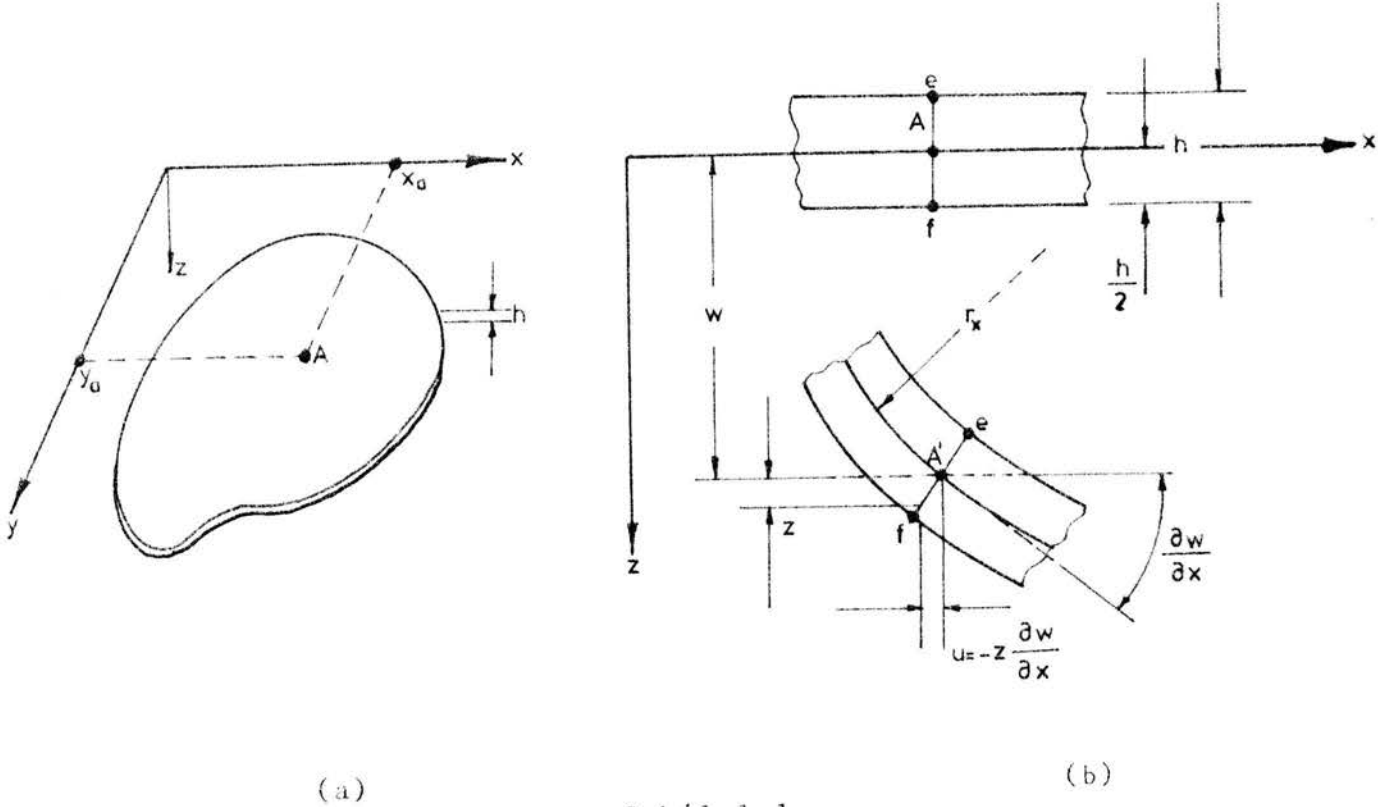


BÖLÜM I

PLAKLAR TEORİSİ

1.1. PLAKLARIN DAVRANIŞI

Şekil 1.1a'da gösterilen yüksüz, plağın orta düzlemi ile xy düzlemi çakışmaktadır. Herhangi bir noktasında x, y, z koordinat eksen takımına göre yer değiştirme bileşenleri sırası ile u, v ve w ile tanımlanan bu plağın orta yüzeyinin herhangi bir (x_0, y_0) noktasındaki düşey yer değiştirmesi ise w ile gösterilsin.



Şekil 1.1

Eğilmeye ait küçük yer değiştirme teorisine göre (veya klasik teoriye göre) izotrop, homojen, elastik ince plaklara ait kabuller deformasyon şekli göz önüne alınarak ortaya konulurlar.

Bu tip plakların çözümünde aşağıdaki kabuller yapılır.

1- Orta yüzeyin düşey yer değiştirmesi plak kalınlığına göre küçük kalmaktadır. Yer değiştiren yüzeyin eğimi çok küçüktür. Eğimin karesi birin yanında ihmal edilir.

2- Orta düzlem eğilmeden sonra da yine aynı boyutlara sahip olur. Yani boyutları eğilme sonucu değişmez.

3- Orta yüzeye dik olan düzlem eğilmeden sonra yine düzlem kalır. Bunun sonucu olarak düşey kayma gerilmeleri (γ_{xz} ve γ_{yz}) ihmal edilir. Böylece plağın eğilmesi doğrudan doğruya eğilme deformasyonları ile ilgilidir. Aynı zamanda z doğrultusundaki normal birim uzama ϵ_z ihmal edilir.

4- Orta düzleme ait normal gerilme σ_z diğer gerilme bileşenlerinin yanında küçük olduğundan ihmal edilir. Bu kabul şiddeti büyük tekil yükler etkisindeki plaklarda geçerli değildir(2).

Yukarıdaki kabuller ince plaklar için Kirchoof hipotezleri olarak bilinirler. Bunlar kirişlerin basit eğilme teorisine benzerler. Bu kabullerde adı çok gečen orta düzlem ve orta yüzey kavramlarının tanımlanması gerekir. Orta düzlem plağın kalınlığını her yerde ortalayan düzlemdir. Plağın alt ve üst kenarlarından eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir. Yayılı bir yük ile yüklenen plak orta düzlemi eğilerek bir yüzey şeklini alacaktır. Buna plağın orta yüzeyi veya elastik yüzeyi adı verilir. Bu yüzey orta düzlemdeki (x,y) noktalarının z eksenini doğrultusundaki yer değiştirmelerinden meydana gelir.

Mühendislik problemlerinin çoğunda gerilme ve deformasyonlar arasındaki bağıntılarda uygun kabuller kullanılarak çözümlerde kolaylık sağlayan basitleştirmeler yapılır. Örneğin yukarıdaki kabullere dayanarak üç boyutlu plak problemi iki boyutlu hale getirilerek çözümü kolaylaştırılmıştır.

1.2. ŞEKİL DEĞİŞTİRME - EÇRİLİK BAĞINTILARI

Plakların eğilme problemleri verilen deformasyon şekli esas alınarak incelenir. Daha önceki bölümde sözü edilen (3) nolu kabulün bir sonucu olarak şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (1.1a-f)$$

şeklinde yazılır.

Düşey yer değiştirmenin plak kalınlığı boyunca değişmeyeceğini kabul ederek (1.1c) denklemlerinin integrasyonundan

$$w = w(x, y) \quad (a)$$

bulunur.

Benzer şekilde (1.1e) ve (1.1f) denklemlerinin integrasyonu sonucu

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \quad (b)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y)$$

elde edilir.

$u_0(x, y)$ ve $v_0(x, y)$ değerleri sırasıyla orta düzlemdeki u ve v 'yi gösterir. Daha önce ifade edilen (2) nolu kabulden faydalanılarak $u_0 = v_0 = 0$ alınır. Böylece aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Yukarıda verilen u ifadesi Şekil 1.1b'de herhangi bir $A(x_0, y_0)$ noktasında ef kesitinde gösterilmiştir. Yukarıda söylenenler zy düzlemindeki v ifadesi içinde geçerlidir.

Sonuçta (1.2) denklemlerinin (3) nolu kabule uygun olduğu görülür. (1.2) denklemleri (1.1) de yerlerine koyarsak

$$\epsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.3a)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

elde edilir.

Bunlar plakların herhangi bir noktasındaki şekil değiştirme bağıntılarıdır.

Düzlem bir eğrinin eğriliğini bu eğri boyunca eğim açısındaki değişme miktarı olarak tanımlanır. Daha önce sözü edilen (1) nolu kabulden dolayı eğimlerin kareleri ihmal edilir. (1.3a) denkleminin kısmi türevleri plağın eğriliğini belirtir. Orta yüzeyin xz, yz ve xy düzlemlerine paralel düzlemlerle oluşturduğu eğrilikler sırasıyla

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \kappa_x$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \kappa_y \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \kappa_{xy}$$

olarak yazılır.

(1.4) denklemleri plak üzerindeki eğimlerin değişme oranlarını gösterir. Bunlardan sonuncusu orta düzlemin sırası ile x ve y eksenlerine göre dönmesi olarak tariflenir. (1.3) ve (1.4) denklemlerinden birim şekil değiştirme-eğrilik bağıntıları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\epsilon_x = -z \kappa_x$$

$$\epsilon_y = -z \kappa_y$$

$$\gamma_{xy} = -2z \kappa_{xy}$$

(1.3b)

1.3. GERİLMELER VE GERİLME BİLEŞENLERİ

Gerilme ve yer değiştirme bileşenleri birbirlerine Hooke kanunu ile bağlıdırlar. Hooke kanununa göre şekil değiştirme onu meydana getiren kuvvet ile orantılıdır.

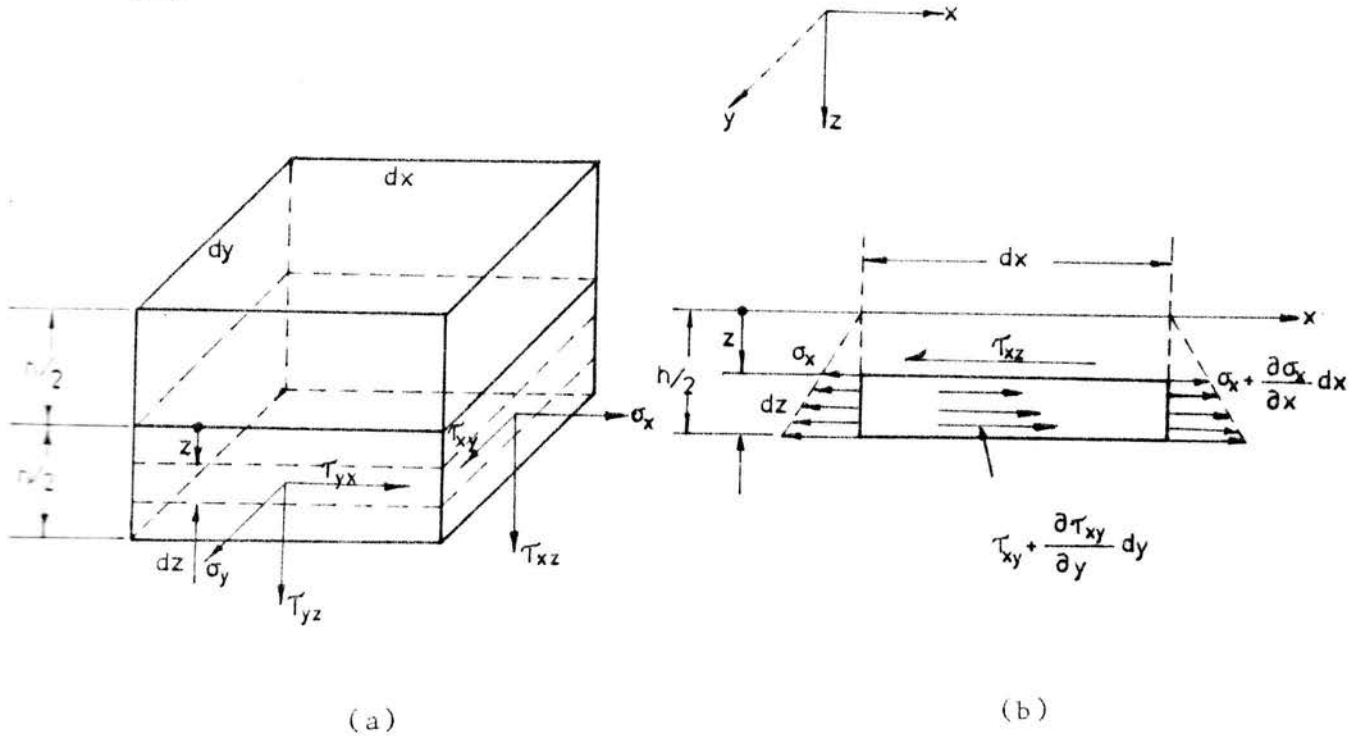
Üç boyutlu gerilme halinde Hooke kanunları homogen ve izotrop bir malzeme için

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}\quad (1.5)$$

şeklinde yazılır. Burada malzemenin elastisite modülü E, kayma modülü G ve poisson oranı ν ile gösterilir. Elastisite modülü ile kayma modülü arasında

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

bağıntısı vardır.



Şekil 1.2

Bir plak elemanına tesir eden iç kuvvetler Şekil 1.2a da gösterilmektedir. Görüldüğü gibi plak elemanında normal gerilmelerden başka kayma gerilmeleri de bulunmaktadır. Gerilmelerde işaret kabulü yüzeyin dış normali ile aynı yüzey üzerindeki gerilme bileşenlerinin doğrultularına bağlıdır. Eğer hem dış normal hem de gerilme bileşenleri koordinat eksenlerinin pozitif (veya negatif) doğrultusunda ise gerilmenin işareti pozitif, dış normal pozitif doğrultuda iken gerilme negatif doğrultuda ise gerilmenin işareti negatif (bunun tersi de doğru) dur.

Bu esaslar altında Şekil 1.2a'da gösterilen bütün gerilme bileşenleri pozitifdirler. Daha önce yapılan kabullere göre $\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ olarak (1.5) denklemleri ince plaklar için aşağıdaki

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

şekilde ifade edilir.

(1.3b) ve (1.4) denklemlerinden eğrilikler yukarıdaki ifadelerde yerlerine konularak

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_y + \nu\kappa_x) \quad (1.7)$$

$$= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \kappa_{xy}$$

$$= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

elde edilir.

Bulunan gerilme bileşenleri orta düzlemde olan z uzaklığı ile orantılı olup, aynı zamanda plak eğriliğinin büyüklüğüne bağlıdır. Kayma gerilmelerinin dağılımı normal gerilmelerinin dağılımına bağlıdır. Normal gerilmeler plak kalınlığı boyunca lineer olarak dağıldıklarından kayma gerilmeleri de doğru eksenli çubuklarda olduğu gibi plak kalınlığı boyunca parabolik olarak dağılırlar. Plak elemanı üzerinde normal gerilmeler eğilme momentlerini, kayma gerilmeleri ise burulma momentlerini meydana getirir. Plak kalınlığı (h) sabit kabul edilerek eğilme ve burulma momentlerini gerilme bileşenleri cinsinden

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (1.3)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz$$

şeklinde yazılır.

Burada M_x = x ekseninin birim uzunluğuna isabet eden eğilme momenti

M_y : y ekseninin birim uzunluğuna isabet eden eğilme momenti

M_{xy} : x eksenine dik kesitin birim uzunluğuna isabet eden burulma momenti

olarak tarif edilir.

Plak eğilme probleminde plak elemanına θ_x ve θ_y ile gösterdiğimiz düşey kesme kuvvetleri de tesir eder.

τ_{xz} ve τ_{yz} kayma gerilmeleri şekil değiştirme bağıntı-
ları cinsinden ifade edilemezler. Çünkü daha önce yapılan ka-
bulden dolayı γ_{xz} ve γ_{yz} kayma şekil değiştirme bileşenleri
ihmal edilmiştir. Fakat bu sonuç θ_x ve θ_y kesme kuvvetlerinin
de ihmal edileceği anlamına gelmez. Gerçekte onlar yüzey kuv-
vetleri ve momentleri ile aynı mertebede büyüklüğe sahiptir.
Bu sebepten θ_x ve θ_y kesme kuvvetleri kayma gerilmeleri
cinsinden

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (1.9)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$

ifadeleri ile elde edilir.

(1.7) denklemlerinin gerilme değerleri (1.8) 'de yerlerine konularak gerekli işlemlerin yapılmasıyla M_x , M_y ve M_{xy} değerleri

$$\begin{aligned} M_x &= -D (\kappa_x + \nu \kappa_y) \\ &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} M_y &= -D (\kappa_y + \nu \kappa_x) \\ &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

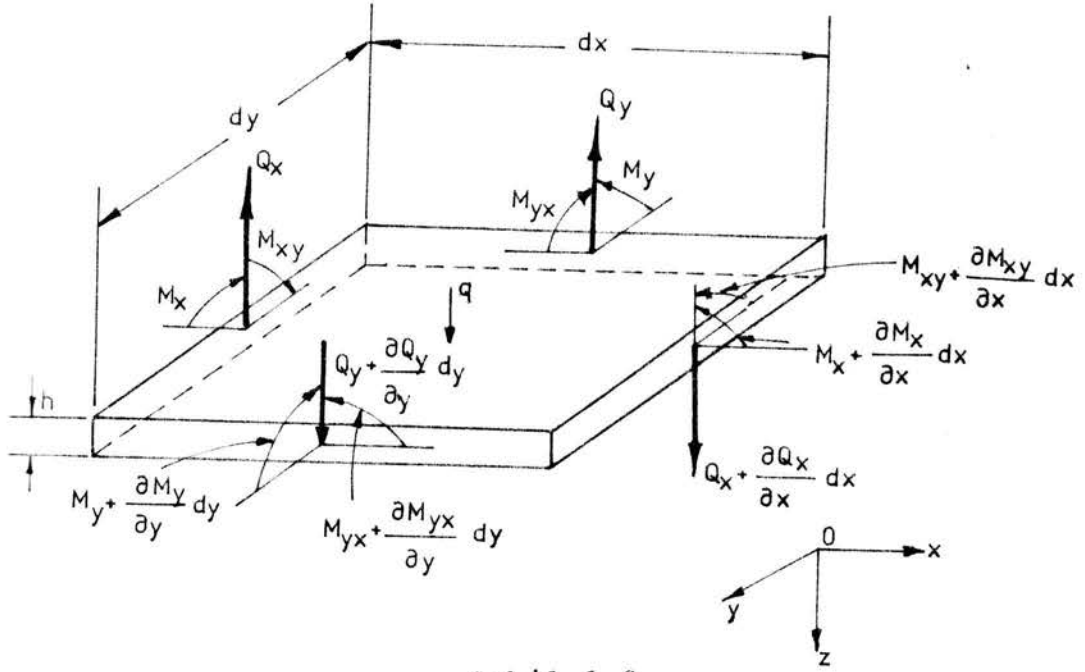
$$\begin{aligned} M_{xy} &= D(1-\nu) \kappa_{xy} \\ &= D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

bulunur.

Burada $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ile gösterilen değere plak eğilme rijitliği denir. Bu değer kiriş teorisindeki EI 'nin karşılığıdır.

1.4. PLAKLARDA GERİLMELERİN DEĞİŞİMİ

Gerilme bileşenleri ve dolayısıyla kesit tesirleri yüklü bir plakta noktadan noktaya değişir. Bu değişim statik denge şartını sağlar. Bu koşulların yerine gelmesi denge denklemleri olarak bilinen bağıntıların kurulmasıyla oluşur.



Şekil 1.3

Şekil 1.3'de görülen $dx dy$ plak elemanın q düzgün yayılı yükü ile yüklenmiş olduğu kabul edilsin. Plak ağırlığı bu yüke göre küçük olduğundan sonuçları değiştirmez. Bu yüzden ihmal edilir.

Aynı zamanda plak elemanın küçük olması ve çözümlere basitlik sağlaması amacıyla her yüze etki eden kuvvet ve moment bileşenlerinin üniform dağıldığını düşünelim. Şekilde tek vektör ile gösterilen bu tesirler her yüzün ortasındaki ortalama tesirleri ifade etmektedir.

