

**BİR BOYUTLU KESİKLİ SİSTEMLERDE
ROGUE DALGALARI**

Semiha Tombuloğlu

Doktora Tezi

Fizik Ana Bilim Dalı

Eskişehir-2019

BİR BOYUTLU KESİKLİ SİSTEMLERDE ROGUE DALGALARI

Semiha TOMBULOĞLU

**Doktora Tezi
Fizik Ana Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Cem YÜCE**

Eskişehir

**Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı
Nisan 2019**

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Semiha Tombuloğlu' nun “Bir Boyutlu Kesikli Sistemlerde Rogue Dalgaları” başlıklı tezi 01/04/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği” nin ilgili maddeleri uyarınca, Fizik Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı) :	Prof. Dr. Cem YÜCE	
Üye :	Prof. Dr. Murat LİMONCU	
Üye :	Prof. Dr. Hüseyin KARAÇALI	
Üye :	Doç. Dr. Tanju GÜREL	
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Emre YÜCE	

Prof.Dr. Ersin YÜCEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BİR BOYUTLU KESİKLİ SİSTEMLERDE ROGUE DALGALARI

Semiha TOMBULOĞLU

Fizik Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Nisan 2019

Danışman: Prof. Dr. Cem YÜCE

Rogue dalgaları deniz yüzeyinde aniden belirir ve hızla kaybolur. Denizin geri kalanından en az iki kat daha büyük bir genliğe sahiptir. Bu dalgalar önemlidir çünkü birçok fiziksel alanda gözlemlenebilirler. Bu tezde, bir dizi doğrusal olmayan dalga kılavuzundaki kesikli rogue dalgası nümerik yöntemlerle incelenmiştir. Gerçek bir deney ortamında küçük dereceden düzensizlikler daima vardır. Bu zamana kadar olan çalışmalarda küçük dereceden düzensizlikler yok sayılmıştır. Bu çalışmada, köşegen ve köşegen olmayan tipte düzensizlikler ele alınmıştır. Bu küçük dereceden düzensizliklerin rogue dalgasının dinamiğini ve yapısını önemli bir şekilde etkilediği görülmüştür. Ayrıca bu tezde, varlıklarını uzun süre devam ettirebilen kesikli rogue dalgalarının oluşabileceği öngörülmüştür ve bu dalgaların evrilmesi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Maddesel dalga, rogue dalgası, Kesikli doğrusal olmayan Schrödinger denklemi.

ABSTRACT

ROGUE WAVES IN ONE DIMENSIONAL DISCRETE SYSTEMS

Semiha TOMBULOĞLU

Department of Physics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, April 2019

Supervisor: Prof. Dr. Cem YÜCE

Rogue waves suddenly appear on the sea surface and disappear quickly. They have a large amplitude at least two times higher than the rest of the sea. These waves are important because they can be observed in many physical fields. In this thesis, discrete rogue wave in an array of nonlinear waveguides has been numerically studied. In a real experiment, a small degree of disorder always exists. The small degree of disorder have been ignored up to now. In this study, diagonal and off-diagonal disorder have been considered. It is observed that these small degrees of disorders significantly affect the dynamics and structure of the rogue wave. Also in this thesis; long-living discrete rogue waves are predicted and the evolution of these waves is studied .

Keywords: Matter wave, Rogue wave, Discrete nonlinear Schrödinger equation.

TEŞEKKÜR

Bilgi ve tecrübelerini paylaşıarak yolumu aydınlatan değerli hocam Prof. Dr. Cem YÜCE' ye doktora eğitimim boyunca gösterdiği sabrı, anlayışı, emeği ve desteği için çok teşekkür ederim. Hakkını asla ödeyemeyeceğimi ve öğrencisi olmaktan her daim onur duyduğumu belirtmek isterim.

Hayallerimin gerçekleşmesinde bana destek olan, sevgileriyle, özverileriyle her zaman arkamda duran annem Ayşe Dudu EFE ve babam Halit EFE başta olmak üzere tüm aileme çok teşekkür ederim.

Sağladığı motivasyonla yüzümü güldüren eşim İsmail TOMBULOĞLU' na anlayışı ve desteği için teşekkür ederim. Yoğun çalışma tempoma katlandığı ve hep bana moral verdiği için küçük kızım Bihter TOMBULOĞLU' na teşekkür ederim.

Semiha TOMBULOĞLU

01.04.2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit Programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Semiha Tombuloğlu

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. ROGUE DALGASI.....	3
2.1. İstatiksel Yaklaşım.....	7
2.1.1. Konumsal odaklama.....	8
2.1.2. Dağıtıcı odaklama.....	9
2.1.3. Dalga-akım etkileşimi.....	10
2.2. Doğrusal Olmayan Rogue Dalgası.....	12
2.3. Rogue Dalgaların Gözlemlenmesi.....	13
2.3.1. Deniz gözlemleri.....	13
2.3.2. Fiber optikte solitonların gözlemlenmesi.....	14
2.3.3. Su tankında rogue dalgasının gözlemlenmesi.....	15
2.3.4. Plazmada rogue dalgasının gözlenmesi.....	19
2.4. Diğer Sistemlerde Rogue Dalgaları.....	19
2.4.1. Bose-Einstein yoğunlaşmasında rogue dalgaları.....	19

2.4.2.	Optikte rogue dalgası.....	21
2.4.3.	Kılcal dalga içerisindeki rogue dalgaları.....	22
2.4.4.	Finansal rogue dalgaları.....	23
3.	SOLİTONLAR.....	25
3.1.	Kuznetsov-Ma Solitonu.....	26
3.2.	Peregrine Soliton.....	28
3.2.1.	Lax çifti.....	32
3.2.2.	Darboux dönüşümü.....	33
3.2.3.	İkinci dereceden oransal çözüm.....	36
3.2.4.	Yüksek Dereceden Oransal Çözüm.....	38
3.3.	Akhmediev Breather.....	39
4.	NÜMERİK ÇÖZÜM.....	43
4.1.	Kesikli Doğrusal Olmayan Schrodinger Denklemi.....	48
4.1.1.	Kesikli rogue dalgaları.....	51
4.1.2.	Periyodik modülasyon altındaki kesikli rogue dalgası.....	56
4.2.	Kesikli Rogue Dalgalarının Uzun Zaman Dinamiği.....	59
5.	SONUÇ.....	63
	KAYNAKÇA.....	64
	ÖZGEÇMİŞ.....	79

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1: Petrol yükleyici Esso Languedoc Durban kıyıları dışındaki bölge, Güney Afrika 1980 (Kharif, C., Pelinovsky E., Slunyaev A., 2008).....	4
Şekil 2.2: Kamchatka kıyılarında gözlenen rogue dalgası 2006 yılında M.M Sokolovsky tarafından çekilmiştir. (Klyatskin, 2015)	5
Şekil 2.3: Draupner platformundan elde edilen zaman serisi kaydı,(Walker, Taylor, & Taylor, 2004) (Ardhuin, Seville, Stopa, & Cravatte, 2017)	5
Şekil 2.4: Tek Yönlü Dalga Yayılmasında Dağılma İlişkisi (C. Kharif & Pelinovsky, 2003).....	11
Şekil 2.5: Su dalga tankı fotoğrafı. Tankın en uç tarafına yerleştirilen hidrolik silindire bağlı kürek tarafından dalga oluşturulmaktadır. (A. Chabchoub, Hoffmann, Onorato, & Akhmediev, 2012).....	16
Şekil 2.6: Uygun başlangıç koşulları seçildiğinde $x=0$ pozisyonunda maksimum genlik oluşmuştur. a) Birinci dereceden oransal çözüm b)İkinci dereceden oransal çözüm(Amin Chabchoub & Fink, 2013).....	17
Şekil 2.7: a) Birinci dereceden oransal çözümün kürek kinematığından 9 m uzaklığındaki bir noktada ölçümü (Mavi renkte olan) Aynı noktada teorik olarak NLS denklemiyle öngörülen dalga profili (Kırmızı renkte olan) b)İkinci dereceden oransal çözümün kürek kinematığından 9 m uzaklığındaki bir noktada ölçümü (Mavi renkte olan) Aynı noktada teorik olarak NLS denklemiyle öngörülen dalga profili (Kırmızı renkte olan). (Amin Chabchoub & Fink, 2013)	18
Şekil 2.8: Optikte rogue dalgalarının zaman-dalga boyu ilişkisi(Solli et al., 2007)	22
Şekil 2.9: 1929 yılında ABD’ deki Dow Jones Borsası Grafiği (Tom McClellan, 2018).....	24
Şekil 3.1: KM solitonu çözümünde $a=0.8$ değeri için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği	27
Şekil 3.2: KM solitonu çözümünde $a=1$ değeri için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği	28
Şekil 3.3: Peregrine solitonu çözümünde $a=0.5$ değeri için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği	30

Şekil 3.4: Peregrine solitonu çözümü için dalga fonksiyonunun mutlak karesinin konuma göre farklı zaman değerleri için grafiğidir. $t=0$ anında $x=0$ noktasında oluşan pikin değeri zamanla azalmakta ve yüksek t değerlerinde bu pik kaybolmaktadır. Burada $t=0$:kırmızı, $t=1$:siyah, $t=2$:mavi, $t=3$:yeşil renkle gösterilmiştir.....	31
Şekil 3.5: İkinci dereceden oransal çözüm için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği	38
Şekil 3.6: Üçüncü dereceden oransal çözüm için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği	39
Şekil 3.7: Akhmediev Breather çözümünde $a=0.25$ değeri için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği	40
Şekil 3.8: Akhmediev Breather çözümünde $a=0.4$ değeri için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği	41
Şekil 4.1: Bağımsız değişkenler x ve t eksenlerinde eşit aralıklarla ızgaralama.....	44
Şekil 4.2: $N=100$, $A=1$ ve $L=100$ değerleri için dalga fonksiyonu genliğinin mutlak değerinin konum-zaman grafiği.....	46
Şekil 4.3: $N=100$, $A=0.9$ ve $L=100$ değerleri dalga fonksiyonu genliğinin mutlak değerinin konum-zaman grafiği	47
Şekil 4.4: $N=100$, $A=0.1$ ve $L=100$ değerleri için dalga fonksiyonu genliğinin mutlak değerinin konum-zaman grafiği	47
Şekil 4.5: Optik dalga kılavuzlarındaki ızgaralamanın şematik gösterimi.....	51
Şekil 4.6: Herhangi bir düzensizliğin olmadığı durumda $N=200$, $L=100$, $g=-1$ ve $A=0.2$ değerleri için alan genliğinin mutlak değeri.....	54
Şekil 4.7: $N=200$, $L=100$, $g=-1$ ve $A=0.2$ değerleri için diyagonal olmayan düzensizlikte $\varepsilon_1=10^{-2}$ değeri için alan genliğinin mutlak değeri	55
Şekil 4.8: $N=200$, $L=100$, $g=-1$ ve $A=0.2$ değerleri için diyagonal düzensizlikte $\varepsilon_2=10^{-2}$ değeri için alan genliğinin mutlak değeri.....	55
Şekil 4.9: Herhangi bir düzensizliğin olmadığı durumda $N=200$, $g=-0.5$, $\varepsilon=0.2$, $d=20$ ve $\alpha=0.4$ değerleri için dalga fonksiyonunun genliğinin mutlak değeri.	57
Şekil 4.10: $N=200$, $g=-0.5$, $\varepsilon=0.2$, $d=20$ ve $\alpha=0.4$ değerleri için diyagonal olmayan düzensizlikte $\varepsilon_1=10^{-2}$ değeri için alan genliğinin mutlak değeri	57
Şekil 4.11: $N=200$, $g=-0.5$, $\varepsilon=0.2$, $d=20$ ve $\alpha=0.4$ değerleri için diyagonal düzensizlikte $\varepsilon_2=10^{-2}$ değeri için alan genliğinin mutlak değeri.....	58

Şekil 4.12: $\varepsilon_2=10^{-2}$, $g=-1$, $N=200$ ve $A=0.4$ için $\psi_j(z=0)=A$ alınması durumunda uzun süreli rogue dalgası	60
Şekil 4.13: $\varepsilon_2=10^{-2}$, $g=-1$, $N=200$ ve $A=0.4$ için, $j \neq 100$ durumunda $\psi_j(z=0)=A$ ve $j=100$ durumunda $\psi_j(z=0)=5A$	60

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- $h(m)$: Metre cinsinden genlik
 $t(s)$: Saniye cinsinden zaman
 H : Dalga yüksekliğinin olasılık fonksiyonu
 $P(H)$: Rayleigh dağılımı
 σ^2 : Frekansa bağlı değişken
 H_s : Belirgin dalga genliği
 $\eta(x,t)$: Serbest konum yüksekliği
 Ω : Frekans
 T : Boyutsuz değişken
 k_w : Dalga sayısı
 A_0 : Başlangıçtaki dalga genliği
 h_d : Bölgesel dalga derinliği
 c : Faz hızı
 U : Akıntı hızı
 c_{gr} : Grup hızı
 Λ : Diferansiyel genişlik
 g : Doğrusal olmayan terimin katsayısı
 γ : Elastik olmayan üç-kütle etkileşimi
 ρ^2 : Yoğunluk
 θ : Faz
 λ_c : Sabit
 S : Varlık fiyatları
 C : Varlık değeri
 ξ : Hisse dalgalanması
 r : Risksiz faiz oranı
 a : Serbest parametre
 $Q(t)$: Vektör çözümü
 λ : Kompleks özdeğer

h : Konum adım aralığı
 k : Zaman adım aralığı
 Ψ : Dalga fonksiyonu
 A : Küçük bir parametre
 L : Dalga kılavuzunun uzunluğu
 n : Düğüm nokta sayısı
 J_j : Tünelleme katsayısı
 V_j : Ek potansiyel terimi
 Q : Modülasyon dalga numarası
 Q_z : Dispersiyon ilişkisi
 $|\alpha|^2$: Arka plan genliği
 ε : Küçük bir parametre
 d : Modülasyon periyodu
 $\varepsilon_{1,2}$: Boyutsuz bir sabit
 W : Sıfır ortalama değer dağılımına sahip rastgele reel sayı
 p : Sabit
 z : Yayılma doğrultusu
MI: Modülasyonel kararsızlık
NLS denklemi: Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi
KM: Kuznetsov-Ma Solitonu
AB: Akhmediev Breather
BEC: Bose-Einstein yoğunlaşması
KdV denklemi: Korteweg-De Vries denklemi
DNLS denklemi: Kesikli doğrusal olmayan Schrödinger denklemi
A-L denklemi: Ablowitz-Ladik denklemi

1. GİRİŞ

Son yıllarda gittikçe artan teorik ve deneysel ilgi odağı haline gelmiş olan rogue dalgaları hiçbir belirti olmadan hızlıca meydana gelir ve arkasında hiçbir iz bırakmadan hızlıca kaybolur (Kharif, C., Pelinovsky E., 2008). Çok sayıda çalışma yapılmış olmasına rağmen, rogue dalgalarının pek çok özelliği halen tam anlaşılamamıştır. Başlangıç koşulunda meydana gelen ufak kararsızlıklardan dolayı dalga genliğinin giderek arttığı zannedilmektedir (Guo, Boling; Tian, 2017; Kharif, C., Pelinovsky E., Slunyaev A., 2008). Rogue dalgaları önemli bir konu olmasının sebeplerinden birisi de farklı fiziksel ortamlarda gözlenebilmesidir.

Rogue dalgalarının yapısını araştıran bilim adamları, bu dalgaların açıklanabilmesi için çeşitli öngörülerde bulunmuşlardır. Olasılıksal yaklaşımla, her dalganın sinüzoidal bir şekilde belirli dalganın hızına bağlı frekanslarda, farklı doğrultulara hareket edebilen dalga olduğu öne sürülmüştür (Onorato et al., 2009). Su dalgalarının doğrusal olmayan yapısından ötürü, her sinüzoidal dalganın bir diğerine yeni spektral bileşenler üretebilmesini sağlar. Böylelikle, zamanla değişen düzenli olmayan dalgalar elde edilmiş olunur. Bu dalga alanlarının çözümünde rastgele yaklaşımlar ele alınır. Şöyle ki, farklı frekanslarda, rastgele fazlarda ve genliklerde sinüzoidal dalgaların sonsuz toplamı olarak düşünülebilir. Doğrusal bir yaklaşıklıkla, Gauss dağılımı uygulandığında görülmüştür ki böyle istatistiksel bir yaklaşımın grafiği gerçekte ölçülen rogue dalgalarının grafiğiyle uyum içerisinde değildir. Doğrusal denklemlerle rogue dalgalarının durumu anlaşılamayacağından dolayı, yapıyı anlayabilmek için doğrusal olmayan denklemleri kullanmak gerekir. Bu denklemlerden en çok kullanılanı doğrusal olmayan Schrödinger denklemidir (Kharif, C., Pelinovsky E., 2008).

Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi kullanarak yapılan rogue dalga çözümlerinin aksine kesikli sistemlerde rogue dalgaları üzerine yapılan çalışmalar literatürde fazla değildir. Bu çalışmada, kesikli sistemlerde modülasyonel kararsızlığın rogue dalgaları üzerindeki etkisi irdelenmiştir. Bunun için önce rogue dalgalarının oluşma mekanizmaları ve farklı fiziksel ortamlarda gözlenmesi incelenmiş, solitonların detaylı analizleri yapılmış, sonrasında kesikli doğrusal olmayan Schrödinger denklemi kullanarak rogue dalgalarının nümerik çözümleri üzerinde çalışılmıştır. Referans (Bludov, Konotop, & Akhmediev, 2009)' de uygun başlangıç koşulu seçerek kesikli

doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin çözümleri incelenmiştir. Gerçek bir deney düzeneğinde daima var olan küçük düzensizlikler ve zayıf çalkantılar ise yok sayılmıştır. Bu tezde, küçük dereceden düzensizliklerin modülasyonel kararsızlıktaki etkisini ve bu durumda rogue dalgalarının zamanla nasıl evrildiğini inceleyeceğiz. Bunun için kesikli doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ve belirli bir başlangıç koşulu kullanacağız. Ayrıca hangi durumlarda kesikli rogue dalgalarının uzun süreli dinamiğini elde edeceğimizi araştıracağız.

2. ROGUE DALGASI

Rogue dalgaları, “haydut dalga”, “anormal dalga”, “aşırı dalga”, “dev dalga”, “muazzam dalga”, “katil dalga”, “su duvarı” gibi çeşitli isimleri olan, çok yüksek genliğe sahip dalgalardır ve ilginç doğaları gereği araştırmacılar tarafından yoğun ilgi görmüştür (C. Kharif & Pelinovsky, 2003). Deniz seviyesinden en az iki kat daha yüksek olan bu dalgalar, hiçbir ön uyarı olmadan hızlı bir şekilde oluşurlar ve sanki hiç oluşmamış gibi hızlı bir şekilde de kaybolurlar (Baldock & Swan, 1996).

Gemiler için ölümcül olan dev dalgalar, yüz yıllardır denizci hikayelerinde kendine yer bulmuştur. Rogue dalgası olduğu tahmin edilen birçok vakanın görüntüleri internette mevcut durumdadır. Çok uzun bir süredir varlığı bilinmesine rağmen rogue dalgalarının yapısını anlayabilmek mümkün olmamıştır (Kurkin & Pelinovsky, 2002). Tsunami dalgaları bazen rogue dalgalarına benzetiliyor olsa da, bu iki dalga birbirlerinden tamamıyla farklıdır (Byrne, Davis, & Sykes, 1988; Kundu, 2007). Tsunami dalgalarını genlikleri kilometre mertebelerine erişebilirken, rogue dalgaların genlikleri çok daha düşüktür (Nanayama et al., 2003). Tsunamiler, deprem, volkanik patlama, meteor çarpması ya da deniz tabanında oluşan ani toprak kaymaları sebebiyle oluşarak, büyük su kütlelerin yer değiştirmesine neden olurlar.

Günümüz teknolojisine rağmen rogue dalgaları gizemlerini hala sürdürmektedir ve haklarında yeteri kadar detaylı bilgi bulunmamaktadır. Hızlı bir şekilde oluşup kısa ömürlü olduklarından dolayı, rogue dalgaları hakkında veri elde etmek oldukça zordur. Rogue dalgaları nadir olaylardır ve veri almak için çok uzun süre beklemek gerekir. Bundan dolayı, rogue dalgalarını farklı fiziksel sistemlerde gözlemlemek, bu dalgaları anlama yolunda önemli bir adımdır (K. Dysthe, Krogstad, & Müller, 2008). Örneğin doğrusal olmayan fiber optik (Tulin & Waseda, 1999), Bose-Einstein yoğunlaşması (Carretero-González, Frantzeskakis, & Kevrekidis, 2008; Wen et al., 2011), plazmalar (Moslem, 2011), akustik (Selim, Abdelwahed, & El-Attafi, 2015) ve hatta finans alanlarında rogue dalgaları gözlenmiştir (Zhen-Ya, 2010; Baronio, Degasperis, Conforti, & Wabnitz, 2012). Rogue dalgalarının çeşitli fiziksel sistemlerde gözlenebilir olması konunun popüleritesini artırmaktadır.

Rogue dalgalarının varlıkları ilk kez 1964’de Draper tarafından öne sürülmüştür (Draper, 1964). 1969 ve 1994 yılları arasında rogue dalgalarının sorumlu olduğu düşünülen 22’den fazla büyük yük gemisi kaybolmuştur (Lavrenov, 1998). Rogue dalgaları hakkında ilk bilimsel kayıt 1995 yılında Kuzey Denizi’nde, Draupner platformundan elde edilmiştir (Perkins, 2006). Bu kayıta dalga derinliği 70 m, maksimum dalga yüksekliği 25,6 m ve dalga tepesinin yüksekliği 18,5 m’dir. Kayıt, rogue dalgaların deneysel anlamda nasıl oluştuklarına ışık tutması sebebiyle son derece önemlidir. Tarihte görülen rogue dalgaların bir listesine (Olagnon, 2008; C. Kharif & Pelinovsky, 2003; P. C. P. Liu, 2007) numaralı referanslardan ulaşılabilir.

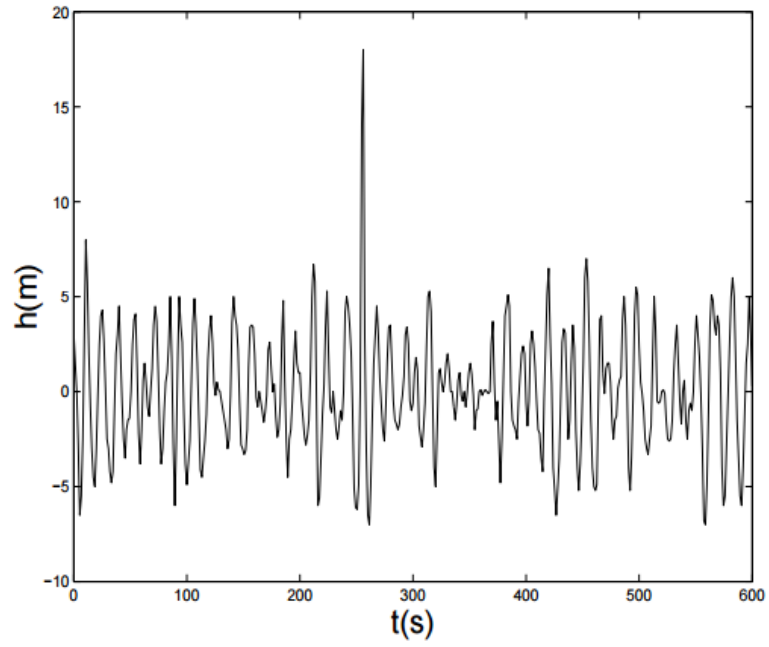
Denizciler, genlikleri 20-30 m hatta daha fazla olabildiği için, rogue dalgalarını “su duvarı” olarak da tanımlarlar. Rogue dalgaları tek başına görülebileceği gibi, bir dalga grubu olarak da gözlemlenebilir. Örneğin, bir tepe noktasına eşlik eden iki küçük dalganın varlığı “üç kız kardeş” dalgası olarak adlandırılır (Kit et al., 2000).



Şekil 2.1: Petrol yükleyici Esso Languedoc Durban kıyıları dışındaki bölge, Güney Afrika 1980 (Kharif, C., Pelinovsky E., Slunyaev A., 2008)



Şekil 2.2: Kamchatka kıyılarında gözlenen rogue dalgası 2006 yılında M.M Sokolovsky tarafından çekilmiştir. (Klyatskin, 2015)



Şekil 2.3: Draupner platformundan elde edilen zaman serisi kaydı, (Walker, Taylor, & Taylor, 2004)
(Ardhuin, Seville, Stopa, & Cravatte, 2017)

Rogue dalgaları oluşumunun altında yatan işleyiş halen tartışma konusudur. Dev dalgalar için doğrusal ve doğrusal olmayan birçok matematiksel açıklama mevcuttur (M. Onorato, Osborne, Serio, & Bertone, 2001). Rogue dalgalarının oluşumunu açıklamak için şimdiye kadar doğrusal ve doğrusal olmayan yapılar, geometrik odaklanma, geçici odaklanma, modülasyon kararsızlığı, doğrusal olmayan dalga etkileşimi ve rüzgâr ve güçlü akıntılar gibi çeşitli modeller öne sürülmüştür (Kharif, C., Pelinovsky E., Slunyaev A., 2008; Walker et al., 2004).

Şekil 2.1 ve şekil 2.2’ de rogue dalgaları ile ilgili fotoğraflar görülebilir. Şekil 2.3’ te ise 1995 yılında Draupner platformunda verileri kaydedilen rogue dalgasının maksimum genliğinin zamanla değişimi gösterilmiştir. Burada $h(m)$ metre cinsinden genliği, $t(s)$ ise saniye cinsinden zamanı göstermektedir. Veriler rogue dalgalarının doğrusal olmayan karakterini açığa çıkartmaktadır (Haver, 2004; Walker et al., 2004) Bu bağlamda, derin denizde dev dalga oluşumunu araştırmak adına, doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin odaklanmak uygun bir yaklaşımdır. Modülasyon kararsızlığı (MI) ya da çokça kullanılan adıyla Benjamin-Feir kararsızlığı mekanizması ile işlem daha karmaşık hale gelmekte ve enerji alışverişi de hesaplama dahil olmaktadır.

