MATEMATİK ÖĞRETİM PROGRAMINDA (2013) FONKSİYON KONUSUYLA İLGİLİ EKOLOJİK SORUNLAR VE ÖĞRETMENLERİN PRAKSEOLOJİLERİ

Doktora Tezi

Mustafa GÖK

Eskişehir 2018

MATEMATİK ÖĞRETİM PROGRAMINDA (2013) FONKSİYON KONUSUYLA İLGİLİ EKOLOJİK SORUNLAR VE ÖĞRETMENLERİN PRAKSEOLOJİLERİ

Mustafa GÖK

DOKTORA TEZİ
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Matematik Eğitimi Doktora Programı
Danışman: Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Mayıs 2018

Bu tez çalışması BAP Komisyonunca kabul edilen 1408E364 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Mustafa GÖK'ün "Matematik Öğretim Programında (2013) Fonksiyon Konusuyla İlgili Ekolojik Sorunlar ve Öğretmenlerin Prakseolojileri" başlıklı tezi 11.05.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi, Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN	
Üye	: Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER	
Üye	: Prof. Dr. Selahattin ARSLAN	
Üye	: Doç. Dr. Dilek TANIŞLI	
Üye	: Doç. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN	

Prof.Dr. Handan DEVECİ
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

MATEMATİK ÖĞRETİM PROGRAMINDA (2013) FONKSİYON KONUSUYLA İLGİLİ EKOLOJİK SORUNLAR VE ÖĞRETMENLERİN PRAKSEOLOJİLERİ

Mustafa GÖK
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mayıs 2018
Danışman: Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN

Matematik programında yapılan köklü değişiklikler öğretim sürecinde kavramlar arasındaki ilişkilerin yeniden düzenlenmesini zorunlu kılmaktadır. Fonksiyon kavramıyla ilgili değişiklikler matematik öğretiminin paradigmalarını kökten değiştirebilme potansiyeline sahiptir. Değişim sürecinde fonksiyonların öğretimini öğretmenlerin nasıl gerçekleştirdiğini ortaya çıkarmak için Didaktiğin Antropolojik Teorisi'nden yararlanılmıştır. Çalışmanın amacı 2013 program değişikliğindeki fonksiyon konusuyla ilgili ekolojik sorunları, matematik öğretmenlerinin onuncu sınıfta fonksiyonların öğretimiyle ilgili ortaya koydukları didaktik prakseolojileri ve didaktik anları tespit etmek olarak belirlenmiştir. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcılarını üç matematik öğretmeni oluşturmaktadır. Veriler öğretmenlerin derslerinin video ve ses kayıt cihazlarıyla kaydedilmesi, öğretmenlerle yapılan görüşmeler ve alan notları aracılığıyla toplanmıştır. Veriler, ekolojik analizin temel sorularına, prakseolojik analizin bileşenlerine ve didaktik anlara göre analiz edilmiştir. Öğretim programının ekolojik analizi, programda yapılan değişikliklerin, öğretmenlerin fonksiyon kavramını öğretme yaklaşımlarını büyük ölçüde değiştirmesi gerektiğini göstermiştir. Ancak öğretmenlerin bu değişimi bir paradigma değişimi olarak algılamadıkları, fonksiyon kavramını öğretim yaklaşımlarını yeniden ele almaksızın değişimin birçok temel yönünü yüzeysel olarak yorumladıkları belirlenmiştir. Diğer yandan öğretmenlerin öğretim uygulamalarındaki didaktik prakseolojilerinin bileşenlerinde birçok eksiklik olduğu bulunmuştur. Bunun ötesinde öğretim sürecinde öğretmenlerin didaktik anları anlamlı öğrenmeleri destekleyecek şekilde organize edemediği belirlenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Fonksiyonlar, Didaktiğin Antropolojik Teorisi, Ekolojik analiz, Prakseolojik analiz, Didaktik anlar, 10. sınıf.

