

**SİERPİNSKİ ÜÇGENİ VE SİERPİNSKİ HALISI ÜZERİNDEKİ
İÇSEL METRİKLERİN VE JEODEZİKLERİN İNCELENMESİ**

Betül DENİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Topoloji Tezli Yüksek Lisans Programı
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR**

**Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Mayıs, 2019**

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Betül DENİZ'in "Sierpinski Üçgeni ve Sierpinski Halısı Üzerindeki İçsel Metriklerin ve Jeodeziklerin İncelenmesi" başlıklı tezi 23/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı) :	Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR
Üye :	Prof.Dr. Ayşe BAYAR
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Mustafa SALTAN

Enstitü Müdürü

ÖZET

SİERPİNSKİ ÜÇGENİ VE SİERPİNSKİ HALISI ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİKLERİN VE JEODEZİKLERİN İNCELENMESİ

Betül DENİZ

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Mayıs, 2019

Danışman : Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR

Fraktalların büyük bir kısmını oluşturan ve itere fonksiyon sistemlerinin atraktörleri olarak karşımıza çıkan kendine benzer kümeler ile içsel metrik uzaylar geometrideki çok önemli kavramlardır. Bunun yanında kendine benzer kümeler üzerindeki içsel metrik yapılar son yıllarda oldukça fazla çalışmaya konu olmuş ve uygulama alanı bulmuştur. Bu yapıların kendine has geometrisinden kaynaklanan ilginç özelliklerini incelemek için de üzerindeki içsel metriğin ifade edilmesi ve bu metriğe göre jeodeziklerinin belirlenmesi problemi güncel ve önemli bir problemdir. Kendine benzer kümeye bağlı olarak bu kümeler üzerindeki içsel metriğin ifade edilmesinin zorluğunun yanın da jeodeziklerin yapısı da değişkenlik göstermektedir.

Bu kümelerden fraktal geometrinin de klasik örneklerinden sayılan Sierpinski Üçgeni, Sierpinski Halısı ve Vicsek fraktalı gibi kendine benzer kümeler üzerinde içsel metriğin farklı yollarla ifade edildiği birçok çalışma mevcuttur. Bu tez çalışmasında bu klasik örnekler üzerinde içsel metrik ve jeodezik kavramları ile ilintili olarak yapılmış çalışmalar detaylıca incelenmiş ve özetlenmiştir.

Ayrıca klasik fraktallerden Sierpinski Halısı üzerindeki içsel metrik, daha önce yapılan çalışmalardan farklı olarak, kümedeki noktaların kod temsilleri yardımı ile ifade edilmiştir. Bu küme üzerindeki jeodezikler de ayrıntılı olarak belirlenmiştir.

Anahtar Sözcükler: İçsel metrik, jeodezik, kendine benzer küme, Sierpinski Üçgeni, Sierpinski Halısı.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF INTRINSIC METRICS AND GEODESICS ON SIERPINSKI TRIANGLE AND SIERPINSKI CARPET

Betül DENİZ

Mathematics Program

Anadolu University, Graduate School of Sciences, May, 2019

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Yunus ÖZDEMİR

Self-similar sets which can be considered as attractors of the (hyperbolic) iterated function systems that constitute a large part of the fractals are very important objects in geometry. In addition, intrinsic metric structures on the self-similar sets have been the subject of many studies in recent years. To examine the intrinsic properties of these structures due to their unique geometry, the problem of expressing the intrinsic metric and determining the geodesics according to this metric is a current and important problem. The structure of the geodesics on these spaces as well as the difficulty of expressing the intrinsic metric varies depending on the self-similar set.

There are many studies in which the intrinsic metric is expressed in different ways on some classical self-similar sets such as the Sierpinski Triangle, Sierpinski Carpet and Vicsek fractal which are also considered as classic examples of fractal geometry. In this thesis, the studies related to the notions of intrinsic metric and geodesic on these classical examples were examined and summarized.

In addition, unlike previous studies the intrinsic metric on the classical Sierpinski Carpet was expressed with the help of the code representations of the points of the self-similar set. Geodesics on this self-similar set are also examined in detail.

Keywords: Intrinsic metric, geodesic, self-similar set, Sierpinski Triangle, Sierpinski Carpet.

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans eğitiminin boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren değerli danışmanım Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR'e, her koşulda ilgi ve desteklerini esirgemeyen arkadaşlarıma ve tüm eğitim hayatım boyunca her zaman arkamda olup maddi manevi desteklerini esirgemeyen canım annem ve babama teşekkürlerimi sunarım.

Betül DENİZ

23/05/2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Betül DENİZ

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
1 ÖN BİLGİLER	1
1.1 Sabit Nokta Teoremi ve Hausdorff Metrik	1
1.2 Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri	3
1.3 İçsel Metrik Uzaylar	11
2 BAZI KENDİNE BENZER KÜMELER ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİK	13
2.1 Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metrik	14
2.2 Yüksek Boyutlu Sierpinski Üçgenleri Üzerindeki İçsel Metrik	20
2.3 Vicsek Fraktal Üzerindeki İçsel Metrik	24
2.4 Sierpinski Halısı Üzerindeki İçsel Metrik	28
2.5 Standart Metrik ile İçsel Metriğin Denkliği	30
3 KENDİNE BENZER KÜMELER ÜZERİNDEKİ JEODEZİKLER	31
3.1 Sierpinski Üçgeni Üzerindeki Jeodezikler	31
3.2 Yüksek Boyutlu Sierpinski Üçgeni Üzerindeki Jeodezikler	33
3.3 Vicsek Fraktalı Üzerindeki Jeodezikler	34
4 SIERPINSKI HALISI ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİK İÇİN BİR FORMÜL VE JEODEZİKLER	35
4.1 Noktaların Kod Temsilleri Yardımıyla İçsel Metriğin İfade Edilmesi	35
4.2 Sierpinski Halısı Üzerindeki Jeodezikler	43
KAYNAKÇA	50
ÖZGEÇMİŞ	52

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Cantor Kümesi'nin elde edilişi	5
Şekil 1.2	Sierpinski Üçgeni (S)	6
Şekil 1.3	Kendi 3 küçük benzer kopyasının birleşimi olan Sierpinski üçgeni	6
Şekil 1.4	Koch Eğrisi	7
Şekil 1.5	Kendi 4 küçük benzer kopyasının birleşimi olan Koch eğrisi . . .	7
Şekil 1.6	Vicsek Fraktal (B)	8
Şekil 1.7	Kendi 5 küçük benzer kopyasının birleşimi olan Vicsek fraktalı .	9
Şekil 1.8	Sierpinski Tetrahedron (ST)	9
Şekil 1.9	Sierpinski Halısı (C)	10
Şekil 1.10	Kendi 8 küçük benzer kopyasının birleşimi olan Sierpinski halısı	11
Şekil 1.11	a ve b arasındaki bir jeodezik	12
Şekil 2.1	a ve b arasındaki Öklidyen uzaklık	13
Şekil 2.2	İçsel metriğe göre a ve b arasındaki uzaklık	14
Şekil 2.3	S 'nin elde edilmesi	15
Şekil 2.4	4. dereceden ve k . dereceden alt üçgenler	15
Şekil 2.5	(k_1, k_2, k_3) ifadesi	16
Şekil 2.6	S 'nin kod gösterimi	18
Şekil 2.7	k . adımdaki S 'nin kod gösterimi	18
Şekil 2.8	İki farklı kod gösterimi olan bir a noktası	19
Şekil 2.9	İki nokta arasındaki 2 yol	20
Şekil 2.10	k . adımdaki ST 'nin kod gösterimi	21
Şekil 2.11	Vicsek fraktalı üzerinde Öklid(a) metriği ve içsel(b) metrik örneği	24
Şekil 2.12	B 'nin kod gösterimi	25
Şekil 2.13	1. <i>Durum</i> (a) ve 2. <i>Durum</i> (b) örneği	26
Şekil 2.14	1. <i>Durum</i> için örnek	26
Şekil 2.15	A_n alt yollar	27
Şekil 2.16	C_1 'in(sol) ve C_2 'nin(sağ) çizge gösterimi	29
Şekil 3.1	Tek jeodezik	31
Şekil 3.2	İki jeodezik	32
Şekil 3.3	Üç jeodezik	32
Şekil 3.4	Dört jeodezik	32
Şekil 3.5	Beş jeodezik	33
Şekil 3.6	Yüksek boyutta sekiz jeodezik [11]	34
Şekil 3.7	Tek jeodezik	34
Şekil 4.1	C_1 'in kod gösterimi	36

Şekil 4.2	C_1 'in alt karesi olan $C_{(2,0)}$ 'nin kod gösterimi	36
Şekil 4.3	p ve q 'nun kartezyen koordinatları	37
Şekil 4.4	p 'nin xy -koordinat sisteminde kartezyen koordinatları	38
Şekil 4.5	C üzerindeki 2. Durum'a bir örnek	39
Şekil 4.6	Ayrıldıkları adıma göre noktaların durumları	39
Şekil 4.7	Komşu karelerde bulunma durumu	40
Şekil 4.8	Taksi(a) ve içsel(b) metriğe göre uzaklıklar	40
Şekil 4.9	İçsel metriğe göre kısa olan yollar	41
Şekil 4.10	Gidilen fazla yolun uzunluğu	42
Şekil 4.11	i) Durumu için tek jeodezik	44
Şekil 4.12	ii) Durumu için tek jeodezik	45
Şekil 4.13	iii) Durumu için tek jeodezik	46
Şekil 4.14	iv) Durumu için tek jeodezik	46
Şekil 4.15	v) Durumu için tek jeodezik	47
Şekil 4.16	i) Durumu için iki jeodezik	48
Şekil 4.17	ii) Durumu için iki jeodezik	48
Şekil 4.18	Sonsuz jeodezik	49

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

YFS	:	Yinelemeli Fonksiyon Sistemi
$\mathcal{H}(X)$:	X 'in Hausdorff Uzayı
S	:	Sierpinski Üçgeni
B	:	Vicsek veya Kutu Fraktalı
ST	:	Sierpinski Tetrahedron
C	:	Sierpinski Halısı
S^n	:	Yüksek Boyutlu Sierpinski Üçgeni
d_{st}	:	Standart Metrik
d_i	:	İçsel Metrik

1 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde üzerindeki içsel metrikler incelenecek klasik fraktaller birer yinelemeli fonksiyon sistemlerinin atraktörleri olarak tanıtılacaktır. Bu kapsamda önce yinelemeli fonksiyon sistemi teorisi için çok önemli rol oynayan sabit nokta teoremi, kendine benzer kümelerin bir fonksiyonun sabit noktası olarak karşımıza çıktığı Hausdorff uzayı bu bölümde özetlenmiştir. Sonrasında fraktalların büyük bir kısmını oluşturan yinelemeli fonksiyon sistemleri ve bu sistemlerin atraktörleri incelenmiş ve klasik kendine benzer küme örnekleri verilmiş ve son olarak içsel metrik uzay kavramı üzerinde durulmuştur.

1.1 Sabit Nokta Teoremi ve Hausdorff Metrik

Fraktal geometrinin köşe taşı teoremlerinden biri olarak adlandırabileceğimiz sabit nokta teoremini ifade edebilmek için, önce metrik uzay, büzülme dönüşümü, sabit nokta, kompakt küme ve tamlık gibi kavramlara bu alt bölümde kısaca yer verilmiştir.

Tanım 1.1.1. *Boş kümeden farklı bir X kümesi üzerinde aşağıda verilen koşulları sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metriktir denir.*

$$1) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$2) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$3) \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Bu durumda (X, d) ikilisi de metrik uzay olarak adlandırılır.

Bu tez çalışmasında yer alacak örneklerin tamamı bilenen Öklid metriği ile donatılmış \mathbb{R}^2 ve \mathbb{R}^3 metrik uzayları içinde yaşamaktadır.

Tanım 1.1.2. *(X, d) metrik uzay olsun ve $x_n \in X$ dizisi verilsin. Eğer $\epsilon > 0$ verildiğinde $n, m > N_\epsilon$ için $d(x_n, x_m) < \epsilon$ olacak şekilde bir $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ varsa x_n dizisine Cauchy dizisi denir.*

Tanım 1.1.3. *(X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir.*

Öklid metriği ile donatılmış \mathbb{R}^2 ve \mathbb{R}^3 metrik uzayları tam metrik uzaylardır.

Tanım 1.1.4. (X, d) metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. Eğer S içindeki her dizinin S 'de yakınsak olan bir alt dizisi varsa S alt kümesine kompakt denir.

Tanım 1.1.5. Bir X kümesi üzerinde $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. $f(x^*) = x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in X$ noktası varsa x^* noktasına f fonksiyonunun sabit noktası denir.

Tanım 1.1.6. (X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$$

olacak şekilde $0 \leq s < 1$ gerçel sayısı varsa f fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü, s değerine ise büzülme katsayısı denir.

Teorem 1.1.7. (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $f(x^*) = x^*$ olacak şekilde bir tek $x^* \in X$ vardır ve keyfi $x_0 \in X$ için

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots, f^n(x_0), \dots$$

dizisi x^* noktasına yakınsar.

Teorem 1.1.7'de ilgili metrik uzayın tam olması sabit noktanın varlığını, üzerinde tanımlı olan fonksiyonun büzülme olması ise sabit noktanın tekliğini garanti etmektedir.

(X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere, X 'in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı $\mathcal{H}(X)$ ile gösterilsin. Yani

$$\mathcal{H}(X) = \{A \mid A \subset X, A \neq \emptyset \text{ ve } A \text{ kompakt}\}$$

olsun. $x \in X$ ve $A \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere bir x noktasının A kümesine uzaklığı

$$d(x, A) = \min\{d(x, y) \mid y \in A\}$$

olarak tanımlansın. $A, B \in \mathcal{H}(X)$ için, yukarıdaki tanımdan yararlanılarak A kümesinin B kümesine uzaklığı

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \max\{d(x, B) \mid x \in A\} \\ &= \max\{\min\{d(x, y) \mid y \in B\} \mid x \in A\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. A ve B kümelerinin kompaktlığı ve metriğin sürekliliğinden dolayı bu tanım anlamlıdır. A ve B kümelerinin arasındaki uzaklık olarak tanımlanmak istenen bu fonksiyon için $d(A, B) = d(B, A)$ eşitliği her zaman geçerli olmayacağından $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir metrik değildir. Simetri problemini halletmek için küçük bir revizyon yapılırsa $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir metrik aşağıdaki gibi elde edilir.

Tanım 1.1.8. (X, d) tam bir metrik uzay ve $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

şeklinde tanımlanan $h(A, B)$ değerine A ve B arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.

Yardımcı Teorem 1.1.9. (X, d) metrik uzay ve $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ verilsin. Bu durumda h fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

- $h(A, A) = 0$ dir.
- $h(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.
- $h(A, B) = h(B, A)$ dir.
- $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$ dir.

Yukarıdaki yardımcı teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 1.1.10. $(\mathcal{H}(X), h)$ bir metrik uzaydır.

Teorem 1.1.11. (X, d) tam metrik uzay ise $(\mathcal{H}(X), h)$ de tam metrik uzaydır.

Kanıt 1.1.12. Detaylı kanıt için bkz. [4].

Teorem 1.1.13. (Cantor Arakesit Teoremi) N_i ($i \in \mathbb{N}$), \mathbb{R}^n de boş olmayan ve kompakt kümelerden oluşan bir dizi olsun. Eğer $\forall i \in \mathbb{N}$ için $N_i \supseteq N_{i+1}$ ise

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i \neq \emptyset$$

şeklindedir. Bu kompakt kümelerin çapları $i \rightarrow \infty$ için sıfıra gidiyor ise bu kesişim kümesi tek noktadan oluşur.

1.2 Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri

Bir önceki alt bölümde bir (X, d) tam metrik uzayının $(\mathcal{H}(X), h)$ tam metrik uzayını tek türlü belirlediği gösterilmiştir. Bu bölümde öncelikle (X, d) üzerindeki büzülme fonksiyonlarının da $(\mathcal{H}(X), h)$ üzerinde nasıl doğal bir büzülme fonksiyonu belirlediği verilecektir.

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda bir $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

kümesinin de f fonksiyonunun sürekliliğinden dolayı $\mathcal{H}(X)$ kümesinin bir elemanı olacağı açıktır (kompakt kümelerin sürekli fonksiyon altındaki resimleri de

kompakttır!). O halde (X, d) metrik uzayı üzerinde verilen f büzülme dönüşümü yardımıyla $(\mathcal{H}(X), h)$ metrik uzayı üzerinde bir büzülme dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Yardımcı Teorem 1.2.1. (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ büzülme katsayısı s olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$f : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

olarak tanımlanan f dönüşümü de $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayında büzülme katsayısı s olan bir büzülme dönüşümüdür.

Yardımcı Teorem 1.2.2. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $\{f_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ dönüşümleri $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayında büzülme katsayıları sırasıyla s_i olan büzülme dönüşümleri olsun. Bu durumda $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$$

olarak tanımlanan F dönüşümü büzülme katsayısı

$$s = \max\{s_i | i = 1, 2, \dots, n\}$$

olan bir büzülme dönüşümüdür.