Dev dalgaların doğrusal olmayan doğası göz önüne alındığında, MI’ nın, rogue dalgaların yapısını açıklamakta son derece önemli bir rolü vardır. Düzlem dalgasındaki periyodik pertürbasyonlarla MI tanımlanmış ve doğrusal olmayan dalgaların oluşumunu açıklayabildiği görülmüştür. MI ile yalnızca su dalgalarında değil, fiber optik ve plazma gibi diğer fiziksel sistemlerde de karşılaşılmaktadır (Erkintalo et al., 2011). 1999 yılında Tulin ve Waseda tarafından yapılmış deneysel bir çalışma ile MI’ nın dalga oluşumunda önemli rol oynadığı gösterilmiştir (Tulin & Waseda, 1999). Hwung is 2007 yılında yaptığı deneylerle MI’ın karakteristik özelliklerini ortaya koymuştur (Hwung, Chiang, & Hsiao, 2007).

Dev dalgaların Gauss dağılımı metodu ile istatistiksel analizi yapılmıştır. Rogue dalgaların oluşumu anlamak için, önce olasılıksal yaklaşım ele alınmış ve bu yaklaşımın rogue dalgalarını açıklamadaki zayıf yönleri ortaya konulmuştur (Boccotti, 1982).

2.1. İstatiksel Yaklaşım

Deniz dalgalarının düzensiz ve öngörülemez şekilde hareket ettiği bilinmektedir (M Onorato et al., 2009). Farklı yönlerde hareket ederek, birbirleriyle çarpışabilirler ve bunun sonucunda deniz yüzeyini düzensiz hale getirirler (Trulsen, Borge, Gramstad, Aouf, & Lefèvre, 2015). Deniz yüzeyinin bu karmaşık yapısı ve hem uzay hem zaman sınırlamasının mevcut olduğu da hesaba katılırsa, rastlantısal yaklaşım kullanılması uygun görünmektedir. Neredeyse Gauss fonksiyonuna benzeyen bir olasılıksal yoğunluk fonksiyonu ile rastlantısal dalga alanı karakterize edilebilir (Kokorina & Pelinovsky, 2002).

Dalga yüksekliğinin olasılık fonksiyonu, H , Rayleigh dağılımı ile ifade edilecektir,

$$P(H) = \exp\left(-\frac{H^2}{8\sigma^2}\right) \quad (2.1)$$

σ^2 değişkeni frekansa bağlı olmak şartıyla, olasılık fonksiyonu şu şekilde ifade edilir,

$$P(H) = \exp\left(-\frac{2H^2}{H_s^2}\right) \quad (2.2)$$

Burada H_s belirgin dalga genliğidir. Bu formül yüksek genlikli dalgaların oluşma olasılığını yaklaşık olarak verir (C. Kharif & Pelinovsky, 2003). Örneğin, rogue dalga karakterine sahip bir dalganın her 3000 dalgada bir kez oluştuğu düşünülmektedir. Tipik dalga periyodu 10 saniye olarak kabul edilirse, tahminen her 8-9 saatte bir rogue dalgası oluşmaktadır (Waseda, Kinoshita, & Tamura, 2009).

Olasılık yoğunluk dağılımlı Gauss süreçleri, durağan olasılık dağılımları için geçerlidir, dolayısıyla gerçek oluşumlarla çok örtüşmemektedir. Dalgaların uygun olmayan geniş spektrumu, kırılması ve doğrusal olmayan diğer etkenler sebebiyle dalgaların denklem olarak ifade edilmesi Gaussyen olmayan fonksiyonlarla olmaktadır (Phillips, Gu, & Donelan, 1993). Dev dalgalar nadiren gözlemlendiği için de istatistiksel durağan koşullar da söz konusu değildir.

2.1.1. Konumsal odaklama

Konumsal odaklama dalgaların kırılmasıyla ortaya çıkar. Deniz zeminindeki değişimlerle veya farklı akıntıların bir araya gelmesiyle oluşabilir. Örneğin, dalgalar daha sığ sulara yayıldıkça dalga boyları, su derinliği ile karşılaştırılabilir hale gelirler ve kırılırlar. Sonuç olarak dalgaların tepe noktaları birbiriyle üst üste gelmeye başlar ve genlikleri artar. Bu durumda dalga enerjisi zemine bağlı olarak belli noktalarda yoğunlaşır. Bu sistem enerji üretimi için de kullanılabilir (Dorrell, Halliday, Miller, & Findlater, 2004) Afrika güneydoğu sahillerindeki Agulhas akıntısı da buna bir örnek olarak verilebilir. Güney Afrika Cumhuriyeti'nde Durban ile East London arasındaki akıntıda jet benzeri bir yapı bulunmaktadır. Burada güneybatıdan gelen güçlü rüzgârlarla birlikte oluşan soğuk cephelerin sebebiyet verdiği anormal büyüklükte dalgalar gözlemlenmektedir. Burada akıntıda yukarıya doğru hareket eden dalgaların jet içerisinde hapis kalmasının etkili olduğu düşünülmektedir (K. Dysthe et al., 2008).

Agulhas akıntısının 1998'de Lavrenov tarafından nümerik modellemesi yapılmıştır. Bu modelde oluşan dalganın genliğinin deniz seviyesinin iki katına çıktığını görülmüştür ve bu da uydu gözlemleriyle uyumaktadır (Lavrenov, 1998). Düzensiz sahil kıyıları boyunca yansımalar meydana gelir ve belirli bölgelerde dalganın enerjisinin odaklanmasına yol açar. Gözlemlenen küçük yayılmalar dalgaların bir araya toplanma durumu olmadığını öngörse de tek yönlü bir dalga akıntıya girdiğinde yine de dalgalar bir araya gelebilir. Böyle bir durumda dalgalar hapis kalır ve Airy fonksiyonlarıyla yaklaşık olarak betimlenebilirler. (K. Dysthe et al., 2008). Dalganın şeklindeki bu değişimlerin rogue dalgalarını oluşturabileceği düşünülmektedir.

Bir rogue dalgasının oluşumunun incelenmesi için analitik metotlar kullanılabilir ya da nümerik simülasyonlar tercih edilebilir. White ve Fornberg (White & Fornberg, 1998) ışın izleme ile rastgele akıntılara giren benzer hızdaki tek doğrultulu dalgaların kırılmasını izlemişlerdir. Böyle bir durumda girdap oluşur. Bu girdaplar yeterli boyutlardalarsa, yani 10 km üstündelerse odaklanma oluşabilir. Ancak küçük bir açısız dağılım bile dalgaların bir araya toplanma durumunu engellemektedir. Heller, White ve Fornberg'in bu çalışmasını tekrar inceleyip dalgaların tam olarak tek yönlü değil küçük bir açısız varyasyonla girmesi durumunda ne olacağını bulmaya çalışmıştır (Heller,

2006). Bu durumda, dalgaların bir araya toplanma yapısı bozulmuştur; ancak yine de enerji odaklanmaları gözlemlenmiştir (K. Dysthe et al., 2008).

2.1.2. Dağıtıcı odaklama

Dalga tanklarında dalgaların oluşturulabilmesi için frekansı zamanla azalan uzun bir dalga grubu oluşturulur. Dağılma özelliği oluşan grubu birkaç pozisyonda toplanmaya iter. Bu mekanizmanın rogue dalga oluşumunda da etkili olduğu düşünülmektedir (C. Kharif & Pelinovsky, 2003). Dalga treni adı verilen bu dalga dizisi, yakında başka dalga yokken, sözü edilen bu durumu oluşturabilir. Başka dalgaların varlığında da bu durum daha zayıf ihtimalle de olsa oluşabilmektedir. Eğer bu dalga treni büyüklük açısından yüzeydeki standart sapmanın altındaysa odaklanma oluşana kadar bu dalgalar dikkat çekici boyutlara ulaşmayacaktır. Dağıtıcı odaklanma doğrusal bir etkidir ve doğrusal Gauss denizinde dahi meydana gelebilmektedir. Ancak dalgaların gereken dalga trenini oluşturmak için ihtiyaç duydukları faz etkileşimlerine sahip olmaları gerekmektedir. Başlangıçta eğer grup hızı düşük kısa dalgalar dalga treninin ön kısımlarındaysalar, arka taraftaki daha hızlı uzun dalgalar gelişim safhasında kısa dalgaların önüne geçmek için hareket eder. Bu sayede yüksek genlikli dalgalar oluşabilmektedir. Bu süreç sonunda sonra uzun dalgalar kısa dalgaların önüne geçer ve genlik tekrar düşer (Andrade, 2017).

Doğrusal teorideki kinematik yaklaşımın genellemeleri Fourier integralinin çeşitli gösterimleri ile yapılabilmektedir. Bunlar en genel haliyle Maslov integral gösterimiyle ifade edilmiştir (Brown, 2000). Aşağıdaki integral odaklanma için ideal durumu varsaymak suretiyle bu durumu göstermektedir.

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\Omega) \exp[i(\Omega T - k_w x)] d\Omega \quad (2.3)$$

Burada, $\eta(x, t)$ serbest konum yüksekliği, $\eta(\Omega)$ frekans bazında konum yüksekliği, Ω frekans, T boyutsuz değişken, k_w ise dalga sayısıdır. Eğer rogue dalgası düzgün yapıdaysa bu integral çözülebilir (Andrade, 2017). Örneğin genliği A_0 , genişliği k_w^{-1} olan bir Gauss akıntısı için; sıg su koşullarında bu yapılabilir. Böyle bir dalga paketi Gauss akıntısına dönüşür ve sonrasında dağılır. Bu durum, aşağıdaki denklemlerle hesaplanabilir.

$$\eta(x,t) = \frac{A_0}{k_w^3 \sqrt{\frac{h_d^2 ct}{2}}} \exp\left(\frac{1}{2h_d^2 ctk_w^2} \left(x - ct + \frac{6}{77h_d^2 ctk_w^4}\right)\right) Ai\left(\frac{x - ct + \frac{9}{77h_d^2 ctk_w^4}}{\sqrt[3]{\frac{h_d^2 ct}{2}}}\right) \quad (2.4)$$

Bu denklemde, A_0 başlangıçtaki dalga genliği, h_d bölgesel dalga derinliği, c ise faz hızıdır, $x=0$ ise odaklanma noktasıdır ve bu noktada oluşan süperpozisyon ile rogue dalgası oluşmaktadır (Andrade, 2017).

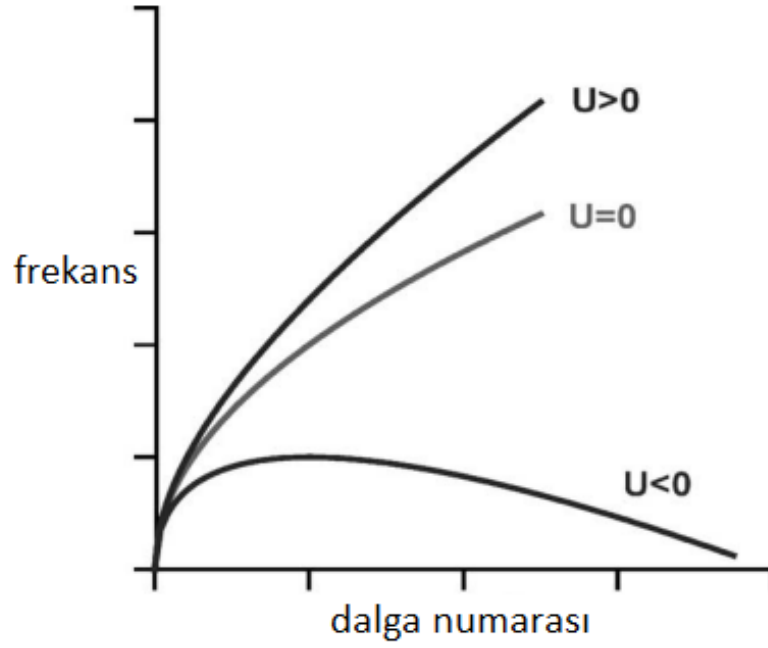
Dağıtıcı odaklama etkisi büyük dalga tanklarında oluşturulmakta ve bu sayede gemi modelleri test edilmektedir. Tankın bir ucunda bulunan dalga oluşturucu ile dalga treni biçimindeki sinyal oluşturulur ve bu trenin ön tarafının kısa boylu dalgalar, arka tarafının ise uzun boylu dalgalarından oluşması sağlanır. Uzun dalgalar daha hızlı yol alır ve kısa dalgalara yetişir. Bu sayede kısa sürede birkaç büyük dalga oluşturulabilmektedir.

2.1.3. Dalga-akım etkileşimi

Rogue dalgaları çok yaygın olarak Gulf Akıntısı, Agulhas akıntısı gibi güçlü akıntılarda gözlemlendiği için dalga-akım etkileşimi konusu da incelenmelidir (C. Kharif & Pelinovsky, 2003). Derin denizde meydana gelen dalgalar için, eğer bu dalgalar istikrarlı bir akıntı üzerindeyseler, yayılmalarının anizotrop (eş yönsüz) olduğu söylenebilir. Tek yönlü dalgalar için dahi dalga-akım etkileşimi önemli bir durumdur. Eğer akıntı bu tek renkli dalgaya ters yönlüyse bir noktada (x_0) akım dalgayı engelleyecektir (Kharif, C., Pelinovsky E., Slunyaev A., 2008). Böyle bir durumda grup hızı 0 olacaktır;

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k_w}} + U(x_0) = 0 \quad (1.5)$$

Burada U akıntı hızıdır. Engellenme noktasına yaklaşan dalganın faz ve grup hızları aynı işaretlidir. Engellenme noktasından yansıdığı anda ise grup hızı, faz hızı ile ters işaretli hale gelir. Bu durum şekil 2.4' te gösterilmiştir.



Şekil 2.4: Tek Yönlü Dalga Yayılmasında Dağılma İlişkisi (C. Kharif & Pelinovsky, 2003)

Dalga numarası bu durum oluşurken artmaktadır ve başlangıçtaki uzun dalga kısa dalgaya dönüşür. Dalganın genliği, A , ise

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A^2}{\Omega} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{c_{gr} A^2}{\Omega} \right) = 0 \quad (2.6)$$

denkleminde bulunabilir. Eğer akıntı sabitse bu denklem dalga aksiyonu akısına dönüşür.

$$\frac{c_{gr} \Lambda A^2}{\Omega} = \text{sabit} \quad (2.7)$$

Burada Λ tüpün diferansiyel genişliğidir. Tek yönlü dalga yayılmasında engelleme noktası 0 grup hızı anlamına gelir. Bu durumda dalga genliği sonsuza gider (C. Kharif & Pelinovsky, 2003). Dalga denge denklemi, eğer yakınlarda sapma sonrası dalgaların bir araya toplanma durumu varsa geçerli değildir. Böyle bir durumda dalga alanının açıklanması için Maslov gösterimi kullanılarak yapılan daha isabetli bir asimptotik analiz gerekli olur (C. Kharif & Pelinovsky, 2003).

Akıntılardan eğik dalgaların yansıtılması konusunun analitik incelemesi Shyu ve Tung tarafından 1999'da yapılmıştır (Shyu & Tung, 1999). Lavrenov, Agulhas Akıntısı yakınlarındaki bir rogue dalga olayını incelemiştir ve bu olayda dalga enerjisinin yoğunlaştığı odak noktaları olduğunu göstermiştir (Lavrenov, 1998). Dolayısıyla değişken akıntıların rogue dalgalarının oluşumuna sebebiyet verebileceği belirtilmektedir. Hatta yukarıda gösterildiği gibi bazı yazarlar dalga-akım etkileşiminin derin denizlerde rogue dalga oluşumunda ana etken olduğunu ileri sürmektedirler. Rogue dalgalarının kısa ömürlü olmaları ise akıntıdaki ve rüzgârdaki zamansal değişimlere bağlanmıştır.

2.2. Doğrusal Olmayan Rogue Dalgası

Daha önce de belirtildiği üzere doğrusal olmayan teoriler, rogue dalgalarını açıklamada, doğrusal olanlara kıyasla daha başarılıdır. Bu konuda analitik ve nümerik çözümler geliştirilmekte, deneysel çalışmalar da hız kesmeden devam etmektedir. Rogue dalgaların oluşumunun anlaşılabilmesi için doğrusal olmayan çözümler ümit vadetmektedir. Benjamin Feir kararsızlığı olarak da adlandırılan modülasyon kararsızlığı, dev dalgaların oluşumunda kilit bir role sahiptir (Dudley, Genty, & Eggleton, 2008). Benjamin ve Feir 1967'de, kararsızlık artışının o anki genliklerinin karesiyle orantılı olduğunu göstermişlerdir (Benjamin & Feir, 1967). Rogue dalgaların “uyarı olmadan oluşma ve arkasında iz bırakmadan yok olma” düzenlerini açıklamada modülasyon kararsızlık son derece kilit bir konumdadır (Trulsen, Kliakhandler, Dysthe, & Velarde, 2000). Rogue dalgaların, modülasyon kararsızlığı yaklaşımına göre, küçük bir düzensizlik doğrusal olmayan bir sistemde zamanla yüksek genliklere ulaşarak rogue dalgasını oluşturur. Sonrasında, dalganın genliği düşerken genişliği artar ve en sonunda dalga yok olur.

Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi rogue dalgalarını araştırmak için prototip bir denklemdir ve yaygın olarak kullanılır. Doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denkleminin boyuttan bağımsız formu, 1972'de Zakharov ve Shabat tarafından ters saçılım dönüşümü ile çözülmüştür. Bu teknik klasik Fourier metoduna dayanmaktadır (Zakharovand & Shabat, 1972).

2.3. Rogue Dalgaların Gözlemlenmesi

2.3.1. Deniz gözlemleri

Geçmişte gemicilerin dillendirdiği bir efsane olan rogue dalgalarının gözlemlenmesi günümüzde gelişen teknolojiyle kolaylaşmıştır. SAR adı verilen radar tarafından elde edilen yüzey dalgalarının üç boyutlu kayıtları ve zaman serileri rogue dalgaları hakkında önemli bilgiler sağlamaktadır (K. Dysthe et al., 2008). 1 Ocak 1995’de oluşan “Yeni Yıl Dalgası” vakası, rogue dalgalarının ilk deneysel ölçümüdür. Uydu görüntülemesi ile deniz yüzeyinin topoğrafyası çıkarılmış ve rogue dalgası ilk kez kaydedilmiştir (Guedes Soares, Chereva, & Antao, 2003). Bir diğer bilinen rogue dalgası ise 2007 yılında gözlenen Andrea dalgasıdır ve detaylı analizleri referans (Magnusson & Donelan, 2013)’ de yapılmıştır.

MaxWave Avrupa Projesi kapsamında dalga şamandıraları, lazerler, deniz radarları, uydular gibi farklı uzaktan algılama teknikleri kullanılarak rogue dalgalarını gözlemlenmiştir ve açık denizdeki kazalar rapor edilmiştir (Rosenthal & Lehner, 2008). Bu verilerden hareketle, rogue dalgasının fiziksel mekanizmasının anlaşılması ve hangi koşullarda meydana geldiğinin anlaşılması amaçlanmıştır.

Benetazzo ve çalışma arkadaşları yaptığı çalışmada, açık denizdeki rogue dalgalarını incelemiştir (Benetazzo et al., 2017). Rogue dalga ölçümü için uzay-zaman düzlemindeki stereo dalga imajlama kayıtlarını kullanmıştır (Benetazzo et al., 2017). Üç boyutlu dalga alanlarının kayıtlarında rogue dalgaların tanımlanmasının yapılmasıyla bu dalgaların gözlemlenmesi başarılmıştır. Beş kayıt üzerinden rogue dalgaların ana özelliklerini belirlemeye çalışmışlardır. Dalga davranışları, zamansal profilleri, meydana gelme olasılıkları ve deniz koşullarıyla bağlantıları araştırılmıştır. Geniş çaplı uzay-zaman analizinin kullanıldığı bu bağlamdaki tek çalışma budur. Öncelikle gözlemlenen rogue dalgalar ve bunlarla bağlantılı olan rogue dalgalar sunulmuş, bunların şekillerinin ve olasılıklarının analizi yapılmıştır. Ardından rogue dalga vakaları ile deniz koşulları arasında bağlantı kurulmaya çalışılmıştır. Son olarak da elde edilen bulgular daha önceki araştırmalar ekseninde yeniden değerlendirilmiştir (Benetazzo et al., 2017). Buldukları sonuç rogue dalgaların düşünülenden çok daha yaygın olduğudur. Burada asıl zor olan zaman ve mekân düzleminde rogue dalgalara rasgelebilmektir. Rogue dalgaları okyanusta

herhangi bir yerde ve zamanda meydana gelebilirler. Dolayısıyla tek bir noktanın gözlemlenmesine dayanan yöntemler ile rogue dalgalarını yakalamak zordur. Bu amaçla kullanılan dalga şamandıralarının, dalga boylarını olduğundan daha düşük ölçebileceği de düşünülmektedir. Stereo dalga imajlaması ve nümerik simülasyonlar gibi gözlemlene sistemleriyle çok daha fazla rogue dalga gözlemlenebilir (Benetazzo et al., 2017). Beş uzay zaman kaydı Pasifik Okyanusu'ndaki Station P, Adriyatik Denizi'ndeki Acqua Alta ve Karadeniz'deki Katsiveli platformlarıdır. Bunun yanında, Draupner dalgasının da modellenmesi incelenmiştir. İncelenen denizlerde uni-modal ve bi-modal enerji dağılımlarının ikisinin de olduğu bilinmektedir. Beş ölçümün üçünde iyi tanımlanmış bir bi-modal dağılım gözlemlenmiştir. Zaman-mekân kayıtlarında yalnızca zaman kayıtlarına göre (tek bir şamandıra) çok daha fazla rogue dalga gözlemlendiği görülmektedir. Seçilen her zaman-mekân alanında yapılan gözlemlerde en azından bir rogue dalga gözlemlenmiş olması da bu yargıyı desteklemektedir. Rogue dalgaların oluştuklarında dar alanda yoğunlaştıkları görülmektedir. Dolayısıyla tek bir noktada yakalanmaları çok daha güçtür. Daha önceki tek nokta çalışmaları, örneğin Christou ve çalışma arkadaşlarının 2014 yılında yaptıkları çalışmada, gözlemlenen her 33000 dalgadan birinin rogue dalga olduğunu öne sürmüşlerdir (Christou & Ewans, 2014). Dolayısıyla rogue dalgaların çok ender olduğunu belirtmişlerdir. Ancak Benetazzo ve çalışma arkadaşları, düzlemlerinde rogue dalgaların 500'de 1'e ulaşabilecek seviyelerde yaygın olduklarını göstermiştir (Benetazzo et al., 2017).

2.3.2. Fiber optikte solitonların gözlemlenmesi

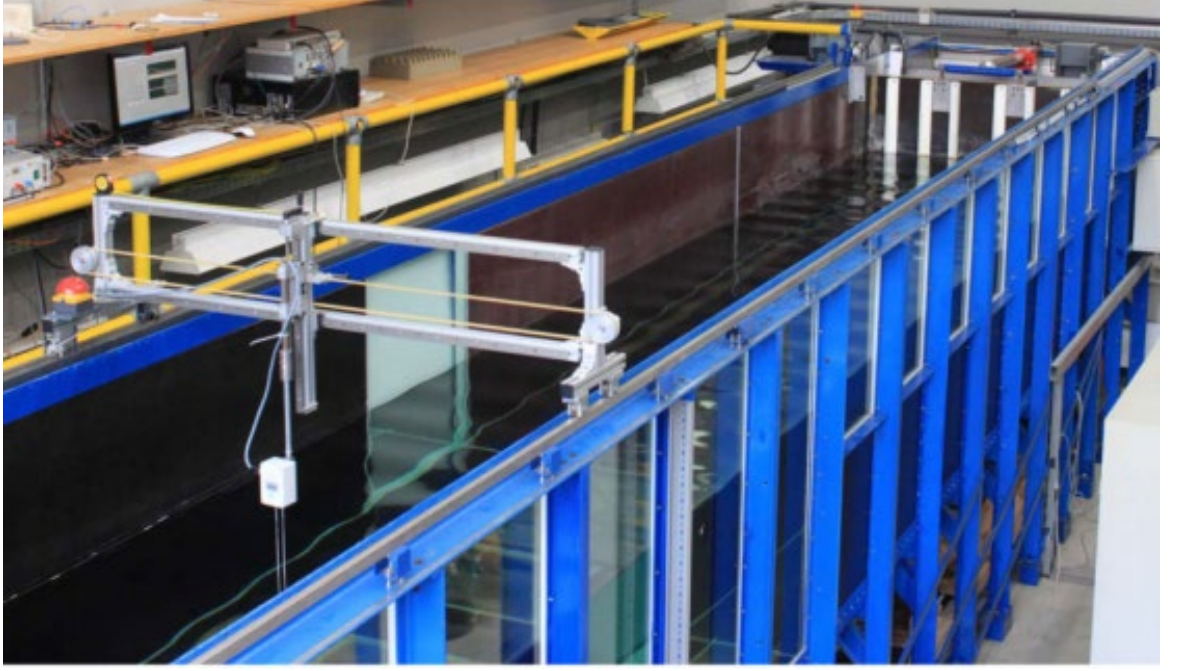
Rogue dalgaların prototipi olarak öne sürülen Peregrine solitonu rogue dalgalarını açıklamak için uygun mudur? 27 yıl boyunca yalnızca teorik bir varsayım olarak kalan Peregrine solitonu deneysel olarak ilk kez 2010 yılında fiber optik ortamda gözlemlenmiştir (Bertrand Kibler et al., 2010). Kibler ve ekibi optik fiberlerde geçici ve zamansal kısıtlamalı, ultra kısa titreşimler yaratarak deney yaptılar. Bu deneyde, harici kavite lazeri, optik spektrum çözümleyicisi, kararlı frekanslı optik geçitleme devresi, doğrusal olmayan fiber, erbiyum katkılı fiber yükselticisi kullanılmıştır. Deneysel sonuçlar analitik öngörülerle uyum göstermektedir (Bertrand Kibler et al., 2010). Peregrine solitonlarının rogue dalgalarını açıklamadaki başarısı, araştırmacıları başka fiziksel sistemlerde peregrine solitonlarını elde etme konusunda cesaretlendirmiştir.