ABSTRACT

ECOLOGICAL PROBLEMS RELATED THE FUNCTION TOPIC IN MATHEMATICS CURRICULUM (2013) AND TEACHERS' PRAXEOLOGY

Mustafa GÖK
Department of Mathematics Education
Anadolu University, Institute of Educational Sciences, May 2018
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN

Reforms in the mathematics curriculum necessitate to rearrange the relations between the concepts in the teaching process. Changes related to the concept of function have the potential to fundamentally change the paradigms of mathematics teaching. The Anthropological Theory of Didactics was used to reveal how teachers perform the teaching of functions in the process of reform. Thus, the aim of this study was to identify ecological problems related to the functions subject in the 2013 curriculum reform and to determine the didactic praxeology and didactic moments related to the teaching of functions in the tenth grade. Case study, which is a qualitative research method, was used in the study. The participant of the research were three mathematics teachers. The data were gathered through the video and audio recording of teachers' lessons, interviews with teachers and field notes. The data were analyzed according to the basic questions of ecological analysis, the components of the praxeological analysis and didactic moments. The ecological analysis of the curriculum showed that the changes made in the curriculum should change to a great extent the ways the teachers have taught the function concept. However, it was determined that teachers did not perceive this change as a paradigm shift, but they commented many fundamental aspects of this change superficially, without reconsidering their approaches of teaching function concept. On the other hand, it was found that there were many deficiencies in the components of the didactic praxeologies that teachers performed for teaching functions. Furthermore, it was determined that teachers could not organize didactic moments to support students' understanding of the function related concepts.

Keywords: Functions, Anthropological Theory of Didactic, Ecological analysis, Praxeological analysis, Didactic moments, Tenth grade.

TEŞEKKÜR

Akademik hayatın en zorlu süreçlerinden biri, doktora öğrenim süreci olarak nitelendirilebilir. Her akademisyen gibi ben de bu zorlu süreçten geçtim.

Doktora sürecinde zorluklarla mücadele yapmaya yönelik girişimlerim beni geliştiren güç kaynağım oldu. Bu mücadelede yalnız olmamam diğer bir güç kaynağımdı. Çünkü doktora süresince karşılaştığım zorlukların üstesinden gelirken geçirdiğim süreçlerin ve bu süreçlerde nasıl yardım verilmesi gerektiğini bilen bir tez danışma kurulum vardı. Yoğun çalışma temposuna rağmen tez önerim ve tez izleme komitelerinde her rapor sürecinde tezimle ilgili gelişmeleri yakından takip eden, tecrübesiyle bana yol gösteren ve tezin olmazsa olmaz temelleriyle ilgili beni bilgilendiren Sayın Prof. Dr. Mehmet Naci Özer beyefendiye sonsuz teşekkür ederim. Tez savunma jürime katılarak olumlu eleştirileri ve önerileriyle ufkumu açan Sayın Prof. Dr. Selahattin ARSLAN ve Sayın Doç. Dr. Dilek TANIŞLI hocalarıma da sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez izleme komitelerinde tezin oluşmasında birçok bölümle ilgili önerileriyle tezi şekillendirmemde büyük katkısı bulunan ve ikinci bir danışman edasıyla benimle ilgilenen Sayın Doç. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN hocama teşekkürü bir borç bilirim. Doktora öğrenimim sürecinde hem ders döneminde hem de tez döneminde ne zaman talep etsem yardımını esirgemeyen, tıkandığım noktalarda verdiği dönütlerle yolumu aydınlatan, zihnim yorulduğunda bana destek olarak beni tekrar hedefe yönelten, bana matematik eğitimi kültürünü aşılayan ve matematiği en iyi öğrenme yollarından birinin kendisinin ifadesiyle "matematik üzerine düşünmek" olduğunu ifade eden hocam ve danışmanım Sayın Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN'a teşekkür ederim.

Doktora tez dönemimden itibaren danışmanımın yürütücülüğündeki proje ile tezime teknik destek ve araştırma desteği sağlayan Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu'na teşekkür ederim.

Son olarak, beni yetiştiren bu günlere gelmemi sağlayan annem Melek GÖK'e ve babam Hüseyin GÖK'e, her sıkıntıyı birlikte göğüslediğimiz ve her zaman yanımda bana destek olan hayat arkadaşım ve eşim Hülya GÖK'e sonsuz teşekkürler.

