

176075

**AKUSTİK KORUNUM DENKLEMLERİNİN
KUATERNİONİK FORMU**

Esin USANMAZ
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı
Ağustos – 2003

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AKUSTİK KORUNUM DENKLEMLERİNİN KUATERNİYONİK FORMU

Esin USANMAZ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI
2003, 44 sayfa

Kuaternionlar ve bunların cebirlerine giriş yapıldıktan sonra kuaternion cebirinin temel özellikleri tanıtıldı. Ses dalgalarının özellikleri, yayını, enerjisi ve şiddeti anlatıldı. Lineer akustiklerin hareket denklemlerini çözmek için Hamiltonsal metodlar kullanılacağından; ses dalgalarının tanıtımından sonra Hamiltonsal metodlar tanıtıldı. Hamiltonsal metodlardan sonra ayar dörüşümleri tanıtıldı çünkü ayar dörüşümleri aynı şekilde lineer akustiklerin hareket denklemlerini çözmek için kullanıldı. Lineer akustik denklemler tanımlandıktan sonra; kuaternionlar kullanılarak lineer akustiklerin lokal enerji korunum denklemi ve kuaternionik birinci dereceden Lagrange fonksiyonu tanımı formülize edildi. Varyasyon ilkesi kullanılarak enerjinin lokal korunum denklemi kuaternionik ayar dönüşümünün yardımıyla elde edildi. Son olarak enerjinin lokal korunum denklemindeki akustik enerji yoğunluğu ve akustik enerji akısı denklemlerle gösterildi.

Anahtar kelimeler: Kuaternion, lineer akustik, lokal korunum denklemi, ayar dönüşümü, Hamilton yöntemleri

ABSTRACT
Master of Science Thesis

**QUATERNIONIC FORM OF ACOUSTIC CONSERVATION
EQUATIONS**

Esin USANMAZ

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Science
Physics Program

Supervisor: Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI
2003, 44 pages

After introducing the quaternion and the its algebra, the equations of the linear acoustics are defined. Properties of the voice vawes, convection, energy and density are investigated. Using the Hamiltonian methods to solve the motion equations of the linear acoustics the Hamiltonian methods are defined by using voice vawes. After introducing Hamiltonian methods, gauge transformations are also used for solve the motion equations of linear acoustics. With the linear acoustic equations, the lokal conservation equation for energy of the linear acoustics using quaternion and a quaternionic first-order Lagrangian description are formulated by means of quaternionic gauge transformation. In the last step of the study, density of acoustic energy which is presented in the lokal conservations equation of energy and the flux of acoustic energy are showed with the equations.

Keywords: Quaternion, linear acoustic, local conservation equation, gauge Transformation, Hamiltonian methods

TEŞEKKÜR

Bu alıőmada yardım ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Yard. Do. Dr. Murat TANIŞLI' ya sonsuz teőekkürlerimi bir bor bilirim. Ayrıca bu çalışmada emeiği geçen Nela ÇAKMAK, Müberra BALCIOęLU ve diğer arkadaşlarıma teőekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen AİLEM' e, her zaman yanımda oldukları için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
TABLolar DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KUATERNİONLAR.....	2
2.1. Kuaternion tanımı.....	2
2.2. Sıfır, skaler ve vektör kuaternion kavramları.....	3
2.3. Kuaternionlar ile ilgili temel işlemler.....	4
2.3.1. Kuaternionlarda toplama ve çıkarma.....	4
2.3.2. Kuaternionlarda eşitlik ve skalerle çarpma.....	5
2.3.3. Bir kuaternionun eşleniği.....	5
2.3.4. Kuaternion çarpımı ve özellikleri.....	5
2.4. Birim Kuaternion ve Norm.....	7
2.5. Ters eleman ve kuaternionlarda bölme.....	8
2.6. İki kuaternionun skaler çarpımı.....	9
2.7. İki vektör kuaternionun vektörel çarpımı.....	9
2.8. Kuaternionlar için paralellik ve diklik koşulu.....	9
2.9. Kuaternionların özellikleri.....	10
2.10. Kuaternionlarda türev ve kısmi türev.....	11
2.11. Diferansiyel vektör operatörleri.....	13
2.11.1. Gradyent.....	13
2.11.2. Divenjans.....	13
2.11.3. Rotasyonel (Curl).....	14
2.11.4. ∇ operatörü ile ilgili bağıntılar.....	14
2.12. Kuaternionların matris temsili.....	14

2.12.1. 2×2 matris temsili.....	15
2.12.2. 4×4 matris temsili.....	15
3. SES ve SESİN ÖZELLİKLERİ.....	17
3.1. Ses dalgalarının yayınıcı.....	17
3.2. Sesin faz hızı.....	17
3.3. Harmonik ses dalgalarının enerjisi ve şiddeti.....	20
3.4. Sesin fizyolojik özellikleri.....	21
4. HAMILTONSAL YÖNTEMLER.....	22
4.1. Hamilton denklemleri.....	22
4.2. Kanonik dönüşümler.....	25
4.3. Hamilton-Jacobi teorisi.....	31
5. AYAR DÖNÜŞÜMLERİ.....	36
6. AKUSTİKLER İÇİN ENERJİ KORUNUM DENKLEMLERİNİN KUATERNİONİK FORMU.....	38
7. SONUÇ.....	43
8. KAYNAKLAR.....	44

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

- R : Reel sayılar uzayı
 Q : Vektör uzayı
 e_i : Yapı sabitleri
 p, q : Kuaternion
 p^* : p kuaternionunun kompleks eşleniği
 $N(p)$: p kuaternionunun normu
 p^{-1} : p kuaternionunun tersi
 ∇ : Nabla operatörü
 p : Basınç
 ρ : Yoğunluk
 ω : Açısal frekans
 Y : Young modülü
 σ_i : Pauli spin matrisi
 H : Hamilton fonksiyonu
 L : Lagrange fonksiyonu
 ψ : Dalga fonksiyonu
 Ψ : Kuaternionik akustik durum vektörü
 T : Kuaternionik diverjans operatörü
 \mathcal{L} : Kuaternionik Lagranjyan yoğunluğu
 W : Akustik enerji yoğunluğu
 I : Akustik enerji akısı
 \cdot : Skaler çarpım
 \times : Vektörel çarpım

TABLolar DİZİNİ

5.1 Lokal ayar dönüşümleri

Sayfa

33

1. GİRİŞ

Kompleks sayılardan genelleştirilen kuaternionlar ilk olarak Sir W. R. Hamilton tarafından bulunmuştur. Daha sonra kompleks sayılar teorisi üç boyuta genişletildi. Clifford, bir kuaternionun Hamilton yazımını iki vektörün oranı olarak gösterdi. Kuaternionlar cebirsel olarak bölünebilirdir. Bu özellik fizikçiler için bir avantajdır. Kuaternionlar kuantum mekaniğinde, klasik mekanikte, yüksek enerji fiziğindeki problemleri çözmede, özel rölativitedeki postülatlarda geçerli ve önemli bir rol oynar. Ayrıca fiziksel niceliklerin gösteriminde de kullanılabilir. Fizikte kuaternionlarla ilgili bir çok çalışma vardır.

Lineer akustiklerin analizinde iki temel değişken basınç (p) ve parçacığın hızıdır (\vec{u}). Genellikle hem p hem de \vec{u} konum ve zamanın fonksiyonlarıdır. Enerjinin lokal korunum denklemlerinin alışılmış çıkarımları; akustikler için lineer ve açısal momentumların zaman geçişine, uzay geçişine ve uzaydaki dönmenin değişmezlik prensibine dayanır.

2. KUATERNİONLAR

Kuaternionlar, reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaternionlar dört tane bileşene sahiptir. Kuaternionlar iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşur [1].

Kuaternionlar bölüm cebrine sahiptir. Kuaternion cebri, birleşme özelliği olan fakat değişme özelliği olmayan $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ gibi dört elemandan oluşur.

Bunlardan biri reel diğer üçü sanaldır ve,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^2 &= -1 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \mathbf{e}_0^2 &= 1 \quad (\mathbf{e}_0 : \text{birim eleman}) \\ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ ve } i \neq j) \end{aligned} \quad (2.1)$$

şartlarını sağlarlar. Böylece bir q kuaternionu;

$$q = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılardır [2].

2.1. Kuaternion tanımı

Bir q kuaternionu;

$$q = \sum_{k=0}^3 q_k \mathbf{e}_k = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.3)$$

veya

$$q = [q_0, q_1, q_2, q_3] \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilebilir [3]. Burada q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılardır ve $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ise;

$$\mathbf{e}_0 = 1 ; \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -1 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 ; \quad \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 ; \quad \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \quad (2.6)$$

kuralına uyan birbirine dik sanal birimlerdir. Matematiksel olarak bir kuaternion, $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ baz elemanları ile 4-boyutlu reel vektör uzayını oluşturur. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sanal birimleri, 3-boyutlu vektör uzayının birbirine dik baz vektörleri olarak alınabilirler [23]. Bir q kuaternionunu matris formunda;

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T \quad (2.7)$$

şeklinde yazılabilir. Yani \mathbf{Q} kuaternionu, \mathbf{R} reel sayılar kümesinde, tabanı $\{\mathbf{e}_k; k = 0,1,2,3\}$ olan 4-boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu uzayın vektörleri, yani kuaternionlar;

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \quad \mathbf{q} = \sum_{k=0}^3 q_k \mathbf{e}_k \quad (2.8)$$

şeklindedir. Kuaternionların kümesi üzerinde cebir yapısı;

$$\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{Q} \xrightarrow{\sigma} r = \sigma(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \in \mathbf{Q} \quad (2.9)$$

şeklinde bir σ bilineer dönüşümü ile tanımlanır. \mathbf{Q} kuaternionlar cebirinin $\{\mathbf{e}_k; k = 0,1,2,3\}$ tabanına göre $c_{kl}^m \in \mathbf{R}$ yapı sabitleri;

$$\sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = c_{kl}^m \mathbf{e}_m \quad (2.10)$$

$k, l, m \in \{0,1,2,3\}$ 'dir. Bu yapı sabitleri,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_k &= \mathbf{e}_k \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_k; & k &= 0,1,2,3 \\ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= -\delta_{ij} \mathbf{e}_0 + \sum \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k & i, j, k &\in \{1,2,3\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

çarpımlarıyla tayin edilir. \mathbf{Q} cebirinin birim elemanı $\mathbf{e}_0 = 1$ 'dir. Buna göre;

$$\mathbf{e}_0 \in \mathbf{Q}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q} \quad \text{için} \quad \mathbf{e}_0 \mathbf{q} = \mathbf{q} \mathbf{e}_0 = \mathbf{q} \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır. \mathbf{Q} cebri komütatif değildir. Genel olarak,

$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{Q} \quad \text{iken} \quad \mathbf{pq} \neq \mathbf{qp} \quad (2.13)$$

olmaktadır. Fakat \mathbf{Q} cebri asosyatiftir:

$$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{Q} \quad \text{için} \quad (\mathbf{pq})\mathbf{r} = \mathbf{p}(\mathbf{qr}) \quad (2.14)$$

O halde kuaternionlar komütatif olmayan fakat asosyatif bir bölüm cebri oluşturmaktadır.

2.2. Sıfır, skaler ve vektör kuaternion kavramları

Bazı özelliklere sahip kuaternionlara özel adlar verilir. Sıfır kuaternion;

$$\mathbf{q} = [0, 0, 0, 0] \quad (2.15)$$

şeklinde dört elemanı da sıfır olan kuaterniondur. Skaler kuaternion ise kuaternionların $q_0 \mathbf{e}_0$ formundaki \mathbf{R}^1 alt kümesidir. Yani;

$$\mathbf{q} = [q_0, 0, 0, 0] \quad (2.16)$$

şeklinde vektör kısmı sıfır olan kuaterniondur. $q_0 = 0$ ve q_1, q_2, q_3 'ten en az biri sıfırdan farklı olan kuaternionlara ise vektör kuaternionlar denilmektedir. Aynı zamanda saf kuaternion olarak da bilinir. Genel olarak vektör kuaternionlar;

$$q = [0, q_1, q_2, q_3] \quad (2.17)$$

olarak ifade edilirler.