Sol üst köşeden sağ alt köşeye olduğu gibi bölgenin

değişmesi ile moment bileşenlerinden negatif yüzüne etkiyen M_x alındığında değerinin pozitif x yönünde bir miktar değiştiği görülür. Bu değişim miktarını Taylor açılımının ilk terimini alarak

$$M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx$$

şeklinde yazarız.

M_x hem x hem de y'nin fonksiyonu olduğu için yukarıdaki ifade de kısmi türev kullanılmıştır. Benzer şekilde aynı düşünce tarzı Şekil 1.3'de gösterilen diğer kesit tesirlerine de uygulanır. Plak elemanına etki eden kuvvetlerin z ekseni doğrultusundaki izdüşüm denklemi

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \theta}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0 \quad (a)$$

verir.

Herbir terimi $dx dy$ 'e böldüğümüzde

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} + q = 0 \quad (b)$$

elde edilir.

Plak elemanına etki eden kuvvetlerin x eksenine göre momentlerin dengesi ise

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + \theta_y dx dy = 0$$

denklemini verir. Bu denklemdeki her terimin $dx dy$ 'e bölünmesi sonunda

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + \theta_y = 0 \quad (c)$$

Bulunur. Moment denge denkleminde q yayılı yükünün momenti ile θ_y kesme kuvvetindeki değişimin doğuracağı moment gibi sonsuz küçük terimlerin çarpımı ihmal edilmiştir. Benzer şekilde plaka etki eden kuvvetlerin y eksenine göre momentlerin dengesinden

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - \theta_x = 0 \quad (d)$$

elde edilir. (c) ve (d) denklemlerindeki θ_x ve θ_y değerlerini (b) de yazarak

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (e)$$

Bulunur.

Plak elemanına tesir eden gerilmelerden $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ olduğundan $M_{yx} = -M_{xy}$ alınarak (e) denklemini aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (1.11)$$

Bu denklem ince plakların eğilmesine ait diferansiyel denge denklemdir. θ_x ve θ_y kesme kuvvetleri ifadeleri (1.10) ile (c) ve (d) denklemlerinden yararlanılarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sigma_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \omega) \quad (1.12)$$

$$\sigma_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \omega)$$

Buradaki

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplace operatörüdür.

1.5. PLAK GENEL DENKLEMİ

Daha önceki bölümde elde edilen diferansiyel denge denklemini genelleştirmek için eğilme ve burulma momentlerinin ω cinsinden değerlerinin bilinmesi gerekir.

M_x , M_y , M_{xy} için (1.10) da bulduğumuz ilk ifadeleri (1.11) de kullanarak

$$\frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial y^2} = \frac{q}{D} \quad (1.13a)$$

denklemini buluruz. Bu denklem plak dengesini eğrilikler cinsinden ifade etmektedir. (1.13a) denklemine (1.4) ile tanımlanan eğrilik ifadeleri konulursa

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1.13b)$$

elde edilir. Plak genel denklemi adını alan bu denklem ilk defa 1811 yılında Lagrange tarafından kurulmuştur. Denklemi kısaca

$$\nabla^4 \omega = \frac{q}{D} \quad (1.13c)$$

şeklinde yazmak mümkündür.

Burada

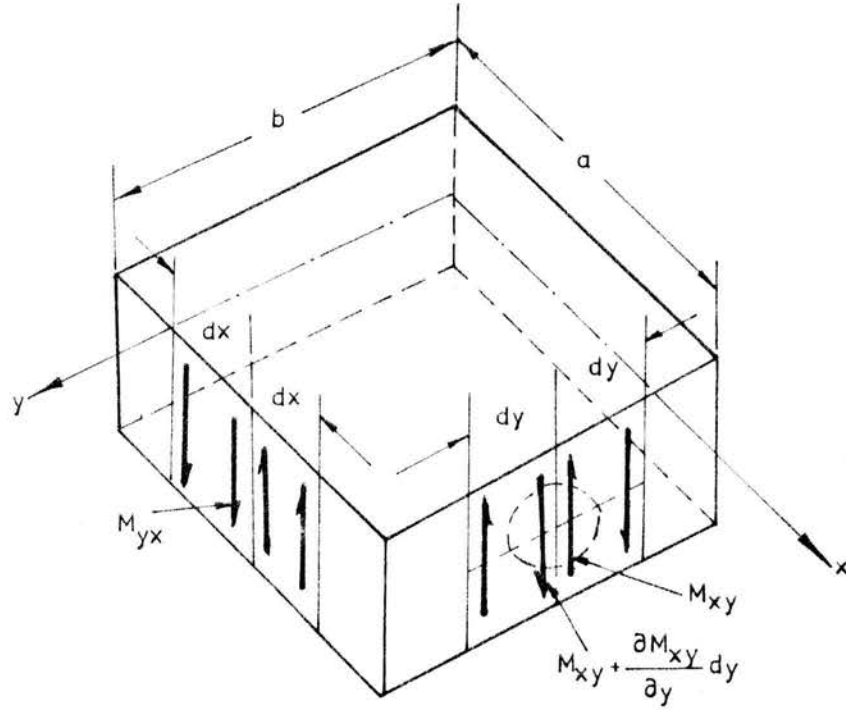
$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = (\nabla^2)^2 \text{ dir.}$$

İnce plakların çökmesini veren bu denklem belirli yük-
leme durumu için yükleme ve mesnetlenmeden meydana gelen bü-
rün sınır şartları göz önüne alınarak integrasyonu yapıldığı
takdirde plak probleminin kesin sonucunu verir.

1.6. SINIR ŞARTLARI

Plak probleminin çözümü için daha önceki bölümünde
açıklanan diferansiyel denklemi sağlaması gerekir. Plak için-
deki gerilme dağılımı sınırdaki verilen kuvvet ve çökmeler ile
ilgili olan denge haline uygun olmalıdır. Plak genel denkle-
minin çözümü her bir kenarda ilgili sınır şartını gerektirir.
Bu sınır koşulları düşey yer değiştirme ve eğim, kuvvet ve mo-
ment veya bunların bir kombinezonu şeklinde olur. Plak veya
kirişlere ait sınır şartları arasındaki fark plaklarda kenar-
lar boyunca burulma momentinin bulunmasıdır. Aşağıda bu mo-
mentlerin eşdeğer kuvvet çiftleri ile temsil edilebileceği
gösterilmiştir. Böyle bir değiştirme St. Venant prensibine uy-
gun olarak sınıra çok yakın bir bölgede gerilme ve şekil de-
ğiştirmelerde çok küçük bir değişikliğe sebep olur(2).

Şekil 1.4'de görülen x ve y eksenlerine paralel kenar
uzunlukları a ve b olan bir dikdörtgen plak için sınır koşul-
larını yazalım. x = a kenarında 2 adet dy uzunluğunda eleman
düşünelim. Sağdaki elemana $M_{xy} dy$ burulma momenti tesir eder-
ken, soldaki elemana ise $|M_{xy} + (\partial M_{xy} / \partial y) dy| dy$ burulma mo-
mentleri tesir edecektir. Şekilde bu momentler statik eşdeğer



Şekil 1.4

Kuvvet çiftleri ile gösterilmişlerdir. Bu kuvvetlerin cebirsel toplamı θ_x kuvvetine ilave edilirse y eksenine paralel kenar boyunca etkiyen reaksiyon kuvveti V_x elde edilir.

$$V_x = \theta_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (1.14a)$$

Benzer şekilde x eksenine paralel kenar boyunca ise

$$V_y = \theta_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (1.14b)$$

yazılır.

Yukarıda tanımlanan kenar kuvvetlerine ilaveten köşelerde R ile gösterdiğimiz tekil kuvvetler meydana gelir. Örnek olarak üniform yükü yüklenmiş kenarlarından basit mesnet-

İki dikdörtgen bir plak düşünelim. Yukarıda incelenen Burulma Momenti tesiri ile Şekil 1.4'de gösterilen plakta (a,b) köşesinde

$$R = 2M_{xy} = 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad \left(\begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array} \right) \quad (1.15)$$

kuvveti doğar.

Çeşitli kenar şartlarına sahip plaklar için bu kuvvetler benzer şekilde belirlenebilir. Örneğin plağın bitişik iki kenarı Ankastre veya serbest ise $R=0$ dır(2).

Şimdi kenarları x ve y eksenlerine paralel olan dikdörtgen bir plağın $x=a$ kenarına ait sınır şartlarını çok karışık mesnet durumları için inceleyelim.

a) Basit Mesnetli Kenar

İncelediğimiz kenarda hem çökme, hem de eğilme momenti sıfır olmalıdır. Buradan

$$\omega = 0 \quad M_x = 0 \quad (x=a) \quad (1.16a)$$

yazılır.

Bu denklemlerden birincisi aynı zamanda $x=a$ kenarı boyunca $\partial \omega / \partial y = 0$ ve $\partial^2 \omega / \partial y^2 = 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda aynı mesnet durumu için

$$\omega = 0 \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad (x=a) \quad (1.16b)$$

sınır şartları da yazılabilir.

b) Ankestre Kenar

Plâğın ankestre olan kenarı boyunca hem çökme, hem de eğilim sıfır olmalıdır. Bu durumda aşağıdaki sınır şartları yazılır.

$$\omega = 0 \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (x=a) \quad (1.17)$$

c) Serbest Kenar

x=a kenarının moment ve kesme kuvveti taşıması aşağıdaki sınır şartlarını

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad (x=a) \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} = 0$$

gerektirir.

d) Kayıcı Kenar

Bu durumda kenarın düşey çökmesi serbest bırakılmış, dönmesi ise engellenmiştir. Mesnetin kesme kuvvetlerine karşı kayması mümkün değildir. Aynı zamanda moment taşır. Bu durumda

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (x=a) \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} = 0$$

sınır şartları yazılır.

BÖLÜM II

ÖZEL MESNET HALLERİ İÇİN PLAKLARIN SERİLER İLE ÇÖZÜMÜ

2.1. TANIMLAR

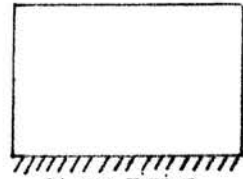
Bu bölümde çeşitli sınır şartlarına sahip dikdörtgen plakların seri şeklinde çözümleri için gerekli denklemler verilecektir. İncelenecek plaklar mesnet şartlarına göre aşağıdaki gibi kodlanmıştır. Daha sonraki bölümlerde incelenecek plaklar aşağıdaki kod numaraları ile tanımlanacaktır.



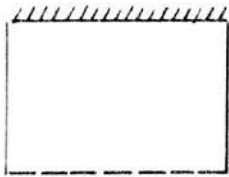
PLAK TİPİ 1



PLAK TİPİ 2



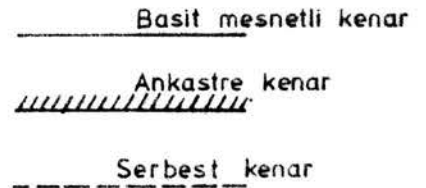
PLAK TİPİ 3



PLAK TİPİ 4



PLAK TİPİ 5

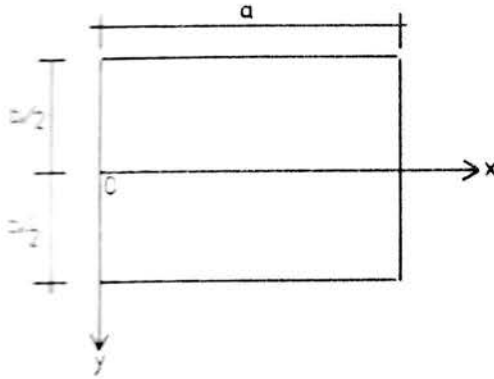


Değişik plak tipleri için hazırlanan bilgisayar programı Ek 1'de verilmiştir. Düşey yer değiştirme ve kesit etkileri için bulunan sonuçlar tablo haline getirilmiştir.

Tablolarda düşey yer değiştirme = $k \frac{qa^4}{Eh^3}$,

moment = kqa^2 , kesme kuvveti = kqa , reaksiyon kuvveti = kqa şeklinde gösterilmiştir. Bu bölümde verilen denklemlerin nasıl elde edildiği (1) nolu kaynakta ayrıntılı olarak açıklanmaktadır. Bundan dolayı burada tekrar edilmeyecektir.

2.2. PLAK TİPİ 1'İN ÇÖZÜMÜNÜ VEREN ELASTİK YÜZEY VE KESİT TESİRLERİ DENKLEMLERİ



Şekil 2.1

Kenar boyutları a ve b olan bütün kenarlarından basit mesnetli plak için Levy'in çözümü verilecektir. Buna göre elastik yüzey denklemi

$$u = \frac{q}{2D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \text{Cosh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \text{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right) \text{Sin} \frac{m\pi x}{a} \quad (2.1)$$

veya

$$u = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left[1 - \frac{(\alpha_m \text{tgh} \alpha_m + 2)}{2 \text{Cosh} \alpha_m} \text{Cosh} \frac{2\alpha_m y}{b} - \frac{\alpha_m}{2 \text{Cosh} \alpha_m} \frac{2y}{b} \text{Sinh} \frac{2\alpha_m y}{b} \right] \text{Sin} \frac{m\pi x}{a} \quad (2.2)$$

şekillerinde yazılır.

k = katsayı

Burada;

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

$$A_m = \frac{2(\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \operatorname{Cosh} \alpha_m}$$

$$B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \operatorname{Cosh} \alpha_m}$$

olar.

Burada verilen elastik yüzey denklemi birinci bölümde-
ki (1.10), (1.12), (1.14) nolu denklemlerde yerine konularak
aşağıdaki kesit tesirleri denklemleri elde edilir.

$$w_x = \frac{-q}{2} (x^2 - ax) + qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \left(A_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi x}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$- qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \left(A_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} + 2B_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$- B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a}$$

$$w_{xy} = -qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \left(A_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} + 2B_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$- B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{Vq}{2} (x^2 - ax) + Vqa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\left(A_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$w_{xy} = (1-\nu)qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \cos \frac{m\pi x}{a} \left(A_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$+ B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a}$$

$$Q_x = \frac{-q}{2} (2x-a) - 2qa\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \cos \frac{m\pi x}{a} B_m \cosh \frac{m\pi y}{a}$$

$$Q_y = -2qa\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \sin \frac{m\pi x}{a} B_m \sinh \frac{m\pi y}{a}$$

$$V_x = Q_x - \left[(1-\nu) qa\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \cos \frac{m\pi x}{a} (A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + 2B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a}) \right]$$

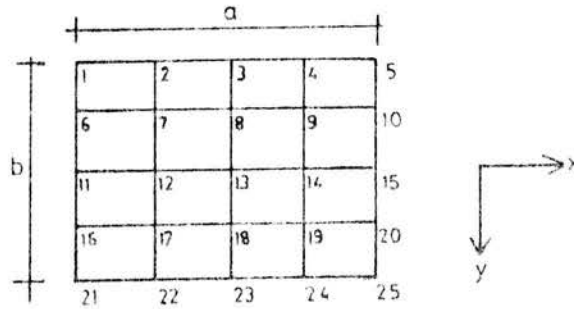
$$V_y = Q_y + \left[(1-\nu) qa\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \sin \frac{m\pi x}{a} (A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}) \right]$$

Bu değerlerin bilgisayar ile elde edilen cözümleri Tablo 2.1'-de verilmiştir.

TABLO 2.1

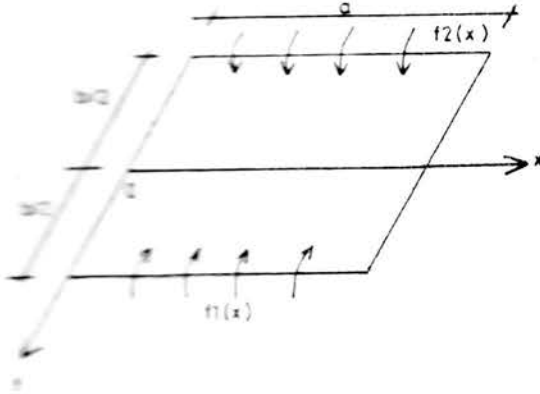
PLAK TIPI 1 İÇİN KATSAYILAR TABLOSU

$B/A=1.2$



NO	M	M _x	M _y	M _{xy}	Q _x	Q _y	V _x	V _y
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.037783	0.025201	0.000000	0.025201	0.000000
2	0.000002	0.000146	0.000044	0.023842	0.000077	0.288193	0.000077	0.372400
3	0.000002	0.000116	0.000035	0.000000	0.000000	0.349929	0.000000	0.448850
4	0.000002	0.000146	0.000044	-0.023842	-0.000077	0.288193	-0.000077	0.372400
5	0.000000	0.000000	0.000000	-0.037783	-0.025201	0.000000	-0.025201	0.000000
6	0.000000	0.000000	0.000000	0.022568	0.319366	0.000000	0.391124	0.000000
7	0.032465	0.037857	0.031741	0.015481	0.126268	0.094346	0.172893	0.145875
8	0.045022	0.047838	0.042243	0.000000	0.000000	0.128486	0.000000	0.194786
9	0.032465	0.037857	0.031741	-0.015481	-0.126268	0.094346	-0.172893	0.145875
10	0.000000	0.000000	0.000000	-0.022568	-0.319366	0.000000	-0.391124	0.000000
11	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.379382	0.000000	0.455804	0.000000
12	0.044376	0.049544	0.037100	0.000000	0.165160	0.000000	0.218384	0.000000
13	0.051784	0.062682	0.050081	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
14	0.044376	0.049544	0.037100	0.000000	-0.165160	0.000000	-0.218384	0.000000
15	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.379382	0.000000	-0.455804	0.000000
16	0.000000	0.000000	0.000000	-0.022568	0.319366	0.000000	0.391124	0.000000
17	0.032465	0.037857	0.031741	-0.015481	0.126268	-0.094346	0.172893	-0.145875
18	0.045022	0.047838	0.042243	0.000000	0.000000	-0.128486	0.000000	-0.194786
19	0.032465	0.037857	0.031741	0.015481	-0.126268	-0.094346	-0.172893	-0.145875
20	0.000000	0.000000	0.000000	0.022568	-0.319366	0.000000	-0.391124	0.000000
21	0.000000	0.000000	0.000000	-0.037783	0.025201	0.000000	0.025201	0.000000
22	0.000002	0.000146	0.000044	-0.023842	0.000077	-0.288193	0.000077	-0.372400
23	0.000002	0.000116	0.000035	0.000000	0.000000	-0.349929	0.000000	-0.448850
24	0.000002	0.000146	0.000044	0.023842	-0.000077	-0.288193	-0.000077	-0.372400
25	0.000000	0.000000	0.000000	0.037783	-0.025201	0.000000	-0.025201	0.000000

2.3. KARŞILIKLI KENARLARINDA SİMETRİK VE ANTİMETRİK MOMENT UYGULANAN BASİT MESNETLİ PLAKLARDA ELASTİK YÜZEY DENKLEMLERİ



Şekil 2.2

Şekilde gösterilen dikdörtgen plak kenarlarından basit mesnetlidir. $y=\pm b/2$ kenarları boyunca yayılmış momentler ile eğilmeye bırakılmıştır. Eğilme momentlerinin yayılışı f_1 ve f_2 ile gösterilmiştir. Bu plağın simetrik moment uygulanması durumunda momentlerden oluşan elastik yüzey denklemi

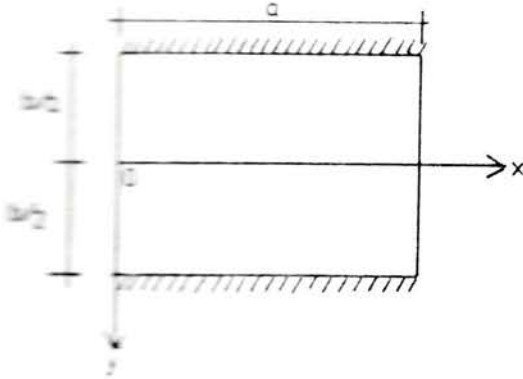
$$w = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^2 \cosh \alpha_m} E_m \left(\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.3)$$

şeklinde yazılır.

