinliğinin amacı, öğretmenlerin öğretimde çözümleri karşılaştırmayı etkili bir

şekilde nasıl kullanacaklarının farkında olmalarını sağlamaktır. Öğretmenlerin mesleki gelişim sırasında öğretim yoluyla çözümleri karşılaştırmaları, cebirde kendi işlem esnekliklerini olumlu yönde etkilemiştir.

Alanyazında bir alanda önceden bilgiye sahip olan bazı öğrencilerin prosedürleri karşılaştırdıklarında daha fazla esneklik geliştirdiklerini gösteren güçlü deneysel kanıtlar vardır. Ancak yeni başlayan öğrenciler için bu konu henüz açık değildir (Rittle-Johnson ve Star, 2007, 2009; Star ve Rittle-Johnson, 2009). Bu araştırmada katılımcılar bu görevle ilk defa karşılaşmaktadırlar. Ancak her bir öğretim seansında farklı stratejiler, çözümlü örnekler yardımı ile katılımcılar tarafından uygulanmış ve ardından nedenleri ile beraber tercihleri sorulmuştur. Nitekim bu araştırmada, katılımcıların çözümler arasında bilinçli tercihlerde bulunmalarının işlem esnekliklerini olumlu yönde etkilediği görülmüştür. Sonuç olarak katılımcıların tercih nedenleri daha matematiksel olurken işlem esneklikleride olumlu yönde gelişmiştir. Rittle-Johnson, Star ve Durkin (2012) farklı iki okuldan sekizinci sınıf öğrencileri ile işlem esnekliği üzerine deneysel bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Elde edilen sonuçlara göre 1 aylık test uygulamalarında hemen işlemleri karşılaştıranların karşılaştırmayanlara göre daha esnek oldukları belirlenmiştir. Sonuç olarak karşılaştırmanın yeni başlayanlarda esnekliği destekleyebileceğini ve çoklu prosedürlerin erken başlamasına önemli bir sebep olabileceğini belirtmişlerdir.

Çözümlerin karşılaştırılmasında Rittle-Johnson ve Star (2007) karşılaştırılmalı çözüm stratejilerinin öğrencilere yan yana sunulmasının yararlı olduğunu bulmuşlardır. Bu araştırmacılara göre yan yana sunma, çözüm stratejilerinin daha doğrudan karşılaştırılmasını sağlamakta, stratejiler arasındaki benzerliklerin ve farklılıkların tanımlanmasını kolaylaştırmaktadır. Yan yana karşılaştırma, öğrencilerin her birinde veya her iki çözüm stratejisinde önemli olan özellikleri fark etmelerini ve hatırlamalarını sağlamaktadır. Bu araştırmada da karşılaştırılan çözümler yanyana sunulmuştur. Öğrendikleri ve tercih ettikleri stratejileri hem yeni denklemlere hem de farklı kesir türünü içeren denklemlere uygulayabilmişlerdir. Bu durum katılımcıların çözümleri karşılaştırarak yeni stratejilerin özelliklerini fark ettiklerinin ve hatırladıklarının göstergesidir. Bu nedenle bu sonuç Rittle-Johnson ve Star'ın (2007) araştırması ile uyumlu bulunmuştur.

Elde edilen sonuçlara göre çözümleri karşılaştırırken katılımcılar tarafından sunulan tercih nedenleri kişisel nedenler (KN), öğretimsel nedenler (ÖN) ve matematiksel nedenler (MN) olmak üzere kategorilere ayrılmıştır. Katılımcılar tercih nedeni olarak başlangıçtaki öğretim seanslarında farklı türde nedenler sunsalar da son seanslara doğru daha çok matematiksel nedenler sunmuşlardır. Bu durum katılımcıların zamanla daha bilinçli tercihlerde buldukları anlamına gelmektedir. Çoklu stratejilerin tartışılması ve karşılaştırılması, öğrencilerin belirli bir çözüm stratejisi veya çözüm adımının neden kabul edilebilir olduğunu haklı çıkarmalarına ve belirli sorular için neden bazı stratejilerin daha verimli olduğunu anlamalarına yardımcı olmaktadır (Silver vd., 2005). Bu araştırmada da katılımcılarla çözümleri tartışıldıkça ve nedenleri irdelendikçe daha verimli çözümleri tercih ettikleri ve daha mantıksal nedenler sundukları görülmüştür. Nitekim bu yönüyle Silver, vd.'nin (2005) araştırması ile uyumlu bulunmuştur.

Katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ilerledikçe denklemleri ilk seanslara oranla daha doğru çözdükleri görülmüştür. Son klinik görüşmeden yaklaşık 3 ay sonra gerçekleştirilen kalıcılık klinik görüşmede de, bütün katılımcılar verilen denklemleri doğru çözmüşlerdir. Başlangıçta sahip oldukları karmaşalar kalıcılık klinik görüşmede bulunmamaktadır. Benzer şekilde Lynch ve Star (2014) birden fazla strateji geliştirmeye yönelik akademik olarak iyi olduğu belirlenen 6 öğrenci ile öğretim yılı sonunda bir araştırma yapmışlar ve öğrencilerin çoklu stratejileri öğrenme uygulamasını nasıl gördüklerini araştırmışlardır. Bu amaçla öğrencilerle görüşme yapılmıştır. Elde edilen verilere göre çoklu strateji geliştirmenin öğrencilerin denklem çözümünde karşılaştıkları karmaşaları azalttığını ve doğru yönergeler ışığında çoklu strateji ile birlikte eğitimi tercih ettikleri belirlenmiştir.

Kavramsal anlama boyutu, kesrin beş farklı anlamı ve katılımcıların hataları kapsamında tartışılmıştır. Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılan sözel problemlerde en çok kullanılan anlamlar kesrin bölüm anlamı ile oran ve ölçme anlamları olmuştur. Kesrin işlemci ve parça bütün anlamları ise en az kullanılan anlamlar olmuştur. Hatta bazı katılımcılar bunları hiç kullanmamışlardır. Bu durumun birkaç faktöre bağlı olabileceği düşünülmektedir. Etkili olan faktörlerden biri, öğretim seanslarından sonra katılımcılara çözmeleri için sunulan ve kesrin farklı anlamlarını içeren problemlerdir. Parça-bütün anlamı bu problemlerde en az kullanılan anlam

olmuştur. Bu nedenle katılımcılar tarafından da az kullanılmıştır. Bölüm anlamı katılımcıların en aşına oldukları anlam olduğu için neredeyse bütün seanslarda kullanılmıştır. Uygulama esnasında katılımcılardan sözel problem yazmaları istendiği için kesrin işlemci anlamını kullanmaktan kaçınmış olabilirler.

Bu araştırmanın aksine Öksüz (2004) çalışmasında öğrencilerin kesrin gelişim sürecinde öncelikle parça-bütün anlayışına sahip olduklarını daha sonra paylaşırma yani bölüm olarak algıladıklarını, kesirler ve cebirsel kesirlerle ilgili farklı anlayışlara sahip olduklarını vurgulamıştır. Bu çalışmada ise cebirsel kesirli ifadelerde kesrin bölüm anlamı katılımcıların ilk aklına gelen ve en çok kullanılan anlam olmuştur. Yazdıkları problemler ise genellikle doğrudur. Ancak Öksüz (2004) çalışmasında bu araştırmanın sonuçlarını destekleyen sonuçlara da ulaşmıştır. Öğrencilerin bölüm olarak cebirsel kesri anladıklarında, cebirsel kesir için bölme cümlelerini verebildiklerini belirtmiştir. Öğrenciler kesrin bölüm anlamını geliştirdikten sonra sorunun başka boyutlarını kurabilmişlerdir. Bu çalışmada da öğrencilerin problem kurma sürecini benzer şekilde gerçekleştirdikleri görülmüştür. Katılımcılar öncelikle kesrin anlamını oluşturmaya çalışmış, ardından problemin diğer boyutlarını oluşturmuşlardır.