Kibler ve ekibinin bir diğer çalışmasında, Kuznetsov-Ma (KM) solitonları optik fiberde ilk defa gözlenmiştir (B. Kibler et al., 2012). Sonlu zemindeki solitonların dinamiği ile lineer olmayan dinamiklerin Fermi-Pasta-Ulam tekrarlama olgusu arasında bağlantı kurulmuştur.

2013 yılında Frisquet ve ekibinin yaptığı çalışmada, optik fiberde iki Ahmediev breather çarpışması deneysel olarak ilk kez incelenmiştir (Frisquet, Kibler, & Millot, 2014). Bu çalışmada, breatherlar arasındaki hız ve faz farkını kontrol altında tutarak uygun başlangıç koşulları seçilmiştir. Böylelikle, herhangi bir noktada istenen bir çarpışma gözlenmiş ve rogue dalgası oluşmuştur. Oluşan rogue dalgasının genliğinin Peregrine solitonundan büyük olduğu bulunmuştur. Bu çalışma ile solitonlar arasındaki etkileşimler deneysel olarak incelenebilmiştir.

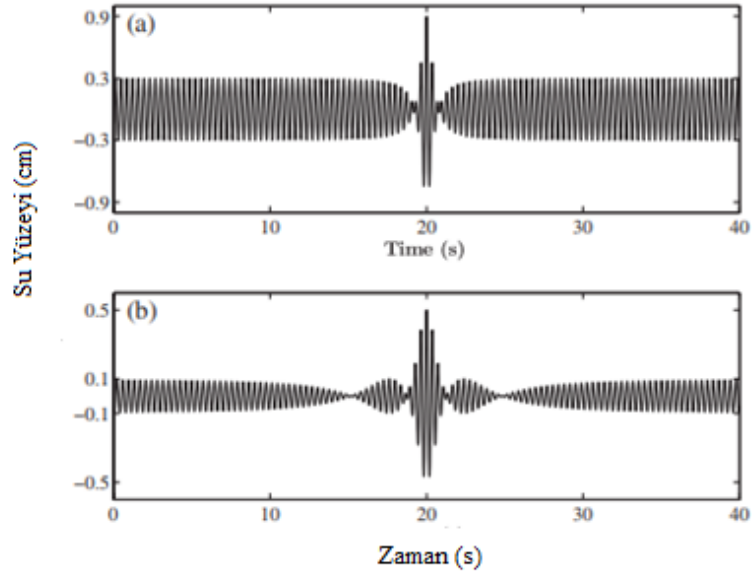
2.3.3. Su tankında rogue dalgasının gözlemlenmesi

Peregrine solitonlarının fiber optik ortamda elde edilmesi rogue dalgalarını anlamakta yararlıdır ama okyanusta oluşan rogue dalgalarını açıklayamamaktadır. Rogue dalgalarını su tankında gözlemlmek için 2011 yılında Chabchoub ve ekibi, 15m x 1.6m x 1.5 m boyutlarında bir su tankında, 1 metre derinlikte deneyler yaptılar (A Chabchoub, Hoffmann, & Akhmediev, 2011). Deneyin başarılı olabilmesi için deney parametrelerinin seçimi son derece önemlidir. Uzak-alan genliği, taşıyıcının dalga boyu gibi parametreler ne çok küçük ne de çok büyük seçilmelidir. Deney düzeneğinde rogue dalgasını oluşturmak için, hidrolik silindire bağlı kısa bir kürek kullanılmıştır. Bu küreğin karşı tarafına ise dalga yansımalarını önleyen dalga absorbe edici bir mekanizma yerleştirilmiştir. Bu deneyin gerçekleştirilmesindeki en büyük zorluk, kürek kinematikini doğru belirleyebilmektir. Peregrine solitonu çözümüne uygun başlangıç koşulları kullanılarak deney başlatılmış ve Peregrine solitonu gözlemlenmiştir. Deney sonunda elde edilen sonuçlarla teorik olarak elde edilen Peregrine solitonunun birbiri ile uyumlu olduğu görülmüştür. Deneyde gözlenen dalga genliği su derinliğinden ortalama 2.5 kat daha fazladır.



Şekil 2.5: Su dalga tankı fotoğrafı. Tankın en uç tarafına yerleştirilen hidrolik silindire bağlı kürek tarafından dalga oluşturulmaktadır. (A. Chabchoub, Hoffmann, Onorato, & Akhmediev, 2012)

Chabchoub ve ekibi bir başka deneyde, doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin Peregrine solitonu dışında yüksek mertebeden çözümlerini elde etmiştir (A. Chabchoub et al., 2012). Bu deneyde, genliği su derinliğinden 5 kat fazla olan rogue dalgaları gözlemlenmiştir. Deneyin gerçekleştirildiği dalga kanalı 15 metre uzunluğunda, derinliği ise 1 metredir. Tankın bir ucuna konumlandırılan küçük bir kürek başlangıç koşullarına uygun olarak titreştirilerek yüksek genlikli rogue dalgaları oluşturulmuştur. Oluşan dalgaların genliği bir kapasitans dalgaölçer tarafından ölçülmüştür. Enerjinin yitiminin engellenmesi deneyde sağlıklı sonuç alınması açısından önemlidir. Zira enerji yitimi gerçekleşirse su tankındaki soliton yayılması büyük ölçüde etkilenir. Deneyde enerji yitiminin önüne geçilmesi için su kanalının duvarları tam anlamıyla temizlenmiş ve kullanılan su filtrelenerek yabancı maddelerden arındırılmıştır.



Şekil 2.6: Uygun başlangıç koşulları seçildiğinde $x=0$ pozisyonunda maksimum genlik oluşmuştur. a) Birinci dereceden oransal çözüm b) İkinci dereceden oransal çözüm (Amin Chabchoub & Fink, 2013).

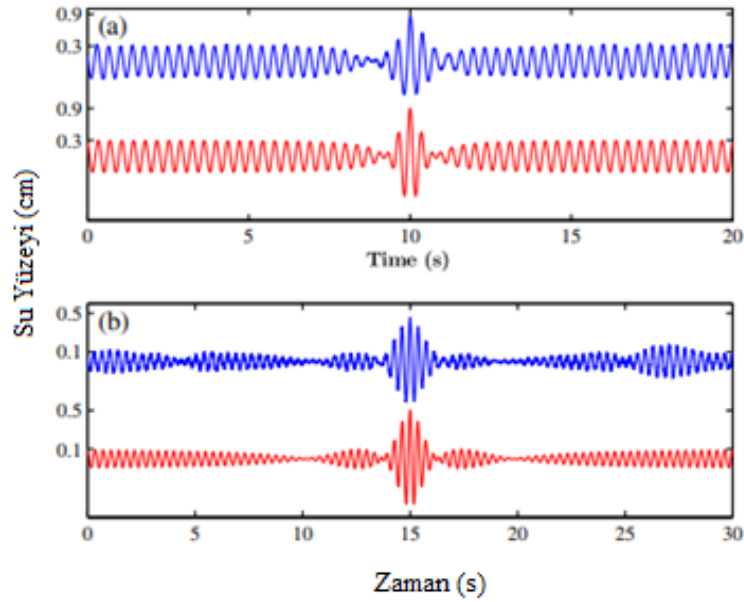
Yapılan deneyde oluşan yüksek genlikli dalganın çevre genliğine oranı araştırılmıştır. Şekil 2.6' da maksimum genliğin zamana bağlı grafiği görülmektedir. Şekil 2.6.a' da $t=20$ s civarında oluşan dalganın maksimum genliği 0.9 cm iken, yüzey genliği 0.3 cm olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, bu grafik Peregrine solitonuna aittir ve NLS denkleminin birinci dereceden oransal çözümüdür. Şekil 2.6.b' de ise yine $t=20$ s civarında 0.5 cm maksimum genliği olan bir dalga oluşmuştur. Yüzey genliği ise 0.1 cm olduğundan dolayı çevresinden 5 kat daha büyük bir dalganın oluşumu söz konusudur. Dolayısıyla bu grafik, NLS denkleminin ikinci dereceden oransal çözümüdür.

Başlangıç basamağında yüksek genlikli dalgalar doğrusal olmamaktadır. Dolayısıyla dalga kanalında dalga kırılması olmaması çok önemlidir. Dalga parametreleri bu durum göz önünde bulundurularak seçilmiştir. Bu parametreler genlik ve dikliktir. Birinci dereceden oransal çözüm için genlik 0.3 cm ve diklik 0.09, ikinci dereceden oransal çözüm için ise genlik 0.1 cm diklik 0.03 cm olarak belirlenmiştir. Diklik değerleri daha önce belirlenen dalga kırım sınırlarından yeterince uzaktır. Dalga sayısı ve dalga frekansı buradan hareketle belirlenebilir. Önemli bir varsayım ise bu genliklerde

kanatçıĝın tepki fonksiyonunun doĝrusal kabul edilmesidir. Chabchoub daha önceki çalışmasında bunu göstermiştir (A Chabchoub et al., 2012). Yukarıdaki şekil 2.6 da görüldüĝü üzere birinci dereceden oransal çözümün maksimum dalga genliĝi 0.9 cm olarak, ikinci dereceden oransal çözümünün maksimum dalga genliĝi ise 0.5 cm olarak ölçülmüştür.

Son basamakta ise zaman-çevrimli başlangıç koşullarında kanatçıĝın 9 metre uzağındaki (xM pozisyonu) ölçümlere bakılmıştır. Breather yüzey yüksekliĝi inşa edilmiş ve NLS çözümüyle karşılaştırılmıştır.

Şekil 2.7 de kırmızı profil teorik NLS dalga hesaplamasını, üstteki mavi profil ise dalga kaynağından 9 metre uzaktaki xM pozisyonunda yapılan deneysel ölçümleri göstermektedir. Şekilden de görülmektedir ki elde edilen sonuçlar NLS ile bağdaşmıştır. 0.9 cm ve 0.5 cm’lik maksimum genlikler ile genel profil deney sonuçlarında teorik beklentiler ile benzerdir.



Şekil 2.7: a) Birinci dereceden oransal çözümün kürek kinematiğinden 9 m uzaklığındaki bir noktada ölçümü (Mavi renkte olan) Aynı noktada teorik olarak NLS denklemiyle öngörülen dalga profili (Kırmızı renkte olan) b) İkinci dereceden oransal çözümün kürek kinematiğinden 9 m uzaklığındaki bir noktada ölçümü (Mavi renkte olan) Aynı noktada teorik olarak NLS denklemiyle öngörülen dalga profili (Kırmızı renkte olan). (Amin Chabchoub & Fink, 2013)

Chabcoub ve ekibinin elde etmiş olduğu deney sonuçları NLS denkleminin öngörülleri ile büyük ölçüde uyumludur. Teori ile deney arasındaki küçük farklılıklar Stokes etkileri, dalga yansıması ve dalga kırılması gibi etkilerden kaynaklanmaktadır.

2.3.4. Plazmada rogue dalgasının gözlenmesi

Çok sayıda araştırmacı plazmadaki rogue dalga oluşumu ile ilgilenmiştir. Örneğin, Moslem belirli başlangıç koşulları altında, elektron-pozitron plazmasında, doğrusal olmayan Langmuir rogue dalgalarını incelemiştir (Moslem, 2011). Araştırmacılar ayrıca toz-akustik dalga oluşumunu toz plazmasında incelemişlerdir. Tozlu plazma, toz parçacıkları, seyrek pozitif iyonlar ve elektronlardan oluşmaktadır (Moslem, Sabry, El-Labany, & Shukla, 2011). 2011’de, plazmada negatif iyonlu Peregrine solitonları gözlemlenmiştir. Bunun olabilmesi için, negatif iyonların yoğunluğu kritik değere eşit olması gerekir. Bu gözlemler, teori ve deneylerin uyum içerisinde olduğunu bir kez daha göstermesi ve doğrusal olmayan yaklaşımın rogue dalgalarını açıklamada uygun olduğunu göstermesi adına son derece önemlidir. Laboratuvarlarda rogue dalga oluşumu, doğrusal olmayan teoremin öngördüğü üzere, genliği gittikçe yükselen, yüksek dereceli çözümleri arasında sonsuz bir hiyerarşi olduğunun kanıtıdır.

2.4. Diğer Sistemlerde Rogue Dalgaları

2.4.1. Bose-Einstein yoğunlaşmasında rogue dalgaları

Rogue dalgaları Bose-Einstein yoğunlaşması (BEC) gibi ortamlarda da görülebilir. Bose ve Einstein’ın 1925 yılındaki öngörüsüne göre, sıcaklık yeterince düşük olduğunda, atomların büyük bir çoğunluğu en alt kuantum seviyesine düşer (Pethick & Smith, 2002). BEC, teorik varsayımının 70 sene sonrasında deneysel olarak gözlemlenmiştir (Anderson, Ensher, Matthews, Wieman, & Cornell, 1995) ve 2001’de Nobel fizik ödülü BEC’ in gözlemlenmesi deneyine verilmiştir. BEC denkleminin doğrusal olmayan doğasından dolayı, rogue dalgası BEC’ de uygun başlangıç koşulları altında ortaya çıkar (Cornell & Wieman, 2002). Rogue dalgalarını BEC içerisinde gözlemlenmenin, optik ve madde dalgalarına kıyasla avantajları vardır. Örneğin, BEC’ de doğrusal olmayan

etkileşim sabiti konum ve zamana göre deneysel olarak kolay bir şekilde ayarlanabilir (Pethick & Smith, 2002). BEC'yi tanımlayan 1D boyutsuz Gross-Pitaevskii denklemi,

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + g|\Psi|^2\Psi + i\gamma|\Psi|^4\Psi = 0 \quad (2.8)$$

Burada g doğrusal olmayan etkileşim sabitidir. γ sabiti ise, atomların yoğuşmadan dışarı kaçmasını temsil eder ve elastik olmayan üç-kütle etkileşimine karşılık gelmektedir. Burada tuzak potansiyeli dikkate alınmamıştır. Bu denklemin $\gamma=0$ ve $g=1$ için analitik bir çözümü vardır. Bu çözüm aşağıdaki gibidir

$$\Psi(x,t) = \rho(x,t) \exp[i\theta(x,t)] = \left[1 - 4\frac{1+2it}{1+4x^2+4t^2}\right] \exp[it] \quad (2.9)$$

Burada, ρ^2 yoğunluk ve θ fazdır. Deneylerde BEC içerisindeki atomları sistemde tutmak için bir tuzak potansiyeli kullanılır. Bu ise, yukarıdaki analitik çözümü işlevsiz kılar. Tuzak potansiyeli olması durumunda BEC'yi tanımlayan denklem aşağıdaki gibidir.

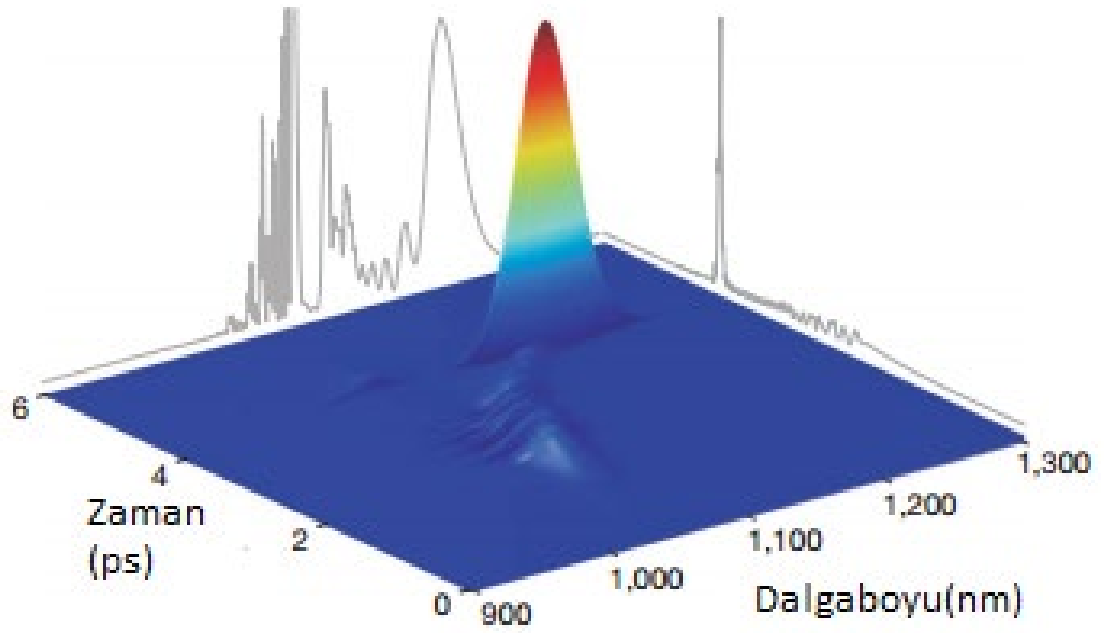
$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + |\Psi|^2\Psi - \frac{1}{2}\lambda_c^2 x^2\Psi = 0 \quad (2.10)$$

Burada λ_c bir sabittir. Parabolik tuzak potansiyeli altında BEC içerisindeki rogue dalgaları Referans (Pethick & Smith, 2002)'de incelenmiştir. Farklı tuzak potansiyeli altında BEC'de kontrol edilebilir rogue dalgaları oluşabileceği teorik olarak öngörülmüştür (Carretero-González et al., 2008; Stoof, Gubbels, & Dickerscheid, 2009). Dönüşüm formüllerini kullanan Li Wen ve ekibi, yukarıdaki denklemin tam çözümünü $\lambda_c \rightarrow i\lambda_c$ durumunda elde etmiştir (Wen et al., 2011). Bu çalışmada frekansı düşük, küçük bir periyodik başlangıç pertürbasyonun bile rogue dalganın yapısını önemli biçimde etkilediği gösterilmiştir.

2.4.2. Optikte rogue dalgası

Optik alanında rogue dalgaları araştırmacılar tarafından yoğun ilgi görmektedir. Optik sistemlerdeki ekstrem olaylar ile denizde oluşan rogue dalgaları arasında fiziksel benzerlikler bulunmaktadır. L şekilli olarak da bilinen “Heavy-tailed” istatistiği bu tarz, ilginç olaylar için de uygun olabilir (Kharif, C., Pelinovsky E., 2008). Bu dağılım modelleri, denizde oluşan rogue dalgalarının olasılığı için de uygulanabilir. İstatistiki benzerliklerinin yanında, optik tel içerisinde ilerleyen bir rogue dalgası, denizde oluşan rogue dalgasında olduğu gibi benzer şekilde doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ile uyum göstermektedir (Dudley, Dias, Erkintalo, & Genty, 2014). Aralarındaki fark ise, optikte rogue dalgalar yüksek deneysel kontrol sunarken ve sıkça gözlemlenebilirken, denizde oluşan rogue dalga ise nadir görülen bir olaydır.

Optik ortamda rogue dalgaları ilk kez 2007’de Solli tarafından gözlemlenmiştir (Solli, Ropers, Koonath, & Jalali, 2007). Bu çalışmada, optik rogue dalgalarını gözlemlmek ve nümerik olarak bir sistemde modellemek için doğrusal olmayan fiber optikte özel koşullar altında olasılıksal süper-süreklilik üretimi yapılmıştır. Süper-süreklilik kaynağı, ana osilatör, fiber amplifikatör ve doğrusal olmayan mikro yapıları fiberden oluşmuştur. Sabit lazer ile üretilen ışımlar doğrusal olmayan optik tellere gönderilerek, her atım ölçümlenmiştir. Ölçümlerin temel mantığı Fourier dönüşümüne dayanmaktadır. Doğrusal olmayan kristal fiberler, piko saniye atımlı yüksek genlikli dalgalar oluşturmıştır. Bu dalgalar, solitonlarla ilintilidir. Denizde oluşan rogue dalgalara benzer şekilde bu değişimler yoğunluğu yükseltmekte ve MI’dan etkilenmektedir (Solli et al., 2007). MI hassas bir şekilde başlangıç koşullarına bağlıdır. Bu da bize MI’ın rogue dalgaların hem denizde hem de optikte oluşmasında kilit konumda olduğunu göstermektedir (N. N. Akhmediev & Korneev, 1986). Bu çalışmayla araştırmacılara optik ortamda rogue dalgalarını inceleme kapısı açılmıştır.



Şekil 2.8: Optikte rogue dalgalarının zaman-dalga boyu ilişkisi(Solli et al., 2007)

Günümüze kadar, yalnızca piko saniyelik atımlı süper-süreklilikte değil, aynı zamanda sürekli basınç uygulanan süper-süreklilikte ve femto saniyelik atımlı süper-süreklilikte de çalışmalar yürütülmüştür. Peregrine solitonu deneysel olarak gözlemlendiği gibi (Bertrand Kibler et al., 2010), Kuznetsov- Ma breatherı da deneysel olarak gözlemlenmiştir (B. Kibler et al., 2012). Optik rogue dalgalar açısından bir diğer önemli çalışmada Raman yükselticileri hakkında yapılmıştır ve yüksek genlikler hakkında bilgi vermektedir (Hammani, Finot, Dudley, & Millot, 2008).

Soliton ve soliton türbülansı arasında olan çarpışmalar ile yüksek genlikli rogue dalgaları oluşturulmuştur. Optik rogue dalga, üçüncü dereceden bozuluma modellenen bir süper süreklilikte ya da Raman saçılması ile oluşturulabilmektedir (Genty et al., 2010).

2.4.3. Kılcal dalga içerisindeki rogue dalgaları

Hava ile etkileşim halinde olan su molekülleri sonlu bir yüzey gerilimine sahiptir (Perlin, 2000). Dalga boyu çok küçük olduğunda yüzey geriliminin etkileri de hesaba katılmalıdır. Dalga boyu 1.73 cm olduğunda dalga'nın grup hızı faz hızına eşit olur ve

minimum değerlerini alırlar. Eğer, dalga boyu 1.73 cm' den küçük ise, grup hızı faz hızından daha büyüktür. Bu tip dalga kılcık dalga olarak bilinir. Bu durumda, yüzey gerilimi yerçekimi ivmesini domine eder.

Kılcık rogue dalgalar için yapılan en önemli çalışma 2010'da Shats ve ekibi tarafından gerçekleştirilmiştir (Shats, Punzmann, & Xia, 2010). Bu çalışma, doğrusal olmayan ortamda kılcık rogue dalgaların ilk gözlenişidir. Kılcık dalgalar parametrik olarak uyarıldığında rogue dalgalarının oluşumu gözlenmiştir. Küçük boyutları sebebiyle, ideal şartların sağlanması son derece önemlidir. Deney ortamında çevredeki su derinliği, kılcık dalgaların yüksekliğinden daha fazla olmalıdır. Doğrusal olmayan su dalgalarında güçlü dört dalgalı etkileşimi varlığı kanıtlanmıştır. Böylelikle, MI' nin varlığının rogue dalgaları oluşumunda önemli rol oynadığı gösterilmiştir (Shats et al., 2010).

2.4.4. Finansal rogue dalgaları

Rogue dalgaların bir diğer kullanımı ise finans alanındadır (Yan, 2011; Zhen-Ya, 2010). Finansal rogue dalga konusu oldukça yeni bir konudur. Finansal marketler ile fizik temelli bu konu arasında benzerlik kurulmasına dayanır. Finansal krizler bu bağlamda rogue dalgalarıyla benzeştirilmektedir. 1997 Asya finansal krizi bu açıdan bir finansal rogue dalgası olarak ele alınabilir. Finansal rogue dalgası Black-Scholes denklemi ile çalışılır.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\xi^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (2.11)$$

Burada S, varlık fiyatları, C ise varlık değeri ve zamana bağlı olarak Avrupa satın alma opsiyonudur, ξ ise hisse dalgalanmasıdır ve r ise risksiz faiz oranını gösterir. Finansal rogue dalgası için bir başka model de Ivancevic modelidir (Zhen-Ya, 2010).

$$i \frac{\partial \Psi(S,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\xi \frac{\partial^2 \Psi(S,t)}{\partial S^2} - \beta |\Psi(S,t)|^2 \Psi(S,t) \quad (2.12)$$

Yan ve çalışma arkadaşları, Ivancevic modeli ile finansal rogue dalga durumunun çözülebileceğini öne sürmüştür (Zhen-Ya, 2010).



Şekil 2.9: 1929 yılında ABD’deki Dow Jones Borsası Grafiği (Tom McClellan, 2018)

Şekil 2.9, ABD’deki Dow borsasına aittir. Burada 1929 yılında borsa zirvesine ait veriler yer almaktadır. Petrol sondaj platform yakınlarında oluşan rogue dalgasına ait Maxwave projesinden elde edilen verilerle karşılaştırıldığında şekil 2.9 benzerlik göstermektedir (Tom McClellan, 2018). Dow borsasındaki iniş ve çıkışlar, tepe noktasının hemen yanında meydana gelen çukurla rogue dalga profiline son derece benzemektedir. Bu durum finansal rogue dalga kavramını ortaya çıkarmıştır.

Yukarıda görüldüğü gibi, rogue dalgaları optikten atomik sistemlere, denizlerden finans sistemine kadar pek çok alanda görülebilir. Bir başka örnek olarak 2008’de Touboul ve ekibi tarafından yapılan çalışmaya göre, rüzgâr varlığında da rogue dalgaları oluşabilir. Rüzgâr olan ve olmayan ortamlarda yapılan nümerik simülasyonlara göre, yüksek rüzgar hızının, rogue dalgalarının ömrünü arttırdığı ortaya konulmuştur (C. Kharif, Giovanangeli, Touboul, Grare, & Pelinovsky, 2008; Touboul, Kharif, Pelinovsky, & Giovanangeli, 2008).