Aynı plağa antimetrik moment uygulanmasında ise momentlerden oluşan elastik yüzey denklemi aşağıdaki şekildedir.

$$w = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^2} \left[\frac{1}{\operatorname{Cosh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right) - \frac{1}{\operatorname{Sinh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{Coth} \alpha_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \quad (2.4)$$

2.4. PLAK TİPİ 2'NİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN SİMETRİK YÜKLEMeye
AİT ELASTİK YÜZEY VE KESİT TESİRLERİ DENKLEMLERİ



Şekil 2.3

Şekilde gösterilen plak karşılıklı iki kenarından basıt mesnetli diğer kenarlarından ise ankastredir. Bu plağın çözümünü plak tipi 1'in çözümünden faydalanılarak yapılır.

Simetrik yüklemekten dolayı meydana gelen elastik yüzey denklemleri olarak (2.3) denklemleri kullanılır. Burada;

$$\varepsilon_m = \frac{4qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \operatorname{tgh}\alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{tgh}\alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{tgh}\alpha_m (\alpha_m \operatorname{tgh}\alpha_m - 1)}$$

dir.

Elastik yüzey denklemleri birinci bölümde bulunan (1.10), (1.12), (1.14) nolu denklemlerde yerine konularak aşağıdaki kesit tesirleri denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{2 \operatorname{Cosh} \alpha_m} E_m \left(\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \right. \\ &\quad \left. \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} - \nu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{2 \operatorname{Cosh} \alpha_m} E_m \left(\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right) \right) \end{aligned}$$

$$w_{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{2 \cosh \alpha_m} E_m (\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - 2 \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a}) + \nu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{2 \cosh \alpha_m}$$

$$E_m (\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a})$$

$$w_{xz} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a}}{\cosh \alpha_m} E_m (\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} - \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a})$$

$$w_{yz} = \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \cos \frac{m\pi x}{a}}{\cosh \alpha_m} E_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a}$$

$$w_{yz} = \frac{\pi}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m\pi x}{a}}{\cosh \alpha_m} E_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a}$$

$$w_{zx} = Q_x - \frac{(1-\nu)}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \cos \frac{m\pi x}{a}}{\cosh \alpha_m} E_m (\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - 2 \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a})$$

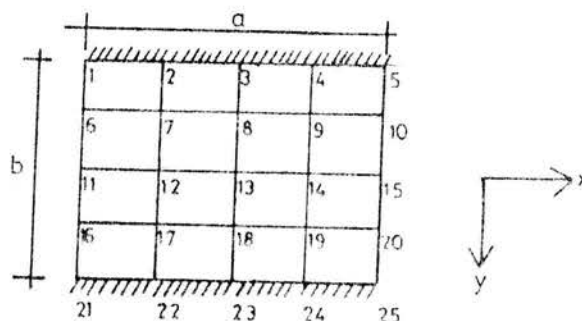
$$w_{zx} = Q_y + \frac{(1-\nu)\pi}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m\pi x}{a}}{\cosh \alpha_m} E_m (\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} - \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a})$$

Bu plak tipinin çözümü yukarıdaki değerler ile plak tipi 1'in değerlerinin süperpozisyonuyla elde edilir. İşlem sonuçları bilgisayar ile bulunarak Tablo 2.2'de verilmiştir.

TABLO 2.2

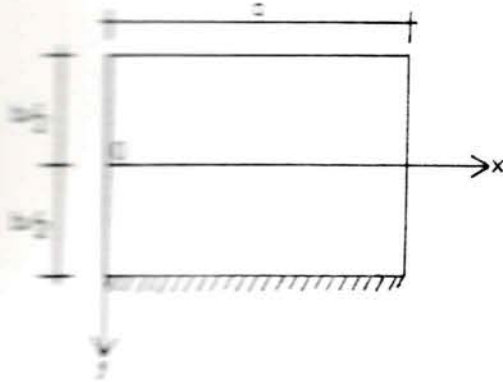
PLAK TIPI 2 ICIN KATSAYILAR TABLOSU

$b/a=1.2$



Eleman	M	M_x	M_y	M_{xy}	Q_x	Q_y	V_x	V_y
1	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.329486	0.000000	-0.577768	0.000000
2	0.000002	-0.019826	-0.066529	-0.000000	-0.163349	0.495282	-0.278308	0.495282
3	0.000002	-0.025883	-0.086627	0.000000	0.000000	0.585208	0.000000	0.585208
4	0.000002	-0.019826	-0.066529	0.000000	0.163349	0.495282	0.278308	0.495282
5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.329486	0.000000	0.577768	0.000000
6	0.000000	0.000000	0.000000	0.017833	0.191418	0.000000	0.224974	0.000000
7	0.015219	0.018260	0.014475	0.011784	0.039771	0.161259	0.058876	0.202883
8	0.020702	0.020024	0.017840	0.000000	0.000000	0.218020	0.000000	0.267413
9	0.015219	0.018260	0.014475	-0.011784	-0.039771	0.161259	-0.058876	0.202883
10	0.000000	0.000000	0.000000	-0.017833	-0.191418	0.000000	-0.224974	0.000000
11	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.294489	0.000000	0.365315	0.000000
12	0.025394	0.031771	0.030073	0.000000	0.105524	0.000000	0.154188	0.000000
13	0.034882	0.037697	0.040078	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
14	0.025394	0.031771	0.030073	0.000000	-0.105524	0.000000	-0.154188	0.000000
15	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.294489	0.000000	-0.365315	0.000000
16	0.000000	0.000000	0.000000	-0.017833	0.191418	0.000000	0.224974	0.000000
17	0.015219	0.018260	0.014475	-0.011784	0.039771	-0.161259	0.058876	-0.202883
18	0.020702	0.020024	0.017840	0.000000	0.000000	-0.218020	0.000000	-0.267413
19	0.015219	0.018260	0.014475	0.011784	-0.039771	-0.161259	-0.058876	-0.202883
20	0.000000	0.000000	0.000000	0.017833	-0.191418	0.000000	-0.224974	0.000000
21	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.329486	0.000000	-0.577768	0.000000
22	0.000002	-0.019826	-0.066529	0.000000	-0.163349	0.495282	-0.278308	-0.495282
23	0.000002	-0.025883	-0.086627	0.000000	0.000000	0.585208	0.000000	-0.585208
24	0.000002	-0.019826	-0.066529	-0.000000	0.163349	0.495282	0.278308	-0.495282
25	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.329486	0.000000	0.577768	0.000000

2.5. PLAK TİPİ 3'ÜN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN ANTİMETRİK YÜKLEMeye AİT ELASTİK YÜZEY VE KESİT TESİRLERİ DENKLEMLERİ



Şekil 2.4

Bir kenarından ankastre, diğer kenarlarından basit olan bu plak tipinin çözümü plak tipi 1'den faydalanılarak yapılır. Antimetrik yüklemekten oluşan elastik yüzey denklemi olarak (2.4) denklemi kullanılır. Burada;

$$E_m = - \frac{8qa^2}{\tau^3 \pi^3} \frac{\alpha_m - \text{tgh}\alpha_m (1 + \alpha_m \text{tgh}\alpha_m)}{(\alpha_m \text{tgh}^2 \alpha_m - \text{tgh}\alpha_m + \alpha_m \text{Coth}^2 \alpha_m - \text{Coth}\alpha_m - 2\alpha_m)}$$

dir.

Elastik yüzey denkleminde daha önceki bölümde verilen (1.10), (1.12), (1.14) nolu denklemler yardımıyla bulunan kesit tesirleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{M_x}{I} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4} \sin \frac{m\pi x}{a} E_m \left[\frac{1}{\text{Cosh}\alpha_m} (\alpha_m \text{tg}\alpha_m \text{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right. \\ & \left. - \frac{m\pi y}{a} \text{Sinh} \frac{m\pi y}{a}) + \frac{1}{\text{Sinh}\alpha_m} (\alpha_m \text{Coth}\alpha_m \text{Sinh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \right. \\ & \left. \text{Cosh} \frac{m\pi y}{a}) \right] - \nu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4} \sin \frac{m\pi x}{a} E_m \left[\frac{1}{\text{Cosh}\alpha_m} (\alpha_m \text{tgh}\alpha_m \right. \\ & \left. \text{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - 2\text{Cosh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \text{Sinh} \frac{m\pi y}{a}) + \frac{1}{\text{Sinh}\alpha_m} \right. \\ & \left. (\alpha_m \text{Coth}\alpha_m \text{Sinh} \frac{m\pi y}{a} - 2\text{Sinh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \text{Cosh} \frac{m\pi y}{a}) \right] \end{aligned}$$

$$w_{xy} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} E_m \left[\frac{1}{\cosh \alpha_m} (\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \right.$$

$$\cosh \frac{m\pi y}{a} - 2 \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a})$$

$$+ \frac{1}{\sinh \alpha_m} (\alpha_m \operatorname{coth} \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} - 2 \sinh \frac{m\pi y}{a}$$

$$- \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}) \Big] + \nu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4} \sin \frac{m\pi x}{a} E_m \left[\frac{1}{\cosh \alpha_m} \right.$$

$$(\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a}) + \frac{1}{\sinh \alpha_m}$$

$$\left. (\alpha_m \operatorname{coth} \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}) \right]$$

$$w_{xy} = \frac{(1-\nu)}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi x}{a} E_m \left[\frac{1}{\cosh \alpha_m} (\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \right.$$

$$\sinh \frac{m\pi y}{a} - \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}) + \frac{1}{\sinh \alpha_m} (\alpha_m$$

$$\operatorname{coth} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a}) \Big]$$

$$w_{xy} = \frac{\nu}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi x}{a} E_m \left(\frac{1}{\cosh \alpha_m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{\sinh \alpha_m} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$w_{xy} = \frac{\nu}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} E_m \left(\frac{1}{\cosh \alpha_m} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{\sinh \alpha_m} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

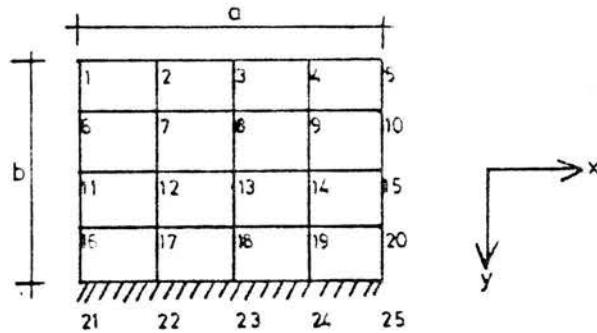
$$\begin{aligned}
 \sigma_x = \sigma_x^0 & - \frac{(1-\nu)\pi}{4a} \sum_{m=1}^{\infty} m \cos \frac{m\pi x}{a} E_m \left[\frac{1}{\cosh \alpha_m} \right. \\
 & \left. (\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - 2 \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sinh \alpha_m} (\alpha_m \operatorname{Coth} \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} - 2 \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}) \right] \\
 \sigma_y = \sigma_y^0 & + \frac{(1-\nu)\pi}{4a} \sum_{m=1}^{\infty} m \sin \frac{m\pi x}{a} E_m \left[\frac{1}{\cosh \alpha_m} (\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \right. \\
 & \left. - \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sinh \alpha_m} (\alpha_m \operatorname{Coth} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a}) \right]
 \end{aligned}$$

Bu plak tipinin çözümü yukarıdaki değerler ile plak tipi 1'in değerlerinin süperpozisyonuyla elde edilir. Bu işlemler sonuçları bilgisayar ile yapılarak Tablo 2.3'de verilmiştir.

TABLO 2.3

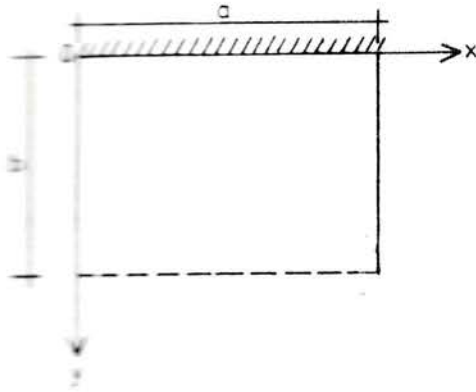
PLAK TIPI 3 ICIN KATSAYILAR TABLOSU

$B/A=1.2$



NO ELE	K	M_x	M_y	M_{xy}	Q_x	Q_y	V_x	V_y
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.033193	0.025201	0.000000	0.025201	0.000000
2	0.000002	0.000146	0.000044	0.020596	0.000077	0.277690	0.000077	0.351690
3	0.000002	0.000116	0.000035	0.000000	0.000000	0.335077	0.000000	0.419503
4	0.000002	0.000146	0.000044	-0.020596	-0.000077	0.277690	-0.000077	0.351690
5	0.000000	0.000000	0.000000	-0.033193	-0.025201	0.000000	-0.025201	0.000000
6	0.000000	0.000000	0.000000	0.017470	0.303193	0.000000	0.377767	0.000000
7	0.027464	0.033507	0.031200	0.011006	0.114036	0.070017	0.163431	0.119029
8	0.037923	0.041007	0.041500	0.000000	0.000000	0.106464	0.000000	0.156000
9	0.027464	0.033507	0.031200	-0.011006	-0.114036	0.070017	-0.163431	0.119029
10	0.000000	0.000000	0.000000	-0.017470	-0.303193	0.000000	-0.377767	0.000000
11	0.000000	0.000000	0.000000	-0.005457	0.331441	0.000000	0.404723	0.000000
12	0.033662	0.039516	0.033132	-0.003020	0.131405	-0.035492	0.102119	-0.047732
13	0.046564	0.048575	0.044437	0.000000	0.000000	-0.049001	0.000000	-0.066604
14	0.033662	0.039516	0.033132	0.003020	-0.131405	-0.035492	-0.102119	-0.047732
15	0.000000	0.000000	0.000000	0.005457	-0.331441	0.000000	-0.404723	0.000000
16	0.000000	0.000000	0.000000	-0.022207	0.191467	0.000000	0.217163	0.000000
17	0.010019	0.020036	0.012712	-0.014930	0.039794	-0.105104	0.052570	-0.236715
18	0.024661	0.022530	0.015350	0.000000	0.000000	-0.251035	0.000000	-0.315109
19	0.010019	0.020036	0.012712	0.014930	-0.039794	-0.105104	-0.052570	-0.236715
20	0.000000	0.000000	0.000000	0.022207	-0.191467	0.000000	-0.217163	0.000000
21	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.366250	0.000000	-0.640266	0.000000
22	0.000000	-0.022300	-0.074002	0.000000	-0.109329	-0.530610	-0.322473	-0.530610
23	0.000000	-0.029392	-0.098325	0.000000	0.000000	-0.635144	0.000000	-0.635144
24	0.000000	-0.022300	-0.074002	-0.000000	0.109329	-0.530610	0.322473	-0.530610
25	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.366250	0.000000	0.640266	0.000000

2.6. PLAK TİPİ 4'ÜN ÇÖZÜMÜ VEREN ELASTİK YÜZEY VE KESİT TESİRLERİ DENKLEMLERİ



Şekil 2.5

Şekil 2.5'te gösterilen plak $x=0$ ve $x=a$ kenarlarından basit mesnetlidir. Plakın diğer kenarları olan $y=0$ kenarı ankastre, $y=b$ ise serbesttir. Bu plak için elastik yüzey denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.5)$$

Burada

$$w_m = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} - D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$A_m = -\frac{4}{\pi^5 m^5} \quad D = -C_m$$

$$w_m = \frac{4(3-\nu)(1-\nu) \cosh^2 \beta_m + 2\nu \cosh \beta_m - \nu(1-\nu) \beta_m \sinh \beta_m - (1-\nu^2)}{\pi^5 m^5 (3-\nu)(1-\nu) \cosh^2 \beta_m + (1-\nu^2) \beta_m^2 + (1+\nu)^2}$$

$$C_m = \frac{4(3-\nu)(1-\nu) \sinh \beta_m \cosh \beta_m + \nu(1+\nu) \sinh \beta_m - \nu(1-\nu) \beta_m \cosh \beta_m - (1-\nu^2) \beta_m}{\pi^5 m^5 (3+\nu)(1-\nu) \cosh^2 \beta_m + (1-\nu^2)^2 \beta_m^2 + (1+\nu)^2}$$

$$\beta_m = \frac{m\pi b}{a}$$

olarak verilmiştir.

Bu elastik yüzey denkleminin bölüm 1'deki (1.10), (1.12), (1.14) nolu denklemlerde yerlerine konulmasıyla aşağıdaki kesit tesirleri elde edilir.

$$\frac{W}{h} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} + qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a}$$

$$+ D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}) - \nu qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + 2B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a}$$

$$+ 2D_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a})$$

$$w_{xy} = -qa^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \left(A_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} + 2B_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. - C_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} + 2D_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right) + v \frac{4qa^2}{3\pi}$$

$$\frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi x}{a} + vqa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \left(A_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. - B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$w_{yy} = (1-v)qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \cos \frac{m\pi x}{a} \left(A_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right.$$

$$\left. - B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$w_{yy} = \frac{qa^2}{1-v} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{a} - 2qa^2 \pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \cos \frac{m\pi x}{a} \left(B_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right.$$

$$\left. - D_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$w_{xy} = -qa^2 \pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \sin \frac{m\pi x}{a} \left(B_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$w_{yy} = qa^2 (1-v) \pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \cos \frac{m\pi x}{a} \left(A_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} + 2B_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right.$$

$$\left. B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} + 2D_m \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$\left. - D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

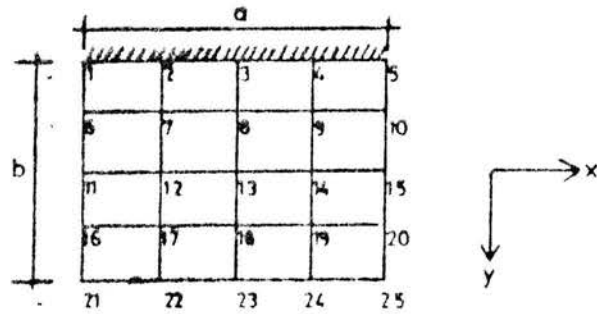
$$\begin{aligned} \bar{u}_y = \bar{u}_y + (1-\nu)qa\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \sin \frac{m\pi x}{a} & (A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \\ & + B_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + D_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \\ & - D_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a}) \end{aligned}$$

Bu değerlerin bilgisayar ile elde edilen cözümleri Tablo 2.4'-de verilmiştir.