Tanım 1.2.3. (X, d) bir tam metrik uzay ve $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow X$ dönüşümleri büzülme katsayıları sırasıyla s_1, s_2, \dots, s_n olan büzülme dönüşümleri olsunlar. Bu durumda

$$\{X; f_i | i = 1, 2, \dots, n\}$$

sistemine büzülme katsayısı $s = \max\{s_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ olan yinelemeli fonksiyon sistemi denir ve kısaca YFS ile gösterilir.

Sabit nokta teoreminin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

Teorem 1.2.4. $\{X; f_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi ve

$$F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X), F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$$

olarak tanımlanan F dönüşümü verilsin. Bu durumda F dönüşümünün

$$A = F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$$

olacak şekilde tek bir $A \in \mathcal{H}(X)$ sabit noktası vardır. Ayrıca herhangi bir $B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$B, F(B), F^2(B), F^3(B), \dots$$

dizisi A sabit noktasına yakınsar.

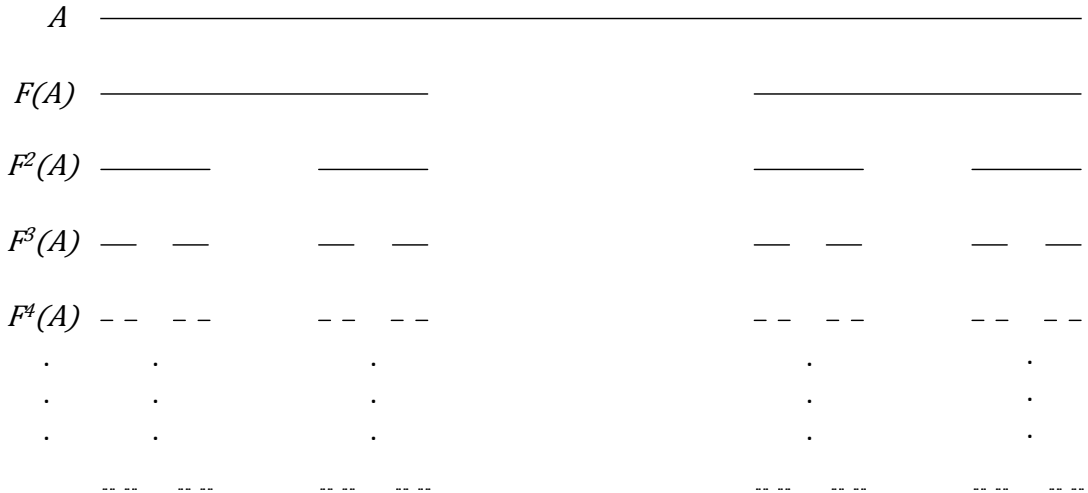
Tanım 1.2.5. Teorem 1.2.4'de ifade edilen $A \in \mathcal{H}(X)$ sabit noktasına ilgili yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü veya çekicisi denir. Ayrıca bir küme bir YFS'nin çekicisi ise kendine benzer küme adını alır.

Fraktalların büyük bir kısmı bir YFS'nin atraktörü olarak ifade edilebilir. Fraktal geometride fraktal ya da kendine benzer küme denilince ilk akla gelen kümelerden olan Cantor kümesi, Sierpinski Üçgeni, Sierpinski halısı, Koch Eğrisi gibi kümeler bir YFS'nin atraktörü olarak bu bölümde ayrıntılı olarak ifade edilmektedir.

Örnek 1.2.6. Cantor Kümesi: (\mathbb{R}, d_{st}) tam metrik uzay, $i = 1, 2$ ve $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x}{3} \\ f_2(x) &= \frac{x+2}{3} \end{aligned}$$

şelinde tanımlansın. $\{\mathbb{R}; f_1, f_2\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü Cantor Kümesi'dir. Keyfi bir $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ için $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$ olmak üzere $F^n(A)$ dizisi Hausdorff metriğine göre Cantor kümesine yakınsar.

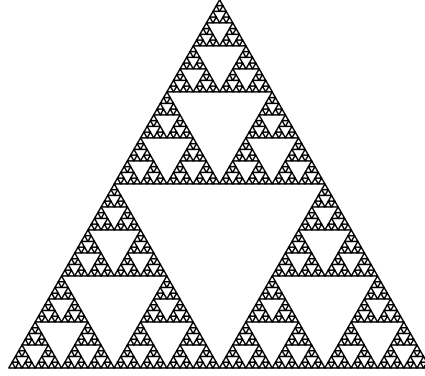


Şekil 1.1: Cantor Kümesi'nin elde edilişi

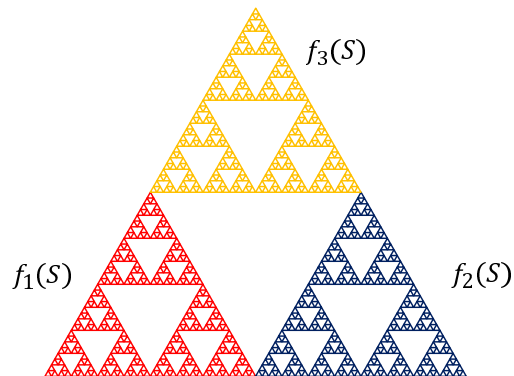
Örnek 1.2.7. Sierpinski Üçgeni(S): (\mathbb{R}^2, d_{st}) tam metrik uzayında $i = 1, 2, 3$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) \\ f_2(x, y) &= \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2} \right) \\ f_3(x, y) &= \left(\frac{x+(1/2)}{2}, \frac{y+(\sqrt{3}/2)}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olsun. Bu $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ YFS'nin atraktörü Sierpinski Üçgenidir.



Şekil 1.2: Sierpinski Üçgeni (S)



Şekil 1.3: Kendi 3 küçük benzer kopyasının birleşimi olan Sierpinski üçgeni

Örnek 1.2.8. Koch Eğrisi: (\mathbb{R}^2, d_{st}) tam metrik uzayında $i = 1, 2, 3, 4$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

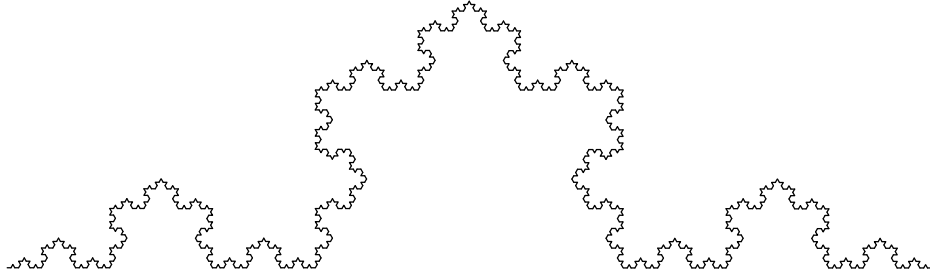
$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

$$f_2(x, y) = \left(\frac{x}{6} - \frac{\sqrt{3}y}{6} + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}x}{6} + \frac{y}{6} \right)$$

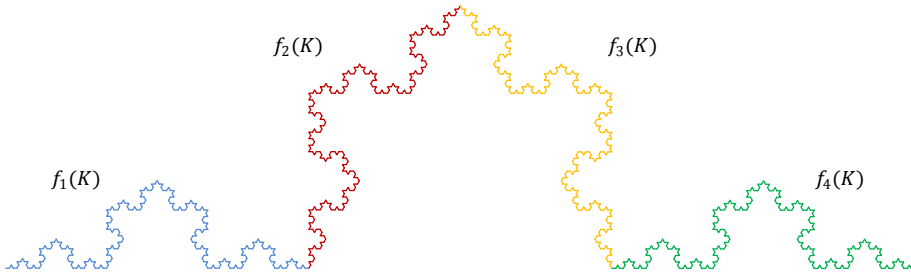
$$f_3(x, y) = \left(\frac{x}{6} + \frac{\sqrt{3}y}{6} + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$f_4(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu YFS'nin atraktörü Koch Eğrisi'dir.



Şekil 1.4: Koch Eğrisi

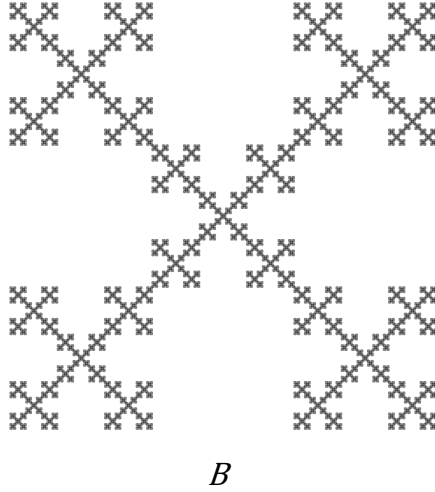


Şekil 1.5: Kendi 4 küçük benzer kopyasının birleşimi olan Koch eğrisi

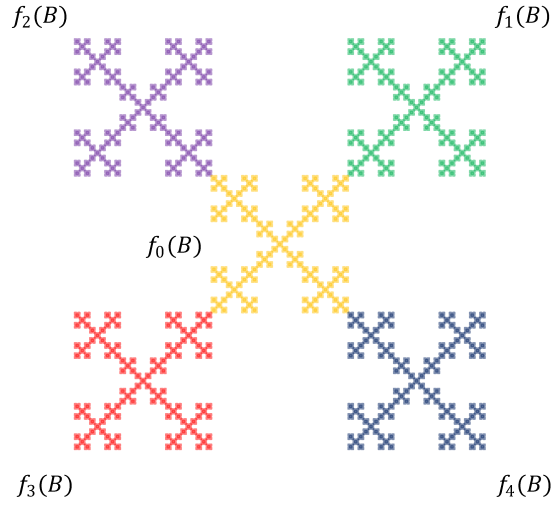
Örnek 1.2.9. Vicsek Fraktalı (B): (\mathbb{R}^2, d_{st}) tam metrik uzayında $i = 0, 1, 2, 3, 4$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}f_0(x, y) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) \\f_1(x, y) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3} + \frac{1}{3}\right) \\f_2(x, y) &= \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}, \frac{y}{3} + \frac{1}{3}\right) \\f_3(x, y) &= \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}, \frac{y}{3} - \frac{1}{3}\right) \\f_4(x, y) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3} - \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu YFS'nin atraktörü Vicsek Fraktalıdır.



Şekil 1.6: Vicsek Fraktal (B)



Şekil 1.7: Kendi 5 küçük benzer kopyasının birleşimi olan Vicsek fraktalı

Örnek 1.2.10. Sierpinski Tetrahedron (ST): (\mathbb{R}^3, d_{st}) tam metrik uzayında $i = 0, 1, 2, 3$ için $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

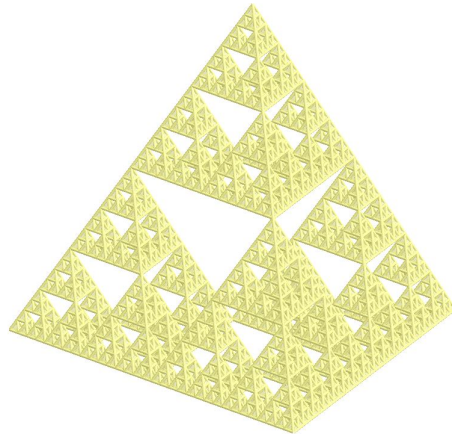
$$f_0(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right)$$

$$f_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right)$$

$$f_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{z}{2} \right)$$

$$f_3(x, y, z) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{z}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} \right)$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^3; f_0, f_1, f_2, f_3\}$ şeklindeki YFS 'nin atraktörü Sierpinski Tetrahedron'dur.

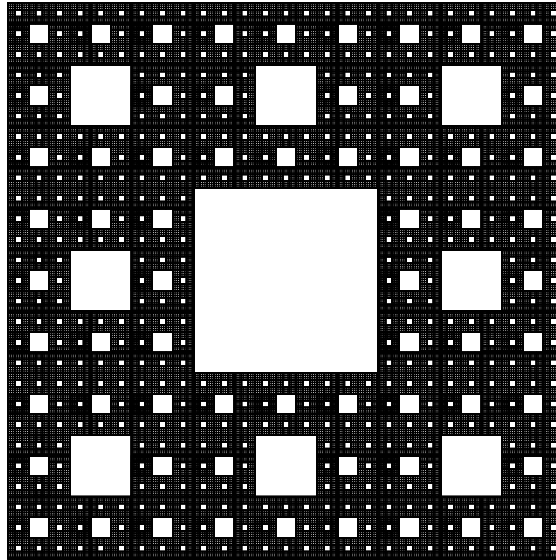


Şekil 1.8: Sierpinski Tetrahedron (ST)

Örnek 1.2.11. *Sierpinski Halısı (C):* (\mathbb{R}^2, d_{st}) tam metrik uzayında $i = 1, 2, \dots, 8$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

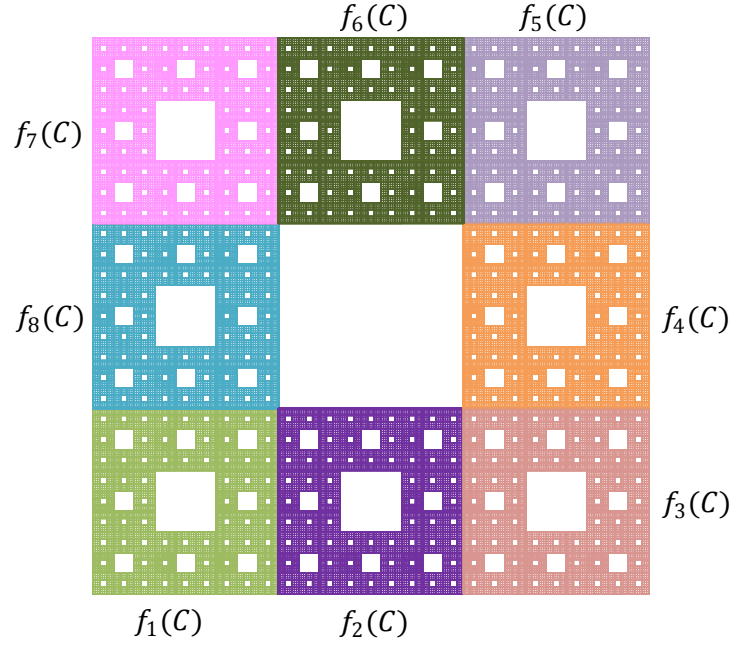
$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) \\ f_2(x, y) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3} \right) \\ f_3(x, y) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} \right) \\ f_4(x, y) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} + \frac{1}{3} \right) \\ f_5(x, y) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right) \\ f_6(x, y) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right) \\ f_7(x, y) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right) \\ f_8(x, y) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu YFS'nin akraktörüne Sierpinski Halısı'dır (C).



C

Şekil 1.9: Sierpinski Halısı (C)



Şekil 1.10: Kendi 8 küçük benzer kopyasının birleşimi olan Sierpinski halısı

1.3 İçsel Metrik Uzaylar

Bu tezde klasik fraktallar (daha da net olarak klasik kendine benzer kümeler) üzerindeki içsel metrik yapılar ele alınacağından bu alt bölümde içsel metrik ve içsel metrik uzay kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 1.3.1. X boştan farklı bir küme olsun. $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$, $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$ sağlayan sürekli dönüşümü x 'ten y 'ye bir yol olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.2. (X, d_X) bir metrik uzay ve $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$, fonksiyonu X 'de bir yol olsun. Y , $[a, b]$ 'nin bir bölüntüsü olmak üzere $(a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n = b)$

$$\sup_Y \sum_{i=1}^n d_X(\alpha(y_{i-1}), \alpha(y_i))$$

toplamı α 'nın uzunluğu olarak adlandırılır (d_X metriğine göre) ve $L_d(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.3. (X, d_X) bir metrik uzay olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d_i(x, y) = \inf\{L(\alpha) | \alpha : [0, 1] \rightarrow X, \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer her $x, y \in X$ için $d_i(x, y) < \infty$ ise bu fonksiyon bir metrik belirtir ve içsel metrik (veya jeodezik metrik) adını alır. Bu durumda (X, d_i) 'ye de içsel metrik uzay denir.

Eğer $\forall x, y \in X$ için x ile y 'yi birleştiren $d_X(x, y) = L_d(\alpha)$ koşulunu sağlayan bir α yolu varsa, (X, d) 'ye **kesin içsel metrik uzay** denir.

Örneğin; $\mathbb{R} \setminus (0, 0)$ kümesi içsel metrik uzaydır ama kesin içsel metrik uzay değildir. $(-1, 0)$ ve $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ noktalarının içsel metriğe göre aralarındaki uzaklık 2'dir. Fakat uzunluğu 2 olan bir yol bulunmamaktadır. Bu sebepten kesin içsel metrik uzay değildir.