3. SOLİTONLAR

Soliton, yayılırken şeklini koruyan lokalize olmuş doğrusal olmayan bir dalgadır. Solitonların çarpışması esnasında üst üste gelme kuralı işlemez ve her bir soliton kendi kimliklerini korurlar (Palais, 2000). Soliton dalgalarına ilişkin ilk gözlem John Scott-Russell tarafından yapılmıştır (J. S. Russell, 1895). Günümüzde ise, solitonların analitik çözümleri üzerine çok sayıda çalışma vardır ve yeni yaklaşımlar keşfedilmeye devam edilmektedir. Bunlardan bazıları, ters saçılım dönüşümü, Hirota metodu, Darboux dönüşümü, Bäcklund dönüşümü, Painlevé analizidir (J.C. Eilbeck, Roger K. Dodd, 1982; Wadati, 2001). Konunun teorik olarak incelenmesi ise Korteweg ve de Vries isimli iki teorik fizikçi tarafından gerçekleştirilmiştir (Korteweg & De Vries, 1895). 1955’ te Fermi, Pasta ve Ulam tek boyutlu doğrusal olmayan örgü noktalarında denge durumu hakkında çalışmalar gerçekleştirmiştir (Fermi, Pasta, & Ulam, 1955). 1965 yılında Zabusky ve Kruskal KdV denklemini doğrusal olmayan örgü noktaları için nümerik olarak çözerek sistemin ne kadar süre sonra başlangıç haline döndüğünü bulmaya çalışmışlardır (Zabusky & Kruskal, 1965).

Enerjisi zaman veya uzayda lokalize olmuş doğrusal olmayan dalgaları açıklamada, breather solitonu önemlidir. Özellikle, rogue dalgaların teorik olarak açıklanmasında, tek boyutlu doğrusal olmayan Schrödinger denkleminde faydalanılabilir (Kedziora, Ankiewicz, & Akhmediev, 2012). Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi, Benjamin-Feir kararsızlığının oluşmasını açıklayan ve breather solitonu olarak bilinen analitik çözümler sunar. Bu çözümlerden biri olan Peregrine solitonu, hem zaman hem de uzay boyutunda sınırlanmış rogue dalgalarıyla benzeşmektedir. Bu da rogue dalgaların breather tipi çözümle alakalı olabileceği fikrini doğurmaktadır (K. B. Dysthe & Trulsen, 1999).

Arka plan genliği sıfır olmayan solitonlar (SFB), sıfır olan solitonlara göre farklı bir dinamiğe sahiptir ve lokalize oluş biçimleri bakımından rogue dalgasının ilginç yapısını açıklamak için önemlidirler (Moffatt & Shuckburgh, 2011; Osborne, 2002; Shrira & Geogjaev, 2010; Faccio, Dudley, & Clerici, 2016). Tezin bu bölümünde SFB’ nin seçilmiş örnekleri olan Kuznetsov-Ma soliton, Peregrine soliton ve Akhmediev Breather çözümleri çalışılacaktır. Akhmediev breather ve Kuznetsov-Ma çözümünün limit durumları rasyonel çözümlerdir. Soliton oluşumu zaman veya uzaydan birisinde

sonsuzu yakınsarsa, Peregrine solitonu oluşmaktadır (Dai, Wang, & Wang, 2011). Rogue dalgaları bir kez oluştuktan sonra, birbiriyle çarpışarak etkileşime girebilirler.

Boyutsuz NLS denkleminin ters saçılım dönüşümü kullanılarak bulunan çözümü aşağıdaki gibidir (Dudley et al., 2014).

$$\Psi(x, t) = \left(1 + \frac{2(1-2a) \cosh(bt) + ib \sinh(bt)}{\sqrt{2a} \cos(wx) - \cosh(bt)} \right) \exp(it) \quad (3.1)$$

Burada $b = [8a(1-2a)]^{\frac{1}{2}}$, $w = 2(1-2a)^{\frac{1}{2}}$ ve a ise serbest parametredir. Burada a parametresi çözümü belirler. ω ve b değişim frekansı ve azalım oranını temsil eden gerçek değerlerdir.

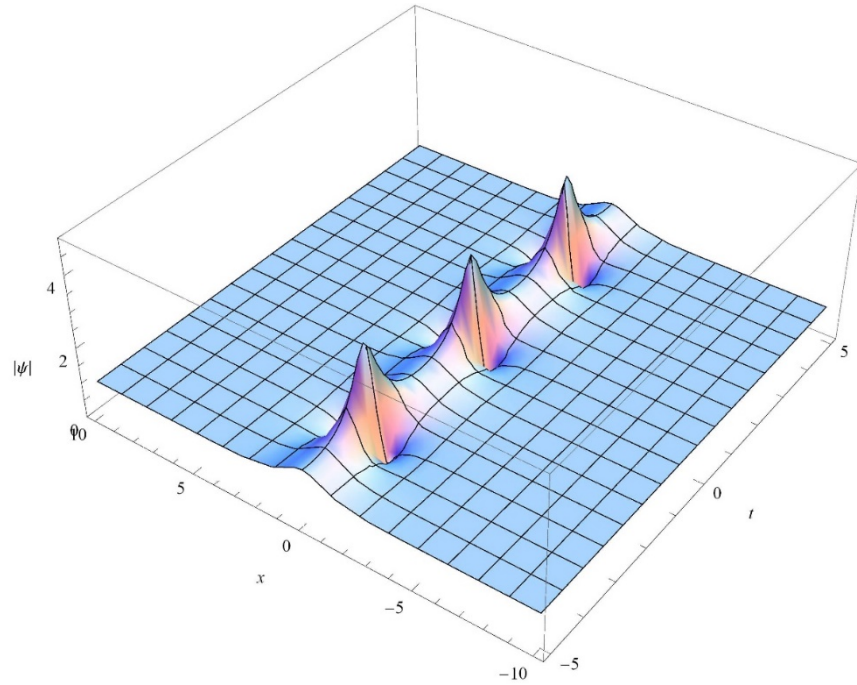
Şimdi, denklem (3.1) çözümünü a sabitinin bazı özel durumlarında analiz edelim. $a > \frac{1}{2}$ ise NLS denkleminin tam çözümü Kuznetsov-Ma solitonu, $a = \frac{1}{2}$ ise Peregrine solitonu, $a < \frac{1}{2}$ ise Akhmediev Breather olarak bilinir. Aşağıda bu çözümleri daha detaylı olarak inceleyeceğiz.

3.1. Kuznetsov-Ma Solitonu

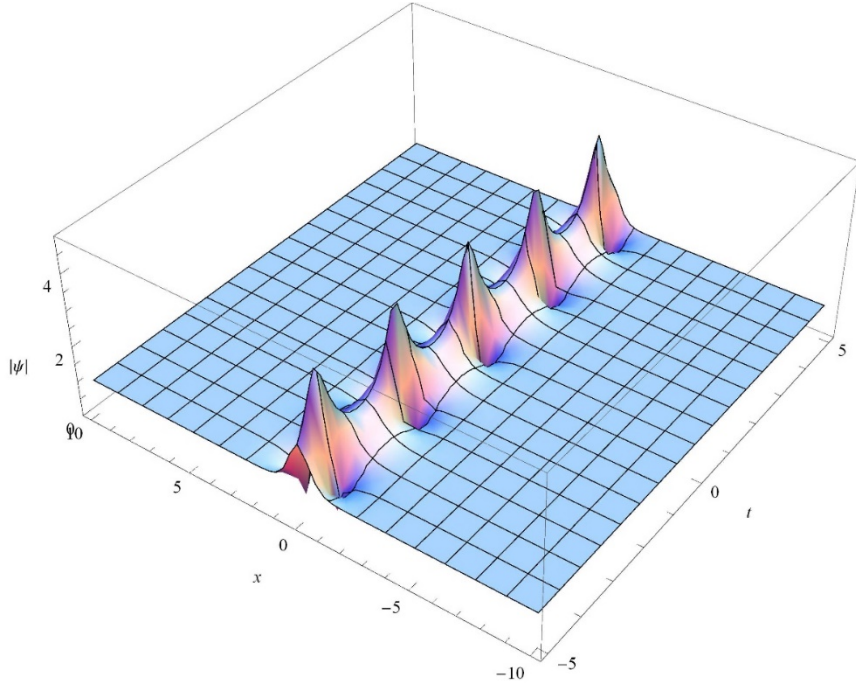
1971’ de Zakharov ve Shabat’ ın öncü çalışmalarıyla, doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin analitik soliton çözümleri araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiştir (Zakharovand & Shabat, 1972). Odaklanan doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin sönen-şişen (breather) tipi çözümü ise, ilk olarak Kuznetsov tarafından 1977’de (Kuznetsov, 1977), Ma tarafından da 1979’da bulunmuştur (Ma, 1979). Bu çalışmalarda $|x| \rightarrow \infty$ iken $\Psi(x, t) \rightarrow Ae^{i\omega t}$ sınır koşuluyla NLS denkleminin detaylı analizleri yapılmıştır. Denklemin çözümünde ters saçılım dönüşümü kullanılmıştır. Kuznetsov-Ma solitonu hesaplaması uzunca bir süre, yalnızca teorik bir çalışma olarak kalmıştır. Kuznetsov-Ma solitonu, fiber optik ortamda Kibler ve ekibi tarafından ilk defa 2012’de gözlemlenmiştir (B. Kibler et al., 2012). Deneyde, lazer diyotu, erbiyum katkılı fiber yükselticisi ve faz düzenleyicisi içeren bir yüksek tekrarlı ışık kaynağı

kullanılmıştır. Yapılan bu çalışmada, teorik öngörülerin deneysel verilerle uyumlu olduğu görülmüştür.

Denklem (3.1)'de $a > \frac{1}{2}$ olması durumunda NLS denkleminin tam çözümü Kuznetsov-Ma solitonu olduğunu söylemiştik. a değişkenine bağlı olarak ω ve b değerleri, sınırlar değiştikçe sanal olmaktadır. Şimdi a 'nın bazı özel değerleri için grafikleri çizelim.



Şekil 3.1: *KM solitonu çözümünde $a=0.8$ değeri için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği*



Şekil 3.2: KM solitonu çözümünde $a=1$ değeri için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği

Şekil 3.1 ve 3.2 KM solitonunu sonlu çevrede, sıfır dışı düzlemde göstermektedir. Şekillerden de görüleceği gibi, a değeri yükseldikçe, komşu tepeler arasındaki mesafe azalmakta, aynı zamanda çok sayıda dalga tepesi meydana gelmektedir. Dalga genliği ise değişmemektedir, dalganın genişliği azalmakta ve keskin tepe noktaları meydana gelmektedir. Dolayısı ile meydana gelen periyodik KM solitonu a değerine bağlıdır. $x=0$ konumu civarında oluşan KM solitonları yayılma doğrultusunda periyodik ilerlemeye sahiptir. Aynı zamanda, arka plan yoğunluğunun 1'e eşit olduğu görülür.

3.2. Peregrine Soliton

NLS denkleminin çözümü uzun yıllardır araştırmacıların ilgisini çekmektedir. NLS denkleminin birinci dereceden rasyonel çözümü İngiliz, uygulamalı matematikçi Howell Peregrine tarafından 1983'de sunulmuştur (Peregrine, 1983). Hem zaman hem de uzayda lokalize olmuş olan Peregrine solitonu, okyanusta oluşan rogue dalgaları için bir prototiptir (Kharif, C., Pelinovsky E., Slunyaev A., 2008). Peregrine öngörülleri, nümerik

simülasyonlarla doğrulandığı gibi (Tanaka, 1990), ilk olarak 2010’de deneysel olarak doğrusal olmayan fiber optikte (Bertrand Kibler et al., 2010), sonrasında 2011’de su dalgası tankında (A Chabchoub et al., 2011) ve yine 2011’de çok bileşenli bir plazmada negatif iyonlarda gözlemlenmiştir (Moslem et al., 2011).

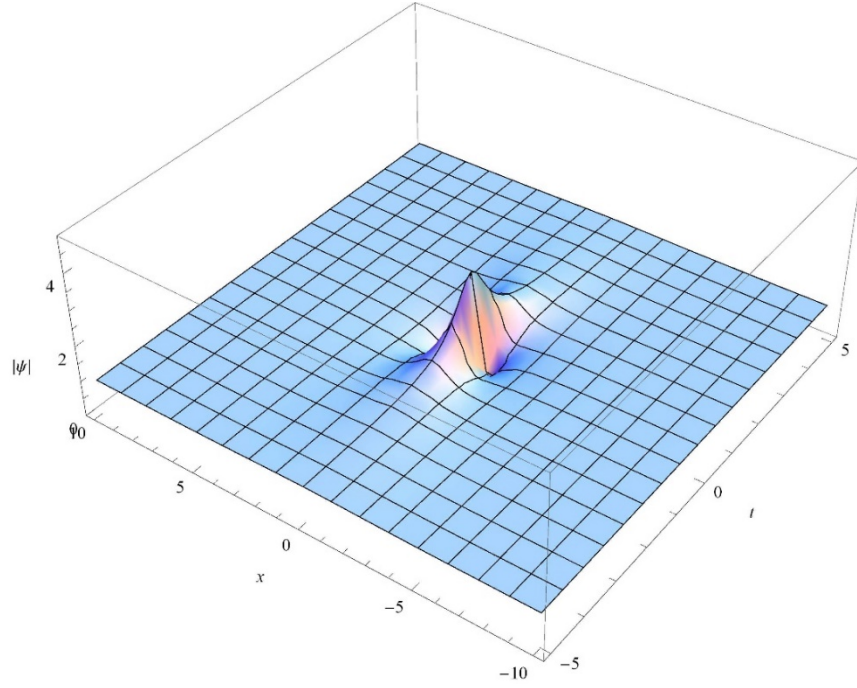
Peregrine solitonu, KM solitonu ve Akhmediev Breatherın limit durumudur (Shrira & Geogjaev, 2010). Uzay-zaman koordinatlarında çevre genliğinden yaklaşık 3 kat fazla tekil dalga şeklinde oluşması sonrasında ise hiç oluşmamış gibi kaybolması rogue dalgalarının prototipi olarak bilinmesini açıklar. Dolayısıyla analitik olarak incelenmelidir. Peregrine solitonunu elde etmek için denklem 3.1’de $a = \frac{1}{2}$ yazarsak

$$\Psi_1(x, t) = \left(1 - 4 \frac{1 + 2it}{1 + 4x^2 + 4t^2} \right) \exp(it) \quad (3.2)$$

Denklem (3.2), denklem (3.1)’ in özelleşmiş halidir ve Peregrine solitonunun analitik çözümü elde edilmiş olur. $t=0$ durumu için, başlangıç fonksiyonu,

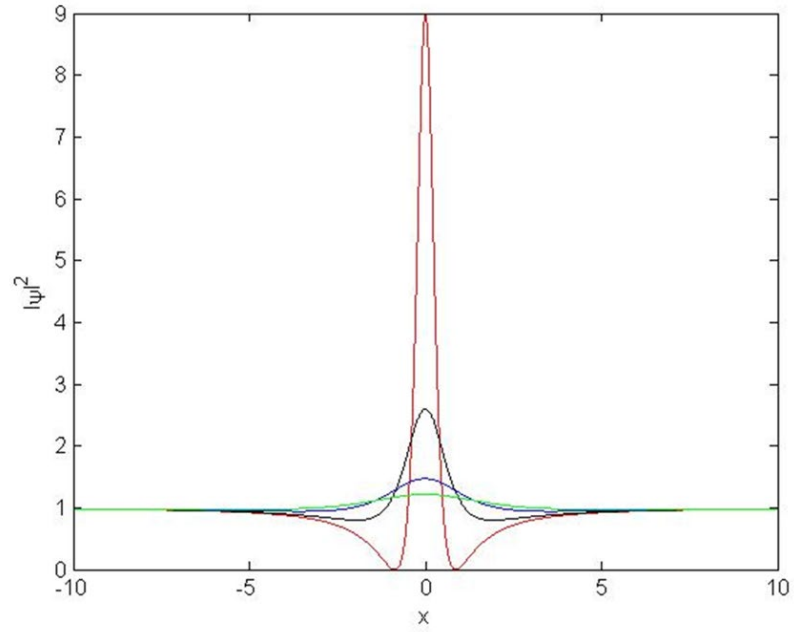
$$\Psi_1(x, 0) = \left(1 - 4 \frac{1}{1 + 4x^2} \right)$$

halini alır. Başlangıç fonksiyonunun ilk sabit terimi arka plan yoğunluğunu verir. Diğer terimi ise başlangıçtaki küçük bir pertürbasyonu tanımlar. Bu pertürbe terimi zamanla önem kazanır ve arka plan genliğinden yaklaşık 3 kat daha fazla olacak şekilde $t=0$ ve $x=0$ civarında evrilir. Uzun zaman sonra bu terim tünelleme etkisini bir sonucu olarak tekrar etkisini kaybetmeye başlar ve pertürbe edici terim sıfırlanır. Aşağıda bu durumu verilen değerler için çizdirelim.



Şekil 3.3: *Peregrine solitonu çözümünde $a=0.5$ değeri için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği*

Şekil 3.3’ de genliği 3 civarında bir Peregrine solitonu görülmektedir. Hem uzay hem de zaman boyutunda sınırlanmış $t=0$ anında, $x=0$ konumunda tekil bir dalga oluşmuştur. Arka plan yoğunluğu ise 1’ e eşittir. Şimdi de, bu solitonun zaman içerisinde genliğinin nasıl azaldığını bir grafik çizdirerek gösterelim.



Şekil 3.4: *Peregrine solitonu çözümü için dalga fonksiyonunun mutlak karesinin konuma göre farklı zaman değerleri için grafiğidir. $t=0$ anında $x=0$ noktasında oluşan pikin değeri zamanla azalmakta ve yüksek t değerlerinde bu pik kaybolmaktadır. Burada $t=0$:kırmızı, $t=1$:siyah, $t=2$:mavi, $t=3$:yeşil renkle gösterilmiştir.*

Burada solitonun yoğunluğu $x=0$ noktasında ve $t=0$ anında 9 değerine sahipken, zamanla genliğinin giderek azaldığını ve sonrasında ise, tamamen yok olduğunu görmekteyiz. Bu durum, rogue dalgası tanımına uymaktadır.

NLS denkleminin birinci dereceden oransal çözümü Peregrine solitonudur (Peregrine, 1983). Bu sebeple Ψ_1 olarak gösterilir. Akhmediev ve arkadaşları daha yüksek derece çözümlere ulaşmanın bir yolunu bulmuştur. Birinci seviyeden dördüncü seviyeye kadar, Darboux dönüşümü metodu kullanılarak, rasyonel NLS denkleminin çözümleri analitik olarak sunulmuştur (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Soto-Crespo, 2009). Analitik çözüm yöntemleri ayrıntılı olarak açıklanacaktır.

Peregrine soliton çözümünü kullanarak hiyerarşik bir yöntem ile yüksek dereceden çözümler de elde edilebilir (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Soto-Crespo, 2009; Ling, Guo, & Zhao, 2014). Darboux dönüşüm yöntemi (Tang, He, & Zhou, 2018; Xu,

He, & Wang, 2011), Hirota metodu (Tanoglu, 2006; Tao & He, 2012), bilineer metot (Guo, Boling; Tian, 2017) gibi yöntemler vardır. Darboux dönüşüm yöntemiyle mevcut çözümler kullanılarak daha yüksek dereceden çözümleri elde edilir (Matveev, V.B., Salle, 1991).

3.2.1. Lax çifti

Peter Lax tarafından 1968 yılında bulunmuştur (Lax, 1968). Korteweg-de Vries (KdV) denklemi, Sine-Gordon (SG) denklemi ve NLS denklemi gibi doğrusal olmayan integre edilebilir denklemler, iki tane doğrusal birinci dereceden adi diferansiyel biçiminde yazılırsa, bu lineer denklem çiftine lax çifti denir. Lax çifti iki operatör ile gösterilir. Bu yöntemle, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler lineer hale getirilirken, sistemin simetri özellikleri ve integre edilebilirliği korunmalıdır (M. Onorato, S. Residori, F. Baronio, 2016).

Genel anlamda doğrusal homojen t değişkenine bağlı adi diferansiyel denklem,

$$Q_t = M(t)Q \text{ ve } Q = Q(t) \quad (3.3)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada M , $N \times N$ lik bir matristir. $Q(t)$ ise N boyutlu vektör çözümüdür. Lax çifti formatında yazılan bir denklem aynı zamanda integre edilebilirdir, Uygunluk koşuluna göre,

$$Q_{tx} = Q_{xt} \quad (3.4)$$

olmalıdır. Buradan sıfır eğrilik koşulu,

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad (3.5)$$

olur. Burada $[U, V] = UV - VU$, ve U, V matrisleri Q matrisi cinsinden aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= U \cdot Q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= V \cdot Q \end{aligned} \quad (3.6)$$

$Q=0$ aşıkâr çözümü dışında bir çözüm elde edilebilir. Bu metot, doğrusal olmayan diferansiyel denklemi standart yöntemlerle çözülebilen doğrusal diferansiyel denklem haline getirdiği için avantajlıdır. Lax çifti aynı zamanda Darboux dönüşümünde de kullanılabilir. Lax çifti operatör biçiminde yazılacağı gibi, 1974 yılında Ablowitz-Kaup-Newell-Segur' un öngördüğü gibi matris formunda da yazılabilir. Bu yöntem AKNS metodu olarak bilinir. (Mark J. Ablowitz, Kaup, Newell, & Segur, 1974).

3.2.2. Darboux dönüşümü

Lax çiftinden faydalanarak doğrusal hale getirilen sistemin aşıkâr çözümü veya düz-dalga çözümü dışında kompleks çözümlerini elde etmek mümkündür. Darboux dönüşümü kullanılarak daha karmaşık çözümler de elde edilebilir (Guo, Boling; Tian, 2017). Peregrine solitonu, Kuznetsov- Ma solitonu ve Akhmediev Breatherın limit durumu olduğu göz önünde tutularak (Shrira & Geogjaev, 2010), birinci dereceden (Peregrine solitonu) ve daha yüksek dereceden oransal çözümler Darboux dönüşümü kullanılarak elde edilebilir (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Soto-Crespo, 2009).

Verilmiş başlangıç koşuluyla birlikte NLS denklemi ters saçılım dönüşümü kullanılarak çözülebilir. Zakharov ve Shabat tarafından 1972 yılında, NLS denklemi için Lax çifti iki operatörle ifade edilmiştir (Zakharovand & Shabat, 1972). Dolayısıyla, sistemin Lax çifti oluşturulabilir. Öncelikle, doğrusal özdeğer problemini dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} Q_x &= (\lambda U_0 + U_1)Q \\ Q_t &= (\lambda^2 U_0 + \lambda U_1 + U_2)Q \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burada, U_0 , U_1 ve U_2 kare matris ve Q sütun matrisinin iki bileşenli özfonksiyonu ve λ kompleks özdeğer olmak üzere,

$$\begin{aligned} U_0 &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} & U_1 &= \begin{bmatrix} 0 & i\Psi^* \\ i\Psi & 0 \end{bmatrix} \\ U_2 &= \begin{bmatrix} -i|\Psi|^2 & \Psi_x^* \\ -\Psi_x & i|\Psi|^2 \end{bmatrix} & Q &= \begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Soto-Crespo, 2009). Basit bir hesaplamadan sonra,

$$\mathbf{Q}_x = \lambda \begin{bmatrix} iq \\ -is \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i\Psi^* s \\ i\Psi q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_t = \lambda^2 \begin{bmatrix} iq \\ -is \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} i\Psi^* s \\ i\Psi q \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i|\Psi|^2 q + \Psi_x^* s \\ -\Psi_x q + i|\Psi|^2 s \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Dolayısıyla denklemler,

$$q_x = i\lambda q + i\Psi^* s \text{ ve } s_x = -i\lambda s + i\Psi q$$

$$q_t = i\lambda^2 q + \lambda i\Psi^* s - \frac{i}{2}|\Psi|^2 q + \frac{1}{2}\Psi_x^* s \text{ ve } s_t = -i\lambda^2 s + i\lambda\Psi q - \frac{1}{2}\Psi_x q + \frac{i}{2}|\Psi|^2 s \quad (3.10)$$

haline gelir.