Araştırmada kesrin işlemci anlamı en az kullanılan anlamlardan biri olmuştur. Bazı katılımcılar tarafından ise hiç kullanılmamıştır. Uygulama esnasında katılımcılardan sözel problem yazmaları istendiği için kesrin işlemci anlamını kullanmaktan kaçınmış oldukları düşünülmektedir. Bu araştırmanın aksine Öksüz'ün (2004) araştırmasında öğrenciler kesrin işlemci anlamını cebirsel kesirlerde kullanıp numerik kesirlerde kullanmamışlardır. Öksüz'e (2004) göre bunun nedeni öğrencilerin algoritmik işlemlerle cebirsel kesirler arasında hızlı bir ilişki kurma istekleri olarak belirtilmektedir.

Kesrin parça-bütün anlamı da katılımcılar tarafından az kullanılmıştır. Kesrin parça-bütün anlamına dair yazılan problemler genellikle doğrudur ya da eksik bırakılmıştır. Işık ve Kar'ın (2012) araştırması da bu çalışmayı destekler niteliktedir. Araştırmacılar 7. sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine dair sözel problem kurabilme durumlarını incelemişler ve öğrencilerin yaşayabilecekleri zorlukları araştırmışlardır. Kesrin parça-bütün ilişkisini kuramama, buldukları zorlukların arasında

yer almaktadır. Benzer durum bu araştırmada da mevcuttur. Katılımcılar verilen denklemlerde kesrin parça-bütün ilişkisini kurmada zorluk yaşamışlar ve bazı problemleri yarım bırakmışlardır.

Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazılan sözel problemlerde kullanılan kesrin anlamlarının, kesrin türü ile ilgili olduğu görülmüştür. İşlemci anlamı sadece  $P_c/P_d$  cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemde kullanılırken, bölüm anlamı en çok  $P_c/P_d$  cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kullanılmıştır. lme ve parça-bütün anlamı bütün kesir türlerinde kullanılmıştır. Oran anlamı ise daha çok  $P_c/P_d$  kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kullanılabilmifitir. Bu konuda alanyazında yapılmış herhangi bir çalışma ile karşılaşılmamıştır. Bu sonucun cebirsel kesirli ifadelerin kavramsal kısmına yeni bir bakış açısı getirebileceği düşünülmektedir.

Araştırmada oluşturulan problemlerde katılımcıların genellikle sözel ve günlük dili kullandıkları belirlenmiştir. Bu konuda ünlü ve Sarpkaya Aktaş (2017) ilköğretim matematik ğretmeni adaylarının cebirsel ifade ve denklemlere ilişkin kurdukları problemleri incelemişlerdir. Öğretmen adaylarından verilen cebirsel ifade ve denklemlere uygun problem kurmaları istenmiştir. Sonuç olarak ğretmen adaylarının cebirsel ifade ve denklemlere yönelik genel olarak sözel ve zlebilen problemler kurdukları, kurulan problemlerde genellikle günlük dili kullandıkları tespit edilmiştir. Bu araştırma niversite düzeyinde yapılmış olmakla birlikte mevcut araştırmanın sonuçları ile benzer niteliktedir. Bu araştırmanın aksine Işık ve Kar (2012a) tek bilinmeyenli doğrusal ve ikinci dereceden denklemlere ğretmen adaylarının kurdukları sözel problemleri araştırmışlar ve matematiksel ögeleri sözel ifadeye yanlış çevirdiklerini belirtmişlerdir.

Kesirden cebirsel kesirlere geçiş, karmaşık bir süreçtir ve kavramlara ilişkin pek çok kavram hatası ve yanlış anlama bu geçişi zorlaştırır (ksz, 2004). Bu araştırmada da uygulama başlamadan önce katılımcılar cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere genellikle yanlış sözel problemler yazmışlar, problemleri eksik bırakmışlar ya da hiç problem yazmamışlardır. Notasyonu değiştirme, sözel problemde soru olmaması, eksik veri kullanma, matematiksel içerik ekleme, hatalarının kesrin anlamı ile ilgili olmadığı düşünülürken kesirli değişken ile kesirli olmayan değişkeni karıştırma, değişkenin anlamında kargaşa, pay-payda karıştırma, günlük hayatla ilişkilendirememesi hatalarının

kesrin anlamı ile ilgili olduğu görülmüştür. Ayrıca yapılan hatalar kesrin anlamına göre farklılıklar göstermektedir. Örneğin, pay ve payda karışımı kesrin ölçme anlamını içeren sözel problemlerde ölçmenin temel birimi ile ilgili iken oran sözel problemlerinde birimlerin birbirine oranı söz konusudur. Bu nedenle kesrin farklı anlamlarına göre yazılan problemlerde yapılan hatalar da farklılık göstermektedir. Alanyazında bu sonuç ile ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu noktada bu sonucun cebirsel kesirli ifadelerin kavramsal kısmına yeni bir boyut katabileceği vurgulanabilir.

Bu araştırmada belirlenen bazı hataların başka çalışmalarda da görüldüğü belirlenmiştir. Işık ve Kar (2012), 7. sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine dair sözel problem kurabilme durumlarını incelemişler ve öğrencilerin yaşayabilecekleri zorlukları araştırmışlardır. Öğrencilerin kurdukları problemlerde, toplanan ikinci kesri bütünün kalanı üzerinden ifade etme, parça-bütün ilişkisini kuramama, işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme, birim kargaşası, toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme, işlemi soru köküne yansıtamama ve tamsayı kesirlerin tam kısımlarına anlam yükleyememe şeklinde yedi güçlük tespit edilmiştir.

Alibali vd. (2014) ortaokul öğrencilerinden, doğrusal ve bir bilinmeyenli denklemlerle ilgili denklem sorularını sözel probleme dönüştürmelerini istemişler. Yaptıkları hatalara bakarak öğrencilerin kavramsal anlamalarında iki boşluk belirlemişlerdir: İlki, öğrencilerin çarpma işlemi ile sembolik sunumu arasındaki bağı anlamada eksiklikleri vardır. İkincisi, öğrenciler tutarlı bir hikâye içerisinde çoklu matematiksel işlemleri göstermede zorluk yaşamaktadırlar.

Öğretim seansları ile beraber yapılan hata sayısı azalmış, son klinik görüşme ve kalıcılık klinik görüşmede yapılan hata türleri aynı olmuştur. Yapılan hata türleri denklemi değiştirme ve sözel problemde gerçeğe uygunluk olarak belirlenmiştir. Katılımcıların yazılan sözel problemleri yorumlamaları ve uygulamanın son aşamasında çözmeleri için verilen sözel problemler, denklemi değiştirme hatasını azaltmış, ancak tamamen önleyememiştir. Gerçeğe uygunluk ise daha sonra ortaya çıkan ve önlenememiş diğer bir hata türüdür.