R^3 'teki vektörleri, kuaternionlarla temsil etmek mümkündür. Bunun için $\{e_i : i = 1, 2, 3\}$ tabanının elemanlarına birer yön tahsis etmek gerekir. Bunlar sırasıyla kartezyen koordinat sisteminin x, y ve z-eksenlerinin pozitif yönlerini temsil etsinler. O zaman kartezyen bileşenleri $r_1 = x, r_2 = y, r_3 = z$ olan R^3 'teki bir \vec{r} vektörünü;

$$r = [0, x, y, z] \quad (2.18)$$

şeklinde bir vektör kuaternionla temsil etmek mümkün olur.

Bilindiği gibi R^3 'te bölme işlemi yoktur. Yani R^3 'teki bir vektörü diğer bir vektöre bölmek mümkün değildir. Oysa R^3 'ün vektörleri birer vektör kuaternionla temsil edilirse, vektör kuaternionlar için bölme işlemi tanımlı olduğundan bu eksiklik ortadan kaldırılacaktır [5].

2.3. Kuaternionlar ile ilgili temel işlemler

2.3.1. Kuaternionlarda toplama ve çıkarma

p ve q iki kuaternion olmak üzere; bu iki kuaternionun toplamı ve farkı, karşılıklı elemanlarının toplam ve farkından oluşan bir diğer kuaterniondur.

$$\begin{aligned} p \pm q &= [p_0, p_1, p_2, p_3] \pm [q_0, q_1, q_2, q_3] \\ &= [p_0 \pm q_0, p_1 \pm q_1, p_2 \pm q_2, p_3 \pm q_3] \end{aligned} \quad (2.19)$$

olarak ifade edilir. Bu ifade matris formunda;

$$p \pm q = (p_0 \pm q_0 \quad p_1 \pm q_1 \quad p_2 \pm q_2 \quad p_3 \pm q_3)^T \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir. Görüldüğü gibi iki kuaternionun toplamı veya farkı işlemi sonunda yine bir kuaternion elde edilir. Kuaternionlarda, toplama ve çıkarma işleminde kapalılık özelliğinin yanısıra asosyatiflik ve komutatiflik özellikleri de vardır.

2.3.2. Kuaternionlarda eşitlik ve skalerle çarpma

Eğer p ve q gibi iki kuaternionun elemanları,

$$p_0 = q_0, p_1 = q_1, p_2 = q_2, p_3 = q_3$$

şeklinde ise p ve q kuaternionu birbirine eşittir denir. $p \in \mathbb{Q}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\lambda p &= \lambda(p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3) \\ \lambda p &= \lambda p_0 + \lambda p_1 e_1 + \lambda p_2 e_2 + \lambda p_3 e_3\end{aligned}\tag{2.21}$$

şeklinde olup, burada λ =sabit ve $\lambda p \in \mathbb{Q}$ 'dur.

2.3.3. Bir kuaternionun eşleniği

$p \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, $p = p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3$ gibi bir kuaternionun eşleniği, bu kuaternionun başka bir imajiner bir başka ifade ile vektörel kısmının işaretlerinin değişmesiyle elde edilen p^* kuaternionudur. Ayrıca buna kompleks eşlenik de denir. p kuaternionunun eşleniği;

$$\begin{aligned}p^* &= p_0 - p_1 e_1 - p_2 e_2 - p_3 e_3 \\ &= [p_0, -p_1, -p_2, -p_3]\end{aligned}\tag{2.22}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca eşlenik işleminde,

$$(p^*)^* = p\tag{2.23}$$

$$(qp)^* = p^* q^*\tag{2.24}$$

özellikleri vardır [4].

2.3.4. Kuaternion çarpımı ve özellikleri

p ve $q \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, kuaternionun tanımından yola çıkarak p ve q kuaternionlarını; $p = p_0 + \vec{p}$, $q = q_0 + \vec{q}$ şeklinde skaler ve vektör bileşenler cinsinden de yazabiliriz. Bu tanımdan yola çıkarak p ve q gibi iki kuaternionun, kuaternion çarpımı şu şekilde olur:

$$\begin{aligned}pq &= (p_0 + \vec{p})(q_0 + \vec{q}) \\ pq &= p_0 q_0 + p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} - \vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{p} \times \vec{q}\end{aligned}\tag{2.25}$$

dır.

Burada ‘.’ ve ‘×’, sırasıyla vektör cebirindeki skaler ve vektörel çarpımları göstermektedir. Öyle ise kuaternion çarpımı, nokta çarpım ve vektör çarpımlarını içermektedir. Ya da aynı ifade:

$$\begin{aligned} pq &= [p_0, p_1, p_2, p_3][q_0, q_1, q_2, q_3] \\ pq &= [(p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3), (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2), \\ & (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3), (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)] \end{aligned} \quad (2.26)$$

şeklinindedir. Genelde $\vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{q} \times \vec{p}$ olduğundan \vec{p} , \vec{q} ’ya paralel veya p ve q kuaternionundan biri sıfır kısmına sahip olmadıkça, kuaternion cebirinde çarpma işlemi komütatif değildir. Yani; $pq \neq qp$ olup, $pq \in Q$ ’dur.

Her ne kadar kuaternion çarpımı komütatif değilse de, birleşme özelliğine sahiptir. p, q, r üç kuaternion olsun. $q(pr)$ çarpımı;

$$\begin{aligned} q(pr) &= (q_0 + \vec{q})[(p_0 + \vec{p})(r_0 + \vec{r})] \\ &= q_0p_0r_0 - \{q_0\vec{p} \cdot \vec{r} + p_0\vec{r} \cdot \vec{q} + r_0\vec{q} \cdot \vec{p}\} + \{q_0r_0\vec{p} + r_0p_0\vec{q} + p_0q_0\vec{r}\} \\ &+ \{q_0\vec{p} \times \vec{r} - p_0\vec{r} \times \vec{q} + r_0\vec{q} \times \vec{p}\} - (\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{q} + \vec{q} \times (\vec{p} \times \vec{r}) - \vec{q} \cdot (\vec{p} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

ve $(qp)r$ çarpımı;

$$\begin{aligned} (qp)r &= q_0p_0r_0 - \{r_0\vec{q} \cdot \vec{p} + q_0\vec{p} \cdot \vec{r} + p_0\vec{r} \cdot \vec{q}\} + \{q_0p_0\vec{r} + r_0q_0\vec{q} + r_0p_0\vec{p}\} \\ &+ \{q_0\vec{p} \times \vec{r} + p_0\vec{r} \times \vec{q} + r_0\vec{q} \times \vec{p}\} - (\vec{q} \cdot \vec{p})\vec{r} + (\vec{q} \times \vec{p}) \times \vec{r} - (\vec{r} \times \vec{p})\vec{q} \end{aligned} \quad (2.28)$$

olur. Burada $q(pr) = (qp)r$ geçerli ise,

$$-(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{q} + \vec{q} \times (\vec{p} \times \vec{r}) = -(\vec{q} \cdot \vec{p})\vec{r} + (\vec{q} \times \vec{p}) \times \vec{r}$$

olduğunu göstermeliyiz. Standart vektör özdeşliklerini uygularsak bunun doğru olduğunu görebiliriz:

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \\ (a \times b) \times c &= (a \cdot c)b - (b \cdot c)a \end{aligned} \quad (2.29)$$

olduğundan,

$$q(pr) = (qp)r \quad (2.30)$$

olur. Kuaternion çarpımının toplamaya göre dağılma özelliğine sahip olduğunu aşağıdaki gibi doğrulayabiliriz:

$$\begin{aligned}
q(p+r) &= (q_0 + \bar{q})[p_0 + r_0 + \bar{p} + \bar{r}] \\
&= q_0 p_0 + q_0 r_0 - \bar{q} \cdot (\bar{p} + \bar{r}) \\
&\quad + r_0 \bar{q} + p_0 \bar{q} + p_0 (\bar{p} + \bar{r}) + \bar{q} \times (\bar{p} \times \bar{r}) \\
&= \{q_0 p_0 - \bar{q} \cdot \bar{p} + p_0 \bar{q} + q_0 \bar{p} + \bar{q} \times \bar{p}\} \\
&\quad + \{q_0 r_0 - \bar{q} \cdot \bar{r} + q_0 \bar{r} + r_0 \bar{q} + \bar{q} \times \bar{r}\} \\
&= qp + qr
\end{aligned} \tag{2.31}$$

dır [13].

2.4. Birim kuaternion ve norm

$p, q \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$ ve $q = [1, 0, 0, 0]$ olsunlar.

Burada;

$$\begin{aligned}
pq &= [p_0, p_1, p_2, p_3][1, 0, 0, 0] \\
&= [p_0, p_1, p_2, p_3]
\end{aligned} \tag{2.32a}$$

veya

$$\begin{aligned}
qp &= [1, 0, 0, 0][p_0, p_1, p_2, p_3] \\
&= [p_0, p_1, p_2, p_3]
\end{aligned} \tag{2.32b}$$

şeklindedir. Buradan görüleceği gibi q , p 'nin değerini kuaternion çarpımı sonunda değiştirmemiştir. Bu yüzden q 'ya birim kuaternion diyebiliriz[6].

Ayrıca bir p kuaternionunun N ile göstereceğimiz normu,

$$N(p) = p p^* = p^* p \tag{2.33}$$

ve mutlak değeri,

$$|p| = \sqrt{pp^*} \tag{2.34}$$

olarak tanımlanır. Bir p kuaternionunun normunun;

$$\begin{aligned}
N(p) &= p p^* \\
N(p) &= [(p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2, 0, 0, 0] \\
N(p) &= \sum_{k=0}^3 (p_k)^2 [1, 0, 0, 0] \\
N(p) &= \sum_{k=0}^3 (p_k)^2 e_0
\end{aligned} \tag{2.35}$$

şeklinde pozitif bir skaler kuaternionun olduğu kolayca görülebilir.

2.5. Ters eleman ve kuaternionlarda bölme

p sıfır kuaternion olmamak koşuluyla;

$$pp^{-1} = p^{-1}p = [1, 0, 0, 0] \quad (2.36)$$

koşulunu sağlayan p^{-1} kuaternionuna, p kuaternionunun tersi denir.

Bir p kuaternionunun normu,

$$N(p) = pp^* = \sum_{k=0}^3 (p_k)^2 [1, 0, 0, 0]$$

şeklindeydi. Bu eşitliğin her iki yanını $1/\sum_{k=0}^3 (p_k)^2$ skaleriyle çarparsak

$$\frac{pp^*}{\sum_{k=0}^3 (p_k)^2} = [1, 0, 0, 0]$$

denklemini elde ederiz. Ters eleman tanımını uyarınca p kuaternionunun tersi,

$$p^{-1} = \frac{p^*}{\sum_{k=0}^3 (p_k)^2} \quad (2.37)$$

olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bir p kuaternionunu bir q kuaternionuna bölmek demek p 'yi q^{-1} ile çarpmak demektir. Ancak kuaternion çarpımı, değişme özelliğine sahip olmadığı için bölme işlemi iki şekilde gerçekleştirilmektedir [3]. $N(q) \neq 0$ olmak üzere;

$$pq^{-1} = p \frac{q^*}{\sum_{k=0}^3 (q_k)^2} : \quad \text{Sağdan bölme} \quad (2.38a)$$

$$q^{-1}p = \frac{q^*}{\sum_{k=0}^3 (q_k)^2} p : \quad \text{Soldan bölme} \quad (1.38b)$$

dir. Genelde $pq^{-1} \neq q^{-1}p$ şeklindedir. q 'nun bir skaler kuaternion olması halinde sağdan bölme, soldan bölmeye eşittir. Eğer p bir birim kuaternion ise,

$$p^{-1} = p^* \quad (2.39)$$

olarak yazılabilir.

2.6. İki kuaternionun skaler çarpımı

p ve q gibi iki kuaternionun nokta (skaler) çarpımı,

$$p \cdot q = [(p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3), 0, 0, 0] \quad (2.40a)$$

şeklindedir. Ya da, $p = [0, p_1, p_2, p_3]$ ve $q = [0, q_1, q_2, q_3]$ iki vektör kuaternion olsun. p ve q 'nin $p \cdot q$ şeklindeki skaler çarpımını;

$$p \cdot q = -\frac{1}{2}(pq + (pq)^*) \quad (2.40b)$$

olarak da tanımlayabiliriz. Bu ifade diferansiyel vektör operatörlerinden gradyent ve diverjans ifadelerinin tanımlanabilmesine olanak sağlar. Yani,

$$p \cdot q = [(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3), 0, 0, 0] \quad (2.40c)$$

şeklinde bir skaler kuaterniondur. Kolayca ispatlanabileceği gibi iki vektör kuaternionun skaler çarpımı komütatiftir.