$q=q(x,t)$ ve $s=s(x,t)$ olmak üzere doğrusal denklem bulunmalı ve sistem $\Psi = \Psi_0$ ile uyumlu halde olmalıdır. $q(x,t)$, $s(x,t)$ ve $\Psi(x,t)$ denklemlerini bulmak için, yukarıdaki fonksiyonları reel ve kompleks kısımlarına ayırmak gerekmektedir. Öncelikle birinci dereceden çözüm dikkate alınacaktır.

$$\Psi_1(x, t) = (\Psi_{1r}(x, t) + i\Psi_{1i}(x, t))e^{it}$$

$$q_1(x, t) = (q_{1r}(x, t) + iq_{1i}(x, t))e^{\frac{it}{2}}$$

$$s_1(x, t) = (s_{1r}(x, t) + is_{1i}(x, t))e^{\frac{it}{2}} \quad (3.11)$$

Burada kullanılan alt indisler birinci dereceden reel ve kompleks kısımları anlamına gelmektedir. Ayrıca, fonksiyonun başlangıç koşulunu kullanarak birinci dereceden oransal çözümü hesaplamak mümkündür. Türev alarak ve fonksiyonu reel ve kompleks kısımlarına ayırırsak

$$\frac{\partial}{\partial x} q_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(q_{1r}(x, t) + iq_{1i}(x, t))e^{\frac{it}{2}} \right]$$

$$= i(\Psi_{1r} - i\Psi_{1i})(s_{1r} + is_{1i}) + i\lambda(q_{1r} + iq_{1i}) \quad (3.12)$$

Dolayısıyla reel kısım aşağıdaki denklemi verir.

$$\frac{\partial}{\partial x} q_{1r}(x, t) = -t\Psi_{0r}s_{1i} + \Psi_{0i}s_{1r} - q_{1r} \quad (3.13)$$

Benzer şekilde kompleks kısmı ise

$$t \frac{\partial}{\partial x} q_{1i}(x, t) = \Psi_{0r}s_{1r} + t\Psi_{0i}s_{0i} - tq_{1i} \quad (3.14)$$

haline gelir. Aynı zamanda, t' ye göre türev alarak da çeşitli hesaplamalar yapabiliriz. Hesaplamaları daha basitleştirmek için, fonksiyonların simetri durumlarını kullanabiliriz.

$$\begin{aligned} s_{1r}(x, t) &= tq_{1i}(x, t) \\ ts_{1i}(x, t) &= q_{1r}(x, t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

En düşük dereceden çözümleri bulmak istendiğinden dolayı, $\Psi_0=1$ olarak alabiliriz. Dolayısıyla denklem (3.13) indirgenecek ve en düşük dereceden oransal çözüm elde edilecektir. Darboux dönüşümü kullanarak,

$$\Psi_1 = \Psi_0 - \frac{4is_1q_1^*}{n_1} \quad (3.16)$$

elde edilmiş olur. Burada $n_1 = 1 + 4x^2 + 4t^2$ olarak alabiliriz. Denklemden görüleceği üzere, $x \rightarrow \pm\infty$ giderken $\Psi_1 \rightarrow -1$ değerine eşit olur. n_1 değeri q_1 ve s_1 değerlerine bağlı olduğundan, ψ_1 değerini kolayca bulunabilir. ψ_1 değeri,

$$\Psi_1 = 1 - 4 \frac{1 + 2it}{1 + 4x^2 + 4t^2} e^{it} \quad (3.17)$$

olarak bulunur. Bu denklem Peregrine solitonu olarak bilinir ve Darboux dönüşümü kullanarak daha yüksek dereceden çözümler elde edilebilir (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Soto-Crespo, 2009; N. Akhmediev, Ankiewicz, & Taki, 2009; Tang et al., 2018).

Bununla birlikte, Peregrine solitonlarıyla karşılaştırmak üzere, ikinci ve üçüncü seviye oransal çözümleri gösterelim.

3.2.3. İkinci dereceden oransal çözüm

2009 yılında N. Akhmediev ve arkadaşlarının yapmış oldukları çalışmada, Darboux dönüşümü kullanılarak rogue dalgalarının daha yüksek dereceden oransal çözümleri bulunmuştur (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Soto-Crespo, 2009). Yukarıda birinci dereceden oransal çözüm analitik olarak elde edilmiştir. Elde edilen çözümden faydalanarak ikinci dereceden oransal çözüm elde edebilmek mümkündür.

Yüksek dereceden çözümler için, en genel form aşağıdaki gibidir.

$$\Psi_j(x,t) = \left[(-1)^j + \frac{G_j(x,t) + itH_j(x,t)}{D_j(x,t)} \right] e^{it} \quad (3.18)$$

Burada G,H ve D değerleri x ve t değişkenlerine bağlı polinomlardır. Görüldüğü gibi bir üst dereceden oransal çözüme, bir alt dereceden oransal çözümle ulaşabiliriz. Burada önemli olan, özdeğerlerin birbirinden farklı olması gerektiğidir.

Ψ_j için Darboux dönüşümü

$$\Psi_j = \Psi_{j-1} - \frac{4is_j q_j^*}{n_j} \quad (3.19)$$

ile verilir. Ψ_1 değeri yukarıda bulunduğundan, Ψ_2 değerini bulmak için q_2 ve s_2 değerleri bulunur.

$$q_{2r} = \frac{b(x) + g(t) + p_1 x t^2}{D_1} \quad (3.20)$$

Burada p_1 sabit ve b(x) ve g(t) ise, 4. dereceden polinomlardır. Ayrıca, D_1 bu polinomu bölen sabitse,

$$q_{2i} = \frac{h(x) + p_2 t^2 + p_3 x t^2}{D_1} \quad (3.21)$$

olarak verilir. p_2 ve p_3 değerleri sabit, h(x) değeri ise 3. dereceden polinomdur. Değerler yerine konulup, katsayılar eşitlenirse,

$$q_{2r} = \frac{-\frac{3}{8} + \frac{3}{2}x + 2x^3 - 2x^4 + 3t^2 + 2t^4 + 6xt^2}{D_1\sqrt{3}}$$

$$q_{2i} = \frac{3 + 3x - 4x^3 + 4t^2 - 4xt^2}{D_1\sqrt{3}} \quad (3.22)$$

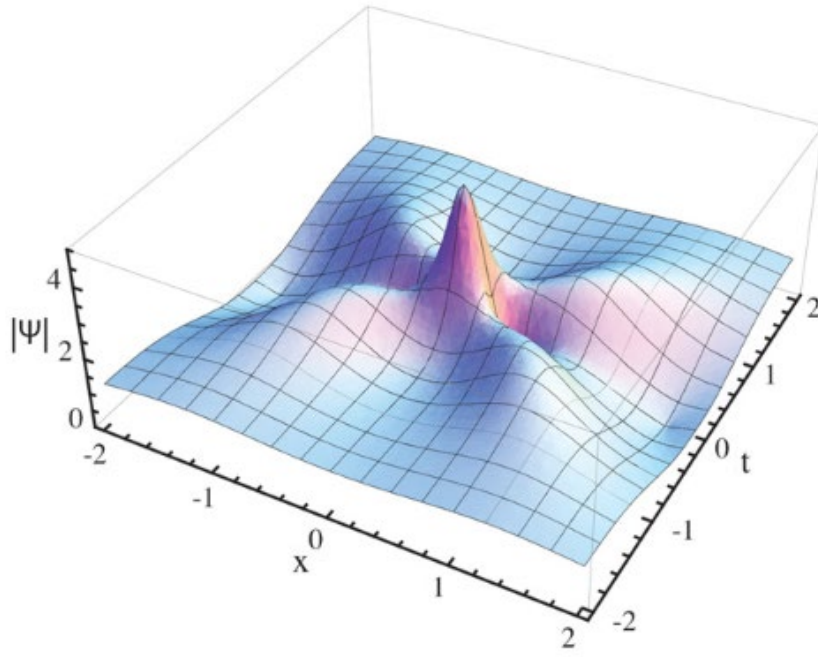
s_{2r} ve s_{2i} değerleri ise Darboux dönüşümünde anlatılan ayna simetrisi koşulu kullanarak bulunabilir. Bu durumda, en genel form olan denklem 3.18 kullanılarak

$$G_2 = \frac{3}{8} - 3x^2 - 2x^4 - 9t^2 - 10t^4 - 12x^2t^2$$

$$H_2 = \frac{15}{4} + 6x^2 - 4x^4 - 2t^2 - 4t^4 - 8x^2t^2$$

$$D_2 = \frac{1}{8} \left[\frac{3}{4} + 9x^2 + 4x^4 + \frac{16}{3}x^6 + 33t^2 + 36t^4 + \frac{16}{3}t^6 - 24x^2t^2 + 16x^4t^2 + 16x^2t^4 \right] \quad (3.23)$$

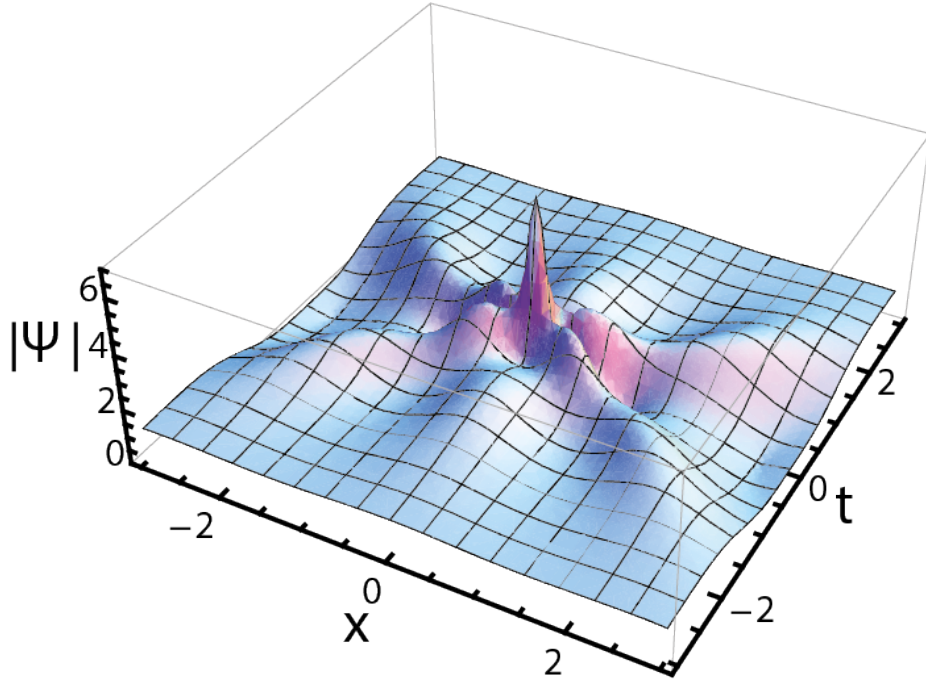
olarak bulunmuştur (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Soto-Crespo, 2009). Bu bilgilerden yola çıkarak ikinci dereceden oransal çözüm için çözüm yapılırsa, şekildeki gibi rogue dalgası olduğu gözlenir.



Şekil 3.5: İkinci dereceden oransal çözüm için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği

3.2.4. Yüksek Dereceden Oransal Çözüm

Yukarıda bahsettiğimiz Darboux dönüşümü ile sadece ikinci dereceden oransal çözüm değil, daha üst mertebeden çözümler de bulunabilir (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Soto-Crespo, 2009). Mertebe arttıkça, hesaplama zorlaşır. Rogue dalgası da daha karmaşık davranış gösterir. Üçüncü dereceden oransal çözüm, referans (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Soto-Crespo, 2009)' te elde edilmiştir. Aşağıda üçüncü dereceden dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği gösterilmiştir.



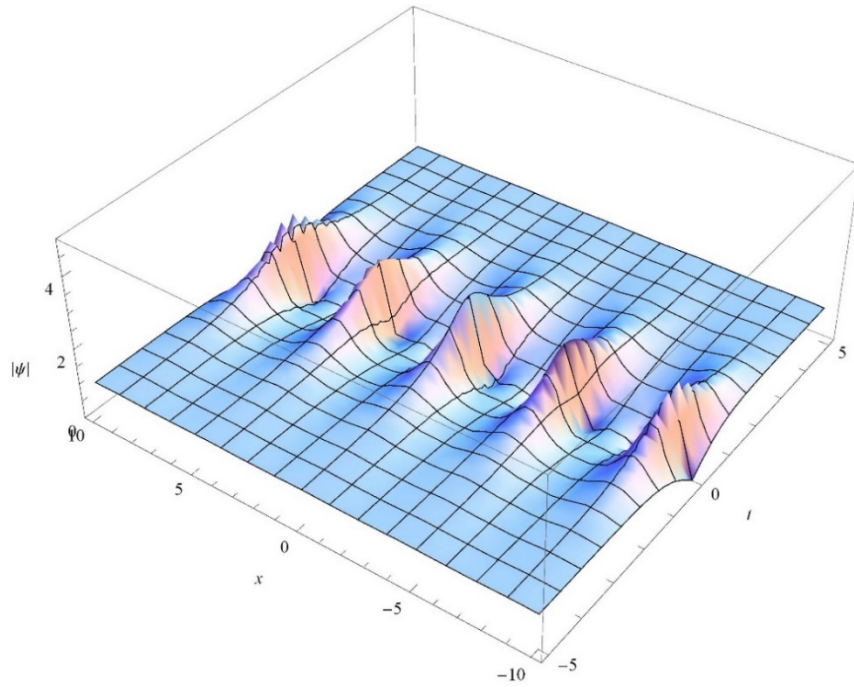
Şekil 3.6: Üçüncü dereceden oransal çözüm için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği

Yukarıdaki şekillerden de görüleceği üzere oransal çözümlerde derece arttıkça oluşan rogue dalgasının genliği de artmaktadır. Elbette bu artışın belirli bir sistematiği vardır. Maksimum genlik, n çözüm derecesi iken, $|\Psi_N|_{MAX} = 2n + 1$ şeklinde ifade edilebilir. $n=1$ iken, $|\Psi_1| = 3$, $n=2$ iken, $|\Psi_2| = 5$ ve $n=3$ iken de $|\Psi_3| = 7$ değerine sahiptir. Ayrıca, mertebe artmasıyla birlikte oluşan daha yüksek genlikli tekil dalgaların civar bölgelerinde de dalgalanmaların arttığını gözlemlemekteyiz.

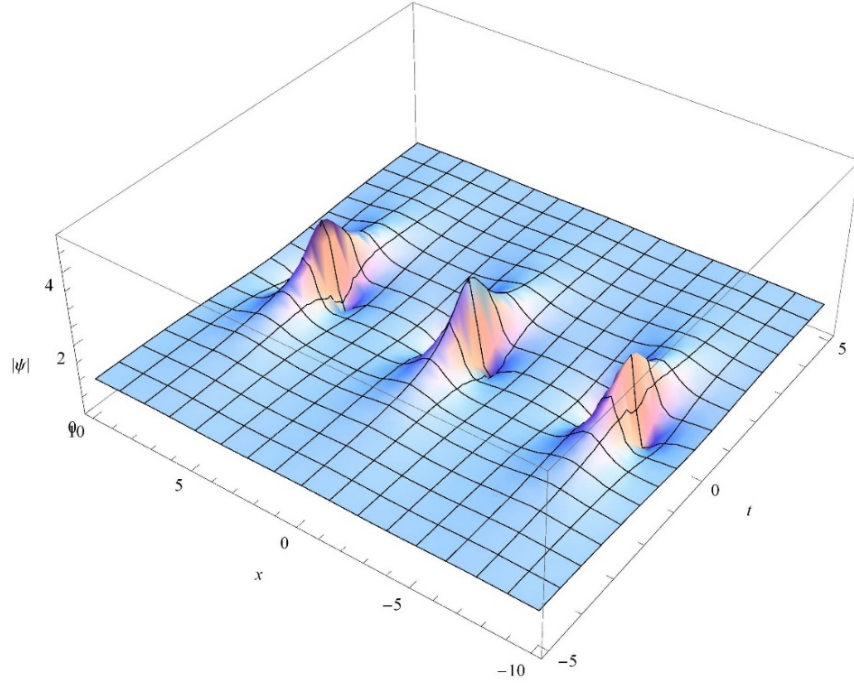
3.3. Akhmediev Breather

1985 yılında, NLSE'nin analitik bir çözümü Nail Akhmediev tarafından elde edilmiştir ve bu çalışma Akhmediev Breather olarak bilinir (N. N. Akhmediev & Korneev, 1986). $b>0$ iken, $0<a< \frac{1}{2}$ değerleri için, denklem (3.1) Akhmediev breather tanımlar.

Şekil 3.7 ve şekil 3.8’ de, $a=0.25$ ve $a=0.4$ değerleri için Akhmediev Breather çözümleri görülebilir. Şekillerden de görülebileceği gibi bu dalgalar KM solitonlarının aksine x ekseninde periyodiktir. Başlangıçtaki küçük bir değişimsel kararsızlık x ekseninde periyodik olacak şekilde belirli bir t değerinde yüksek genlikli dalgalar oluşturur. Sonra bu dalgalar tekrar kaybolur. a değeri arttıkça iki pik arası uzaklık artar ve daha az sayıda dalga tepesi meydana gelir. Maksimum genlik a parametresiyle değişir. Örneğin $a=0.25$ iken maksimum genlik 2.41 değerine eşittir (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Taki, 2009) . Arka plan yoğunluğu ise yine 1’e eşittir.



Şekil 3.7: Akhmediev Breather çözümünde $a=0.25$ değeri için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği



Şekil 3.8: Akhmediev Breather çözümünde $a=0.4$ değeri için dalga fonksiyonunun mutlak değerinin konum-zaman grafiği

Bendahmane ve ekibi AB'yi fiber optikte deneysel olarak elde etmişlerdir (Bendahmane et al., 2014). AB' in dispersiyon ve doğrusal olmayan durumdan etkilendiği bilinmektedir (Dai, Wang, Tian, & Zhang, 2012; Tian, Yang, Dai, & Zhang, 2011). Bu çalışmada ise, değişken dispersiyon varlığında optik fiberde AB' lerin deneysel olarak evrimleri gözlenmiştir. Bulunan sonuçlar nümerik hesaplarla uyumludur.

Frisquet ve ekibi, deneysel olarak ilk kez AB solitonlarının çarpışmalarını gözlemişlerdir (Frisquet et al., 2014). Doğrusal olmayan fiber optikte ilerlemekte olan iki AB' in düzlemdeki herhangi bir noktada çarpışmaları gözlenmiştir. Özel başlangıç koşullarında oluşan bu dalgaların genliği çarpışma esnasında Peregrine solitonunun genliğinden daha büyük olduğu gözlenmiştir. Elde edilen sonuçlar analitik olarak hesaplanan Darboux dönüşüm metodunda olduğu gibidir. Dalgaların hız ve faz farkını kontrol altında tutarak böyle büyük genlikli bir dalganın oluşmasının önlenileceği gösterilmiştir.

Chabchoub ve ekibi, su dalgası ortamında deneysel olarak yüksek dereceden AB elde etmişlerdir (Amin Chabchoub, Waseda, Kibler, & Akhmediev, 2017). Deney sonuçları, NLS ve modifiye edilmiş NLS denklemleriyle elde edilen teorik öngörülerle uyum içerisinde dir.

4. NÜMERİK ÇÖZÜM

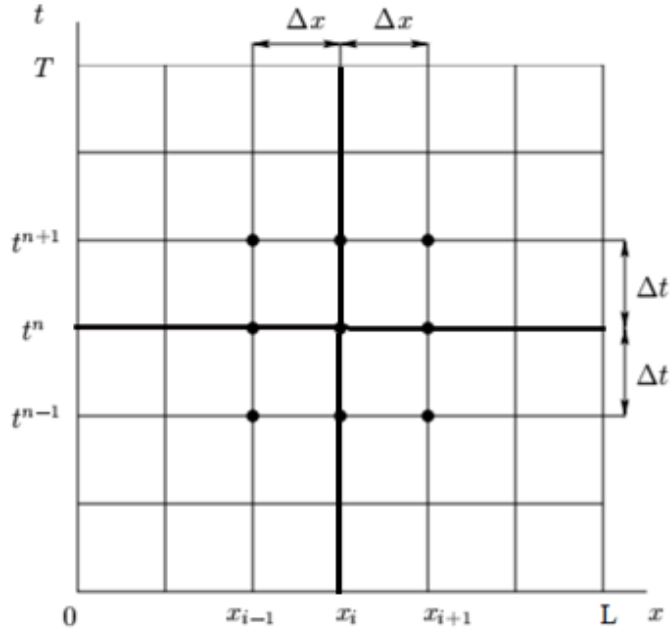
Bu bölümde, NLS denklemi için nümerik çözüm yöntemlerini inceleyeceğiz ve dalga kılavuzları için nümerik yöntemlerle rogue dalga çözümlerini bulacağız. Son olarak da kesikli NLS denklemi için nümerik çözümler yapacağız.

NLS denkleminin çözümü için iki farklı nümerik yöntem kullanılabilir (Lindfield & Penny, 2012). Bunlardan biri sonlu farklar yöntemi (Thomas, 1995) ve diğeri ise fonksiyon yaklaşımlarıdır (Meinardus, 1967). Sonlu farklar yöntemi adi diferansiyel denklemlerin çözümünde uzun yıllardır kullanılan basit bir nümerik yöntemdir (Fochesato, Grilli, & Dias, 2007). Bu yöntemle göre, diferansiyel denklemdaki türevler sonlu fark yaklaşımlarıyla gösterilir (Thomas, 1995). Analitik çözüm yöntemi ile nümerik çözüm yöntemi arasındaki hata, ayrıklaştırma hatası veya kesme hatası olarak adlandırılır. Taylor serisinin belirli bir kısımdan sonrası ihmal edildiği için ortaya çıkmıştır. Sonlu farklar yönteminde denklemi zaman ve konum olmak üzere iki doğrultuda belirli aralıklarla bölerek dikdörtgen şeklindeki bir ızgara oluştururuz. Buradaki en temel amaç, doğruların kesişim noktaları arasındaki bağıntılarla bir sonraki bağıntıyı bulabilmektir.

Kendi kendine odaklanan 1D boyutsuz NLS denklemini $0 \leq x \leq L$ aralığında ve $\Psi(x,0) = \Psi_0$ başlangıç koşulu ile çözelim. NLS denklemi iki bağımsız değişkene sahiptir. $0 \leq x \leq L$ aralığını N eşit parçaya, $0 \leq t \leq T$ zaman aralığını da M eşit parçaya bölelim. Bu durumda adım aralıkları,

$$h = \frac{L}{N}; k = \frac{T}{M} \quad (4.1)$$

Burada h ve k ; konum ve zamandaki adım aralıklarıdır. Dikdörtgen şeklindeki ızgaranın her bir bağlantı noktasındaki dalga fonksiyonu



Şekil 4.1: Bağımsız değişkenler x ve t eksenlerinde eşit aralıklarla ızgaralama

$$\Psi_j^n = \Psi(x_j, t^n) \quad (4.2)$$

ile gösterelim. Buna göre, x_j, t^n noktaları civarında Ψ_{j+1}^n ve Ψ_{j-1}^n değerleri aşağıdaki gibi verilir

$$\begin{aligned} \Psi_{j+1}^n &= \Psi_j^n + \Delta x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + R_4 \\ \Psi_{j-1}^n &= \Psi_j^n - \Delta x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + R_4 \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak yazılır. Bu denklemlerin kısmi türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\Psi_{j+1}^n - \Psi_j^n}{h} + O(h)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n}{k} + O(k)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\Psi_{j+1}^n - 2\Psi_j^n + \Psi_{j-1}^n}{h^2} + O(h^2) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\Psi_j^{n+1} - 2\Psi_j^n + \Psi_j^{n-1}}{k^2} + O(k^2)\end{aligned}\quad (4.4)$$

Burada, ileri doğru sonlu fark yöntemi uygulanmıştır. $O(h), O(k), O(h^2), O(k^2)$ terimleri ise hata mertebesini göstermektedir. Yukarıdaki bağıntıları NLS denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki kesikli denklemi elde ederiz (Canale & Chapra, 1991).

$$i \frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n}{k} + \frac{1}{2} \frac{\Psi_{j+1}^n - 2\Psi_j^n + \Psi_{j-1}^n}{h^2} + |\Psi_j^n|^2 \Psi_j^n = 0 \quad (4.5)$$

Burada j değerleri $j = 1, 2, 3, \dots, N$ olarak alınabilir. Bu denklemden görülebileceği üzere sonlu farklar yöntemine göre, Ψ_j^{n+1} teriminin Ψ_{j+1}^n , Ψ_j^n , Ψ_{j-1}^n terimlerine bağlı olduğunu söyleyebiliriz. Bu denklemi verilen başlangıç koşullarında MATLAB ve Mathematica programları yardımı ile çözeceğiz. Bu çalışmamızda periyodik sınır koşullarını kullanacağız.

$$\begin{aligned}\Psi_{N+1,t} &= \Psi_{1,t} \\ \Psi_{N,t} &= \Psi_{0,t}\end{aligned}\quad (4.6)$$

(4.5) denklemini matris şeklinde yazıp bilgisayar ortamında çözebiliriz. Örnek olarak, (4.5) denkleminin periyodik sınır koşulları altında matris gösterimini $j=1, 2, 3, 4, 5$ için yazalım.

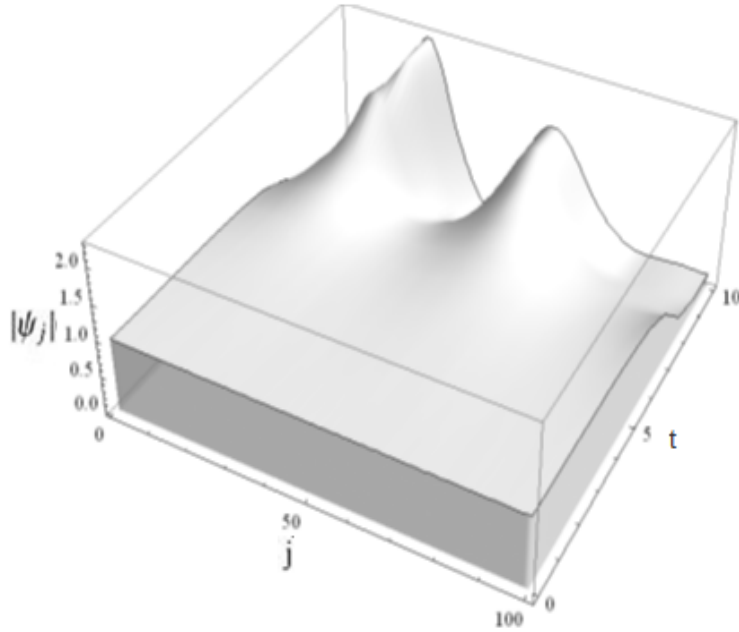
$$\begin{bmatrix} \Psi_1^n \\ \Psi_2^n \\ \Psi_3^n \\ \Psi_4^n \\ \Psi_5^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ik}{h^2} & ik|\Psi_1^0|^2 - \frac{ik}{h^2} - i & \frac{ik}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ik}{h^2} & ik|\Psi_2^0|^2 - \frac{ik}{h^2} - i & \frac{ik}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ik}{h^2} & ik|\Psi_3^0|^2 - \frac{ik}{h^2} - i & \frac{ik}{h^2} \\ \frac{ik}{h^2} & 0 & 0 & \frac{ik}{h^2} & ik|\Psi_4^0|^2 - \frac{ik}{h^2} - i \\ ik|\Psi_0^0|^2 - \frac{ik}{h^2} - i & \frac{ik}{h^2} & 0 & 0 & \frac{ik}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_0^{n-1} \\ \Psi_1^{n-1} \\ \Psi_2^{n-1} \\ \Psi_3^{n-1} \\ \Psi_4^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Görüleceği gibi matris gösterimi üçlü bant matris (tridiagonal) formundadır. MATLAB da bu bant matrisi çözebiliriz (Chapra, 2011; Leclaire, El-hachem, Reggio, Gaiceanu, & Chin, n.d.).