Mustafa GÖK

Eskişehir 2018

19 / 06 /2018

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Mustafa GÖK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

DAT	: Didaktiğin Antropolojik Teorisi
T	: Görev Tipi
t	: Görev
τ	: Teknik
θ	: Teknoloji
Θ	: Teori
C	: Cebirsel Teknik
G	: Geometrik Teknik
E	: Eşleme Tekniği
İK	: İlk Karşılaşma Anı
GTK&TG	: Görev Tiplerini Keşfetme ve Teknik Geliştirme Anı
TTÇO	: Teknolojik Teorik Çevreyi Oluşturma Anı
TÇ	: Tekniksel Çalışma Anı
K	: Kurumsallaştırma Anı

1. GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Son yıllarda ortaöğretim matematik dersi öğretim programlarında birçok değişiklik yapıldığı görülmektedir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2005, 2013). Bu değişiklikler reform ve değişim şeklinde sınıflandırılabilir. Reform programın felsefesi ve öğrenme kuramlarında yapılan olumlu yönde köklü değişiklik şeklinde tanımlanırken, değişim ise daha çok içerikte ya da içeriğe verilen sürelerde yapılan etki alanı sınırlı, belirsiz yönelimli düzenlemelerdir (Güvenç, 2015). Bu doğrultuda ilköğretim düzeyinde 2005 program değişikliği reform olarak nitelendirilmektedir (Hesapçıoğlu, 2009). Ancak ilköğretim düzeyinde 2015 program değişikliğinde, büyük ölçüde önceki programda (MEB, 2005) yer verilen felsefe korunurken, konuların içeriğinde ve yapısında düzenleme yapılmasıyla daha çok bir değişim gerçekleştirilmiştir (Ergün, Özmantar, Bay & Agaç, 2015, s.78).

Değişimin bir sonucu olarak, programda yapılan bu tür düzenlemeler uygulamada öngörülemeyen belirsizlikler doğurabilmektedir. Bunlardan bazıları, bir kavramın tanımında kullanılan diğer kavramların programdan çıkarılması nedeniyle ilgili kavramın nasıl tanımlanacağının bilinmemesi veya bir problemin çözüm yolunun oluşturulması için gerekli bir kavramın söz konusu değişiklik nedeniyle henüz öğretilmemiş olmasından dolayı problemin çözümünde nasıl bir yaklaşım sergileneceğinin açık olmaması şeklinde ortaya çıkabilmektedir. Bazen de bu değişimler, matematiğin temel konularının ya da kavramların öğretimlerini derinden etkileyecek bir potansiyele sahip olabilmektedir.

Ortaöğretim matematik dersi öğretim programında 2013 yılında yapılan değişimle birçok konunun içeriğinde ve programda bulunduğu yerlerde düzenlemeler yapıldığı görülmektedir (MEB, 2013). Bunlardan biri de fonksiyonlardır. Ortaöğretim düzeyinde matematiksel kavramların en önemlilerinden biri olan fonksiyon kavramının (Even, 1993; Sajka, 2003) öğretiminde zaman içerisinde birçok kez değişiklik yapılmıştır. Fonksiyonların ortaöğretim matematiğinin temeli olması (Dreyfus & Eisenberg, 1982; Even, 1993; Ponte, 1992; Sajka, 2003), konular arasında birleştirici ve merkezi bir rol oynaması (Monk, 1994; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989; Selden & Selden, 1992) açısından matematik öğretimindeki önemi yadsınamaz. Bunun bilincinde olarak birçok ülkenin öğretim programlarında ve öğretim yaklaşımlarında fonksiyonların öğretimine büyük önem verilmesi gerektiği belirtilmiş ve belli dönemlerde bu konunun öğretim programlarında yer alış şeklinde önemli değişiklikler yapılmıştır

(Breslich, 1932; Cha, 1999; Denbel, 2015; Hamley, 1934; Hedrick, 1938; Malik, 1980). Fonksiyonların öğretim programlarında ve ders kitaplarında nasıl yer aldığı ve ne tür değişiklikler içerdiğine yönelik literatürde birçok çalışma bulunmaktadır (Cha, 1999; Denbel, 2015; Michelsen, 2006; Watson & Harel, 2013).