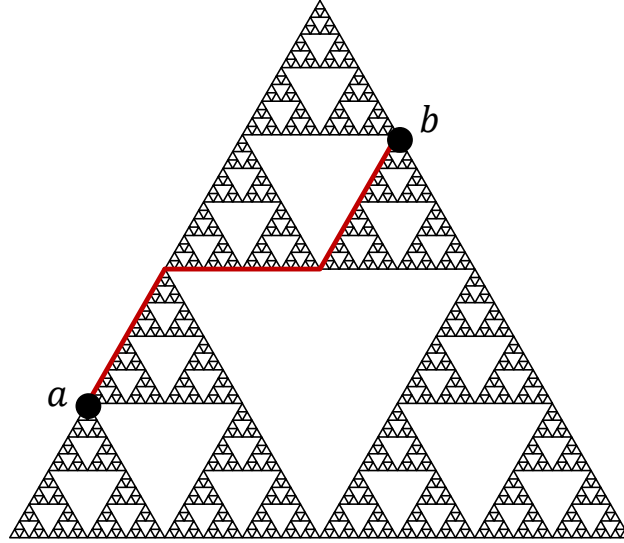
Tanım 1.3.4. (X, d) bir metrik uzay ve $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ bir yol olsun. Eğer $\forall t \in [0, 1]$ için

$$L(\alpha, t) = t \cdot L_d(\alpha)$$

eşitliği sağlanıyorsa α 'ya **doğal yol** denir.

Tanım 1.3.5. Eğer bir doğal yolun uzunluğu başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki uzaklığa eşitse bu yola **jeodezik** denir(bkz. [5], [12]).

Şekil 1.11' de iki nokta arasındaki bir jeodezik gösterilmiştir.



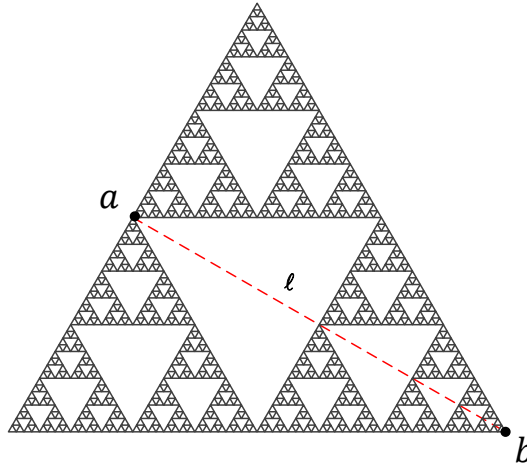
Şekil 1.11: a ve b arasındaki bir jeodezik

2 BAZI KENDİNE BENZER KÜMELER ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİK

Klasik fraktallardan özellikle Sierpinski Üçgeni üzerindeki içsel metrik konusunda literatürde oldukça çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda farklı araçlar kullanılarak bu kendine benzer yapı üzerindeki içsel metrik ifade edilmeye çalışılmış ve bu metriğe göre ilgili fraktalın bazı özellikleri araştırılmıştır. Bu küme üzerinde yapılan çalışmalar bu bölümde özetlenecektir.

Ayrıca Vicsek (Kutu) Fraktalı, Sierpinski Halısı gibi yine fraktal geometrinin klasik örneklerinden sayılabilecek kümeler üzerindeki içsel metrik de yine araştırmalara konu olmuş olup, bu bölümde bu kümeler üzerindeki çalışmalar da özetlenecektir.

Sierpinski Üçgeni üzerinde ilk akla gelen metrik elbette Öklid metriğinin bu kümeye kısıtlanmışıdır. İndirgenmiş metriğe göre aralarındaki uzaklık $l > 0$ olan $a, b \in S$ noktaları verildiğinde, genel olarak S üzerinde a 'dan b 'ye uzunluğu l olan bir yol yoktur. Bu sebepten dolayı bu metrik S 'nin yapısını anlayabilmemiz açısından çok da anlamlı değildir (bkz. Şekil 2.1).

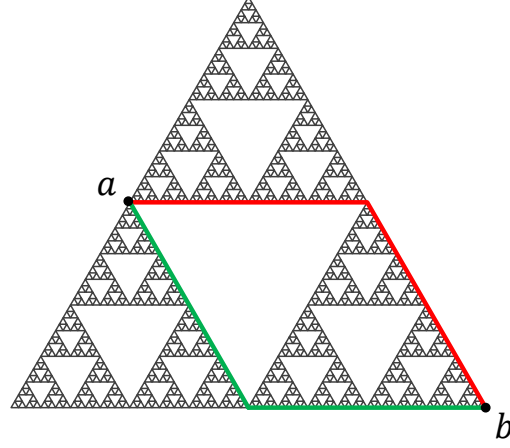


Şekil 2.1: a ve b arasındaki Öklidyen uzaklık

S 'nin yapısını daha iyi yansıtan metrik (diğer tüm kümelerde olduğu gibi) içsel metrik olacaktır. Ayrıca içsel metriğe göre iki farklı nokta arasındaki uzaklığı realize eden yol (jeodezik) genellikle tek olmayabilir. Bu da bir sonraki bölümün konusu olacaktır.

Bu metriğe göre S üzerindeki a ve b noktaları arasındaki uzaklığı realize eden

farklı iki jeodezik Şekil 2.2’de verilmiştir.



Şekil 2.2: İçsel metriğe göre a ve b arasındaki uzaklık

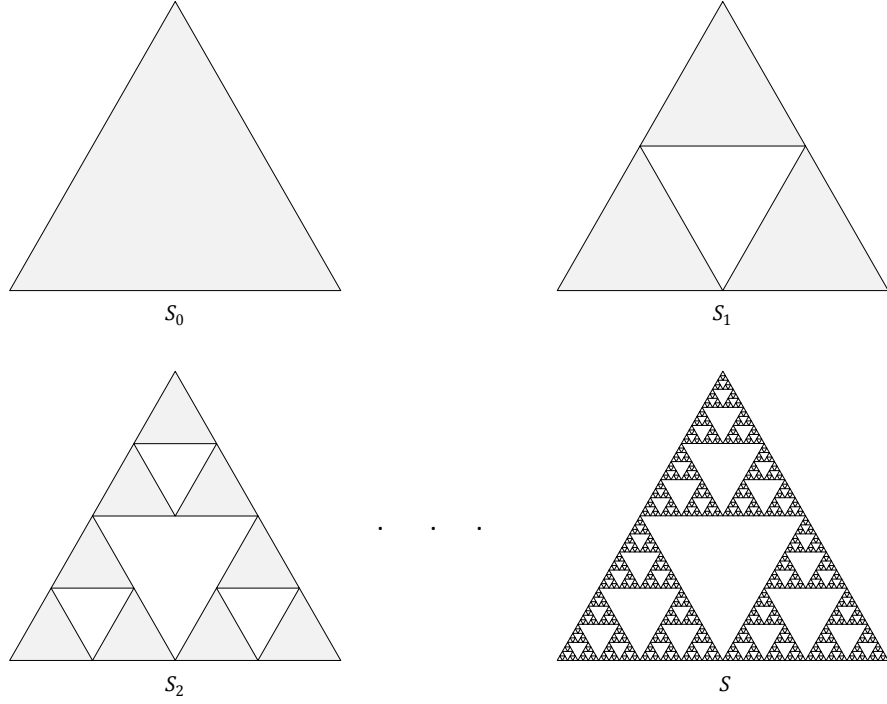
İlk olarak Sierpinski Üçgeni üzerindeki içsel metrik ile ilgili çalışmalar incelenecektir.

2.1 Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metrik

Sierpinski üçgeni üzerinde farklı şekillerde, farklı araştırmacılar tarafından içsel metrik ifade edilip ilgili metrik uzay buna göre incelenmiştir. Örneğin [7] çalışmasında Markov zinciri için sınır teorisi(Martin Boundary) kullanılarak içsel metrik ifade edilmiştir. [10] numaralı çalışmada ise Sierpinski Üçgeni üzerindeki içsel metrik kanonik bir ölçüm ile ifade edilmiştir. [9] çalışmasında da kod gösteri yardımıyla bazı kendine benzer kümeler üzerinde içsel metrik ifade edilmiştir. Bu tezde birkaç çalışma detaylı olarak incelenmiştir.

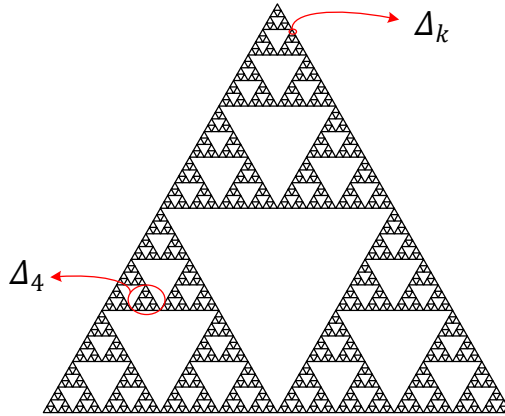
İlk olarak [8] çalışmasında verilen metrik ifadesi incelenecektir.

Sierpinski Üçgeni farklı olarak şu şekilde tanımlanabilir. S_0 eşkenar üçgen olmak üzere her kenarın orta noktaları birleştirilerek oluşturulan üçgenin atılmasıyla oluşan yeni şekil S_1 olsun. S_1 her birinin kenarı $\frac{1}{2}$ olan üç alt üçgen oluşur.



Şekil 2.3: S 'nin elde edilmesi

Bu prosedür devam ederse k . adımda her birinin kenar uzunluğu 2^{-k} olan 3^k tane alt üçgen oluşur. Bu üçgenlere k . dereceden alt üçgen denir. Şekil 2.4 bakılacak olursa Δ_4 , 4. adımda oluşmuş olan üçgen ve Δ_k ise k . adımda oluşmuş olan üçgendir.



Şekil 2.4: 4. dereceden ve k . dereceden alt üçgenler

$a, b \in S$, k . dereceden $\Delta_k(a)$ ve $\Delta_k(b)$ üçgenleri tarafından içirilsin. a_k ve b_k , $\Delta_k(a)$ ve $\Delta_k(b)$ 'nin sol alt köşeleri olsun. Bu durumda a ve b noktaları arasındaki uzaklık

$$d_i(a, b) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-k} d_k(a_k, b_k)$$

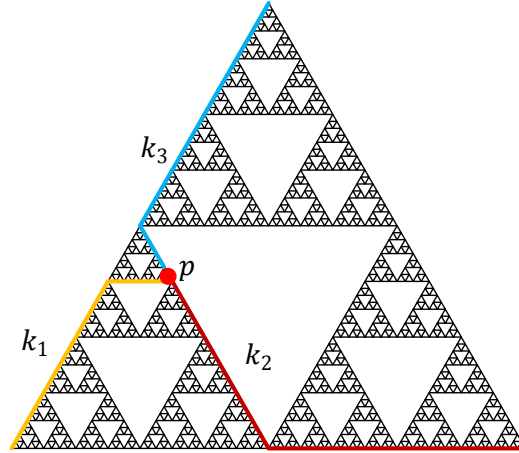
şeklinde tanımlanır. d_k , a_k ve b_k 'yi bağlayan en kısa uzaklıktır ([3]). O halde $d_i(a, b)$, a_k ve b_k 'nin jeodezik uzaklığıdır.

Yine [8]'de Grabner ve ark. tarafından içsel metrik aşağıdaki gibi inşa edilmiştir. Herhangi bir $a \in S$ noktası (k_1, k_2, k_3) üçlüsü şeklinde aşağıdaki koşullar ile ifade edilebilir.

$l = 1, 2, \dots$ için ε_l^1 , ε_l^2 ve ε_l^3 her biri 0 ve 1 lerden oluşan diziler olmak üzere (k_1, k_2, k_3) üçlüsü

$$k_i = k_i(p) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l^i}{2^l} \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir. Yani bu dizilerin yukarıdaki seri toplamına göre limiti bu üçlüyü verir. $\varepsilon_l^i \in \{0, 1\}$ için $\varepsilon_l^1 + \varepsilon_l^2 + \varepsilon_l^3 = 2$ dir. Burada $a = (\varepsilon_l^1, \varepsilon_l^2, \varepsilon_l^3)$ ifadesine a 'nin dijital gösterimi denir. Ayrıca $(\forall l \geq 1)$ için $k_1 + k_2 + k_3 = 2$ 'dir. Burada (k_1, k_2, k_3) üçlüsü herhangi bir $a \in S$ noktasının Sierpinski üçgeninin köşelerine, içsel mertişe göre uzaklığıdır.



Şekil 2.5: (k_1, k_2, k_3) ifadesi

Önerme 2.1.1. $a, b \in S$ ve $a = (\varepsilon_l^1, \varepsilon_l^2, \varepsilon_l^3)$, $b = (\delta_l^1, \delta_l^2, \delta_l^3)$ ($l \in \mathbb{N}$) a ve b 'nin dijital gösterimleri olsun. L herhangi bir i için $\varepsilon_L^i \neq \delta_L^i$ koşulunun sağlandığı sayı olmak üzere $\varepsilon_L^i = 0$ ve $\delta_L^i = 0$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda a ve b arasındaki uzaklık

$$\sum_{l=L}^{\infty} 2^{-l} (\varepsilon_l^j - \delta_l^j - 1)$$

şeklindedir.

Kanıt 2.1.2. bkz. [8]

Örnek 2.1.3. $\varepsilon_l^i \in \{0,1\}$ için $\varepsilon_l^1 + \varepsilon_l^2 + \varepsilon_l^3 = 2$ koşulu altında a ve b nin dijital gösterimleri $l \in \mathbb{N}^+$ için

$$\varepsilon_l^1 = 011000 \dots$$

$$\varepsilon_l^2 = 111111 \dots$$

$$\varepsilon_l^3 = 100111 \dots$$

$$\delta_l^1 = 0101110 \dots$$

$$\delta_l^2 = 1110111 \dots$$

$$\delta_l^3 = 10110011 \dots$$

olmak üzere $a = (\varepsilon_l^1, \varepsilon_l^2, \varepsilon_l^3)$, $b = (\delta_l^1, \delta_l^2, \delta_l^3)$ olsun. a ve b arasındaki uzaklığın hesaplanması için dizilerin bileşenlerine bakılırsa $L = 3$ de diziler farklılaşır. $i = 3$ ve $j = 1$ için $\varepsilon_3^3 = 0$ ve $\delta_3^1 = 0$ dir. O halde iki nokta arasındaki uzaklık

$$\sum_{l=3}^{\infty} 2^{-l} (\varepsilon_l^1 + \delta_l^3 - 1)$$

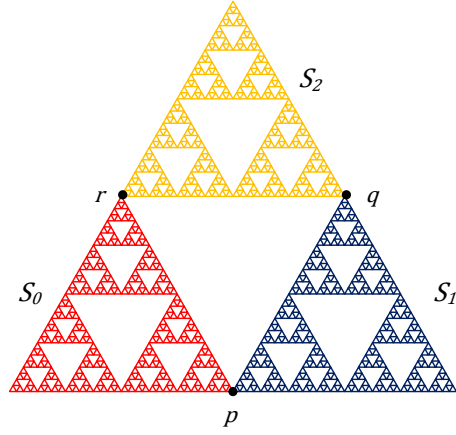
şeklinindedir. Yani 3. adım ve sonraki her adımda a ve b noktalarının sırasıyla ε_l^1 ve δ_l^3 dizisinin bileşenlerine göre uzaklık hesaplanır. O halde uzaklık

$$2^{-3}(1+1-1) + 2^{-4}(0+1-1) + 2^{-5}(0+0-1) + 2^{-6}(0+0-1) + 2^{-7}(0+1-1) + \dots = \frac{5}{64}$$

bulunur.

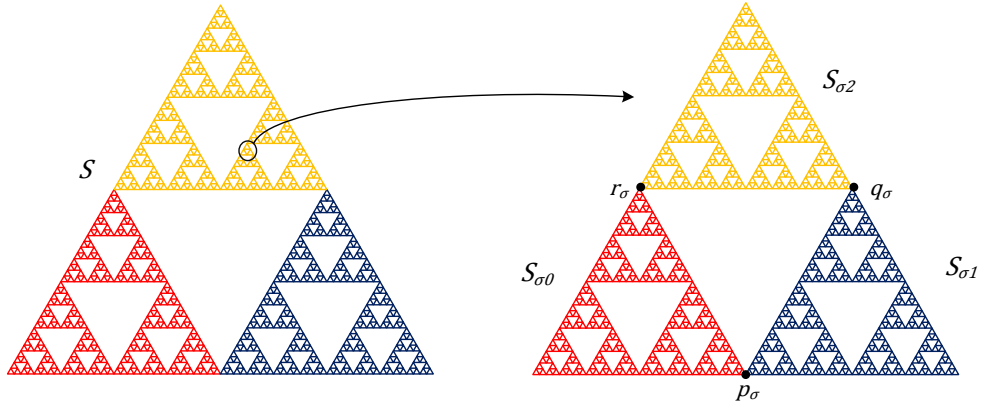
Üzerinde fazlaca duracağımız [15] çalışmasında Saltan ve ark. ise diğerlerinden farklı olarak noktaların kod gösterimi yardımıyla aşağıdaki şekilde içsel metrik ifade edilmiştir.