TABLO 2.4

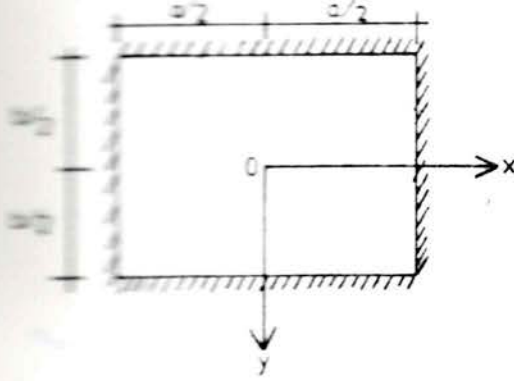
PLAK TIPI 4 ICIN KATSAYILAR TABLOSU

$B/A=1.2$



NOKTA NO	W	M _x	M _y	M _{xy}	Q _x	Q _y	V _x	V _y
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.464665	0.000000	-0.789930	0.000000
2	0.000000	-0.027397	-0.091323	0.000000	-0.241959	0.591563	-0.411331	0.591563
3	-0.000000	-0.036498	-0.121659	0.000000	0.000000	0.721320	0.000000	0.721320
4	0.000000	-0.027397	-0.091323	0.000000	0.241959	0.591563	0.411331	0.591563
5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.464665	0.000000	0.789930	0.000000
6	0.000000	0.000000	0.000000	0.032677	0.151083	0.000000	0.150392	0.000000
7	0.024097	0.022768	0.005581	0.022272	0.028737	0.210932	0.022323	0.293556
8	0.033257	0.026476	0.005298	0.000000	0.000000	0.299545	0.000000	0.395502
9	0.024097	0.022768	0.005581	-0.022272	-0.028737	0.210932	-0.022323	0.293556
10	0.000000	0.000000	0.000000	-0.032677	-0.151083	0.000000	-0.150392	0.000000
11	0.000000	0.000000	0.000000	0.025298	0.337036	0.000000	0.370636	0.000000
12	0.055313	0.055168	0.026275	0.017792	0.152200	0.074300	0.175196	0.130033
13	0.077170	0.070712	0.034822	0.000000	0.000000	0.104620	0.000000	0.103202
14	0.055313	0.055168	0.026275	-0.017792	-0.152200	0.074300	-0.175196	0.130033
15	0.000000	0.000000	0.000000	-0.025298	-0.337036	0.000000	-0.370636	0.000000
16	0.000000	0.000000	0.000000	0.010036	0.305337	0.000000	0.302450	0.000000
17	0.077589	0.072345	0.023274	0.013310	0.106617	0.003575	0.104015	0.039709
18	0.100653	0.094097	0.030710	0.000000	0.000000	0.005931	0.000000	0.056910
19	0.077589	0.072345	0.023274	-0.013310	-0.106617	0.003575	-0.104015	0.039709
20	0.000000	0.000000	0.000000	-0.010036	-0.305337	0.000000	-0.302450	0.000000
21	0.000000	0.000000	0.000000	0.029751	0.337451	0.000000	0.226924	0.000000
22	0.099969	0.004109	0.000500	0.010077	0.160017	-0.065076	0.120251	-0.004709
23	0.140179	0.111005	-0.000932	0.000000	0.000000	-0.004169	0.000000	0.006659
24	0.099969	0.004109	0.000500	-0.010077	-0.160017	-0.065076	-0.120251	-0.004709
25	0.000000	0.000000	0.000000	-0.029751	-0.337451	0.000000	-0.226924	0.000000

2.7. PLAK TİPİ 5'İN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN SİMETRİK YÜKLEMeye
ALT ELASTİK YÜZEY VE KESİT TESİRLERİ DENKLEMLERİ



Şekil 2.6

Şekil 2.6'daki gösterilen plak bütün kenarlarından an-
kustredir. Bu plağın çözümü plak tipi 1'in çözümünden fayda-
lanılarak yapılır. Simetrik yüklemekten dolayı $y = \pm b/2$ ve
 $x = \pm a/2$ kenarlarında meydana gelen elastik yüzey denklemleri
 w_1 ve w_2 ile gösterilerek aşağıdaki şekilde yazılır.

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m \sin \frac{m\pi}{2}}{2\pi^2 D} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (2.6)$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_m \sin \frac{m\pi}{2}}{2\pi^2 D} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\frac{m\pi x}{b} \sinh \frac{m\pi x}{b} - \beta_m \operatorname{tgh} \beta_m \operatorname{Cosh} \frac{m\pi x}{b} \right) \quad (2.7)$$

Burada

$$\alpha_m = \frac{m\pi a}{2b}$$

ile gösterilir.

Elastik yüzey denklemlerinin (1.10), (1.12) ve (1.14)
moldu denklemlerinde yerlerine konulmasıyla aşağıdaki kesit
tesirleri denklemleri elde edilir.

$$w_{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} -E_m \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{2\cosh\alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{tgh}\alpha_m \right.$$

$$\left. \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) + \nu \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{2\cosh\alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(2\cosh \frac{m\pi y}{a} \right.$$

$$\left. - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{tgh}\alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$w_{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{2\cosh\alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(2\cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right.$$

$$\left. - \alpha_m \operatorname{tgh}\alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) - \nu \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{2\cosh\alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right.$$

$$\left. - \alpha_m \operatorname{tgh}\alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$w_{xy} = \frac{(1-\nu)}{2} \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh\alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a} \left(\sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right.$$

$$\left. - \alpha_m \operatorname{tgh}\alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$w_{xy} = -\frac{\pi}{a} \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{m \sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh\alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}$$

$$w_{xy} = C_{x1} - \frac{(1-\nu)\pi}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{m \sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh\alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a} \left(2\cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right.$$

$$\left. - \alpha_m \operatorname{tgh}\alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

$$w_{xy} = \frac{\pi}{a} \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{m \sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh\alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{11} &= \phi_{12} - \frac{(1-\nu)}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \frac{m \sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right. \\
 &\quad \left. - \beta_m \operatorname{tgh} \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{12} &= \sum_{m=1}^{\infty} F_m \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{2 \cosh \beta_m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(2 \cosh \frac{m\pi x}{b} + \frac{m\pi x}{b} \sinh \frac{m\pi x}{b} \right. \\
 &\quad \left. - \beta_m \operatorname{tgh} \beta_m \cosh \frac{m\pi x}{b} \right) - \nu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{2 \cosh \beta_m} \left(\frac{m\pi x}{b} \sinh \frac{m\pi x}{b} \right. \\
 &\quad \left. - \beta_m \operatorname{tgh} \beta_m \cosh \frac{m\pi x}{b} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{13} &= \sum_{m=1}^{\infty} F_m \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{2 \cosh \beta_m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\frac{m\pi x}{b} \sinh \frac{m\pi x}{b} - \beta_m \operatorname{tgh} \beta_m \cosh \frac{m\pi x}{b} \right) \\
 &\quad - \nu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{2 \cosh \beta_m} \left(2 \cosh \frac{m\pi x}{b} + \frac{m\pi x}{b} \sinh \frac{m\pi x}{b} - \beta_m \operatorname{tgh} \beta_m \cosh \frac{m\pi x}{b} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{14} &= \frac{(1-\nu)}{2} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \beta_m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\sinh \frac{m\pi x}{b} + \frac{m\pi x}{b} \cosh \frac{m\pi x}{b} \right. \\
 &\quad \left. - \beta_m \operatorname{tgh} \beta_m \sinh \frac{m\pi x}{b} \right)
 \end{aligned}$$

$$\phi_{15} = \frac{1}{b} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \frac{m \sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \beta_m} \sin \frac{m\pi y}{b} \sinh \frac{m\pi x}{b}$$

$$\phi_{16} = -\frac{1}{b} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \frac{m \sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \beta_m} \cos \frac{m\pi y}{b} \cosh \frac{m\pi x}{b}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x_2} = Q_{x_2} - \frac{(1-\nu)\pi}{2b} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \frac{m \sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \beta_m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\sinh \frac{m\pi x}{b} + \frac{m\pi x}{b} \cosh \frac{m\pi x}{b} \right. \\ \left. - \beta_m \operatorname{tgh} \beta_m \sinh \frac{m\pi x}{b} \right) \end{aligned}$$

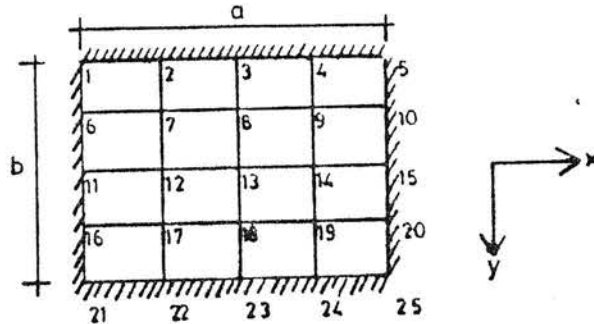
$$\begin{aligned} \sigma_{y_2} = Q_{y_2} - \frac{(1-\nu)\pi}{2b} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \frac{m \sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \beta_m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(2 \cosh \frac{m\pi x}{b} + \frac{m\pi x}{b} \sinh \frac{m\pi x}{b} \right. \\ \left. - \beta_m \operatorname{tgh} \beta_m \cosh \frac{m\pi x}{b} \right) \end{aligned}$$

Bu plak tipinin çözümü yukarıdaki değerler ile plak tipi 1'in değerlerinin süperpozisyonuyla elde edilir. Bilgisayar ile yapılan bu işlemler Tablo 2.5'de verilmiştir.

TABLO 2.5

PLAK TIPI 5 ICIN KATSAYILAR TABLOSU

$B/A=1.2$



NO	W	M _x	M _y	M _{xy}	Q _x	Q _y	V _x	V _y
1	0.000000	0.000000	0.000000	-0.001251	-0.013846	-0.058218	-0.041179	-0.098970
2	0.000002	-0.010247	-0.034601	-0.000064	-0.161374	0.312908	-0.274949	0.306247
3	0.000002	-0.016634	-0.055798	0.000000	0.000000	0.467884	0.000000	0.462972
4	0.000002	-0.010247	-0.034601	0.000064	0.161374	0.312908	0.274949	0.306247
5	0.000000	0.000000	0.000000	0.001251	0.013846	-0.058218	0.041179	-0.098970
6	0.000000	-0.042705	-0.012811	-0.000060	0.367960	-0.147485	0.362799	-0.250725
7	0.006939	0.007876	0.007421	0.000427	0.111177	0.054955	0.128896	0.069282
8	0.011709	0.018033	0.013569	0.000000	0.000000	0.125397	0.000000	0.168285
9	0.006939	0.007876	0.007421	-0.000427	-0.111177	0.054955	-0.128896	0.069282
10	0.000000	-0.042705	-0.012811	0.000060	-0.367960	-0.147485	-0.362799	-0.250725
11	0.000000	-0.064397	-0.019319	0.000000	0.496974	0.000000	0.493191	0.000000
12	0.011016	0.011813	0.011361	0.000000	0.191635	0.000000	0.223710	0.000000
13	0.018836	0.029972	0.022840	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
14	0.011016	0.011813	0.011361	0.000000	-0.191635	0.000000	-0.223710	0.000000
15	0.000000	-0.064397	-0.019319	0.000000	-0.496974	0.000000	-0.493191	0.000000
16	0.000000	-0.042705	-0.012811	0.000060	0.367960	0.147485	0.362799	0.250725
17	0.006939	0.007876	0.007421	-0.000427	0.111177	-0.054955	0.128896	-0.069282
18	0.011709	0.018033	0.013569	0.000000	0.000000	-0.125397	0.000000	-0.168285
19	0.006939	0.007876	0.007421	0.000427	-0.111177	-0.054955	-0.128896	-0.069282
20	0.000000	-0.042705	-0.012811	-0.000060	-0.367960	0.147485	-0.362799	0.250725
21	0.000000	0.000000	0.000000	0.001251	-0.013846	0.058218	-0.041179	0.098970
22	0.000002	-0.010247	-0.034601	0.000064	-0.161374	-0.312908	-0.274949	-0.306247
23	0.000002	-0.016634	-0.055798	0.000000	0.000000	-0.467884	0.000000	-0.462972
24	0.000002	-0.010247	-0.034601	-0.000064	0.161374	-0.312908	0.274949	-0.306247
25	0.000000	0.000000	0.000000	-0.001251	0.013846	0.058218	0.041179	0.098970

BÖLÜM III

SONLU FARKLAR METODU

B.1. GİRİŞ

Bir problemin çözümü kapalı formda integrali alınamayan diferansiyel bir denklemlerle sonuçlandırıldığında, yaklaşık çözüm metodları kullanılır. Bunlar genellikle seri açılımına dayanır. Özel noktalarda belirsiz integralin hesaplanmasına götüren tamamen sayısal metodlar da kullanılabilir. Adi veya kısmi diferansiyel denklemleri içeren başlangıç değeri ve sınır değer problemleri bu tür metodlar ile çözülebilir. Sayısal çözümler genellikle fizik kanunlarının açıklanmasına münasefetmez. Fakat denklemler boyutsuz formda yazılırsa problemin değişik parametrelerinde istenen değişkenlerin bağımlılığını sık sık gösterir(12).

Yapı analizinde çözüm metodlarının bir bölümü temel olarak diferansiyel denge ve uygunluk şartı denklemlerinin çözümlerine dayanır. Analitik çözümler şartlara bağlıdır. Yük dağılımı, kesit özellikleri ve sınır şartları matematiksel ifadelerle çözümlenebilir olmalıdır. Fakat gayrimuntazam yapılar için sayısal metodlar daha uygundur. Çünkü sayısal metodların ileri matematik ve fizik bilgisi gerekmeksizin çözümleri operatörlerle gerçekleştirmeleri diğer metodlara göre kolaydır.

Yapı analizinin çoğunda amaç sürekli denge problemini sonlu sayıda serbest dereceli bir sisteme indirgemektir. Analizi yapan kişi tecrübe sahibi ise sonlu sayıda parametre ile iyi bir yaklaşım elde edebilir.

Sınır değer problemlerinin kesin çözümleri yoktur. Bu yüzden çözümler genellikle yaklaşık sayısal metodlar ile yapılır. Bu metodları ikiye ayırabiliriz. Bunlardan birincisi diferansiyel denklemin sağlanmasını ister, sınır şartlarının sağlanmasında ise yaklaşıklık kabul eder. İkincisi ise sınır şartlarının kesin olarak sağlanmasını ister. Bu grup metodlar diferansiyel denklemin sağlanmasında ise yaklaşıklık kabul eder. İkinci gruba giren Sonlu Farklar Metodu bundan sonraki kısımlarda daha ayrıntılı izah edilecektir(6).

3.2. SONLU FARKLAR METODU

Denge veya gerilme problemlerini yapı sistemi üzerinde noktalar seçerek çözmeye yarayan sayısal metodlardan birisi de Sonlu Farklar Metodudur. Bu metodla sürekli sistemler eşdeğer ayırık sistemlere indirgenerek çözülür. Bu yol daha basittir ve birçok problemin çözümünde uygulanabilir. Metodun esası diferansiyeller yerine sonlu fark denklemlerini alarak problemin diferansiyel denklemini fonksiyonun ayırık noktalarındaki değerlerinden faydalanarak çözmektir. Sonlu Farklar Metodunun problemleri çözümünde sınır değerlerin kesin olarak bilinmesi gerekir. Çünkü bu metotta daha önce belirtildiği gibi sınır şartlarının kesin olarak sağlanması gerekir. Sınır şartlarında yaklaşık değer verilmesi bu metod için uygun değildir.

Metotdaki temel yaklaşım sürekli bir çözüm alanını ayırık noktalara ayırmaktır. Böylece bu alanın tamamındaki sürekli bir çözüm yerine sadece noktalarda yaklaşık değerler bulunarak problemin çözümüne ulaşılr. Gerektiği zaman ara

Değerler, türevler veya integraller ayrık çözümden interpolasyon ile elde edilir(14).

Sürekli çözüm alanına ait denklemlerin ve sınır şartlarının ayrık sistemin denklemlerine indirgenmesi matematiksel olarak fiziki olarak başarılabilir. Matematik yolda sürekli diferansiyel türevleri sonlu fark yaklaşımları ile değiştirilecek daha basit bir hale getirilir(14).

Bu metod diğer sayısal metodlara nazaran basit olması nedeniyle birçok probleme kolayca uygulanabilir. Çünkü problemin çözümünde uygun sınır şartları verildiğinde Sonlu Elemanlar Metoduna göre denklem sayısının az olması Sonlu Farklar Metodunun bir avantajıdır(13).

Sonlu Farklar Metodunun diğer özelliklerinden birisi de sınırları düzgün olmayan sistemlerin çözümlerinde de kullanılabilir. Ayrıca diferansiyel denklemlerin yerleşmesinden ve sınır şartlarından ortaya çıkan hataların fark denklemleriyle azaltılabilmesi veya tamamen yok edilebilmesi metodun önemli özelliklerinden birisidir(11).

Sonlu Farklar Metodu sürekli bir sistemin diferansiyel denklemler ve sınır şartlarına uygulanırsa lineer denklem takımı elde edilir. Metodun en büyük zorluklarından birisi ise fazla detaya inilen çözümlerde denklem sayısının büyük olmasıdır. Fakat bu denklem takımları incelenirse çok sayıda bilinmeyen olmasına rağmen bu bilinmeyenler arasında benzerlik kurulabilir. Bundan faydalanarak denklem sayısı azaltılabilir(14).

3.3. SONLU FARKLAR METODUNUN PLAKLARA UYGULANMASI

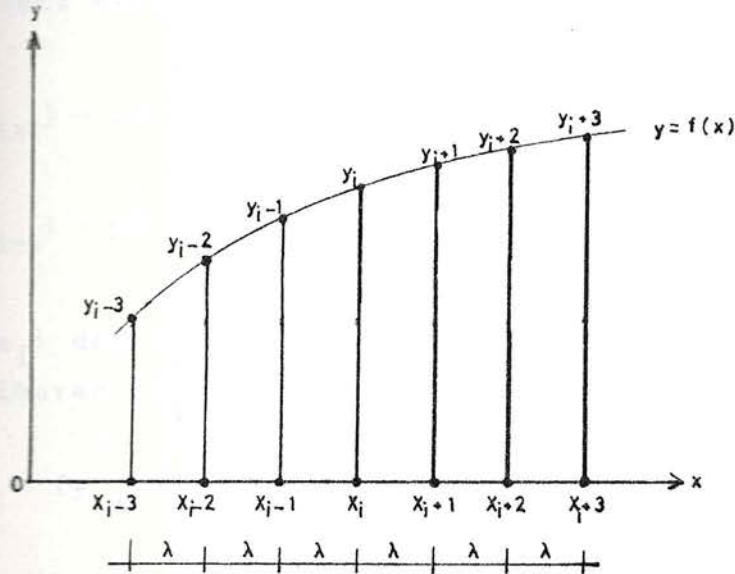
Her düzlem-gerilme ve plak-eğilme problemleri kısmi diferansiyel denklemleri kapsar. Ayrıca plak gerilme ve yer

değiştirmeleri verilen kuvvetlerin etkisi altında temel sınır şartlarına bağlı kalmaktadır. Bu yüzden plak probleminin sınır şartlarına bağlı kalarak çözülmesi gerekir.

Diferansiyel denklemleri sınır şartlarının kesin olarak sağlanmasını isteyerek çözen sayısal çözüm metodlarından Sonlu Farklar Metodu plak düşey yerdeğiştirme ve kesit tesirlerinin bulunmasında değişik mesnet şartları ile yük durumları için kullanılabilir.

Metodun esasları plak genel denklemi yerine onun sonlu fark yaklaşımını koymak ve daha sonra plakta tanımlanan ayrık noktalarda elde edilen sonlu fark denklemlerini cebirsel olarak çözmektir. Denklemler çözüldüğünde değişik noktalar için düşey yer değiştirme ve kesit tesirleri değerleri yaklaşık olarak bulunur.

Metodun açıklanması için esasını teşkil eden fark denklemlerinin bilinmesi gerekir. Bunun için $y = f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.



Şekil 3.1

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi bu fonksiyon noktalara ayrılmıştır. Noktalar arasındaki mesafeler eşit olup λ ile gösterilmektedir.

Bir $y(x)$ fonksiyonunun $x=a$ civarındaki Taylor serisi geliştirileneceği gibi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$y(x) = y(a) + \frac{x-a}{1!} y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} y''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(a) + \dots \quad (3.1)$$

Taylor serisinde $x = a + \lambda$ konulursa bir λ artmasının etkilerine göre

$$y(a+h) = y(a) + \frac{\lambda}{1!} y'(a) + \frac{\lambda^2}{2!} y''(a) + \frac{\lambda^3}{3!} y'''(a) + \dots \\ + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(a) + \dots \quad (3.2)$$

serisi elde edilir. Bu seriden faydalanarak $y = f(x)$ fonksiyonunun x_{i+1} ve x_{i-1} noktalarındaki değerleri Taylor serisinin aşağıdaki şekilde bulunur.

