OKTONLARIN FİZİKSEL UYGULAMALARI

Yüksek Lisans Tezi

Seray KEKEÇ

ESKİŞEHİR, 2017

OKTONLARIN FİZİKSEL UYGULAMALARI

Seray KEKEÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Süleyman DEMİR

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Mayıs, 2017

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Seray Kekeç'in "Oktonların Fiziksel Uygulamaları" başlıklı tezi 24/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin maddeleri uyarınca, Fizik Anabilim dalında Yüksek Lisans Yeterlilik tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Süleyman DEMİR	
Üye	: Prof. Dr. Murat TANIŞLI	
Üye	: Doç. Dr. Mustafa Emre KANSU	

Enstitü Müdürü

ÖZET

OKTONLARIN FİZİKSEL UYGULAMALARI

Seray KEKEÇ

Fizik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Mayıs, 2017

Danışman: Prof. Dr. Süleyman DEMİR

Bu çalışmada sekiz boyutlu oktonların fiziksel uygulamalarından bahsedilmiştir. Oktonik cebir; skaler, psedoskaler, vektör ve psedovektör bileşenleri üzerinde hep birlikte matematiksel işlemler yapılmasını sağlar. Bu yapı kullanılarak elektromanyetik alanda enerji, momentum ve Lorenz değişmezleri arasındaki ilişki gösterilebilir. Sekiz bileşenli oktonik dalga fonksiyonu ve oktonik konum operatörleri kullanılarak rölativistik kuantum mekaniği de genelleştirilebilir. Öte yandan lineer gravitasyonun Maxwell-Proca tipi denklemlerini de oktonlar kullanarak kısa ve şık bir biçimde ifade etmek mümkündür. Bu çalışmada elektromanyetizmanın Maxwell-Dirac-Proca tipi genelleştirilmiş denklemlerine benzer şekilde, gravitoelektromanyetizmanın (GEM)'in alan denklemleri okton cebiri kullanılarak türetilmiştir. Ayrıca Proca ve Dirac tipi terimler kullanılarak genelleştirilmiş dalga denklemi ve Klein-Gordon denklemleri de elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Okton; Maxwell-Dirac-Proca eşitlikleri; Poynting teoremi; Clifford cebiri; Gravitoelektromanyetizma (GEM)

ABSTRACT

THE PHYSICAL APPLICATIONS OF OCTONS

Seray KEKEÇ

Departmant of Physics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, May, 2017

Supervisor: Prof. Dr. Süleyman Demir

In this study, the physical applications of eight-component octons are mentioned. Octonic algebra; scalar, pseudoscalar, vector, and pseudovector values to perform mathematical operations all together. By using this structure, the relationship between electromagnetic field energy, momentum and Lorenz invariants can be shown. Relativistic quantum mechanics can also be generalized using eight-components octonic wave function and octonic spatial operators. On the other hand, it is possible to express Maxwell-Proca type equations of linear gravitation in a short and elegant form by using octons. In this study, similar to the Maxwell-Dirac-Proca type generalized equations of electromagnetism, field equations of gravitoelectromagnetism (GEM) are derived using the octon algebra. By using the terms in Proca and Dirac equations, generalized wave equation and Klein-Gordon equations have been obtained.

Keywords: Octon; Maxwell-Dirac-Proca equations; Poynting theorem; Clifford algebra; Gravitoelectromagnetism (GEM)

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başladığım andan itibaren tezimin hazırlanması aşamasında bilgisini, alakasını, zor durumlarımda anlayışını ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Süleyman DEMİR'e ve yüksek lisans ders aşamasında bilgileriyle ve içtenlikleriyle üzerimde emeği bulunan tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım esnasında manevi desteğini esirgemeyen ve bana inanan sevgili aileme de teşekkürü borç bilirim.

Seray KEKEÇ

24/05/2017

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğim ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Seray KEKEÇ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İKİNCİ BÖLÜM

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e_0 : Okton baz elemanı (skaler birim)

$e_{1,2,3}$: Okton baz elemanı (psedovektörler)

a_0 : Okton baz elemanı (psedoskaler birim)

$a_{1,2,3}$: Okton baz elemanı (polar birim vektörler)

$\rightarrow$: Vektör simgesi

$\leftrightarrow$: Psedovektör simgesi

$\sim$: Psedoskaler simgesi

GE : Gravitoelektrik

GM : Gravitomanyetik

GEM : Gravitoelektromanyetik

$\breve{\Psi}$: Oktonik potansiyel

φ : Elektrik skaler potansiyel

$\tilde{\varphi}$: Manyetik skaler potansiyel (psedovektör)

φ_e : GE skaler potansiyeli

φ_m : GM skaler potansiyeli

ρ : Yük yoğunluğu

ρ_e : Elektrik yük yoğunluğu

ρ_g : Manyetik yük yoğunluğu

$\vec{j}$	: Elektrik akım yoğunluğu
$\check{j}$	: Oktonik akım
$\vec{\nabla}$	: Nabla operatörü
Δ	: Laplasyen işlemcisi
$\hbar$	: Planck sabiti
m	: Kütle
$\square$	: Oktonik diferansiyel operatörü
$\boxdot$	: d'Alembertian operatörü
e_{Ψ}	: Elektromanyetizmada skaler alan şiddeti
$\tilde{h}_{\Psi}$	: Elektromanyetizmada psedoskaler alan şiddeti
Φ	: Manyetik akı
$\hat{R}$	: Uzaysal değişim operatörü
$\overleftrightarrow{\mathcal{A}}$	: GM vektör potansiyeli
$\vec{\mathcal{A}}$	: GE vektör potansiyeli
$\vec{E}$	: Elektrik alan
$\vec{E}_g$	: GE alan
$\vec{E}_{\Psi}$	: Vektör alan şiddeti
$\vec{H}$	: Manyetik alan

$\overleftrightarrow{H}_g$: GM alan

$\overleftrightarrow{H}_{\Psi}$: Psedovektör alan şiddeti

$\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}$: Lineer gravitasyonun GM alanı

$\vec{U}$: Oktonik kütleli enerji yoğunluğu

$\vec{U}_e$: Elektromanyetizmada enerji yoğunluğu

$\vec{\mathcal{U}}_g$: Lineer gravitasyonda enerji yoğunluğu

μ_γ : Gravitonun ters Compton dalga boyu

$\vec{J}_e$: Elektrik akım yoğunluğu

$\vec{\mathcal{J}}_g$: GE kütle akımı yoğunluğu

$\overleftrightarrow{J}_e$: Manyetik akım yoğunluğu

$\overleftrightarrow{\mathcal{J}}_g$: GM kütle akımı yoğunluğu

$\vec{F}_g$: GM yüküne etki eden net kuvvet

$\vec{\mathcal{E}}_g$: GE alan

λ_γ : Compton dalga boyunun tersi

$\vec{S}$: Oktonik Poynting vektörü

$\vec{S}_G$: Gravi-elektromanyetizmanın Poynting vektörü

$\vec{\mathcal{S}}_e$: Elektromanyetizmanın oktonik Poynting vektörü

$\vec{\mathcal{S}}_g$: Lineer gravitasyonun oktonik Poynting vektörü

1. GİRİŞ

Hiperkompleks sayılar [1-4], özellikle kuaterniyonlar, rölativistik mekanik, elektrodinamik, kuantum mekaniği ve kuantum alan teorisinde yaygın olarak kullanılır [3-10]. Dört bileşenli kuanterniyonların yapısı (skaler ve vektör), rölativistik uzay zaman yapısına karşılık gelir [5-8]. Ancak kuaterniyonlar psedoskaler ve psedovektör bileşenleri içermez. Bu nedenle her türlü fiziksel değeri tanımlamak için skaler, vektör, psedoskaler ve psedovektörleri içeren sekiz bileşenli hiperkompleks sayılar daha uygundur.

Maxwell denklemleri skaler, psedoskaler, vektör ve psedovektör değerleri için dört denklem sistemi olduğundan, elektromanyetik alanın tanımlanması için sekiz bileşenli hiperkompleks sayıların uygulanması fikri oldukça doğaldır. Elektromanyetik alanın tanımı için uzaysal değişime göre dört farklı nicelik kullanılır (skaler, psedoskaler, vektör, psedovektör). Tüm bu nicelikler uzaysal bir nesneye entegre edilebilir. Bu amaçla sekiz bileşenli bir yapı önerilir. Skaler, psedoskaler, vektör ve psedovektör nicelikleri uzaysal bir nesneye entegre eden Mironov ve Mironov [11], iyi bir geometrik yoruma sahip birleşimli fakat değişimli olmayan sekiz bileşenli okton adını verdikleri bir matematiksel yapı üretmişlerdir. Bu çalışmada sekiz boyutlu oktonların fiziksel uygulamalarından bahsedilmiştir.

Rölativistik kuantum birinci mertebeden denklemler, 1928'de P.A.M Dirac [12-13] tarafından matris operatörleri ve spinor dalga fonksiyonu temelinde formüle edilmiştir. Ancak son yıllarda görüldüğü gibi, Einstein'ın enerji ve momentum için kurduğu ilişkinin kuadratik formu, farklı cebirler tarafından gerçekleştirilebilir.

Genelleştirilmiş Dirac denklemlerinin ifadesi için kuaterniyonlar [9-10,14-15], bikuaterniyonlar [16], oktonyonlar [17-20] ve Clifford cebiri [21-23] kullanılmaktadır. Bununla birlikte, rölativistik parçacığı kompleks dalga fonksiyonları vasıtasıyla tarif etmeye ve Dirac denkleminin geometrik yorumunu geliştirmeye çalışmak kayda değer bir ilerlemeye neden olmamıştır. Oktonyon dalga fonksiyonlarıyla rölativistik parçacıkların tanımlanmasına yönelik az sayıda girişim, oktonyonlarla ilişkili güçlüklerle karşı karşıya kalmaktadır.

Elektromanyetik teoride, kütlesi sıfırdan farklı olan fotonun davranışı, Proca-Maxwell [24] denklemleri ile araştırılır. Öte yandan, kütleli parçacıklar için elektromanyetizma ve lineer gravitasyon arasında diğer bir teorik benzerlik ortaya çıkmaktadır. Bu genelleme çerçevesinde, Argyris ve Ciubotariu [25] kütleli elektromanyetizmaya benzer bazı sonuçlar bulmuş ve ayrıca Proca-Maxwell tipi gravitasyonel alan denklemlerini formüle etmişlerdir.

Literatürde, birçok matematiksel yapı elektromanyetik alan denklemlerini ve lineer gravitasyonu kompakt ve zarif bir şekilde genelleştirme amacı ile kullanılmıştır. Hamilton [26] tarafından keşfedilen kuaterniyonlar, gerçek sayılar üzerinde 4 boyutlu normlu bölüm cebri oluştururlar. Bikuaterniyonlar ya da kompleks kuarterniyonlar da Hamilton'un kuaterniyonlarının kompleks kombinasyonlarıdır ve sekiz reel (gerçel) ya da dört kompleks bileşenden oluşturulmuşlardır. Kuaterniyonik yapılar, skaler ve vektör bileşenlerin her ikisine de sahip olduğundan, kolaylıkla kütlesiz ve kütleli elektromanyetik alan denklemleri ve lineer gravitasyon ile ilişkilendirilebilirler.

Oktonyonlar gerçek sayılar üzerinde büyük normlu bölüm cebiri oluşturur. Bu matematiksel yapılar ne değişmeli ne de birleşmelidir. Bundan dolayı, fizikteki teorilerin yeniden formüle edilmelerinde kuaterniyonlar kadar sık kullanılmamaktadır. Diğer yandan, sekiz gerçek bileşene sahip olmalarından ötürü, elektromanyetik alan denklemlerini ve lineer gravitasyonu kompakt ve basit bir şekilde genelleştirmek için oldukça iyi araçlardır [27-33]. Kütleli alan denklemleri oktonyonlar bağlamında yeniden formüle edilebilir [34-35].

Bu tezin birinci bölümünde, oktonların cebirsel özelliklerinden bahsedilip, elektrodinamik denklemlerin oktonik formu anlatılmış, elektromanyetik alanda enerji, momentum ve Lorenz değişmezleri arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, rölativistik kuantum mekaniğinde birinci mertebeden oktonik denklemler ele alınarak kuantum alanlar için birinci derece oktonik denklemler elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, oktonların kütle çekim alanı denklemleri yardımıyla kütle çekim alan denklemlerinin oktonik formülasyonları verilmiştir. Dördüncü bölümde ise monopol terimleriyle birlikte elektromanyetik teoriye ve lineer gravitasyona ilişkin kütleli alan denklemleri ifade edilerek oktonik formda kısa ve şık biçimli yeni eşitlikler elde edilmiş, genelleştirilmiş dalga denklemi de okton terimleri cinsinden yeniden yazılmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

1. OKTONLARIN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Maxwell denklemleri skaler, psedoskaler, vektör ve psedovektör değerleri için dört denklem sistemi olduğundan, elektromanyetik alanın tanımlanması için sekiz bileşenli hiperkompleks sayıların uygulanması fikri oldukça doğaldır. Elektromanyetik alanın tanımı için uzaysal değişime göre dört farklı değer kullanılır (skaler, psedoskaler, vektör, psedovektör). Tüm bu değerler uzaysal bir nesneye entegre edilebilir. Bu amaçla kısaca okton olarak adlandırılan sekiz bileşen değeri önerilir. Okton cebri, asosyatif ve komütatif olmayandır. Sekiz bileşenli $\breve{G}$ oktonu,

$$\breve{G} = c_0\mathbf{e_0} + c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + c_3\mathbf{e_3} + d_0\mathbf{a_0} + d_1\mathbf{a_1} + d_2\mathbf{a_2} + d_3\mathbf{a_3} \tag{1.1}$$

formunda gösterilir. Burada $e_0 \equiv 1$ (skaler birim) iken, e_1, e_2, e_3 psedovektörler, a_0 psedoskaler birim, a_1, a_2, a_3 polar birim vektörlerdir. Sekiz bileşenden oluşan bu yapı

$$\mathbf{e}_0, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}. \tag{1.2}$$

oktonun baz elemanlarıdır.

Okton bazları, aşağıdaki çarpım kurallarına uyarlar:

$$a_k^2 = 1 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{a_j}a_k = -a_k\mathbf{a_j} \quad (j \neq k \quad j=1,2,3) \tag{1.4}$$

$$e_k^2 = 1 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{e_j}e_k = -e_k\mathbf{e_j} \quad (j \neq k \quad j=1,2,3) \tag{1.6}$$

$$\mathbf{a_1a_2} = i\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{a_2a_3} = i\mathbf{e_1}, \quad \mathbf{a_3a_1} = i\mathbf{e_2} \tag{1.7}$$

$$\mathbf{e_1e_2} = i\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{e_2e_3} = i\mathbf{e_1}, \quad \mathbf{e_3e_1} = i\mathbf{e_2} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{a_0} = a_ke_k \tag{1.9}$$

Bu baz elemanlarının çarpımları daha açık bir biçimde Tablo 1.1'de gösterilmiştir.