İlk olarak S üzerinde kod gösterimi ifade edilmiştir. Sol-alt üçgen, sağ-alt üçgen ve üst üçgen sırasıyla S_0, S_1, S_2 şeklinde adlandırılımsın. Şekil 2.6'de görüldüğü gibi $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ olmak üzere (S 'nin kendi 3 küçük kopyasının bir birleşimi olarak ifade edildiğini hatırlayalım!) tek noktadan oluşan $S_0 \cap S_1$, $S_1 \cap S_2$ ve $S_0 \cap S_2$ kesişim kümelerinin elemanları sırasıyla p , q ve r olsun.



Şekil 2.6: S 'nin kod gösterimi

$a_1 \in \{0, 1, 2\}$ için S_{a_1} için sol-alt üçgen, sağ-alt üçgen ve üst üçgen sırasıyla $S_{a_1 0}, S_{a_1 1}, S_{a_1 2}$ şeklinde gösterilir. Aynı argümanla devam edilirse $a_i \in \{0, 1, 2\}, i = 1, 2, \dots, k$ ve $\sigma = a_1 a_2 \dots a_k$ olmak üzere Şekil 2.7'de görüldüğü gibi $S_\sigma = S_{a_1 a_2 \dots a_k}$, S 'nin k . adımdaki küçük üçgensel parçası olarak adlandırılır.



Şekil 2.7: k . adımdaki S 'nin kod gösterimi

$S_{a_1}, S_{a_1 a_2}, S_{a_1 a_2 a_3}, \dots, S_{a_1 a_2 \dots a_n}, \dots$ dizisi için

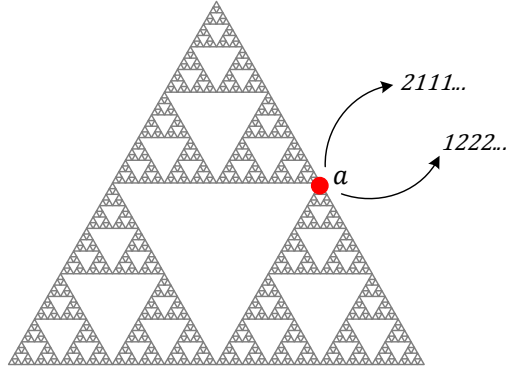
$$S_{a_1} \supset S_{a_1 a_2} \supset S_{a_1 a_2 a_3} \supset \dots \supset S_{a_1 a_2 \dots a_n} \supset \dots$$

olduğu açıktır ve Cantor Arakesit teoreminden

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} S_{a_1 a_2 \dots a_k}$$

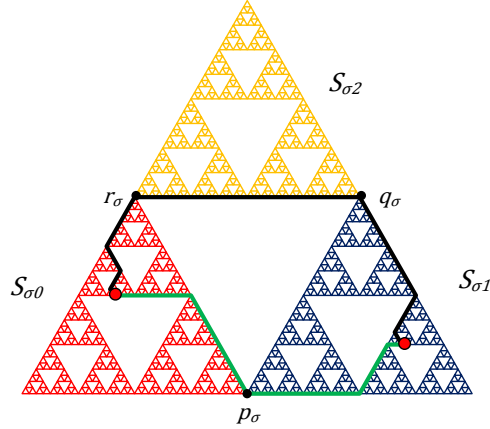
kesişimi $a \in S$ olan tek bir noktadır. Bu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ dizisine a noktasının bir kod temsili denir.

Dikkat edilmelidir ki her noktanın bir tek kod temsili olmayabilir. S üzerindeki bazı noktaların 2 farklı kod temsili vardır, bu noktalar k . dereceden küçük üçgenlerin kesiştikleri ve “junction point” olarak adlandırılan noktalardır. Eğer $a \in S$ bu türden bir nokta ise $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}$ için $a_1 a_2 \dots a_k \beta \alpha \alpha \dots$ ve $a_1 a_2 \dots a_k \alpha \beta \beta \dots$ şeklinde iki farklı kod gösterimi vardır. Diğer tüm noktaların kod temsilleri tektir.



Şekil 2.8: İki farklı kod gösterimi olan bir a noktası

Bu çalışmada iki nokta arasındaki en kısa uzaklık ifade edilirken iki durum üzerinde durulmuştur. Varsayalım ki $a, b \in S$ noktaları herhangi bir $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ için aynı üçgende yatsın ve k . adımda sırasıyla $S_{\sigma 0}$ ve $S_{\sigma 1}$ tarafından içerilsin. Burada izlenecek iki yol vardır. Şekil 2.9 de görüldüğü üzere birinci yol a ile r_σ 'yi, b ile q_σ 'yi ve $\frac{1}{2^k}$ uzunluğundaki r_σ ile q_σ 'yi birleştiren yollardan geçmelidir. İkinci yol ise a ile p_σ 'yi ve b 'den p_σ 'yi birleştiren yollardan geçmelidir.



Şekil 2.9: İki nokta arasındaki 2 yol

Bu seçimin belirlenmesinden yola çıkılarak S üzerinde, noktaların kod temsilleri yardımıyla açık bir formül aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 2.1.4. $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k \dots$ sırasıyla $a \in S$ ve $b \in S$ noktalarının kod temsilleri olsunlar. Her $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ olsun. a ve b arasındaki jeodezik uzaklık (yani a ve b arasındaki içsel metriğe göre uzaklık)

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i \neq a_k \wedge a_i \neq b_k \\ 1, & d.d. \end{cases}, \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & b_i \neq b_k \wedge b_i \neq a_k \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

olmak üzere

$$d_i(a, b) = \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} \right\}$$

şeklindedir ([15]).

2.2 Yüksek Boyutlu Sierpinski Üçgenleri Üzerindeki İçsel Metrik

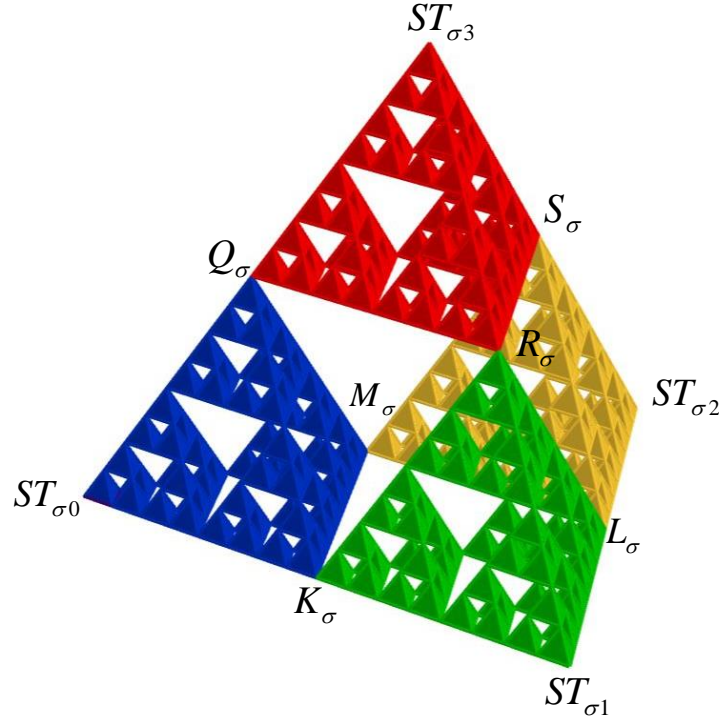
[1]'de ise Aslan ve ark. biraz önce bahsedilen çalışmayı 3 boyutlu Sierpinski Üçgeni olan Sierpinski Tetrahedron (ST) üzerinde benzer olarak genelleştirmişler ve ilgili kümedeki noktaların kod temsillerinin yardımı ile içsel metriği şu şekilde

ifade etmişlerdir. Öncelikle bu kendine benzer kümenin kendi 4 küçük kopyasının bir birleşimi olduğunu hatırlayalım.

ST_0, ST_1, ST_2, ST_3 sırasıyla ST 'nin alt-sol kısmı, alt-sağ kısmı, alt-arka kısmı ve üst kısmı olsunlar.

$$ST = ST_0 \cup ST_1 \cup ST_2 \cup ST_3$$

olacağı açıktır. Herhangi iki alt parçanın kesişimi ise tek bir noktadır. $ST_0 \cap ST_1, ST_1 \cap ST_2, ST_0 \cap ST_2, ST_0 \cap ST_3, ST_1 \cap ST_3$ ve $ST_2 \cap ST_3$ kesişim kümelerinin belirlediği tek noktalar sırasıyla $K, L, M, Q, R,$ ve S olsun. $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ve $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olsun. Genelliği bozmadan ST_σ 'nin altparçaları olan $ST_{\sigma 0}$ alt sol kısım, $ST_{\sigma 1}$ alt sağ kısım, $ST_{\sigma 2}$ alt arka kısım ve $ST_{\sigma 3}$ üst kısım olarak adlandırılımsın. İki $ST_{\sigma a_k}$ alt prizmalarının kesişimi yine tek noktadır (bkz. Şekil 2.10).



Şekil 2.10: k . adımdaki ST 'nin kod gösterimi

Tekrar $ST_{a_1}, ST_{a_1 a_2}, ST_{a_1 a_2 a_3}, \dots, ST_{a_1 a_2 a_3, \dots, a_k, \dots}$ dizisi düşünüldüğünde Cantor Arakesit Teoreminden

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} ST_{a_1 a_2 a_3, \dots, a_k} = A$$

tek bir $A \in ST$ noktasını verir. Bu $a_1 a_2 a_3, \dots, a_n, \dots$ ifadesine ise A 'nın kod gösterimi denir. Yukarıda verilen bilgilerin devamında ST üzerindeki içsel metrik aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Teorem 2.2.1. $a_1a_2a_3, \dots, a_k, \dots$ ve $b_1b_2b_3, \dots, b_k, \dots$ sırasıyla A ve $B \in ST$ iki farklı noktanın kod gösterimi, her $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ olsun.

$a_k \neq c_k \neq b_k, a_k \neq d_k \neq b_k, c_k \neq d_k$ ($a_i, b_i, c_k, d_k \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 1, 2, 3, \dots$) olduğu yerde

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}, \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \\ 1, & a_i \neq c_k \end{cases}, \delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \\ 1, & b_i \neq c_k \end{cases}$$

$$\phi_i = \begin{cases} 0, & a_i = d_k \\ 1, & a_i \neq d_k \end{cases}, \varphi_i = \begin{cases} 0, & b_i = d_k \\ 1, & b_i \neq d_k \end{cases}$$

sağlayan A ve B noktaları arasındaki uzaklık

$$d_i(A, B) = \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\phi_i + \varphi_i}{2^i} \right\}$$

şeklinde (1).

Burada bir noktadan diğerine gitmek için üç yol vardır. Metrikte minimumu alınan üç parça bunu temsil eder. İfade edilen ilk parça noktaları içeren üçgenlere göre kesişim noktasından (ilk ayrıldıkları adıma göre) geçen yoldur. Diğer iki yol ise $\frac{1}{2^k}$ 'lık yolu aldığı durumlardır.

2019 yılında [11] çalışmasında Gu ve ark. Sierpinski Üçgeni üzerinde kod temsilleri ile verilen içsel metriği gene üst boyutlarda tanımlamış ve yüksek boyutlardaki Sierpinski Üçgeninin jeodeziklerini belirlemiştir. Yüksek boyutlarda jeodezikler ile ilgili sonuçlara tezin son bölümünde değinilecek olup, bu bölümde içsel metriğin nasıl ifade edildiği özetlenecektir.

n boyutlu Sierpinski üçgeni olarak ifade edilen S^n basitçe $\{a_i\}_{i=0}^n$ dejenere olmamış tek yönlü $i \neq j$ için $|a_i - a_j| = 1$ koşulunu sağlayan

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i a_i \mid \sum_i t_i > 0 \right\}$$

şeklindeki noktalar kümesidir. Ayrıca S^n, \mathbb{R}^n 'deki $f_i(x) = \frac{1}{2}(x + a_i)$ olmak üzere

$$\{\mathbb{R}^n, \{f_i\}_{i=0}^n\}$$

yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak da ifade edilebilir. [15]'deki çalışmaya benzer olarak $x \in S^n$ için $x = i_1 i_2 \dots i_k \dots$ dizisi x 'in kod gösterimi ve

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}, \quad \delta'_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$$

olsun. Metriğin daha anlaşılır olması için bazı ifadeler açıklanacaktır. Ayrıldıkları adım olan $k^* = 1$, $(i_1, j_1) = (0, 1)$ ve $x \in \Delta_0$, $y \in \Delta_1$ olsun ($\Delta_i \in f_i(S^n)$). $\Upsilon_{x,y}$, x ve y 'yi bağlayan en kısa uzaklık olsun. Bu eğri Υ_{x,b_i} , Υ_{b_i,b'_j} ve $\Upsilon_{b'_j,b_y}$ şeklinde üç alt eğriden oluşsun ve bu eğriler aşağıdaki özellikleri sağlasın.

$$\Upsilon_{x,b_i} \subset \Delta_0, \Upsilon_{x,b'_j} \subset \Delta_0 \text{ ve } \Upsilon_{b_i,b'_j} \cap (\Delta_0 \cup \Delta_1) = \{b_i, b'_j\}$$

$\Upsilon_{x,y}$ 'nin en kısa eğri olduğunu ifade etmek için

$$\Sigma_{x,y} = \{(i, j) | d(x, b_i) + d(b_i, b'_j) + d(b'_j, y)\}$$

uzunluğunu minimize etmek gerekmektedir (Burada $\Upsilon_{b_i,b'_j} \cap (\Delta_0 \cup \Delta_1)$ durumunu sağlayan tek yol vardır). $\Sigma_{x,y}$ kümesini daha iyi anlamak için aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 2.2.2.

$$(i, 0) \notin \Sigma_{x,y}, \forall i \neq 1$$

$$(i, 1) \notin \Sigma_{x,y}, \forall i \geq 0$$

$$(0, j) \notin \Sigma_{x,y}, \forall j \geq 0$$

$$(1, j) \notin \Sigma_{x,y}, \forall j \neq 0$$

Bu önerme bir noktadan diğerine gidilirken seçilecek yolun seçimi için önemlidir. O halde noktaların kod temsilleri daha önceki çalışmalarda olduğu gibi tanımlanan S^n üzerinde içsel metrik aşağıdaki gibi tanımlanır (Burada herhangi bir noktanın 1 veya 2 kod temsili olmadığı, boyut arttıkça noktaların kod temsili sayısının da artabileceği uyarısını da yapmış olalım. Elbetteki tanımlanan metriğin noktaların kod temsilinden bağımsız olduğu kolayca gösterilebilir.):

Teorem 2.2.3. $x, y \in S^n$ kod temsilleri $i_1 i_2 \dots i_n \dots$ ve $j_1 j_2 \dots j_n \dots$ olan S^n 'nin iki farklı noktası ve

$$k^* = \min\{k | i_k \neq j_k, k = 1, 2, \dots\}$$

olsun. x ve y arasındaki uzaklık

$$\alpha = \sum_{k=k^*+1}^{\infty} \frac{\delta'_{i_k, j_{k^*}} + \delta'_{j_k, i_{k^*}}}{2^k}$$

ve

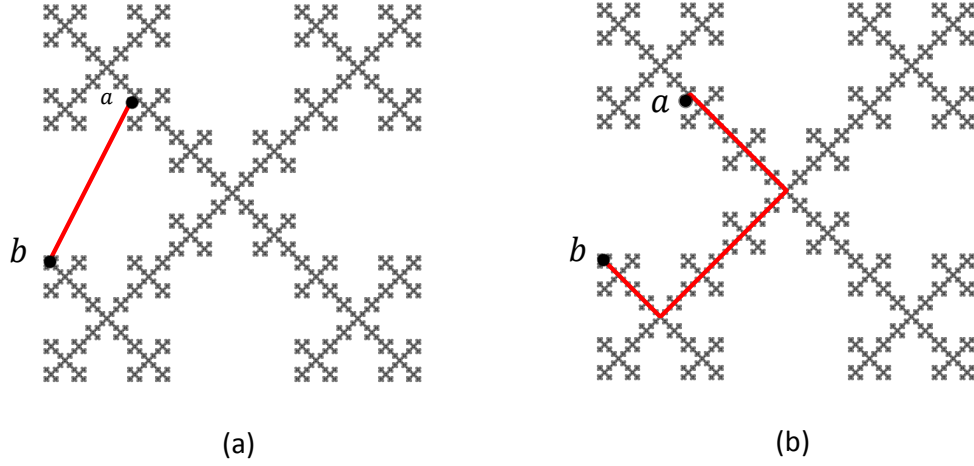
$$\beta = \min_{m \notin \{i_{k^*}, j_{k^*}\}} \left\{ \frac{1}{2^{k^*}} + \sum_{k=k^*+1}^{\infty} \frac{\delta'_{i_k, m} + \delta'_{j_k, m}}{2^k} \right\}$$

olmak üzere $d_i(x, y) = \min\{\alpha, \beta\}$ şeklindedir.