İşlemsel ve kavramsal bilginin ilişkisi incelendiğinde, kesrin anlamı stratejisinin işlem esnekliğinde kullanılan ve kavramsal anlama ile en çok ilgili olduğu düşünülen

strateji olduğu belirlenmiştir. Bu strateji, cebirsel kesirli denklemler düzeyinde ele alındığında özellikle kesrin bölüm anlamının önemli olduğu g r lmektedir. Bunun nedeni kesrin kavramsal boyutunu içeren bölüm anlamını farklı cebirsel kesir türlerine aktarabilmektir. Kavramsal açıdan elde edilen bulgulara göre katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere yazdıkları problemlere en çok kesrin bölüm anlamını verebildikleri belirlenmiştir.

Katılımcıların kesrin anlamı stratejisini başlangıçta zorlanmakla birlikte ilerleyen süreçte rahat bir şekilde uygulayabildikleri ve farklı cebirsel kesir türlerini içeren denklemlere aktararak işlem yapabildikleri görülmüştür. Bu durum işlemsel ve kavramsal bilginin birbirini desteklediğinin göstergesidir. Bu doğrultuda Rittle-Johnson ve Alibali (1999) ile Schneider, Rittle-Johnson ve Star (2011) dönüşümlü yaklaşıma göre her iki bilginin değişiminin birbirini etkilediğini, yani birbiriyle ilişkili olduğunu belirtmişlerdir. Bu araştırma da her iki bilgi türünün birbirini desteklediği görülmüştür.

## 6. ÖNERİLER

Araştırma sonuçlarına dayalı olarak geliştirilen öneriler “Öğretimde uygulamaya yönelik öneriler” ve “Gelecekteki araştırmalara yönelik öneriler” şeklinde iki başlık altında incelenmiştir.

### 6.1. Öğretimde Uygulamaya Yönelik Öneriler

Bu araştırma, elde edilen sonuçlarla uyumlu olarak, katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde işlem esnekliklerinin ve kavramsal anlama durumlarının gelişmesinde etkili olmuştur. Bu araştırma sonuçlarına göre bu bölümde öğretmenlere, öğretmen adaylarına, öğrencilere ve eğitim sistemine dair önerilerde bulunulmuştur.

- Bu araştırmada cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere yönelik yedi öğretim seansı uygulanmış ve bu sürecin katılımcıların olumlu yönde değişmesinde etkili olduğu belirlenmiştir. Bu konunun öğretiminde belirtilen süre temel alınabilir.
- Öğretmenlerin ve öğrencilerin işlem esnekliğini geliştirebilmek amacıyla ders programlarında ve ders kitaplarında çoklu çözüm stratejilerine ve çözümler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumlarına yer verilebilir.
- Öğretmen adaylarının işlem esnekliklerini ve kavramsal anlamalarını geliştirmek için üniversite düzeyinde dersler geliştirilebilir. Bu derslerin tasarlanmasında, işlem esnekliğinin ve kavramsal anlamının gelişimi amacıyla yürütülen bu araştırmanın uygulama zamanı göz önünde bulundurularak bir program düzenlenebilir.
- Fazla zamana ihtiyaç duymasına rağmen bu sürecin işlem esnekliğine ve kavramsal anlamaya olan uzun vadeli faydaları dikkate alındığında, bu öğeleri ilköğretimden başlayarak matematik dersleri ile bütünleştirmek, işlem esnekliği ve kavramsal anlamının öğretiminin uygulanması için yararlı bir yaklaşım olacaktır.
- Bu çalışma, katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere dair belirli matematiksel konuları işlemsel ve kavramsal olarak anlamaları için fırsatlar sağlanabileceğini ortaya koymaktadır. Bu araştırma, çeşitli matematiksel konuları kapsayan işlem esnekliği ve kavramsal anlama faaliyetlerinin geliştirilmesi ve uygulanmasının, işlemsel ve kavramsal anlayışın gelişimine

yardımcı olabileceğini düşündürmektedir. Buna göre, öğrencilerin başka matematik konularındaki işlemsel ve kavramsal bilgi ve becerilerini geliştirmek için bir ders tasarlanabilir.

- Öğretmenlerin ve öğrencilerin yararlanabilmeleri amacıyla işlem esnekliğini ve kavramsal anlamayı temel alan ve bu konuda yapılabilecek etkinlikleri içeren bir kitap hazırlanabilir ya da genel ağ sayfası tasarlanabilir. Ayrıca bu konuların öğretimi ve öğreniminde nasıl materyallerin kullanılacağı araştırılabilir.
- Ortaöğretim ve yükseköğretim kurumlarına giriş sınavlarındaki değerlendirme sisteminde, sonuç yerine farklı çözümleri ve bu çözümler arasında bilinçli tercihlerde bulunmayı vurgulayan sınavların oluşturulması şeklinde değişiklikler yapılabilir.

Diğer bölümde bu araştırmanın devamında yapılabilecek araştırmalar sunulmuştur.

## 6.2. Gelecekteki Araştırmalara Yönelik Öneriler

Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde işlem esnekliği ve kavramsal anlamaya dair gerçekleştirilen bu çalışma, olumlu bir şekilde sonuçlanmıştır. Bu bölümde bu araştırmanın devamında yapılabilecek çalışmalarla ilgili araştırmacılara öneriler sunulmaktadır.

- Çözümlü örneklerin katılımcıların çoklu strateji bilgilerini olumlu yönde etkilediği görülmüştür. Başka matematik konularında da çözümü örnekler benzer şekilde uygulanabilir ve çoklu strateji bilgisine olan etkisi araştırılabilir.
- Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere dair öğretmenlere çoklu strateji bilgisi ve bilinçli tercihlerde bulunabilme konusunda hizmet içi eğitim verilebilir. Bu bağlamda öğretmenlere verilecek hizmet içi eğitimin niteliği, kapsamı ve süresi tasarlanarak bu eğitimin etkililiği incelenebilir.
- Üniversite düzeyinde öğretmen adaylarının işlem esnekliklerini ve kavramsal anlamalarını geliştirmek için nasıl bir dersin tasarlanacağı ve bu dersin nasıl uygulanabileceği araştırılabilir.
- Öğretmenlerin ve öğrencilerin işlem esnekliğini geliştirebilmek amacıyla ders programlarında ve ders kitaplarında çoklu çözüm stratejilerine ve çözümler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumlarına dair nasıl öğelerin bulunması gerektiği incelenebilir.
- Bu çalışmada, katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde işlemsel ve kavramsal anlayışının iyileştirilmesi planlanmamış olmasına rağmen, sonuçlar, çeşitli matematiksel problem konularını kapsayan işlem esnekliği ve kavramsal anlama faaliyetlerinin geliştirilmesi ve uygulanmasının işlemsel ve kavramsal anlayışın gelişimine yardımcı olabileceğini düşündürmektedir. Bu kapsamda başka matematik konularında işlem esnekliği ve kavramsal anlamaya dair araştırmalar gerçekleştirilebilir.
- Sonuç yerine farklı çözümleri ve bu çözümler arasında bilinçli tercihlerde bulunmayı vurgulayan sınavların tasarlanması, uygulanması, ölçülmesi ve başarıya etkisi şeklinde uzun vadeli bir araştırma gerçekleştirilebilir.