Tablo 1.1. *Oktonların Baz Elemanlarının Çarpımı*

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$	$\mathbf{a_0}$	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$
$\mathbf{e_1}$	1	$i\mathbf{e_3}$	$-i\mathbf{e_2}$	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_0}$	$i\mathbf{a_3}$	$-i\mathbf{a_2}$
$\mathbf{e_2}$	$-i\mathbf{e_3}$	1	$i\mathbf{e_1}$	$\mathbf{a_2}$	$-i\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_0}$	$i\mathbf{a_1}$
$\mathbf{e_3}$	$i\mathbf{e_2}$	$-i\mathbf{e_1}$	1	$\mathbf{a_3}$	$i\mathbf{a_2}$	$-i\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_0}$
$\mathbf{a_0}$	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	1	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_0}$	$i\mathbf{a_3}$	$-i\mathbf{a_2}$	$\mathbf{e_1}$	1	$i\mathbf{e_3}$	$-i\mathbf{e_2}$
$\mathbf{a_2}$	$-i\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_0}$	$i\mathbf{a_1}$	$\mathbf{e_2}$	$-i\mathbf{e_3}$	1	$i\mathbf{e_1}$
$\mathbf{a_3}$	$i\mathbf{a_2}$	$-i\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_0}$	$\mathbf{e_3}$	$i\mathbf{e_2}$	$-i\mathbf{e_1}$	1

Genel anlamda 1.1 eşitliğinde tanımlanan $\breve{G}$ oktonu, bir skaler c_0, bir psedovektör $\overleftrightarrow{c} = c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + c_3\boldsymbol{e_3}$, bir psedoskaler $\tilde{d}_0$, ve bir polar vektörün $\vec{d} = d_1\boldsymbol{a_1} + d_2\boldsymbol{a_2} + d_3\boldsymbol{a_3}$ toplamıdır.

$$\breve{G} = c_0 + \overleftrightarrow{c} + \tilde{d}_0 + \vec{d} \qquad (1.10)$$

Bir oktonun yapısını daha iyi anlayabilmek için bileşenleri arasındaki ilişkiyi daha detaylı bir şekilde incelemek gerekir. $\vec{d}_1 = d_{11}\mathbf{a_1} + d_{12}\mathbf{a_2} + d_{13}\mathbf{a_3}$ ve $\vec{d}_2 = d_{21}\mathbf{a_1} + d_{22}\mathbf{a_2} + d_{23}\mathbf{a_3}$ olmak üzere $\vec{d}_1$ ve $\vec{d}_2$ polar vektörlerinin çarpımı;

$$\vec{d}_1\vec{d}_2 = \{d_{11}\mathbf{a_1} + d_{12}\mathbf{a_2} + d_{13}\mathbf{a_3}\}\{d_{21}\mathbf{a_1} + d_{22}\mathbf{a_2} + d_{23}\mathbf{a_3}\} = d_{11}d_{21}\{\mathbf{a_1a_1}\} + d_{11}d_{22}\{\mathbf{a_1a_2}\}$$

$$+d_{11}d_{23}\{\mathbf{a_1a_3}\}+d_{12}d_{21}\{\mathbf{a_2a_1}\}+d_{12}d_{22}\{\mathbf{a_2a_2}\}+d_{12}d_{23}\{\mathbf{a_2a_3}\}+d_{13}d_{21}\{\mathbf{a_3a_1}\}$$

$$+d_{13}d_{22}\{\mathbf{a_3a_2}\}+d_{13}d_{23}\{\mathbf{a_3a_3}\}$$

$$= d_{11}d_{21} + d_{11}d_{22}\{i\mathbf{e_3}\} + d_{11}d_{23}\{-i\mathbf{e_2}\} + d_{12}d_{21}\{-i\mathbf{e_3}\} + d_{12}d_{22} + d_{12}d_{23}\{i\mathbf{e_1}\}$$

$$+d_{13}d_{21}\{i\mathbf{e_2}\}+d_{13}d_{22}\{-i\mathbf{e_1}\}+d_{13}d_{23}$$

$$=\{d_{11}d_{21}+d_{12}d_{22}+d_{13}d_{23}\}+i\{d_{12}d_{23}-d_{13}d_{22}\}\mathbf{e_1}+i\{d_{13}d_{21}-d_{11}d_{23}\}\mathbf{e_2}$$

$$+i\{d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}\}\mathbf{e_3} \tag{1.11}$$

ile verilir. Öte yandan $\overleftrightarrow{c}_1 = c_{11}\mathbf{e_1} + c_{12}\mathbf{e_2} + c_{13}\mathbf{e_3}$ ve $\overleftrightarrow{c}_2 = c_{21}c_1 + c_{22}c_2 + c_{23}c_3$ olmak üzere, $\overleftrightarrow{c}_1$ ve $\overleftrightarrow{c}_2$ psedovektörlerinin çarpımı;

$$\overleftrightarrow{c}_1\overleftrightarrow{c}_2 = \{c_{11}\mathbf{e_1}+c_{12}\mathbf{e_2}+c_{13}\mathbf{e_3}\}\{c_{21}\mathbf{e_1}+c_{22}\mathbf{e_2}+c_{23}\mathbf{e_3}\} = c_{11}c_{21}\{\mathbf{e_1e_1}\}+c_{11}c_{22}\{\mathbf{e_1e_2}\}$$

$$+c_{11}c_{23}\{\mathbf{e_1e_3}\}+c_{12}c_{21}\{\mathbf{e_2e_1}\}+c_{12}c_{22}\{\mathbf{e_2e_2}\}+c_{12}c_{23}\{\mathbf{e_2e_3}\}$$

$$+c_{13}c_{21}\{\mathbf{e_3e_1}\}+c_{13}c_{22}\{\mathbf{e_3e_2}\}+c_{13}c_{23}\{\mathbf{e_3e_3}\} = c_{11}c_{21}+c_{11}c_{22}\{i\mathbf{e_3}\}+c_{11}c_{23}\{-i\mathbf{e_2}\}$$

$$+c_{12}c_{21}\{-i\mathbf{e_3}\}+c_{12}c_{22}+c_{12}c_{23}\{i\mathbf{e_1}\}+c_{13}c_{21}\{i\mathbf{e_2}\}+c_{13}c_{22}\{-i\mathbf{e_1}\}+c_{13}c_{23}$$

$$=\{c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22}+c_{13}c_{23}\}+i\{c_{12}c_{23}-c_{13}c_{22}\}\mathbf{e_1}+i\{c_{13}c_{21}-c_{11}c_{23}\}\mathbf{e_2}$$

$$+i\{c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\}\mathbf{e_3} \tag{1.12}$$

şeklindedir.

Genel olarak skaler çarpım yuvarlak parantez içinde "·" ile temsil edilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\overleftrightarrow{c}_1 \cdot \overleftrightarrow{c}_2) = \{c_{11}\mathbf{e_1}+c_{12}\mathbf{e_2}+c_{13}\mathbf{e_3}\} \cdot \{c_{21}\mathbf{e_1}+c_{22}\mathbf{e_2}+c_{23}\mathbf{e_3}\}$$

$$=c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22}+c_{13}c_{23} \tag{1.13a}$$

$$(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2) = \{d_{11}\mathbf{a_1}+d_{12}\mathbf{a_2}+d_{13}\mathbf{a_3}\} \cdot \{d_{21}\mathbf{a_1}+d_{22}\mathbf{a_2}+d_{23}\mathbf{a_3}\}$$

$$=d_{11}d_{21}+d_{12}d_{22}+d_{13}d_{23} \tag{1.13b}$$

$$(\overleftrightarrow{c} \cdot \vec{d}) = \{c_1\mathbf{e_1}+c_2\mathbf{e_2}+c_3\mathbf{e_3}\} \cdot \{d_1\mathbf{a_1}+d_2\mathbf{a_2}+d_3\mathbf{a_3}\}$$

$$=\{c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3\}\,\mathbf{a_0} \tag{1.13c}$$

$$(\vec{d} \cdot \overleftrightarrow{c}) = \{d_1\mathbf{a_1} + d_2\mathbf{a_2} + d_3\mathbf{a_3}\} \cdot \{c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + c_3\mathbf{e_3}\}$$

$$= \{d_1\mathbf{c_1} + d_2\mathbf{c_2} + d_3\mathbf{c_3}\}\ \mathbf{a_0}\,. \qquad (1.13d)$$

Benzer şekilde vektörel çarpım ise köşeli parantez içinde "×" ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$[\overleftrightarrow{c}_1 \times \overleftrightarrow{c}_2] = \{c_{11}\mathbf{e_1} + c_{12}\mathbf{e_2} + c_{13}\mathbf{e_3}\} \times \{c_{21}\mathbf{e_1} + c_{22}\mathbf{e_2} + c_{23}\mathbf{e_3}\}$$

$$= i\{c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}\}\mathbf{e_1} + i\{c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23}\}\mathbf{e_2}$$

$$+ i\{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}\}\mathbf{e_3} \qquad (1.14a)$$

$$[\vec{d}_1 \times \vec{d}_2] = \{d_{11}\mathbf{a_1} + d_{12}\mathbf{a_2} + d_{13}\mathbf{a_3}\} \times \{d_{21}\mathbf{a_1} + d_{22}\mathbf{a_2} + d_{23}\mathbf{a_3}\}$$

$$= i\{d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22}\}\mathbf{e_1} + i\{d_{13}d_{21} - d_{11}d_{23}\}\mathbf{e_2}$$

$$+ i\{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}\}\mathbf{e_3} \qquad (1.14b)$$

$$[\overleftrightarrow{c} \times \vec{d}] = \{c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + c_3\mathbf{e_3}\} \times \{d_1\mathbf{a_1} + d_2\mathbf{a_2} + d_3\mathbf{a_3}\} = i\{c_2d_3 - c_3d_2\}\mathbf{a_1}$$

$$+ i\{c_3d_1 - c_1d_3\}\mathbf{a_2} + i\{c_1d_2 - c_2d_1\}\mathbf{a_3} \qquad (1.14c)$$

$$[\vec{d} \times \overleftrightarrow{c}] = \{d_1\mathbf{a_1} + d_2\mathbf{a_2} + d_3\mathbf{a_3}\} \times \{c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + c_3\mathbf{e_3}\}$$

$$= i\{d_2c_3 - d_3c_2\}\mathbf{a_1} + i\{d_3c_1 - d_1c_3\}\mathbf{a_2} + i\{d_1c_2 - d_2c_1\}\mathbf{a_3} \qquad (1.14d)$$

Denklem(1.13b) ve (1.14b), (1.11) denkleminde yerine yazıldığında

$$\vec{d}_1\vec{d}_2 = (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2) + [\vec{d}_1 \times \vec{d}_2] \qquad (1.15a)$$

ve benzer şekilde (1.13a) ve (1.14a), (1.12) denkleminde yerine yazıldığında

$$\overleftrightarrow{c}_1\overleftrightarrow{c}_2 = (\overleftrightarrow{c}_1 \cdot \overleftrightarrow{c}_2) + [\overleftrightarrow{c}_1 \times \overleftrightarrow{c}_2] \qquad (1.15b)$$

elde edilir.

$\breve{G}_1 = c_{10} + \overleftrightarrow{c}_1 + \tilde{d}_{10} + \vec{d}_1$ ve $\breve{G}_2 = c_{20} + \overleftrightarrow{c}_2 + \tilde{d}_{20} + \vec{d}_2$ olmak üzere iki oktonun çarpımı;

$$\breve{G}_1\breve{G}_2 = \{c_{10} + \overleftrightarrow{c}_1 + \tilde{d}_{10} + \vec{d}_1\}\{c_{20} + \overleftrightarrow{c}_2 + \tilde{d}_{20} + \vec{d}_2\}$$

$$= c_{10}c_{20} + c_{10}\overleftrightarrow{c}_2 + c_{10}d_{20} + c_{10}\vec{d}_2 + c_1c_{20} + \overleftrightarrow{c}_1\overleftrightarrow{c}_2 + \overleftrightarrow{c}_1 d_{20} + \overleftrightarrow{c}_1\vec{d}_2$$

$$+d_{10}c_{20} + d_{10}\overleftrightarrow{c}_2 + d_{10}d_{20} + d_{10}\vec{d}_2 + \vec{d}_1c_{20} + \vec{d}_1\overleftrightarrow{c}_2 + \vec{d}_1d_{20} + \vec{d}_1\vec{d}_2 \qquad (1.16)$$

şeklindedir.

Burada (1.15) ve (1.16) eşitliklerinden yararlanılarak;

$$\breve{G}_1\breve{G}_2 = c_{10}c_{20} + c_{10}\overleftrightarrow{c}_2 + c_{10}d_{20} + c_{10}\vec{d}_2 + c_{20}\overleftrightarrow{c}_1 + (\overleftrightarrow{c}_1 \cdot \overleftrightarrow{c}_2) + [\overleftrightarrow{c}_1 \times \overleftrightarrow{c}_2]$$

$$+d_{20}\overleftrightarrow{c}_1 + \left(\overleftrightarrow{c}_1 \cdot \vec{d}_2\right) + \left[\overleftrightarrow{c}_1 \times \vec{d}_2\right] + d_{10}c_{20} + d_{10}\overleftrightarrow{c}_2 + d_{10}d_{20}$$

$$+d_{10}\vec{d}_2 + c_{20}\vec{d}_1 + \left(\vec{d}_1 \cdot \overleftrightarrow{c}_2\right) + \left[\vec{d}_1 \times \overleftrightarrow{c}_2\right] + d_{20}\vec{d}_1 + \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2\right)$$

$$+\left[\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\right] \qquad (1.17)$$

elde edilir [36].

1.1. Elektrodinamik Denklemlerin Oktonik Formu

İşlem kolaylığı açısından c (ışık hızı) $= 4\pi = 1$ olmak üzere elektromanyetik alanın potansiyeli tamamlanmamış dört bileşenli bir okton olarak temsil edilir,

$$\breve{\Psi} = \varphi + \vec{A} = \varphi + A_1\mathbf{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 + A_3\boldsymbol{a}_3. \qquad (1.18)$$

Burada φ skaler potansiyel, $\vec{A}$ ise vektör potansiyeldir. Benzer şekilde dört bileşenli akım, tamamlanmamış okton (psedoskaler ve psedovektör bileşenleri olmayan) olarak tanımlanabilir:

$$\breve{J} = \rho + \vec{j} = \rho + j_1\boldsymbol{a}_1 + j_2\boldsymbol{a}_2 + j_3\boldsymbol{a}_3. \qquad (1.19)$$

Burada; ρ elektrik yük yoğunluğu, $\vec{j}$ ise elektrik akım yoğunluğunu temsil etmektedir.

Öte yandan oktonik diferansiyel operatörü

$$\square = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{a}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\boldsymbol{a}_3 \tag{1.20a}$$

ve konjugesini (eşleniği)

$$\overline{\square} = \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{a_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{a_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}\boldsymbol{a_3} \tag{1.20b}$$

kullanarak oktonik formda genelleştirilmiş bir denklem yazılabilir,

$$\overline{\square}\square\breve{\Psi} = \breve{\mathrm{J}}. \tag{1.21}$$

Bu denklemindeki çarpımdan elektromanyetik alana ilişkin potansiyel terimleri cinsinden yeni bir dalga denklemine ulaşılır:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta - [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}]\right)\breve{\Psi} = \breve{\mathrm{J}}. \tag{1.22}$$

Burada Δ laplasyen işlemcisi,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.23}$$

şeklinde tanımlanır. (1.22) denkleminde $[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}]\breve{\Psi} = 0$ olduğundan

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\breve{\Psi} = \breve{\mathrm{J}} \tag{1.24}$$

yazılabilir. Eğer (1.24) denklemi skaler ve vektörel bölümlerine ayrılırsa, skaler ve vektör potansiyelleri içeren dalga denklemleri sırasıyla,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \rho \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \vec{J} \tag{1.26}$$

şeklinde elde edilir. (1.21) denklemindeki operatörleri $\Box$ ve $\overline{\Box}$ birbiri ardına oktonik potansiyel $\breve{\Psi}$'ye uygulayarak, önce

$$\Box\breve{\Psi} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right)\left(\varphi + \vec{A}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\varphi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) + \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right] \tag{1.27}$$

elde edilir. Elektrik ve manyetik alanın okton formundaki

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi\,, \qquad \overleftrightarrow{H} = -i[\vec{\nabla}\times\vec{A}]$$

şeklinde verilen tanımları kullanılıp

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = 0 \tag{1.28}$$

Lorenz koşulu da hatırlanırsa

$$\Box\breve{\Psi} = -\vec{E} + \mathrm{i}\overleftrightarrow{H}\,, \tag{1.29}$$

denklemi elde edilir. Burada $\breve{F}$ oktonu

$$\breve{F} = -\vec{E} + i\overleftrightarrow{H} \tag{1.30}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece (1.20b) eşitliği için

$$\overline{\Box}\breve{F} = \breve{J} \tag{1.31}$$

yazılabilir. Öte yandan $\overline{\Box}$ operatörü elektromanyetik alanın $\breve{F}$ oktonu üzerine uygulanarak,

$$i\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t} - i\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right) - i\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right] - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) + \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right] = \rho + \vec{J} \tag{1.32}$$

elde edilir. (1.32) denklemi skaler, psedovektör, psedoskaler ve vektör terimlerine ayrılırsa, aşağıdaki oktonik formdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) = \rho \qquad \text{(skaler terim)} \qquad (1.33a)$$

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right] = -i\frac{\partial \overleftrightarrow{H}}{\partial t} \qquad \text{(psedovektör terim)} \qquad (1.33b)$$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{H}\right) = 0 \qquad \text{(psedoskaler terim)} \qquad (1.33c)$$

$$\left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{H}\right] = \vec{j} + i\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad \text{(vektör terim)} \qquad (1.33d)$$

Eşitlik (1.33)'deki bu denklem sistemi, oktonik formdaki Maxwell denklemleri olarak adlandırılır (Mironov, Mironov, 2009, s.5). Öte yandan (1.31) denkleminin her iki tarafına □ operatörünü uygulayarak, $\vec{E}$ ve $\overleftrightarrow{H}$ alanları için dalga denklemleri de elde edilebilir:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\left(i\overleftrightarrow{H} - \vec{E}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}\right) + \left[\vec{\nabla} \times \vec{j}\right]. \qquad (1.34)$$

Bu ifade skaler, vektörel, psedoskaler ve psedovektörel terimlerine ayırılarak, aşağıdaki üç denklem yazılabilir:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \Delta\vec{E} = -\vec{\nabla}\rho - \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \qquad (1.35a)$$

$$\frac{\partial^2 \overleftrightarrow{H}}{\partial t^2} + \Delta\overleftrightarrow{H} = -i\left[\vec{\nabla} \times \vec{j}\right], \qquad (1.35b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}\right) = 0. \qquad (1.35c)$$

Eşitlik (1.35)'deki ilk iki denklem, elektrik ve manyetik alana ilişkin dalga denklemleri olup üçüncü denklem ise süreklilik denklemidir.