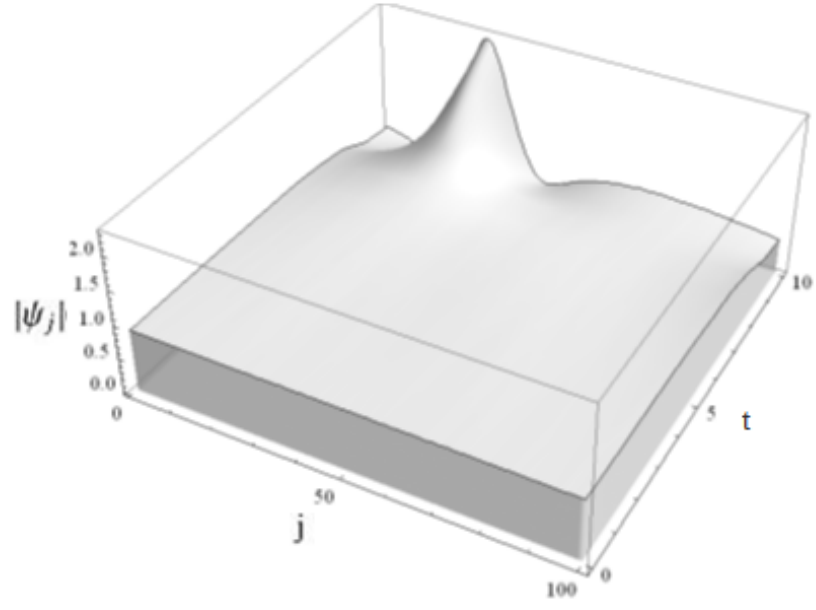
Rogue dalgalarının nümerik çözümü çok hassas bir şekilde başlangıç fonksiyonuna bağlıdır. Başlangıç koşulundaki çok ufak değişimler bile rogue dalgalarının yapısını derinden etkiler. Bu durumu görmek için belirli başlangıç koşulunda küçük bir parametrede ufak değişiklikler yapalım. Bunun için (4.5) denklemi periyodik sınır koşulları altında çözdürülmelidir. Başlangıç koşulunu aşağıdaki gibi ele alalım.

$$\Psi_j(t=0) = A \exp(-iA^2L) \left(1 - \frac{4(1-2iA^2L)}{1+2A^2j^2+4A^4L^2} \right) \quad (4.8)$$

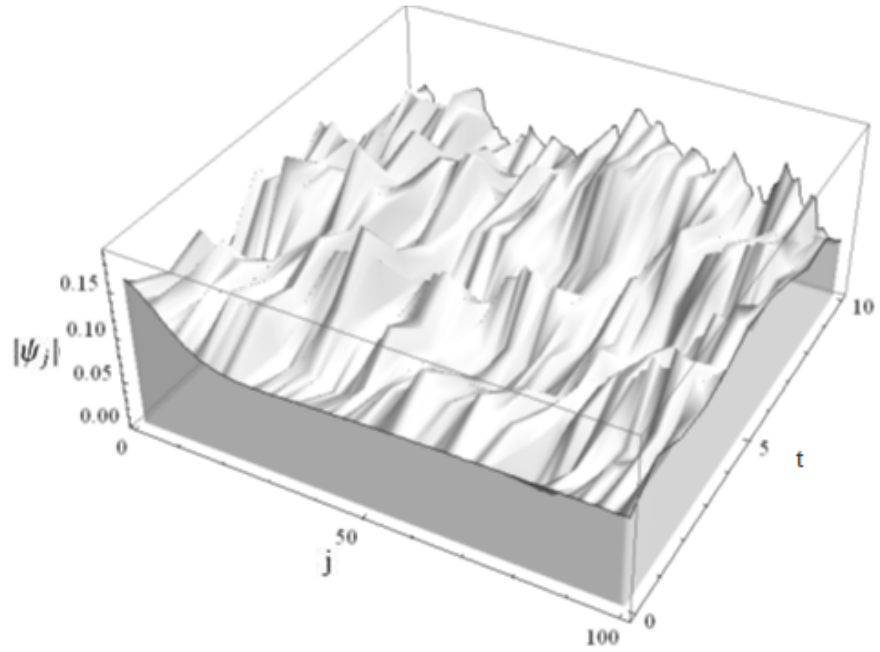
Burada A küçük bir parametre, L ise bir dizide her dalga kılavuzunun uzunluğudur.



Şekil: 4.2: $N=100$, $A=1$ ve $L=100$ değerleri için dalga fonksiyonu genliğinin mutlak değerinin konum-zaman grafiği



Şekil 4.3: $N=100$, $A=0.9$ ve $L=100$ değerleri dalga fonksiyonu genliğinin mutlak değerinin konum-zaman grafiği



Şekil 4.4: $N=100$, $A=0.1$ ve $L=100$ değerleri için dalga fonksiyonu genliğinin mutlak değerinin konum-zaman grafiği

Görülebileceği gibi, rogue dalgaları hassas bir şekilde başlangıç fonksiyonuna bağlıdır ve bu başlangıç fonksiyonu periyodik sınır şartlarını da sağlar. Şekil 4.2, 4.3 ve 4.4' te aynı başlangıç fonksiyonunda farklı A değerleri için çözüm yapılmıştır. Şekiller, küçük bir pertürbasyonun zamanla yüksek genlikli bir rogue dalgasına dönüşeceğini açıklar. Dolayısıyla nümerik hesaplamalarda uygun sonuç alabilmek için başlangıç koşulu dikkatle seçilmelidir.

4.1. Kesikli Doğrusal Olmayan Schrödinger Denklemi

Kesikli doğrusal olmayan Schrödinger (DNLS) denklemi, doğrusal olmayan örgü dinamik modelleri için en temel denklemlerden biridir ve DNLS denkleminin geniş ölçekte uygulama alanı vardır (M J Ablowitz, Prinari, & Trubatch, 2004). Optik örgüler, dalga kılavuzları gibi fiziksel sistemlerdeki rogue dalgalarının anlaşılmasında DNLS denklemi kullanılır. Sadece rogue dalgalarının oluşumunda değil (N. Akhmediev, Ankiewicz, & Taki, 2009; N. Akhmediev, Soto-Crespo, & Ankiewicz, 2009; C. Kharif & Pelinovsky, 2003; M. Onorato et al., 2001; Miguel Onorato, Residori, Bortolozzo, Montana, & Arecchi, 2013), fiber optikte elektrik alan (Chen, Segev, & Christodoulides, 2012; Christodoulides, Lederer, & Silberberg, 2003; Lederer et al., 2008; Sukhorukov, Kivshar, Eisenberg, & Silberberg, 2003; Suntsov et al., 2006; Szameit & Nolte, 2010), plazma fiziğinde Langmuir dalgalarının kendi kendini odaklaması ve çöküşü (Akimoto, 1988; Haas & Shukla, 2009; Kuznetsov, 2009; Sulem & Sulem, 1997; Zakharov, 1983), optik örgüdeki Bose-Einstein yoğunlaşması (Blakie & Wang, 2007; Carretero-González et al., 2008; Morsch & Oberthaler, 2006), Peierls bariyerinde kesikli difraksiyon olayı (Morandotti, Peschel, Aitchison, Eisenberg, & Silberberg, 1999) açıklamak için de bu denklemden faydalanılır.

Bir boyutta NLS denkleminde doğrusal olmayan terimin önündeki işaret, bu terimin itici veya çekici olduğunu gösterir. Bu denklemin tam çözümüne ulaşmak için ters saçılım dönüşümünden(Inverse scattering transform) faydalanacaktır (S. Russell, Russell, The, & This, 2009). Bright soliton, doğrusal olmayan terimin önündeki işaret eksi olduğunda yani çekici olduğunda, dark soliton ise tam tersi durumda geçerlidir. DNLS denklemi, basitçe doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin (NLS) genel formundan elde edilebilmektedir (S. Russell et al., 2009). Bir boyutta DNLS denklemi soliton çözümlerini

sağlar. Ayrıca, çok küçük genliğin değişimini açıkladığı için doğrusal olmayan ortamlarda değişen dalgaların yapısını incelemek için uygundur. Bu durum, DNLS denklemi kullanımının avantajlarından birisidir. En büyük avantajlarından bir tanesi de soliton çözümlerini sağlamasıdır. Böylelikle, solitonlara ait genlik, hız gibi bazı fiziksel terimleri yorumlamak kolaylaşır. Burada, sonsuz sayıda korunmuş niceliklerden bahsedebiliriz (Zakharov and Shabat, 1972).

Daha önce bahsettiğimiz modülasyonel kararsızlık rogue dalgalarının oluşumunda önemli rol oynar ve NLS denkleminde olduğu gibi, DNLS gibi kesikli denklemlerde de geçerlidir. Kesikli sistemler Ablowitz-Ladik (A-L) denklemiyle ifade edilebilir (Mohamadou, Fopa, & Kofané, 2006). Kesikli sistemlerde A-L denklemi üzerinde çok fazla çalışılmıştır ve çözümüne ilişkin literatürde pek çok yayın vardır (M J Ablowitz & Ladik, 1976; Ankiewicz, Akhmediev, & Lederer, 2011; Hennig & Tsironis, 1999). Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi integre edilemediği, dolayısıyla da nümerik olarak hesaplanması gerekmesine rağmen, tam integre edilebilir A-L denklemi analitik çözümü elde etmek bakımından önemlidir. Her iki durumda da denklemi kesikli hale getirme işlemi kesikli solitonun matematiksel formuna uygun haldedir.

Ters saçılım tekniği, Darboux dönüşümü, Backlund dönüşümü gibi metotlar A-L denkleminde uygulanabilir ve tam çözüm elde edilebilir. (Ankiewicz et al., 2011; Levi, 1981; X. Liu & Zeng, 2007; Vekslerchik, 2006; Zhenyun, 2008) A-L denklemi, (M J Ablowitz & Ladik, 1976)

$$i \frac{du_n}{dt} + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + g |u_n|^2 \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} = 0 \quad (4.9)$$

ile verilir. Burada $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ düğüm nokta sayılarıdır, t zaman, h konumsal örgü aralığı boyu ve g doğrusal olmayan terimin katsayısıdır. A-L denklemini daha bilinen formda ifade etmek istenirse

$$t \rightarrow Th^2 \text{ ve } u_n \rightarrow \frac{\Psi_n}{h} \quad (4.10)$$

dönüşümleri yapılarak,

$$i \frac{d\Psi_n}{dT} + (\Psi_{n-1} + \Psi_{n+1}) \left(1 + |\Psi_n|^2 \right) - 2\Psi_n = 0 \quad (4.11)$$

ile gösterilir (M J Ablowitz & Ladik, 1976a, 1976b).

Bununla birlikte, tersi durum da söz konusudur. Yani A-L denklemi de uygun koşullar sağlandığında doğrusal olmayan Schrödinger denklemine dönüşebilir. Bu dönüşümün görüldüğü kadar kolay olmadığını ancak belirli bir NLS denklemi çözümü mevcut ise daha kolay bir şekilde uygulanabileceği söylenebilir.

Kesikli yapıdaki değişken n , bilinen NLS denklemine, $x = nh$ durumunda $h \rightarrow 0$ limiti alındığında (4.9) numaralı denklem, NLS denklemine indirgenebilir (M J Ablowitz, Prinari, & Trubatch, 2006). NLS denklemi pek çok yoldan kesikli hale getirilebilir ve A-L denklemi bu yollardan sadece bir tanesidir (Dmitriev, Kevrekidis, Yoshikawa, & Frantzeskakis, 2007).

DNLS denklemi ise

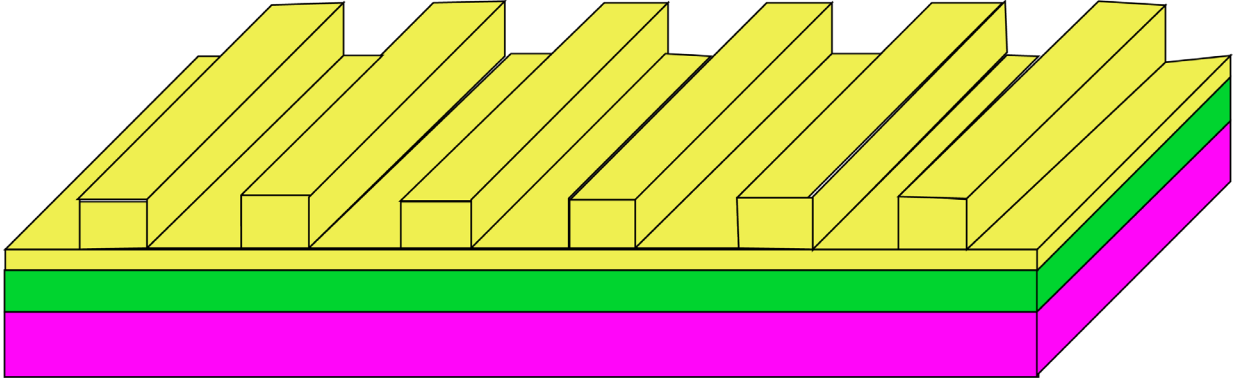
$$i \frac{d\Psi_n}{dt} + g |\Psi_n|^2 \Psi_n + \Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} = 0 \quad (4.12)$$

olarak bilinir. Burada, g doğrusal olmayan terimin katsayısıdır. Örneğin $g = +1$ değerini alırsa, odaklanan, $g = -1$ değerini alırsa ise, dağıtıcı doğrusal olmayan DNLS denkleminde bahsedilebilir (Feddersen, 2006). Daha önce de değinildiği gibi, DNLS pek çok problemin çözümünde kullanılmaktadır. Bununla birlikte, DNLS denklemi birleştirilmiş uyumsuz salıngaçların örgü yapıları için de basit bir modeldir. (Madrid, 2003) Kübik doğrusal olmayan Schrödinger denklemi, soliton çözümlerinde çok önemlidir ve kesikli integre edilemeyen doğrusal olmayan Schrödinger denklemi bu durum için kayda değer bir çözüm sunar. Denklemi analitik olarak çözebilmek için integre edilebilmesi gerekmektedir. Eğer integre edilemiyorsa hala çözüm bulmak mümkündür. Bu durumda, nümerik çözüm yapmak gereklidir.

Bludov, Konotop ve Akhmediev yapmış oldukları çalışmada (Bludov, Konotop, & Akhmediev, 2009), doğrusal olmayan dalga kılavuzları dizisinde DNLS denklemi ile çalışmışlardır. Çalışmalarında teorik olarak, başlangıç fonksiyonunu uygun bir şekilde seçerek kesikli rogue dalgaları oluşturmayı başarmışlardır. Gerçek bir deney düzeneğinde daima var olan küçük dereceden düzensizlikleri ise yok saymışlardır (Bludov, Konotop,

& Akhmediev, 2009). Tezin bu kısmında, bu düzensizliklerin aslında kesikli rogue dalgalarının oluşumunda çok önemli bir role sahip oldukları gösterilecektir.

4.1.1. Kesikli rogue dalgaları



Şekil 4.5: Optik dalga kılavuzlarındaki ızgaralamanın şematik gösterimi

Referans (Bludov, Konotop, & Akhmediev, 2009)' de DNLS denklemi kullanılarak uygun başlangıç koşulları altında rogue dalgaları oluşturabilmenin mümkün olduğu gösterilmiştir. Şimdi DNLS denklemi için kesikli rogue dalgalarını çalışalım. Çözümümüzde periyodik sınır koşullarını uygulayacağız, $\Psi_{N+1} = \Psi_1$, burada N örgü noktalarının toplam sayısıdır. Başlangıç koşulunu denklem 4.8' deki gibi ele alalım.

Bludov, Konotop ve Akhmediev denklem 4.8 başlangıç koşulu ile DNLS denklemini nümerik olarak çözmüşlerdir (Bludov, Konotop, & Akhmediev, 2009). Yapılan çalışmayla merkezi bir noktada yüksek genlikli kesikli rogue dalgalarının oluştuğu görülmüştür (Şekil 4.6). Kesikli rogue dalgalarının oluşumunu ve yapısını gösteren en önemli iki parametre, değişimsel kararsızlık (modulational instability) ve rastgele seçilen başlangıç fonksiyonudur. Bu iki değere kesikli rogue dalgasının hassas bir şekilde bağlı olduğu söylenebilir.

Yapmış olduğumuz çalışma (Efe & Yuce, 2015) göstermiştir ki, kesikli rogue dalgasının oluşumu sadece bu iki parametreye bağlı değildir. Kaçınılmaz olarak, gerçek

bir deney ortamında düzensizlikler mutlaka var olacaktır. Nümerik hesaplamalara göre, bu önlenemez çok küçük deneysel düzensizlikler rogue dalgalarının yapısını önemli derecede etkilediği görülmektedir. Uygun başlangıç koşulu seçildiğinde dahi, zayıf dereceden düzensizlikler rogue dalgasının yapısını kaotik hale getirmekte ve rastgele oluşan piklerin sayısını arttırmaktadır.

(4.12) numaralı denkleme benzer bir şekilde dalga kılavuzunda optik alanın yayılmasını,

$$i \frac{d\Psi_n}{dt} = -J_j(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + V_j \Psi_n + g|\Psi_n|^2 \Psi_n \quad (4.13)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada J_j , j. dalga kılavuzu ve ona komşu dalga kılavuzu arasındaki tünelleme katsayısı, V_j ise j. dalga kılavuzunun üzerindeki ek potansiyel terimidir. Çalışmamızda $g=-1$ olarak kabul edeceğiz.

Tüm dalga kılavuzu noktalarının ve dalga kılavuzu aralıklarının tüm sistemde özdeş olduğunu varsayalım. Böyle bir durumda (4.13) numaralı denklem (4.12) numaralı denkleme indirgenecektir. Fakat doğal bir deney ortamında, dalga kılavuzları arasındaki mesafe aynı değildir ve dalga kılavuzları arasında fabrikasyon hataları ısıl genleşme ve bunun gibi problemlerden dolayı düzensizlik kaçınılmazdır. Bu küçük dereceden düzensizlikler, Bloch osilasyonunda, Zener tünel etkisinde, Anderson lokalizasyonlarında etkisi önemsizken, kesikli rogue dalgalarının yapısında etkisi çok büyüktür.

Denklem 4.13' e göre, iki tip düzensizlikten bahsedilebilir. Bunlardan biri, köşegen tipi düzensizlik, diğeri ise köşegen tipi olmayan düzensizliktir. Köşegen tipi düzensizlik V_j potansiyellerinin rastgele seçiminden kaynaklanırken, köşegen tipi olmayan düzensizlik tünelleme sabitlerinin rastgele seçiminden kaynaklanır. Rastgele değişen tünelleme sabiti için ise, J_j değerinin $J_0 + \varepsilon_1 W$ olduğunu kabul edelim. Burada $\varepsilon_1 \ll 1$ olmak üzere boyutsuz bir sabit ve W değeri ise sıfır ortalama değer dağılımına sahip $[-1, 1]$ aralığındaki rastgele reel sayılardır. $V_j = V_0 + \varepsilon_2 W$ olmak üzere, $\varepsilon_2 \ll 1$ küçük bir sabittir. Bu çalışmada ε_1 ve ε_2 değerleri 10^{-2} veya daha düşük değerler seçeceğiz. Bu küçük değerlere rağmen, kesikli rogue dalgaların yapısını ciddi düzeyde değiştiğini göreceğiz. Ayrıca, gerçek bir deney düzeneğinde ikinci ve daha yüksek dereceden tünelleme sabitleri de işin içine girer. Nümerik hesaplamalarımızda bu türden

etkileşimlerin kesikli rogue dalgalarının oluşumunda herhangi sürpriz bir etkisi olmadığını gördük. Dolayısıyla, denklem 4.13' te daha yüksek dereceden etkileşim terimleri ihmal edilmiştir.

Rogue dalgasının oluşacağı bölgedeki arka plan yoğunluğunu ele alalım. Sistemi doğrusal duruma getirmekle incelenebilen modülasyon kararsızlığın belirlenmesi gerekir. Bu durumu $\Psi_j = Ae^{ik_w j + ik_{wz} z}$ ile ifade edebiliriz. Burada, k_w dalga sayısını, A alan genliğini ifade eder ve doğrusal olmayan dispersiyon ilişkisi $k_{wz} = 2J \cos(k_w) - gA^2$ ile gösterilir. Tek düze çözümün kararlılığını incelemek için, çok küçük bir pertürbasyon terimi eklemek gerekir. Böylelikle, Ψ_j yerine $\Psi_j \rightarrow \Psi_j + \delta\Psi_j e^{iQ_j + iQ_z z}$ yazarız. Burada Q modülasyon dalga numarasını ve Q_z dispersiyon ilişkisini gösterir. Q_z DNLS denkleminin doğrusal hale getirilmesiyle bulunur:

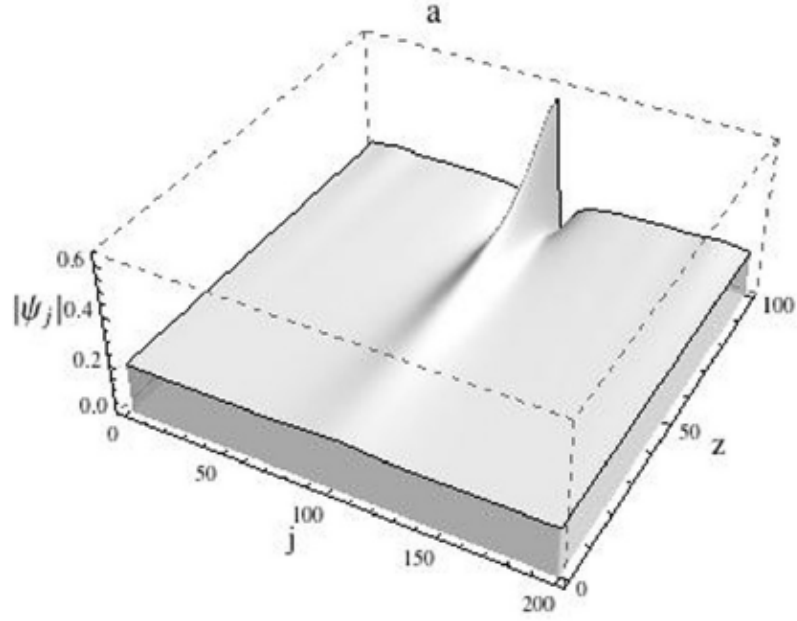
$$Q_z^2 = 8J_0 \sin^2(Q/2) \cos(k_w) (2J_0 \sin^2(Q/2) \cos(k_w) + gA^2) \quad (\text{Abdullaev, Bouketir, Messikh, \& Umarov, 2007; Rasmussen K., Cai D., Bishop A., Jensen N, 1999}).$$

Q_z^2 negatif olduğu durumda dalga çözümü kararlı değildir. Köşegen ve köşegen olmayan düzensizliklerin varlığında modülasyon kararsızlığının çok arttığı söylenebilir. Doğrusal hale getirme yöntemi ile birlikte giderek genliği artan bir dalga yapısı öngörülebilirken, sonraki aşamalarda dalganın hangi yapıda olacağına dair bir fikir vermez. Dalga dinamiğinin nasıl olduğunu görebilmek için, nümerik hesapla çözüm yapacağız. Nümerik hesaplamalarımızda periyodik sınır koşulları kullanılacaktır.

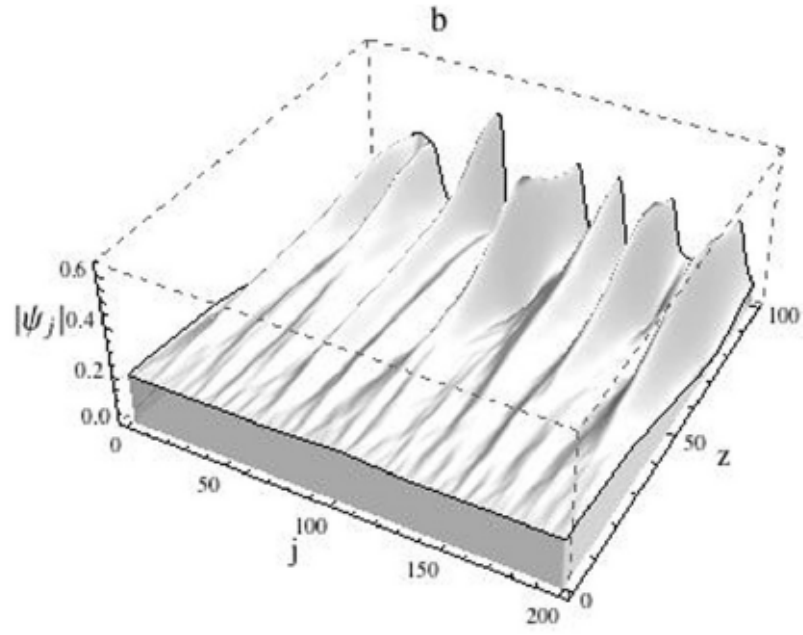
Şimdi (4.8) numaralı başlangıç koşulu ile denkleminizi çözelim. Öncelikle sistemde bir düzensizlik olmadığı durumu ele alalım. Dalga fonksiyonun mutlak karesinin konumla değişimi şekil 4.6' da görülebilir. Şekilden görülebileceği gibi $z=100$ civarında yüksek genlikli bir dalga oluşur. Oluşan bu dalganın maksimum genliği sistemin arka plan genliğinden 3 kat büyüktür. Şimdi sistemde köşegen tipli ve köşegen tipli olmayan düzensizlik olması durumunda neler olacağını bulalım. Nümerik hesaplamamızda $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ olarak alacağız. Şekil 4.7 ve şekil 4.8' de köşegen tipli ve köşegen tipli olmayan düzensizlik olması durumunda (4.8) numaralı başlangıç koşuluna sahip dalga fonksiyonunun evrilişi görülebilir. Şekillerden görülebileceği gibi zayıf düzensizliklerin rogue dalgası dinamikleri üzerinde etkisi ciddi düzeyde büyüktür. Birden fazla pik farklı konumlarda ortaya çıkmaktadır. Dolayısı ile sistem kaotik bir davranış sergiler. Çok zayıf düzensizliğin bu kaotik davranışa sebep olması beklenmedik bir

etkidir. Gerçek bir deneysel sistemde zayıf düzensizlikler kaçınılmazdır. Dolayısıyla kaotik davranış da kaçınılmaz olur.