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{\lambda}{1!} y'(x_i) + \frac{\lambda^2}{2!} y''(x_i) + \dots \quad (3.3)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{\lambda}{1!} y'(x_i) + \frac{\lambda^2}{2!} y''(x_i) + \dots$$

$y(x_i)$ değerini kısaca y_i ile göstererek ve ikinci terimden itibaren terimleri ihmal ederek (3.3) denklemleri

$$y'_i = (y_{i+1} - y_i) / \lambda \quad (3.4)$$

$$y'_i = (y_i - y_{i-1}) / \lambda$$

şeklinde yazılabilir.

Yukarıdaki iki denklemin ortak çözümünden birinci türev denklemi

$$y'_i = \frac{1}{2\lambda} (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (3.5)$$

bulunur.

İkinci türevi elde etmek için benzer şekilde

$$y'_{i+1} = \frac{1}{2\lambda} (y_{i+2} - y_i) \quad (3.6)$$

$$y'_{i-1} = \frac{1}{2\lambda} (y_i - y_{i-2})$$

yazılır.

İkinci türev bu denklemlerin farkı şeklinde

$$y''_i = \frac{1}{2\lambda} (y'_{i+1} - y'_{i-1}) \quad (3.7)$$

elde edilir. Buradan (3.6) denklemlerinin yerine konulmasıyla ikinci türev denklemi

$$\begin{aligned} y''_i &= \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{1}{2\lambda} (y_{i+2} - y_i) - \frac{1}{2\lambda} (y_i - y_{i-2}) \right] \\ &= \frac{1}{4\lambda^2} (y_{i+2} - y_i - y_i + y_{i-2}) \\ &= \frac{1}{4\lambda^2} (y_{i-2} - 2y_i + y_{i+2}) \\ &= \frac{1}{4\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \end{aligned}$$

$$y''_i = \frac{1}{\lambda^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \quad (3.8)$$

bulunur.

Üçüncü türev denklemini elde etmek için

$$y_{i+1}''' = \frac{1}{\lambda^2} (y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}) \quad (3.9)$$

$$y_{i-1}'' = \frac{1}{\lambda^2} (y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i)$$

yazılabilir. Bu denklemlerin farkını alarak yukarıdakilere benzer şekilde üçüncü türev denklemi

$$y_i''' = \frac{1}{2\lambda^3} (-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}) \quad (3.10)$$

bulunabilir.

Dördüncü türev denklemini elde etmek için ikinci türev denkleminden faydalanılabilir. Bu denklem

$$y_i'''' = \frac{1}{\lambda^2} (y_{i-1}'' - 2y_i'' + y_{i+1}'') \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. İkinci türev denklemi için yazılabilen (3.8) ve (3.9) değerleri (3.11) de yerlerine konulursa

$$y_i'''' = \frac{1}{\lambda^4} (y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) \quad (3.12)$$

elde edilir.

(3.5), (3.8), (3.10) ve (3.12) nolu denklemler birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevlerin sonlu fark denklemleriyle ifade şekilleridir. Bu denklemler i 'nin her iki tarafındaki ordinatlara göre bulduklarından merkezi farklar olarak bilinirler.

Bulunan sonlu fark denklemleri i noktası merkez olmak üzere molekül formunda aşağıdaki şekilde gösterilir:

	<u>i-2</u>	<u>i-1</u>	<u>i</u>	<u>i+1</u>	<u>i+2</u>
$2\lambda \left(\frac{d}{dx}\right) :$		-1	0	1	
$\lambda^2 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 :$		1	-2	1	
$2\lambda^3 \left(\frac{d}{dx}\right)^3 :$	-1	2	0	-2	1
$\lambda^4 \left(\frac{d}{dx}\right)^4 :$	1	-4	6	-4	1

Sonlu fark denklemleriyle benzer olarak kısmi türevlerde kolaylıkla yaklaşık olarak elde edilebilir.

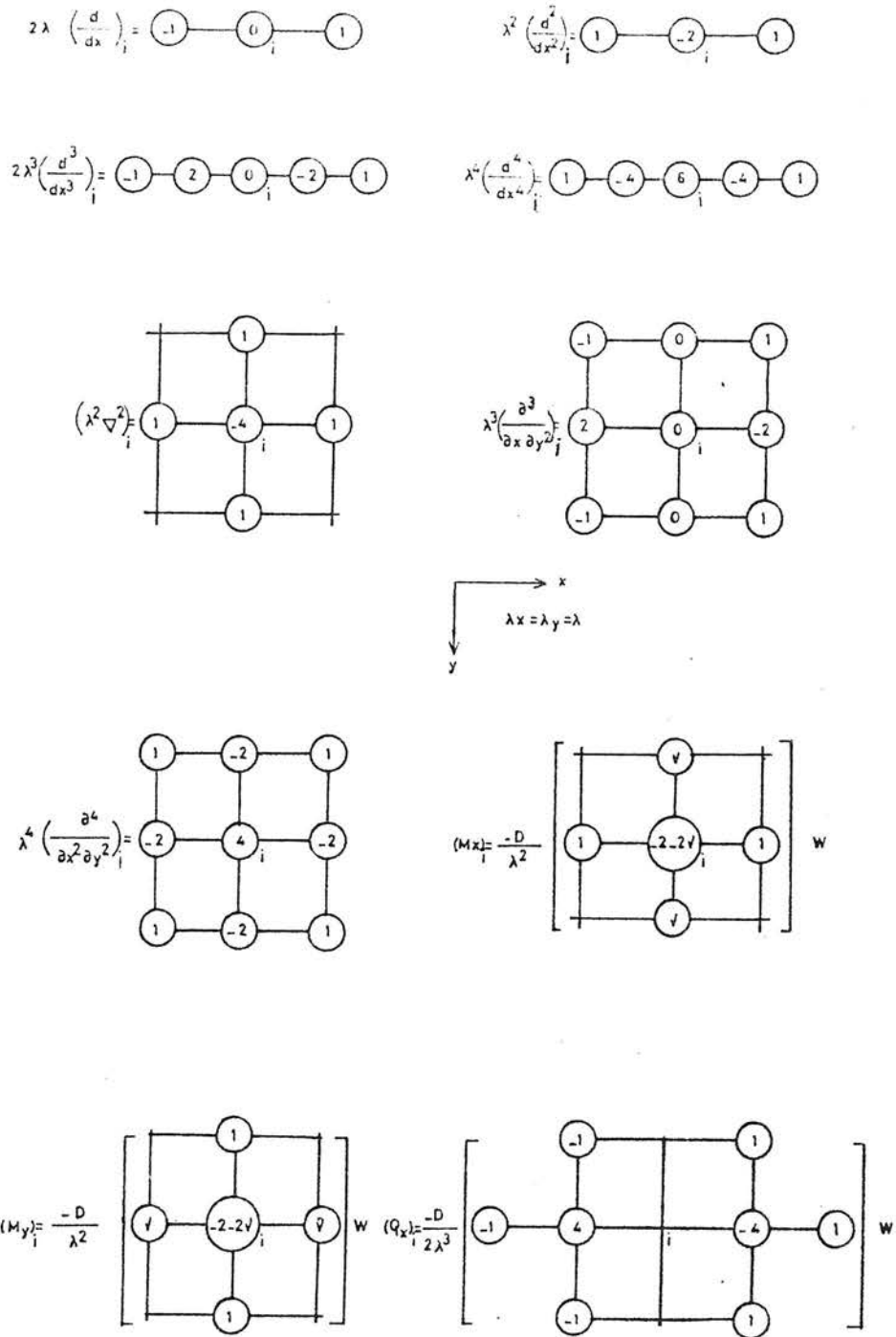
Plakların düşey yer değiştirme ve kesit tesirleri değerleri de sonlu fark denklemleri ile bulunabilir. Bölüm aralığı olan kare ağırlarda en çok kullanılan operatörler için sonlu fark hesap molekülleri Şekil 3.2 ve 3.3'de verilmiştir.

Sonlu fark denklemleri dikdörtgen plaklarda da kullanılabilir. Bölüm aralığı x yönünde λ_x , y yönünde λ_y olan dikdörtgen ağırlarda da benzer şekilde bulunan sonlu fark hesap molekülleri Şekil 3.4 ve 3.5'de verilmiştir. Burada bölüm aralıkları arasında

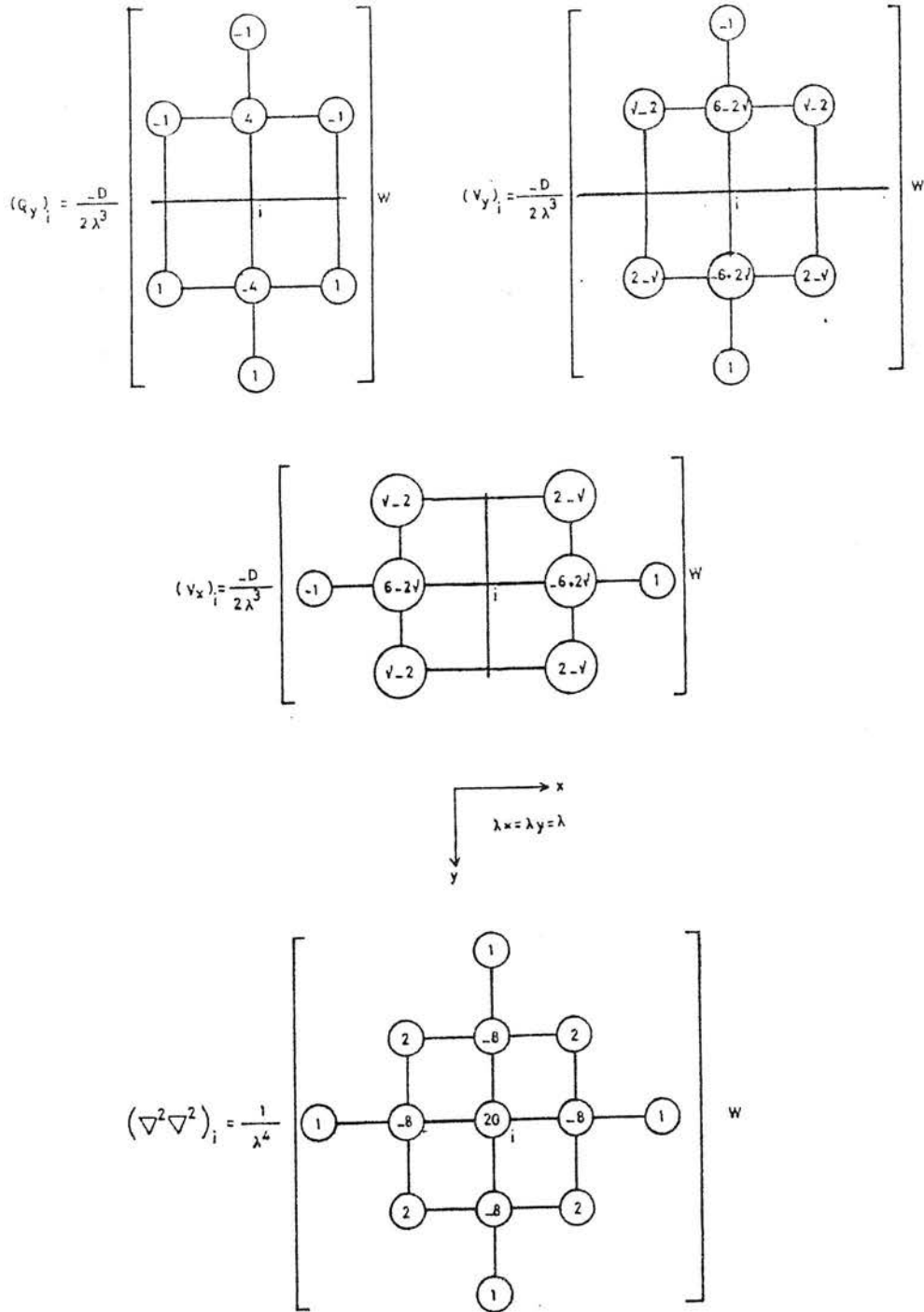
$$\alpha = \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^2$$

olarak alınmıştır.

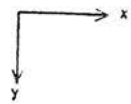
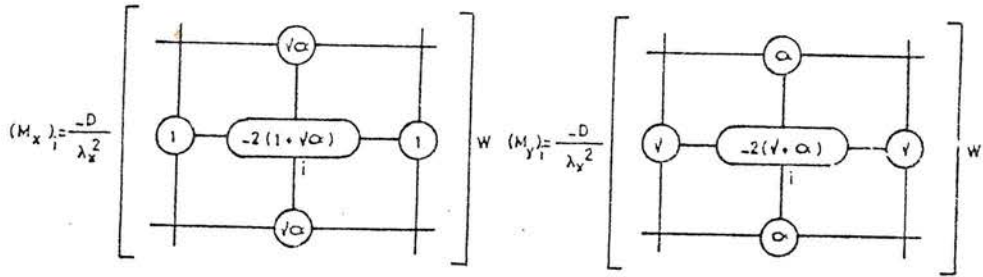
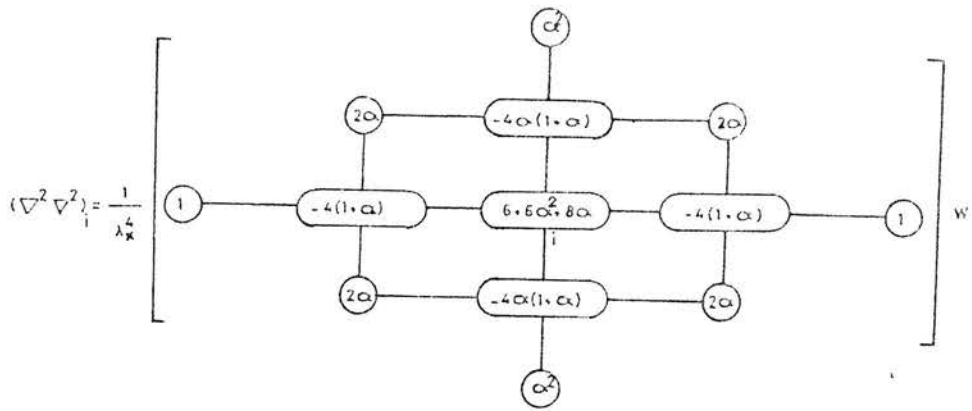
Buraya kadar Sonlu Farklar Metodunun esasları ve plaklara uygulanması hakkında bilgi verilmiştir. Bundan sonraki kısımlarda metodun plaklara uygulanması örneklerle açıklanacaktır.



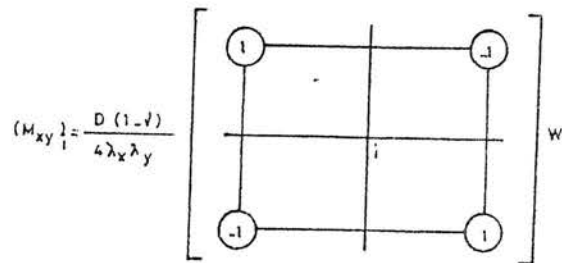
Şekil 3.2. Sonlu fark hesap molekülleri



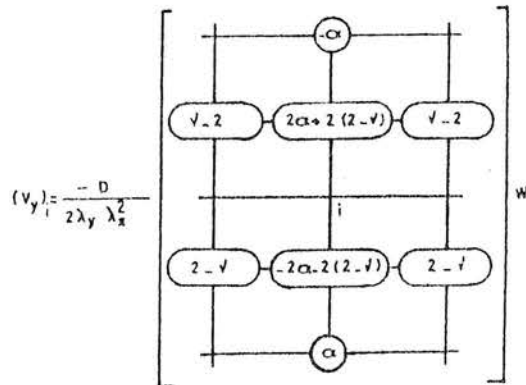
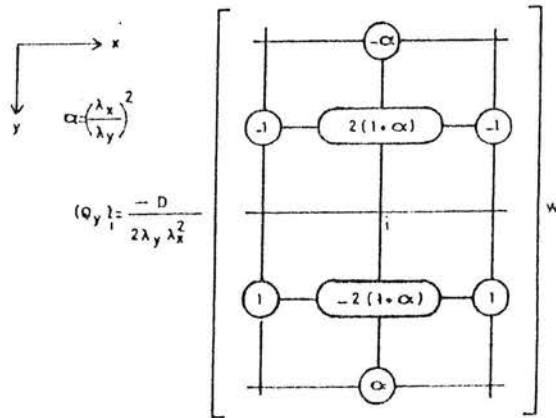
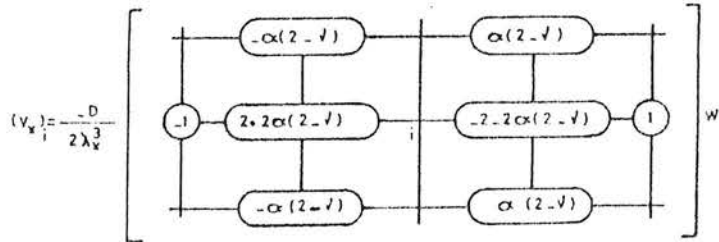
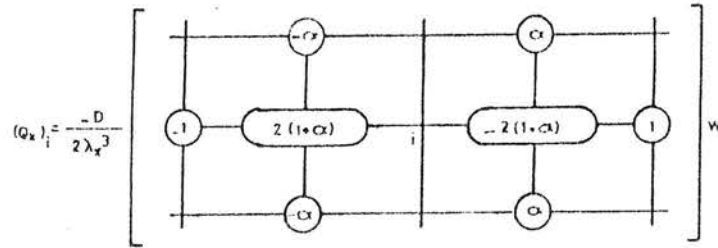
Şekil 3.3. Sonlu fark hesap molekülleri



$$\alpha = \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y} \right)^2$$

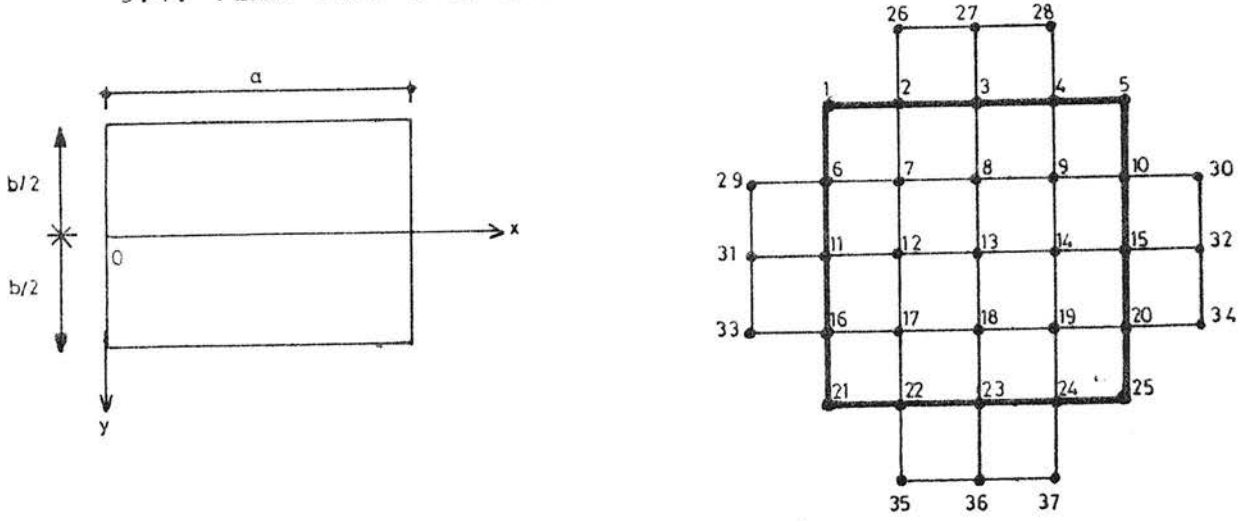


Şekil 3.4. Sonlu fark hesap molekülleri



Şekil 3.5. Sonlu fark hesap molekülleri

3.4. PLAK TİPİ 1'İN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ



(a)

Şekil 3.6

(b)

Kenar uzunlukları a ve b olan dikdörtgen bir plak bütün kenarlarından basit mesnetlidir. Kenarları arasındaki oran $b/a=1.2$ olan bu plağın üniform yayılı yük hali için çözümünü Sonlu Farklar Metodu ile yapılacaktır ($\nu=0.3$).