## KAYNAKÇA

- Acar, N. (2010). *Kesir Çubuklarının İlköğretim 6. Sınıf öğrencilerinin Kesirlerde Toplama ve Çıkarma İşlemlerindeki Başarılarına Etkisi*. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, KONYA.
- Aksu, M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *The Journal of Educational Research*, 90 (6), p 375-380. 1997.
- Alacaci, C. (2012). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları. Bingölbali, E ve Özmantar, M., F. (Edt). *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri*. Ankara: Pegem Akademi.
- Alibali, Martha W., Mitchell J. Nathan, Matthew S. Wolfgram , R. Breckinridge Church, Steven A. Jacobs, Chelsea Johnson Martinez & Eric J. Knuth (2014) How teachers link ideas in mathematics instruction using speech and gesture: A corpus analysis, *Cognition and Instruction*, 32:1, 65-100, DOI: 10.1080/07370008.2013.858161.
- Altun, M. (2004). *İlköğretim ikinci kademedede (6,7 ve 8. Sınıflarda) matematik öğretimi*. Alfa Yay., Bursa.
- Altun, M. (2005). *Matematik eğitimi*. Bursa: Aktüel Alfa Akademi Bas. Yay. Dağ. Ltd. Şti.
- Altun, M. (2014). *Liselerde matematik öğretimi (12. Basım)*. Pegem Akademi. ANKARA.
- Ashlock, R. (2006). *Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction*. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Merrill Prentice Hall.
- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 9(3), 249–272. <http://dx.doi.org/10.1080/10986060701360910>.

- Aydoğdu-İskenderoğlu T. ve Guneş G. (2016). Pedagojik formasyon eğitimi alan matematik bölümü ğrencilerinin problem kurma becerilerinin incelenmesi. *Sakarya University Journal of Education*, 6, 26-45.
- Baroody, A. J., & Dowker, A. (Eds.) (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Recent research and theory*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 115–131.
- Baroudi, Z. (2006). Easing students' transition to algebra. *Australian Mathematics Teacher*, 62(2), 28–33.
- Baştürk, S., (2005). *niversite Matematik Bölümü ğrencilerinin Türkiye'deki Matematik Eğitimi Hakkındaki Çağrışımları: Lise, Dershane Ve niversite Boyutunda*, I. Fen ve Matematik ğretmenleri Sempozyumu, İstek Vakfı Okulları, İstanbul.
- Baştürk, S. (2016). Primary student teachers' perspectives of the teaching of fractions. *Acta Didactica Napocensia*, Vol. 9, Iss. 1: 35-44.
- Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R., and Silver, E.A. (1983). *Rational number concepts*. In R. Lesh, and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (92–127). New York: Academic Press.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). *Rational number, ratio, and proportion*. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 296–333). New York: Macmillan.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis -emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49–84). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Berk, D., Taber, S., Gorowara, C., & Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 113–135.

- Birgin, O. ve Gürbüz, R.(2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Eğitim Fakültesi Dergisi*, XXII (2), 2009, 529-550
- Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, IQ 221-247.
- Booth, L. R. (1986). Difficulties in algebra. *Australian mathematics teacher*, 42(3), 2–4.
- Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Eds.). *The ideas of algebra*, K-12 (pp. 20–32). Reston, VA: NCTM.
- Booth, L. (1989). A question of structure or a reaction to “The early learning of algebra: A structural perspective.” In S. Wagner & C. Kleran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* pp. 57-59). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Booth, L. R., & Watson, J. (1990). Research for teaching: Learning and teaching algebra. *Australian Mathematics Teacher*, 46(3), 12–14.
- Brown, C. A., Carpenter, T. P., , Kouba, V. L. , Lindquist, M. M., Silver, E. A. and Swafford, J. O. (1988). Secondary school results for the fourth naep mathematics assessment: algebra, geometry, mathematical methods, and attitudes. *The Mathematics Teacher*. Vol. 81, No. 5 (may 1988), pp. 337-347, 397.
- Brown,G., Quinn,R.J.(2006). Algebrastudents’ difficulty with fractions. *Australian Mathematics Teacher*, 62 (4),28–40.
- Brownell, W. (1935). *Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic*. In *the teaching of arithmetic* (Tenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics) (pp. 1–31). New York: Bureau of Publications, Teachers College.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge Mass: Harvard University Press.
- Bulgar, S. (2003). Children’s sense-making of division of fractions. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 319-334.
- Bush, S. B. and Karen S. Karp, (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior* Volume 32, Issue 3, September 2013, Pages 613-632.

- Byrnes, J., & Wasik, B. (2009). Factors predictive of mathematics achievement in kindergarten, first and second grades: An opportunity-propensity analysis. *Contemporary Educational Psychology*, 34, 167-183.
- Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., & Bikai, N. (2011). *Examining students' algebraic thinking in a curricular context: A longitudinal study*. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 161–185). Berlin: Springer-Verlag.
- Cankoy, O. ve Darbaz, S. (2010). Problem kurma temelli problem çözme öğretiminin problemi anlama başarısına etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H. U. Journal of Education)* 38: 11-24 [2010].
- Capraro, M. M., & Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Reading Psychology*, 27, 147–164. <http://dx.doi.org/10.1080/02702710600642467>.
- Carr, M., Alexander, J. & Folds-Bennett, T. (1994). Metacognition and mathematics strategy use. *Cognitive Psychology*. Volume8, Issue6, November 1994 Pages 583-595.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). New York, NY: Routledge.
- CCSSO. (2010a). *Common Core State Standards for Mathematics*. Council of Chief State School Officers and the National Governors Association Center for Best Practices. <http://www.corestandards.org>.
- Chae, J. (2005). *Middle School Students' Sense-making of Algebraic Symbols and Construction of Mathematical Concepts Using Symbols*. PhD Thesis. Indiana University, Graduate Faculty of The University of Georgia in Partial.
- Chang, K., L. (2010). *Word Problem Structure and Its Effect on The Transfer of Learning to Solve Algebra Word Problems By Kuo-Liang*. A Dissertation Submitted to Michigan State University In partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy Curriculum, Instruction and Teacher Education.
- Cortes, A. ve Pfaff, N. (2000). *Solving Equations and Inequalities: Operational Invariants and Methods Constructed by Students*. Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hiroshima, Japan, 2, 193– 200.

- Crooks, N. M. & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge of mathematics. *Developmental Review*. doi: 10.1016/j.dr.2014.10.001
- Crouse, R. and Sloyer, C. (1987b). *Mathematical questions from the classroom*, Part II. Providence, RI: Janson Publications, Inc.
- Darley, J. W. (2005). *Ninth Grader's Interpretations and Use of Contextualized Models of Fractions and Algebraic Properties: A Classroom-based Approach* (Unpublished doctoral dissertation). University of South Carolina, Columbia, SC.
- Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 180-185.
- Dooren, W., Verschaffel, L. and Ongehena, P. (2003), Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education* 6: 27-52.
- Durmuş, S. (2005). Rasyonel sayılarda bölme işlemini ilköğretim öğrencilerin algılayışları. *Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9, 97-109.
- EARGED. (1996). *İlköğretim (5+3) Matematik Programı Değerlendirme Raporu*: Ankara.
- Empson, S. B. (1995). *Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Fraction Concepts in a First Grade Classroom*. Paper presented at the American Educational Research Association, San Francisco, CA.
- Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232–236.
- Garofalo, J. and Lester, F.K., Jr.: 1985, 'Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance', *Journal for Research in Mathematics Education* 16.
- Goldin, G. A. (1998). Observing mathematical problem solving through task based interviews. In A. Teppo (Eds.), *Qualitative research methods in mathematics education* (pp. 40- 62). NCTM.163–176.