2.7. İki vektör kuaternionun vektörel çarpımı

$p = [0, p_1, p_2, p_3]$ ve $q = [0, q_1, q_2, q_3]$ iki vektör kuaternion olsun. p ve q 'nin $p \times q$ şeklinde göstereceğimiz vektörel çarpımı;

$$p \times q = \frac{1}{2}(pq - (pq)^*) \quad (2.41a)$$

olarak ifade edebiliriz [3]. Buna göre $p \times q$ vektörel çarpımı;

$$p \times q = [0, (p_2q_3 - p_3q_2), (p_3q_1 - p_1q_3), (p_1q_2 - p_2q_1)] \quad (2.41b)$$

şeklinde yine bir vektör kuaterniondur. Kolayca ispatlanabileceği gibi iki vektör kuaternionun vektörel çarpımı;

$$p \times q = -(q \times p) \quad (2.42)$$

olup komütatif değildir.

2.8. Kuaternionlar için paralellik ve diklik koşulu

p ve q iki vektör kuaternion olsun: $p = [0, p_1, p_2, p_3]$ ve $q = [0, q_1, q_2, q_3]$

Eğer;

$$p \times q = \frac{1}{2}(pq - qp)$$
$$p \times q = [0, (p_2q_3 - p_3q_2), (p_3q_1 - p_1q_3), (p_1q_2 - p_2q_1)] = 0 \quad (2.43)$$

ise p ve q için paraleldir denir. Burada vektör kuaternionlar için, $(pq)^* = qp$ olduğu kolayca ispatlanabilir.

Aynı şekilde p ve q gibi iki vektör kuaternion için diklik koşulu ise,

$$p \cdot q = -\frac{1}{2}(pq + qp)$$

$$p \cdot q = [(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3), 0, 0, 0] = 0 \quad (2.44)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda p ve q vektör kuaternionları birbirine diktir [7].

Vektör kuaternionlar için, skaler çarpma tanımından yola çıkarak, p ve q gibi iki vektör kuaternion arasındaki açı ise şu şekilde tanımlanabilir:

$$p \cdot q = \sqrt{pp^*} \sqrt{qq^*} \cos \theta \quad (2.45)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^3 (p_k)^2 (q_k)^2}} [(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3), 0, 0, 0] \quad (2.46)$$

dır.

2.9. Kuaternionların özellikleri

Kuaternion ifadeleri için aşağıdaki özellikleri de kullanabiliriz. Burada m ve n skaler kuaternion, p ve q vektör kuaternion olmak üzere;

$$1. mn = [m_0n_0, 0, 0, 0]$$

$$2. mn^{-1} = n^{-1}m = \left[\frac{m_0}{n_0}, 0, 0, 0 \right]$$

$$3. mp = pm = [0, m_0p_1, m_0p_2, m_0p_3]$$

$$4. pm^{-1} = m^{-1}p = \left[0, \frac{p_1}{m_0}, \frac{p_2}{m_0}, \frac{p_3}{m_0} \right]$$

$$5. mp^{-1} = p^{-1}m = \frac{m_0}{((p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2)} [0, -p_1, -p_2, -p_3]$$

$$6. pq = (qp)^* \text{ veya } qp = (pq)^*$$

$$7. pq^{-1} = (q^{-1}p)^* \text{ veya } q^{-1}p = (pq^{-1})^*$$

$$8. \sin \mathbf{p} = \left(\sin(p_0) \cosh(|\vec{p}|), \cos(p_0) \sinh(|\vec{p}|) \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)$$

$$9. \cos \mathbf{p} = \left(\cos(p_0) \cosh(|\vec{p}|), \sin(p_0) \sinh(|\vec{p}|) \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)$$

$$10. \tan \mathbf{p} = \frac{\sin(\mathbf{p})}{\cos(\mathbf{p})}$$

$$11. \arcsin \mathbf{p} = -\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \operatorname{arcsinh} \left(p \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)$$

$$12. \arccos \mathbf{p} = -\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \operatorname{arccos} \left(p \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)$$

$$13. \arctan \mathbf{p} = -\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \operatorname{arctan} \left(p \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)$$

$$14. \sinh \mathbf{p} = \left(\sinh(p_0) \cos(|\vec{p}|), \cosh(p_0) \sin(|\vec{p}|) \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)$$

$$15. \cosh \mathbf{p} = \left(\cosh(p_0) \cos(|\vec{p}|), \sinh(p_0) \sin(|\vec{p}|) \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)$$

$$16. \operatorname{arcsinh} p = \ln(p + (p^2 + 1)^{1/2})$$

$$17. \operatorname{arccosh} p = \ln(p + (p^2 - 1)^{1/2})$$

$$18. \operatorname{arctanh} p = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+p}{1-p} \right)$$

şeklinde sıralanabilir.

2.10. Kuaternionlarda türev ve kısmi türev

$\mathbf{p}(u)$ tek bir u skaler değişkenine bağlı bir vektör kuaternion olsun.

$\mathbf{p}(u)$ 'nin türevi:

$$\frac{d\mathbf{p}(u)}{du} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}(u + \delta u) - \mathbf{p}(u)}{\delta u} \quad (2.47a)$$

olarak tanımlanır. Eğer $\mathbf{p} = [0, p_1, p_2, p_3]$ ise $\mathbf{p}(u)$ 'nin türevi;

$$\frac{d\mathbf{p}(u)}{du} = \left[0, \frac{dp_1(u)}{du}, \frac{dp_2(u)}{du}, \frac{dp_3(u)}{du} \right] \quad (2.47b)$$

olur. Benzer şekilde n . mertebeden türev;

$$\frac{d^n p(u)}{du^n} = \left[0, \frac{d^n p_1(u)}{du^n}, \frac{d^n p_2(u)}{du^n}, \frac{d^n p_3(u)}{du^n} \right] \quad (2.48)$$

şeklinde olacaktır.

p , q ve r kuaternionları; bir skaler u değişkeninin türevlenebilir vektör kuaternionları, ϕ ise u 'nun türevlenebilir skaler bir fonksiyonu olsun. O zaman aşağıdaki bağıntılar geçerlidir;

1. $\frac{d}{du} [p(u) + q(u)] = \frac{dp(u)}{du} + \frac{dq(u)}{du}$
2. $\frac{d}{du} [p(u) \cdot q(u)] = p(u) \cdot \frac{dq(u)}{du} + \frac{dp(u)}{du} \cdot q(u)$
3. $\frac{d}{du} [p(u) \times q(u)] = p(u) \times \frac{dq(u)}{du} + \frac{dp(u)}{du} \times q(u)$
4. $\frac{d}{du} [\phi p(u)] = \phi \frac{dp(u)}{du} + \frac{d\phi}{du} p(u)$
5. $\frac{d}{du} \{p(u) \cdot [q(u) \times r(u)]\} = p(u) \cdot \frac{dq(u)}{du} \times r(u) + \frac{dp(u)}{du} \cdot q(u) \times r(u) + p(u) \cdot q(u) \times \frac{dr(u)}{du}$
6. $\frac{d}{du} \{p(u) \times [q(u) \times r(u)]\} = p(u) \times \frac{dq(u)}{du} \times r(u) + \frac{dp(u)}{du} \times q(u) \times r(u) + p(u) \times q(u) \times \frac{dr(u)}{du}$

p ; x , y , z skaler değişkenlerine bağlı bir vektör kuaternion olsun:

$p = p(x, y, z)$. O zaman p 'nin x , y ve z 'ye göre kısmi türevleri;

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{p(x + \delta x, y, z) - p(x, y, z)}{\delta x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{p(x + x, y + \delta y, z) - p(x, y, z)}{\delta y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{p(x + x, y, z + \delta z) - p(x, y, z)}{\delta z} \end{aligned} \quad (2.49)$$

olarak tanımlanır.

Yüksek mertebeden kısmi türevler de aynı tanımlardan yola çıkarak,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{2.50}$$

şeklinde tanımlanır [8].

Eğer $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, y, z)$ ve $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y, z)$ kuaternionları x, y, z gibi skaler değişkenlere bağlı vektör kuaternionlar ise,

$$\begin{aligned}1. \quad \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) &= \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \cdot \mathbf{q} \\ 2. \quad \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) &= \mathbf{p} \times \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \times \mathbf{q} \\ 3. \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) &= \mathbf{p} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial y \partial x} \cdot \mathbf{q} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\end{aligned}$$

özellikleri de mevcuttur.

2.11. Diferansiyel vektör operatörleri

2.11.1. Gradyent

Bir Nabla operatörü;

$$\nabla = \left[0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]\tag{2.51}$$

şeklinde bir vektör kuaternion olarak tanımlansın. $\mathbf{p}(x, y, z) = [p_0, 0, 0, 0]$ şeklinde; uzayın belirli bir bölgesinde her bir (x, y, z) noktasında türevlenebilir skaler bir kuaternion olsun: \mathbf{p} 'nin gradyent'i;

$$\begin{aligned}\text{grad } \mathbf{p} = \nabla \mathbf{p}(x, y, z) &= \left[0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] (p_0, 0, 0, 0) \\ &= \left[0, \frac{\partial p_0}{\partial x}, \frac{\partial p_0}{\partial y}, \frac{\partial p_0}{\partial z} \right]\end{aligned}\tag{2.52}$$

şeklinde tanımlanan bir vektör kuaterniondur.

2.11.2. Diverjans

$\mathbf{p}(x, y, z) = [p_0, p_1, p_2, p_3]$ şeklinde uzayın belirli bir bölgesindeki her bir (x, y, z) noktasında türevlenebilir vektör kuaternion olsun. \mathbf{p} 'nin diverjansı;

$$\operatorname{div} \mathbf{p} = \nabla \cdot \mathbf{p} = -\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{p} + (\nabla \mathbf{p})^*] = \left[\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_3}{\partial z}, 0, 0, 0 \right] \quad (2.53)$$

olarak tanımlı bir kuaterniondur [9]. Burada ∇ ; $\nabla = \left[0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$ şeklinde bir vektör kuaternion operatörüdür.

2.11.3. Rotasyonel (curl)

Vektör hesabındaki rotasyonel(curl) operatörünü Hamilton'un gösterdiği şekilde kuaternionlarla ifade etmek mümkündür. Yine $\nabla = \nabla \mathbf{e}$ vektör kuaternion olmak üzere; bir \mathbf{F} vektör kuaternionuna etki ettirilirse;

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{F} &= -\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{e} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ \nabla \mathbf{F} &= -\operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{e} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.54)$$

olarak bulunur. $\mathbf{N}(\nabla) = \nabla \nabla$ Laplace operatörü olur.

2.11.4. ∇ operatörü ile ilgili bağıntılar

\mathbf{p} ve \mathbf{q} vektör kuaternion, ϕ ve λ skaler kuaternion ise aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

1. $\nabla(\phi + \lambda) = \nabla\phi + \nabla\lambda$
2. $\nabla \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \nabla \cdot \mathbf{p} + \nabla \cdot \mathbf{q}$
3. $\nabla \cdot \phi \mathbf{p} = \nabla\phi \cdot \mathbf{p} + \phi \cdot \nabla\mathbf{p}$
4. $\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi$
5. $\nabla \times (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \nabla \times \mathbf{p} + \nabla \times \mathbf{q}$
6. $\nabla \times \phi \mathbf{p} = \nabla\phi \times \mathbf{p} + \phi \times \nabla\mathbf{p}$
7. $\nabla \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot \nabla \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \nabla \times \mathbf{q}$
8. $\nabla \times \nabla\phi = 0$
9. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{p}) = 0$

dır.

2.12. Kuaternionların matris temsili

Kuaternion cebri birleşme özelliğine sahip olduğundan, kuaternionları matris formunda ifade etmek mümkündür.