1.2. Elektromanyetik Alanda Enerji, Momentum ve Lorenz Değişmezleri Arasındaki İlişkiler

Oktonik cebir farklı türden denklemlerin birlikte hesaplanmasını sağladığından bu bölümde elektromanyetik alanda enerji, momentum ve Lorenz değişmezleri arasındaki ilişkiler incelenecektir. Öncelikle,

$$\left(\vec{E}+i\overleftrightarrow{H}\right)\left(i\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}-i\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)-i\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)$$
$$=\left(\vec{E}+i\overleftrightarrow{H}\right)\left(\rho+\vec{j}\right) \qquad (1.36)$$

çarpma işleminden sonra,

$$i\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right)+i\left[\vec{E}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]-\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right)-\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]$$

$$-i\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)+\overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)-i\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]\right)$$

$$-i[\vec{E}\times[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}]\,]+\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]\right)+[\overleftrightarrow{H}\times[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}]\;-\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)-\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]$$

$$-i\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)-i\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+i\overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)+\left[\vec{E}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right]$$
$$+\,i\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)+i\left[\overleftrightarrow{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right]$$
$$=\rho\vec{E}+i\rho\overleftrightarrow{H}+\left(\vec{j}\cdot\vec{E}\right)-\left[\vec{j}\times\vec{E}\right]+i\left(\vec{j}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)$$
$$-\,i\left[\vec{j}\cdot\overleftrightarrow{H}\right] \qquad (1.37)$$

(1.37) denklemindeki farklı türdeki matematiksel bileşenler birbirinden ayrı yazılırsa (skaler, vektör, psedoskaler ve psedovektör bileşenler) dört denkleme ulaşılır. (1.37) denklemindeki skaler ifade

$$-\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)-\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right)-i\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]\right)+i\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)=\left(\vec{j}\cdot\vec{E}\right) \qquad (1.38)$$

hesaba katılarak,

$$\left(\overleftrightarrow{H} \cdot \frac{\partial \overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overleftrightarrow{H} \cdot \overleftrightarrow{H}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\overleftrightarrow{H}^2 \tag{1.39}$$

$$\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E} \cdot \vec{E}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^2 \tag{1.40}$$

yanı sıra

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \overleftrightarrow{H}\right]\right) = \left(\overleftrightarrow{H} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right]\right) - \left(\vec{E} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{H}\right]\right) \tag{1.41}$$

buradan aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2 + \overleftrightarrow{H}^2\right) - i\left(\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \overleftrightarrow{H}\right]\right) + \left(\vec{j} \cdot \overleftrightarrow{H}\right). \tag{1.42}$$

Bu denklem fizikte Poynting teoremi olarak bilinir.

Öte yandan (1.37) denklemindeki psedoskaler kısımdan,

$$i\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right) - i\left(\overleftrightarrow{H} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) + \left(\overleftrightarrow{H} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{H}\right]\right) + \left(\vec{E} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right]\right) = i\left(\vec{j} \cdot \overleftrightarrow{H}\right) \tag{1.43}$$

ve vektörel kısımdan da,

$$\begin{aligned} i\left[\vec{E} \times \frac{\partial \overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right] - i\left[\overleftrightarrow{H} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] + \overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{H}\right) + \left[\overleftrightarrow{H} \times \left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{H}\right]\right] + \vec{E}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) + \left[\vec{E} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right]\right] \\ = \rho\vec{E} - i\left[\vec{j} \times \overleftrightarrow{H}\right] \end{aligned} \tag{1.44}$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca (1.44) denkleminden elektromanyetik alandaki enerji ve momentum arasındaki ilişki elde edilir,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\left(\vec{E}^2 + \overleftrightarrow{H}^2\right) - i\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E} \times \overleftrightarrow{H}\right] + \rho\vec{E} - i\left[\vec{j} \times \overleftrightarrow{H}\right] \\ = \left\{\vec{E}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) + \left(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{E} + \overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{H}\right) + \left(\overleftrightarrow{H} \cdot \vec{\nabla}\right)\overleftrightarrow{H}\right\}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Son olarak (1.37) denklemindeki,

$$-\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]-\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+i\overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-i\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)+i\left[\overleftrightarrow{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right]-i\left[\vec{E}\times\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]\right]$$
$$=i\rho\overleftrightarrow{H}-\left[\vec{j}\times\vec{E}\right] \qquad (1.46)$$

psedovektör kısım için yapılan bir dizi basit işlemden sonra aşağıdaki bağıntıya ulaşılır,

$$\left[\overleftrightarrow{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right]-\left[\vec{E}\times\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]\right]+\overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)+i\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+i\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]$$
$$=\rho\overleftrightarrow{H}+i\left[\vec{j}\times\vec{E}\right]. \qquad (1.47)$$

Benzer şekilde (1.32) denkleminden yararlanılarak elektromanyetizmada enerji ve momentum arasında bilinen tüm denklerimler okton terimleri ile de ifade edilebilir. Eğer (1.32) denklemindeki okton $(i\overleftrightarrow{H}-\vec{E})$ ile çarpılırsa,

$$\left(i\overleftrightarrow{H}-\vec{E}\right)\left(i\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}-i\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)-i\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)$$
$$=\left(i\overleftrightarrow{H}-\vec{E}\right)\left(\rho+\vec{j}\right) \qquad (1.48)$$

ve

$$-\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right)-\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]-i\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right)-i\left[\vec{E}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]$$

$$+\overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)+i\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)+i\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]\right)$$

$$+\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]\right)+\left(\overleftrightarrow{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]\right)+i\left[\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]+i\left[\vec{E}\times\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]\right]\right.$$

$$-i\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)-i\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]$$

$$+\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)-\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+i\overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+i\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)$$

$$+i\left[\vec{H}\times[\vec{\nabla}\times\vec{E}]\right]-\left(\vec{E}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{E}]\right)-\left[\vec{E}\times[\vec{\nabla}\times\vec{E}]\right]$$

$$=i\rho\vec{H}-\rho\vec{E}+i(\vec{j}\cdot\vec{H})-i[\vec{j}\times\vec{H}]-(\vec{j}\cdot\vec{E})[\vec{j}\times\vec{E}] \tag{1.49}$$

elde edilir. Açıkça (1.49) denkleminin skaler kısmı için,

$$-\left(\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)-\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)+i(\vec{E}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{H}])+\dot{\imath}(\vec{H}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{E}])=-(\vec{j}\cdot\vec{E}) \tag{1.50}$$

yazılabilir. Bu denklem Lorenz değişmezinin $\vec{E}^2\vec{H}^2$ ile olan ilişkisine götürür,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}^2-\vec{H}^2)-i\{(\vec{E}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{H}])+(\vec{H}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{E}])\}+(\vec{j}\cdot\vec{E})=0. \tag{1.51}$$

Benzer şekilde (1.49) denkleminin psedoskaler kısmı,

$$-i\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)-i\left(\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)+(\vec{H}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{H}])-(\vec{E}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{E}])=i(\vec{j}\cdot\vec{H}) \tag{1.52}$$

olup bu da,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{H})+i(\vec{H}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{H}])-i(\vec{E}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{E}])+(\vec{j}\cdot\vec{H})=0 \tag{1.53}$$

ikinci Lorenz değişmezi $(\vec{E}\cdot\vec{H})$ ile ilişkilidir (Mironov, Mironov, 2009, s.8).

Öte yandan (1.49) denkleminin vektör kısmı,

$$-i\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]-i\left[\vec{H}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+\vec{H}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H})-\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})+\left[\vec{H}\times[\vec{\nabla}\times\vec{H}]\right]-\left[\vec{E}\times[\vec{\nabla}\times\vec{E}]\right]$$
$$=\rho\vec{E}-i[\vec{j}\times\vec{H}]. \tag{1.54}$$

Dönüşümden sonra aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\vec{\nabla}\left(\vec{E}^2+\overleftrightarrow{H}^2\right)-i\left[\vec{E}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]+\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+\rho\vec{E}-i\left[\vec{j}\times\overleftrightarrow{H}\right]$$
$$=\left\{\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}-\overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)-\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\vec{\nabla}\right)\overleftrightarrow{H}\right\}. \qquad (1.55)$$

Son olarak (1.49) denklemindeki psedovektör kısmı için

$$-\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]+\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+i\overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+i\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)+i\left[\overleftrightarrow{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right]+i\left[\overleftrightarrow{E}\times\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right]\right]$$

$$=i\rho\overleftrightarrow{H}+\left[\vec{j}\times\vec{E}\right] \qquad (1.56)$$

yazılıp bir dizi işlemden sonra,

$$\vec{\nabla}\left(\vec{E}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)=\overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)+\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\overleftrightarrow{H}+\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}-\rho\overleftrightarrow{H}+i\left[\vec{j}\times\vec{E}\right]$$
$$+i\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]-i\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right] \qquad (1.57)$$

elde edilir. Bu da ikinci Lorenz değişmezinin gradyanının ifadesidir (Mironov, Mironov, 2009, s.1-9).

İKİNCİ BÖLÜM

2. RÖLATİVİSTİK KUANTUM MEKANİĞİNDE BİRİNCİ MERTEBEDEN OKTONİK DENKLEMLER

2.1. Kuantum Alanlar İçin Birinci Derece Oktonik Denklemler

Rölativistik bir parçacığın okton formundaki sekiz bileşenli dalga fonksiyonu,

$$\breve{\Psi} = \varphi_0 + \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi_3 e_3 + \chi_0 a_0 + \chi_1 a_1 + \chi_2 a_2 + \chi_3 a_3 \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\varphi_\alpha(\vec{r},t)$ ve $\chi_\alpha(\vec{r},t)$ $(\alpha = 0,1,2,3)$ bileşenleri uzay koordinatlarının ve zamanın skaler (genel olarak karmaşık) fonksiyonlarıdır. Oktonik dalga fonksiyonu olan (2.1) denklemi, kompakt formda aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\breve{\Psi} = \varphi_0 + \vec{\breve{\varphi}} + \tilde{\chi}_0 + \vec{\chi}\,.$$

Biçimsel olarak Einstein'ın enerji momentum bağıntısına karşılık gelen ikinci derece oktonik rölativistik denklemler [37],

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\breve{\nabla}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\breve{\nabla}}\right)\breve{\Psi} = -\frac{m^2}{\hbar^2}\breve{\Psi} \qquad (2.2)$$

elektromanyetik alan potansiyelleri cinsinden ifade edilen oktonik dalga denklemine [11] benzerlik gösterir (Burada işlem kolaylığı açısından $c = 1$ alınmıştır). Bu nedenle rölativistik oktonik kuantum mekaniğinde Maxwell eşitliklerine benzer birinci derecede denklemleri sağlayan bazı kuantum alanlar tanımlanabilir. (2.2) eşitliği şu şekilde yazılabilir,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\breve{\nabla}} - i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\breve{\nabla}} + i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\breve{\Psi} = 0. \qquad (2.3)$$

Denklemin sol tarafı iki oktonik operatörün matematiksel çarpımıdır. Burada $\hat{R}$, dalga fonksiyonunun vektör ve psedovektör bileşenlerinin işaretini değiştiren bir operatördür,

$$\hat{R}(\varphi_0 + \overleftrightarrow{\varphi} + \tilde{\chi}_0 + \vec{\chi}) = \varphi_0 + \overleftrightarrow{\varphi} - \tilde{\chi}_0 - \vec{\chi} \tag{2.4}$$

$$\hat{R} = 1$$

(2.3) denklemi kuantum alanı tanımlanmasına olanak tanır. Buradaki ilk operatörün etki etmesiyle aşağıdaki denkleme ulaşılır:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} + i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)(\varphi_0 + \overleftrightarrow{\varphi} + \tilde{\chi}_0 + \vec{\chi})$$

$$= \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{\partial \overleftrightarrow{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\chi}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t} + \vec{\nabla}\varphi_0 + \left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\varphi}\right)$$

$$+\left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{\varphi}\right] + \vec{\nabla}\tilde{\chi}_0 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}\right) + [\vec{\nabla} \times \vec{\chi}]$$

$$+i\frac{m}{\hbar}\varphi_0 + i\frac{m}{\hbar}\overleftrightarrow{\varphi} - i\frac{m}{\hbar}\tilde{\chi}_0 - i\frac{m}{\hbar}\vec{\chi}\,. \tag{2.5}$$

Bu alanlar Ψ indisi ile gösterilirse,

$$e_\Psi = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \chi\right) + i\frac{m}{\hbar}\varphi_0, \tag{2.6}$$

$$\vec{E}_\Psi = -\vec{\nabla}\varphi_0 - \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t} + i\frac{m}{\hbar}\vec{\chi} - \left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{\varphi}\right], \tag{2.7}$$

$$\tilde{h}_\Psi = i\frac{\partial \tilde{\chi}_0}{\partial t} + i\left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\varphi}\right) + \frac{m}{\hbar}\tilde{\chi}_0, \tag{2.8}$$

$$\overleftrightarrow{H}_\Psi = -i\left[\vec{\nabla} \times \vec{\chi}\right] - i\vec{\nabla}\tilde{\chi}_0 - i\frac{\partial \overleftrightarrow{\varphi}}{\partial t} + \frac{m}{\hbar}\overleftrightarrow{\varphi}\,. \tag{2.9}$$

Burada e_Ψ skaler alan şiddeti, $\vec{E}_\Psi$ vektör alan şiddeti, $\tilde{h}_\Psi$ psedoskaler alan şiddeti, $\overleftrightarrow{H}_\Psi$ psedovektör alan şiddeti olarak tanımlanır. Bu alan tanımlamalarından sonra (2.5) denklemi şu formda tekrar yazılabilir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} + i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\breve{\Psi} = e_\Psi - \vec{E}_\Psi - i\tilde{h}_\Psi + i\overleftrightarrow{H}_\Psi\,. \tag{2.10}$$

(2.3) denkleminden kuantum alan eşitliği elde edilir,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla} - i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\left(e_\Psi - \vec{E}_\Psi - i\tilde{h}_\Psi + i\overleftrightarrow{H}_\Psi\right) = 0\,. \tag{2.11}$$

Oktonik çarpım gerçekleştirildikten sonra denklem skaler, psedoskaler, vektör ve psedovektör kısımlara ayrılabilir.Böylece Maxwell eşitliklerine benzer birinci derece denklem sistemi elde edilir:

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\Psi\right) = -\frac{\partial e_\Psi}{\partial t} + i\frac{m}{\hbar}e_\Psi \qquad - \text{skaler terim,} \tag{2.12}$$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{H}_\Psi\right) = -\frac{\partial \tilde{h}_\Psi}{\partial t} - i\frac{m}{\hbar}\tilde{h}_\Psi \qquad - \text{ psedoskaler terim,} \tag{2.13}$$

$$\left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{H}_\Psi\right] = i\frac{\partial \vec{E}_\Psi}{\partial t} + i\vec{\nabla}e_\Psi - \frac{m}{\hbar}\vec{E}_\Psi \qquad - \text{ vektör terim,} \tag{2.14}$$

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{E}_\Psi\right] = -i\frac{\partial \overleftrightarrow{H}_\Psi}{\partial t} - i\vec{\nabla}\tilde{h}_\Psi - \frac{m}{\hbar}\overleftrightarrow{H}_\Psi \qquad - \text{psedovektör terim.} \tag{2.15}$$

bu sistem kesinlikle (2.3) ile eşdeğerdir (Mironov, Mironov, 2009, s.4160-4161).