- Graham, A. T., & Thomas M. O. J. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 265- 282.
- Greeno, J. G. (1978). Understanding and procedural knowledge in mathematics instruction. *Journal Educational Psychologist Volume 12*, 1978.
- Gürbüz, R. & Akkan, Y. (2008). Farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş düzeylerinin karşılaştırılması: Denklem örneği. *Eğitim ve Bilim*, 33 (148), 64-76.
- Haapasalo, L. & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *JMD—Journal for Mathematic-Didaktik*, 21, 139–157.
- Haser, Ç. ve Ubuz, B. (2000). *İlköğretim 5. Sınıf Öğrencilerin Kesirler Konusunda Kavramsal Anlama ve İşlem Yapma Becerileri*. IV. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi (ss.609-612). Ankara: MEB Yay.
- Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New Directions for Child and Adolescent Development*, 1988(41), 55–70.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 metaanalysis relating to achievement*. New York, NY: Routledge.
- Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*, 73, 572–580.
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59–78. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01284528>.
- Hiebert, J.,& Carpenter, T. P. (1992). *Learning and teaching with understanding*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Mcmillan.

- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hilbert, T. S., Schworm, S., & Renkl, A. (2004). Learning from worked-out examples: The transition from instructional explanations to self-explanation prompts. In P. Gerjets, J. Elen, R. Joiner, & P. Kirschner (Eds.), *Instructional design for effective and enjoyable computer-supported learning* (pp. 184–192). Tübingen: Knowledge Media Research Center.
- Hunting, R. (1983). Emerging methodologies for understanding internal processes governing children's mathematical behavior. *The Australian Journal of Education*, 27 (1), 45-61.
- Işık, C. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde çarpma ve bölmeye yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 41, 231-243.
- Işık, C., Işık, A. ve Kar, T. (2011). Matematik öğretmeni adaylarının sözel ve görsel temsillere yönelik kurdukları problemlerin analizi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 39-49.
- Işık, C. ve Kar, T. (2012). Matematik dersinde problem kurmaya yönelik öğretmen görüşleri üzerine nitel bir çalışma. *Millî Eğitim*. Sayı 194/ Bahar/ 2012 (s. 199-215).
- Kalchman, M., & Koedinger, K. R. (2005). Teaching and learning functions. In How students learn: Mathematics in the classroom. *National Academies Press*.
- Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*. 167-194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Karal, H., Çebi, A., Pekşen, M. ve Turgut, Y., E. (2010). Sözel problemlerin anlamlandırılması ve çözümünde web tabanlı eğitsel simülasyonların etkisi. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi* (<http://sbe.gantep.edu.tr>) 2010 9(1): 147-162 ISSN: 1303-0094.
- Kieran, C. and Sfard (1999). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Neshet & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 96-112). Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.
- Kerslake, V.B. (1995) Community Awareness of Safe Food Handling Practices and Food Poisoning: Knowledge and Experience. *University of Victoria, Wellington, New Zealand* (1995).
- Kılıç, Ç. (2011). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının standart olmayan sözel problemlere verdikleri yanıtlar ve yorumlar. *Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, Cilt 12, Sayı 3, Sayfa 55-74.
- Kılıç, Ç. (2012). Determination issues that primary teachers encountered during problem posing activities and their solution suggestions: eliminating pedagogic obstacles. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi* ISSN: 1308–9196 Yıl: 5 Sayı: 10 Aralık 2012).
- Kılıç, Ç. (2013). Pre-service primary teachers' free problem-posing performances in the context of fractions: An example from Turkey. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 22, 1-10.
- Kielhofner, G. (1992). *Conceptual Foundation of Occupational Therapy*. In Uys, *Validation of A Play Package to Facilitate The Development of Communication-related Skills*, Unpublished Philosophiae Doctor Thesis. University of Pretoria, Pretoria.
- Kieren, T. E. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In: Lesh, R. (ed) *Number and measurement: papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, p. 101-144.

- Kieran, C. (1980). *Constructing Meaning for Non-trivial Equations*. In Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association Boston, MA,. April.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 318–326. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00311062>.
- Kieran, C. (1988). *The Equation-solving Errors of Novice and Intermediate Algebra Students*. In Paper presented at the ninth international conference for the psychology of mathematics education: vol. 1. Individual contributions. The Netherlands: State University of Utrecht, Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Centre. July.
- Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (162–181). Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: NCTM.
- Kieran, C. (2008). *What do students struggle with when first introduced to algebra symbols?* [http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research News and Advocacy/Research/Clips and Briefs/ Brief%20%20What%20Can%20We%20Learn.pdf](http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research%20News%20and%20Advocacy/Research/Clips%20and%20Briefs/Brief%20%20What%20Can%20We%20Learn.pdf).
- Kieran, C., & Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The case of equivalent expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 21(1), 1–17.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. O., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academies Press.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M.W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.

- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 259–276). Berlin/Heidelberg/New York, NY: Springer-Verlag.
- Kriegler, S. (2007). *Just what is algebraic thinking. introduction to algebra*. Centre for Mathematics and Teaching Press. Los Angeles, CA.
- Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers* (2nd ed.). Boston: Allyn and Bacon.
- Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, (9), 23–26.
- Lacampagne, C. B. (1995). Summary. In C. B. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), *The algebraic thinking curriculum: Volume I* (pp. 1-7). Washington, DC: US. Department of Education.
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3rd ed.). New York: Routledge.
- Lavy, I., & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via “what if not?” strategy in solid geometry a case study. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 369–387.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87–106). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Lee, F. (2002). *Diagnosing Students' Algebra Errors on the Web*. Paper presented at Proceedings of the International Conference.

- Leon, R., E. (1992). *The Effects of the Presence of Extraneous Information in Mathematical Word Problems on the Performance of Hispanic Learning Disabled Students*. A dissertation submitted to the Faculty of the Graduate School of the State University of New York at Buffalo in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, March, 1992.
- Lewis, C. C. (1981). The effects of parental firm control: A reinterpretation of findings. *Psychological Bulletin*, 90, 547/563.
- Liu, C.,Xin, Z., and Li, X. (2011). The development of chinesestudents' understanding of theconcept of fractions from fifth to eighth grade. *Journal of Mathematics Education*, 4(2), 17-34.
- Lynch K. and Star, J., R. (2014). Views of struggling students on instruction incorporating multiple strategies in algebra: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 45, No. 1 (January 2014), pp.6-18.
- Ma, L.(1999). *Knowing and teaching elementary mathematics* . NewYork: Routledge.
- MacGregor, M. ve Stacey, K. (1996). *Learning to Formulate Equations for Problems*. PME 20, July 8–12, Valencia, Spain, vol 3, 289–303.
- MacGregor, M.,& Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19.
- Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 123-138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- McLeod, R. & Newmarch, B. (2006). *Fractions. National Research and Development Center for Adult Literacy and Numeracy*.  
[https://www.ncetm.org.uk/public/files/257666/fractions\\_booklet.pdf](https://www.ncetm.org.uk/public/files/257666/fractions_booklet.pdf).
- Miles, B. M., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis* (2nd ed.). London: Sage Publications.