2.12.1. 2×2 matris temsili

Bir kuaternion 2×2 matris formunda yazılabilir. Pauli-spin matrisleri ve birim matrisin alışılmış gösterimleri aşağıdaki gibidir:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Buradan bir p kuaternionunu;

$$p = p_0 - ip_k \sigma_k = p_0 - ip_1 \sigma_1 - ip_2 \sigma_2 - ip_3 \sigma_3 \quad (2.56)$$

olarak matris formunda ifade edebiliriz. Bu ifade;

$$p = p_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - ip_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - ip_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - ip_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} p_0 - ip_3 & -ip_1 - p_2 \\ -ip_1 + p_2 & p_0 + ip_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

şeklini alır. Burada $\alpha = p_0 - ip_3$ ve $\beta = -ip_1 - p_2$ 'dir. Böylece p kuaternionu α ve β gibi iki kompleks sayı ile 2×2 matris şeklinde ifade edilmiş olur. Bu 2×2 'lik matristen, p kuaternionunun determinantının;

$$\det(p) = (p_0)^2 + (\vec{p})^2 = pp^* = \alpha\alpha^* + \beta\beta^* \quad (2.58)$$

olduğu açıkça görülebilir[12].

2.12.2. 4×4 matris temsili

Kuaternionları 4×4 matris formunda da temsil etmek mümkündür. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere Pauli-Spin matrisleri ve birim matrisin 4×4 matris formunda gösterimleri;

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.59a)$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.59b)$$

olur. Böylece $p = [p_0, p_1, p_2, p_3] = p_0 \Gamma_0 - ip_k \Gamma_k$ gibi bir kuaternionu;

$$p = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix} \quad (2.60a)$$

veya,

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{pmatrix} \quad (2.60b)$$

şeklinde 4×4 ortogonal matrisler cinsinden yazabiliriz. Burada $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ anti-simetrik matrisleri, birim kuaternionlarla aynı özelliklere sahiptir. Eğer p kuaternionu vektör kuaternion ise, p ve \bar{p} matrisleri anti-simetriktir. Yani $p^T = -p$ olduğu için $\bar{p}^T = -\bar{p}$ 'dir. p ile başka bir q kuaternionunun çarpımı ise matris vektör notasyonunda,

$$pq = pq$$

veya,

$$qp = \bar{p}q$$

olarak yazabiliriz. Yani p ve q gibi iki kuaternionun kuaternion çarpımı;

$$pq = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

şeklinde de ifade edilebilmektedir.

3. SES VE SESİN ÖZELLİKLERİ

Bir titreşim olayının sonucunda meydana gelen ses dalgaları; boşlukta yayılamayan ,katı, sıvı veya gaz halindeki maddesel ortamlarda yayılan boyuna dalgalardır. Her ortam, basınç değişimlerinden doğan ses dalgalarını iletirken yoğunluk farkından dolayı aynı esnekliği göstermez. Bu nedenle her ortamda ses başka hızla yayılır. Ses katı ve sıvı ortamlarda, havadakinden daha hızlı ve daha az enerji kaybederek yayılır.

Ses dalgası bir ortamda yayılırken ortamın parçacıkları, dalganın hareket doğrultusu boyunca yoğunluk ve hacim değişikliklerini oluşturarak titreşirler. Bu parçacık hareketi, dalga hareketinin yönüne dik olan enine dalga hareketindeki durumun tersidir. Ses dalgaları şeklinde ortaya çıkan yer değiştirmeler, denge konumundan itibaren her bir molekülün boyuna yer değiştirmesini gerektirir. Bu sıkışma ve genişleme şeklinde yüksek ve alçak basınç bölgelerinin oluşumuna yol açar [10].

3.1. Ses dalgalarının yayılımı

Bir ses kaynağı tarafından dışarıya gönderilen ses dalgaları, genellikle düz çizgi izlemezler, kaynaktan çıkarak bütün yönlerde yayılırlar. Dalga tepeleri, kaynaktan uzaklaştıkça giderek büyüyen daireler haline gelmektedirler. Kaynaktan çok uzak noktalarda dairelerin eğrilikleri çok küçülür ve bunlara düzlem dalgalar denir.

Havadaki ses dalgaları için üç boyutlu durum söz konusudur. Dalga tepeleri, iki boyutlu durumdaki dairelerden ziyade, merkezi ses kaynağı olan küresel yüzeyler olacaktır. Küresel dalgalar dalga kaynağından uzaklaştıkça eğrilikleri azalacak, uzak bir noktada düzlem şeklinde görülecek ve ışınların dalga cephelerine dik olmalarından, ışınlar birbirlerine paralel olacaklardır [11].

Sürekli ortamlar mekaniğinde, elastik çubuk için, tek boyutlu dalga denklemi;

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2x}{d\eta^2} = 0 \quad (2.62)$$

dır ve denklem (2.62)' den

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{Y}{\mu}} = u \quad (2.63)$$

şeklinde hız ifadesi elde edilebilir. Burada Y; young modülü, μ ; boyca yoğunluk, ve u; dalganın hızıdır. Bu hız denklemi sadece katı ve sıvılarda geçerlidir.

3.2. Sesiñ faz hızı

Kapalı bir hacimdeki hava çeperlere basınç uygular. Buna göre hava genişlemeye çalışan sıkışık bir yaya benzetilebilir. Bu benzerlikten yararlanmak için, bir yanı çeperle, öteki yanı ise kütsesiz hareket edebilir bir piston ile kapanmış L uzunluğunda boru biçimli bir silindir olduğu düşünülebilir. Hava pistonu yay gibi dışa doğru F kuvveti ile itecektir. Dengede pistonu etkileyen F dış kuvveti, kapalı havanın uyguladığı kuvveti dengeler.

Gevşek iken uzunluğu, L_1 , sıkışık iken L ve yay sabiti K_L olan bir yay için, F kuvveti

$$F = K_L(L_1 - L) \quad (3.1)$$

olur. Yay sıkıştırılarak L uzunluğu değiştirilebilirse, F'deki değişme bu ifadenin diferansiyelini alarak bulunabilir;

$$\partial F = -K_L \partial L \quad (3.2)$$

Benzer şekilde, boruyu dolduran ve yaya benzetilen hava pistonu

$$F = pA \quad (3.3)$$

kuvveti ile etkiler. Burada p; basınç ve A; silindirin enine kesitidir. Piston denge durumundan ∂L kadar yer değiştirmiş ise, silindirdeki gazın hacmi $\partial V = A\partial L$ kadar değişecektir. Böylece pistonu etkileyen kuvvet

$$\partial F = A\partial p = A \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_0 A\partial L \quad (3.4)$$

kadar değişir. Burada parantezin altındaki sıfır işaretini, $\frac{\partial p}{\partial V}$ nin denge hacminde değerlendirildiği anlamındadır. Denklem (3.2)'de silindir içindeki kapalı havanın "eşdeğer yay sabiti"nin

$$K_L = -A^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_0 \quad (3.5)$$

olduğu görülür.

Yay üzerindeki boyuna dalgaların faz hızını veren denklem

$$u^2 = \frac{K_L L_0}{\rho_0 (\text{çizgisel})} \quad (3.6)$$

ifadesini, silindirdeki "yay"a benzetilen havaya uygulayabilmesi için silindirdeki gaz hacminin $V_0 = AL_0$ olduğunun, toplam kütesinin ise;

$$L_0 \rho_0 (\text{çizgisel}) = AL_0 \rho_0 (\text{hacimsel}) \quad (3.7)$$

olduğu için $\rho_0 (\text{çizgisel}) = A \rho_0 (\text{hacimsel})$ olacağı dikkate alınmalıdır. Hava için, denklem (3.5)'deki K_L yay sabiti ve ρ_0 denklem (3.6)'ya aktarılarak havadaki boyuna dalgaların faz hızı

$$u^2 = -\frac{V_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_0 \quad (3.8)$$

olarak bulunur. Burada ρ_0 bilinen hacim yoğunluğudur ve bulunan hız ifadesi; boyuna dalgaların hızı, yani ses hızıdır. Sesin hızının tam olarak buluna bilinmesi için $\frac{\partial p}{\partial V}$ ' nin bulunması gerekir.

Bir ses dalgası içerisinde sıcaklık sabit kalmaz. Sıkışma bölgesine düşen hava üzerinde, verilen bir anda, bir iş yapılmıştır ve bu hava kütlesi denge sıcaklığından biraz daha sıcaktır. Bir yarım dalga boyu uzaktaki komşu bölgeler ise gevşemiş, genişleyerek hafifçe soğumuş durumdadır. Enerji korunur ve bir sıkışmadaki enerji fazlası bir gevşemedeki enerji açığına eşit olur. Bu yüzden burada sıcaklığın sabit olmadığı durumlarda geçerli olan adyabatik gaz yasasının kullanılması gerekir. Bu yasa, gaz içinde ısı akışı olmadığı durumda p ve V arasındaki bağıntıyı verir [12]. Burada sıkışmalar ile gevşemeler arasında ısı akışı ile sıcaklığın denkleşmesi için gerekli zaman yoktur ve böyle bir akış olmadan, bir yarım periyot geçmiş olur. Sıkışma bölgesi bir gevşeme bölgesi haline gelir. Böylece olay, ısının bir bölgeden ötekine akmasını önleyen engeller varmış gibi açığa çıkar. Bu durumda, basınç-hacim bağıntısı

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma, \quad p = p_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} \quad (3.9)$$

ile gösterilebilir. Burada γ : sabit basınçtaki öz ısının sabit hacimdekine oranı olan sayıdır ve değeri, normal koşullarda, hava için;

$$\gamma = 1,40$$

dır. Denklem (3.9)'un diferansiyeli alınarak ve V yerine V_0 yazılarak

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\gamma p_0 V_0^\gamma V^{-\gamma-1}$$

$$V_0 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_0 = -\gamma p_0 \quad (3.10)$$

elde edilir. Denklem (3.8)'de denklem (3.10) yerine konulursa;

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (3.11)$$

denklemini elde edilir.

3.3. Harmonik ses dalgalarının enerjisi ve şiddeti

ω frekansı ile hareket etmekte olan bir pistonun önünde, ∂x genişliğinde ve ∂m kütleli bir hava tabakası dikkate alalım. Piston hava tabakasına enerji aktarır. Basit harmonik harekette ortalama kinetik enerji, ortalama potansiyel enerjiye eşit olduğundan, ∂m kütlelerinin ortalama toplam enerjisi, maksimum kinetik enerjiye eşittir. Bundan dolayı, hareketli gaz tabakasının ortalama enerjisini

$$\partial E = \frac{1}{2} \partial m (\omega S_m)^2 = \frac{1}{2} (\rho A \partial x) (\omega S_m)^2 \quad (3.12)$$

$A \partial x$: tabakanın hacmini, S_m : denge konumundan itibaren maksimum değişmeyi, ω : pistonun açısal frekansını ωS_m : piston önündeki ortamın boyuna maksimum hızını gösterir.

Her tabakaya aktarılan enerjinin zamana göre değişimi gücü verir ve

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) (\omega S_m)^2 = \frac{1}{2} \rho A u (\omega S_m)^2 \quad (3.13)$$

bağıntısıyla verilir. Burada $u = \frac{\partial x}{\partial t}$: sağa doğru hareketin hızıdır.

Bir ses dalgasının şiddetini veya birim başına düşen gücü, dalganın yayılma yönüne dik, birim alanı geçen ses enerjisi olarak tanımlarız. Bu durumda şiddet

$$I = \frac{\text{güç}}{\text{alan}} = \frac{1}{2} \rho A u (\omega S_m)^2 u \quad (3.14)$$

bağıntısı ile verilir. Ayrıca;

$$I = \frac{\Delta p_m}{2 \rho u} \quad (3.15)$$

yazılabilir. Burda $\Delta p_m = \rho u \omega S_m$: Basınç genliği, denge değerinden itibaren ölçülen basınç değerindeki maksimum değişimdir.

3.4. Sesin fizyolojik özellikleri

Yükseklik:

Sesin frekansıdır. İnsan kulağı yaklaşık 20Hz ile 20000Hz olan sesleri işitebilir. Sesin frekansına bağlı olarak yüksekliği tayin edilir. Frekansları 20Hz den küçük olan seslere infrasonik, 20000Hz' den büyük olanlarına ultrasonik denir. Sesin frekansı, kaynağın hareketine bağlı olarak kayma gösterir.

Şiddet:

Ses dalgalarının birim yüzeydeki güçlerine denir. SI birim sisteminde Watt/m² ile gösterilir. Ses şiddeti dalgaının frekansına ve dalga genliğinin karesine bağlıdır. Şiddet nedeni ile ses kuvvetli veya zayıf olarak duyulur. İnsan kulağı 10¹⁶Watt/m² ile 10⁴ Watt/m² şiddet değerleri arasındaki sesleri duyabilir. Duyma şiddeti desibel ile ölçülür. Normal insan sesinin duyma şiddeti 70 desibel civarındadır.