Eğer $e_\Psi = 0$ ve $\tilde{h}_\Psi = 0$ alınırsa dalga denklemi için "ayar" ilişkisi bulunur:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}\right) + i\frac{m}{\hbar}\varphi_0 = 0\,, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_0}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\varphi}\right) - i\frac{m}{\hbar}\tilde{\chi}_0 = 0. \tag{2.17}$$

Bu iki koşul altında kuantum alan için denklemler şöyle yazılabilir:

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\Psi\right) = 0\,, \tag{2.18}$$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{H}_\Psi\right) = 0\,, \tag{2.19}$$

$$\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}_{\Psi}\right]=i\frac{\partial\vec{E}_{\Psi}}{\partial t}-\frac{m}{\hbar}\vec{E}_{\Psi}\ , \tag{2.20}$$

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_{\Psi}\right]=-i\frac{\partial\overleftrightarrow{H}_{\Psi}}{\partial t}-\frac{m}{\hbar}\overleftrightarrow{H}_{\Psi}\ . \tag{2.21}$$

(2.12)-(2.15) arasındaki denklem sistemlerinde bir dış elektromanyetik alan içindeki bir parçacık için genelleştirme yapılabilir. Bu durumda (2.3) operatörleri şöyle değiştirilmelidir,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rightarrow\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{e}{\hbar}\Phi\ , \qquad\qquad \vec{\nabla}\rightarrow\vec{\nabla}-i\frac{e}{\hbar}\vec{A}\ . \tag{2.22}$$

Bu dönüşüm sonrasında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{e}{\hbar}\Phi-\vec{\nabla}-i\frac{e}{\hbar}\vec{A}-i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{e}{\hbar}\Phi+\vec{\nabla}-i\frac{e}{\hbar}\vec{A}+i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\breve{\Psi}=0\ . \tag{2.23}$$

İlk operatör uygulandıktan sonra

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{e}{\hbar}\Phi+\vec{\nabla}-i\frac{e}{\hbar}\vec{A}+i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)(\varphi_0+\overleftrightarrow{\varphi}+\tilde{\chi}_0+\vec{\chi})$$

$$=\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+\frac{\partial\overleftrightarrow{\varphi}}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{\chi}_0}{\partial t}+\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial t}+i\frac{e}{\hbar}\Phi\varphi_0+i\frac{e}{\hbar}\Phi\overleftrightarrow{\varphi}$$

$$+i\frac{e}{\hbar}\Phi\tilde{\chi}_0+i\frac{e}{\hbar}\vec{\chi}+\vec{\nabla}\varphi_0+\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\varphi}\right)+\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{\varphi}\right]$$

$$+\vec{\nabla}\tilde{\chi}_0+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\chi}\right)+\left[\vec{\nabla}\times\vec{\chi}\right]-i\frac{e}{\hbar}\vec{A}\varphi_0-i\frac{e}{\hbar}\left(\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{\varphi}\right)$$

$$-i\frac{e}{\hbar}\left[\vec{A}\times\overleftrightarrow{\varphi}\right]-i\frac{e}{\hbar}A\tilde{\chi}_0-i\frac{e}{\hbar}\left(\vec{A}\cdot\vec{\chi}\right)-i\frac{e}{\hbar}\left[\vec{A}\times\vec{\chi}\right]$$

$$+i\frac{m}{\hbar}\varphi_0+i\frac{m}{\hbar}\overleftrightarrow{\varphi}-i\frac{m}{\hbar}\tilde{\chi}_0-i\frac{m}{\hbar}\vec{\chi} \tag{2.24}$$

elde edilir. Bu durumda kuantum alanları şu şekilde tanımlanabilir:

$$e_{\Psi} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}) + i\frac{m}{\hbar}\varphi_0 + i\frac{e}{\hbar}\Phi\varphi_0 - i\frac{e}{\hbar}(\vec{A} \cdot \vec{\chi}), \tag{2.25}$$

$$\vec{E}_{\Psi} = -\vec{\nabla}\varphi_0 - \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t} + i\frac{m}{\hbar}\vec{\chi} - [\nabla \times \varphi]$$

$$- i\frac{e}{\hbar}\Phi\vec{\chi} + i\frac{m}{\hbar}\varphi_0\vec{A} + i\frac{e}{\hbar}[\vec{A} \times \overleftrightarrow{\varphi}], \tag{2.26}$$

$$\tilde{h}_{\Psi} = i\frac{\partial \tilde{\chi}_0}{\partial t} + i(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\varphi}) + \frac{m}{\hbar}\tilde{\chi}_0 - \frac{e}{\hbar}\Phi\tilde{\chi}_0 + \frac{e}{\hbar}(\vec{A} \cdot \overleftrightarrow{\varphi}) \tag{2.27}$$

$$\overleftrightarrow{H}_{\Psi} = -i[\vec{\nabla} \times \vec{\chi}] - i\vec{\nabla}\tilde{\chi}_0 - i\frac{\partial \overleftrightarrow{\varphi}}{\partial t} + \frac{m}{\hbar}\overleftrightarrow{\varphi}$$

$$+\frac{e}{\hbar}\Phi\overleftrightarrow{\varphi} - \frac{e}{\hbar}[\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\chi}] - \frac{e}{\hbar}\tilde{\chi}_0\vec{A}\,. \tag{2.28}$$

(2.24) denklemi aşağıdaki şekilde temsil edilebilirse

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{e}{\hbar}\Phi + \vec{\nabla} - i\frac{e}{\hbar}\vec{A} + i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\breve{\Psi} = e_{\Psi} - \vec{E}_{\Psi} - i\tilde{h}_{\Psi} + i\overleftrightarrow{H}_{\Psi} \tag{2.29}$$

kuantum alan denklemleri için (2.23) eşitliği aşağıdaki hali alır

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{e}{\hbar}\Phi + \vec{\nabla} - i\frac{e}{\hbar}\vec{A} + i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\left(e_{\Psi} - \vec{E}_{\Psi} - i\tilde{h}_{\Psi} + i\overleftrightarrow{H}_{\Psi}\right) = 0. \tag{2.30}$$

(2.28) denklemine oktonik çarpım uyguladıktan sonra skaler, psedoskaler, vektör ve psedovektör kısımlarına ayırarak kuantum alan kuvvetlerine ulaşılır (Mironov, Mironov, 2009, s.4162-4163).

$$[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\Psi}] = -\frac{\partial e_{\Psi}}{\partial t} - i\frac{e}{\hbar}\Phi e_{\Psi} + i\frac{e}{\hbar}(\vec{A} \cdot \vec{E}) + i\frac{m}{\hbar}e_{\Psi}\,, \tag{2.31}$$

$$[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{H}_\Psi] = i\frac{\partial \vec{E}_\Psi}{\partial t} - \frac{e}{\hbar}\,\Phi \vec{E}_\Psi + i\vec{\nabla} e_\Psi + \frac{e}{\hbar}\vec{A} e_\Psi$$

$$+i\frac{e}{\hbar}[\vec{A} \times \overleftrightarrow{H}_\Psi] - \frac{m}{\hbar}\vec{E}_\Psi\,, \tag{2.32}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{H}_\Psi) = -\frac{\partial \tilde{h}_\Psi}{\partial t} - i\frac{e}{\hbar}\Phi \tilde{h}_\Psi + i\frac{e}{\hbar}(\vec{A} \cdot \overleftrightarrow{H}_\Psi) - i\frac{m}{\hbar}\tilde{h}_\Psi\,, \tag{2.33}$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}_\Psi] = -i\frac{\partial \overleftrightarrow{H}_\Psi}{\partial t} + \frac{e}{\hbar}\Phi \overleftrightarrow{H}_\Psi - i\vec{\nabla}\tilde{h}_\Psi$$

$$+i\frac{e}{\hbar}[\vec{A} \times \vec{E}_\Psi] - \frac{e}{\hbar}\vec{A}\tilde{h}_\Psi - \frac{m}{\hbar}\overleftrightarrow{H}_\Psi\,. \tag{2.34}$$

(2.31)-(2.34) arasındaki denklem sistemi (2.23) oktonik denklemine kesinlikle eşdeğerdir.

2.2. Birinci Dereceden Oktonik Denklemler

Elektromanyetik alan ile parçacığın spininin etkileşimi ikinci derece oktonik denklem ile tarif edilebilir. Öte yandan Dirac benzeri eşitlikler inşa edilebilir. (2.2) oktonik eşitliğine dönülürse,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right)\breve{\Psi} = -\frac{m^2}{\hbar^2}\breve{\Psi} \tag{2.35}$$

bu denklem, bir operatörün $\breve{\Psi}$ fonksiyonu üzerindeki eyleminin sonucunu yeni bir $\breve{W}$ oktonik fonksiyonu olarak gösterilebilir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right)\breve{\Psi} = -\frac{m}{\hbar}\breve{W}. \tag{2.36}$$

(2.35) ikinci derece denklemi iki tane birinci dereceden denklem sistemine eşdeğerdir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right)\breve{\Psi} = -\frac{m}{\hbar}\breve{W}\,, \tag{2.37}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}\right)\breve{W} = \frac{m}{\hbar}\breve{\Psi}\,. \tag{2.38}$$

(2.38) denkleminde, $\hat{R}$ uzaysal değişim operatöründen hareketle

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right)\breve{\Psi} = \frac{m}{\hbar}\left(-\breve{W}\right), \tag{2.39}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right)\hat{R}\breve{W} = \frac{m}{\hbar}\hat{R}\breve{\Psi}\,. \tag{2.40}$$

yazılabilir. Bazı koşullarda (2.39), (2.40) denklemleri tamamıyla eşdeğer olabilir. Bunun için $\breve{W}$ ve $\breve{\Psi}$ aşağıdaki ilişkileri sağlamalıdır;

$$\breve{\Psi} = \eta\hat{R}\breve{W}, \tag{2.41}$$

$$-\breve{W} = \eta\hat{R}\breve{\Psi}. \tag{2.42}$$

Burada η sabittir. Özellikle skaler η için $\eta = \pm i$ elde edilir. Eğer yardımcı fonksiyon $\breve{W}$

$$\breve{W} = \pm i\hat{R}\breve{\Psi} \tag{2.43}$$

Koşulu yerine getirirse dalga fonksiyonu $\breve{\Psi}$ birinci derece denklemi sağlar. (2.43)'deki işaret keyfi olarak seçilebilir. Eğer $\breve{W} = +i\hat{R}\breve{\Psi}$ seçilirse birinci derece denklem

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} + i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\breve{\Psi} = 0 \tag{2.44}$$

olur. Ayrıca (2.37) denkleminde $\hat{R}$ ile işlem yapılabilir. Sonrasında gradyent operatöründen önce ters işaretli denklem elde edilir. Böylece oktonik birinci derece eşitlikler dört ayrı formda yazılabilir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} + i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\breve{\Psi} = 0 \tag{2.45}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} - i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\breve{\Psi} = 0 \tag{2.46}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla} + i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\breve{\Psi} = 0 \tag{2.47}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla} - i\frac{m}{\hbar}\hat{R}\right)\breve{\Psi} = 0 \tag{2.48}$$

Okton cebri [37] Dirac matrisleri cebrine izomorfiktir. (2.45)-(2.48) denklemleri Dirac denklemlerine benzerdir (Mironov, Mironov, 2009, s.4158-4165).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. OKTONLARLA GRAVİTASYONEL ALAN DENKLEMLERİ

Elektromanyetik alanın ve gravitasyonel alanının kökenleri tamamen farklı olmasına rağmen, gravi-elektromanyetizmanın (GEM) terimleri elektromanyetizmanın temel denklemlerine benzetilerek elde edilebilir. Burada söz edilen denklemler temelde Newton'un kütle çekimi yasasıyla Coulomb'un elektrik yasası arasındaki biçimsel benzerliğe dayanır.

İşlemlerde basitlik sağlaması açısından $G = c = 1$ olduğu varsayılırsa, lineer gravitasyon için Maxwell tipi alan denklemleri şu şekilde tanımlanabilir:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g = -\varrho_e \,, \tag{3.1a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_g = 0 \,, \tag{3.1b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_g = -\frac{\partial \vec{H}_g}{\partial t} \,, \tag{3.1c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_g = -\vec{J}_g^e + \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t} \,. \tag{3.1d}$$

Burada $\vec{\varrho}_e$, gravitoelektrik (GE) kütle yoğunluğu $\vec{J}_g^e = \varrho \vec{v}$ GE'nin kütlesel akım yoğunluğu olup, $\vec{v}$ ise hızdır. GE alanı $\vec{E}_g$ ve gravitomanyetik (GM) alanı $\vec{H}_g$, klasik elektrodinamik ile yakından ilişkili olarak ifade edilebilir;

$$\vec{E}_g = -\vec{\nabla}\varphi_e - \frac{\partial \vec{A}_g^e}{\partial t} \,, \tag{3.2a}$$

$$\vec{H}_g = \vec{\nabla} \times \vec{A}_g^e \,, \tag{3.2b}$$

Burada φ_e ve $\vec{A}_g^e$ terimleri sırasıyla GEM skaler potansiyeli ve vektör potansiyelidir. Klasik elektromanyetizmaya benzer şekilde, GEM'deki Lorenz değişmezi,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_g^e + \frac{\partial \varrho_e}{\partial t} = 0 \tag{3.3}$$

ile verilir. $\vec{E}_g$ ve $\vec{H}_g$ alanında $\vec{v}$ hızı ile hareket eden m_e kütleli parçacığın hareket denklemleri, elektromanyetik teorideki Lorenz kuvveti denklemine paralellik gösterecek bir biçimde yazılabilir:

$$\vec{F}_g^e = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = m_e \big(\vec{E}_g - \vec{v} \times \vec{H}_g \big) \, . \tag{3.4}$$

Günümüze kadar var olduklarına dair deneysel bir kanıt bulunmamasına rağmen, elektrik ve manyetik alanlar arasındaki simetriyi korumak için manyetik yük taşıyan bir parçacık ihtimali ilk kez Dirac [38] tarafından 1931'de ortaya atılmıştır. Öte yandan, Dirac'ın manyetik tek kutup (monopol) teorisine benzer şekilde, GM kütlesi mevcudiyeti de GEM için varsayılabilir. Literatürde, GM kütle terimi aynı zamanda GM yük (monopol) veya manyetik kütle olarak da adlandırılır [39]. GM kütle terimleri içeren bir denklem için, Maxwell tipi kütle çekimi alanı denklemleri şu şekilde verilir [40,41]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g = -\varrho_e \, , \tag{3.5a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_g = -\varrho_m \, , \tag{3.5b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_g = \vec{J}_g^m - \frac{\partial \vec{H}_g}{\partial t} \, , \tag{3.5c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_g = -\vec{J}_g^e + \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t} \, . \tag{3.5d}$$

Burada ϱ_m ve $\vec{J}_g^m$ sırasıyla GM kütle yoğunluğu ve GM kütle akımı yoğunluğudur. GEM'in lineer alan denklemleri, GE ve GM miktarları arasında aşağıdaki dualite dönüşümleri altında değişmezdir:

$$\vec{E}_g' = \vec{E}_g \cos\theta + \vec{H}_g \sin\theta \, , \tag{3.6a}$$

$$\vec{H}_g' = -\vec{E}_g \sin\theta + \vec{H}_g \cos\theta, \tag{3.6b}$$

$$\vec{J}_g^{e\,'} = \vec{J}_g^e \cos\theta + \vec{J}_g^m \sin\theta\ , \tag{3.6c}$$

$$\vec{J}_g^{m\,'} = -\vec{J}_g^e \sin\theta + \vec{J}_g^m \cos\theta\ , \tag{3.6d}$$

$$\varrho_e' = \varrho_e \cos\theta + \varrho_m \sin\theta\ , \tag{3.6e}$$

$$\varrho_m' = -\varrho_e \sin\theta + \varrho_m \cos\theta\ . \tag{3.6f}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$'nin belirli bir değeri için, bu dönüşümlere karşılık matris gösterimi aşağıdaki gibi verilir