- MEB. (2013). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı*. Retrieved March, 15, 2013 from <http://ttkb.meb.gov.tr/www/guncellenen-ogretim-programlari-ve-kurulkararlari/icerik/150>.
- Morin, L., L, Watson, S.,M.,R., Hester, P. and Raver, S. (2017). The Use of a Bar Model drawing to teach word problem solving to students with mathematics. *Difficulties Learning Disability Quarterly*. Vol. 40(2) 91– 104.
- Mwangi, W., & Sweller, J. (1998). Learning to solve compare word problems: The effect of example format and generating self-explanations. *Cognition and Instruction*, 16, 173–199. <https://doi.org/10.1207/s1532690xc1602>.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author. Fractions: Children's strategies and errors: A report of the strategies and error in secondary mathematics Project NFER-Nelson, Windson (1986).
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2011). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Novotna, J., & Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 93–104. <http://dx.doi.org/10.1007/BF03217479>.
- O'Bannon, F.G., Reed, S.and Jones, S. (2002). *Indiana's Academic Standards*. Grade 7 English/ Language Arts, Mathematics, Science, Social Studies. Indiana State Dept. of Public Instruction, Indiana State Department of Education, Indianapolis, Indiana State Commission for Higher Education, Indianapolis.
- Olkun, S., Uçar, Z. T. (2007) *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi (üçüncü baskı)*, Ankara: Maya Akademi.
- Öksüz, C. (2004). *Children Understanding of Algebraic Fraction as Quotients*. (Unpublished doctoral dissertation). University of Arizona, Arizona.

- Paas, F., Renkl, A. & Sweller, J. (2003). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments, *Educational Psychologist* 38: 1–4.
- Panasuk, R. (2010). Three-phase ranking framework for assessing conceptual understanding in algebra using multiple representations, *EDUCATION*, 131 (4), (in press).
- Panasuk, R. M., & Beyranevand, M. L. (2010). Algebra students' ability to recognize multiple representations and achievement. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1–21.
- Payne, S. J., & Squibb, H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of error. *Cognitive Science*, 14(3), 445-481.
- Patton, M.Q. (1997). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury park, CA: SAGE Publications.
- Peck, D. M. ve Jenck, S. M. (1981). Conceptual issues in the teaching and learning of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 12, No. 5 (Nov., 1981), pp. 339- 348. Published by: National Council of Teachers of Mathematics  
Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/748834> .Accessed: 26/11/2014 05:55.
- Petit, M., Laird, R., & Marsden, E. (2010). *A focus on fractions: Bringing research into the classroom*. New York: Routledge.
- Philipp, R. A. (1992a). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher*, 85(7), 557–561.
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, teaching, and learning problem solving*. New York: John Wiley.
- Pope, L. (1994). *Teaching algebra*. Mathematics Education: A Handbook for Teachers. elsington College of Education: New Zealand, 1, 88-99.

- Renkl, A. (2014). *Learning From Worked Examples: How to Prepare Students for Meaningful Problem Solving Applying Science of Learning in Education: Infusing Psychological Science into the Curriculum*. Washington, DC: American Psychological Association.
- Resnick, L. B. & Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), *Advances in Instructional Psychology* (Vol. 3, pp. 41–95). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Retnowati, E., Ayres, P., & Sweller, J. (2010). Worked example effects in individual and group work settings. *Educational Psychology*, 30, 349–367. <https://doi.org/10.1080/01443411003659960>.
- Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 1-16.
- Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (75-110). East Sussex, UK: Psychology Press.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561–574.
- Rittle-Johnson, Bethany, and J. R. Star. (2009). Compared to what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101, no.3: 529-544. doi: 10.1037/a0014224.

- Rittle-Johnson, B. Star, J.,R. and Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology* (2012), 82, 436–455.
- Rittle-Johnson, B., Schneider, M and Star, J.,R. (2015). Not a one-way street: bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educ Psychol Rev.* (2015) 27:587–597. DOI 10.1007/s10648-015-9302-x.
- Sasman, M. Linchevski, L., ve Olivier, A. (1997). *Reconceptualising school algebra, Algebra Rationale*. <<http://www.sun.ac.za/MATHED/HED/Rational.pdf>> .
- Saxe, G., Gearhart, M., and Nasir, N. S. (2001). Enhancing students' understanding of mathematics: A study of three contrasting approaches to Professional support *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 55–79.
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). Relations between conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, 47 (6), 1525–1538. doi: doi:10.1037/a0024997.
- Schoenfeld, A. ve Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*. 81 (6), 420-427.
- Scofield, T. (2003, September 5). *Top algebra errors made by calculus students* [PDF document]. Calvin College-Minds In The Making. Retrieved from <http://www.calvin.edu/~scofield/courses/materials/tae/>.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspective. *Journal of mathematical behavior*, 14, 15-39.
- Sheffield, L. J., & Cruikshank, D. E. (2005). *Teaching and learning mathematics pre-kindergarten through middle school*. Hoboken, N.J.: Wiley Jossey Bass Education.

- Shin, M. and Bryant, D., P. (2017). Improving the fraction word problem solving of students with mathematics learning disabilities: Interactive computer application. *Remedial and Special Education* 2017, Vol. 38(2) 76– 86 DOI: 10.1177/0741932516669052.
- Sidney, P. G. and Alibali, M. W. (2015). Making connections in math: activating a prior knowledge analogue matters for learning. *Journal of Cognition and Development*, 16(1):160–185. DOI: 10.1080/15248372.2013.792091.
- Silber, S., & Cai, J. (2017). Pre-service teachers' free and structured mathematical problem posing, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(2), 163-184.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*. 14(1), 19–28.
- Silver, E. A., Ghouseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., & Strawhun, B. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 287–301.
- Skemp, R., R. (1976). *Relational understanding and instrumental understanding*. Department of Education, University of Warwick (<http://static1.squarespace.com/static/53b6662ae4b00ce9a7c30e76/t/5548a95ae4b03cee0387aef9/1430825306203/Mona+Rosseland+12.11.14+Vedlegg.pdf>)
- Skemp, R. R. (1978). Relational and Instrumental Understanding. *Arithmetic Teacher*, 26, 9-15.
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stacey, K., and MacGregor, M. (1997b). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *Mathematics Teacher*, 90, 110-113.
- Stacey, K., & MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 149–167. [http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)00026-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00026-7).
- Star, J. R. (2001). *Re-conceptualizing Procedural Knowledge: Innovation and Flexibility in Equation Solving*. Unpublished doctoral dissertation, University of Michigan, Ann Arbor.

- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 404–411.
- Star, J. R. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 132–135.
- Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102, 408–426. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.11.004>.
- Star, J. R., and Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, 31, 280–300.
- Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustration and implications. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177-194). Boston, MA: Kluwer Academic Press.
- 173 Steffe, L.P. (1991). Operations that generate quantity. *Learning and Individual Differences*, 3 (1991), pp. 61–82.
- Steffe, L. P., and Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Stephens, M. (2003). Regulating the entry of teachers of mathematics into the profession: challenges, new models, and glimpses into the future. *Second International Handbook of Mathematics Education* pp. 767-793.
- Stephens, A. C. (2005). Developing students' understandings of variable. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(2), 96–100.
- Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp.518–525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Stoyanova, E. (2003). Extending students' understanding of mathematics via problem posing. *The Australian Mathematics Teacher*, 59(2), 32–40.
- Soylu, Y. (2007). Öğrencilerin sözel problemleri çözerken sergiledikleri yaklaşımlar ve coğrafi bölgelere göre başarı oranlarının incelenmesi, *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 13-24.