Çözüm: Şekil 3.6b'de gösterildiği gibi plağı kenarlarından dörde bölelim. Bu durumda bölüm aralıkları $\lambda x=a/4=0.25a$ ve $\lambda y=b/4=0.3a$ olur. Plağın sınır şartları Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

TABLO 3.1

Kenar Tipi	Sınır Şartları
Basit Mesnetli Kenarlar	$w=0: w_1=w_2=w_3=w_4=w_5=w_6=w_{10}=w_{11}=w_{15}=w_{16}=w_{20}=w_{22}=w_{23}=w_{24}$ $w_{25}=0$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0: w_7=-w_{29}, w_9=-w_{30}, w_{12}=-w_{31}, w_{14}=-w_{32}, w_{17}=-w_{33},$ $w_{19}=-w_{34}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0: w_7=-w_{26}, w_8=-w_{27}, w_9=-w_{28}, w_{17}=-w_{35},$ $w_{18}=-w_{36}, w_{19}=-w_{37}$

Sınır şartlarının belirlenmesinden sonra dokuz bilinmeyen kalır. Her bilinmeyen nokta için (1.13c) denklemi Şekil 3.4'deki sonlu fark hesap moleküllerinden faydalanarak yazılır. Bu denklemler matris formda aşağıdaki şekli alır.

12.9668	-6.7777	1	-4.7067	1.3888	0	0.4822	0	0	ω_7	1
-6.7777	13.9668	-6.7777	1.3888	-4.7067	1.3888	0	0.4822	0	ω_8	1
1	-6.7777	12.9668	0	1.3888	-4.7067	0	0	0.4822	ω_9	1
-4.7067	1.3888	0	13.4490	-6.7777	1	-4.7067	1.3888	0	ω_{12}	1
1.3888	-4.7067	1.3888	-6.7777	14.4490	-6.7777	1.3888	-4.7067	1.3888	ω_{13}	1
0	1.3888	-4.7067	1	-6.7777	13.4490	0	1.3888	-4.7067	ω_{14}	1
0.4822	0	0	-4.7067	1.3888	0	12.9668	-6.7777	1	ω_{17}	1
0	0.4822	0	1.3888	-4.7067	1.3888	-6.7777	13.9668	-6.7777	ω_{18}	1
0	0	0.4822	0	1.3888	-4.7067	1	-6.7777	12.9668	ω_{19}	1

$= \frac{q \cdot \lambda x^4}{D}$

Yukarıdaki denklemlerin çözümünden:

$$\begin{aligned}\omega_7 &= 0.762983 \, q\lambda_x^4/D \\ \omega_8 &= 1.052993 \, q\lambda_x^4/D \\ \omega_9 &= 0.762983 \, q\lambda_x^4/D \\ \omega_{12} &= 1.036768 \, q\lambda_x^4/D \\ \omega_{13} &= 1.434528 \, q\lambda_x^4/D \\ \omega_{14} &= 1.036768 \, q\lambda_x^4/D \\ \omega_{17} &= 0.762983 \, q\lambda_x^4/D \\ \omega_{18} &= 1.052993 \, q\lambda_x^4/D \\ \omega_{19} &= 0.762983 \, q\lambda_x^4/D\end{aligned}$$

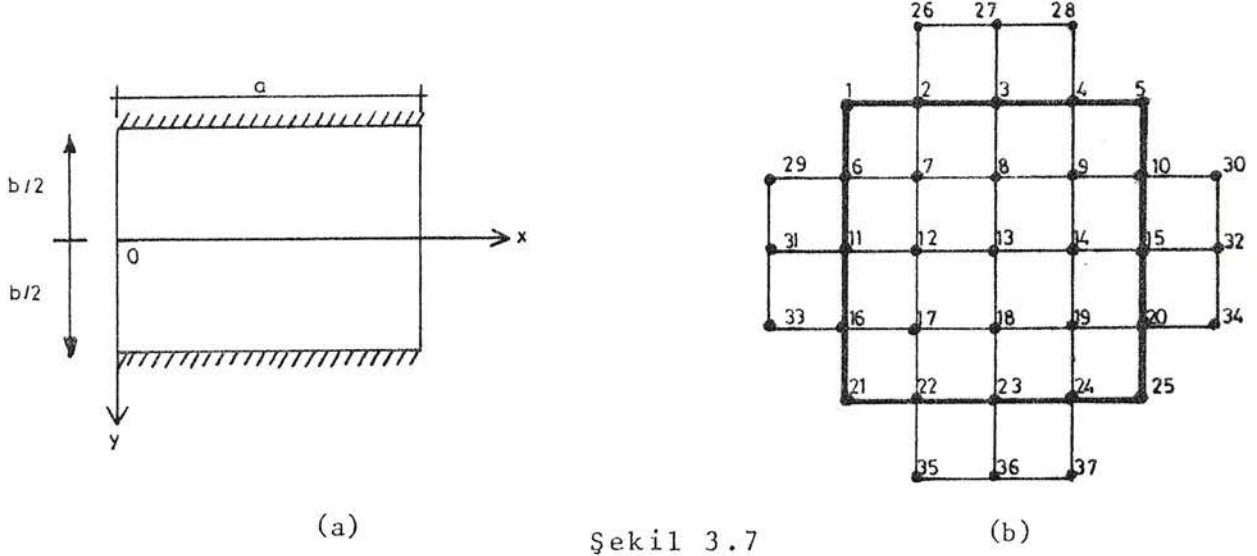
değerleri bulunur. Denklemlerin sonuçları ve Şekil 3.4 ve 3.5 deki sonlu fark hesap moleküllerinden yararlanarak hesaplanan ω , M_x , M_y , θ_x , θ_y değerleri Tablo 3.2'de gösterilmiştir.

TABLO 3.2. Plak Tipi 1'in Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm Sonuçları

Nokta No	$\omega = k \frac{qa^4}{Eh^3}$	$M_x = kqa^2$	$M_y = kqa^2$	$Q_x = kqa$	$Q_y = kqa$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0.1693
3	0	0	0	0	0.2179
4	0	0	0	0	0.1693
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0.2031	0
7	0.0325	0.0359	0.0301	0.1307	0.1061
8	0.0449	0.0449	0.0400	0	0.1380
9	0.0325	0.0359	0.0301	-0.1307	0.1061
10	0	0	0	-0.2031	0
11	0	0	0	0.2548	0
12	0.0442	0.0470	0.0357	0.1656	0
13	0.0611	0.0596	0.0480	0	0
14	0.0442	0.0470	0.0357	-0.1656	0
15	0	0	0	-0.2548	0
16	0	0	0	0.2031	0
17	0.0325	0.0359	0.0301	0.1307	-0.1061
18	0.0449	0.0449	0.0400	0	-0.1380
19	0.0325	0.0359	0.0301	-0.1307	-0.1061
20	0	0	0	-0.2031	0
21	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	-0.1693
23	0	0	0	0	-0.2179
24	0	0	0	0	-0.1693
25	0	0	0	0	0

k=katsayı

3.5. PLAK TİPİ 2'NİN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ



(a)

Şekil 3.7

(b)

Şekil 3.7a'da görülen plak karşılıklı iki kenarından basit mesnetli diğer kenarları ise ankastredir. Üniform yayınlı yüklü olan plağın kenarları arasındaki oran $b/a = 1.2$ 'dir. Bu plağı Sonlu Farklar Metodu ile çözelim ($\nu = 0.3$).

Çözüm: Şekil 3.7b'de gösterildiği gibi plağı kenarlarından dörde bölümlim. Bu durumda bölüm aralıkları $\lambda_x = \frac{a}{4} = 0.25a$ ve $\lambda_y = \frac{b}{4} = 0.3a$ olan bu plağın sınır şartları Tablo 3.3 de verilmiştir.

TABLO 3.3

Kenar Tipi	Sınır Şartları
Basit Mesnetli Kenarlar	$w=0: w_6=w_{10}=w_{11}=w_{15}=w_{16}=w_{20}=0$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0: w_7=-w_{29}, w_9=-w_{30}, w_{12}=-w_{31}, w_{14}=-w_{32}, w_{17}=-w_{33},$ $w_{19}=-w_{34}$
Ankastre Kenarlar	$w=0: w_1=w_2=w_3=w_4=w_5=w_{21}=w_{22}=w_{23}=w_{24}=w_{25}=0$ $\frac{\partial w}{\partial x} = 0: w_7=w_{26}, w_8=w_{27}, w_9=w_{28}, w_{17}=w_{35}, w_{18}=w_{36},$ $w_{19}=w_{37}$

Sınır şartlarının belirlenmesinden sonra dokuz bilinmeyen kalır. Her bilinmeyen nokta için (1.13c) denklemi Şekil 3.4'deki sonlu fark hesap moleküllerinden faydalanılarak yazılır. Bu denklemler matris formunda aşağıdaki şekli alır.

13.9313	-6.7777	1	-4.7067	1.3888	0	0.4822	0	0	ω_7	1
-6.7777	14.9313	-6.7777	1.3888	-4.7067	1.3888	0	0.4822	0	ω_8	1
1	-6.7777	13.9313	0	1.3888	-4.7067	0	0	0.4822	ω_9	1
-4.7067	1.3888	0	13.4490	-6.7777	1	-4.7067	1.3888	0	ω_{12}	1
1.3888	-4.7067	1.3888	-6.7777	14.4490	-6.7777	1.3888	-4.7067	1.3888	ω_{13}	1
0	1.3888	-4.7067	1	-6.7777	13.4490	0	1.3888	-4.7067	ω_{14}	1
0.4822	0	0	-4.7067	1.3888	0	13.9313	-6.7777	1	ω_{17}	1
0	0.4822	0	1.3888	-4.7067	1.3888	-6.7777	14.9313	-6.7777	ω_{18}	1
0	0	0.4822	0	1.3888	-4.7067	1	-6.7777	13.9313	ω_{19}	1

$= \frac{q \cdot \lambda x^4}{D}$

Yukarıdaki denklemlerin çözümünden:

$$\begin{aligned}\omega_7 &= 0.496780 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_8 &= 0.677704 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_9 &= 0.496780 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{12} &= 0.736796 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{13} &= 1.010958 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{14} &= 0.736796 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{17} &= 0.496780 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{18} &= 0.677704 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{19} &= 0.496780 q \lambda_x^4 / D\end{aligned}$$

değerleri bulunur.

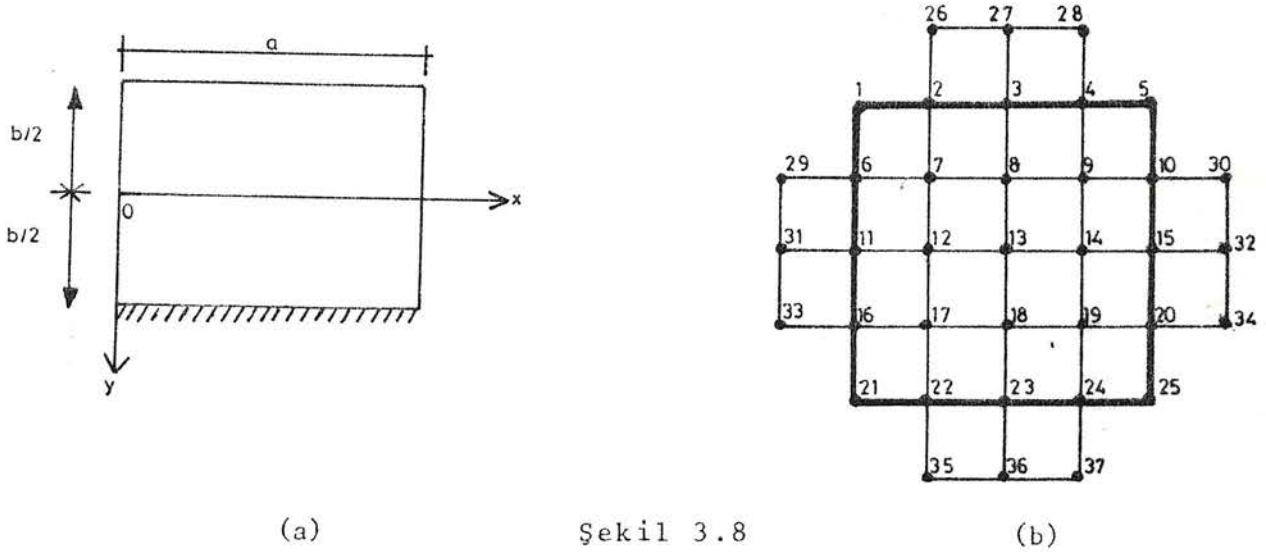
Bilinmeyenlerin elde edilmesinden sonra Şekil 3.4 ve 3.5'deki sonlu fark hesap moleküllerinden faydalanılarak bulunan değerler Tablo 3.4'de verilmiştir.

TABLO 3.4. Plak Tipi 2'nin Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm Sonuçları

Nokta No	$\omega = k \frac{qa^4}{Eh^3}$	$M_x = kqa^2$	$M_y = kqa^2$	$Q_x = kqa$	$Q_y = kqa$
1	0	0	0	-0.1724	0
2	0	-0.0129	-0.0431	-0.1176	0
3	0	-0.0176	-0.0588	0	0
4	0	-0.0129	-0.0431	0.1176	0
5	0	0	0	0.1724	0
6	0	0	0	0.1235	0
7	0.0211	0.0230	0.0170	0.0751	0.1547
8	0.0289	0.0271	0.0217	0	0.2033
9	0.0211	0.0230	0.0170	-0.0751	0.1547
10	0	0	0	-0.1235	0
11	0	0	0	0.1989	0
12	0.0314	0.0351	0.0295	0.1263	0
13	0.0431	0.0429	0.0392	0	0
14	0.0314	0.0351	0.0295	-0.1263	0
15	0	0	0	-0.1989	0
16	0	0	0	0.1235	0
17	0.0211	0.0230	0.0170	0.0751	-0.1547
18	0.0289	0.0271	0.0217	0	-0.2033
19	0.0211	0.0230	0.0170	-0.0751	-0.1547
20	0	0	0	-0.1235	0
21	0	0	0	-0.1724	0
22	0	-0.0129	-0.0431	-0.1176	0
23	0	-0.0176	-0.0588	0	0
24	0	-0.0129	-0.0431	0.1176	0
25	0	0	0	0.1724	0

k=katsayı

3.6. PLAK TİPİ 3'ÜN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ



(a)

Şekil 3.8

(b)

Şekil 3.8a'da gösterilen dikdörtgen plak, bir kenarından ankastre diğer kenarlarından ise basit mesnetlidir. Üni- form yayılı yüklü ve kenarları arasındaki oran $b/a = 1.2$ olan bu plağın Sonlu Farklar Metoduna göre çözümü aşağıda yapılacaktır ($\nu = 0.3$).

Çözüm: Dikdörtgen plağı bölüm aralıkları $\lambda_x = \frac{a}{4} = 0.25a$ ve $\lambda_y = \frac{b}{4} = 0.3a$ olmak üzere kenarlarından dörde bölelim. Sonlu fark denklemlerinin yazılmasında kullanılacak olan plağa ait sınır şartları Tablo 3.5'de gösterilmiştir.

TABLO 3.5

Kenar Tipi	Sınır Şartları
Basit Mesnetli Kenarlar	$\omega = 0: \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = \omega_{10} = \omega_{11} = \omega_{15} = \omega_{16} = \omega_{20} = 0$ $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0: \omega_7 = -\omega_{29}, \omega_9 = -\omega_{30}, \omega_{12} = -\omega_{31}, \omega_{14} = -\omega_{32}, \omega_{17} = -\omega_{33}, \omega_{19} = -\omega_{34}$ $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0: \omega_7 = -\omega_{26}, \omega_8 = -\omega_{27}, \omega_9 = -\omega_{28}$
Ankastre Kenar	$\omega = 0: \omega_{21} = \omega_{22} = \omega_{23} = \omega_{24} = \omega_{25} = 0$ $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0: \omega_{17} = \omega_{35}, \omega_{18} = \omega_{36}, \omega_{19} = \omega_{37}$

Sınır şartları belirlenen plağın bilinmeyen sayısı dokuzdur. Her bilinmeyen nokta için (1.13c) denkleminin sağlanması gerekir. Şekil 3.4'deki sonlu fark hesap moleküllerinden faydalanılarak yazılan denklemler matris formunda aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

12.9668	-6.7777	1	-4.7067	1.3888	0	0.4822	0	0	ω_7	1
-6.7777	13.9668	-6.7777	1.3888	-4.7067	1.3888	0	0.4822	0	ω_8	1
1	-6.7777	12.9668	0	1.3888	-4.7067	0	0	0.4822	ω_9	1
-4.7067	1.3888	0	13.4490	-6.7777	1	-4.7067	1.3888	0	ω_{12}	1
1.3888	-4.7067	1.3888	-6.7777	14.4490	-6.7777	1.3888	-4.7067	1.3888	ω_{13}	1
0	1.3888	-4.7067	1	-6.7777	13.4490	0	1.3888	-4.7067	ω_{14}	1
0.4822	0	0	-4.7067	1.3888	0	13.9313	-6.7777	1	ω_{17}	1
0	0.4822	0	1.3888	-4.7067	1.3888	-6.7777	14.9313	-6.7777	ω_{18}	1
0	0	0.4822	0	1.3888	-4.7067	1	-6.7777	13.9313	ω_{19}	1

$= \frac{q \cdot \lambda x^4}{D}$

Yukarıdaki denklemlerin çözümünden:

$$\begin{aligned}\omega_7 &= 0.682994 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_8 &= 0.939517 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_9 &= 0.682994 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{12} &= 0.870823 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{13} &= 1.200175 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{14} &= 0.870823 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{17} &= 0.548767 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{18} &= 0.751157 q \lambda_x^4 / D \\ \omega_{19} &= 0.548767 q \lambda_x^4 / D\end{aligned}$$

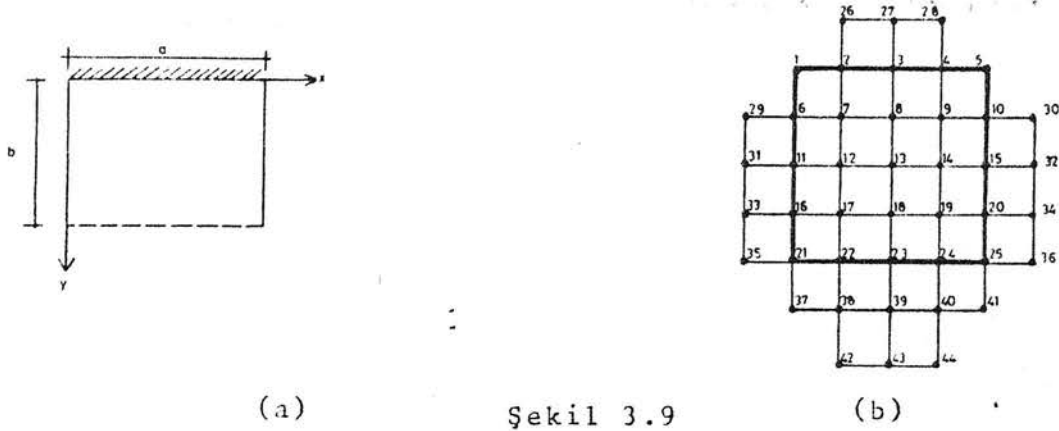
elde edilir. Bu sonuçlardan yararlanarak plağın bütün noktaları için hesaplanan ω , M_x , M_y , θ_x , θ_y değerleri Tablo 3.6'da gösterilmiştir.