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_g' \\ \vec{H}_g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_g \\ \vec{H}_g \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_g' \\ \vec{H}_g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_g \\ \vec{H}_g \end{pmatrix}, \tag{3.7a}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{J}_g^{e\,'} \\ \vec{J}_g^{m\,'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{J}_g^e \\ \vec{J}_g^m \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{J}_g^{e\,'} \\ \vec{J}_g^{m\,'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{J}_g^e \\ \vec{J}_g^m \end{pmatrix}, \tag{3.8a}$$

ve

$$\begin{pmatrix} \varrho_e' \\ \varrho_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_e \\ \varrho_m \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$$\begin{pmatrix} \varrho_e' \\ \varrho_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_e \\ \varrho_m \end{pmatrix}. \tag{3.9a}$$

Elektromanyetik teoride olduğu gibi, $\vec{v}$ hızıyla hareket eden m_m GM yüküne (kütlesine) etki eden net kuvvet şu şekilde ifade edilebilir [42]:

$$\vec{F}_g^m = m_m \frac{d\vec{v}}{dt} = m_m\left(\vec{H}_g + \vec{v} \times \vec{E}_g\right). \tag{3.10}$$

Literatürde gravito-dyonlar, aynı anda GE ve GM yüklerini (kütleleri) taşıyan parçacıklar olarak tanımlanır. (3.4) ve (3.10) eşitlikleri kullanılarak gravito-dyon için net kuvvet şu şekilde ifade edilebilir:

$$\vec{F} = (m_e + m_m)\frac{d\vec{v}}{dt} = m_e\left(\vec{E}_g - \vec{v} \times \vec{H}_g\right) + m_m\left(\vec{H}_g + \vec{v} \times \vec{E}_g\right). \tag{3.11}$$

Yeni eklenen GM monopol terimlerine uygun olarak, $\vec{E}_g$ ve $\vec{H}_g$ kütle çekimi alanlarının tanımları da aşağıdaki gibi değiştirilmelidir:

$$\vec{E}_g = -\vec{\nabla}\varphi_e - \frac{\partial \vec{A}_g^e}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{A}_g^m\ , \tag{3.12a}$$

$$\vec{H}_g = -\vec{\nabla}\varphi_m - \frac{\partial \vec{A}_g^m}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{A}_g^e\ . \tag{3.12b}$$

Burada, φ_m ve $\vec{A}_g^m$ sırasıyla, GM monopolü ile ilişkili skaler ve vektör potansiyellerdir. Doğal olarak, yukarıda bahsedilen yeni potansiyellerle ilgili bir tane daha Lorenz koşulu yerine getirilmelidir:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_g^m + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = 0\ . \tag{3.13}$$

Öte yandan GM kaynaklı yüklerin bulunmaması durumunda bu terimlerin sıfır olması beklenir. Dolayısıyla (3.12) eşitliği daha önce (3.2) eşitliğinde verilen klasik ifadelere geri döner.

Her ne kadar klasik Maxwell elektromanyetik alan teorisinde fotonun kütlesi tam olarak sıfır olarak kabul edilse de, durgun kütlesi sıfır olmayan fotonun etkileri ise Proca-Maxwell denklemleri ile incelenir [24,43]. Literatürde bu ifadeler aynı zamanda kütleli elektromanyetik denklemler olarak da adlandırılır. Bu tartışmaya benzer şekilde, lineer kütle çekiminin genelleştirilmesi çerçevesinde gravitonların sıfırından farklı durgun kütlesi olduğu durumda, Argyris ve Ciubotariu [44] elektromanyetik teorideki Proca denklemine benzer bir sonuç elde ettiler. Çalışmalarında, gravito-elektromanyetizmaya dayanan lineer gravitasyona ilişkin vektörel eşitliklere dayanan yeni bir yaklaşım önerdiler. Bu yaklaşıma göre GEM' in Proca-Maxwell tipi denklemleri elektromanyetik denklemlerinden yararlanılarak şu şekilde yazılabilir [44]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g = -\varrho_e - \mu_\gamma^2 \varphi_e \,, \tag{3.14a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_g = 0 \,, \tag{3.14b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_g = -\frac{\partial \vec{H}_g}{\partial t} \,, \tag{3.14c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_g = \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t} - \vec{J}_g^e - \mu_\gamma^2 \vec{A}_g^e \,. \tag{3.14d}$$

Burada $\vec{E}_g$ ve $\vec{H}_g$ denklem (3.12)'de verildiği gibi φ_e ve $\vec{A}_g^e$ ile ilişkilidir, Öte yandan $\mu_\gamma = \frac{m_g c}{\hbar}$ ise gravitonun ters Compton dalga boyudur.

3.1. Kütle Çekimi Alan Denklemlerinin Oktonik Formülasyonları

Oktonik cebir, GEM'in Maxwell tipi alan denklemlerini formüle etmek için kullanılabilir. Dört boyutlu oktonik diferansiyel operatörü ve eşleniği sırasıyla (1.20a) ve (1.20b) denklemlerinde tanımlanmıştır.

$$\Box = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{a}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\boldsymbol{a}_3$$

ve eşleniği

$$\overline{\Box} = \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{a_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{a_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}\boldsymbol{a_3} \,.$$

Burada $\vec{\nabla}$, matematikten çok iyi bilinen nabla operatörünü temsil etmektedir:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a_1}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a_2}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a_3} \tag{3.15}$$

Okton cebiri, aynı anda farklı değerlerdeki nicelikleri kompakt bir biçimde sunma olanağı sağlar. GEM'i oktonlarla formüle etmek üzere GE ve GM potansiyelleri birleştirmek için sekiz bileşenli bir potansiyel tanımlamak gerekir:

$$\breve{\mathcal{A}} = \varphi + i\overleftrightarrow{\mathcal{A}} + i\tilde{\varphi} - \vec{\mathcal{A}}$$

$$= \varphi_e \boldsymbol{e_0} + i\mathcal{A}_x^m \boldsymbol{e_1} + i\mathcal{A}_y^m \boldsymbol{e_2} + i\mathcal{A}_z^m \boldsymbol{e_3}$$

$$+i\varphi_m \boldsymbol{a_0} - \mathcal{A}_x^e \boldsymbol{a_1} - \mathcal{A}_y^e \boldsymbol{a_2} - \mathcal{A}_z^e \boldsymbol{a_3}. \tag{3.16}$$

Burada $\varphi = \varphi_e \boldsymbol{e_0}$ GE skaler potansiyelini temsil ederken $\overleftrightarrow{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_x^m \boldsymbol{e_1} + i\mathcal{A}_y^m \boldsymbol{e_2} + i\mathcal{A}_z^m \boldsymbol{e_3}$ psedovektör formundaki GM vektör potansiyeli, psedoskaler $\tilde{\varphi} = \varphi_m \boldsymbol{a_0}$ GM skaler potansiyeli ve $\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_x^e \boldsymbol{a_1} - \mathcal{A}_y^e \boldsymbol{a_2} - \mathcal{A}_z^e \boldsymbol{a_3}$ de GE vektör potansiyeli göstermektedir. Diferansiyel operatör ve genelleştirilmiş potansiyel arasındaki aşağıdaki işlem önemli oktonik eşitlikler verecektir:

$$\overline{\square}\breve{\mathcal{A}} = \left\{\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}\right\}\left\{\varphi + i\overleftrightarrow{\mathcal{A}} + i\tilde{\varphi} - \vec{\mathcal{A}}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{A}})\right\} - \vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + i[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{\mathcal{A}}]$$

$$+i\left\{\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + (\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{A}})\right\} - i\vec{\nabla}\tilde{\varphi} - i\frac{\partial \overleftrightarrow{\mathcal{A}}}{\partial t} + \left[\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{A}}\right]. \tag{3.17}$$

(3.3) ve (3.13) denklemlerinde verilen iki Lorenz koşuluna göre, denklemin sağında parantez içindeki skaler ve psedoskaler terimler sıfır olur.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{A}}\right) = 0\,, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{A}}\right) = 0\,. \tag{3.19}$$

(3.12) denklemlerindeki gravito-elektromanyetik alanlar aşağıdaki vektör ve psedovektör terimleri tarafından yeniden tanımlanırsa,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + i\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{\mathcal{A}}\right], \tag{3.20}$$

$$\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}} = -\vec{\nabla}\tilde{\varphi} - \frac{\partial\overleftrightarrow{\mathcal{A}}}{\partial t} - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{A}}\right], \tag{3.21}$$

aşağıdaki kısa denklem yazılabilir,

$$\overline{\Box}\check{\mathcal{A}} = \check{F}\,. \tag{3.22}$$

Burada, $\check{F}$ oktonu şu şekilde tanımlanır

$$\check{F} = \vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}} + i\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}} = \mathcal{E}_x\boldsymbol{a_1} + \mathcal{E}_y\boldsymbol{a_2} + \mathcal{E}_z\boldsymbol{a_3} + i\mathcal{H}_x\boldsymbol{e_1} + i\mathcal{H}_y\boldsymbol{e_2} + i\mathcal{H}_z\boldsymbol{e_3}\,. \tag{3.23}$$

3.2. Maxwell-Dirac Tipi Gravi-Elektromanyetizma

Elektromanyetik teori ile lineer kütle çekimi arasındaki biçimsel benzerlik nerede ise birbirlerinin aynı olan denklem sistemlerinin türetilmesine izin verir. Bu bölümde GE ve GM monopol terimlerinin birlikte olması durumu incelenecektir.

Eğer oktonik diferansiyel operatörü $\Box$, (3.23) ifadesinde verilen oktonik genelleştirilmiş alan $\check{F}$'ye etki ettirilirse

$$\Box\check{F} = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}\right) + \left\{i\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}}{\partial t} + [\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}]\right\} + i\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}\right) + \left\{\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}}{\partial t} + i[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}]\right\}$$

$$= -\varrho + i\overleftrightarrow{\mathcal{J}} - i\tilde{\varrho} + \vec{\mathcal{J}} \tag{3.24}$$

elde edilir. Eğer burada $\check{\mathcal{J}}$ oktonik genelleştirilmiş kaynak yoğunluğu tanımlanırsa,

$$\check{\mathcal{J}} = -\varrho + i\overleftrightarrow{\mathcal{J}} - \tilde{\varrho} + \vec{\mathcal{J}} = -\varrho_e \boldsymbol{e_0} + i\mathcal{J}_x^m \boldsymbol{e_1} + i\mathcal{J}_y^m \boldsymbol{e_2} + i\mathcal{J}_z^m \boldsymbol{e_3}$$

$$-i\varrho_m \boldsymbol{a_0} + \mathcal{J}_x^e \boldsymbol{a_1} + \mathcal{J}_y^e \boldsymbol{a_2} + \mathcal{J}_z^e \boldsymbol{a_3} \qquad (3.25)$$

(3.24) denklemi aşağıdaki gibi kompakt bir formda ifade edilebilir:

$$\Box \check{F} = \check{\mathcal{J}}. \qquad (3.26)$$

Öte yandan (3.26) denklemi skaler, psedovektör, psedoskaler ve vektör bileşenlerine ayrılırsa oktonik formdaki Maxwell-Dirac denklemleri elde edilir:

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}\right) = -\varrho \qquad \text{(skaler terim)} \qquad (3.27a)$$

$$i\frac{\partial \overleftrightarrow{H}_{\mathrm{g}}}{\partial t} + \left[\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}\right] = i\overleftrightarrow{\mathcal{J}} \qquad \text{(psedovektör terim)} \qquad (3.27b)$$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}\right) = -\tilde{\varrho} \qquad \text{(psedoskaler terim)} \qquad (3.27c)$$

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_e}{\partial t} + i\left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}\right] = \vec{\mathcal{J}} \qquad \text{(vektör terim)} \qquad (3.27d)$$

Görüldüğü üzere (3.26) denkleminde verilen kompakt formülasyon, oktonlar sayesinde monopol terimleri içeren GEM'nın genelleştirilmiş denklemlerinin tek bir eşitlikle özetlenebileceğini ispat etmektedir (Demir, Tanışlı, Tolan, 2013, s.1-11).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. KÜTLELİ ALAN DENKLEMLERİ

Elektromanyetizmaya benzer bir formatta gravitasyonel alan denklemlerinin açıklanması ile ilişkili düşünce, Coulomb'un elektrik kanunu ile Newton'un kütle çekimi kanunu arasındaki biçimsel bir benzerlikten gelmektedir. Önce Maxwell [45], sonrasında Heaviside [46] elektromanyetik denklemlere benzer bir formatta kütle çekimi teorisinin formülleştirilebileceği ihtimalini fark etmişlerdir. Literatürde, "gravitoelektromanyetizma (GEM)" terimi, bahsi geçen kanunların arasındaki yakın biçimsel benzerliği belirtmek için kullanılmaktadır. Bu noktada Newton'un kütle çekimi kanunundaki alan gravitoelektrik (GE) alan olarak yorumlanabilir. Benzer şekilde, tıpkı hareket halindeki bir yükün manyetik bir alan oluşturduğu gibi hareket halindeki bir madde (kütle akımı) gravitomanyetik (GM) alan oluşturur [47-49]. 1931'de Dirac [50] elektrik yükün kuantumlamasını açıklayabilmek için, manyetik tek yükler (monopoller) taşıyan partiküllerin olduğunu varsaymıştır. Bu teorinin bir sonucu olarak, elektrik ve manyetik alanlar arasındaki biçimsel simetri inşa edilmiştir. Zwanziger [51] ve Schwinger [52] hem elektrik hem de manyetik yükler taşıyan partiküllerin (dyonlar) varlığı ihtimali üzerine tartıştılar.

4.1. Oktonik Maxwell-Dirac-Proca Tipi Kütleli Alanlar

Okton formatindaki diferansiyel operatör, (1.20a) ve eşleniği (1.20b) denklemleriyle tanımlanmıştır [53]. Bu denklemlerden yararlanarak, oktonik d'Alembertian operatörü $\boxdot$ simgesi ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boxdot = \overline{\square} = \overline{\square}\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{4.1}$$

Elektromanyetizmadaki manyetik monopollerin (yükler) ve gravitasyonel etkileşimde Heavisidiyen (gravitomanyetik) monopolerin (kütleler) varlığı eş zamanlı olarak değerlendirildiğinde, genelleştirilmiş oktonik potansiyel şu şekilde tanımlanabilir [54]:

$$\breve{\Psi} = \varphi + \overleftrightarrow{A} - \tilde{\phi} - \vec{A} = (\varphi_e + i\varphi_{\mathrm{g}}) + (\overleftrightarrow{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}} - i\overleftrightarrow{A}_e) - (\tilde{\phi}_{\mathrm{g}} - i\tilde{\phi}_e) - (\vec{A}_e + i\vec{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}})$$

$$= (\varphi_e + i\varphi_{\mathrm{g}})\boldsymbol{e_0} + (\vec{\mathcal{A}}_x^m - i\vec{A}_x^m)\boldsymbol{e_1} + (\vec{\mathcal{A}}_y^m - i\vec{A}_y^m)\boldsymbol{e_2} + (\vec{\mathcal{A}}_z^m - i\vec{A}_z^m)\boldsymbol{e_3}$$

$$-(\tilde{\phi}_{\mathrm{g}} - i\tilde{\phi}_e)\boldsymbol{a_0} - (\vec{A}_x^m - i\vec{\mathcal{A}}_x^m)\boldsymbol{a_1} - (\vec{A}_y^m - i\vec{\mathcal{A}}_y^m)\boldsymbol{a_2} - (\vec{A}_z^m - i\vec{\mathcal{A}}_z^m)\boldsymbol{a_3} \qquad (4.2)$$

Burada;

$$\breve{A}_e = \varphi_e - i\overleftrightarrow{A}_e + i\tilde{\phi}_e - \vec{A}_e = \varphi_e\boldsymbol{e_0} - i\vec{A}_x^m\boldsymbol{e_1} - i\vec{A}_y^m\boldsymbol{e_2} - i\vec{A}_z^m\boldsymbol{e_3}$$

$$+i\phi_e\boldsymbol{a_0} - \vec{A}_x^e\boldsymbol{a_1} - \vec{A}_y^e\boldsymbol{a_2} - \vec{A}_z^e\boldsymbol{a_3}\,, \qquad (4.3)$$

elektromanyetizmanın genelleştirilmiş oktonik potansiyeli ve

$$\breve{A}_e = i\varphi_{\mathrm{g}} + i\overleftrightarrow{A}_{\mathrm{g}} - i\tilde{\phi}_{\mathrm{g}} - \vec{A}_{\mathrm{g}} = i\varphi_{\mathrm{g}}\boldsymbol{e_0} + \vec{A}_x^m\boldsymbol{e_1} + \vec{A}_y^m\boldsymbol{e_2} + \vec{A}_z^m\boldsymbol{e_3}$$

$$-i\phi_{\mathrm{g}}\boldsymbol{a_0} - i\vec{A}_x^e\boldsymbol{a_1} - i\vec{A}_y^e\boldsymbol{a_2} - i\vec{A}_z^e\boldsymbol{a_3} \qquad (4.4)$$

lineer kütle çekiminin genelleştirilmiş oktonik potansiyelidir. Ayrıca,

$\varphi_e = \varphi_e\boldsymbol{e_0}$, $\varphi_{\mathrm{g}} = \varphi_{\mathrm{g}}\boldsymbol{e_0}$ ve $\vec{A}_e = \vec{A}_x^e\boldsymbol{a_1} - \vec{A}_y^e\boldsymbol{a_2} - \vec{A}_z^e\boldsymbol{a_3}$, $\vec{\mathcal{A}}_e = \vec{\mathcal{A}}_x^e\boldsymbol{a_1} - \vec{\mathcal{A}}_y^e\boldsymbol{a_2} - \vec{\mathcal{A}}_z^e\boldsymbol{a_3}$

olup elektromanyetik (*e* indisi) ve gravitasyonel (g indisi ve elyazısı tipi) alanların skaler ve elektrik vektör potansiyellerini sırasıyla temsil etmektedir.