Matematiğin ardışık ve yığmalı bir disiplin olmasının bir sonucu olarak öğretim programlarında öğretilmesi hedeflenen matematiksel kavramların tutarlı bir şekilde ve belli bir anlam bütünlüğü içerisinde yer alması gerekmektedir (MEB, 2013; NCTM, 2000). Ancak zaman zaman öğretim programlarında bu beklentinin tersi durumlara da rastlanmaktadır (Barbe´, Bosch, Espinoza, & Gascón, 2005; Bolea, Bosch, & Gascón, 2004; Erdoğan, 2006, 2014; Erdoğan, Eşmen, & Fındık, 2015). Bu durumlar hedeflenen öğretimin gerçekleşmesini zorlaştırmakta, hatta bazen imkansız kılmaktadır.

İspanya'da ortaöğretim seviyesinde programın hedeflediği şekilde bir cebirsel modellemenin gerçekleştirilmesi için uygun bir program tasarımının olmadığı görülmüştür (Bolea vd., 2004). Yine İspanya'da fonksiyonların limitinin hesaplanmasında öğretim programındaki uygulamalar ve bu uygulamaların arkasındaki bilgiler arasında uyumsuzluklar olduğu tespit edilmiştir (Barbe´ vd., 2005). Benzer şekilde Fransa'da lise 1. sınıfta cebirden fonksiyona geçişin belli bir anlam ve ilişki bütünlüğünden yoksun bir şekilde parçalanmış bir biçimde verilmeye çalışıldığı (Erdoğan, 2006), öğretim programlarının bir yansıması olarak Fransa'da lise 1. sınıf matematik ders kitaplarında fonksiyonlara ilişkin görevlerin çözüm teknikleri ile bu tekniklerin açıklamaları arasında nedensellik anlamında kopukluklar olduğu görülmüştür (Erdoğan, 2014). Türkiye'de ise matematik tarihiyle ilgili öğretim programlarında yer alan bazı matematiksel kavramların beslendikleri ve besledikleri nesneler ve bunların hangi amaçla kullanılabileceği açısından belirsizlikler bulunduğu tespit edilmiştir (Erdoğan vd., 2015). Bu çalışmalarda vurgulanmak istenen ortak nokta öğretim programlarında matematiksel kavramların tutarlı ve birbiriyle ilişkili olarak sunulmak istenmesine karşın öğretim programlarına bunların belli bir anlam bütünlüğünden uzak ve doğru şekilde ilişkilendirilememiş biçimde yansıdığıdır. Bu tür durumlar halihazırdaki öğretim programlarının günün şartları doğrultusunda yeniden ele alınması sonucunu doğurmaktadır.

Baki (2006), matematik dersi öğretim programında yapılan değişikliklerin çok iyi düşünülmüş olması gerektiğini belirtmektedir. Ancak yapılan değişiklikler çok iyi şekilde planlanmış olsa da istenilen sonuçlar yine de elde edilemeyebilir (Güvenç, 2015). Bunun en önemli nedenlerinden birisi yapılan değişikliklerin gerektirdiği bilgi ve becerilere öğretmenlerin yeterince sahip olmamasıdır (Güvenç, 2015). Reform hareketlerinin başarısında öğretmenlerin kilit rol oynadığını iyi bilinmektedir (Battista, 1994; Kilpatrick, 2009). Bu yüzden reform zamanlarında öğretmenlerin değişimi iyi okuyarak alışık oldukları öğretim yaklaşımlarının yerine yeni öğretim programının hedeflediği öğretim yaklaşımını benimsemeleri gerekmektedir. Ancak öğretmenler aynı bilgi ve deneyimlere sahip olsalar bile, yapılan değişikliklere farklı anlamlar yükleyebilmektedirler (Grant, Peterson, & Shojgreen-Downer, 1996).