TABLO 3.6. Plak Tipi 3'ün Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm Sonuçları

Nokta No	$\omega = k \frac{qa^4}{Eh^3}$	$M_x = kqa^2$	$M_y = kqa^2$	$Q_x = kqa$	$Q_y = kqa$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0.1602
3	0	0	0	0	0.2052
4	0	0	0	0	0.1602
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0.1923	0
7	0.0291	0.0330	0.0294	0.1231	0.0933
8	0.0400	0.0409	0.0390	0	0.1199
9	0.0291	0.0330	0.0294	-0.1231	0.0933
10	0	0	0	-0.1923	0
11	0	0	0	0.2239	0
12	0.0371	0.0404	0.0322	0.1439	-0.0276
13	0.0511	0.0504	0.0431	0	-0.0385
14	0.0371	0.0404	0.0322	-0.1439	-0.0276
15	0	0	0	-0.2239	0
16	0	0	0	0.1259	0
17	0.0234	0.0246	0.0163	0.0768	-0.1727
18	0.0320	0.0292	0.0207	0	-0.2286
19	0.0234	0.0246	0.0163	-0.0768	-0.1727
20	0	0	0	-0.1259	0
21	0	0	0	-0.1905	0
22	0	-0.0142	-0.0476	-0.1304	0
23	0	-0.0195	-0.0652	0	0
24	0	-0.0142	-0.0476	0.1304	0
25	0	0	0	0.1905	0

k=katsayı

3.7. PLAK TİPİ 4'ÜN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ



(a) Şekil 3.9 (b)

Şekil 3.9a'da gösterilen dikdörtgen plak iki kenarından basit mesnetli bir kenarı ankestre, diğer kenarı serbesttir. Uniform yayılı yüklü ve kenarları arasındaki oran $b/a = 1.2$ olan bu plağın çözümünü Sonlu Farklar Metodu ile yapalım ($\nu = 0.3$).

Çözüm: Dikdörtgen plağı a ve b kenarlarında bölüm aralıkları $\lambda_x = a/4 = 0.25a$ ve $\lambda_y = b/4 = 0.3a$ olmak üzere dörde bölerek çözelim. Sonlu Fark denklemlerinin kurulmasında yararlanacak olan sınır şartları Tablo 3.7'de verilmiştir.

TABLO 3.7

Kenar tipi	Sınır Şartları
Basit Mesnetli Kenarlar	$w=0; w_0=w_{10}=w_{11}=w_{15}=w_{16}=w_{20}=w_{21}=w_{25}=0$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0; w_7=w_{29}, w_9=w_{10}, w_{12}=w_{31}, w_{14}=w_{32}, w_{17}=w_{33}, w_{19}=w_{34}, w_{22}=w_{35}, w_{24}=w_{36}$
Ankestre Kenar	$w=0; w_1=w_2=w_3=w_4=w_5=0$ $\frac{\partial w}{\partial x}=0; w_7=w_{26}, w_8=w_{27}, w_9=w_{28}$
Serbest Kenar	$M_y=0; (V_y)_{22}=(V_y)_{23}=(V_y)_{24}=0$ $M_x=0; (M_x)_{22}=(M_x)_{23}=(M_x)_{24}=0$

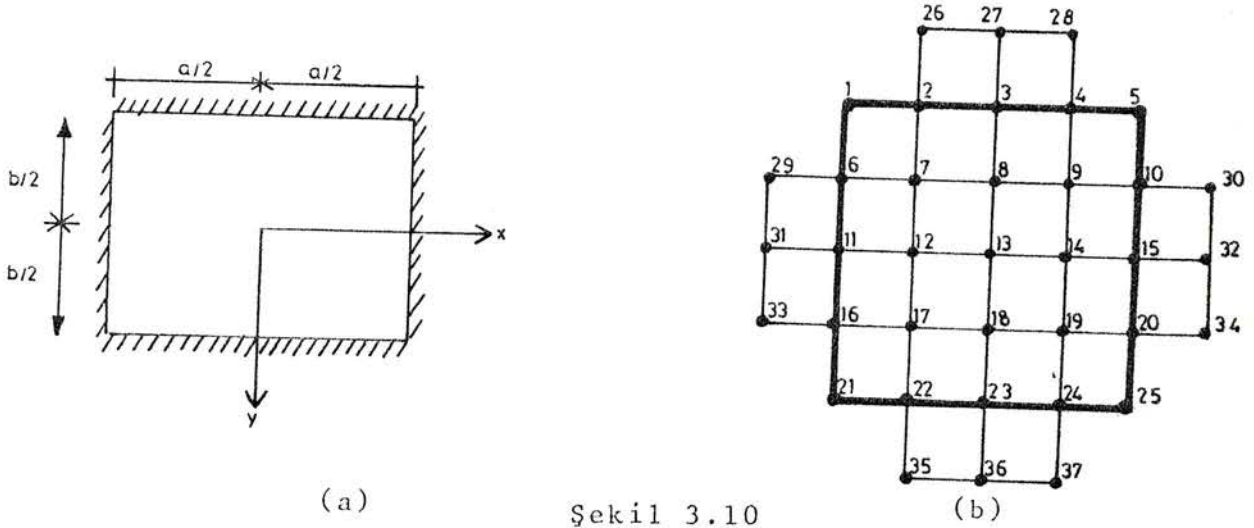
Sınır şartlarının belirlenmesinden sonra (1.13c) denklemi sonlu fark denklemi şeklinde yazılarak bilinmeyen noktalar için oniki denklem bulunur. Fakat Şekil 3.9b'de de görüldüğü gibi plağın onsekiz bilinmeyeni vardır. Bu durumda serbest kenarın üç noktası için sınır şartları tablosunda da gösterildiği gibi $V_y = 0, M_y = 0$ şartları yazılabilir. Böylece bulunan altı denklem ile onsekiz bilinmeyene karşı çözüme yeterli sayıda denklem elde edilir. Son altı denklem sınır şartlarından elde edilen denklemlerdir. Bu denklemler matris formunda aşağıdaki şekilde gösterilir.

TABLO 3.8. Plak Tipi 4'ün Sonlu Farklar Metodu İle Çözüm Sonuçları

Nokta No	$\omega = k \frac{qa^4}{Eh^3}$	$M_x = kqa^2$	$M_y = kqa^2$	$Q_x = kqa$	$Q_y = kqa$
1	0	0	0	-0.2517	0
2	0	-0.0188	-0.0629	-0.1736	0
3	0	-0.0260	-0.0868	0	0
4	0	-0.0188	-0.0629	0.1736	0
5	0	0	0	0.2517	0
6	0	0	0	0.1152	0
7	0.0309	0.0283	0.0091	0.0692	0.2110
8	0.04265	0.0344	0.0105	0	0.2826
9	0.0309	0.0283	0.0091	-0.0692	0.2110
10	0	0	0	-0.1152	0
11	0	0	0	0.2548	0
12	0.0611	0.0573	0.0255	0.1655	0.0734
13	0.0850	0.0738	0.0336	0	0.1019
14	0.0611	0.0573	0.0255	-0.1655	0.0734
15	0	0	0	-0.2548	0
16	0	0	0	0.2915	0
17	0.0824	0.0729	0.0218	0.1915	0.0006
18	0.1150	0.0957	0.0287	0	0.0031
19	0.0824	0.0729	0.0218	-0.1915	0.0006
20	0	0	0	-0.2915	0
21	0	0	0	0.2563	0
22	0.1037	0.0833	0	0.1692	-0.0748
23	0.1450	0.1100	0	0	-0.0884
24	0.1037	0.0833	0	-0.1692	-0.0748
25	0	0	0	-0.2563	0

k=katsayı

3.8. PLAK TİPİ 5'İN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ



(a) Şekil 3.10

(b)

Şekil 3.10a'da gösterilen dört kenarından ankastre olarak mesnetli ve kenarları arasındaki oran $b/a = 1.2$ olan plak üniform yayılı yüke maruz kalmaktadır. Bu plağı Sonlu Farklar Metodu ile çözelim ($\nu = 0.3$).

Çözüm: Dikdörtgen plağı a ve b kenarlarından bölüm aralıkları $\lambda_x = a/4 = 0.25a$ ve $\lambda_y = b/4 = 0.3a$ olmak üzere dörde bölelim. Plağın sınır şartları Tablo 3.9'da verilmiştir.

TABLO 3.9

Kenar Tipi	Sınır Şartları
Ankastre kenarlar	$w=0: w_1=w_2=w_3=w_4=w_5=w_6=w_{10}=w_{11}=w_{15}=w_{16}=w_{20}=w_{21}=w_{22}=w_{23}=w_{24}$ $w_{25}=0$ $\frac{\partial w}{\partial x} = 0: w_7=w_{26}, w_8=w_{27}, w_9=w_{28}, w_{17}=w_{35}, w_{18}=w_{36}, w_{19}=w_{37}$ $\frac{\partial w}{\partial y} = 0: w_7=w_{29}, w_9=w_{30}, w_{12}=w_{31}, w_{14}=w_{32}, w_{17}=w_{33}, w_{19}=w_{34}$

Sınır şartlarının belirlenmesinden sonra plağın dokuz bilinmeyen kalır. Her bilinmeyen nokta için (1.13c) denklemi sonlu fark denklemleri şeklinde yazılır. Bu denklemler matris formunda aşağıdaki şekli alır.

15.9313	-6.7777	1	-4.7067	1.3888	0	0.4822	0	0	ω_7	1
-6.7777	14.9313	-6.7777	1.3888	-4.7067	1.3888	0	0.4822	0	ω_8	1
1	-6.7777	15.9313	0	1.3888	-4.7067	0	0	0.4822	ω_9	1
-4.7067	1.3888	0	15.4490	-6.7777	1	-4.7067	1.3888	0	ω_{12}	1
1.3888	-4.7067	1.3888	-6.7777	14.4490	-6.7777	1.3888	-4.7067	1.3888	ω_{13}	1
0	1.3888	-4.7067	1	-6.7777	15.4490	0	1.3888	-4.7067	ω_{14}	1
0.4822	0	0	-4.7067	1.3888	0	15.9313	-6.7777	1	ω_{17}	1
0	0.4822	0	1.3888	-4.7067	1.3888	-6.7777	14.9313	-6.7777	ω_{18}	1
0	0	0.4822	0	1.3888	-4.7067	1	-6.7777	15.9313	ω_{19}	1

$= \frac{q \cdot \lambda_x^4}{D}$

Yukarıdaki denklemlerin çözümünden:

$$\begin{aligned}\omega_7 &= 0.287979 \quad q\lambda_x^4/D \\ \omega_8 &= 0.435801 \quad q\lambda_x^4/D \\ \omega_9 &= 0.287979 \quad q\lambda_x^4/D \\ \omega_{12} &= 0.410621 \quad q\lambda_x^4/D \\ \omega_{13} &= 0.627636 \quad q\lambda_x^4/D \\ \omega_{14} &= 0.410621 \quad q\lambda_x^4/D \\ \omega_{17} &= 0.287979 \quad q\lambda_x^4/D \\ \omega_{18} &= 0.435801 \quad q\lambda_x^4/D \\ \omega_{19} &= 0.287979 \quad q\lambda_x^4/D\end{aligned}$$

bulunur. Denklemlerin sonuçları ve Şekil 3.4 ve 3.5'deki sonlu fark hesap moleküllerinden yararlanarak hesaplanan ω , M_x , M_y , θ_x , θ_y değerleri Tablo 3.10'da gösterilmiştir.

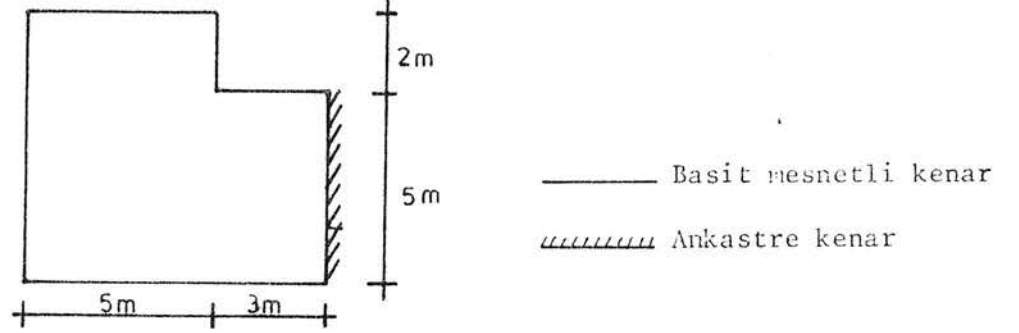
TABLO 3.10. Plak Tipi 5'in Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm Sonuçları

Nokta No	$\omega = k \frac{qa^4}{Eh^3}$	$M_x = kqa^2$	$M_y = kqa^2$	$Q_x = kqa$	$Q_y = kqa$
1	0	0	0	0	0
2	0	-0.0074	-0.0249	-0.0756	0
3	0	-0.0113	-0.0378	0	0
4	0	-0.0074	-0.0249	0.0756	0
5	0	0	0	0	0
6	0	-0.0359	-0.0107	0	-0.0855
7	0.0122	0.0109	0.0098	0.1301	0.0795
8	0.0185	0.0216	0.0161	0	0.1360
9	0.0122	0.0109	0.0098	-0.1301	0.0795
10	0	-0.0359	-0.0107	0	-0.0855
11	0	-0.0513	-0.0153	0	0
12	0.0175	0.0152	0.0142	0.1900	0
13	0.0267	0.0321	0.0247	0	0
14	0.0175	0.0152	0.0142	-0.1900	0
15	0	-0.0513	-0.0153	0	0
16	0	-0.0359	-0.0107	0	0.0855
17	0.0122	0.0109	0.0098	0.1301	-0.0795
18	0.0185	0.0216	0.0161	0	-0.1360
19	0.0122	0.0109	0.0098	-0.1301	-0.0795
20	0	-0.0359	-0.0107	0	0.0855
21	0	0	0	0	0
22	0	-0.0074	-0.0249	-0.0756	0
23	0	-0.0113	-0.0378	0	0
24	0	-0.0074	-0.0249	0.0756	0
25	0	0	0	0	0

k=katsayı

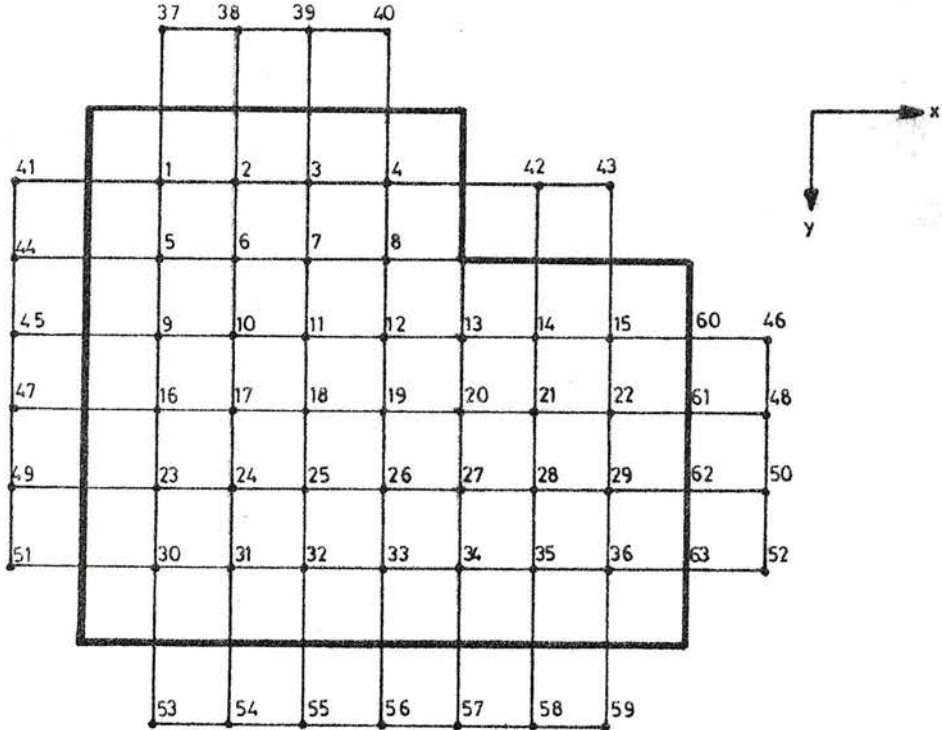
3.9. ÖRNEK PROBLEM

Şekil 3.11'de boyutları ve mesnet durumu verilmiş olan plağın ω , M_x ve M_y değerleri Sonlu Farklar Metodu ile bulunacaktır. Plak düzgün yayılı q yüküne maruz kalmaktadır ($\nu=0.3$).



Şekil 3.11

Çözüm:



Şekil 3.12

Plak Şekil 3.12'de görüldüğü gibi kenarlarından $\lambda=\lambda_x=\lambda_y=lm$ olacak şekilde bölümlere ayrılmıştır. Bütün kenarlarında sınır şartlarından dolayı $\omega=0$ dır. Diğer sınır şartları Tablo 3.11'de gösterilmiştir.

TABLO 3.11

Kenar Tipi	Sınır Şartları
Basit mesnetli kenarlar	$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0: \omega_1 = -\omega_{41}, \omega_4 = -\omega_{42}, \omega_5 = -\omega_{44}, \omega_9 = -\omega_{45}, \omega_{16} = -\omega_{47},$ $\omega_{23} = -\omega_{49}, \omega_{30} = -\omega_{51}$ $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0: \omega_1 = -\omega_{37}, \omega_2 = -\omega_{38}, \omega_3 = -\omega_{39}, \omega_4 = -\omega_{40}, \omega_{14} = -\omega_{42},$ $\omega_{15} = -\omega_{43}, \omega_{30} = -\omega_{53}, \omega_{31} = -\omega_{54}, \omega_{32} = -\omega_{55}, \omega_{33} = -\omega_{56},$ $\omega_{34} = -\omega_{57}, \omega_{35} = -\omega_{58}, \omega_{36} = -\omega_{59}$
Ankastre kenar	$\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0: \omega_{15} = \omega_{46}, \omega_{22} = \omega_{48}, \omega_{29} = \omega_{50}, \omega_{36} = \omega_{52}$

Sınır şartlarının belirlenmesinden sonra her bilinmeyen nokta için plak genel denklemi Şekil 3.3'deki sonlu fark hesap moleküllerinden faydalanılarak fark denklemleri şeklinde yazılır. Bu denklemler matris formunda aşağıdaki şekli alır.