Diğer terimler, $\tilde{\phi}_e = \phi_e\boldsymbol{a_0}$, $\tilde{\phi}_{\mathrm{g}} = \phi_{\mathrm{g}}\boldsymbol{a_0}$ ve $\overleftrightarrow{A}_e = \vec{A}_x^m\boldsymbol{e_1} + \vec{A}_y^m\boldsymbol{e_2} + \vec{A}_z^m\boldsymbol{e_3}$, $\overleftrightarrow{\mathcal{A}}_g = \vec{\mathcal{A}}_x^m\boldsymbol{e_1} - \vec{\mathcal{A}}_y^m\boldsymbol{e_2} - \vec{\mathcal{A}}_z^m\boldsymbol{e_3}$ psedoskaler ve psedovektör manyetik monopol ve GM monopol (kütle) terimleriyle ilişkilidir. Bu tanımların başka bir sonucu olarak, genelleştirilmiş oktonik elektrik potansiyel şu şekilde verilecektir:

$$\breve{\Psi}_{\mathrm{e}} = \varphi - \vec{A} = (\varphi_e + i\varphi_{\mathrm{g}}) - (\vec{A}_e + i\vec{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}})$$

$$= (\varphi_e + i\varphi_{\mathrm{g}})\boldsymbol{e_0} - (A_x^e + i\mathcal{A}_x^e)\boldsymbol{a_1} - (A_y^e + i\mathcal{A}_y^e)\boldsymbol{a_2} - (A_z^e + i\mathcal{A}_z^e)\boldsymbol{a_3}\,. \qquad (4.5)$$

Öte yandan $\overline{\Box}$ operasyonunun genelleştirilmiş potansiyel $\breve{\Psi}$ üzerindeki etkisi,

$$\overline{\Box}\breve{\Psi} = \left\{\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} - \vec{\nabla}\right\}\{\varphi + \overleftrightarrow{A} - \tilde{\phi} - \vec{A}\}$$

$$= \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\right\} - \vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - [\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{A}]$$

$$-\left\{\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{A}\right)\right\} + \vec{\nabla}\tilde{\phi} + \frac{\partial \overleftrightarrow{A}}{\partial t} + \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right] \tag{4.6}$$

şeklinde verilir. Diğer yandan, elektromanyetizma [55] ve lineer gravitasyon [53] ile ilgili bilinen dört Lorenz değişmezine göre, parantez içindeki skaler ve psedoskaler terimler yok olur,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = 0 \tag{4.7a}$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{A}\right) = 0\,. \tag{4.7b}$$

Eşitlik (4.6)'daki vektör ve psedovektör terimler

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{A}\right], \tag{4.8}$$

$$\overleftrightarrow{H} = -\vec{\nabla}\tilde{\phi} - \frac{\partial \overleftrightarrow{A}}{\partial t} - \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right]. \tag{4.9}$$

elektromanyetizma ve lineer gravitasyonun okton terimleriyle ifade edilen genelleştirilmiş alanlarıdır [54]. Burada $\vec{E}$ ve $\overleftrightarrow{H}$ sırasıyla, gravi-elektromanyetizmin genelleştirilmiş elektrik ve manyetik alanları olarak da adlandırılabilir. Bu iki oktonik ifade, kompleks elemanlar içerdiğinden, dört farklı reel bileşenli denklem sistemi haline dönüştürülebilirler:

$$\vec{E}_e = -\vec{\nabla}\varphi_e - \frac{\partial \overleftrightarrow{A}_e}{\partial t} + i\left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{A}_e\right], \tag{4.10}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}} = -\vec{\nabla}\varphi_{\mathrm{g}} - \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}}}{\partial t} + i\left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}}\right], \tag{4.11}$$

$$\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}} = -\vec{\nabla}\tilde{\phi}_{\mathrm{g}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}}}{\partial t} - i\left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}}\right], \tag{4.12}$$

$$\overleftrightarrow{H}_{e} = -\vec{\nabla}\tilde{\phi}_{\mathrm{e}} - \frac{\partial \vec{A}_{e}}{\partial t} - i\left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{A}_{e}\right]. \tag{4.13}$$

Aslında, $\vec{E}_e$ ve $\overleftrightarrow{H}_e$ elektromanyetizmanın elektrik ve manyetik alanlarına, $\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}$ ve $\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}$ sırasıyla lineer gravitasyonun GE ve GM alanlarına işaret eder. (4.6) denklemi kompakt bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\overline{\Box}\breve{\Psi} = \breve{\mathrm{F}}. \tag{4.14}$$

Burada $\breve{F}$, oktonik formdaki genelleştirilmiş alandır:

$$\breve{F} = \vec{E} - \overleftrightarrow{H} = \left(\vec{E}_e + i\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}\right) - \left(\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}} - i\overleftrightarrow{H}_e\right) = \left(\vec{E}_x + i\vec{\mathcal{E}}_x\right)\boldsymbol{a_1} + \left(\vec{E}_y + i\vec{\mathcal{E}}_y\right)\boldsymbol{a_2}$$

$$+\left(\vec{E}_z + i\vec{\mathcal{E}}_z\right)\boldsymbol{a_3} - \left(\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_x - i\overleftrightarrow{H}_x\right)\boldsymbol{e_1} - \left(\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{y}} - i\overleftrightarrow{H}_y\right)\boldsymbol{e_2} - \left(\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{z}} - i\overleftrightarrow{H}_z\right)\boldsymbol{e_3}\,. \tag{4.15}$$

Öte yandan, okton formunda genelleştirilmiş kaynak yoğunluğu;

$$\breve{J} = \rho - \overleftrightarrow{J} + \tilde{\rho} - \vec{J} = \left(\varrho_e - i\varrho_{\mathrm{g}}\right) - \left(\overleftrightarrow{\mathcal{J}}_{\mathrm{g}} + i\overleftrightarrow{J}_e\right) + \left(\tilde{\varrho}_{\mathrm{g}} - i\tilde{\varrho}_e\right) - \left(\vec{J}_e + i\vec{\mathcal{J}}_{\mathrm{g}}\right)$$

$$= \left(\varrho_e - i\varrho_g\right)\boldsymbol{e_0} - \left(\vec{\mathcal{J}}_x^m + i\vec{J}_x^m\right)\boldsymbol{e_1} - \left(\vec{\mathcal{J}}_y^m + i\vec{J}_y^m\right)\boldsymbol{e_2} - \left(\vec{\mathcal{J}}_z^m + iJ_z^m\right)\boldsymbol{e_3}$$

$$+\left(\rho_{\mathrm{g}} + i\rho_e\right)\boldsymbol{a_0} - \left(\vec{J}_x^e - i\vec{\mathcal{J}}_x^e\right)\boldsymbol{a_1} - \left(\vec{J}_y^e - i\vec{\mathcal{J}}_y^e\right)\boldsymbol{a_2} - \left(\vec{J}_z^e - i\vec{\mathcal{J}}_z^e\right)\boldsymbol{a_3} \tag{4.16}$$

ile verilir. Burada; ϱ_e ve ϱ_{g} sırasıyla elektrik ve GE yük (kütle) yoğunlukları, ρ_e manyetik yük ve ρ_{g} GM yük (kütle) yoğunluklarıdır. Benzer şekilde $\vec{J}_{\mathrm{e}} = J_x^e\boldsymbol{a_1} + J_y^e\boldsymbol{a_2} + J_z^e\boldsymbol{a_3}$ elektrik akımı yoğunluğudur, $\vec{\mathcal{J}}_{\mathrm{g}} = \mathcal{J}_x^e\boldsymbol{a_1} + \mathcal{J}_y^e\boldsymbol{a_2} + \mathcal{J}_z^e\boldsymbol{a_3}$ GE kütle akımı yoğunluğu, $\overleftrightarrow{\mathrm{J}}_e = \mathrm{J}_x^m\boldsymbol{e_1} + \mathrm{J}_y^m\boldsymbol{e_2} + \mathrm{J}_z^m\boldsymbol{e_3}$ ve $\overleftrightarrow{\mathcal{J}}_{\mathrm{g}} = \mathcal{J}_x^m\boldsymbol{e_1} + \mathcal{J}_y^m\boldsymbol{e_2} + \mathcal{J}_z^m\boldsymbol{e_3}$ ise sırasıyla manyetik akım ve GM kütle akımı yoğunluklardır.

Dört boyutlu diferansiyel operatörü □, $\check{F}$ üzerine uygulanırsa, aşağıdaki ifadeye ulaşılabilir:

$$\Box\check{F} = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) + \left\{\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - [\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}]\right\}$$

$$-\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right) - \left\{\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t} - [\vec{\nabla}\times\vec{E}]\right\}$$

$$= \rho - \overleftrightarrow{J} + \tilde{\rho} - \vec{J} - \lambda_\gamma^2\left(\varphi - \vec{A}\right). \qquad (4.17)$$

Burada λ_γ, dyonlar ve gravito-dyon'ların hareketsiz kütlesi ile bağlantılı olan Compton dalga boyunun tersini temsil eder. Dahası, tanım (4.16) ışığında, (4.17) denklemi aşağıdaki formda yeniden yazılabilir:

$$\Box\check{F} + \lambda_\gamma^2\check{\Psi}_e = \check{J}. \qquad (4.18)$$

Bu ifade, Maxwell-Dirac-Proca gravi-elektromanyetizma denklemlerine benzer formattadır. İfadedeki skaler, vektör, psedoskaler ve psedovektör terimleri birbirinden ayrılarak gravi-elektromanyetizmanın Maxwell-Dirac-Proca denklemlerinin genelleştirilmiş biçimleri şu şekilde elde edilebilir:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = \varrho - \lambda_\gamma^2\varphi\,, \qquad \text{(skaler terim)} \qquad (4.19a)$$

$$-\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t} + \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right] = -\overleftrightarrow{J}, \qquad \text{(psedovektör terim)} \qquad (4.19b)$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right) = -\tilde{\varrho}\,, \qquad \text{(psedoskaler terim)} \qquad (4.19c)$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\right] = -\vec{J} - \lambda_\gamma^2\vec{A}\,. \qquad \text{(vektör terim)} \qquad (4.19d)$$

Aslında, (4.18)'deki kapalı ifade, aşağıdaki gibi iki küme denklemi içerir. Bunlardan birisi elektromanyetizmanın Maxwell-Dirac-Proca denklemleri;

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)=\varrho_e-\lambda_\gamma^2\varphi_e\,, \qquad \text{(skaler terim)} \qquad (4.20a)$$

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]=-i\frac{\partial\overleftrightarrow{H}_e}{\partial t}-i\overleftrightarrow{J}_e, \qquad \text{(psedovector terim)} \qquad (4.20b)$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}_e\right)=\tilde{\varrho}_e\,, \qquad \text{(psedoskaler terim)} \qquad (4.20c)$$

$$i\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}_e\right]=-\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}-\vec{J}_e+\lambda_\gamma^2\vec{A}_e\,. \qquad \text{(vektör terim)} \qquad (4.20d)$$

olup diğeri. Lineer gravitasyonun Maxwell-Dirac-Proca tipi denklemleridir:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}\right)=-\varrho_{\mathrm{g}}-\lambda_\gamma^2\varphi_{\mathrm{g}}\,, \qquad \text{(skaler terim)} \qquad (4.21a)$$

$$i\left[\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}\right]=\frac{\partial\overleftrightarrow{H}_{\mathrm{g}}}{\partial t}-\overleftrightarrow{\mathcal{J}}_{\mathrm{g}}\,, \qquad \text{(psedovektör terim)} \qquad (4.21b)$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}\right)=-\tilde{\varrho}_{\mathrm{g}}\,, \qquad \text{(psedoskaler terim)} \qquad (4.21c)$$

$$\left[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}\right]=i\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}_e}{\partial t}-i\vec{\mathcal{J}}_{\mathrm{g}}-\lambda_\gamma^2\vec{A}_{\mathrm{g}}\,. \qquad \text{(vektör terim)} \qquad (4.21d)$$

Görüldüğü gibi (4.18) ifadesi, oktonik formalizmin hem elektromanyetik hem de kütle çekim alanları için Maxwell-Dirac-Proca denklemlerini doğru ve şık bir biçimde tanımlayabildiğini ispatlar. Ayrıca, (4.18) ifadesinin daha önce türetilen oktonik denklemlere benzer bir şekle sahip olduğu da görülmektedir [53,55].

4.2. Kütleli Alanların Genelleştirilmiş Dalga Denklemleri

Oktonik diferansiyel operatörü $\square$, (4.14) denklemine tekrar uygulanarak

$$\square\square\breve{\Psi}=\square\breve{\mathrm{F}} \qquad (4.22)$$

ifadesi elde edilir. Buradan daha önce elde edilen (4.1) ve (4.18)'deki tanımları kullanarak,

$$\boxdot\breve{\Psi}+\lambda_\gamma^2\breve{\Psi}_e=\breve{J} \quad (4.23)$$

bağıntısına ulaşılır. Bu eşitlik aslında kütleli gravi-elektromanyetizmanın genelleştirilmiş dalga denkleminin kısa formudur. Bu ifade daha açık şekilde ifade edilirse

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\right\}\{\varphi+\overleftrightarrow{A}-\tilde{\phi}-\vec{A}\}+\lambda_\gamma^2\left(\varphi-\vec{A}\right)=(\rho-\overleftrightarrow{J}+\tilde{\rho}-\vec{J}) \quad (4.24)$$

aşağıdaki alt denklemleri içerdiği görülür:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\varphi+\lambda_\gamma^2\varphi=\rho\,, \quad (4.25a)$$

$$\frac{\partial^2\overleftrightarrow{A}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\overleftrightarrow{A}=-\overleftrightarrow{J}, \quad (4.25b)$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\tilde{\phi}=-\tilde{\rho}\,, \quad (4.25c)$$

$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\vec{A}+\lambda_\gamma^2\vec{A}=\vec{J}\,. \quad (4.25d)$$

Ayrıca, bu denklemlerin bileşenleri kompleks sayılar olması nedeniyle, (4.23) denklemindeki kapalı form, elektromanyetizma ve lineer gravitasyon ile ilgili sekiz dalga denklemini ifade eder. Bunlardan aşağıda verilen dört tanesi;

$$\frac{\partial^2\varphi_e}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\varphi_e+\lambda_\gamma^2\varphi_e=\varrho_e\,, \quad (4.26a)$$

$$\frac{\partial^2\overleftrightarrow{A}_e}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\overleftrightarrow{A}_e=-\overleftrightarrow{J}_e\,, \quad (4.26b)$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}_e}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\tilde{\phi}_e=-\tilde{\varrho}_e\,, \quad (4.26c)$$

$$\frac{\partial^2\overleftrightarrow{A}_e}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\overleftrightarrow{A}_e+\lambda_\gamma^2\overleftrightarrow{A}_e=\overleftrightarrow{J}_e \quad (4.26d)$$

klasik elektromanyetizma ile ilgili olup kalanlar ise lineer gravitasyonla ilgili denklemleri verir:

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\mathrm{g}}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \varphi_{\mathrm{g}} + \lambda_\gamma^2 \varphi_{\mathrm{g}} = -\varrho_{\mathrm{g}}\,, \tag{4.26e}$$

$$\frac{\partial^2 \overleftrightarrow{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \overleftrightarrow{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}} = -\overleftrightarrow{\mathcal{J}}_{\mathrm{g}}\,, \tag{4.26f}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_{\mathrm{g}}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \tilde{\phi}_{\mathrm{g}} = -\tilde{\varrho}_{\mathrm{g}}\,, \tag{4.26g}$$

$$\frac{\partial^2 \overleftrightarrow{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \overleftrightarrow{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}} + \lambda_\gamma^2 \overleftrightarrow{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}} = -\overleftrightarrow{\mathcal{J}}_{\mathrm{g}}. \tag{4.26h}$$

Diğer taraftan manyetik monopol terimleri ve ayrıca genelleştirilmiş potansiyel $\breve{\Psi}$'nin $\overleftrightarrow{A}$ ve $\tilde{\phi}$ bileşenleri hariç tutulursa, $\overleftrightarrow{J}$ ve $\tilde{\rho}$ terimleri $\breve{J}$ genelleştirilmiş kaynak yoğunluğu ifadesinde yok olur. Bu durumda (4.23) ifadesi, Maxwell-Proca denklemleri benzeri gravi-elektromanyetizmanın dalga denklemleri haline gelir:

$$[\boxdot + \lambda_\gamma^2]\breve{\Psi}_e = \breve{J}_e. \tag{4.27}$$

Burada $\breve{J}_e$ şu şekilde tanımlanır:

$$\breve{J}_e = \rho - J = (\varrho_e - i\varrho_g) - (J_e + i\mathcal{J}_g)$$

$$= (\varrho_e - i\varrho_g)\boldsymbol{e_0} - (J_x^e - i\mathcal{J}_x^e)\boldsymbol{a_1} - (J_y^e - i\mathcal{J}_y^e)\boldsymbol{a_2} - (J_z^e - i\mathcal{J}_z^e)\boldsymbol{a_3}\,. \tag{4.28}$$

Benzer şekilde, bundan sonra (4.18) ifadesi, oktonik Maxwell-Proca denkleminin kompakt halini de temsil eder:

$$\breve{\mathrm{F}} + \lambda_\gamma^2 \breve{\Psi}_e = \breve{J}_e\,. \tag{4.29}$$

Bu ifadede skaler, vektör, psedoskaler ve psedovektör terimler birbirinden ayrılırsa daha açık formdaki aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \varrho - \lambda_\gamma^2 \varphi\,, \qquad \text{(skaler terim)} \tag{4.30a}$$

$$-\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right] = 0\,, \qquad \text{(psedovektör terim)} \tag{4.30b}$$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}\right) = 0\,, \qquad \text{(psedoskaler terim)} \tag{4.30c}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \left[\vec{\nabla} \times \vec{H}\right] = -\vec{J} + \lambda_\gamma^2 \vec{A}\,. \qquad \text{(vektör terim)} \tag{4.30d}$$

Dahası, $\check{\mathrm{J}}_e = 0$ olması durumunda (4.29) denklemi için,

$$\Box \check{\mathrm{F}} + \lambda_\gamma^2 \check{\Psi}_e = 0 \tag{4.31}$$

yazılabilir. Elde edilen bu eşitlik ise gravi-elektromanyetizma için genelleştirilmiş Klein-Gordon denklemini ifade eder.

4.3. Kütleli Alanlar İçin Enerjinin Korunumu

Okton cebiri gravi-elektromanyetizmaya ilişkin ifadelerin hep birlikte sunulmasını ve aynı anda işlem yapılmasını sağlar. Kütleli alanlar için genelleştirilmiş Poynting teoremini türetmek için,

$$\begin{aligned}
\check{F}^{-} &= -\vec{E} - \vec{H} = -\left(\vec{E}_e + i\vec{\mathcal{E}}_g\right) - \left(\vec{\mathcal{H}}_g - i\vec{H}_e\right) \\
&= -\left(\vec{E}_x + i\vec{\mathcal{E}}_x\right)\boldsymbol{a_1} - \left(\vec{E}_y + i\vec{\mathcal{E}}_y\right)\boldsymbol{a_2} - \left(\vec{E}_z + i\vec{\mathcal{E}}_z\right)\boldsymbol{a_3} \\
&\quad -\left(\vec{\mathcal{H}}_x - i\vec{H}_x\right)\boldsymbol{e_1} - \left(\vec{\mathcal{H}}_y - i\vec{H}_y\right)\boldsymbol{e_2} - \left(\vec{\mathcal{H}}_z - i\vec{H}_z\right)\boldsymbol{e_3}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

oktonu tanımlanıp (4.18) eşitliği soldan $\check{F}^{-}$ ile çarpılarak aşağıdaki denklem yazılabilir [55]:

$$\check{F}^{-}\left(\check{\mathrm{F}} + \lambda_\gamma^2 \check{\Psi}_e\right) = \check{F}^{-}\check{\mathrm{J}}\,. \tag{4.33}$$

Aslında, bu denklem aşağıdaki matematiksel bağıntıları ifade eder:

$$\{-\vec{E}-\overleftrightarrow{H}\}\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}-\frac{\partial \overleftrightarrow{H}}{\partial x}+\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\big)+\big[\vec{\nabla}\times\vec{E}\big]-\big(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\big)-[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}]$$

$$+\ -\vec{E}-\overleftrightarrow{H}\big\}\big\{\lambda_{\gamma}^{2}(\varphi-\vec{A})\big\}=-\rho\vec{E}-\rho\overleftrightarrow{H}-\tilde{\rho}\vec{E}-\tilde{\rho}\overleftrightarrow{H}+\big(\vec{E}\cdot\overleftrightarrow{J}\big)+\big(\vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$+\ \vec{E}\times\overleftrightarrow{J}\big]+\big[\vec{E}\times\vec{J}\big]+\big(\overleftrightarrow{H}\cdot\overleftrightarrow{J}\big)+\big(\overleftrightarrow{H}\cdot J\big)+\big[\overleftrightarrow{H}\times\overleftrightarrow{J}\big]+\big[\overleftrightarrow{H}\times J$$

ve

$$-\Bigg(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ -\Bigg[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ +\ \vec{E}\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\ +\ \vec{E}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\ -\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})$$

$$-\big(\vec{E}\cdot[\nabla\times\vec{E}]\big)-\Big[\vec{E}\times[\nabla\times\vec{E}]\Big]+\vec{E}\big(\nabla\cdot\overleftrightarrow{H}\big)+(\vec{E}\cdot[\nabla\times\overleftrightarrow{H}])$$

$$+\ \vec{E}\times[\nabla\times\overleftrightarrow{H}]\Big]-\Bigg(\overleftrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ -\Bigg[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ +\ \overleftrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\ +\ \overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}$$

$$-\overleftrightarrow{H}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\big)-\big(\overleftrightarrow{H}\cdot[\nabla\times\vec{E}]\big)-\Big[\overleftrightarrow{H}\times[\nabla\times\vec{E}]\Big]+\overleftrightarrow{H}(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H})$$

$$+\ \overleftrightarrow{H}\cdot[\nabla\times\overleftrightarrow{H}]\big)+\Big[\overleftrightarrow{H}\times[\nabla\times\overleftrightarrow{H}]\Big]-\lambda_{\gamma}^{2}\varphi\vec{E}-\lambda_{\gamma}^{2}\varphi\overleftrightarrow{H}+\lambda_{\gamma}^{2}(\vec{E}\cdot\vec{A})$$

$$+\lambda_{\gamma}^{2}\big(\overleftrightarrow{H}\cdot\vec{A}\big)+\lambda_{\gamma}^{2}\big[\vec{E}\times\vec{A}\big]+\lambda_{\gamma}^{2}\big[\overleftrightarrow{H}\times\vec{A}\big]=-\rho\vec{E}-\rho\overleftrightarrow{H}-\tilde{\rho}\vec{E}-\tilde{\rho}\overleftrightarrow{H}$$

$$+\ \vec{E}\cdot\overleftrightarrow{J}\big)+\big(\vec{E}\cdot\vec{J}\big)+\big[\vec{E}\times\overleftrightarrow{J}\big]+\big[\vec{E}\times\vec{J}\big]+\big(\overleftrightarrow{H}\cdot\overleftrightarrow{J}\big)+(\overleftrightarrow{H}\cdot\vec{J})$$

$$+\ \overleftrightarrow{H}\times\overleftrightarrow{J}\big]+\big[\overleftrightarrow{H}\times\vec{J}\big]. \qquad (4.34)$$

Eğer (4.34) eşitliği skaler, vektör, psedoskaler ve psedovektör bileşenlerine ayrılırsa, dört farklı matematiksel ifade elde edilir. (4.34) denkleminin skaler kısmı

$$-\Bigg(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ +\ \overleftrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\ +\ \vec{E}\cdot[\nabla\times\overleftrightarrow{H}]\big)-\big(\overleftrightarrow{H}\cdot[\nabla\times\vec{E}]\big)+\lambda_{\gamma}^{2}(\vec{E}\cdot\vec{A})$$

$$=\big(\vec{E}\cdot\vec{J}\big)+\big(\overleftrightarrow{H}\cdot\overleftrightarrow{J}\big) \qquad (4.35)$$

şeklinde yazılır. Eğer aşağıdaki denklemler

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E} \cdot \vec{E}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^2 \,, \tag{4.36}$$

$$\overleftrightarrow{H} \cdot \frac{\partial \overleftrightarrow{H}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overleftrightarrow{H} \cdot \overleftrightarrow{H}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\overleftrightarrow{H}^2 \,, \tag{4.37}$$

ve

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \overleftrightarrow{H}\right]\right) = \left(\overleftrightarrow{H} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right]\right) - \left(\vec{E} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{H}\right]\right) \tag{4.38}$$

dikkate alınırsa (4.35) eşitliği aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\vec{E}^2 - \overleftrightarrow{H}^2}{2}\right\} + \left(\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \overleftrightarrow{H}\right]\right) + \left(\vec{E} \cdot \mathrm{J}\right) + \left(\overleftrightarrow{H} \cdot \overleftrightarrow{\mathrm{J}}\right) - \lambda_\gamma^2\left(\vec{E} \cdot A\right) = 0 \,.$$

Diğer yandan (4.8) denklemi kullanılarak, aşağıdaki ifade de yazılabilir,

$$\left(\vec{E} \cdot \vec{A}\right) = \left\{-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - [\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{A}]\right\} \cdot \vec{A}$$

$$= -\left(\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{A}\right) - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{A}\right) - \left(\left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{A}\right] \cdot \vec{A}\right) . \tag{4.39}$$

Burada son terim $\left(\left[\vec{\nabla} \times \overleftrightarrow{A}\right] \cdot \vec{A}\right)$ sıfıra eşit olmalıdır. Benzer şekilde ilk terim,

$$\left(\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla} \cdot \varphi\vec{A}\right) - \varphi\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) \tag{4.40}$$

şeklinde yazılabilir. (4.7a) 'da tanımlanan Lorenz koşulu kullanılarak,

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{4.41}$$

yazılabilir. (4.40) denklemi

$$\left(\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla} \cdot \varphi\vec{A}\right) + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{4.42}$$

biçimine dönüşür. Böylece, (4.39) denklemi,

$$\left(\vec{E} \cdot \vec{A}\right) = -\left(\vec{\nabla} \cdot \varphi\vec{A}\right) - \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{A}\right). \tag{4.43}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Ayrıca,

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} \cdot \vec{A}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}^2\,, \tag{4.44}$$

$$\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t}\,, \tag{4.45}$$

özdeşliklerinin yardımıyla bu denklemin son hali için

$$\left(\vec{E} \cdot \vec{A}\right) = -\left(\vec{\nabla} \cdot \varphi\vec{A}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}^2 \tag{4.46}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde, yeni türetilen denklemler kullanılarak, (4.34) eşitliğinin skaler kısmı için

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\vec{E}^2 - \overleftrightarrow{H}^2}{2}\right\} + \left(\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \overleftrightarrow{H}\right]\right) + \left(\vec{E} \cdot \vec{J}\right) + \left(\overleftrightarrow{H} \cdot \overleftrightarrow{J}\right)$$

$$+\lambda_\gamma^2\left\{\left(\vec{\nabla} \cdot \varphi\vec{A}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}^2\right\} = 0\,, \tag{4.47}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\vec{E}^2 - \overleftrightarrow{H}^2 + \lambda_\gamma^2(\varphi^2 + \vec{A}^2)}{2}\right\} + (\vec{\nabla} \cdot \left[E \times \overleftrightarrow{H}\right] + \lambda_\gamma^2\varphi\vec{A}))$$

$$+\left(\vec{E} \cdot \vec{J}\right) + \left(\overleftrightarrow{H} \cdot \overleftrightarrow{J}\right) = 0\,. \tag{4.48}$$

bağıntısı yazılabilir. Eğer oktonik formdaki genelleştirilmiş kütleli enerji yoğunluğu

$$\vec{U} = \frac{\vec{E}^2 - \overleftrightarrow{H}^2 + \lambda_\gamma^2\left(\varphi^2 + \vec{A}^2\right)}{2} \tag{4.49}$$

ve genelleştirilmiş oktonik Poynting vektörü

$$\vec{S} = \left[\vec{E} \times \overleftrightarrow{H}\right] + \lambda_\gamma^2 \varphi \vec{A} \tag{4.50}$$

şeklinde tanımlanırsa (4.48) denklemi iyi bilinen Poynting teoreminin oktonik ifadesine dönüşür:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{S}\right) + \left(\vec{E} \cdot \vec{\mathrm{J}}\right) + \left(\overleftrightarrow{H} \cdot \overleftrightarrow{\mathrm{J}}\right) = 0\,. \tag{4.51}$$

Eğer bu denklem reel ve kompleks bileşenlere ayrılırsa, denklemin reel kısmı

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\vec{E}_e^2 + \overleftrightarrow{H}_e^2 - \vec{\mathcal{E}}_\mathrm{g}^2 - \overleftrightarrow{\mathcal{H}}_\mathrm{g}^2 + \lambda_\gamma^2(\varphi_e^2 + \vec{A}_e^2 - \varphi_\mathrm{g}^2 - \vec{\mathcal{A}}_\mathrm{g}^2)}{2}\right\} - i(\vec{\nabla} \cdot [\vec{E}_e \times \overleftrightarrow{H}_e])$$

$$+i\left(\nabla \cdot \left[\vec{\mathcal{E}}_g \times \overleftrightarrow{\mathcal{H}}_g\right]\right) + \lambda_\gamma^2\left(\varphi_e \vec{A}_e - \varphi_g \vec{\mathcal{A}}_g\right) + \left(\vec{E}_e \cdot \vec{J}_e\right) + \left(\vec{\mathcal{E}}_g \cdot \vec{\mathcal{J}}_g\right) + (\overleftrightarrow{H}_e \cdot \overleftrightarrow{J}_e)$$

$$+\left(\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_\mathrm{g} \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{J}}_\mathrm{g}\right) = 0\,. \tag{4.52}$$

ile verilecektir. Bu ifade, Mironov ve Mironov [56]'un on altı boyutlu sedeniyonlar aracılığıyla türettiği “gravi-elektromanyetizma için genelleştirilmiş kütlesiz Poynting denklemi" ile uyuşmaktadır. Benzer şekilde,

$$\vec{U}_G = \left\{\frac{\vec{E}_e^2 + \overleftrightarrow{H}_e^2 - \vec{\mathcal{E}}_\mathrm{g}^2 - \overleftrightarrow{\mathcal{H}}_\mathrm{g}^2 + \lambda_\gamma^2\left(\varphi_e^2 + \vec{A}_e^2 - \varphi_\mathrm{g}^2 - \vec{\mathcal{A}}_\mathrm{g}^2\right)}{2}\right\} \tag{4.53}$$

terimi oktonik kütleli enerji yoğunluğuna karşı gelirken

$$\vec{S}_G = -i\left\{\left[\vec{E}_e \times \overleftrightarrow{H}_e\right] - \left[\vec{\mathcal{E}}_\mathrm{g} \times \overleftrightarrow{\mathcal{H}}_\mathrm{g}\right]\right\} + \lambda_\gamma^2\left(\varphi_e \vec{A}_e - \varphi_\mathrm{g} \vec{\mathcal{A}}_\mathrm{g}\right) \tag{4.54}$$

ise Gravi- elektromanyetizmanın Poynting vektörünü temsil eder. Diğer yandan, (4.34) denkleminin vektörel kısmı

$$\left[\vec{E}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]-\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]-\vec{E}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\big)+\overleftrightarrow{H}\big(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\big)-[\vec{E}\times[\vec{\nabla}\times\vec{E}]]$$

$$+\left[\overleftrightarrow{H}\times[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}]\right]-\lambda_\gamma^2\varphi\vec{E}+\lambda_\gamma^2\big[\overleftrightarrow{H}\times\vec{A}\big]=-\rho\vec{E}-\tilde{\rho}\overleftrightarrow{H}+\big[\vec{E}\times\vec{J}\big]+\big[\overleftrightarrow{H}\times\vec{J}\big] \qquad (4.55)$$

için

$$\vec{\nabla}\big(\vec{E}\cdot\vec{E}\big)=2\big(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{E}-2\vec{E}\times\big(\vec{\nabla}\times\vec{E}\big) \qquad (4.56)$$

ve

$$\vec{\nabla}\big(\overleftrightarrow{H}\cdot\overleftrightarrow{H}\big)=2\big(\overleftrightarrow{H}\cdot\vec{\nabla}\big)\overleftrightarrow{H}-2\overleftrightarrow{H}\times\big(\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}\big) \qquad (4.57)$$

özdeşlikleri yardımıyla [55] bu denklemin yeni formu elde edilir:

$$\vec{\nabla}\left\{\frac{\vec{E}^2-\overleftrightarrow{H}^2}{2}\right\}+\frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{E}\times\overleftrightarrow{H}\big]+\rho\vec{E}+\tilde{\rho}\overleftrightarrow{H}-\big[\vec{E}\times\vec{J}\big]-\big[\overleftrightarrow{H}\times\vec{J}\big]-\lambda_\gamma^2\varphi\vec{E}$$

$$+\lambda_\gamma^2\big[\overleftrightarrow{H}\times\vec{A}\big]=\vec{E}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\big)+\big(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{E}-\overleftrightarrow{H}\big(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\big)-\big(\overleftrightarrow{H}\cdot\vec{\nabla}\big)\overleftrightarrow{H}. \qquad (4.58)$$

Açıkçası bu ifade, kütleli gravi-elektromanyetizma için genelleştirilmiş enerji-momentum denklemidir.