- Soylu, Y. ve Aydın, S. (2006). Matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesinin önemi üzerine bir çalışma. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi* Cilt-Sayı: 8-2.
- Streefland, L., (1991). *Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research*. Kluwer Academic Publishers Group, 101 Philip Drive, Norwell, MA 02061.
- Swan, M. (2000). Making sense of algebra. *Mathematics Teaching*, (171), 16–19.
- Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10, 251–296. <https://doi.org/10.1023/A:1022193728205>.
- Şengül, S. & Katrancı, Y. (2012). Problem solving and problem posing skills of prospective mathematics teachers about the ‘sets’ subject. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 69, 1650–1655.
- Şengül, S ve Öz, C. (2008). İlköğretim 6. sınıf kesirler ünitesinde çoklu zekâ kuramına uygun öğretimin öğrenci tutumuna etkisi. *İlköğretim Online*, 7(3), 800-813, 2008. [Online]: <http://ilkogretim-online.org.tr>.
- Şiap, İ. ve Duru, A. (2004). Kesirlerde geometrik modelleri kullanabilme becerisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), 89-96.
- Thurston, W.P. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society*, 37, 844-850.
- Ticha, M., & Hošpesová, A. (2009, Ocak). *Problem Posing and Development of Pedagogical Content Knowledge in Pre-service Teacher Training*. Paper presented at Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 6), Lyon, France.
- Toluk, Z.(2001). Eşit paylaşım ortamlarının kesir öğretiminde kullanımı. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*. 1 (1).
- Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 166–175.
- Tsamir P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students’ solutions to algebraic ‘single-value’ inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(6), 793–812.

- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra*, K-12 (pp. 8–19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Usiskin, Z. (1997). 'Doing algebra in grades K-4'. *Teaching Children Mathematics* Volume 3, Issue 6 (pp. 346-356), February 1997.
- Ünlü, M. & Ertekin, E. (2012). Why do pre-service teachers pose multiplication problems instead of division problems in fractions? *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 46, 490 – 494.
- Ünlü, M. ve Sarpkaya Aktaş, G. (2017). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ifade ve denklemlere yönelik kurdukları problemlerin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education* Vol.8 No.1 (2017), 161-187.
- Vacc, N. N. (1993). Implementing the ' Professional standards for teaching mathematics': questioning in the mathematics classroom. *Arithmetic Teacher* ,41(2), 88-92.
- Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 63–75.
- Van De Walle, J., A., Karp, K., S. ve Bay-Williams, J., M. (2013). İlkokul ve Ortaokul Matematiği, Gelişimsel Bir Yaklaşımla (Durmuş, S. çev. Edt.). Nobel Akademik Yayıncılık, ANKARA.
- Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 319–351. <http://dx.doi.org/10.2307/4149957>.
- Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: an analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 201-221.
- Van Loon-Hillen, N., van Gog, T., & Brand-Gruwel, S. (2012). Effects of worked examples in a primary school mathematics curriculum. *Interactive Learning Environments*, 20, 89–99.

- Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 15(2), 122–137. <http://dx.doi.org/10.1007/BF03217374>.
- Williams, D.E. (1984). By Way of Introduction. *Arithmetic Teacher*. v 31, n 6, p 1.
- Wong,T., T-Y. Ho, C., S-H. (2017). Component Processes in Arithmetic Word-Problem Solving and Their Correlates. *Journal of Educational Psychology* © 2016 American Psychological Association, Vol. 109, No. 4, 520–531.
- Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator*, 25(2), 10–17.
- Yakes, C. and Star, J., R. (2011). Using comparison to develop flexibility for teaching algebra. *J Math Teacher Educ* (2011) 14:175–191 DOI 10.1007/s10857-009-9131-2.
- Yanık, H.,B. (2015). *Rasyonel sayılar*. Zembat, İ., Ö., Özmantar, M., F., Bingölbali, E., Şandır, H. ve Delice, A. (Edt.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (sf. 95-110). Ankara: Pegem Akademi.
- Yanık, H. B. (2016). Kavramsal ve işlemsel anlama. In E. Bingölbali, S. Arslan, & Zembat, İ. Ö. (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* (sf. 101-116). Ankara, Turkey: Pegem Akademi.
- Yantz, J. (2013). *Developing Meaning for Algebraic Procedures: An Exploration of the Connections Undergraduate Students Make Between Algebraic Rational Expressions and Basic Number Properties*. (Unpublished doctoral dissertation). Middle Tennessee State University, Murfreesboro, TN.
- Yıldırım, A. ve Şimek, H. (2005) *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (2. baskı). Ankara: Seçkin yayıncılık.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin yayıncılık.

## EKLER

### EK 1. Sinop Milli Eğitim Müdürlüğü'nden alınan izin belgesi



T.C.  
SİNOP VALİLİĞİ  
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 25072426-604...->-E.2536198  
Konu : Araştırma İzni

03.03.2016

#### VALİLİK MAKAMINA

İlgi : Anadolu Üniversitesinin 19/02/2016 tarih ve E.31321 sayılı yazısı

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Doktora Programı öğrencisi Mehtap TAŞTEPE "Kavramsal ve İşlemsel Bilginin Gelişiminin Cebirsel Kesirleri İçeren Denklemler Bağlamında İncelenmesi" başlıklı Doktora Tez Çalışmasını Sinop il merkezinde bulunan genel ortaöğretim okulu öğrencilerine uygulanmasına ilişkin ilgi dilekçe ve ekleri, Müdürlüğümüzde oluşturulan Komisyon tarafından incelenmiştir.

Söz konusu araştırmanın eğitim ve öğretimi aksatmayacak şekilde gönüllülük esasına dayalı olarak uygulanması, uygulamalarda sadece yazımız ekinde gönderilen anketin kullanılması ve araştırma sonucunda elde edilen raporun, basılı ve dijital ortamda Müdürlüğümüze teslim edilmesi şartı ile araştırmanın yürütülmesinde bir sakınca bulunmamaktadır.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde "Kavramsal ve İşlemsel Bilginin Gelişiminin Cebirsel Kesirleri İçeren Denklemler Bağlamında İncelenmesi" çalışmasını Sinop il merkezinde bulunan genel ortaöğretim okulu öğrencilerine uygulanmasını Olur'larınıza arz ederim.

Nevzat TÜRKKAN  
Milli Eğitim Müdürü

OLUR

<...>  
Hüseyin SAYIN  
Vali a.  
Vali Yardımcısı

Cumhuriyet Cad. Hükümet Konağı Kat:2 57000 /SİNOP  
Telefon No: 0(368)2611987 Faks: 0(368)2611507  
e-posta: arge57@meh.gov.tr İnternet Adresi : <http://sinop.meb.gov.tr>

Bilgi için: M. ARSLAN  
MEM Müd. Yrd  
Tel: 0(368)2611987/133

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <http://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 7e3f-c331-3ae5-b869-bc2d koda ile teyit edilebilir.

## EK 2. Öğretmen Bilgilendirme ve İzin Formu

### Öğretmen Onay Formu

Sayın Öğretmen,

Öncelikle yapacağımız bu araştırmaya gösterdiğiniz ilgi ve bizlere ayıracağınız zaman için teşekkür ederiz. Bu form, araştırmanın amacını ve haklarınızı tanımlamayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmanın amacı 9. sınıf öğrencilerinin denklemlerde problem çözme bilgilerinin gelişimini incelemek ve bu amaca yönelik yürütülen bir öğretim sürecinde 9.sınıf öğrencilerinin denklemler konusuna ilişkin bilişsel düşünme yapılarındaki gelişimlerini izlemektir.