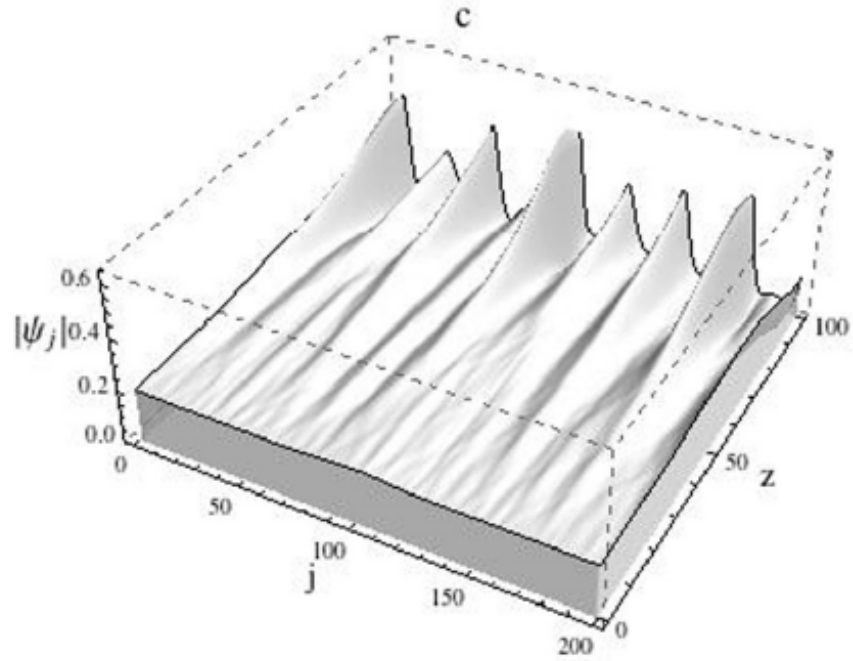
Literatürde yapılan çalışmalarda genel olarak rogue dalgasının yapısının sadece uygun başlangıç koşulu seçmek ile değiştiği düşünülmüştür. Bu çalışma ile kaçınılmaz zayıf düzensizliklerin dalga yapısına etkisi önemli olduğu gösterilmiştir.



Şekil 4.6: Herhangi bir düzensizliğin olmadığı durumda $N=200$, $L=100$, $g=-1$ ve $A=0.2$ değerleri için alan genliğinin mutlak değeri



Şekil 4.7: $N=200$, $L=100$, $g=-1$ ve $A=0.2$ değerleri için diyagonal olmayan düzensizlikte $\varepsilon_1=10^{-2}$ değeri için alan genliğinin mutlak değeri



Şekil 4.8: $N=200$, $L=100$, $g=-1$ ve $A=0.2$ değerleri için diyagonal düzensizlikte $\varepsilon_2=10^{-2}$ değeri için alan genliğinin mutlak değeri

4.1.2. Periyodik modülasyon altındaki kesikli rogue dalgası

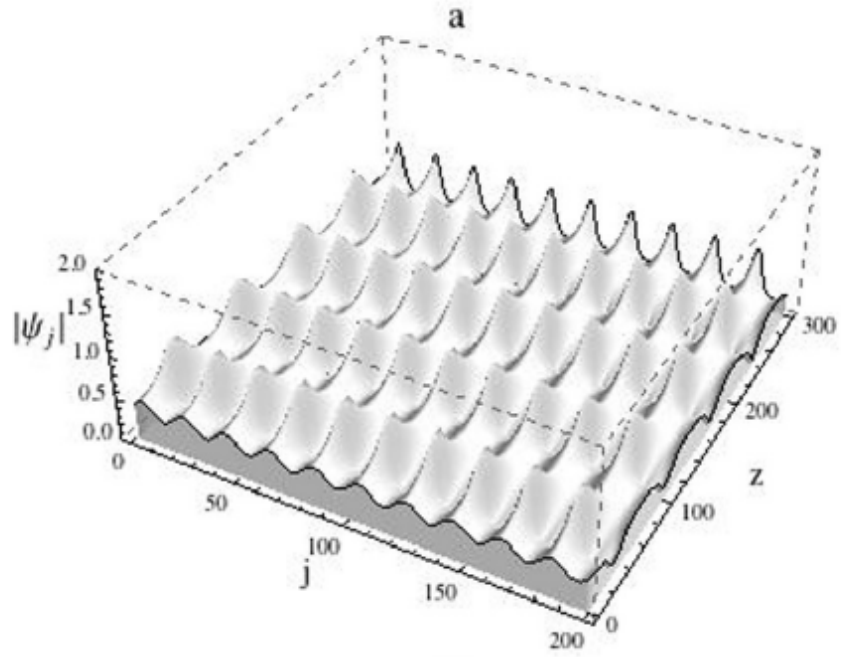
Şimdi başlangıç koşulunu değiştirelim ve rogue dalgasının başlangıç koşuluna ve düzensizliğe nasıl bağlı olduğunu çalışalım.

$$\Psi(n,0) = \alpha \left(1 + \varepsilon \sin \left(\frac{2\pi}{d} n \right) \right) \quad (4.14)$$

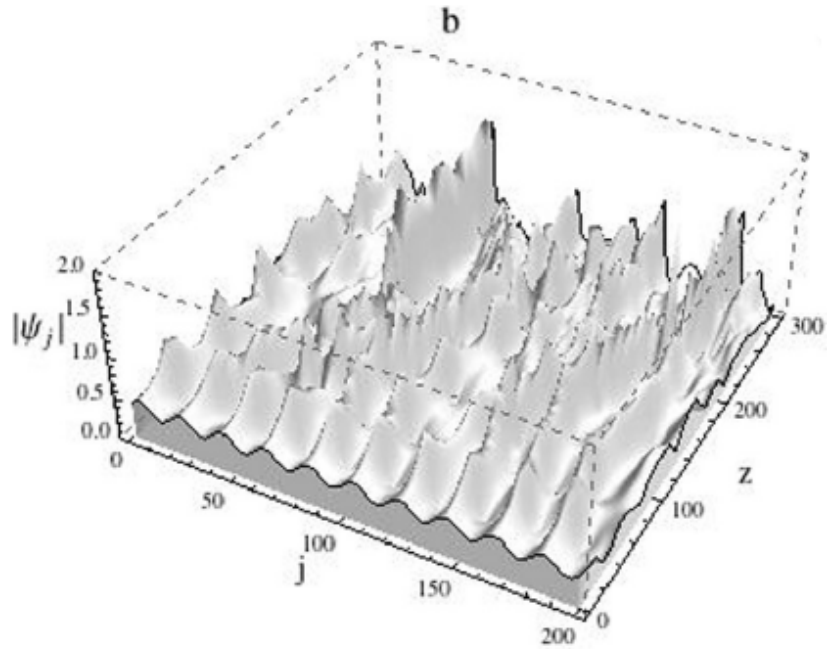
Burada $|\alpha|^2$ arka plan genliğidir, ε küçük bir parametredir ve d ise modülasyonun periyodudur. Kesikli rogue dalgası çok hassas bir şekilde başlangıç fonksiyonuna bağlıdır. Parametrelerin çok küçük bir şekilde değişmesi bile kesikli rogue dalgasının yapısını ciddi bir şekilde etkileyecektir.

$\varepsilon = 0.2$, $g = -0.5$ değerleri için oluşan dalganın maksimum genliği sistemin arka plan genliğinden $\alpha = 0.4$ değeri için 2.3 kat, $\alpha = 0.5$ değeri için ise 3 kat büyüktür. g değerinin özellikle -0.5 seçilmesinin nedeni $g = -1$ iken ikili periyodik yapının kaybolmasıdır.

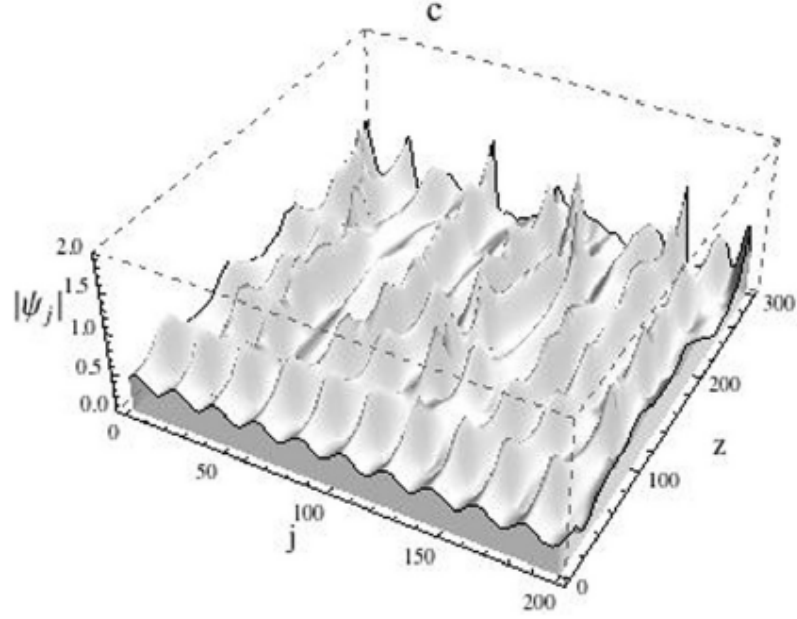
Şekil 4.9’ da $\alpha = 0.4$ değerinde ikili periyodik kesikli rogue dalgasının oluşumu gösterilmiştir. Başlangıç koşulunun periyodik seçilmesi sebebiyle, sistem periyodiktir. Modülasyon değeri maksimum olduğunda sistemin genliği de maksimum olur, sonrasında ise eski haline geri döner. Bu durum periyodik olarak örgü boyunca devam eder. Şimdi çok zayıf bir düzensizlik durumunu inceleyelim. Köşegen tipli ve köşegen tipli olmayan düzensizlik durumunu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ ve $W_j = [-1, 1]$ değerleri için inceleyelim. Şekil 4.10 ve şekil 4.11’ den görüldüğü gibi, $z < 50$ olduğu durumlarda herhangi bir etki gözlenmezken, daha büyük değerlerde ise küçük düzensizliklerin etkisi gözlenmeye başlanır. Sistem kaotik duruma gelmeye başlar ve sonuç olarak dalga artık periyodik kesikli dalga yapısından çıkarak sadece kesikli rogue dalgası olur. Düzensizlik oluşan dalganın maksimum genliğini de yükseltmektedir.



Şekil 4.9: Herhangi bir düzensizliğin olmadığı durumda $N=200$, $g=-0.5$, $\varepsilon=0.2$, $d=20$ ve $\alpha=0.4$ değerleri için dalga fonksiyonunun genliğinin mutlak değeri



Şekil 4.10: $N=200$, $g=-0.5$, $\varepsilon=0.2$, $d=20$ ve $\alpha=0.4$ değerleri için diyagonal olmayan düzensizlikte $\varepsilon_1=10^{-2}$ değeri için alan genliğinin mutlak değeri



Şekil 4.11: $N=200$, $g=-0.5$, $\varepsilon=0.2$, $d=20$ ve $\alpha=0.4$ değerleri için diyagonal düzensizlikte $\varepsilon_2=10^{-2}$ değeri için alan genliğinin mutlak değeri

Bu çalışmayla kesikli rogue dalgasının oluşumunda uygun başlangıç koşulu seçmenin yanı sıra çok zayıf düzensizliklerin de etkili olduğunu gösterdik. Denklem (4.14) gibi bir başlangıç koşulunu deneysel olarak elde etmek zor olabilir. Bu yüzden, belirlenen başlangıç fonksiyonu ile başlanması, bahsedilen zayıf düzensizliklerin kesikli rogue dalgasını nasıl etkilediğini görmek bakımından önemlidir.

Denklem (4.8) ve denklem (4.14) gibi başlangıç koşullarının dışında, rogue dalgalarını elde edebilmek için farklı başlangıç koşul fonksiyonları da kullanılabilir. Oluşan dalga'nın maksimum genliğinin sistemin arka plan genliğine oranı rogue dalgası tanımına uyacak bir değere sahip olmalıdır. Ayrıca, denklem (4.8) gibi uygun bir başlangıç koşulu seçmek, bulunan verilerin deneysel olarak da gözlenip doğrulanabilmesi açısından önemlidir.

4.2. Kesikli Rogue Dalgalarının Uzun Zaman Dinamiği

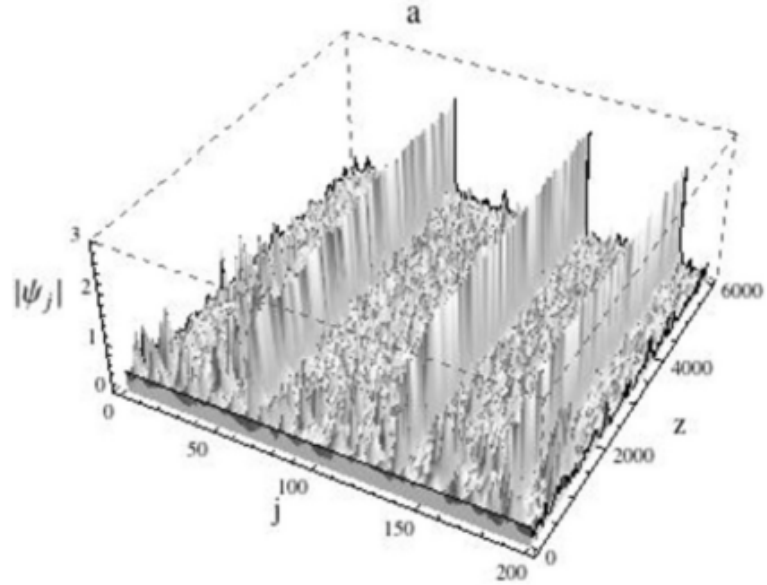
Kesikli rogue dalgalarının uzun süreli hareketini inceleyelim. Bir takım pikler rastgele meydana gelir, kısa süre içinde yok olur, sonrasında başka pikler başka örgü bölgelerinde meydana gelir ve o da kısa bir süre içerisinde yok olur. Aynı zamanda genliği daha düşük kaotik dalgalanmalar meydana gelebilir. Dolayısıyla, piklerin pozisyonlarının değişeceğini öngörebiliriz.

Kesikli rogue dalgalarının genliği arka plan genliğinden yaklaşık olarak 3 kat büyük olduğunda, bu yüksek genlikli dalga örgünün komşu noktalarına tünelleme yaparak zamanla genliği azalır ve kaybolur. Eğer z değeri yeterince büyükse, sistem içinde daha fazla sayıda bu tip pikler görülür. Bunlardan bazıları birbirleriyle etkileşim yapacak kadar yakın olacaklardır. Bu çarpışmalar birbirlerini uyarak ikinci dereceden kesikli rogue dalgaları oluşur. Bu dalgaların genliği arka plan genliğinden yaklaşık olarak 5 kat büyüktür. Nümerik hesaplamalarımıza göre bu tip dalgalar daha uzun ömürlüdür. Böylelikle, uzun süreli rogue dalgaları elde edilmiştir.

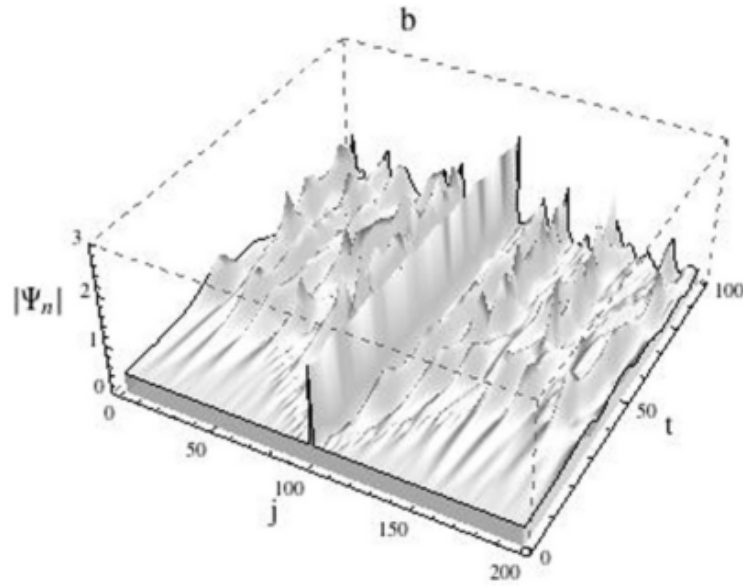
Uzun süreli rogue dalgalarının yapısını anlayabilmek için örgü yapısının ortasında bir başlangıç dalgası olduğunu varsayalım. Burada örgü sayısını $N=200$ olarak alalım. Başlangıç koşulunu, $j = N/2 = 100$ olduğu durum için $\Psi_j(z=0) = pA$ olarak yazalım, burada $p>1$ olmak üzere bir sabit ve $A=0.4$ olarak alınmıştır. $j \neq 100$ olduğu durum için ise, $\Psi_j(z=0) = A$ olarak alalım. $j=100$ konumunda enerji fazlalığı, eğer doğrusal olmayan etkileşim çok güçlü değilse, komşu bölgelere yayılır. Eğer p değeri yeterince büyükse ($p>5$) doğrusal olmayan etkileşim dominant hale gelmeye başlar ve difraksiyon yoğun bir şekilde gözlenir. Bu durumda, kesikli rogue dalgası oluşumunun başlarında oluşan pikin genliği neredeyse sabit kalır. $z=50$ dolaylarında, değişimsel kararsızlıktan dolayı birtakım pikler görülmeye başlanır. Dolayısıyla bu durum, piklerin komşu bölgelerdeki difraksiyonunu arttırır.

Şekil 4.12' de $\psi_j(z=0)=A$ başlangıç koşulunda $\varepsilon_2=10^{-2}$, $g=-1$, $N=200$ ve $A=0.4$ değerleri için sabit bir başlangıç alan fonksiyonunun zamanla evrilişi gösterilmiştir. Bu grafiğe göre, üç tane büyük genlikli dalga oluşmuştur ve zaman içerisinde bu piklerin genliklerinin hemen kaybolmadığı ve diğer örgü bölgelerinin kaotik davranış halinde olduğu görülmüştür. Bu davranışlarını uzun süre devam ettirme eğiliminde olduklarından

dolayı uzun süreli rogue dalgası elde edilmiş olur. Kesikli rogue dalgaları büyük z değerlerinde meydana gelip kaotik bir yapı sergilediğinden dolayı standart pertürbasyon metotları işe yaramaz.



Şekil 4.12: $\varepsilon_2=10^{-2}$, $g=-1$, $N=200$ ve $A=0.4$ için $\psi_j(z=0)=A$ alınması durumunda uzun süreli rogue dalgası



Şekil 4.13: $\varepsilon_2=10^{-2}$, $g=-1$, $N=200$ ve $A=0.4$ için, $j \neq 100$ durumunda $\psi_j(z=0)=A$ ve $j=100$ durumunda $\psi_j(z=0)=5A$

Şimdi de $j=100$ de oluşan pikin büyük z değerlerinde kaybolup kaybolmadığına bakalım. Şekil 4.13' den görüldüğü üzere yaptığımız nümerik hesaplamalarda daha büyük z değerlerinde pikin kaybolmadığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla, $j=100$ konumunda oluşan tek pik değeri zamanla kaybolmamıştır. Komşu bölgelerde piklerin olması değişimsel kararsızlığın da etkisiyle $j=100$ bölgesindeki pikin daha büyük olmasına yol açabilir. Değişimsel kararsızlığın, küçük periyodik pertürbasyon etkisi ile kısa süren rogue dalgası meydana geliyorsa, doğrusal olmayan etkileşimin güçlü olması durumunda rogue dalgasının yapısını daha uzun süre sürdürmesi beklenendir. Dolayısıyla herhangi bir noktada fazla olan enerji bitişik bölgelere taşınmaz ve rogue dalgası hemen kaybolmaz. Dolayısıyla kesikli rogue dalgalarının uzun süreli dinamiğini elde edilmiştir. Ayrıca büyük z değerlerinde mevcut olan kaotik yapıda hali hazırdaki rogue dalgasının sönümlenmesini engelleyecektir. Bu durumun avantajlarından birisi de, rogue dalgalarının uzun süreli dinamiği ile birlikte rogue dalga yapısı hakkında gözlem yapma imkânı vermesidir.

İlk bölümde de bahsedildiği gibi rogue dalgaları nadir olaylardır ve tam komşu bölgesinde rogue dalga yapısının oluşma ihtimali çok düşüktür. Dolayısıyla $j=100$ bölgesinde uzun süreli rogue dalgası oluşmuş olur. Kesikli soliton sonlu bir zeminde lokalize olmuştur.

Şekil 4.13 gibi tek bir pikin genliğini inceledikten sonra problemimize geri dönelim. Herhangi küçük bir düzensizlik, örneğin $\epsilon_2=10^{-2}$ modülasyon kararsızlığına yol açar. Şekil 4.8' den görüldüğü gibi $z=100$ dolaylarında oluşan dalganın maksimum genliği sistemin arka plan genliğinden 3 kat daha büyüktür. Sistemde birden fazla pik vardır ve bunlar karşılaştıkça daha büyük genlikte pikler elde edilir. $z=300$ dolaylarında bazı piklerin genliği arka plan genliği değerinden yaklaşık 5 kat daha büyüktür. Komşu bölgeyle karşılaşma durumu göz ardı edildiği için uzun süre varlıklarını sürdürebilirler. Komşu bölgeye tünelleme yapılmadığından dolayı pikler arasında herhangi bir üst üste gelme durumu gözlenmez. Oluşan dalganın maksimum genliğinin sistemin arka plan genliğinden yaklaşık 5 kat büyük olması ile daha yüksek dereceden rogue dalgaların oluşumunu önler. Bundan dolayıdır ki nümerik hesaplamalarımızda maksimum pikin

genlik değerinin arka plan genliği değerine oranı 1 değerinden başlar ve yaklaşık 5 değerine kadar artar.

Bu yüksek genlikli dalgalar hiçbir sebep olmadan ortaya çıktığı ve varlıklarını uzun süre devam ettirdikleri için kesikli rogue dalgalarının uzun süreli dinamiği elde edilmiştir. Kesikli rogue dalgalarının uzun zaman dinamiği ilk defa 2015’ te yaptığımız çalışmayla öngörölmüştür (Efe & Yuce, 2015). Rogue dalgaları hızlı bir şekilde oluşup hızlı bir şekilde kaybolduğu için haklarında gözlem yapabilmek zordur ve bu durumda gözlem yapabilmek kolaylaşacaktır.

Bu çalışma, bir dalga kılavuzundaki kesikli rogue dalga yapısının sadece başlangıç koşulu seçimiyle değil aynı zamanda küçük dereceden düzensizliklerle de önemli ölçüde değiştğini göstermesi ve kesikli rogue dalgalarının uzun süreli dinamiği elde edilmesi bakımından önemlidir.

5. SONUÇ

Bu tezde, DNLS denklemi kullanarak örgü yapısına sahip dalga kılavuzundaki kesikli rogue dalgaları üzerinde çalıştık. Küçük dereceden bir düzensizlik deney ortamında daima vardır. Bu çalışmada köşegen ve köşegen olmayan tipte düzensizlik olması durumunda rogue dalgalarının konum-zaman koordinatlarındaki evrilişini ve kesikli rogue dalgalarının uzun süreli dinamiğini inceledik.

Bir boyutlu DNLS denklemi için kesikli rogue dalgalarını uygun başlangıç koşulları seçerek periyodik sınır koşulları altında nümerik olarak çözdük. Bu zamana kadar olan çalışmalarda kaçınılmaz küçük dereceden düzensizlikler ve zayıf çalkantılar ihmal edilmiştir. Bu çalışma ile küçük dereceden düzensizliklerin varlığında kesikli rogue dalgalarının dinamiğini inceledik. Küçük dereceden düzensizliklerin kesikli rogue dalgasının dinamiğini önemli derecede etkilediğini gösterdik. Bu küçük dereceden düzensizlikler zamanla yüksek genlikli rogue dalgası oluşmasına neden olmuştur.

Tezde ayrıca uygun parametreler seçildiğinde hiçbir ön uyarı olmadan oluşan ve varlığını uzun süre devam ettirebilen kesikli rogue dalgaların oluşabileceğini öngördük. Dalga genliği arka plan genliğinden yaklaşık olarak 5 kat büyük olan doğrusal olmayan dalgalar oluşabileceğini nümerik yöntemler ile gösterdik. Bu tip kesikli rogue dalgalarını DNLS denklemini kullanarak elde ettik ve sürekli sistemlere göre varlığını daha uzun süre devam ettirdiğini gösterdik.