Burada α noktaların farklılaştığı adım göz önünde tutularak $\Sigma_{x,y}$ 'nin elemanı olduğu durumu ifade eder. Diğer $n-2$ durumda ise $\Sigma_{x,y}$ 'nin elemanı olmadığı durum olan $\frac{1}{2^{k^*}}$ 'lık fazladan gidilecek yollar β ile ifade edilir.

2.3 Vicsek Fraktal Üzerindeki İçsel Metrik

Klasik fraktallerden bir diğeri olan ve jeodezik yapısı bakımından diğerlerinden farklı olan bir Vicsek Fraktalı üzerinde yine noktaların kod temsili yardımı ile içsel metrik ifade edilmiştir (bkz. [13]).

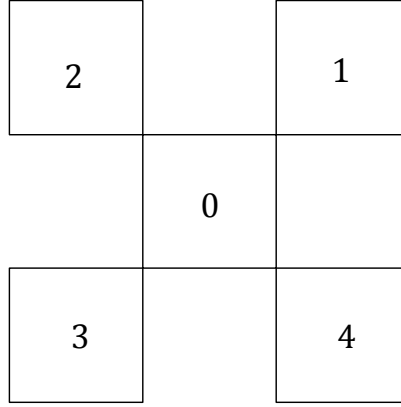


Şekil 2.11: Vicsek fraktal üzerinde Öklid(a) metriği ve içsel(b) metrik örneği

Şekil 2.11 de Öklid metriğine Şekil 2.11(a) ve içsel metriğe Şekil 2.11(b) göre iki nokta arasındaki yollar örneklendirilmiştir. [13] çalışmasında Özdemir ve ark. içsel metriği ifade etmek için B 'nin noktalarının kod temsillerini kullanmışlardır. Şekil 2.12'deki gösterime bağlı kalınarak; $i = 0, 1, 2, 3, 4$, için $B_i := f_i(B)$ olsun. $B = \bigcup_{m=0}^4 B_m$ ve $i = 0, j \neq 0$ için $B_i \cap B_j$ tek nokta kümesidir. Benzer olarak α , $k-1$ uzunluğundaki bir kelime olmak üzere $B_\sigma = f_\sigma(B)$, $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) için $f_\sigma = f_{a_1} \circ f_{a_2} \circ \dots \circ f_{a_{k-1}}$ dir. $B_{a_1}, B_{a_1 a_2}, B_{a_1 a_2 a_3} \dots$ dizisi düşünüldüğünde $B_{a_1} \supset B_{a_1 a_2} \supset B_{a_1 a_2 a_3} \supset \dots$ olur ve Cantor Arakesit Teoreminden

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_\sigma$$

tek bir $a \in B$ noktasından ibarettir. Bu noktaya a diyecek olursak $a_1 a_2 a_3 \dots$ dizisi noktasının a noktasının kod gösterimi olarak adlandırılır.



Şekil 2.12: B 'nin kod gösterimi

Yardımcı bir notasyon olarak $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ için x' aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x' = \begin{cases} 3, & x = 1 \\ 4, & x = 2 \\ 1, & x = 3 \\ 2, & x = 4 \end{cases}$$

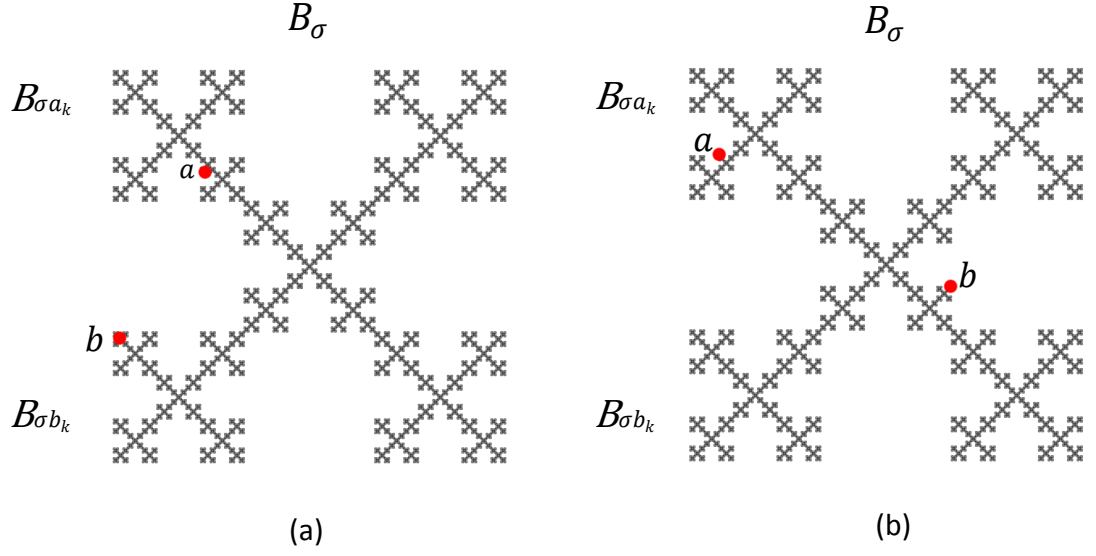
x' , x 'in eşleneği olarak adlandırılır. $a, b \in B$ noktalarının kod temsilleri $a_1a_2a_3 \cdots a_k a_{k+1} \cdots$ ve $b_1b_2b_3 \cdots b_k b_{k+1} \cdots$ olsun. $s = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_s = b_s$ ve $k = \min\{s | a_s \neq b_s, s \in \mathbb{N}\}$ olsun. Şekil 2.13'da gösterilen iki durum incelenecektir.

1.Durum: $a_k \neq 0 \neq b_k$.

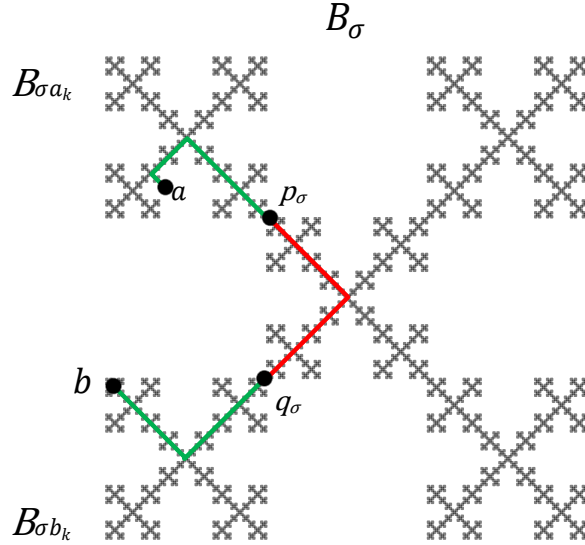
2.Durum: $a_k = 0, b_k \neq 0$ veya $a_k \neq 0, b_k = 0$.

Yani noktalardan biri k . adımdaki fraktalın (aslında fraktalın k . adımdaki kopyasının) merkezindeki parçasında iken diğeri farklı bir parçada olabilir ya da her ikisi de merkezdeki parçada olmayabilir. Bu iki durumda hesap birbirine çok benzese de elbette aynı değildir.

Durum-1: İlk olarak $a_k \neq 0 \neq b_k$ olduğunu varsayalım. Şekil 2.13 (a) da görüldüğü gibi $\sigma = a_1a_2a_3 \cdots a_{k-1}$ için $a \in B_{\sigma 2}$, $b \in B_{\sigma 3}$ için $a_k = 2$ ve $b_k = 3$ olsun. $B_{\sigma 0} \cap B_{\sigma 2}$ ve $B_{\sigma 0} \cap B_{\sigma 3}$ kesişim kümelerinin belirttiği noktalar sırasıyla p_σ ve q_σ noktaları olmak üzere en kısa uzaklığın p_σ ve q_σ ' dan geçeceği açıktır. p_σ ve q_σ arasındaki uzaklığın $\frac{\sqrt{2}}{3^k}$ olduğu kolayca görülür. a ile b arasındaki en kısa uzaklığı bulmak için a ile p_σ ve b ile q_σ arasındaki uzaklık hesaplanıp $\frac{\sqrt{2}}{3^k}$ ile toplanır.



Şekil 2.13: 1.Durum (a) ve 2.Durum (b) örneği



Şekil 2.14: 1.Durum için örnek

D_a ve D_b sırasıyla a ile p_σ ve b ile q_σ arasındaki en kısa uzaklık olsunlar. O halde aradığımız uzaklık değerinin

$$\frac{\sqrt{2}}{3^k} + D_a + D_b$$

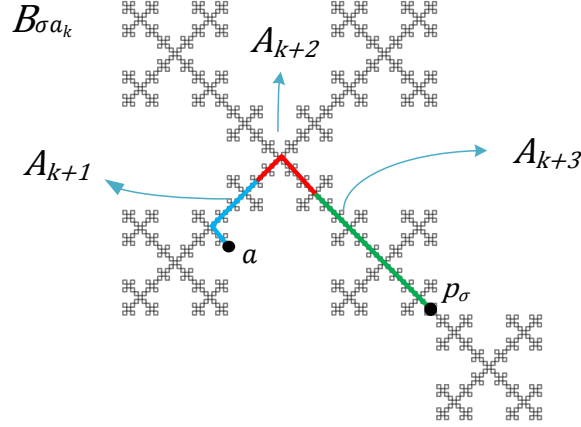
olacağı açıktır. D_a 'nın uzunluğu hesaplanırken p_σ 'nın gösterimi için $a_1 a_2 a_3 \cdots a_k a'_k a'_k \cdots$ kullanılacağını not edelim.

a ve p_σ arasındaki yol olan L_{ap_σ} , Şekil 2.15 de görüldüğü gibi küçük doğru parçaları

tarafından oluşur. Bu sebepten D_a alt yolların sonsuz toplamı şeklinde yazılabilir. Yani a ve p_σ arasındaki yol, A_{k+1}, A_{k+2}, \dots gibi alt yollar şeklinde aşağıdaki şekilde

$$D_a = \sum_{n=k+1}^{\infty} |A_n|$$

ifade edilebilir.



Şekil 2.15: A_n alt yollar

Burada önemli olan A_n doğru parçalarının uzunluklarının hesaplanmasıdır. Bu doğru parçalarının uzunluğu da $t_k = a'_k$ ve

$$t_n = \begin{cases} t_{n-1} & ; a_n = 0 \text{ veya } a_n = t_{n-1} \\ a'_n & ; d.d. \end{cases}$$

olmak üzere

$$|A_n| = \begin{cases} 0 & ; a_n = t_n \\ \sqrt{2}/3^n & ; a_n = 0 \\ 2\sqrt{2}/3^n & ; d.d. \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Durum-2: $a_k \neq 0$ ve $b_k = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda a ve b arasındaki en kısa uzaklık $D_a + D_b$ ' dir. D_a ve D_b yine Durum-1 de ki gibi sonsuz toplam olarak ifade edilebilir. Fakat bu durumda $B_{\sigma b_k} = B_{\sigma 0}$, B_σ ' nin merkezindeki parça (o kodlu) olduğundan, A_n en kısa alt uzaklığın yönünü doğru tanımlamak için a noktasının k . adımdaki gösterimi saptanmalıdır. Yani p_σ ' nin ne olduğu tanımlanmalıdır. Burada dört durum vardır. Doğru olan nokta ise $B_{\sigma 0}$ ve $B_{\sigma a_k}$ alt

kutularının kesişim noktasıdır. a' kod gösterimi $a_1a_2a_3 \cdots a_{k-1}b'_ka_{k+1} \cdots$ şeklinde olan bir nokta ve b'_k, b_k 'nin eşleneği olmak üzere (a_k, b'_k ile değiştirilebilir.) a ve b arasındaki en kısa uzaklık a' ve b arasındaki uzaklık eksi $\frac{\sqrt{2}}{3^k}$ 'dir.

Teorem 2.3.1. $a_1a_2 \dots a_k \dots$ ve $b_1b_2 \dots b_k \dots$ sırasıyla $a, b \in B$ noktaları için kod gösterimi olsunlar. Her $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ olsun. B üzerindeki içsel metrik

$$d_i(a, b) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{3} + D_a + D_b; & a_k \neq 0 \neq b_k \\ D_{a'} + D_b; & a_k = 0, b_k \neq 0 \\ D_a + D_{b'}; & a_k \neq 0, b_k = 0 \end{cases}$$

şeklinde dir. Burada a' ve b' kod gösterimleri sırasıyla $a_1a_2 \dots a_{k-1}b'_ka_{k+1} \dots$ ve $b_1a_2 \dots b_{k-1}a'_kb_{k+1} \dots$ şeklinde olan noktalardır ([13]).

2.4 Sierpinski Halısı Üzerindeki İçsel Metrik

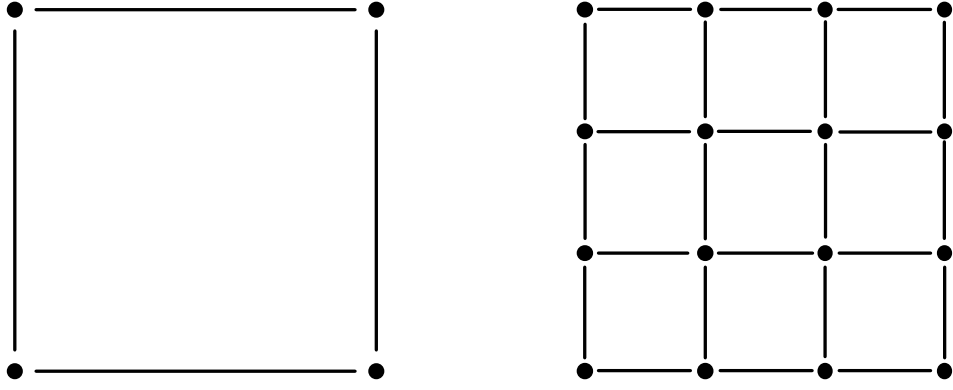
Sierpinski Halısı şu şekilde de ifade edilebilir: C_0 birim kare olmak üzere, C_0 'ı $\frac{1}{3}$ 'lük 9 kareye ayırıp ortadaki kare atılarak elde edilen (geriye kalan) 8 kare ile C_1 oluşturulur. Devamında her bir alt C_1 parçası aynı ölçüde karelere ayrılıp ortadaki kare atılarak devam edilirse k . adımda 8^n tane kare oluşur ve her birinin uzunluğu 3^{-k} 'dir. Bu karelere k . dereceden kareler denir. Bu argümanla devam edildiğinde elde edilen küme Sierpinski Halısı olacaktır.

C_0 birim kare, n . adımdaki Sierpinski halısı C_n olmak üzere, C_n karesinin tüm köşeleri kümesi V_n ve tüm kenarları kümesi E_n olarak adlandırılırsa $F_n = (V_n, E_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ köşeleri ve kenarları Sierpinski Halısı üzerinde olan sonlu bir çizge olarak elde edilir. (Yazar çalışmasında temel olarak bu çizgenin birer köşesi olarak ortaya çıkan (ve Sierpinski Halısının temel noktaları olarak adlandırdığı) farklı iki nokta arasındaki jeodezik uzaklığı farklı bir şekilde ifade etmiştir.)

Cristea, [6] çalışmasında, C üzerindeki içsel metriği önce şu şekilde ifade etmiştir. $x, y \in C$ noktaları farklı $C_k(x), C_k(y)$ ($k \geq 1$ dereceden) alt-karelerinde bulunsunlar ($C_k(x)$, k . adımda oluşmuş ve x noktasını içeren alt karelerdir). x_k ve y_k ise $C_k(x)$ ve $C_k(y)$ 'nin daha önceden üzerinde anlaşmaya varılmış yani en başta seçilmiş 4 köşeden birileri olsunlar, mesela sol alt köşeleri olsun. Bu durumda

$$d_i(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} 3^{-k} \cdot d_k(x_k, y_k)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $d_k(x_k, y_k)$, x_k ve y_k 'yi bağlayan F_k çizgesindeki en kısa yolun uzunluğudur. d_i , C üzerinde jeodezik metrik olarak tanımlanan bir metriktir. $d_i(x, y)$, x ve y 'yi bağlayan C içinde en kısa sürekli eğrinin uzunluğudur.



Şekil 2.16: C_1 'in(sol) ve C_2 'nin(sağ) çizge gösterimi

[6] çalışmasında yazar tarafından, Sierpinski Halısı üzerindeki içsel metrik, daha doğrusu aşağıda tanımlanmış olan çizgenin köşelerine indirgenmiş noktaları arasındaki jeodezik uzaklık, farklı bir şekilde ifade edilmiştir.