Tını ve harmonikler:

Bir sesin kulağa tesirine tını denir. Farklı kaynaklardan çıkan sesler aynı yükseklik ve şiddette olsalar da tınları farklıdır.

Ses kaynakları genellikle ana ses denilen (en kalın) sesle birlikte, frekansları ana sesin frekanslarının tam katıları olan tali sesle karışırlar. Bu tali (yan) seslere ana sesin harmonikleri denir.

4. HAMILTONSAL YÖNTEMLER

Newton mekaniğinin vektörel bir yapıda olması ve Newton mekaniğinde toplam vektörün bilinmesinin gerekliliği, Hamilton ve Lagrange denklemlerinin skaler büyüklüklerle çalışmalarından bu yöntemleri daha ktullanışlı hale getirmiştir. Hamilton ve Lagrange, ilke ve yöntemleri analitik dinamik olarak bilinir.

Hamilton fonksiyonu; potansiyelin hıza bağlı bulunmaması ve sistemin parçacıklarının konum vektörünün zamana açık olarak bağlı bulunmaması durumundtu toplam enerjiye eşit olur.

4.1. Hamilton denklemleri

Hamilton fonksiyonunun $H(q; p; t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q; \dot{q}; t)$ şeklindeki tanım bağıntısının her iki tarafının diferansiyeli alınırsa,

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

olmasından,

$$\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

elde edilir [14]. $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ olması kullanılırsa, eşitliğin sol yanında bulunan birinci terimle dördüncü terim birbirini götürür. Lagrange hareket denklemleri kullanılırsa yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt &= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

olur. q_i genelleştirilmiş koordinatlarıyla p_i genelleştirilmiş momentumlarının bağımsız olarak alındığı düşünülürse,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

denklemleri elde edilir. Burada birinci mertebeden $2n$ tane diferansiyel denklem vardır. Bu denklemler ilk defa Hamilton tarafından elde edilmişlerdir ve bugün

onun adıyla, yani Hamilton denklemleri olarak bilinirler. Denklem (4.1) takımındaki son eşitlik, Lagrange fonksiyonuyla Hamilton fonksiyonunun zamana açık olarak bağlı bulunmamasının birbirine denk olduğunu göstermektedir. Hamilton fonksiyonunun tanımı nedeniyle bu sonuç doğaldır. Hamilton denklemlerinin ilk n tanesi genelleştirilmiş momentumları belirleyen $p_i = \partial H / \partial \dot{q}_i$ tanımının tersidir. İkinci n tane denkleme, q_i genelleştirilmiş koordinatlarının cismin kartezyen koordinatları olması durumunda, Newton hareket denklemlerine dönüşür.

Yukarıda hareket denklemleri elde edilirken q_i koordinatlarıyla p_i momentumlarının bağımsız olduğu kabul edilmiştir. Bu, p_i momentumlarıyla q_i koordinatlarının birbirine denk tutulması demektir. Halbuki Lagrange denklemleri söz konusu olduğunda, temel değişkenler q_i koordinatlarıdır \dot{q}_i büyüklükleri onların zamana göre türevleridir. p_i büyüklükleri ise kısaltma amacıyla tanıtılmıştır.

Hamilton denklemleri söz konusuna olunca, bağımsız değişkenlerin sayısı iki katına çıkar. Buna karşılık ikinci mertebeden olan Lagrange denklemlerinin yerini birinci mertebeden olan Hamilton denklemleri alır. İlk anda Hamilton denklemlerinin mertebelerinin Lagrange denklemlerinin mertebelerinden daha düşük olmasına bakılarak, bu denklemlerin Klasik Mekanik problemlerinin çözülmesinde kolaylık sağlayacağı beklenebilir. Bu tam olarak doğru değildir. Çünkü, bir yandan Lagrange denklemlerinde $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ kısaltması yapıldığında, denklemler birinci mertebeye düşürülmüş olur. Öte yandan Hamilton denklemleri çözülürken, genellikle p_i momentumlarının en azından bir kısmı yok edilir ve yine ikinci mertebeden diferansiyel denklemlere dönülür.

Hamilton denklemleri Lagrange denklemlerine ancak çevrimsel koordinatlar için üstünlük gösterir. Bu şöyle gösterilebilir: q_j bir çevrimsel koordinat olduğunda; bu koordinata ait Lagrange denklemi, $\dot{p}_j = \partial L / \partial q_j = 0$ olacağından, $p_j = \alpha = \text{sabit}$ verir. Bu, \dot{q}_j büyüklüğünün sabit olmasını veya kolaylıkla entegre edilmesini gerektirmez. Üstelik \dot{q}_j Lagrange fonksiyonundan düşmez. Sistemin Lagrange fonksiyonu

$$L(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{j-1}, \dot{q}_{j+1}, \dots, \dot{q}_n; t)$$

olur. Denklem sayısında bir azalma olmaz. Halbuki Hamilton denklemleri söz konusu olduğunda, denklem sayısı iki düşer. Çünkü, $\sum_i \dot{q}_i p_i$ terimi genelleştirilmiş koordinatlara bağlı bulunmadığından, Hamilton fonksiyonu da q_j koordinatına bağlı değildir. Sonuçta $\dot{p}_j = 0$, yani $p_j = \alpha = \text{sabit}$ olur. Hamilton fonksiyonu

$$H(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_n; p_1, \dots, p_{j-1}, \alpha, p_{j+1}, \dots, p_n; t)$$

şeklini alır. Hamilton fonksiyonunun içinde hem q_j hem de p_j yer almadığından bu değişkenlere ait denklemler ortadan kalkar.

Hamilton denklemleri ve bunların dayandığı q_i ile p_i koordinatlarının birbirine denk rol oynayan bağımsız değişkenler olması kabul problemlerin çözülmesinde her zaman işe yarar bir kolaylık getirmez. Ama bu denklemler ve bu kabul Klasik Mekaniğin yapısının daha iyi anlaşılmasını sağlayan gelişmelere yol açar. Daha da önemlisi diğer fizik teorilerinin geliştirilmesi için bir baz, bir lisan hazırlar [14].

Lagrange denklemleri, genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden olması dolayısıyla, konfigürasyon uzayı isimli yardımcı n boyutlu soyut uzayda yazılan denklemlerdir Hamilton denklemleri genelleştirilmiş koordinatların yanı sıra, onlara her bakımdan denk, genelleştirilmiş momentumları da içerir. Bu yüzden Hamilton denklemlerinin yazıldığı uzay, konfigürasyon uzayı değildir. n tane genelleştirilmiş q_i koordinatıyla n tane genelleştirilmiş momentumun üzerinde gösterildiği $2n$ tane bağımsız eksenin gerdiği $2n$ boyutlu yardımcı soyut uzaya faz uzayı denir. Hamilton denklemleri faz uzayında yazılmış denklemlerdir. İncelenen sistemin üç boyutlu uzaydaki her durumu faz uzayında bir faz noktası ve her hareketi de faz uzayında bir faz eğrisi belirler.

Hamilton denklemleri de Lagrange denklemleri gibi Hamilton varyasyon ilkesinden elde edilmek istenirse, önce Hamilton varyasyon ilkesindeki Lagrange fonksiyonu yerine Hamilton fonksiyonunun, Lagrange fonksiyonu cinsinden olan tanımından elde edilen değeri yazılır ve

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p; q; t) \right] dt = 0 \quad (4.2)$$

bulunur. Hamilton ilkesinin Denklem (4.2) ile verilen ifadesine bakılırsa varyasyon alındığında $\delta\dot{p}_i$ büyüklüklerinin gelmediği görülür. Bu $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$ koşuluna gerek olmadığını gösterir.

Denklem (4.2) ile verilen ilkeye modifiye edilmiş Hamilton varyasyon ilkesi denilmektedir. δ ile sanal değişmeler gösterilir ve bu değişmelerin bir t anında olduğu düşünülürse; $\delta t = 0$ olmalıdır.

Bu ilkeyi kullanarak Hamilton denklemleri elde edilir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p; q; t) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) \right] dt = 0$$

$\delta \dot{q}_i$ büyüklüğünü içeren terime kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt = p_i(t_2) \delta q_i(t_2) - p_i(t_1) \delta q_i(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt$$

olur. $\delta \dot{q}_i(t_2) = \delta \dot{q}_i(t_1) = 0$ olması nedeniyle, geriye

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt$$

kalır. Buna göre;

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p; q; t) \right] dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \left(\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \sum_i \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, δq_i ve δp_i büyüklükleri bağımsız olması dolayısıyla, denklem (4.1) ile verilen Hamilton denklemleri çıkar.

4.2. Kanonik dönüşümler

Bir mekanik sistemin incelenmesi hareket denklemlerinin yazılmasıyla başlar ve çözülmesiyle tamamlanır. Lagrange ve Hamilton yöntemleri sistemin hareket denklemlerinin, genelleştirilmiş koordinatlarının belirlenmesi, kinetik ve potansiyel enerjisinin yazılması, Lagrange ve Hamilton fonksiyonlarının oluşturulması ve hareket denklemlerine geçilmesi gibi, bilinen adımlardan geçilerek yazılmasını sağlar [15]. Bu nedenle bu yöntemler Newton hareket denklemlerinden üstündür. Lagrange ve Hamilton denklemlerinin çözülmesi her

zaman kolay olmaz [16]. Bu özellik, Hamilton denklemlerinin integre edilebilmesi için bir yol açar. Herhangi bir sistem incelenirken sistemin davranışını belirlemek için kullanılan genelleştirilmiş koordinatlar ve genelleştirilmiş momentumlar olanaklar ölçüsünde hepsi veya bir kısmı çevrimsel koordinatlar ve momentumlar olarak alınabilirse, denklem kolaylıkla integre edilebilir. Probleme başlanırken sistemi belirlemede kullanılan koordinatlar ve momentumlar bu özellikte olmayabilir. Uygun bir dönüşümle bu özellikteki koordinatlara ve momentumlara geçilebilirse, amaca ulaşılabilir. Bir genelleştirilmiş koordinat ve momentum takımından bir başka genelleştirilmiş koordinat ve momentum takımına geçmek faz uzayında bir dönüşüm yapmaktır. Yani, çevrimsel koordinatları ve momentumları bulmanın yolu faz uzayında uygun dönüşümler yapmaktan geçer. Faz uzayında yapılan herhangi bir dönüşüm Hamilton fonksiyonunu ve sonuçta Hamilton denklemlerinin şekillerini değiştirir. Hamilton denklemlerinin şeklinin değişmesi yeni karmaşıklıklara yol açar. Burada kullanılacak dönüşüm Hamilton denkleminin şeklini bozmayan dönüşümlerdir. Bu özellikteki dönüşümlere kanonik dönüşümler olarak özel bir isim verilir.

Faz uzayında yapılan herhangi bir dönüşümün

$$q_i \rightarrow Q_i(q; p; t), \quad p_i \rightarrow P_i(q; p; t), \quad i = 1, \dots, n$$

şeklinde olacağı açıktır. Dönüşümden önce sistemin $H(q; p; t)$ ile gösterilen Hamilton fonksiyonun şekli dönüşümden sonra bozulur. Bu yüzden yeni Hamilton fonksiyonu bir başka harfle gösterilir: $K(Q; P; T)$. Dönüşümden önce

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

olan Hamilton denklemleri, dönüşümün kanonik olması durumunda, dönüşümden sonra

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

olur. Kanonik dönüşümleri belirlemek için

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p; q; t) \right] dt = 0$$

ilkesinden denklem (4.3) ve

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q; P; t) \right] dt = 0$$

ilkesinden denklem (4.4) elde edilir. İki integrandın arasındaki fark, faz uzayında tanımlanmış keyfi bir $F(q; p; Q; P; t)$ fonksiyonun zamana göre tam türevine eşit alınırsa;

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p; q; t) - \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q; P; t) = \frac{dF}{dt}$$

denklemini elde edilir. Her iki taraf dt ile çarpılırsa,

$$\sum_i p_i dq_i - H(p; q; t)dt - \sum_i P_i dQ_i - K(Q; P; t)dt = dF \quad (4.5)$$

denklemini elde edilir. Her iki tarafın t_1 anından t_2 anına kadar integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p; q; t) - \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q; P; t) \right] dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt \\ &= F(q(t_2); p(t_2); Q(t_2); P(t_2); t_2) - F(q(t_1); p(t_1); Q(t_1); P(t_1); t_1) \end{aligned}$$

bulunur.