KAYNAKÇA

- Abdullaev, F. K., Bouketir, A., Messikh, A., & Umarov, B. A. (2007). Modulational instability and discrete breathers in the discrete cubic – quintic nonlinear Schrödinger equation, 232, 54–61. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.05.005>
- Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C., & Segur, H. (1974). The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems. *Studies in Applied Mathematics*, 53(4), 249–315. <https://doi.org/10.1002/sapm1974534249>
- Ablowitz, M. J., & Ladik, J. F. (1976a). A nonlinear difference scheme and inverse scattering. *Studies in Applied Mathematics*, 55(3), 213–229.
- Ablowitz, M. J., & Ladik, J. F. (1976b). Nonlinear differential–difference equations and Fourier analysis. *Journal of Mathematical Physics*, 17(6), 1011–1018.
- Ablowitz, M. J., Prinari, B., & Trubatch, A. D. (2004). Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems. *October*, 43(1), 127–132. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546709>
- Ablowitz, M. J., Prinari, B., & Trubatch, A. D. (2006). Discrete vector solitons: composite solitons, Yang–Baxter maps and computation. *Studies in Applied Mathematics*, 116(1), 97–133.
- Akhmediev, N., Ankiewicz, A., & Soto-Crespo, J. M. (2009). Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 80(2). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.026601>
- Akhmediev, N., Ankiewicz, A., & Taki, M. (2009). Waves that appear from nowhere and disappear without a trace. *Physics Letters A*, 373(6), 675–678.
- Akhmediev, N. N., & Korneev, V. I. (1986). Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 69(2), 1089–1093.
- Akhmediev, N., Soto-Crespo, J. M., & Ankiewicz, A. (2009). Extreme waves that appear from nowhere: on the nature of rogue waves. *Physics Letters A*, 373(25), 2137–2145.

- Akimoto, K. (1988). Electromagnetic effects on parametric instabilities of Langmuir waves. *The Physics of Fluids*, 31(3), 538–546.
- Anderson, M. H., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Wieman, C. E., & Cornell, E. A. (1995). Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(JULY), 198–201.
- Andrade, M. A. (2017). Physical mechanisms of the Rogue Wave phenomenon. Retrieved October 13, 2018, from <https://pdfs.semanticscholar.org/9f46/a9ab12898cac9753fe113f7a30e14e6f9edd.pdf>
- Ankiewicz, A., Akhmediev, N., & Lederer, F. (2011). Approach to first-order exact solutions of the Ablowitz-Ladik equation. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 83(5), 1–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.056602>
- Ardhuin, F., Seville, E. Van, Stopa, J. E., & Cravatte, S. (2017). SKIM Sea surface kinematics multiscale monitoring, (September). <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.16398.87365>
- Baldock, T. E., & Swan, C. (1996). Extreme waves in shallow and intermediate water depths. *Coastal Engineering*, 27(1–2), 21–46.
- Baronio, F., Degasperis, A., Conforti, M., & Wabnitz, S. (2012). Deterministic Vector Freak Waves, (1), 1–4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.044102>
- Bendahmane, A., Mussot, A., Szriftgiser, P., Zerkak, O., Genty, G., Dudley, J. M., & Kudlinski, A. (2014). Experimental dynamics of Akhmediev breathers in a dispersion varying optical fiber. *Optics Letters*, 39(15), 4490–4493.
- Benetazzo, A., Ardhuin, F., Bergamasco, F., Cavaleri, L., Guimarães, P. V., Schwendeman, M., ... Torsello, A. (2017). On the shape and likelihood of oceanic rogue waves. *Scientific Reports*, 7(1), 1–11. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-07704-9>
- Benjamin, T. B., & Feir, J. E. (1967). The disintegration of wave trains on deep water

- Part 1. Theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(3), 417–430.
- Blakie, P., & Wang, W.-X. (2007). Bose-Einstein condensation in an optical lattice. *Phys. Rev. A*, 76(5), 53620. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.053620>
- Bludov, Y. V, Konotop, V. V, & Akhmediev, N. (2009). Rogue waves as spatial energy concentrators in arrays of nonlinear waveguides. *Optics Letters*, 34(19), 3015–3017. <https://doi.org/10.1364/OL.34.003015>
- Boccotti, P. (1982). *On the highest waves in a stationary gaussian process*.
- Brown, M. G. (2000). The Maslov integral representation of slowly varying dispersive wavetrains in inhomogeneous moving media. *Wave Motion*, 32(3), 247–266. [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(00\)00046-9](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(00)00046-9)
- Byrne, D. E., Davis, D. M., & Sykes, L. R. (1988). Loci and maximum size of thrust earthquakes and the mechanics of the shallow region of subduction zones. *Tectonics*, 7(4), 833–857.
- Canale, R. P., & Chapra, S. C. (1991). Numerical methods for engineers. *Mathematics and Computers in Simulation*, 33(3), 260. [https://doi.org/10.1016/0378-4754\(91\)90127-O](https://doi.org/10.1016/0378-4754(91)90127-O)
- Carretero-González, R., Frantzeskakis, D. J., & Kevrekidis, P. G. (2008). Nonlinear waves in Bose–Einstein condensates: physical relevance and mathematical techniques. *Nonlinearity*, 21(7), R139.
- Chabchoub, A., & Fink, M. (2013). Time-reversal generation of rogue waves. *Physical Review Letters*, 112(12), 1–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.124101>
- Chabchoub, A., Hoffmann, N., Onorato, M., & Akhmediev, N. (2012). Super roguewaves: Observation of a higher-order breather in water waves. *Physical Review X*, 2(1). <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.2.011015>
- Chabchoub, A., Hoffmann, N., Onorato, M., Slunyaev, A., Sergeeva, A., Pelinovsky, E., & Akhmediev, N. (2012). Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank. *Physical Review E*, 86(5), 56601.

- Chabchoub, A., Hoffmann, N. P., & Akhmediev, N. (2011). Rogue wave observation in a water wave tank. *Physical Review Letters*, 106(20), 204502.
- Chabchoub, A., Waseda, T., Kibler, B., & Akhmediev, N. (2017). Experiments on higher-order and degenerate Akhmediev breather-type rogue water waves. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 3(4), 385–394. <https://doi.org/10.1007/s40722-017-0097-3>
- Chapra, S. C. (2011). Applied Numerical Methods with MATLAB. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Chen, Z., Segev, M., & Christodoulides, D. N. (2012). Optical spatial solitons: historical overview and recent advances. *Reports on Progress in Physics*, 75(8), 86401.
- Christodoulides, D. N., Lederer, F., & Silberberg, Y. (2003). Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices. *Nature*, 424(6950), 817–823. <https://doi.org/10.1038/nature01936>
- Christou, M., & Ewans, K. (2014). Field Measurements of Rogue Water Waves. *Journal of Physical Oceanography*, 44(9), 2317–2335. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-13-0199.1>
- Cornell, E. A., & Wieman, C. E. (2002). Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Reviews of Modern Physics*, 74(3), 875.
- Dai, C.-Q., Wang, Y.-Y., Tian, Q., & Zhang, J.-F. (2012). The management and containment of self-similar rogue waves in the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation. *Annals of Physics*, 327(2), 512–521.
- Dai, C.-Q., Wang, Y.-Y., & Wang, X.-G. (2011). Ultrashort self-similar solutions of the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients in the inhomogeneous fiber. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(15), 155203.
- Dmitriev, S. V., Kevrekidis, P. G., Yoshikawa, N., & Frantzeskakis, D. J. (2007). Exact stationary solutions for the translationally invariant discrete nonlinear Schrödinger

- equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(8), 1727.
- Dorrell, D. G., Halliday, J. R., Miller, P., & Findlater, M. (2004). © [2004] IEEE .
Reprinted , with permission , from [D . G Dorrell , J . R . Halliday , P . Miller and
M . Findlater , Review of wave energy resource and oscillating water column
modelling , Universities Power Engineering Conference , 2004 . UPEC 2004 .
- Draper, L. (1964). “Feak” Ocean Waves. *Oceanus*, 10(13–15).
- Dudley, J. M., Dias, F., Erkintalo, M., & Genty, G. (2014). Instabilities, breathers and
rogue waves in optics. *Nature Photonics*, 8(10), 755.
- Dudley, J. M., Genty, G., & Eggleton, B. J. (2008). Harnessing and control of optical
rogue waves in supercontinuum generation. *Optics Express*, 16(6), 3644–3651.
- Dysthe, K. B., & Trulsen, K. (1999). Note on breather type solutions of the NLS as models
for freak-waves. *Physica Scripta*, 1999(T82), 48.
- Dysthe, K., Krogstad, H. E., & Müller, P. (2008). Oceanic rogue waves. *Annu. Rev. Fluid
Mech.*, 40, 287–310.
- Efe, S., & Yuce, C. (2015). Discrete rogue waves in an array of waveguides. *Physics
Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 379(18–19), 1251–
1255. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.02.031>
- Erkintalo, M., Hammani, K., Kibler, B., Finot, C., Akhmediev, N., Dudley, J. M., &
Genty, G. (2011). Higher-order modulation instability in nonlinear fiber optics.
Physical Review Letters, 107(25), 253901.
- Faccio, D., Dudley, J., & Clerici, M. (2016). *Frontiers in Modern Optics* (Vol. 190). IOS
Press.
- Feddersen, H. (2006). Solitary wave solutions to the discrete nonlinear Schrödinger
equation. 10.1007/3-540-54890-4_167.
- Fermi, E., Pasta, J. R., & Ulam, S. M. (1955). Technical Report LA-1940. *Los Alamos
Sci. Lab*, 978.

- Fochesato, C., Grilli, S., & Dias, F. (2007). Numerical modeling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing. *Wave Motion*, 44(5), 395–416. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2007.01.003>
- Frisquet, B., Kibler, B., & Millot, G. (2014). Collision of akhmediev breathers in nonlinear fiber optics. *Physical Review X*, 3(4), 1–9. <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.3.041032>
- Genty, G., de Sterke, C. M., Bang, O., Dias, F., Akhmediev, N., & Dudley, J. M. (2010). Collisions and turbulence in optical rogue wave formation. *Physics Letters A*, 374(7), 989–996.
- Guedes Soares, C., Cherneva, Z., & Antao, E. M. (2003). Characteristics of abnormal waves in North Sea storm sea states. *Applied Ocean Research*, 25(6), 337–344. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2004.02.005>
- Guo, B., Tian, L., Yan Z., Ling L., Wang Y. (2017). *Rogue Waves: Mathematical Theory and Applications in Physics, Germany: De Gruyter*.
- Haas, F., & Shukla, P. K. (2009). Quantum and classical dynamics of Langmuir wave packets. *Physical Review E*, 79(6), 66402.
- Hammani, K., Finot, C., Dudley, J. M., & Millot, G. (2008). Optical rogue-wave-like extreme value fluctuations in fiber Raman amplifiers. *Optics Express*, 16(21), 16467–16474.
- Haver, S. (2004). A possible freak wave event measured at the Draupner Jacket January 1 1995. In *Rogue waves* (Vol. 2004, pp. 1–8).
- Heller, E. J. (2006). Freak Ocean Waves and Refraction of Gaussian Seas BT - Extreme Events in Nature and Society. In S. Albeverio, V. Jentsch, & H. Kantz (Eds.) (pp. 189–210). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-28611-X_9
- Hennig, D., & Tsironis, G. P. (1999). Wave transmission in nonlinear lattices. *Physics Reports*, 307(5–6), 333–432.

- Hwung, H.-H., Chiang, W.-S., & Hsiao, S.-C. (2007). Observations on the evolution of wave modulation. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (Vol. 463, pp. 85–112). The Royal Society.
- J.C. Eilbeck, Roger K. Dodd, J. D. G. (1982). *Solitons and Nonlinear Wave Equations*.
- Kedziora, D. J., Ankiewicz, A., & Akhmediev, N. (2012). Second-order nonlinear Schrödinger equation breather solutions in the degenerate and rogue wave limits. *Physical Review E*, 85(6), 66601.
- Kharif, C., Giovanangeli, J.-P., Touboul, J., Grare, L., & Pelinovsky, E. (2008). Influence of wind on extreme wave events: experimental and numerical approaches. *Journal of Fluid Mechanics*, 594, 209–247.
- Kharif, C., Pelinovsky E., Slunyaev A. (2008). *Rogue waves in the ocean*. Germany: Springer.
- Kharif, C., & Pelinovsky, E. (2003). Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 22(6), 603–634.
- Kharif, C., Pelinovsky E. (2008). *Extreme Ocean waves* (Vol. 8380). Springer. <https://doi.org/10.3724/SP.J.1041.2018.00953>
- Kibler, B., Fatome, J., Finot, C., Millot, G., Dias, F., Genty, G., ... Dudley, J. M. (2010). The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics. *Nature Physics*, 6(10), 790.
- Kibler, B., Fatome, J., Finot, C., Millot, G., Genty, G., Wetzel, B., ... Dudley, J. M. (2012). Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre. *Scientific Reports*, 2, 1–5. <https://doi.org/10.1038/srep00463>
- Kit, E., Shemer, L., Pelinovsky, E., Talipova, T., Eitan, O., & Jiao, H. (2000). Nonlinear wave group evolution in shallow water. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 126(5), 221–228.
- Klyatskin, V. I. (2015). *Stochastic Equations: Theory and Applications in Acoustics, Hydrodynamics, Magnetohydrodynamics, and Radiophysics, Volume 2*.
- Kokorina, A., & Pelinovsky, E. (2002). Applicability of the Korteweg-de Vries equation

- for description of the statistics of freak waves., *14*(4), 308–318.
- Korteweg, D. J., & De Vries, G. (1895). XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *39*(240), 422–443.
- Kundu, A. (2007). *Tsunami and Nonlinear Waves*. Germany: Springer
- Kurkin, A., & Pelinovsky, E. (2002). Focusing of edge waves above a sloping beach. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, *21*(5), 561–577.
- Kuznetsov, E. A. (1977). Solitons in a parametrically unstable plasma. In *Akademiia Nauk SSSR Doklady* (Vol. 236, pp. 575–577).
- Kuznetsov, E. A. (2009). Wave collapse in nonlinear optics. In *Self-focusing: Past and Present* (pp. 175–190). Springer.
- Lavrenov, I. V. (1998). The wave energy concentration at the Agulhas Current off South Africa. *Natural Hazards*, *17*(2), 117–127.
<https://doi.org/10.1023/A:1007978326982>
- Lax, P. D. (1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, *21*(5), 467–490.
- Leclaire, S., El-hachem, M., Reggio, M., Gaiceanu, M., & Chin, C. S. (n.d.). *a Fundamental Tool for Scientific Computing and Engineering Applications – Volume 3* (Vol. 3).
- Lederer, F., Stegeman, G. I., Christodoulides, D. N., Assanto, G., Segev, M., & Silberberg, Y. (2008). Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, *463*(1–3), 1–126.
- Levi, D. (1981). Nonlinear differential difference equations as Backlund transformations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *14*(5), 1083–1098.
<https://doi.org/10.1088/0305-4470/14/5/028>
- Lindfield, G. R., & Penny, J. E. T. (2012). *Solution of Nonlinear Equations. Numerical Methods*. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-386942-5.00003-5>

- Ling, L., Guo, B., & Zhao, L.-C. (2014). High-order rogue waves in vector nonlinear Schrödinger equations. *Physical Review E*, 89(4), 41201.
- Liu, P. C. P. (2007). A chronology of freak wave encounters. *Geofizika*, 24(1), 57–70. Retrieved from <http://hrcak.srce.hr/16718>
- Liu, X., & Zeng, Y. (2007). On the Ablowitz-Ladik equations with self-consistent sources. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(30), 8765–8790. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/30/011>
- Ma, Y. (1979). The perturbed plane-wave solutions of the cubic Schrödinger equation. *Studies in Applied Mathematics*, 60(1), 43–58.
- Madrid, C. De. (2003). The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation and, 10(2), 77–94.
- Magnusson, A. K., & Donelan, M. A. (2013). The Andrea wave characteristics of a measured North Sea rogue wave. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 135(3), 31108.
- Matveev, V.B., Salle, M. A. . . (1991). Darboux transformation and solitons. *J. Neurochem.*, (42(6)), 1667–1676.
- Meinardus, G. (1967). *Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods*.
- Moffatt, H. K., & Shuckburgh, E. (2011). *Environmental Hazards: The fluid dynamics and geophysics of extreme events* (Vol. 21). World Scientific.
- Mohamadou, A., Fopa, F., & Kofané, T. C. (2006). Modulational instability and spatial structures of the Ablowitz–Ladik equation. *Optics Communications*, 266(2), 648–655.
- Morandotti, R., Peschel, U., Aitchison, J. S., Eisenberg, H., & Silberberg, Y. (1999). Dynamics of discrete solitons in optical waveguide arrays. *Technical Digest. Summaries of Papers Presented at the Quantum Electronics and Laser Science Conference*, (April), 4–7. <https://doi.org/10.1109/QELS.1999.807362>
- Morsch, O., & Oberthaler, M. (2006). Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical

- lattices. *Reviews of Modern Physics*, 78(1), 179.
- Moslem, W. M. (2011). Langmuir rogue waves in electron-positron plasmas. *Physics of Plasmas*, 18(3), 32301.
- Moslem, W. M., Sabry, R., El-Labany, S. K., & Shukla, P. K. (2011). Dust-acoustic rogue waves in a nonextensive plasma. *Physical Review E*, 84(6), 66402.
- Nanayama, F., Satake, K., Furukawa, R., Shimokawa, K., Atwater, B. F., Shigeno, K., & Yamaki, S. (2003). Unusually large earthquakes inferred from tsunami deposits along the Kuril trench. *Nature*, 424(6949), 660.
- Olagnon, M. (2008). About the Frequency of Occurrence of Rogue Waves.
- Onorato, M., Residori S., Baronio F. (2016). *Rogue and Shock Waves in Nonlinear Dispersive Media*. Switzerland: Springer.
- Onorato, M., Osborne, A. R., Serio, M., & Bertone, S. (2001). Freak waves in random oceanic sea states. *Physical Review Letters*, 86(25), 5831–5834. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5831>
- Onorato, M., Residori, S., Bortolozzo, U., Montina, A., & Arecchi, F. T. (2013). Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts. *Physics Reports*, 528(2), 47–89.
- Onorato, M., Waseda, T., Toffoli, A., Cavaleri, L., Gramstad, O., Janssen, P., ... Osborne, A. R. (2009). Statistical properties of directional ocean waves: the role of the modulational instability in the formation of extreme events. *Physical Review Letters*, 102(11), 114502.
- Osborne, A. R. (2002). Nonlinear Ocean Wave and the Inverse Scattering Transform. In *Scattering* (pp. 637–666). Elsevier.
- Palais, R. S. (2000). An Introduction to Wave Equations and Solitons Section 1. *Book Chapter*, 1–59.
- Peregrine, D. H. (1983). Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied*

- Mathematics*, 25(01), 16. <https://doi.org/10.1017/S0334270000003891>
- Perkins, S. (2006). Dashing rogues: Freak ocean waves pose threat to ships, deep-sea oil platforms. *Science News*, 170(21), 328–329.
- Perlin, M. ; S. W. . (2000). Capillary Effects On Surface Waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32, 241–274.
- Pethick, C. J., & Smith, H. (2002). *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press.
- Phillips, O. M., Gu, D., & Donelan, M. (1993). Expected structure of extreme waves in a Gaussian sea. Part I: Theory and SWADE buoy measurements. *Journal of Physical Oceanography*, 23(5), 992–1000.
- Rasmussen K., Cai D., Bishop A., Jansen N. (1999). Localization in a nonlinear disordered system. *Europhys. Lett.* 47 (4) 421-427
- Rosenthal, W., & Lehner, S. (2008). Rogue waves: Results of the MaxWave project. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 130(2), 21006.
- Russell, J. S. (1895). The Wave of Translation in the Oceans of Water. *Air and Ether*, Trubner, London.
- Russell, S., Russell, D., The, V., & This, V. (2009). Chapter 1 Introduction, 1–17.
- Selim, M. M., Abdelwahed, H. G., & El-Attafi, M. A. (2015). Nonlinear dust acoustic rogue waves in a two temperature charged dusty grains plasma. *Astrophysics and Space Science*, 359(1). <https://doi.org/10.1007/s10509-015-2475-4>
- Shats, M., Punzmann, H., & Xia, H. (2010). Capillary rogue waves. *Physical Review Letters*, 104(10), 104503.
- Shrira, V. I., & Geogjaev, V. V. (2010). What makes the Peregrine soliton so special as a prototype of freak waves? *Journal of Engineering Mathematics*, 67(1), 11–22. <https://doi.org/10.1007/s10665-009-9347-2>
- Shyu, J.-H., & Tung, C.-C. (1999). Reflection of oblique waves by currents: analytical

- solutions and their application to numerical computations. *Journal of Fluid Mechanics*, 396, 143–182.
- Solli, D. R., Ropers, C., Koonath, P., & Jalali, B. (2007). Optical rogue waves. *Nature*, 450(7172), 1054.
- Stoof, H. T. C., Gubbels, K. B., & Dickerscheid, D. B. M. (2009). Bose-Einstein Condensation. *Ultracold Quantum Fields*, 235–272.
- Sukhorukov, A. A., Kivshar, Y. S., Eisenberg, H. S., & Silberberg, Y. (2003). Spatial optical solitons in waveguide arrays. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 39(1), 31–50. <https://doi.org/10.1109/JQE.2002.806184>
- Sulem, C., & Sulem, P.-L. (1997). Focusing nonlinear Schrödinger equation and wave-packet collapse. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 30(2), 833–844.
- Suntsov, S., Makris, K. G., Christodoulides, D. N., Stegeman, G. I., Hache, A., Morandotti, R., ... Sorel, M. (2006). Observation of discrete surface solitons. *Physical Review Letters*, 96(6), 63901.
- Szameit, A., & Nolte, S. (2010). Discrete optics in femtosecond-laser-written photonic structures. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 43(16), 163001.
- Tanaka, M. (1990). Maximum amplitude of modulated wavetrain. *Wave Motion*, 12(6), 559–568.
- Tang, Y., He, C., & Zhou, M. (2018). Darboux transformation of a new generalized nonlinear Schrödinger equation: soliton solutions, breather solutions, and rogue wave solutions. *Nonlinear Dynamics*, 92(4), 2023–2036.
- Tanoglu, G. (2006). Hirota method for solving reaction-diffusion equations with generalized nonlinearity. *International Journal of Nonlinear Science*, 1(1), 30–36. Retrieved from <http://www.internonlinearscience.org/upload/papers/20110227034406281.pdf>

- Tao, Y., & He, J. (2012). Multisolitons, breathers, and rogue waves for the Hirota equation generated by the Darboux transformation. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 85(2), 1–7. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.026601>
- Thomas, J. W. (1995). *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Retrieved from <https://books.google.com/books?id=op5COPwUfX8C&pgis=1>
- Tian, Q., Yang, Q., Dai, C.-Q., & Zhang, J.-F. (2011). Controllable optical rogue waves: Recurrence, annihilation and sustainment. *Optics Communications*, 284(8), 2222–2225.
- Mcclellan T. (2018). Retrieved September 22, 2018, from <https://www.financialsense.com/tom-mcclellan/stock-market-rogue-wave>
- Touboul, J., Kharif, C., Pelinovsky, E., & Giovanangeli, J.-P. (2008). On the interaction of wind and steep gravity wave groups using Miles' and Jeffreys' mechanisms. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 15, 1023–1031.
- Trulsen, K., Borge, J. C. N., Gramstad, O., Aouf, L., & Lefèvre, J. (2015). Crossing sea state and rogue wave probability during the Prestige accident. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 120(10), 7113–7136.
- Trulsen, K., Kliakhandler, I., Dysthe, K. B., & Velarde, M. G. (2000). On weakly nonlinear modulation of waves on deep water. *Physics of Fluids*, 12(10), 2432–2437.
- Tulin, M. P., & Waseda, T. (1999). *Laboratory observations of wave group evolution, including breaking effects*. *Journal of Fluid Mechanics* (Vol. 378). <https://doi.org/10.1017/S0022112098003255>
- Vekslerchik, V. E. (2006). Implementation of the Bäcklund transformations for the Ablowitz-Ladik hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(22), 6933–6953. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/22/009>

- Wadati, M. (2001). Introduction to solitons. *Pramana - Journal of Physics*, 57(5–6), 841–847. <https://doi.org/10.1007/s12043-001-0002-3>
- Walker, D. A. G., Taylor, P. H., & Taylor, R. E. (2004). The shape of large surface waves on the open sea and the Draupner New Year wave. *Applied Ocean Research*, 26(3–4), 73–83.
- Waseda, T., Kinoshita, T., & Tamura, H. (2009). Evolution of a random directional wave and freak wave occurrence. *Journal of Physical Oceanography*, 39(3), 621–639.
- Wen, L., Li, L., Li, Z.-D., Song, S.-W., Zhang, X.-F., & Liu, W. M. (2011). Matter rogue wave in Bose-Einstein condensates with attractive atomic interaction. *The European Physical Journal D*, 64(2–3), 473–478.
- White, B. S., & Fornberg, B. (1998). On the chance of freak waves at sea. *Journal of Fluid Mechanics*, 355, 113–138. <https://doi.org/10.1017/S0022112097007751>
- Xu, S., He, J., & Wang, L. (2011). The Darboux transformation of the derivative nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(30). <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/30/305203>
- Yan, Z. (2011). Financial Rogue Waves Appearing in the Coupled Nonlinear Volatility and Option Pricing Model. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.09.026>
- Zabusky, N. J., & Kruskal, M. D. (1965). Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 15(6), 240.
- Zakharov, V. E. (1983). Collapse and self-focusing of Langmuir waves. In *Basic Plasma Physics: Selected Chapters, Handbook of Plasma Physics, Volume 1* (p. 419).
- Zakharovand, V. E., & Shabat, A. B. (1972). Exact Theory of Two-Dimensional Self-Focusing and One- Dimensional Self-Modulation of Waves in Nonlinear Media. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 34(61), 118–134. <https://doi.org/10.1007/BF01075696>
- Zhen-Ya, Y. (2010). Financial rogue waves. *Communications in Theoretical Physics*, 54(5), 947.
- Zhenyun, Q. (2008). A generalized Ablowitz–Ladik hierarchy, multi-Hamiltonian

structure and Darboux transformation. *Journal of Mathematical Physics*, 49(6), 63505.