Öğretim sürecine dâhil edilecek öğrencilerin belirlenmesi için sınıfınızda ortalama iki ders saati sürecek bir uygulama yapılacaktır. Bu uygulamada sizin kontrolünüz altında öğrencilerden kendilerine sunulan soruları cevaplamaları beklenmektedir. Gerekli yönergeler uygulama kâğıdında belirtilmektedir. Araştırmanın güvenilirliği açısından öğrencilerin birbirlerinden etkilenmemelerini sağlamanız bizim için önemlidir. İstedığınız takdirde ve istediğiniz herhangi bir zamanda da araştırmadan ayrılma hakkına sahipsiniz.

Bu sözleşmeyi okuyup, araştırmaya gönüllü olarak katıldığınıza ve araştırma kapsamında size verdiğimiz güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanızı rica ediyoruz.

Bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığınızı için teşekkür ederiz.

Araştırmacının Adı: Mehtap TAŞTEPE

Öğretmenin Adı:

.....

Araştırmacının imzası: .....

Öğretmenin İmzası:

.....

Tel: .....

e-posta: .....

Tarih: .....

### **EK 3. Veli Bilgilendirme ve İzin Formu**

#### **Veli Onay Formu**

Araştırmacı-öğretmen tarafından amacı ve uygulama programı anlatılan bu çalışmada çocuğumun yer almasına razıyım ve izin veriyorum. Bu çalışmadan elde edilecek veriler Doktora tezinin bir parçası olarak kullanılacaktır. Bu çalışma kapsamında sağlanacak olan tüm bilgilerin gizlilik içinde tutulacağını ve sadece araştırma amaçları çerçevesinde kullanılacağını anladım.

Araştırmacı-öğretmen tarafından çalışmanın şekli, amacı ve muhtemel süresine ilişkin kapsamlı bir şekilde bilgilendirildim. Çalışma hakkında sorular sorulmasına ilişkin imkân sağlanmıştır. Araştırmada çocuğumun adı ve diğer bilgilerinin benim iznim olmadan kullanılmayacağı bildirilmiştir.

#### **Görüntü (video) kullanımı:**

Araştırma hakkında sunular verdiğimizde araştırmanın uygulama aşamalarını göstermek zaman zaman yararlı olabilir. Bu sunular, uygulamalar sırasında aldığımız video görüntülerinin gösteri kliplerini içerebilmektedir. Lütfen verilerinizi bu şekilde kullanmamızı isteyip istemediğinizi aşağıda belirtiniz.

Uygulamalar sırasında alınan video görüntülerinin araştırma sunumları veya eğitici amaçlarla kullanılmasına yönelik izin veriyorum.

Uygulamalar sırasında alınan video görüntülerinin araştırma sunumları veya eğitici amaçlarla kullanılmasına yönelik izin vermiyorum.

Yukarıda yazılı olan bilgileri okudum ve bu çalışmaya çocuğumun katılmasına onay veriyorum. Aile Onay Formunun bir kopyasını imzalayarak aldım.

Araştırmacının Adı: Mehtap TAŞTEPE

Velinin Adı:

.....

Araştırmacının imzası: .....

Velinin İmzası:

.....

Tel: .....

Öğrencinin Adı: .....

e-posta: .....

Tarih: .....

#### EK 4. Öğrenci Bilgilendirme ve İzin Formu

### Öğrenci Onay Formu

Sayın Katılımcı,

Öncelikle yapacağımız bu araştırmaya gösterdiğiniz ilgi ve bizlere ayıracağınız zaman için teşekkür ederiz. Bu form, araştırmanın amacını ve bir katılımcı olarak haklarınızı tanımlamayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmanın amacı 9. sınıf öğrencilerinin denklemlerde problem çözme bilgilerinin gelişimini incelemek ve bu amaca yönelik yürütülen bir öğretim sürecinde 9.sınıf öğrencilerinin denklemler konusuna ilişkin bilişsel düşünme yapılarındaki gelişimlerini izlemektir.

Araştırma kapsamında gerçekleştirilecek öğretim deneyinde araştırmaya gönüllü olarak katılımınızın bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyoruz. Öğretim deneyi sürecinin geçerlik ve güvenilirliğini sağlamak ve bu süreçte ortaya çıkabilecek olası veri kayıplarını önleyebilmek amacıyla tartışmaların video kamera ile kaydedilmesi gerekmektedir. Bu kayıtlar yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma kapsamında kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Sizin isteğiniz doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da size iade edilebilecektir. Bu kayıtlarda yüzünüz görüntülenmemekle beraber uygulama kağıtlarına dair elde edilen görüntüleriniz istemediğiniz takdirde yayımlanmayacaktır. İsteddiğiniz takdirde ve istediğiniz herhangi bir zamanda da araştırmadan ayrılma hakkına sahipsiniz, bu durumda çekilen görüntüler de size teslim edilecektir.

Bu sözleşmeyi okuyup, araştırmaya gönüllü olarak katıldığınıza ve araştırma kapsamında size verdiğimiz güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanızı rica ediyoruz.

Bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığınız için teşekkür ederiz.

Araştırmacının Adı: Mehtap TAŞTEPE

Öğrencinin Adı:

.....

Araştırmacının imzası: .....

Öğrencinin İmzası:

.....

Tel: .....

e-posta: .....

Tarih: .....

## EK 5. Klinik Görüşme Soru Örnekleri

### Sorular

A. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

1.  $\frac{17}{10} + \frac{8}{5} + \frac{9}{20} = ?$

2.  $\frac{17}{36} - \frac{5}{12} = ?$

3.  $\frac{3}{5} \cdot \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = ?$

B. Aşağıda 10 adet soru bulunmaktadır. Bu soruları aklınıza gelen farklı yöntemleri kullanarak çözünüz. Eğer 1'den fazla çözüm yaptıysanız, her bir soru için hangi çözüm yöntemini daha etkili bulduğunuzu ve nedenini kısaca belirtiniz.

1.  $\frac{4}{x+4} + \frac{8}{x+4} = 3$

2.  $\frac{x+5}{3} - \frac{x+5}{9} = 16$

3.  $\frac{1}{2x+6} + \frac{x-2}{3x+9} = \frac{2x-1}{x+3}$

C. Aşağıda verilen denklemlere uygun sözel problemler oluşturunuz.

1.  $\frac{x+2}{3} + \frac{x+5}{2} = 9$

$$2. \frac{3}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$3. \frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x-2} = 10$$

D. Aşağıda verilen sözel problemlere uygun denklemleri yazınız?

1. Okulun beden eğitimi öğretmeni şenlikler için aynı sayıda kız ve erkek öğrenci seçmiştir. Daha sonra kızlara 2 kişi daha ekleyip 3'eri gruplara, erkeklere 5 kişi daha ekleyip 2'şerli gruplara ayırdığında toplam 9 grup olduğuna göre en başta kaç kız öğrenci vardır?
2. Bir tarlanın  $\frac{1}{3}$ 'üne soğan,  $\frac{1}{5}$ 'ine patates ekilmiştir. Tarlada  $7 m^2$  lik daha ekim yapıldığında tarlanın tamamı ekilmiş oluyor. Verilenlere göre tarlanın kaç metrekare olduğunu denklem kurarak bulunuz.
3. Market çalıştıran Gözde Hanım elindeki bir miktar balı kendisinden 4 litre daha küçük olan şişelere dolduruyor. Daha sonra pazardan aldığı elindeki balın 3 katı kadar balı aynı büyüklükteki şişelere doldurduğunda 12 şişe bal elde ettiğine göre Gözde hanımın elinde başlangıçta kaç litre balı vardır?