Her reform döneminde belirli değişimlere uğrayan fonksiyonlar konusuyla ilgili değişikliklerin ortaya çıkarılması, bu değişiklikleri öğretmenlerin nasıl algıladıkları ve sınıf ortamına nasıl yansıttıkları önemli bir araştırma sorusudur. Literatürde öğretmenlerin reform zamanlarında öğretim yaklaşımlarında birçok değişiklik yaptıklarını düşünmelerine rağmen gerçekte çok az değişiklik yaptıklarını ve yeniliğin getirdiği bilgi ve becerilere öğretmenlerin sahip olmadığından dolayı programın başarısız olduğunu ortaya koyan araştırmalar bulunmaktadır (Güvenç, 2015; Wilson & Goldenberg, 1998). Bu nedenle Türkiye'de son yıllarda matematik dersi öğretim programlarında önemli ölçüde değişikliğe uğrayan fonksiyon konusunun öğretimi sürecinde öğretmenlerin nasıl bir adaptasyon ortaya koyacakları bu tezin çıkış noktasını oluşturmaktadır.

Bu konu aşağıdaki sorular çerçevesinde incelenecektir. Fonksiyonlar konusu bağlamında matematik dersi öğretim programı değişikliği öğretmenler için ne gibi yenilikler içermektedir? Öğretmenler, fonksiyonların öğretimiyle ilgili program değişikliğinin altında yatan düşünceyi nasıl algılamaktadırlar? Fonksiyon konusuyla ilgili yapılan değişiklikleri öğretmenler sınıf uygulamalarına ne ölçüde ve ne şekilde yansıtmaktadırlar? Bu süreçte öğretmenlerin karşılaştıkları zorluklar nelerdir?

Çalışmada bu soruların cevapları iki aşamada araştırılmıştır. Öncelikle matematik dersi öğretim programlarında fonksiyon konusuyla ilgili değişiklikler ortaya konulmaya çalışılmıştır. Sonrasında matematik öğretmenlerinin fonksiyonlar konusundaki öğretim süreçleri incelenmiştir.

Her program değişikliğinin şu veya bu şekilde ilgili dersin öğretimine bir yansıması olmaktadır. Bu yansımaları iyi anlayabilmek için bilimsel bilginin öğretilen bilgi oluncaya kadar geçtiği farklı süreçlere ve dönüşümlere odaklanmak gerekmektedir. Didaktik dönüşüm teorisi bilginin bu dönüşümünü modellemek amacıyla ortaya atılmıştır

(Chevallard, 1985). Didaktik dönüşüm teorisinin doğal bir sonucu olarak gelişen Didaktiğin Antropolojik Teorisi (DAT) bu dönüşümle ilgili daha sistematik ve kapsamlı bir yaklaşım ortaya koymakta ve bilginin öğrenme ve öğretme süreçlerini bu dönüşümlerle ilişkili olarak inceleme olanağı sağlamaktadır (Bosch, Chevallard, & Gascón, 2006; Bosch & Gascón, 2006; Chevallard, 1997, 1999).

Bu çalışmanın amacı bağlamında DAT'ın iki temel aracı ön plana çıkmaktadır. Bunlar ekolojik analiz ve prakseolojik analiz kavramlarıdır. Ekolojik analiz öğretim programında bir konunun yerini ve işlevini sorgulamayı içermektedir (Chevallard, 1992, 2002; Rajoson, 1988). Prakseolojik analiz ise bilginin bir kurumdan diğerine taşınması, edinilmesi, öğretim amacıyla dönüştürülmesi ve buna yönelik organizasyonunun nasıl olması gerektiği noktasında açıklamalar sunmaktadır (Bosch vd., 2006; Bosch & Gascón, 2006; Chevallard, 2006).

Chevallard (2006), insan eylemlerinin ve ürünlerinin genellikle amaçsız bir şekilde gerçekleştirilmediğini, aksine bu eylemlerin arkasında bir anlam dünyası olduğunu ve matematiğin de bu doğrultuda değerlendirilmesi gerektiğini belirtmiştir. Bu doğrultuda matematik öğretmenlerinin öğretim programlarında yapılan değişikliklere öğretim sürecinde nasıl yer verdiklerinin arkasında da bir anlam dünyası olduğu düşünülmektedir. Bu çalışmada matematik öğretmenlerinin fonksiyonlar konusunun öğretimiyle ilgili hangi değişikliğe ne ölçüde ve nasıl yer verdiği belirleyen faktörlerin ekolojik analiz ve prakseolojik analiz bağlamında ortaya konulması amaçlanmıştır.