Cristea bu çalışmada seçilen referans köşesine bağlı olarak ifade edilen halı koordinatları ve noktaların farklılaştığı adıma göre seçilen kenarlara bağlı olarak oluşturulan alt halı koordinatları yardımıyla metriği ifade etmiştir. Metrik ifade edilirken noktaların birbirine göre konumu üç durumda incelenmiştir. Bunlardan birincisi noktaların aynı n-şeritte (detay için bkz. [6]) ve aynı kapalı bir karede bulunması durumudur. Burada noktaların silinmiş bir kare tarafından ayrıldığı adım ilk farklılaştığı adımdır. Bu ilk farklılaştıkları adım göz önünde bulundurularak bu adım için metriğe göre hesap yapılır. Diğer durum ise noktaların yine aynı n-şeritte bulunması fakat farklı kareler tarafından içerilmesi durumudur. Bu durumda noktalar ya aynı kenar paylaşan karelerde bulunurlar ya da silinmemiş bir kare tarafından ayrılmış karelerde bulunurlar. Burada ilk farklılaştıkları adım değil, farklılaştıkları adımdan sonraki silinmiş bir kare tarafından ayrıldıkları ilk adım göz önünde bulundurularak metriğe göre hesap yapılır. Bir diğer durumda ise noktalar silinmiş kare tarafından ayrılmayacaktır. Direk halı koordinatları kullanılarak metriğe göre hesap yapılır. Bu durumlara göre halı üzerindeki içsel metrik farklı notasyon ve araçlar kullanılarak [6], *Toerem1*'de açıkça ifade edilmiştir.

Bu metrik ifadesi kullanılarak ilgili çalışmada Öklid metriği ile içsel metriğin denkliği konusunda bu bölümün sonundaki alt bölümde değinilecek olan önemli bir sonuç kanıtlanmıştır. Bu sonucu verirken de Sierpinski Halısı üzerindeki içsel metriği değil, tanımladığı çizge üzerindeki içsel metrik formülünü ve Sierpinski Halısı üzerindeki herhangi bir noktanın bu çizgedeki noktalardan oluşan bir dizinin limiti olarak yazılabilmesi gerçeğini kullanmıştır.

2.5 Standart Metrik ile İçsel Metriğin Denkliği

Üzerlerindeki içsel metrikleri tartıştığımız bu klasik kendine benzer kümeler üzerinde var olan Öklid metriğinden indirgenmiş metrik ile bu içsel metrik arasındaki ilişki de merak konusu olabilecek önemdedir. Bu iki farklı metrik acaba Lipschitz denk midir?

Tanım 2.5.1. (X, d_1) ve (X, d_2) farklı metrik uzaylar olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$$

olacak şekilde $0 < \alpha \leq \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ varsa d_1, d_2 metriklerine bi-Lipschitz denk metrikler denir.

[2]'da Barlow ve arkadaşları Sierpinski Üçgeni üzerindeki içsel metrik (d_i) ile Öklid metriğin (d_{st}) bi-Lipshitz denk olduğunu göstermişlerdir.

Önerme 2.5.2.

$$d_{st}(x, y) \leq d_i(x, y) \leq 8 \cdot d_{st}(x, y)$$

şeklindedir ([2]).

Diğer bir çalışma olan [6]'da Cristea, Sierpinski Halısı üzerindeki içsel metrik ile Öklid metriğinin bi-Lipschitz denk olduğunu göstermiştir.

Önerme 2.5.3.

$$d_{st}(x, y) \leq d_i(x, y) \leq 2 \cdot d_{st}(x, y)$$

şeklindedir ([6]).

Elbette diğer üzerinde durduğumuz kendine benzer yapılar üzerindeki içsel metrik ile Öklid metriğinin denkliği için de aynı soru sorulabilir. Lakin literatürde karşılaştığımız bu şekilde net sonuçlar bulunmamaktadır.

Örneğin, Sierpinski Üçgeni için verilen denklik sonucu yüksek boyutlu Sierpinski Üçgenlerinde de aynen geçerli midir?

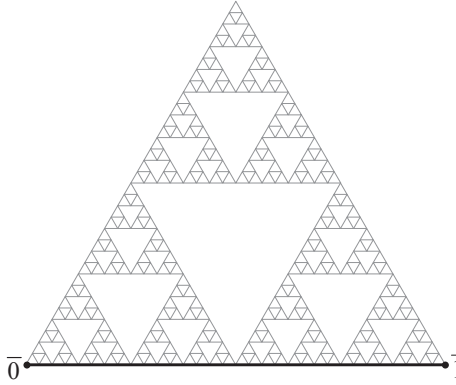
Örneğin, Vicsek Fraktalı üzerindeki içsel metrik ile Öklid metriğin denk olup olmadığı, denk ise de bu denklik katsayılarının ne olduğu araştırmaya değer bir sorudur!

3 KENDİNE BENZER KÜMELER ÜZERİNDEKİ JEODEZİKLER

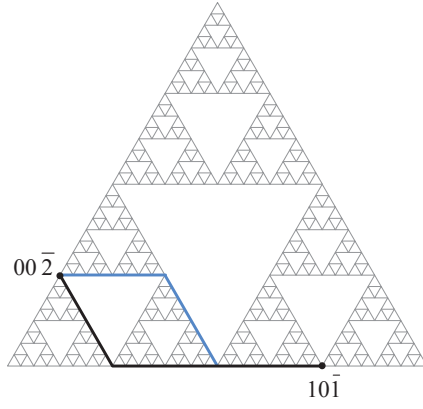
Önceki bölümde üzerinlerindeki içsel metrikleri incelediğimiz kendine benzer kümeler üzerindeki jeodezikler bu bölümde incelenmiştir. Herhangi iki nokta arasında kaç jeodezik olabileceği, bu jeodeziklerin noktaların temsiline bağlı olarak nasıl sınıflandırılabileceği bu klasik fraktaller üzerinde verilmiştir.

3.1 Sierpinski Üçgeni Üzerindeki Jeodezikler

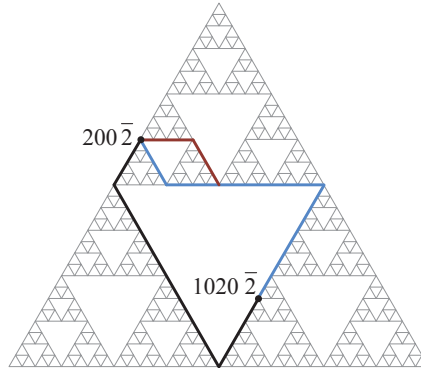
[14]'de Saltan ve arkadaşları ifade etmiş oldukları içsel metrik ve kod gösterimi yardımıyla S 'nin noktaları arasındaki jeodezikleri sınıflandırmışlardır. $a = a_1a_2 \dots a_{k-1}a_k \dots$ ve $b = b_1b_2 \dots b_{k-1}b_k \dots$ kod temsiline sahip farklı a ve $b \in S$ noktaları verilsin. Bu iki nokta arasında, noktaların pozisyonuna bağlı olarak en çok 5 jeodezik olabilir. Dahası, aralarındaki jeodezik sayısı 1, 2, 3, 4 ve 5 olan nokta çiftleri de vardır. Her bir nokta çifti sınıfı için örnekler Şekil 3.1 ve Şekil 3.5 arasında verilmiştir. İlgili çalışmada yazarlar, noktaların kod temsillerine bakarak aralarında kaç tane jeodezik olacağını göstermişler yani bu jeodezikleri sınıflandırmışlardır ([14]).



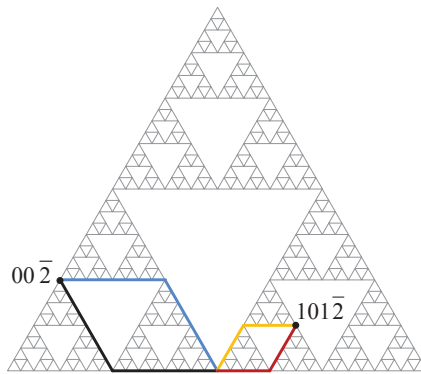
Şekil 3.1: Tek jeodezik



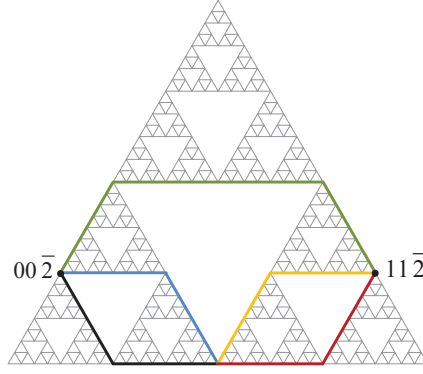
Şekil 3.2: İki jeodezik



Şekil 3.3: Üç jeodezik



Şekil 3.4: Dört jeodezik



Şekil 3.5: Beş jeodezik

3.2 Yüksek Boyutlu Sierpinski Üçgeni Üzerindeki Jeodezikler

[14] çalışmasından kısa bir süre sonra, [11] numaralı çalışmada Gu ve ark. n boyuttaki Sierpinski Üçgeni için benzer çalışma yapmışlar ve [14] çalışmasındaki sonuçları genellemişlerdir. Yani bu çalışma aslında Saltan ve ark. tarafından 2018 yılında yayımlanmış olan düzlemdeki klasik Sierpinski Üçgeni örneğinin üst boyutlara genelleştirilmesidir.

Herhangi bir boyuttaki Sierpinski Üçgeni için içsel metriği de yine kod temsilleri yardımı ile ifade edildiği bu çalışma da en çok göze çarpan sonuç aşağıdaki teoremdedir.

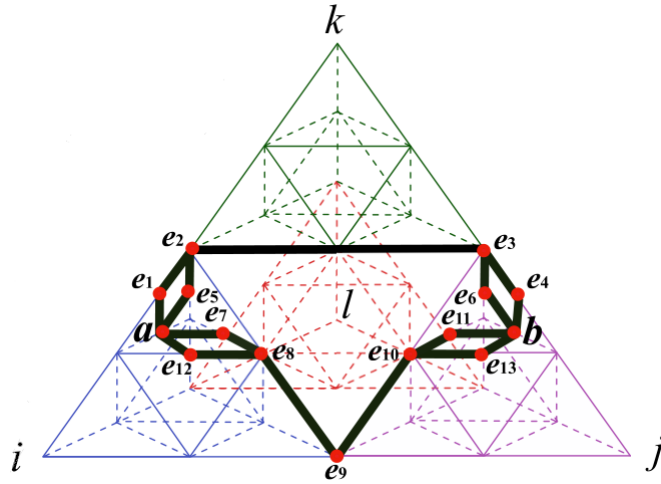
$N(x, y)$, x ve y arasındaki jeodeziklerin sayısı ve

$$X_n = \{N(x, y) \mid x, y \in S_n\}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.2.1. ([11]) Her $n \geq 3$ için $X_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ ([11]).

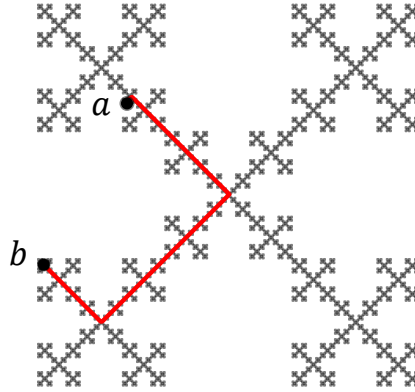
Bu teoremden de anlaşılacağı üzere, Gu ve ark. n -boyuttaki Sierpinski Üçgenlerinde herhangi iki nokta arasındaki jeodezik sayısının, $n > 2$ olmak üzere, “boyuttan bağımsız olarak”, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 8 olabileceğini göstermişlerdir. Aralarında 8 jeodezik olan nokta örneği Şekil 3.6’da gösterilmiştir.



Şekil 3.6: Yüksek boyutta sekiz jeodezik [11]

3.3 Vicsek Fraktalı Üzerindeki Jeodezikler

[13] çalışmasında Özdemir ve ark. B üzerinde içsel metriğe göre iki farklı nokta arasında yalnızca bir tek jeodezik olduğunu göstermişlerdir. Bu örneği diğer örneklerden farklı kılan önemli özellik de budur, hangi iki noktayı alırsanız alın, aralarında bir tek jeodezik vardır.



Şekil 3.7: Tek jeodezik

4 SIERPINSKI HALISI ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİK İÇİN BİR FORMÜL VE JEODEZİKLER

4.1 Noktaların Kod Temsilleri Yardımıyla İçsel Metriğin İfade Edilmesi

Bu tez çalışmasında, Sierpinski Üçgeni üzerindeki içsel metriğin noktaların kod temsilleri yardımı ile ifade edilmesi yöntemine paralel olarak, Sierpinski Halısı üzerindeki içsel metriği bu kendine benzer kümenin noktalarının kod gösterimlerini kullanarak ifade edilmesi amaçlanmıştır.

Sierpinski Halısı üzerindeki kodlama, diğer örneklerin aksine harfleri rakamlar olan kelimeler ile değil de harfleri sıralı ikililer olan kelimeler yardımıyla oluşturulmuştur.

$\mathcal{A}=\{0, 1, 2\}$ olsun.

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$$

şeklindedir. Amacımız Sierpinski Halısının her bir noktasını bu kümedeki “bazı” elemanlar yardımıyla oluşturulan diziler kullanılarak temsil etmek olacaktır.

$\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ olacak şekilde

$$\mathcal{A}' = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$$

seçilsin. C_0 birim kare olmak üzere C_1 için kod gösterimi Şekil 4.1 şeklindedir. Bu her adımda yinelenirse herhangi bir $p \in C$ noktası $i = 1, 2, \dots$ olmak üzere $(a_i^1, a_i^2) \in \mathcal{A}'$ için

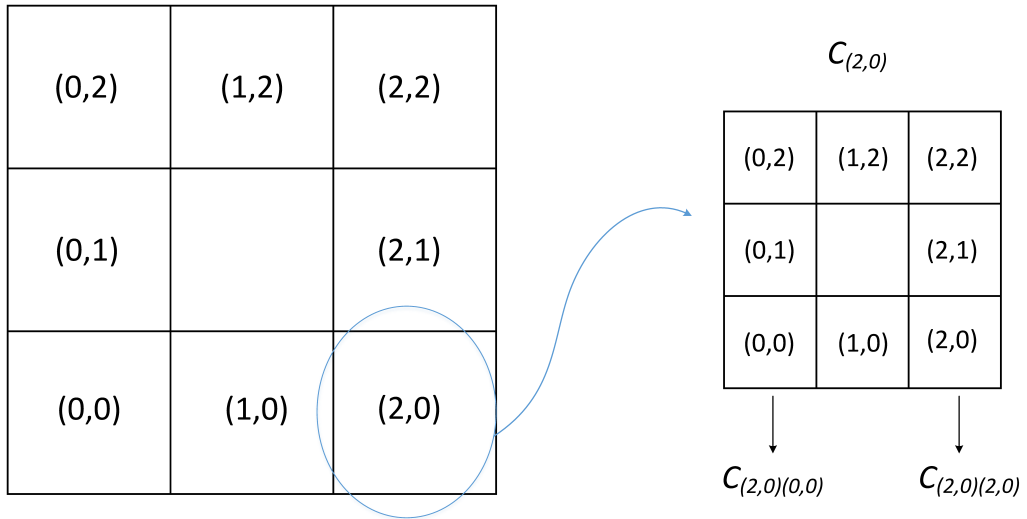
$$(a_1^1, a_1^2)(a_2^1, a_2^2)(a_3^1, a_3^2) \dots$$

şeklinde temsil edilir (Burada da yine k . mertebeden küçük Sierpinski Halıları tanımlanıp, Cantor Arakesit Teoreminden benzer şekilde bu yeni kod dizisinin tek bir noktayı işaret ettiği görülebilir). Bu ifadeye p noktasının kod temsili diyelim. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta da Sierpinski Halısı üzerindeki herhangi bir noktanın bir, iki, üç ya da dört farklı gösteriminin noktanın pozisyonuna göre var olabileceğidir.

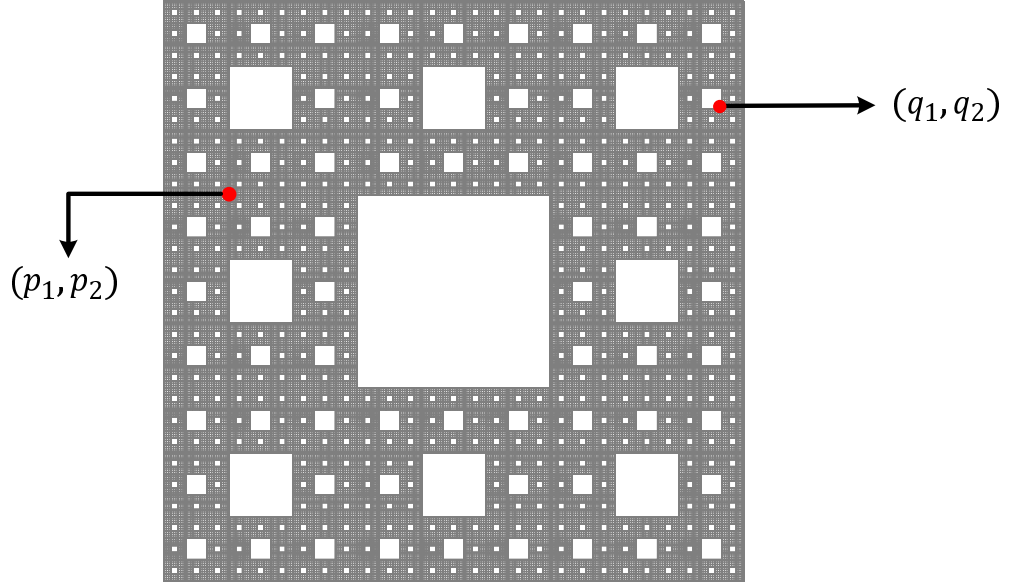
Burada herhangi bir p noktasına her adımda içerildiği kareler ile yaklaşılr.