$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = \delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = \delta Q_i(t_1) = \delta Q_i(t_2) = \delta P_i(t_1) = \delta P_i(t_2) = 0$ olması nedeniyle,

$$\delta [F(q(t_2); p(t_2); Q(t_2); P(t_2); t_2) - F(q(t_1); p(t_1); Q(t_1); P(t_1); t_1)] = 0$$

dır. Böylece

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i [p_i \dot{q}_i - H(p; q; t)] dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i [P_i \dot{Q}_i - K(Q; P; t)] dt = 0 \quad (4.6)$$

sonucuna ulaşılır [17]. Denklem (4.1)' in varlığı denklem (4.6)' ifadesindeki birinci terimin sifira eşit olmasını; bu ise ikinci terimin sıfır olmasını gerektirir. İkinci terimin sıfır olması denklem (4.4)' ü verir. Dönüşüm kanonik olur. Keyfi F fonksiyonuna kanonik dönüşümün doğurgan fonksiyonu denir.

F fonksiyonu q, p, Q, P değişken takımlarına bağlıdır. Kanonik dönüşümler nedeniyle bu dört değişken takımı arasında iki tane bağıntı takımı vardır. Bu durum serbest olan değişken takımlarının sayısının ikiye inmesi, yani F fonksiyonun q, p, Q, P , değişken takımlarından herhangi iki tanesine bağlı olması demektir. F fonksiyonunun q, p koordinatlarına veya Q, P koordinatlarına bağlı olması durumunda bir dönüşüm belirlenemez. Geriye F fonksiyonunun q ve Q

koordinatlarına; q ve P koordinatlarına; p ve Q koordinatlarına; p ve P koordinatlarına bağlı olması durumları kalır.

Bu bağılılıkların belirlediği kanonik dönüşümler incelenirse:

1) $F(q;Q;t)$ ise, yani bağımsız değişkenler olarak q_i ve Q_i koordinatları alınır ve F yerine, ötekilerden ayırt edilebilmesi için, F_1 yazılırsa;

$$dF_1 = \left[\sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \frac{dQ_i}{dt} \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right] dt$$

olur. Bu denklem (4.5) ifadesinden çıkarılırsa,

$$\sum_i \left[\left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) dq_i + \left(P_i - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) dQ_i \right] + \left(K - H - \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) dt = 0$$

eşitliği elde edilir. dq_i ve dQ_i koordinatları bağımsız olduğundan, bu eşitlikten

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$K(Q;P;t) = H(q(Q;P;t), p(Q;P;t), t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q(Q;P;t), Q; t)$$

sonucu çıkar. Yukarıdaki ilk bağıntı takımı Q_i koordinatlarına göre çözümlenerek $Q_i(q;p;t)$ koordinatları bulunur. Bulunan değerler ikinci bağıntı takımında yerleştirilir ve P_i koordinatlarına göre çözümlerse $P_i(q;p;t)$ koordinatları hesaplanır [18].

2) $F(q;P;t)$ ise, yani bağımsız değişkenler olarak q_i ve P_i koordinatları alınmışsa: denklem (4.5) bağıntısında bağımsız olmayan Q_i koordinatlarının diferansiyelleri yer almaktadır. Bunlardan, bağımsız P_i koordinatlarına geçilmesi gerekir. Bu da $d(P_i Q_i) = Q_i dP_i + P_i dQ_i$ olması kullanılarak gerçekleştirilir. Denklem (4.5) aşağıdaki denklemi verir.

$$\sum_i p_i dq_i - H dt - d \left(\sum_i P_i Q_i \right) + \sum_i Q_i dP_i + K dt = dF_1$$

$$F_2(q;P;t) = F_1(q;Q;t) + \sum_i P_i Q_i \text{ denilirse,}$$

$$\sum_i p_i dq_i - H dt + \sum_i Q_i dP_i - K dt = dF_2 \quad (4.7)$$

bağıntısına geçilebilir. Denklem (4.5)'de

$$dF_2 = \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} dP_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\sum_i p_i dq_i - Hdt + \sum_i Q_i dP_i - Kdt = \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} dP_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt$$

bulunur. Buradan,

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$K(P; Q; t) = H(p(P; Q; t); q(P; Q; t); t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q(P; Q; t); P; t)$$

sonucuna ulaşılır.

3) $F(p; Q; t)$ ise, yani bağımsız değişkenler olarak p_i ve Q_i koordinatları alınmışsa: denklem (4.5) eşitliğindeki dq_i diferansiyellerini içeren terimlerden $d(p_i, q_i) = q_i dp_i + p_i dq_i$ bağıntısı kullanılarak kurtulunur. Buradan elde edilen $\sum_i p_i dq_i$ değeri denklem (4.5)' de yerine konulursa,

$$-\sum_i q_i dp_i - Hdt + Kdt - \sum_i P_i dQ_i = d\left(F_1 - \sum_i p_i q_i\right)$$

denklemini elde edilir. $F_1 - \sum_i p_i q_i = F_3$ denilip yukarıdaki yol kullanılırsa,

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$K(P; Q; t) = H(p(P; Q; t); q(P; Q; t); t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}(p(P; Q; t); Q; t)$$

denklemini elde edilir.

4) $F(p; P; t)$ ise, yani bağımsız değişkenler olarak p_i ve P_i koordinatları alınmışsa: bu defa sol yanda bulunan ilk terimdeki dq_i büyüklükleriyle sağ yanda bulunan ilk terimdeki dQ_i büyüklüklerinden kurtulunması gerekir. Bunun için $d(p_i, q_i + P_i Q_i) = q_i dp_i + p_i dq_i + Q_i dP_i + P_i dQ_i$ eşitliği kullanılır. Benzer işlemlerle,

$$F_4 = F_1 - \sum_i p_i q_i + \sum_i P_i Q_i$$

olmak üzere,

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$K(P; Q; t) = H(p(P; Q; t); q(P; Q; t); t) + \frac{\partial F_4}{\partial t}(p(P; Q; t); P; t)$$

denklemini elde edilir.

Problemde F_1 , F_2 , F_3 , ve F_4 doğurgan fonksiyonlarından hangisinin kullanılacağı problemin özelliklerine bağlıdır. Kanonik dönüşüm zamana açık olarak bağlı değilse $H=K$ olur yani Hamilton fonksiyonunun değeri değişmez. $H(q;p;t)$ fonksiyonunun q , p ve t değişkenlerine bağlılık şekli $K(Q;P;t)$ fonksiyonunun Q , P ve t değişkenlerine bağlılık şeklinden farklıdır.

$q_i \rightarrow Q_i(q; p; t)$ ile $p_i \rightarrow P_i(q; p; t)$ dönüşümünün kanonik olup olmadığını kontrol etmenin bir başka yolu da vardır. Hesaplamaların daha kolay olması açısından bu yol kanonik dönüşümlerin zamandan bağımsız olması durumunda kullanılır.

Kanonik dönüşümler Hamilton denklemlerinin şeklini değiştirmeyen dönüşümlerdir. Buna göre, yeni koordinatların Hamilton denklemlerini sağlaması için gereken koşullar aranır,

$$\dot{Q}_i = \frac{d}{dt} Q_i(q; p) = \sum_j \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right)$$

eşitliğinde \dot{q}_j ve \dot{p}_j için Hamilton denklemleri kullanılırsa,

$$\dot{Q}_i = \sum_j \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)$$

denklemini elde edilir. Öte yandan, zincir kuralı uyarınca,

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial H_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} - \frac{\partial H_i}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right)$$

dir.

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

olması istendiği için,

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P}, \quad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P} \quad (4.8a)$$

olmalıdır. Her iki eşitliğin sağ tarafındaki q_i, p_i alt indisleri Q_i koordinatlarının q_i koordinatlarıyla p_i momentumlarının fonksiyonu olduğunu, yani $Q(q, p)$ ve $P(q, p)$ olduğunu belirtir. Her iki eşitliğin sağ tarafındaki Q_i, P_i alt indisleri ise q_i koordinatlarıyla p_i momentumlarının Q_i ve P_i değişkenlerinin fonksiyonu olduğuna, yani $q(Q, P)$ ve $p(Q, P)$ olduğuna dikkat çekmek için konulmuştur.

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

şeklindeki ikinci Hamilton denkleminde hareketle, benzer işlemler uygulanarak,

$$\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right)_{Q,P}, \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,P} \quad (4.8b)$$

denklemini elde edilir.

4.3. Hamilton-Jacobi teorisi

Çevrimsel koordinatlar söz konusu olduğunda, Hamilton denklemlerinin integrasyonu kendiliğinden olur. Hamilton denklemlerinin şeklini değiştirmeyen kanonik dönüşümleri kullanıldığında, bütün kanonik koordinatları çevrimsel yapmanın yolları aranabilir. Hamilton denklemlerinin çözümlerinin elde edilmesinde bu yol ile sonuca ulaşılabilir.

Bütün kanonik koordinatların kanonik dönüşümler aracılığı ile çevrimsel kılınması ilk defa, Jacobi tarafından düşünülmüştür. Bugün, temelinde bu amaç yatan yapı Hamilton-Jacobi ve kullanılan yöntem de Hamilton-Jacobi yöntemi olarak bilinir. Bu yöntemin ana fikri şudur:

$K=0$ koşulunun sağlanması istenirse, dönüşümden sonraki bütün kanonik koordinatlar kendiliğinden çevrimsel olur. Bu da, $i=1, \dots, n$ için,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \quad Q_i = \text{bir sabit} = \alpha_i,$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \quad P_i = \text{bir sabit} = \beta_i$$

verir.

Her biri birer sabit olan dönüşümden sonraki kanonik koordinatlar, problemin başlangıç koşulları kullanılarak belirlendiğinde, ters dönüşümle, problemin başlangıç koşullarına uyan $q_i(t)$ ve $p_i(t)$, $i=1, \dots, n$ koordinatları elde

edilebilir. Dönüşümü ve ters dönüşümü, dönüşümün doğurgan fonksiyonu belirler. Doğurgan fonksiyonlar bulunabilirse koordinatlar da bulunmuş olur.

Problem bilindiğine göre, $H(q;p;t)$ Hamilton fonksiyonu da bilinmektedir. $K = H(q; p; t) + \partial F/\partial t$ koşuluna F doğurgan fonksiyonunu belirleyen diferansiyel denklem gözüyle bakılırsa: ya Hamilton fonksiyonundaki genelleştirilmiş p_i momentumlarının yerine F fonksiyonunun genelleştirilmiş q_i koordinatlarına göre kısmi türevlerinin veya Hamilton fonksiyonundaki genelleştirilmiş q_i koordinatlarının yerine F fonksiyonunun genelleştirilmiş p_i momentumlarına göre kısmi türevlerinin gelmesi gerekir. Birinci durumda F fonksiyonunun bağlı bulunduğu temel değişkenler arasında q_i koordinatları; ikinci durumdaysa F fonksiyonunun bağlı bulunduğu temel değişkenler arasında p_i koordinatları bulunmaktadır. Birinci durum F_2 ve ikinci durum da F_3 doğurgan fonksiyonlarının kullanılması sonucu ortaya çıkar. Daha yaygın olarak kullanılan F_2 fonksiyonudur ve burada bu fonksiyon kullanılmıştır [9].

$n+1$ değişkene bağlı olan F_2 fonksiyonunun uyduğu denklem

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q_1, \dots, q_n; \beta_1, \dots, \beta_n; t) = 0$$

denklemdir. Bu denklem Hamilton-Jacobi denklemi olarak isimlendirilir. Bu denklemin F_2 fonksiyonunu veren çözümü $n+1$ tane integrasyon sabiti içerir. Bu integrasyon sabitlerinin n tanesi β_1 sabitlerine eşitlenebilir. Geriye kalan $(n+1)$ sabite gelince; bu F_2 fonksiyonuna eklenmiş olarak düşünülebilir. Hesaplarda F_2 fonksiyonunun kendisi yerine kısmi türevleri rol oynadığı için, bu sabit kolaylıkla göz ardı edilebilir.