2. ALANYAZIN

Bu bölüm üç alt başlıktan oluşmaktadır. Birincisinde fonksiyon kavramının gelişimine, kavramın farklı tanımlarına, öğretimine ilişkin yaklaşımlara ve öğretiminde karşılaşılan zorluklara yer verilmiştir. İkincisinde fonksiyonlar bağlamında programlardaki değişiklikler ve bu değişikliklere paralel olarak matematik öğretmenlerinin yaklaşımları literatüre dayalı incelenmiştir. Son olarak üçüncüsünde araştırmanın teorik çerçevesi olan DAT ve onun analiz metotları tanıtılmıştır.

2.1. Fonksiyon Kavramı ve Öğretimi

Matematiğin temel kavramlarından biri olan fonksiyon kavramı (Akkoç, 2005; Dreyfus & Eisenberg, 1982; Even, 1993; Mesa, 2004; Ponte, 1992; Sajka, 2003) ortaöğretim matematiğinde limit, süreklilik, türev ve integral gibi birçok konunun ön öğrenmesini oluştururken aynı zamanda konular arasında birleştirici ve merkezi bir rol oynamaktadır (Denbel, 2015; Michelsen, 2006; Monk, 1994; NCTM, 1989; Selden & Selden, 1992). Böylesine önemli bir kavramın öğretimi ile ilgili pek çok soru akla gelmektedir: Fonksiyon kavramı nasıl ortaya çıkmış ve nasıl gelişmiştir? Fonksiyon ne demektir? Zaman içerisinde kavramın hangi tanımları önem kazanmıştır? Öğretiminde hangi zorluklarla karşılaşılmaktadır? Bu zorlukların kaynağı olarak hangi faktörler ön plana çıkmaktadır? Fonksiyonların öğretiminde hangi yaklaşımlar kullanılmaktadır? Bu sorular bağlamında fonksiyonlar incelenecektir.

2.1.1. Fonksiyon kavramının tarihsel gelişimi ve tanımları

Fonksiyon kavramının tarihsel süreçte gelişimi incelendiğinde, kavramın belli bir zamanda ya da tek bir kişi tarafından keşfedilmediği, birçok bilim adamının kavramın gelişimine katkı sunduğu ve kavramın zaman içerisinde farklı şekillerde kullanılarak geliştiği anlaşılmaktadır (Even, 1993; Kleiner, 1989; Ponte, 1992; Thompson, 2013; Usiskin, Peressini, Marchisotto, & Stanley, 2003).

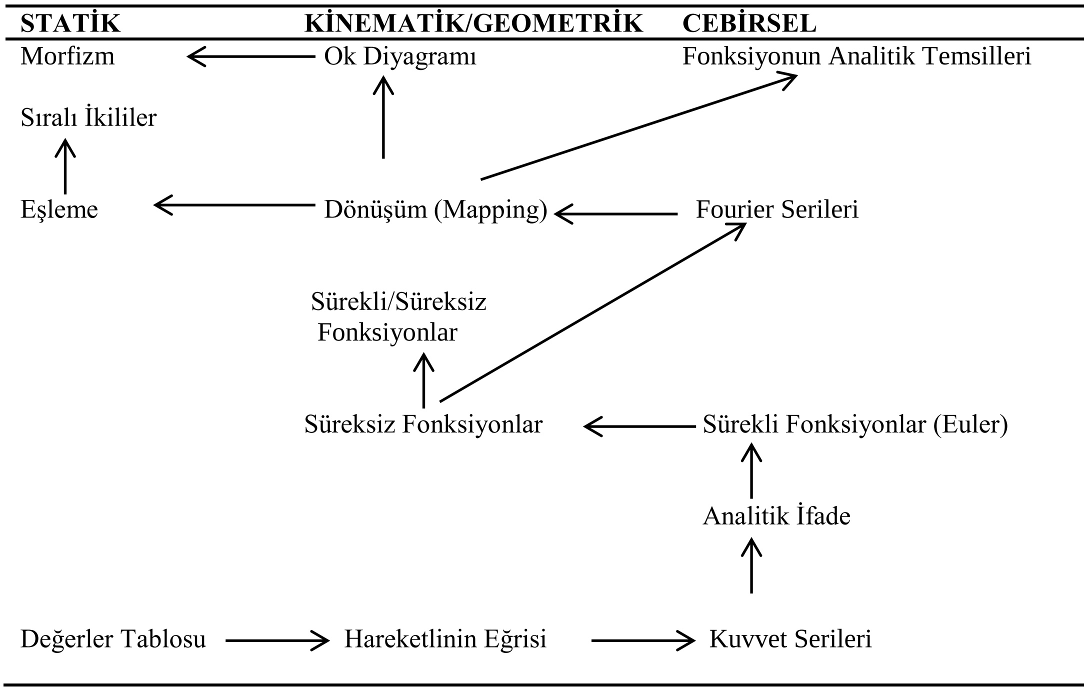
İlk olarak fonksiyon kavramının tarih sahnesinde ortaya çıkışı incelenirse, fonksiyon kavramının ilk örneklerine M.Ö. 2000 yıllarında rastlanıldığı belirtilmektedir (Kleiner, 1989). Babil tabletlerinde görülen bu örneklerde dört işlem, birim kesir, kare, karekök, küp ve küp kök gibi ifadeler tespit edilmiştir (Kline, 1972; Ponte, 1992).