Yukarıdaki denklem takımının çözümünden:

$\omega_1 = 1.2596 q\lambda^4/D$	$\omega_2 = 1.9597 q\lambda^4/D$	$\omega_3 = 1.8989 q\lambda^4/D$
$\omega_4 = 1.1290 q\lambda^4/D$	$\omega_5 = 2.2173 q\lambda^4/D$	$\omega_6 = 3.5034 q\lambda^4/D$
$\omega_7 = 3.4753 q\lambda^4/D$	$\omega_8 = 2.1181 q\lambda^4/D$	$\omega_9 = 2.8197 q\lambda^4/D$
$\omega_{10} = 4.5884 q\lambda^4/D$	$\omega_{11} = 4.9129 q\lambda^4/D$	$\omega_{12} = 3.9056 q\lambda^4/D$
$\omega_{13} = 2.2827 q\lambda^4/D$	$\omega_{14} = 1.4830 q\lambda^4/D$	$\omega_{15} = 0.6493 q\lambda^4/D$
$\omega_{16} = 2.9662 q\lambda^4/D$	$\omega_{17} = 4.9391 q\lambda^4/D$	$\omega_{18} = 5.5826 q\lambda^4/D$
$\omega_{19} = 5.0245 q\lambda^4/D$	$\omega_{20} = 3.7717 q\lambda^4/D$	$\omega_{21} = 2.4807 q\lambda^4/D$
$\omega_{22} = 1.0575 q\lambda^4/D$	$\omega_{23} = 2.5439 q\lambda^4/D$	$\omega_{24} = 4.2862 q\lambda^4/D$
$\omega_{25} = 4.9859 q\lambda^4/D$	$\omega_{26} = 4.7339 q\lambda^4/D$	$\omega_{27} = 3.8200 q\lambda^4/D$
$\omega_{28} = 2.5603 q\lambda^4/D$	$\omega_{29} = 1.0929 q\lambda^4/D$	$\omega_{30} = 1.5132 q\lambda^4/D$
$\omega_{31} = 2.5339 q\lambda^4/D$	$\omega_{32} = 3.0059 q\lambda^4/D$	$\omega_{33} = 2.9191 q\lambda^4/D$
$\omega_{34} = 2.4234 q\lambda^4/D$	$\omega_{35} = 1.6519 q\lambda^4/D$	$\omega_{36} = 0.7178 q\lambda^4/D$

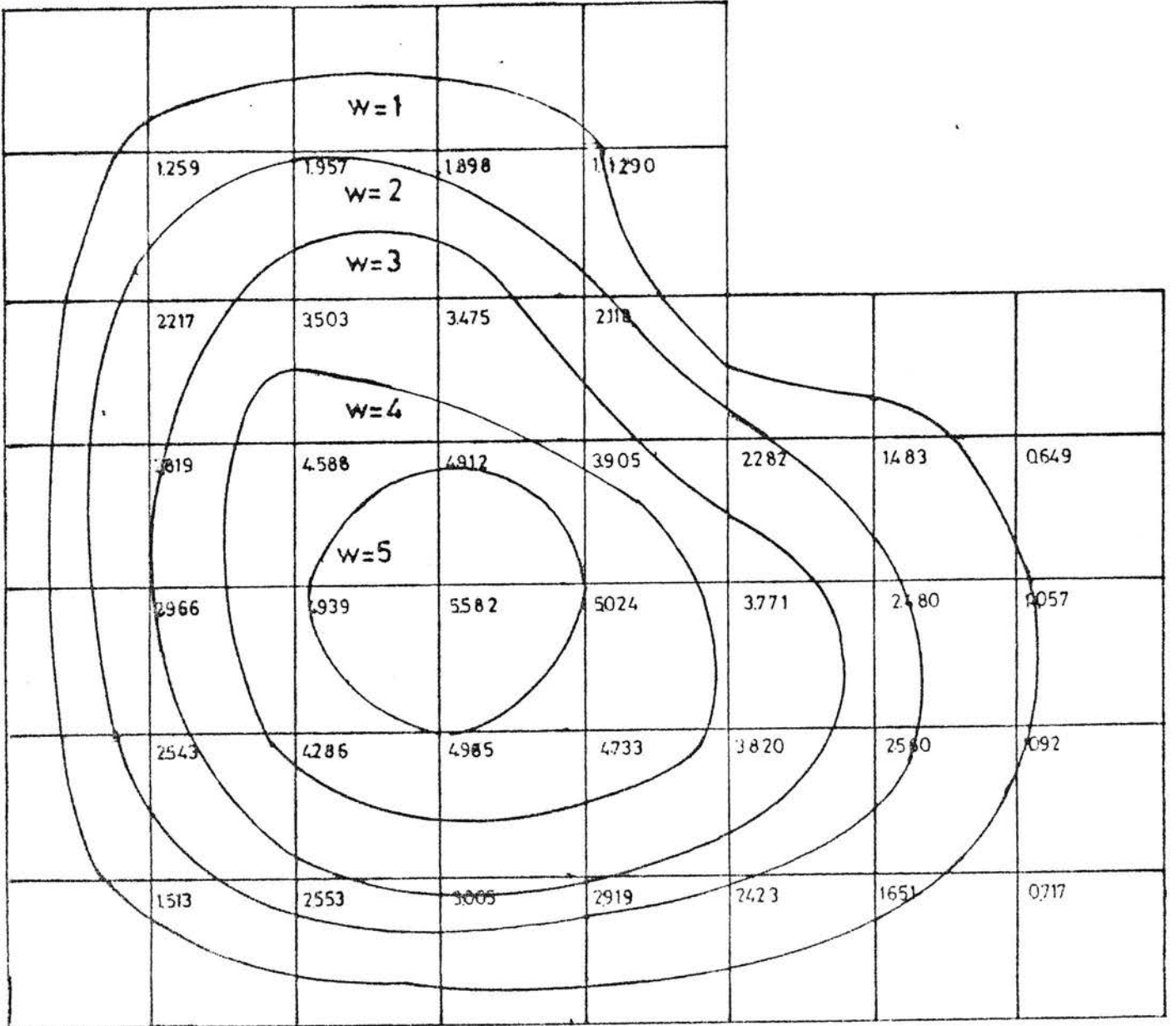
bulunur.

Düşey yer değiştirme değerlerinin bulunmasından sonra bu değerlerin Şekil 3.2'deki sonlu fark hesap moleküllerinde yerlerine konulmasıyla hesaplanan M_x ve M_y moment değerleri Tablo 3.12'de verilmiştir. Bulunan değerlerin eşdeğer eğrileri Şekil 3.13, 3.14 ve 3.15'de gösterilmiştir.

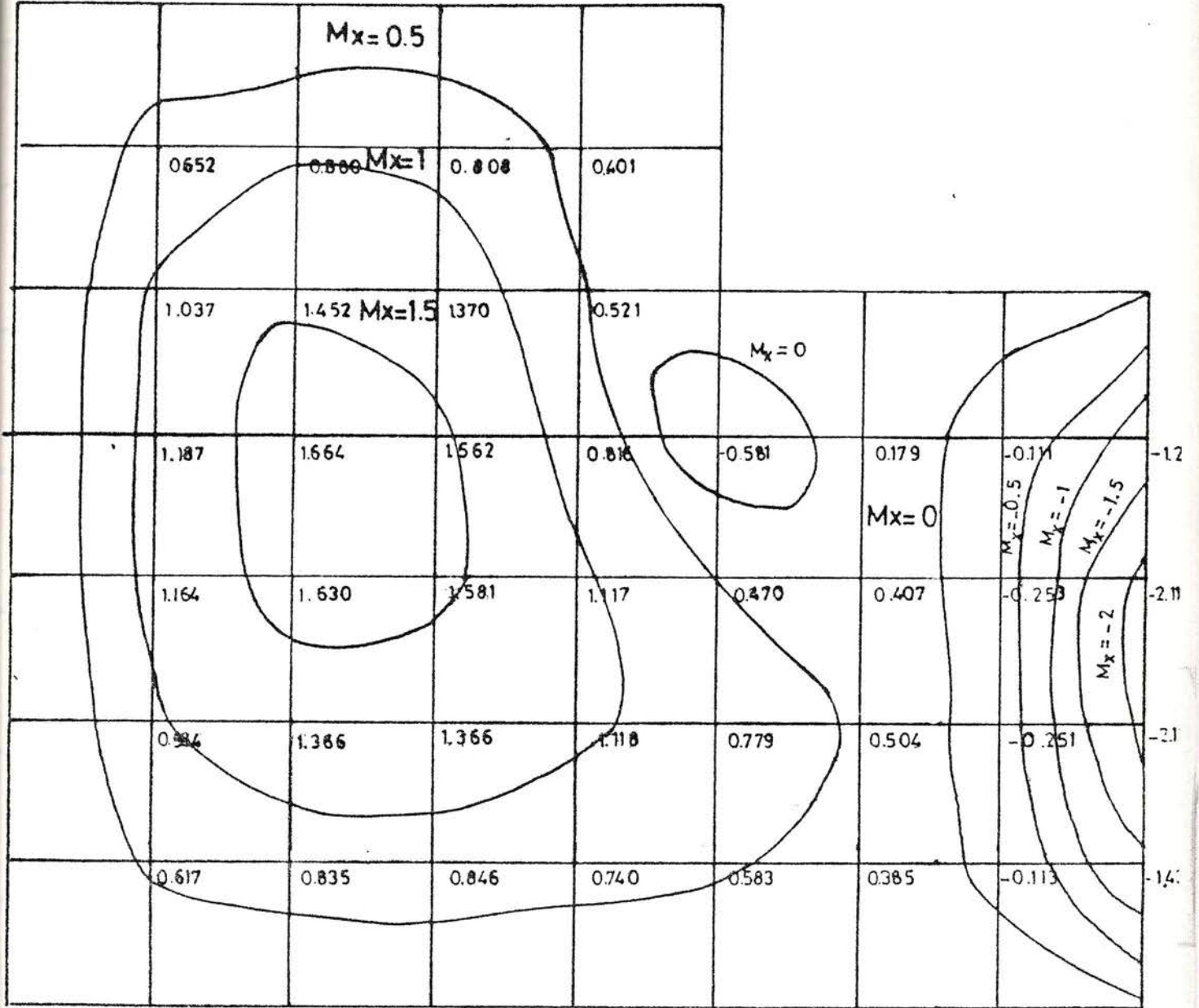
TABLO 3.12

Nokta No	$M_x = kq\lambda^2$	$M_y = kq\lambda^2$
1	0.6522	0.4704
2	0.8800	0.6385
3	0.8080	0.5358
4	0.4011	0.2476
5	1.0377	0.6346
6	1.4526	0.8552
7	1.3706	0.5374
8	0.5212	-0.5701
9	1.1877	0.7711
10	1.6645	1.1676
11	1.5621	1.1676
12	0.8162	0.8538
13	-0.5851	0.5467
14	0.1796	0.4955
15	-0.1119	0.1859
16	1.1641	0.8669
17	1.6303	1.4022
18	1.5815	1.6268
19	1.1175	1.6179
20	0.4704	1.4521
21	0.4076	0.9577
22	-0.2538	0.2630
23	0.9840	0.8487
24	1.3664	1.3922
25	1.3664	1.6689
26	1.1189	1.7226
27	0.7793	1.5487
28	0.5041	1.0503
29	-0.2514	0.2980
30	0.6172	0.6243
31	0.8352	0.9983
32	0.8465	1.1875
33	0.7402	1.2270
34	0.5838	1.1095
35	0.3857	0.7923
36	-0.1133	0.2779
60	-1.2987	-0.3896
61	-2.1150	-0.6345
62	-2.1858	-0.6557
63	-1.4357	-0.4307

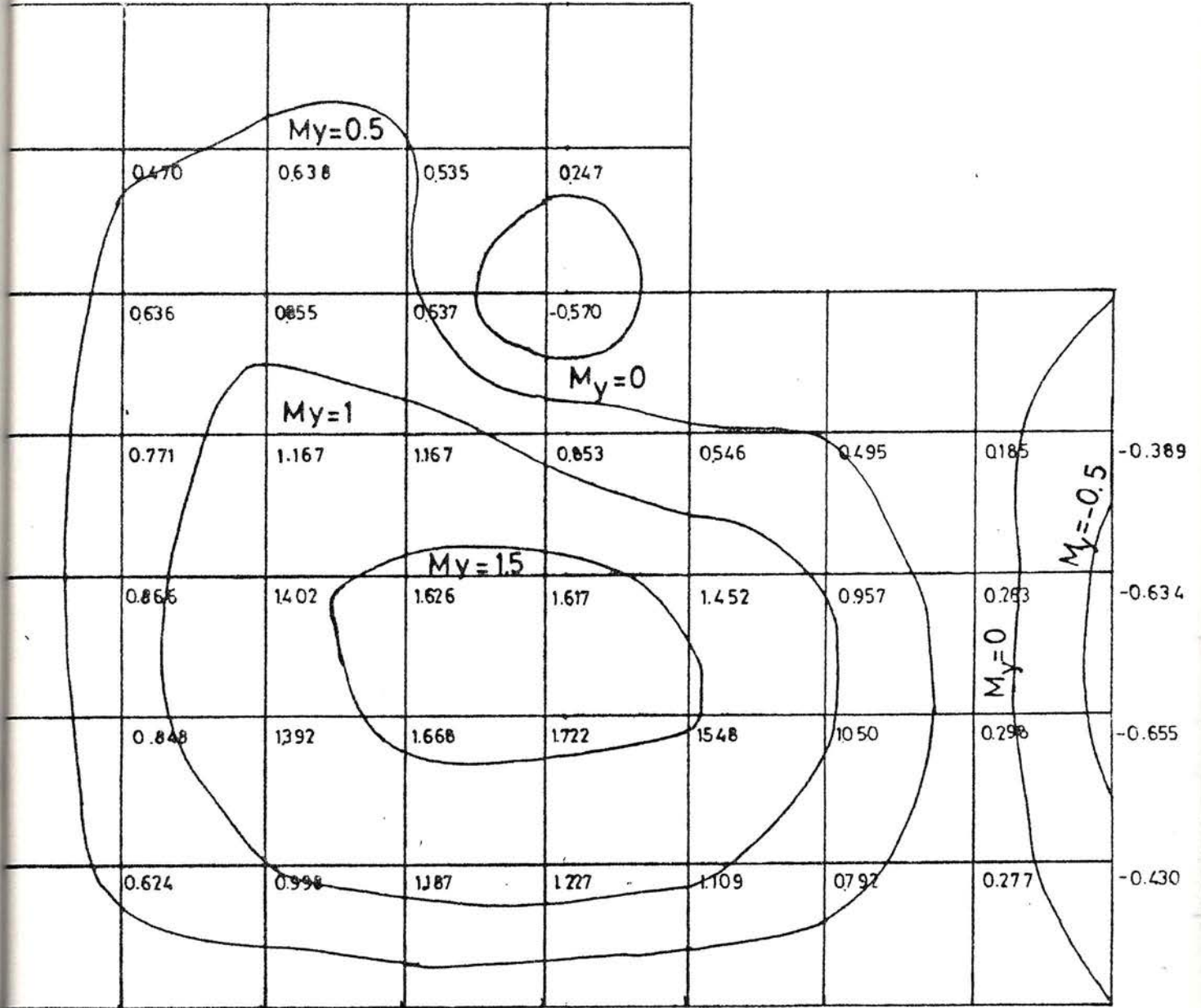
k=katsayı



Şekil 3.13. Esdeğer Düzey Yer Değiştirme Eğrileri
 $w = kq\lambda^4/D$



Şekil 3.14. Eşdeğer Moment Eğrileri
 $M_x = kq\lambda^2$



Şekil 3.15. Eşdeğer Moment Eğrileri
 $M_y = kq\lambda^2$

BÖLÜM IV S O N U Ç

A. METOD İLE İLGİLİ SONUÇLAR

1- Analitik plak çözümleri sadece belli özel mesnet ve yük durumları için geçerlidir.

2- Sonlu Farklar Metodu plakların çözümünde her türlü mesnet ve yük şartı için sonuç vermektedir.

3- Sonlu Farklar Metodunda sonuca ya matris çözümü veya rölaksasyon yolu ile ulaşılmaktadır. Bilgisayarlardan yararlanıldığı durumlarda her iki halde de sonuca duyarlı ölçüde ve oldukça kısa yolla ulaşılmaktadır.

4- Düğüm noktalarının bilgisayarla kotlanması sağlandığı taktirde çözümün elde edilebilmesi için plak geometrisinin, sınır şartlarının ve yük durumlarının bilgisayara verilmesi yeterli olmaktadır.

B. KARŞILAŞTIRMALARLA İLGİLİ SONUÇLAR

1- Karşılaştırma için seçilen plaklar (4x4) onaltı parçaya bölünerek mesnet üzerindeki noktalarda dahil yirmibes noktada düşey yer değiştirme ve kesit tesirleri değerleri bulunmuştur. Seçilen nokta sayısının az olmasıyla birlikte sonuçlardaki farklar kabul edilebilir limitler içinde kalmaktadır.

2- Aşağıda değişik tipte plaklar için kesin ve yaklaşık çözüm sonuçları verilmiştir. Karşılaştırmalarda maksimum değerler gözönüne alınmıştır.

PLAK TİPİ 1'İN SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

	Analitik Çözüm Sonuçları	Sonlu Farklar Met. Çözüm Sonuçları	Fark %
$(\omega)_{\max}$	0.0617	0.0611	0.97
$(M_x)_{\max}$	0.0626	0.0596	4.79
$(M_y)_{\max}$	0.0500	0.0480	4.00
$(Q_x)_{\max}$	0.3793	0.2548	32.82
$(Q_y)_{\max}$	0.3499	0.2179	37.72

PLAK TİPİ 2'NİN SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

	Analitik Çözüm Sonuçları	Sonlu Farklar Met. Çözüm Sonuçları	Fark %
$(\omega)_{\max}$	0.0348	0.0431	23.85
$(M_x)_{\max}$	0.0376	0.0429	14.09
$(M_y)_{\max}$	-0.0866	-0.0588	32.10
$(Q_x)_{\max}$	0.3294	0.1989	39.61
$(Q_y)_{\max}$	0.5852	0.2033	65.25

PLAK TİPİ 3'ÜN SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

	Analitik Çözüm Sonuçları	Sonlu Farklar Met. Çözüm Sonuçları	Fark %
$(\omega)_{\max}$	0.0465	0.0511	9.00
$(M_x)_{\max}$	0.0485	0.0504	3.91
$(M_y)_{\max}$	-0.0983	-0.0652	33.67
$(Q_x)_{\max}$	0.3662	0.2239	38.85
$(Q_y)_{\max}$	-0.6351	-0.2286	64.00

PLAK TİPİ 4'ÜN SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

	Analitik Çözüm Sonuçları	Sonlu Farklar Met. Çözüm Sonuçları	Fark %
$(\omega)_{\max}$	0.1401	0.1450	3.49
$(M_x)_{\max}$	0.1118	0.1100	1.61
$(M_y)_{\max}$	-0.1216	-0.0868	28.61
$(Q_x)_{\max}$	0.4646	0.2915	37.25
$(Q_y)_{\max}$	0.7213	0.2826	60.82

PLAK TİPİ 5'İN SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

	Analitik Çözüm Sonuçları	Sonlu Farklar Met. Çözüm Sonuçları	Fark %
$(\omega)_{\max}$	0.0188	0.0267	42.02
$(M_x)_{\max}$	-0.0643	-0.0513	20.21
$(M_y)_{\max}$	-0.0557	-0.0378	32.13
$(Q_x)_{\max}$	0.4969	0.1900	61.76
$(Q_y)_{\max}$	0.4678	0.1360	70.92

3- Kesine daha yakın çözüm sonuçları elde etmek için bilgisayar kapasitesinden de yararlanılarak çok sayıda nokta alınması gerekli olmaktadır.

BÖLÜM V
KAYNAKLAR

- 1- Timoshenko, S.A. and Woinowsky-Krieger, S.: "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill Book Company, 1959.
- 2- Ugural, A.C.: "Stresses in Plates and Shells", McGraw-Hill, 1981.
- 3- Volterra, E. and Gaines, J.H.: "Advanced Strength of Materials" Civil Engineering and Engineering Mechanics Series, 1971.
- 4- Yılmaz, Ç.: "A Method for Analysis of Rectangular Slabs with Rectangular Holes in the Middle", Ankara, 1971.
- 5- Tameroglu, S.: "Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler", İstanbul, 1964.
- 6- İnan, M.: "Düzlemde Elastisite Teorisi", İstanbul, 1969.
- 7- Akgün, Ö.R. ve Barkana, A.: "Basic Programlama ve Nümerik Hesap", Eskişehir 1981.
- 8- Şenel, M.: "Nümerik Analiz", 1983.
- 9- T.Fenner, Roger: "Computing for Engineers", William Clowes and Sons Limited, London, 1974.