Benzer şekilde (4.34) denkleminin üçüncü kısmı (psedoskaler kısmı) için

$$\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right)-\left(\overleftrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)-\big(\vec{E}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{E}]\big)+\big(\overleftrightarrow{H}\cdot[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}]\big)+\lambda_\gamma^2\big(\overleftrightarrow{H}\cdot\vec{A}\big)$$

$$=\big(\vec{E}\cdot\vec{J}\big)+\big(\overleftrightarrow{H}\cdot\vec{J}\big) \qquad (4.59)$$

ve son kısmı (psedovektör kısmı) için ise

$$-\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+\left[\overleftrightarrow{H}\times\frac{\partial\overleftrightarrow{H}}{\partial t}\right]-\overleftrightarrow{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{H}\right)+[\vec{E}\times[\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{H}]]$$

$$-\left[\overleftrightarrow{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right]-\lambda_\gamma^2\varphi\overleftrightarrow{H}+\lambda_\gamma^2\left[\vec{E}\times\vec{A}\right]=-\rho\overleftrightarrow{H}-\tilde{\rho}\vec{E}+\left[\vec{E}\times\vec{J}\right]+\left[\overleftrightarrow{H}\times\overleftrightarrow{J}\right]. \qquad (4.60)$$

eşitlikleri yazılabilir. Aslında, (4.51)'de verilen kompakt ifade, elektromanyetizmaya

$$\frac{\partial\vec{U}_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{S}_e\right)+\left(\vec{E}_e\cdot\vec{J}_e\right)+\left(\overleftrightarrow{H}_e\cdot\overleftrightarrow{J}_e\right)=0\,, \qquad (4.61)$$

ve lineer gravitasyona

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{U}}_{\mathrm{g}}}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{S}}_{\mathrm{g}}\right)+\left(\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}\cdot\vec{\mathcal{J}}_{\mathrm{g}}\right)+\left(\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{J}}_{\mathrm{g}}\right)=0\,. \qquad (4.62)$$

ait Poynting denklemlerinin bir kombinasyonu olarak görülebilir. Burada,

$$\vec{U}_e=\frac{\vec{E}_e^2+\overleftrightarrow{H}_e^2+\lambda_\gamma^2\left(\varphi_e^2+\vec{A}_e^2\right)}{2} \qquad (4.63a)$$

ve

$$\vec{\mathcal{U}}_{\mathrm{g}}=\frac{-\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}^2-\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}^2-\lambda_\gamma^2\left(\varphi_{\mathrm{g}}^2+\vec{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}}^2\right)}{2} \qquad (4.63b)$$

terimleri sırasıyla elektromanyetizma ve lineer gravitasyonda oktonik enerji yoğunluklarını temsil eder. Benzer şekilde

$$\vec{S}_e=-i\left[\vec{E}_e\times\overleftrightarrow{H}_e\right]+\lambda_\gamma^2\varphi_e\vec{A}_e \qquad (4.64a)$$

ve

$$\vec{\mathcal{S}}_{\mathrm{g}}=i\left[\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{g}}\times\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{\mathrm{g}}\right]+\lambda_\gamma^2\varphi_{\mathrm{g}}\vec{\mathcal{A}}_{\mathrm{g}} \qquad (4.64b)$$

terimleri de sırasıyla elektromanyetizma ve lineer gravitasyonun oktonik Poynting vektörlerini ifade etmektedir. Görüldüğü gibi oktonik denklemler, kütleli alanlara ilişkin

Poynting teoreminin aynı teorinin kütlesiz formülasyonuna benzer şekilde sunulmasına imkan tanır [54].

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada oktonik cebir temelinde, elektromanyetik ve gravitasyonel alanlar için genelleştirilmiş oktonik denklemler önerilmiştir. Bu amaçla okton terimleri cinsinden potansiyeller önerilerek genelleştirilmiş dalga denklemleri, yine okton bileşenleri cinsinden alanlar ifade edilerek de kısa ve şık gösterimdeki genelleştirilmiş Maxwell denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca momentum ve Lorenz değişmezleri için elektromanyetik alan ilişkilerinin türetilmesinde oktonik hesap yöntemleri uygulanmıştır. Benzer şekilde literatürdeki çalışmalardan yararlanılarak spin 1/2 parçacıkları tanımlayan oktonik dalga fonksiyonu için ikinci dereceden denklemin, kuantum alanlar için ise birinci derece denklem sistemleri şeklinde formüle edilebileceği de vurgulanmıştır.

Öte yandan ilgili literatüre katkı anlamında manyetik tek kutupların (monopollerin) varlığı düşünülerek, basit, kompakt ve tutarlı bir şekilde gravi-elektromanyetizmanın genelleştirilmiş Maxwell-Proca tipi denklemleri için alternatif bir model önerilmiştir. Hem benzer yapıdaki sekiz bileşenli diğer hiperkompleks matematiksel yapılara göre daha tutarlı bir vektör yorumuna sahip oldukları hem de dört çeşit farklı yapı (skaler, psedovektör, psedoskaler ve vektör) tek bir nesneye entegre edildiğinden, oktonik cebir elektromanyetizma denklemleri ve lineer gravitasyona ilişkin denklemler üzerinde hem eş zamanlı olarak işlem yapılmasını kompakt yapıda ifade edilmesine olanak tanır.

Ayrıca bu çalışmada gravi-elektromanyetizmadaki kütleli alanlar için enerjinin korunumu konusu ele alınmıştır. Genelleştirilmiş oktonik ifadelerle, kütleli elektromanyetizmaya ve lineer gravitasyona ait Poynting teoremlerinin bir kombinasyonu elde edilmiştir. Özellikle (4.62) ifadesi, elektromanyetizma ve lineer gravitasyon ile ilişkili Poynting denklemlerini içerdiği halde kütle terimleri içeren gravi-elektromanyetizmanın kompakt formdaki Poynting vektörü gibi davranır.

KAYNAKÇA

[1] Kantor, I. L. and Solodovnikov, A. S. (1989). *Hypercomplex numbers: an elementary introduction to algebras*. Springer.

[2] Okubo, S. (1995). *Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics* (Vol. 2). Cambridge University Press.

[3] Dixon, G. M. (2013). *Division Algebras:: Octonions Quaternions Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics* (Vol. 290). Springer Science & Business Media.

[4] Conway, J. H. and Smith, D. A. (2003). On Quaternions and Octonions: Their Geometry. *Arithmetic, and Symmetry (AK Peters, Wellesley, Massachusetts, 2003)*.

[5] Adler, S. L. (1995). *Quaternionic quantum mechanics and quantum fields* (Vol. 88). Oxford University Press on Demand.

[6] Adler, S. L. (1986). Time-dependent perturbation theory for quaternionic quantum mechanics, with application to CP nonconservation in K-meson decays. *Physical Review D*. 34(6). 1871.

[7] Adler, S. L. (1988). Scattering and decay theory for quaternionic quantum mechanics, and the structure of induced T nonconservation. *Physical Review D*. 37(12). 3654.

[8] Davies, A. J. and McKellar, B. H. J. (1989). Nonrelativistic quaternionic quantum mechanics in one dimension. *Physical Review A*. 40(8). 4209.

[9] Davies, A. J. (1990). Quaternionic Dirac equation. *Physical Review D*. 41(8). 2628.

[10] De Leo, S. and Rotelli, P. (1992). Quaternion scalar field. *Physical Review D*, *45*(2), 575.

[11] Mironov, V. L. and Mironov, S. V. (2009). Octonic representation of electromagnetic field equations. *Journal of Mathematical Physics*. 50(1). 012901.

[12] Dirac, P. A. (1928). The quantum theory of the electron. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*.117 (778). 610-624

[13] Dirac, P. A. (1958). *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford University: Clarendon Press.

[14] De Leo, S. and Rotelli, P. (1996). The quaternionic Dirac lagrangian.*Modern Physics Letters A*, 11(05). 357-366.

[15] Schwartz, C. (2006). Relativistic quaternionic wave equation. *Journal of Mathematical Physics*. 47(12). 122301.

[16] Tanıslı, M. and Özgür, G. (2003). Department of Physics, Science Faculty, Anadolu University, Eskisehir, 26470, Turkey. *acta physica slovaca*. 53(3). 253-258.

[17] Penney, R. (1968). Octonions and the Dirac equation. *American Journal of Physics*. 36(10). 871-873.

[18] Gogberashvili, M. (2006). Octonionic version of Dirac equations. *International Journal of Modern Physics A*. 21(17). 3513-3523.

[19] De Leo, S. and Abdel-Khalek, K. (1996). Octonionic Dirac equation. *Progress of theoretical physics*. 96(4). 833-845.

[20] Gürsey, F. and Tze, C. H. (1996). *On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics*. World Scientific.

[21] Hestenes, D. (1975). Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory. *Journal of Mathematical Physics*. 16(3). 556-572.

[22] Hestenes, D. (1986). A unified language for mathematics and physics. In *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*. Springer Netherlands. 1-23

[23] Pezzaglia, W. and Differ, A. (1993). A Clifford Dyadic superfield from bilateral interactions of geometric multispin Dirac theory. *arXiv preprint gr-qc/9311015*.

[24] Proca, A. (1930). Comptes Rendues 190. *1377*. 191. 26.

[25] Argyris, J. and Ciubotariu, C. (1997). Massive gravitons in general relativity. *Australian journal of physics*. 50(5). 879-891.

[26] Hamilton, W. R. (1899). *Elements of quaternions* (Vol. 1). Longmans, Green, and Company.

[27] Bisht, P. S., Dangwal, S. and Negi, O. P. (2008). Unified split octonion formulation of dyons. *International Journal of Theoretical Physics*. 47(9). 2297-2313.

[28] Chanyal, B. C., Bisht, P. S. and Negi, O. P. (2010). Generalized octonion electrodynamics. *International Journal of Theoretical Physics*. 49(6). 1333-1343.

[29] Chanyal, B. C., Bisht, P. S. and Negi, O. P. S. (2013). Octonion and conservation laws for dyons. *International Journal of Modern Physics A*. 28(26). 1350125.

[30] Tanışlı, M., Kansu, M. E. and Demir, S. (2014). Reformulation of electromagnetic and gravito-electromagnetic equations for Lorenz system with octonion algebra. *General Relativity and Gravitation*. 46(5). 1739.

[31] Chanyal, B. C. (2014). Octonion symmetric Dirac-Maxwell equations. *Turkish Journal of Physics*. 38(2). 174-186.

[32] Chanyal, B. C. (2015). Split octonion reformulation of generalized linear gravitational field equations. *Journal of Mathematical Physics*. 56(5), 051702.

[33] Chanyal, B. C., Sharma, V. K. and Negi, O. P. S. (2015). Octonionic gravi-electromagnetism and dark matter. *International Journal of Theoretical Physics*. 54(10). 3516-3532.

[34] Demir, S., Tanışlı, M. and Kansu, M. E. (2013). Generalized hyperbolic octonion formulation for the fields of massive dyons and gravito-dyons. *International Journal of Theoretical Physics*. 52(10). 3696-3711.

[35] Chanyal, B. C. (2014). Octonion massive electrodynamics. *General Relativity and Gravitation*. 46(1). 1646.

[36] Mironov, V. L. and Mironov, S. V. (2008). Octonic electrodynamics. *arXiv preprint arXiv:0802.2435*.

[37] Mironov, V. L. and Mironov, S. V. (2009). Octonic second-order equations of relativistic quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*. 50(1). 012302.

[38] Dirac, P. A. (1931). Quantised singularities in the electromagnetic field. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 133(821). 60-72.

[39] Shen, J. Q. (2004). The dual curvature tensors and dynamics of gravitomagnetic matter. *Annalen der Physik*. 13(9). 532-553.

[40] Singh, A. (1982). On the quaternionic form of linear equations for the gravitational field. *Lettere Al Nuovo Cimento (1971-1985)*. 33(14). 457-459.

[41] Rajput, B. S. (1984). Unification of generalized electromagnetic and gravitational fields. *Journal of mathematical physics*. 25(2). 351-353.

[42] Negi, O. P., Dehnen, H., Karnatak, G. and Bisht, P. S. (2011). Generalization of Schwinger-Zwanziger Dyon to Quaternion. *International Journal of Theoretical Physics*. 50(6). 1908-1918.

[43] Lakes, R. S. (2004). Experimental test of magnetic photons. *Physics Letters A*. 329(4). 298-300.

[44] Argyris, J. and Ciubotariu, C. (1997). Massive gravitons in general relativity. *Australian journal of physics*. 50(5). 879-891.

[45] Maxwell, J. C. (1865). A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*. 155. 459-512.

[46] Heaviside, O. (1893). A gravitational and electromagnetic Analogy. *The Electrician*. 31(18). 5125-5134.

[47] Thirring, H. (1918). Über die formale Analogie zwischen den elektromagnetischen Grundgleichungen und den Einsteinschen Gravitationsgleichungen erster Näherung. *Phys. Z*. 19. 204.

[48] Lense, J. and Thirring, H. (1918). On the influence of the proper rotation of a central body on the motion of the planets and the moon, according to Einstein's theory of gravitation. *Zeitschrift für Physik*. 19. 156-163.

[49] Mashhoon, B., Paik, H. J. and Will, C. M. (1989). Detection of the gravitomagnetic field using an orbiting superconducting gravity gradiometer. Theoretical principles. *Physical Review D*. 39(10). 2825.

[50] Dirac, P. A. (1931) Quantised singularities in the electromagnetic field. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 133(821). 60-72.

[51] Zwanziger, D. (1968). Exactly soluble nonrelativistic model of particles with both electric and magnetic charges. *Physical Review*. 176(5). 1480-1489.

[52] Schwinger, J. (1969). A magnetic model of matter. *Science*. 165(3895). 757-761.

[53] Demir, S., TANIŞLI, M. and Tolan, T. (2013). Octonic gravitational field equations. *International Journal of Modern Physics A*. 28(21). 1350112.

[54] Demir, S., Tanişli, M. and Kansu, M. E. (2015). Octonic massless field equations. *International Journal of Modern Physics A*. 30(15). 1550084.

[55] Tolan, T., Tanışlı, M. and Demir, S. (2013). Octonic form of Proca-Maxwell's equations and relativistic derivation of electromagnetism. *International Journal of Theoretical Physics*. 52(12). 4488-4506.

[56] Mironov, V. L. and Mironov, S. V. (2014). Sedeonic equations of gravitoelectromagnetism. *Journal of Modern Physics*. 5(10). 917.