Freudenthal (2002), fonksiyon kavramının orijinini fiziksel, sosyal, mental dünya ve bunlar arasındaki değişkenler arasında belirlenen ifade etme, kabul etme, üretme, yeniden üretme şeklindeki ilişki olarak açıklamıştır. Bu doğrultuda fiziksel dünyadan mental dünyaya fonksiyonların bir hareketlinin eğrisi olarak kullanımının ilk örneklerinden biri Nicole Oresme tarafından 14. yüzyılda verilmiştir (Merzbach & Boyer, 2011). Oresme burada değişmeyen hız altındaki bir cismin hız-zaman grafiğini kullanmıştır. Ama Oresme'nin bu yapının altında yatan kuralı açıklamadığı belirtilmiştir (Cajori, 1919). Daha sonraları Galileo onun sonuçlarını temel alarak uzaklık=sabit·(zaman)^2 şeklindeki formülü sunmuştur (Usiskin vd., 2003). Descartes geometrik olarak bir eğriyle temsil edilen, değişken büyüklükler arasında bir bağımlılığı gösteren iki değişkenli bir denklemi açıkça göstermiştir. Newton sonsuz kuvvet serilerinde fonksiyonların nasıl geliştirilebileceğini gösteren ilk matematikçilerdendir (Ponte, 1992).

Euler 1748 tarihli diferansiyel hesabın ilkeleri (Introductio in analysin infinitorum) adlı kitabında, içinde x olan üstel, logaritmik, trigonometrik, vs. her türlü analitik ifadeyi x'in bir fonksiyonu olarak adlandırmıştır (Cajori, 1919). Aynı yayında bazen Euler'in fonksiyonu, x ile y arasında elle çizilen herhangi bir eğri ile ifade edilen ilişki olarak belirttiği görülmektedir. Bu yaklaşımı temel alan Fourier ısının analitik kuramı (La Théorie Analytique de la Chaleur) isimli eserinde fonksiyonu analitik olarak ifade etmenin mümkün olmadığı matematiksel fizikte sınır değer koşullu problemler kapsamında incelemiştir. Burada grafik olarak verilen reel bir değişkenin fonksiyonunun trigonometrik bir seri ile ifade edilebileceği belirtilmiştir. Fonksiyonun bu tanımı Dirichlet'i büyük ölçüde etkilemiştir (Cajori, 1919). Dirichlet 1837'de, ilerleyen paragraflarda ifade edilecek olan, tanımı vererek kavramın gelişimine katkıda bulunmuştur. Son olarak, Cantor tarafından geliştirilen küme teorisiyle birlikte, fonksiyon kavramının sayısal ya da sayısal olmayan iki küme arasında fonksiyon şartlarını sağlayan bütün rastgele eşleştirmeler olarak genişletildiği görülmektedir (Denbel, 2015; Ponte, 1992).