2	(0,2)	(1,2)	(2,2)
1	(0,1)		(2,1)
0	(0,0)	(1,0)	(2,0)
	0	1	2

Şekil 4.1: C_1 'in kod gösterimi



Şekil 4.2: C_1 'in alt karesi olan $C_{(2,0)}$ 'nin kod gösterimi



Şekil 4.3: p ve q 'nin kartezyen koordinatları

Herhangi bir $p \in C$ noktası için, bu noktanın kartezyen koordinatları, noktanın kod temsili

$$(a_1^1, a_1^2)(a_2^1, a_2^2)(a_3^1, a_3^2) \cdots$$

şeklinde ise

$$p = (p_1, p_2) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^1}{3^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{3^i} \right)$$

olarak yazılabilir. (C , xy -dik koordinatlar düzlemine köşeleri $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ olacak şekilde yerleştirilsin. Yukarıdaki seri toplamı, xy -dik koordinat düzleminde p noktasının koordinatlarıdır.)(bkz. Şekil 4.3, 4.4)

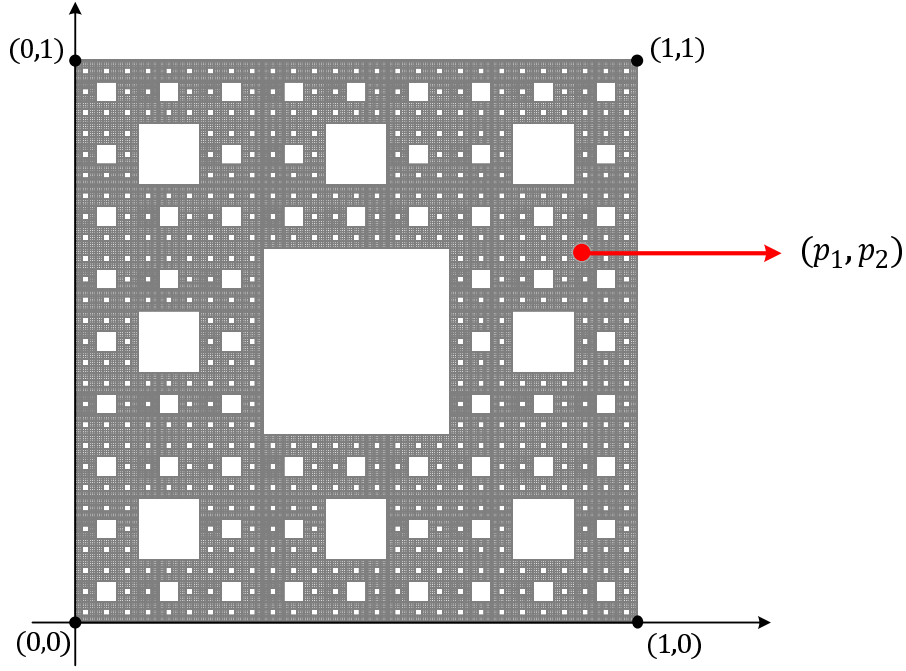
Bu serinin yakınsak olduğuna dikkat ediniz.

Bu aşamada Sierpinski Halısındaki “gap”lere özel bir isim verelim. Birim kareden başlayarak inşa edilen halının k . adımdaki kopyasında tam şeklin ortasında ortaya çıkan ve 3^{-k} kenar uzunluğuna sahip olan atılan kareye, k . adımda bir silinmiş kare diyelim.

Burada noktaların arasındaki uzaklık ifade edilmeden önce, birbirine göre iki durumu üzerinde durulur:

1. Durum: Herhangi bir adımdaki bir silinmiş karenin “sağında ve solunda” veya “yukarısında ve aşağısında” bulunan noktalar.

2. Durum: 1. Durum dışındaki tüm noktalar.



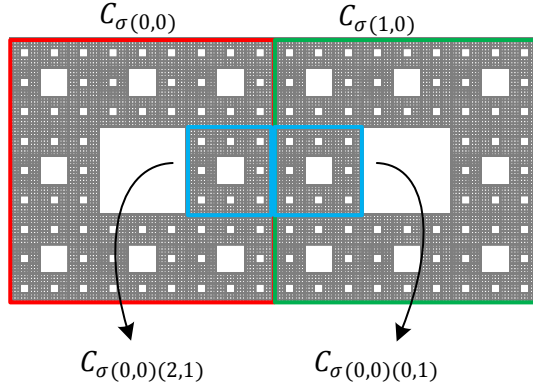
Şekil 4.4: p 'nin xy -koordinat sisteminde kartezyen koordinatları

2.Durum incelenirse; k . adım ayrıldıkları ilk adım ve $a_k^1 \neq b_k^1$ olsun. Bu adımdan ikinci bileşenlerine bakılır. Eğer herhangi bir $l \geq k$ adımında $a_l^2 \neq b_l^2$ ve $k < i < l$ şeklindeki i 'ler için bileşenler 1'den farklı ise bu noktalar silinmiş bir karenin sağına ve soluna düşmezler. Şekil 4.5'de görüldüğü gibi noktalar, silinmiş bir karenin sağında ve solunda değilse aralarındaki uzaklığın taksi metriğe eşit olduğu açıkça görülebilir. $(a_{k-1}^1, a_{k-1}^2) = (b_{k-1}^1, b_{k-1}^2)$ ve $(a_k^1, a_k^2) \neq (b_k^1, b_k^2)$ ise noktalar $k - 1$. adıma kadar aynı kare içinde bulunur.

$$\begin{array}{ccccccc} (\overline{a_1^1}, \overline{a_1^2}) & (\overline{a_2^1}, \overline{a_2^2}) & \dots & (\overline{a_k^1}, \overline{a_k^2}) & (\overline{a_{k+1}^1}, \overline{a_{k+1}^2}) & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ (\underline{b_1^1}, \underline{b_1^2}) & (\underline{b_2^1}, \underline{b_2^2}) & \dots & (\underline{b_k^1}, \underline{b_k^2}) & (\underline{b_{k+1}^1}, \underline{b_{k+1}^2}) & \dots & \end{array}$$

1. Durum için silinmiş bir karenin sağında ve solunda olma durumunu inceleyelim. $p, q \in C$ verilsin. $\sigma = 1, 2, \dots, k - 1$ için aynı C_σ alt karesinde bulunsunlar ve k . adımda ikinci bileşenleri eşit iken ilk bileşenleri farklı olsun. Bundan sonraki her adımda ikinci bileşenleri eşit gelmelidir. Burada noktalarının silinmiş bir karenin sağında ve solunda bulunması için $i \geq k$, $a_i^2 = b_i^2 = 1$ sağlanması gerektiğini ve bu koşulu sağlayan i . adımın k . adımdan sonraki ilk adım

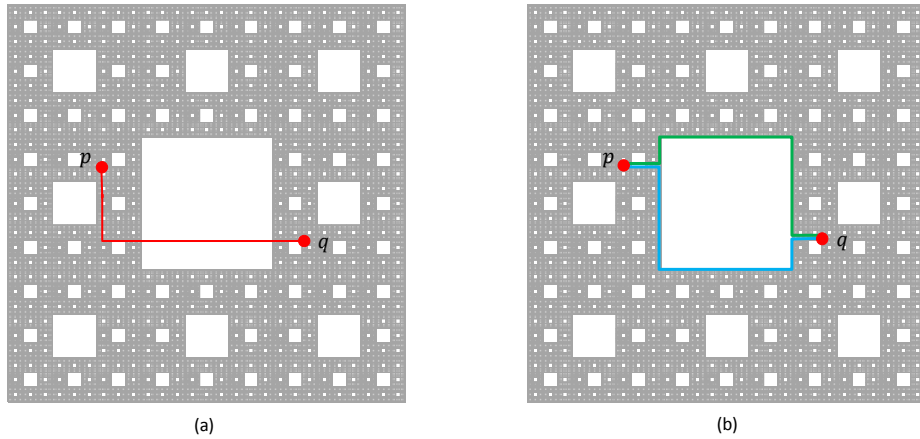
sistemine göre orjine yakın olana p noktası diyelim (Öklid metriğine göre). Eğer her $i > k$ için $a_i^1 = 2$ ve $b_i^1 = 0$ olmaya devam ediyorsa bu noktalar aynı seviyede komşu (bitişik) karelerde yatmaya devam ederler.



Şekil 4.7: Komşu karelerde bulunma durumu

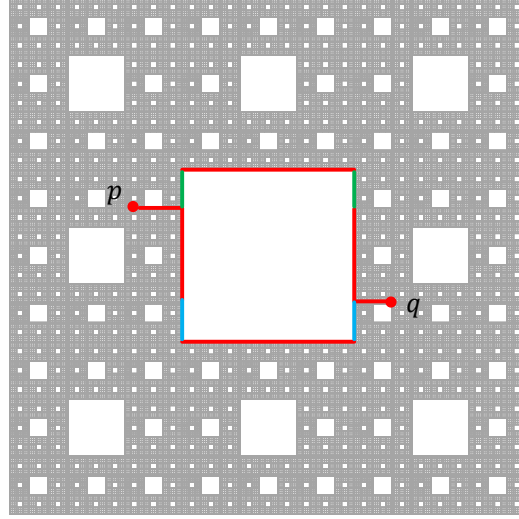
Varsayalım ki herhangi bir $l \geq k$ noktasında $a_l^1 \neq 2$ veya $b_l^1 \neq 0$ olsun. O halde bu noktalar artık bitişik komşu karelerde değildir. Artık ilk farklılaştıkları adım l . adım olarak alınır ve l adımından sonraki herhangi bir $a_i^2 = b_i^2 = 1$ koşulunu sağlayan ilk i . adımında silinmiş karenin sağına ve soluna düşerler.

Şimdi i . adımda silinmiş bir karenin sağına ve soluna düştüğü varsayalım. Şekil 4.8(a)'da taksi metriğe göre bu iki nokta arasındaki uzaklık gösterilirken Şekil 4.8(b)'de ise içsel metriğe göre gösterilmiştir. Burada yeşil ve mavi olan yollardan hangisinin en kısa olduğu saptanmalıdır.



Şekil 4.8: Taksi(a) ve içsel(b) metriğe göre uzaklıklar

Şekil 4.9 'da kırmızı ile gösterilen yerler seçtiğimiz yola göre taksi metriğe eşittir. Eğer yeşil yoldan gidersek taksi metriğine ek olarak iki yeşil parçalık yol alınmış olur. Eğer mavi yoldan gidersek yine taksi metriğine ek olarak iki mavi parçalık yol alınmış olur.



Şekil 4.9: İçsel metriğe göre kısa olan yollar

Kısa olan parçanın uzunluğunu bulmak için silinmiş bir karenin komşu kenarlarına düştüğü i . adım ve noktaların koordinatlarının 2. bileşenleri yardımıyla ifade edilecek olursa yeşil olan yoldan gidilirse fazladan

$$2 \left(\frac{1}{3^i} - \frac{p_2}{3^i} \right)$$

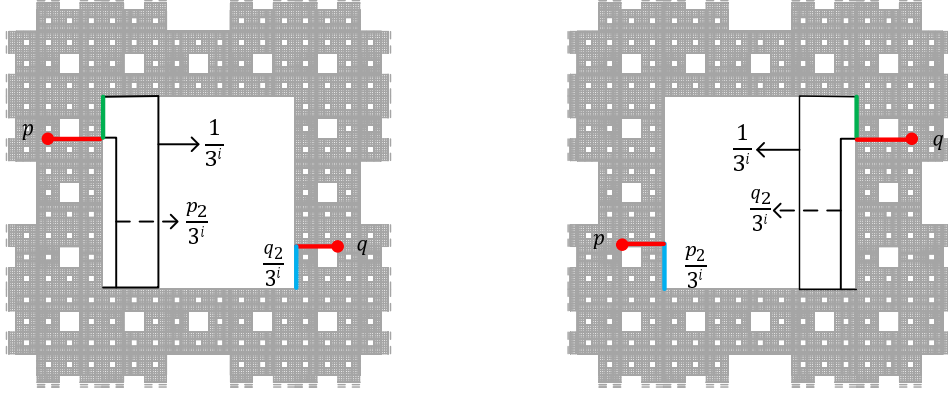
yol alınır. Mavi yoldan gidilirse fazladan

$$2 \frac{q_2}{3^i}$$

yol alınır. Noktanın durumlarına göre gidilecek yollar

$$2 \left(\frac{1}{3^i} - \frac{q_2}{3^i} \right) \quad \text{veya} \quad 2 \frac{q_2}{3^i}$$

olacağı açıktır (bkz. Şekil 4.10).



Şekil 4.10: *Gidilen fazla yolun uzunluğu*

Şimdi p ve q arasındaki uzaklık ifade edilmeden önce bazı tanımlamalar yapılacaktır. $j = 1, 2, \dots$ için

$$k = \min\{j \mid (a_j^1, a_j^2) \neq (b_j^1, b_j^2)\}$$

olsun (k , p ve q noktalarının kaçınıcı alt karede ayrıldığı gösterir). $\exists n \in \{1, 2\}$ için $a_k^n \neq b_k^n$ 'dir. Varsayalım ki $a_k^n < b_k^n$ olsun (simetriden dolayı $a_k^n > b_k^n$ benzer şekilde hesaplanabilir). $n \in \{1, 2\}$ için

$$\bar{n} = \begin{cases} 2; & n = 1 \\ 1; & n = 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned} l &= \min\{i \geq k \mid a_i^{\bar{n}} \neq b_i^{\bar{n}}\} \\ l' &= \min\{i \mid k \leq i < l, a_i^{\bar{n}} = b_i^{\bar{n}} = 1\} \\ l'' &= \min\{i > k \mid a_i^n \neq 2 \text{ veya } b_i^n \neq 0, a_j^{\bar{n}} = b_j^{\bar{n}}, i \leq j \leq k\} \\ l''' &= \min\{i \geq l'' \mid a_i^{\bar{n}} = b_i^{\bar{n}} = 1 \text{ ve } a_j^{\bar{n}} = b_j^{\bar{n}}, l'' \leq j \leq i\} \end{aligned}$$

olsunlar. Yukarıda ifade edilen l . adım noktaların diğer bileşeninin (\bar{n}) farklılaştığı adımı ifade eder. Bu adıma bağlı kalarak ifade edilen l' adımı ise bu noktaların silinmiş bir karenin sağına ve soluna (yukarı ve aşağı) düştüğü durumu ifade eder. Burada noktalar komşu (bitişik) karelerde değildirler. l'' adımı ise ayrılıkları adımda komşu karelere düştüğü durum için komşu olmaktan çıktıkları ilk adımı ifade eder. Komşu olmaktan çıktıkları adım olan l'' adımından sonraki l''' adımı ise silinmiş bir

karenin sağına ve soluna (yukarı ve aşağı) düştüğü ilk adımı ifade eder(l'' ve l''' adımları için \bar{n} bileşenlerinin hep eşit olduğuna dikkat edelim).

Bu durumlar için

$$i_0 = \begin{cases} l'' & , b_k^n - a_k^n = 2 \\ l''' & , b_k^n - a_k^n = 1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\alpha_n = \frac{2}{3^{i_0}} \cdot \min \left\{ 1 - p_{\bar{n}}, 1 - q_{\bar{n}}, p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}} \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 4.1.1. p ve $q \in C$ noktalarının kod temsilleri sırası ile $(a_1^1, a_1^2)(a_2^1, a_2^2)(a_3^1, a_3^2), \dots$ ve $(b_1^1, b_1^2)(b_2^1, b_2^2)(b_3^1, b_3^2), \dots$ ve

$$p = (p_1, p_2) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^1}{3^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{3^i} \right)$$

$$q = (q_1, q_2) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i^1}{3^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i^2}{3^i} \right)$$

noktaların kartezyen koordinatları olsunlar. p ve q arasındaki uzaklık

$$d(p, q) = \begin{cases} |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| & , (a_i^{\bar{n}} \neq b_i^{\bar{n}}) \vee (a_i^{\bar{n}} \neq 1, b_i^{\bar{n}} \neq 1, k \leq i \leq l) \\ |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + \alpha_n & , d.d \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Uyarı: l'' , l''' ve l'''' sayılarını tanımlarken kullandığımız kümelerin boş küme olması muhtemeldir. Lakin $(a_i^{\bar{n}} \neq b_i^{\bar{n}}) \vee (a_i^{\bar{n}} \neq 1, b_i^{\bar{n}} \neq 1, k \leq i \leq l)$ koşulu dışında bu kümeler \emptyset 'tan farklıdır ve zaten bu koşulda α_n katkısı yoktur!