F_2 fonksiyonunun anlamının ne olduğu bulunmaya çalışılırsa,

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

ifadesinde $\partial F_2/\partial t$ için Hamilton-Jacobi denkleminin verdiği değer kullanıldığında

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q; p; t)$$

denklemini elde edilir ve, Hamilton fonksiyonun Lagrange fonksiyonu cinsinden tanımı dolayısıyla,

$$\frac{dF_2}{dt} = L(q; \dot{q}; t)$$

bulunur. Buna göre

$$F_2 = \int L(q; \dot{q}; t) dt + \text{bir sabit}$$

dir. Literatürde F_2 yerine S kullanılır ve S Hamilton'un esas fonksiyonu olarak bilinir:

$$S = \int L(q; \dot{q}; t) dt + \text{birsabit.}$$

Hamilton'un

$$\delta \int L(q; \dot{q}; t) dt = 0$$

varyasyon ilkesi hatırlanırsa: Lagrange ve Hamilton denklemleri $L(q; \dot{q}; t)$ fonksiyonun zamana göre belirli integralinden; Hamilton denklemlerinin çözümü kendinden bulunabilen duruma getiren kanonik dönüşümse, aynı fonksiyonun zamana göre ilkel fonksiyonu olan, bir doğurgan fonksiyon türetilmektedir.

Hamilton denklemlerinin integrasyonlarına dönülürse, kanonik dönüşümlerde gösterilen

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} S(q; \beta; t) \quad \text{ile} \quad Q_i = \frac{\partial}{\partial \beta_i} S(q; \beta; t) = \alpha_i$$

eşitliklerinden ve

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i} S(q; \beta; t) = \alpha_i$$

denklemden $q_i(t)$ koordinatları çözülebilir. Bunlar α_i ve β_i sabitlerine de bağlıdır. Bu $q_i(t)$ değerleri $p_i = \partial S(q; \beta; t) / \partial q_i$ denkleminde yerlerine konularak $p_i(t)$ momentumları zamanın ve α_i ile β_i sabitlerinin fonksiyonu şeklinde elde edilir. $t=0$ için $q_i(0)$ ile $p_i(0)$ değerlere kullanılarak α_i ve β_i sabitlerinin fonksiyonu şeklinde elde edilir ve böylece çözüm tamamlanır.

Burada en büyük güçlük Hamilton-Jacobi kısmi türevli diferansiyel denkleminin integre edilmesinde yatmaktadır. Denklem bütün değişikliklere göre adi türevli tek değişkenli diferansiyel denklemlere ayrılabilirse, çözümü kolayca elde edilebilir.

S fonksiyonu, yalnız bir tek koordinata bağlı bir kısım ile o koordinatın dışındaki diğer koordinatlara bağlı bir başka kısmın toplamı olarak yazılabilirse söz konusu koordinata ayrılabilir koordinat denir. Bir tek koordinatın dışında kalan bütün koordinatlar ayrılabilir koordinat ise S fonksiyonunun, her biri bir tek koordinata bağlı, $S_i(q_i)$, $i=1, \dots, n$ fonksiyonlarının toplamı olarak yazılabilir. Böyle olunca da Hamilton-Jacobi denklemi n tane adi türevli diferansiyel denkleme ayrılmış olacaktır.

Her çevrimsel koordinat ayrılabilir. q_1 çevrimsel bir koordinat, p_1 bir hareket sabiti ve $p_1 = \beta_1$ ise; bu durumda Hamilton-Jacobi denklemi

$$H\left(q_2, \dots, q_n; \beta_1, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

olur. $S(q_1, \dots, q_n; \beta_1, \dots, \beta_n; t) = S_1(q_1, \beta_1) + \tilde{S}(q_2, \dots, q_n; \beta_2, \dots, \beta_n; t)$ parçalanışı yapılırsa, $\partial S / \partial q_i = \partial \tilde{S} / \partial q_i$, $i=2, \dots, n$ ve $\partial S / \partial t = \partial \tilde{S} / \partial t$, olacağından, yukarıdaki denklem,

$$H\left(q_2, \dots, q_n; \beta_1, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0$$

şeklini alır. Bu denklemin içinde q_1 koordinatına bağlı olan S_1 yoktur. n-1 tane q_i koordinatıyla zamana bağlıdır. $S_1(q_1, \beta_1)$ ise

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_1} = \beta_1$$

denklemini sağlar, yani $S_1(q_1, \beta_1) = \beta_1 q_1$ olur. Çevrimsel olan bütün koordinatlara bu işlem uygulanır. Hamilton fonksiyonunun bir sabit olması bütün kanonik koordinatların çevrimsel olması demektir.

Hamilton-Jacobi denklemindeki değişkenlerden biri de zamandır. Hamilton fonksiyonu zamana açık olarak bağlı değilse, a_1 bir sabiti göstermek üzere,

$$S(q; \beta; t) = W(q; \beta) - a_1 t$$

şeklinde parçalandığında, Hamilton-Jacobi denklemi

$$H\left(q_1, \dots, q_n; n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = a_1$$

şeklinde zamandan bağımsız bir denkleme iner. W, Hamilton'un karakteristik fonksiyonu olarak bilinir. W fonksiyonun tek başına tanımladığı kanonik

dönüşümün özellikleri S fonksiyonunun tanımladığı kanonik dönüşümün özelliklerinden bir hayli farklıdır.

Bir yandan zamana açık olarak bağlı bulunmayan Hamilton fonksiyonunun bir hareket sabiti vardır ($dH/dt = [H, H]_{P.P.} = 0$), öte yandan doğurgan fonksiyonun zamana açık olarak bağlı bulunmaması durumunda $K=H$ olur. Yukarıdaki sonuç ile bunlar birleştirilirse $K=a_1$ elde edilir.

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \text{ yani } P_i = \text{sabit}, \quad i = 1, \dots, n$$

olur. $P_1 = a_1, P_i = 0, i = 2, \dots, n$ alınır,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 1, \text{ yani } Q_i = t + \alpha_i,$$

ve

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \text{ yani } Q_i = \alpha_i, \quad i = 2, \dots, n$$

olur. S ve W fonksiyonunun doğurduğu kanonik dönüşümler arasındaki farklılık açıkça görülmektedir. Q_1 ile P_1 kanonik eşlenik koordinatlarıdır. α_1 sabiti bir yana bırakılırsa, $Q_1=t$ ve $P_1=a_1=H$ olur. Böylece, hareket sabiti olan Hamilton fonksiyonu, enerjiyle zaman kanonik eşlenik koordinatları olurlar.

p_i kanonik koordinatı, eşleniği olan q_i kanonik koordinatına göre kısmi türev işlemcisiyle ilgilidir. Buna göre de Hamilton fonksiyonu $\partial/\partial t$ işlemcisiyle ilgilidir. Bu bilginin açık şekli $\hat{H} = -i\hbar\partial/\partial t$ şeklinde kuantum mekaniğinde de gösterilir.

5. AYAR DÖNÜŞÜMLERİ

Lagrange fonksiyonun, ψ' nin sabit faz değişimleri altında invaryant olması global ayar dönüşümleri olarak adlandırılır. Bu ifade, ψ' nin keyfi uzay-zamana bağlı faz değişimleri altında invaryant olması simetride lokal ayar dönüşümleri olarak da bilinir [19].

Kanonik alan teorisinin bilinen yöntemi altında bu ifade tektir ve buna ayar prensibi denir [20].

Lie grup elemanının (U) matris gösterimi, $U(1)$ elemanı $e^{i\theta}$ nin genelleştirilmesidir. Eğer U nun matris elemanları uzay-zamandan bağımsız ise U bir global ayar dönüşümüdür. Diğer taraftan U bir lokal ayar dönüşümü olarak da bilinir.

Lagranjyan yoğunluğu,

$$\mathcal{L}_0(\psi(x), \partial^\mu \psi(x))$$

olur.

Ayrıca global ayar invaryans durumları

$$\mathcal{L}_0(U\psi, \partial^\mu U\psi) = \mathcal{L}_0(\psi, \partial^\mu \psi)$$

şeklindedir [21].

Prensipite bir sistemin teorik durumunu gösteren $\psi(q)$ fonksiyonu ayar invaryansı olarak bilinir. q -uzayında bir eksenin başlangıcında veya yönündeki sonsuz küçük değişimler ψ -uzayında ψ' nin bir dönmesinin sonucudur. Ayar invaryansı vektör uzunluğu $|\psi|$ nin bu şeklini gerektirir ve bu dönüşüm altında invaryant olması gerekir. Gözlenebilen bu sonuçlar q -uzayında korunumlu olan dönüşümün jeneratörüne uygundur.

Ayar dönüşümlerinin jeneratörleri bilinen komütasyon bağıntılarını sağlayan, genelleştirilmiş kanonik momentuma bağlı bilinen kuantum mekaniksel operatörlerdir. Durum vektörünün zamana göre değişimi genellikle zamana bağlı Schrödinger denklemdir, zaman değişimdeki bu sonuçlar ayar dönüşümüne uygundur.

ψ -uzayında aynı dönmedeki global ayar invaryansı uzay-zamanda bütün noktalara uygulanır.

Genellikle klasik mekanik, kuantum mekaniği ve özel rölativitenin çoğunda, ayar dönüşümleri kullanılır.

Tablo 5.1 Lokal ayar dönüşümleri[21]

Sonsuz küçük dönüşümler
$\omega(\mathbf{x}) \equiv \omega_a(\mathbf{x})L_a$
$\delta\psi_i(\mathbf{x}) = -i\omega_a(\mathbf{x})(L_a)_{ij}\delta\psi_j(\mathbf{x})$
$\delta A_a{}^\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{g}\partial^\mu\omega_a(\mathbf{x}) + C_{abc}\omega_b(\mathbf{x})A_c{}^\mu(\mathbf{x})$
$\delta F_a{}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = C_{abc}\omega_b(\mathbf{x})F_c{}^{\mu\nu}(\mathbf{x})$
$\delta\psi(\mathbf{x}) = -i\omega(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$
$\delta A^\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{g}\partial^\mu\omega(\mathbf{x}) - i[\omega(\mathbf{x}), A^\mu(\mathbf{x})]$
$\delta F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -i[\omega(\mathbf{x}), F^{\mu\nu}(\mathbf{x})]$
Sonlu dönüşümler
$U(\mathbf{x}) \equiv e^{-i\omega(\mathbf{x})}$
$\psi(\mathbf{x}) \rightarrow U(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$
$A^\mu(\mathbf{x}) \rightarrow U(\mathbf{x})A^\mu(\mathbf{x})U^{-1}(\mathbf{x}) - \frac{i}{g}U(\mathbf{x})\partial^\mu U^{-1}(\mathbf{x})$
$F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \rightarrow U(\mathbf{x})F^{\mu\nu}(\mathbf{x})U^{-1}(\mathbf{x})$

6. AKUSTİKLER İÇİN ENERJİ KORUNUM DENKLEMLERİNİN KUATERNİONİK FORMU

Lineer akustik denklemler aşağıdaki gibi ele alınabilir:

$$p = c^2 \rho \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (6.2)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla}(p) \quad (6.3)$$

Burada; ρ_0 , ambient akış yoğunluğunu, $\rho(\vec{x}, t)$, ambient yoğunluktan küçük sapmayı, $p(\vec{x}, t)$, ambient basınçtan küçük sapmayı, $\vec{u}(\vec{x}, t) = (u, v, w)$, akış hız vektörünü gösterir [27].

Denklem (6.1), basınç yoğunluğuna bağlı durumun adyabatik ifadesidir. Bu denklem Newton'un ikinci yasası olan,

$$F = ma \quad (6.4)$$

ile elde edilir. Burada; kütle, hacim ve yoğunluk cinsinden ifade edilirse;

$$F = \rho Va$$
$$\frac{F}{V} = \rho a \quad (6.5)$$

denklemini elde edilir. Denklem (6.5)'de hacim uzunluk ve alan, ivme ise hız ve zaman cinsinden ifade edilirse;

$$\frac{F}{SL} = \rho \frac{c}{t} \quad (6.6)$$

denklemini elde edilir ve

$$\frac{F}{S} = \rho c \frac{L}{t}, \quad \frac{L}{t} = c, \quad \frac{F}{S} = p$$

değişimleriyle:

$$p = \rho c^2, \quad (6.7)$$

şeklindeki yoğunluk, hız ve basınç arasındaki denklem elde edilir.