Bu şekilde ifade edilen d 'nin C üzerindeki noktaların bu yeni kod temsilinden de bağımsız olduğu kolayca görülebilir.

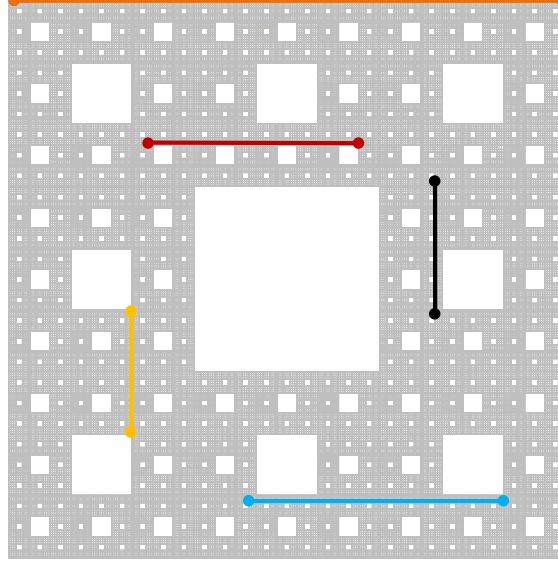
4.2 Sierpinski Halısı Üzerindeki Jeodezikler

Bu bölümde diğer çalışmalara benzer olarak kod gösterimi yardımıyla ifade edilen metriğe göre Sierpinski Halısı üzerindeki jeodezikler sınıflandırılmıştır.

Sierpinski Halısı üzerindeki iki farklı nokta arasında 1, 2 veya sonsuz jeodezik vardır. Aralarında tek veya iki jeodezik olan noktaların genellikle silinmiş karelerin (gaplerin) kenarlarında bulunduğu ve noktalardan biri silinmiş karenin kenarından ayrıldığı anda sonsuz tane jeodezik olduğu gözlemlenmiştir.

1) **Tek Jeodezik Olduğu Durumlar:**

i) $p, q \in C$, $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ için $p_1 = q_1$ veya $p_2 = q_2$ ve metriğe göre α_n yolunu almıyorsa bu noktalar aynı doğru üzerinde bulunurlar. O halde aralarında tek jeodezik vardır.



Şekil 4.11: i) Durumu için tek jeodezik

ii) Aynı silinmiş bir karenin komşu kenarlarında iseler aralarında tek jeodezik vardır. Yani $p, q \in C$ için kod gösterimleri sırasıyla

$$(a_1^1, a_1^2)(a_2^1, a_2^2)(a_3^1, a_3^2) \cdots$$

ve

$$(b_1^1, b_1^2)(b_2^1, b_2^2)(b_3^1, b_3^2) \cdots$$

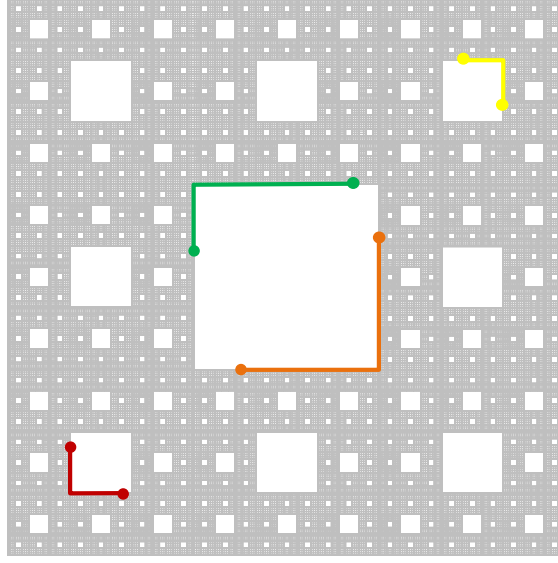
olsun. k . adımda

$$(a_k^1, a_k^2) \neq (b_k^1, b_k^2)$$

ve

$$(a_k^1, a_k^2) = (1, c_i), (b_k^1, b_k^2) = (c_i, 1), c_i \in \{0, 2\}$$

olsun. Bundan sonraki $\forall i > k$ için $(a_i, 0)$, $(2, b_i)$ veya $(a_i, 0)$, $(0, b_i)$ veya $(2, a_i)$, $(b_i, 2)$ veya $(a_i, 2)$, $(0, b_i)$, $(a_i, b_i \in \{0, 1, 2\})$ sağlanıyorsa bu noktalar aynı silinmiş karenin komşu kenarlarında yatar ve metriğe göre α_n yolunu almazlar. O halde aralarında tek jeodezik vardır.



Şekil 4.12: ii) Durumu için tek jeodezik

iii) Aynı silinmiş karenin karşılıklı kenarlarında iseler aşağıdaki koşullarda tek jeodezik vardır. Karşılıklı kenarlarda bulduklarından metriğe göre α_n yolu alınır. O halde

$$\alpha_n = \frac{2}{3^{i_0}} \cdot \min \left\{ 1 - p_{\bar{n}}, 1 - q_{\bar{n}}, q_{\bar{n}}, p_{\bar{n}} \right\}$$

için

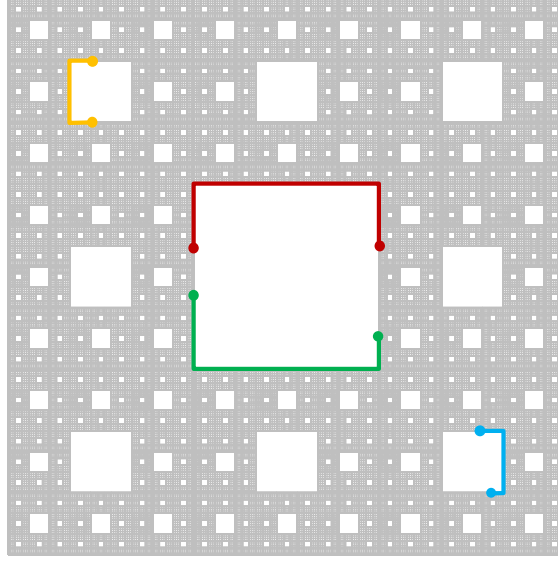
$$(p_{\bar{n}} = q_{\bar{n}}) \neq (1 - p_{\bar{n}} = 1 - q_{\bar{n}})$$

veya

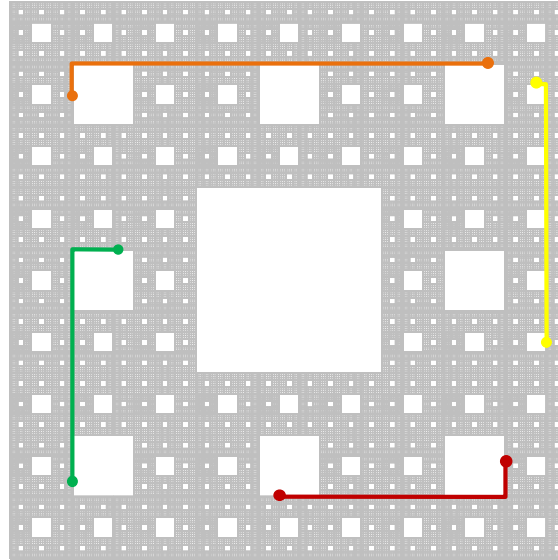
$$1 - p_{\bar{n}} \neq 1 - q_{\bar{n}} \neq p_{\bar{n}} \neq q_{\bar{n}}$$

ise aralarında tek jeodezik vardır.

iv) Aynı seviyede silinmiş farklı karelerin komşu kenarlarında iseler aralarında tek jeodezik vardır. Bu şekildeki noktalar ifade edilecek olursa k . adımda farklılaşsınlar ve $a_k^n = b_k^n$, $j - 1 \geq k$ için $a_{j-1}^n = b_{j-1}^n \neq 1$ ve j . adımda $(a_j, 1) = (1, b_j)$ veya $(1, a_j) = (b_j, 1)$ olsun. Öklid metriğine göre orjine yakın olan nokta (a_i^1, a_i^2) sıralı ikililer tarafından oluşmak üzere $a_j \leq 1$ iken $b_j \geq 1$ ve j . adımdan sonraki $\forall i > j$ için $(a_i, 0)$, $(0, b_i)$ veya $(2, a_i)$, $(b_i, 0)$ veya $(a_i, 2)$, $(0, b_i)$ veya $(2, a_i)$, $(b_i, 2)$ ise noktalar aynı seviyede silinmiş farklı karelerin kenarlarında bulunurlar. Bu durumda aralarında tek jeodezik vardır.



Şekil 4.13: *iii) Durumu için tek jeodezik*



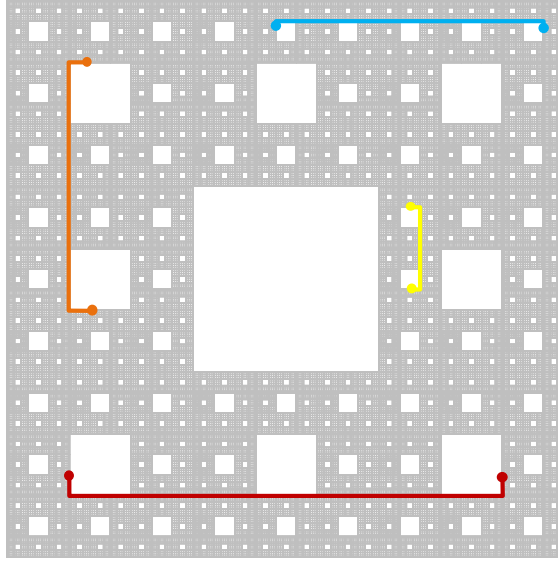
Şekil 4.14: *iv) Durumu için tek jeodezik*

v) Aynı seviyede silinmiş farklı karelerin karşılıklı kenarlarında ve aşağıdaki koşullar için yine tek jeodezik vardır. Noktalar silinmiş bir karenin karşılıklı kenarlarında iseler yine α_n yolunu alırlar. O halde yine α_n 'e göre *iii)*'ye benzer olarak

$$(p_{\bar{n}} = q_{\bar{n}}) \neq (1 - p_{\bar{n}} = 1 - q_{\bar{n}})$$

veya

$$1 - p_{\bar{n}} \neq 1 - q_{\bar{n}} \neq p_{\bar{n}} \neq q_{\bar{n}}$$



Şekil 4.15: v) Durumu için tek jeodezik

ise tek jeodezik vardır.

2) İki Jeodezik Olduğu Durumlar: Burada noktalar arasında iki jeodezik olduğu durumlar silinmiş bir karenin karşılıklı kenarlarında olduğu durumlardır. İki alt durumda incelersek;

i) Aynı silinmiş karenin karşılıklı kenarlarında olduklarından α_n yolunu alırlar.

$$1 - p_{\bar{n}} = q_{\bar{n}}$$

veya

$$1 - q_{\bar{n}} = p_{\bar{n}}$$

ise aralarında iki jeodezik vardır.

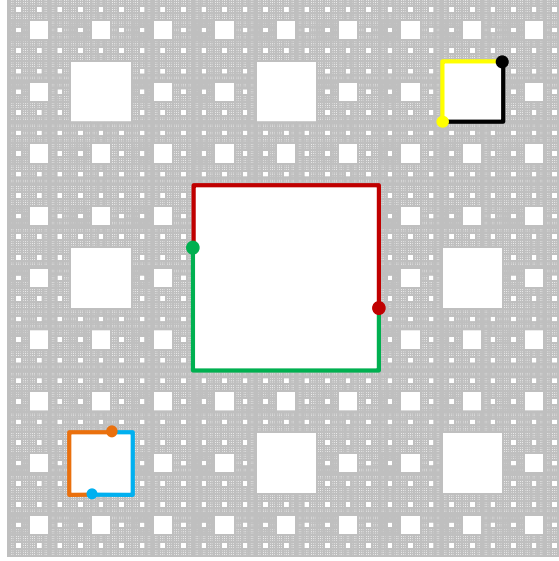
ii) Aynı seviyede silinmiş farklı karelerin kenarlarında olduğu durum incelenecek olursa, bu kısımda noktalar silinmiş karelerin köşe noktalarından farklı olduğu varsayılın. (Eğer köşe noktaları ise sonsuz jeodezik vardır.) O halde α_n yolunu alırlar i)'deki durum ile benzer olarak

$$1 - p_{\bar{n}} = q_{\bar{n}}$$

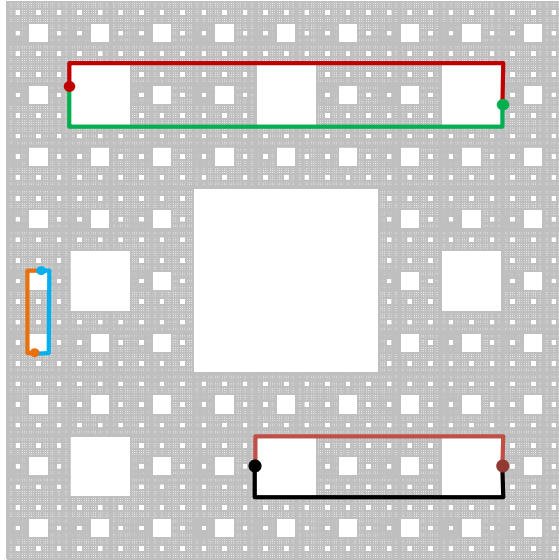
veya

$$1 - q_{\bar{n}} = p_{\bar{n}}$$

ise yine iki jeodezik vardır.

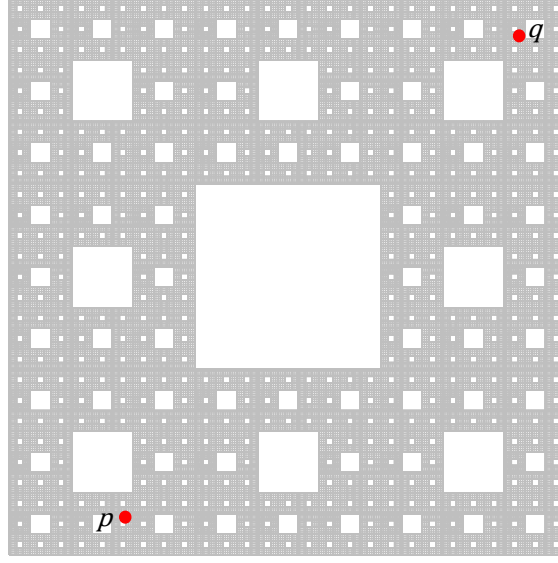


Şekil 4.16: *i) Durumu için iki jeodezik*



Şekil 4.17: *ii) Durumu için iki jeodezik*

3)Diğer tüm durumlarda ise sonsuz jeodezik vardır.



Şekil 4.18: *Sonsuz jeodezik*

KAYNAKÇA

- [1] N. Aslan, M. Saltan, and B. Demir. The intrinsic metric formula and chaotic dynamical system on the code set of the sierpinski tetrahedron. *Chaos, Solitons and Fractals*, 123:422–428, 2019.
- [2] M.T. Barlow and D. Nualart. *Lectures on Probability Theory and Statistics*. Siperinger, 1994.
- [3] MT. Barlow and EA. Perkins. Distance in sierpinski graphs and on the sierpinski gasket. *Applied Science*, 79:543–623, 1988.
- [4] M. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, 1988.
- [5] D. Burago, S. Ivanov, and Y. Burago. *A Course in Metric Geometry*. AMS, 2001.
- [6] L. L. Cristea. A geometric property of the sierpinski carpet. *Questiones Mathematicae*, 28:251–262, 2005.
- [7] M. Denker and H. Sato. Sierpinski gasket as a martin boundary ii(the intrinsic metric). *Publ. RIMS, Kyoto Univ*, 35:769–794, 1999.
- [8] P. Grabner and RF. Tichy. Equidistribution and brownian motion on the sierpinski gasket. *Monatshefte fur Mathematik*, 125:147–164, 1998.
- [9] M. Guneri and M. Saltan. Intrinsic metric formulas on some self-similar sets via the code representation. *Fractal and Fractional*, 3:13, 2019.
- [10] A.M. Hinz and A. Schief. The average distance on sierpinski gasket. *Prob. Theory Rel. Fields*, 87:129–138, 1990.
- [11] Gu Jiangwen, Ye Qianaian, and Xi Lifeng. Geodesics of higher-dimensional sierpinski gasket. *Fractals*, DOI: 10.1142/S0218348X1950049X, 2019.
- [12] Kilic M. *Icel Metric Uzaylar*. PhD thesis, Anadolu Universitesi, 2015.
- [13] Y. Ozdemir, M. Saltan, and B. Demir. The intrinsic metric on the box fractal. *Iranian Mathematical Society*, DOI: 10.1007/s41980-018-00197-w, 2019.
- [14] M. Saltan, Y. Ozdemir, and B. Demir. Geodesics of the sierpinski gasket. *Fractals*, 26(3).

- [15] M. Saltan, Y. Ozdemir, and B. Demir. An explicit formula of the intrinsic metric on the sierpinski gasket via code representation. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(2):716–725, 2018.