Denklem (6.2), kütle (süreklilik) denkleminin korunumudur. Kütle vardan yok yoktan var edilemez (kütlenin korunumu yasası). Bütün korunum denklemleri iç enerjinin hariç tutulmasıyla "korunum" veya "diverjans" şeklinde yani;

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial B_i}{\partial x_i} + C = 0$$

olarak yazılabilir.

Akustikler için süreklilik denklemi,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.8)$$

şeklindedir. Burada \vec{u} ; sesin hız vektörüdür.

Denklem (6.3) ise akış lineer momentum denklemdir.

Denklem (6.1), denklem (6.2) ve denklem (6.3) kullanılarak

$$\frac{\partial \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)}{\partial(ct)} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{u}}{c} \right), \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\vec{u}}{c} \right)}{\partial(ct)} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (6.10)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (6.11)$$

$$t' = ct, \quad (6.12)$$

$$\vec{u}' = \vec{u}/c, \quad (6.13)$$

değişken değişimleri ile, denklem (6.9) ve denklem (6.10)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{u}', \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} = -\vec{\nabla} \rho', \quad (6.15)$$

haline gelir. Bunlar akustik denklemlerdir. \vec{u}' 'nin curl (rotasyoneli)'ünün zamana

göre sabit olabilmesi için denklem (6.15)'de \vec{u}' ve ρ' 'nin uzay-zamana göre iki

kere türevi alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{u}')}{\partial t'} = 0. \quad (6.16)$$

Bu çalışmada, genel (alışılmış) akustikler için

$$\vec{\nabla} \times \vec{u}' = 0, \quad (6.17)$$

kabulü yapılmaktadır.

Akustik durum vektörü kuaternionlar ile,

$$\psi = [\rho, u, v, w] = \rho e_0 + u e_1 + v e_2 + w e_3 \quad (6.18)$$

şeklinde tanımlanabilir [22]. Denklem (6.16) ve denklem (6.17) ise

$$T \psi = (\nabla \psi)^* \quad (6.19)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada

$$\nabla = \left[0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (6.20)$$

∇ ; denklem (6.20)'deki gibi gösterilen kuaternionik nabla operatörüdür ve

$$T = \left[\frac{\partial}{\partial t}, 0, 0, 0 \right] \quad (6.21)$$

T ; denklem (6.21)'deki gibi gösterilen, zamana göre kuaternionik türev operatörüdür. Sürekli sistemler için Lagranjyan formülasyonu,

$$L = \iiint \mathcal{L} dx dy dz$$

şeklinde gösterilir. Kuaternionik Lagranjyan yoğunluğu

$$\mathcal{L} = \psi^* \cdot [T \psi - (\nabla \psi)^*] \quad (6.22)$$

şeklindedir. Burada * kompleks eşleneğin transpozisini gösterir. Akustik durum vektörü ψ , kompleks olduğu için ψ ve ψ^* değişimler hesabında bağımsız değişkenler olarak alınır.

Kesikli ortamdan sürekli ortama bir dönüşüm olduğu için Hamilton varyasyon ilkesi kullanılmalıdır [28]:

$$\delta H = \delta \int dt \int dx \mathcal{L} = 0 \quad (6.23)$$

Bir eğri boyunca, eğrinin parametrik gösterilişi olan fonksiyonlarla bu fonksiyonların birinci mertebeye türevleri cinsinden tanımlanan bu fonksiyonelin ekstremum değerlerini alabilmesi için eğrinin parametrik gösterilişi olan fonksiyonların uyması gereken denklemlerin

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

ile verilen Euler denklemi olduğu bilinmektedir. Bu denklemler

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f[\dot{y}_i(x); y_i(x); x] dx = 0$$

ilkesinden elde edilir. Euler denklemiyle Lagrange denklemleri arasındaki benzerlikten

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L[\dot{q}_i(t); q_i(t); t] dt = 0$$

ile verilen varyasyon ilkesi çıkar. Bu Hamilton varyasyon ilkesidir.

Denklem (6.19), denklem (6.22)'deki kuaterniyonik Lagranjyan yoğunluğundan ve denklem (6.23)'teki değişim ilkesinden türetilmiştir.

Akustik alan ile birleştirilmiş korunum yasaları, ayar dönüşümleri yardımıyla,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \approx [1 + \alpha, 0, 0, 0] \psi \quad (6.24)$$

şeklinde elde edilebilir [24]. Burada bu ayar dönüşümü Lagrange fonksiyonunu invariant (değişmez) bırakmaktadır. Denklem (6.24)'te α ; x ve t 'nin keyfi sınırsız fonksiyonudur. Denklem (6.24)'te dönüşüm tipi birinci tip bir ayar dönüşümü olarak adlandırılır. Denklem (6.24) ile tanımlanan ayar dönüşümü, denklem (6.22)'ye uygulandığı zaman aşağıdaki denklem elde edilir [26].

$$\mathcal{L}(\psi') = \mathcal{L}(\psi + [1 + \alpha, 0, 0, 0] \psi) = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} \quad (6.25)$$

Burada; Lagranjyan yoğunluğundan,

$$\delta \mathcal{L} = \psi^* \cdot \left\{ T([\alpha, 0, 0, 0] \psi) - (\nabla([\alpha, 0, 0, 0] \psi))^* \right\} \quad (6.26)$$

denkleminde ulaşılır. Bu denklemin açılımı ise;

$$\delta \mathcal{L} = \psi^* \cdot \left\{ (T[\alpha, 0, 0, 0]) \psi - ((\nabla[\alpha, 0, 0, 0]) \psi)^* + [\alpha, 0, 0, 0] (T\psi - (\nabla\psi)^*) \right\} \quad (6.27)$$

denklemini verir. Denklem (6.19)'a göre denklem (6.27)'deki α 'nın çarpım durumunda olduğu terimler yok olur ve H işleminde değişim (6.23) denkleminde yeniden düzenlenirse,

$$\delta H = - \int dt \int dx \left\{ (T[\alpha, 0, 0, 0] \psi^* \cdot \psi) - \psi^* \cdot ((\nabla[\alpha, 0, 0, 0]) \psi)^* \right\} = 0 \quad (6.28)$$

şekline gelir.

Uzay ve zamanda bir integrasyondan sonra hareket denklemindeki değişim koşulu kuaterniyonik denklemde α keyfi sabiti için sifıra eşit olmalıdır [25].

$$(T\psi^* \cdot \psi) - \psi^* \cdot (\nabla\psi)^* = 0 \quad (6.29)$$

Bu denklem akustikler için enerjinin bir kuaternionik lokal korunum denklemidir ve denklem (6.29)'un açılımı

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (6.30)$$

denklemini verir. Bu denklem akustikler için enerji korunum denkleminin alışılmış formudur. Buradaki W niceliği,

$$W = \frac{\rho^2}{2} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \quad (6.31)$$

akustik enerji yoğunluğudur ve korunum denkleminde toplam enerjideki artışa karşılık gelmektedir.

$$I = (\rho u, \rho v, \rho w) \quad (6.32)$$

vektörü ise akustik enerji akısıdır yani hareketten kaynaklanan, birim hacimdeki enerji değişimi (akışı) anlamındadır.

7. SONUÇ

Bu çalışmada kuaternion cebirinin temel özellikleri tanıtılmıştır. Ayrıca ses dalgalarının özellikleri, yayınımları, enerjisi ve şiddeti açıklanmıştır. Çevrimsel koordinatlar ve momentumlar bulunurken uygun dönüşümler yani Hamilton denklemlerinin şeklini bozmayan kanonik dönüşümler kullanılmıştır. Ayar dönüşümleri ve bu dönüşümlerin Lagrange fonksiyonuna uygulanması, sonucun keyfi uzay zamana bağlı faz değişimleri altında invaryantlığını sağlamaktadır.

Kuaternionik Lagrange fonksiyonu kullanılarak lineer akustikler için lokal enerji denklemi ve birinci tip ayar dönüşümü, yer değiştirme ve dönme invaryansı kullanılmadan yeniden formülize edilmiştir. Akustikler için kuaternionik denklemler tanımlanmıştır. Bu denklemler, diğer klasik yolla yani; vektörler, kompleks sayılar ve matrisler kullanılarak yapılan işlemlere göre daha kısa, işlemleri kolay ve anlaşılır bir formdadır. Lokal enerji korunum denkleminin uygulama bu kuaternionik formüller yardımıyla akustik açısal momentum ve lineer momentum korunum denklemlerini türetmek için de uygulanabilir.

8. KAYNAKLAR

1. ÖZDAŞ, K. ve ÖZDAŞ, A., *Fiziksel Niceliklerin Kuaternionlarla Temsili*, A.Ü. Fen-Edebiyat Dergisi, **1,2**, Eskişehir, 101-113 (1989).
2. ÖZDAŞ, K., *Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, 2-20 (1995).
3. HACISALİHOĞLU, H., *Hareket Geometrisi ve Kuaternionlar Teorisi*, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara, 105-123 (1983).
4. SERDAROĞLU, M., *Fizikte Kuaternion ve Oktonion Yapılar*, Bilim ve Teknik Dergisi, **26**, S:302, 45-51 (1993).
5. TANIŞLI, M., *Uzaysal Dönmelerin ve Robot Kollarının Pozisyonunun Kuaternion Dönüşümleri ile İncelenmesi*, Doktora Tezi Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, (1995).
6. HARAUZ, G., *Representation of Rotation by Unit Quaternions*, Ultramicroscopy, **33**, 209-213, (1990).
7. HORN, B., *Closed-Form Solution of Absolute Orientation Using Quaternions*, Journal of Optical Society of America, **4** 629-642 (1987).
8. CHOU, J.C.K., *Quaternion Kinematik and Dynamic Differential Equations*, IEEE Transaction on Robotics and Automation, 53-64 (1987).
9. GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, Narosa Pub. Co., Indian Student Edition, New Delhi (1993).
10. BUECHE, F. J., ve JERDE, D.A., *Ses, Fizik İlkeleri 1*, Çolakoğlu, K., Palme Yayıncılık, Ankara, 432-440 (2000).
11. CRAWFORD, F.S.JR., *İlerleyen Dalgalar*, Berkeley Fizik Dersleri:3 *Dalgalar*, Nasuhoğlu, R., Mc Graw Hill, Ankara, 126-130 (1990).
12. SERWAY, R.A., *Ses Dalgaları, Fizik 1*, Çolakoğlu, K., Palme Yayıncılık, Ankara, 455-469 (1995).
13. RIZAOĞLU, E., ve SÜNEL, N., *Hamiltonsal Yöntemler, Klasik Mekanik*, Sünel, N., Tokat, 441-500 (2002).
14. SPIEGEL, M.R., *Theoretical Mechanics*, Schoum Pub. Co. (1997).
15. SYMON, K.R., *Mechanics*, Addison-Wesley Pub. Co. (1973).
16. MOORE, E.N., *Theoretical Mechanics*, John Willey and Sons (1983).

17. ARFKEN, G., *Mathematical Methods For Physicists*, Acedemic Press (1985).
18. OSGOOD, W.F., *Advanced Calculus*, Macmillan N.Y. (1925).
19. WEYL, H., *Ann.D. Physics*, 59-101 (1919).
20. YANG, C.N. ve MİLLS, R.L., *Physics, Rev.* 96-191 (1945).
21. HUANG, K., Yang-Mills Fields, *Quarks, Leptons and Gauge Fields*, World Scientific, Singapore National Printers, Singapore, 67-69 (1982).
22. TANIŞLI, M. *The Quaternionic Energy Conversation Equation For Acoustic*, *Acta Physica Slovaca*, **53, 3**, 253-258 (2003).
23. HAMILTON, R.W., *Proc. R. Irish Acad.* 5-219 (1853).
24. LAMBEK, J., *Quaternions in Physics*, *The Mathematical Intelligence*, 17,7 (1995).
25. ARENADA, J.E., *Dimensional-Diretional Analysis by a Quaternionic Representation of Physical Quantities*, *Journal of Franklin Institute* 333B,113 (1996).
26. ANDERSON, R.S.J. ve GIRISH, C.J., *Quaternions and the Heuristic Role of Mathematical Structures in Physics*, *Physics Essays*, 6,308 (1993).
27. PIERCE A.D., *Acoustics*, Acoustical Society of America (1989).
28. ROSU, H.C., *Classical Mechanics*, Los Alamos Elect Arch:Physics, Mexico (1999).