Kleiner (1989, 1993) fonksiyon kavramının Babil tabletlerinde değerler tablosuyla doğduğunu, matematiğin farklı alanlarında farklı şekillerde kullanıldığını ve gelişim sürecinde geometrik, analitik ve mantıksal yaklaşımlar yoluyla tanımlandığını belirtmektedir. Kleiner (1989) fonksiyon kavramının gelişimiyle ilgili farklı tanımlarından geometrik ve analitik yaklaşımlar arasındaki mücadeleyi bir halat çekme yarışına benzetmektedir. Kleiner, daha sonra bu yarışa fonksiyon kavramının eşleme olarak ifade edilecek mantıksal tanımının da girdiğini, zamanla kavramın geometrik yaklaşımının terkedildiği ve yarışın mantıksal yaklaşım ve analitik yaklaşım arasında sürdüğü belirtmektedir (Kleiner, 1989). Bu doğrultuda Siu (1994) fonksiyon kavramının tarihsel süreçte döngüsel bir şekilde geliştiğini tespit etmiştir. Daha net bir ifadeyle Siu, kavramın statik bir özelliği olan değerler tablosuyla ortaya çıktığını daha sonra cebirsel ve geometrik anlamlarının geliştiğini sonra tekrar statik bir yaklaşım olarak ifade edilen sıralı ikili ve morfizm kavramlarına dayalı anlamlarının ön plana çıktığını belirtmiştir (Tablo 2.1).

Tablo 2.1. *Tarihsel süreçte fonksiyon kavramının gelişimi* (*Siu, 1994, s.118)*



Tablo 2.1'de görüleceği üzere, fonksiyon kavramının tarihsel gelişim süreci statik anlamda değerler tablosuyla başlanmış, geometrik anlamda bir hareketlinin eğrisi bağlamında devam etmiş ve sonra cebirsel anlamda kuvvet serilerinin ifade edilmesinde kullanılmıştır. Geometrik ve cebirsel anlamda kavram birçok farklı bağlamda kullanıldıktan sonra statik anlamı günümüzde tekrar ön plana çıkmıştır.

Bu gelişim sürecinde kavram farklı şekillerde tanımlanmıştır. Cha (1999) 17 ve 18. yüzyıl matematikçilerinin çoğunlukla fonksiyonu bir nicelik, işlem, formül, ifade ya da ilişki olarak tanımladığını belirtirken, 19 ve 20. yüzyıl matematikçilerinin ise karşılıklı eşleme kuralları olarak tanımladıklarını belirtmektedir. Bu tanımlardan bazıları Tablo 2.2'de verilmiştir.

Tablo 2.2. *Tarihsel süreçte kullanılan fonksiyon tanımları (Cha, 1999)*

Tarih	Matematikçi	Verilen Tanım
1665	Newton	Değişkenler arasındaki herhangi bir ilişkidir.
1667	Gregory	Cebirsel işlemlerin bir dizisi ya da akla gelebilecek diğer herhangi cebirsel işlemler vasıtasıyla diğer niceliklerden elde edilen bir niceliktir.
1673	Leibniz	Eğrinin bir noktasından diğer noktasına değişen herhangi niceliktir.
1697	Bernoulli	Sabitler ve değişkenlerin transandantal ve cebirsel ifadeleri kullanılarak oluşturulan niceliklerdir.
1714	Leibniz	Bir değişkene bağlı niceliklerdir.
1718	Bernoulli	Bir nicelik olarak belli bir değişkenin fonksiyonu değişken ve sabitlerin bazı yöntemlerde birleştirilmesidir.
1748	Euler	Değişken nicelikler ve sayılar ya da sabit nicelikler ile temsil edilen değişkenler arasındaki ilişkinin herhangi bir şekilde birleşmesiyle oluşan analitik ifade ya da formüldür.
1755	Euler	Eğer x bir değişkenli niceliği gösterirse, sonra belirli ya da her ne şekilde olursa olsun x'e bağlı bütün değişkenler, x'in bir fonksiyonu olarak adlandırılır.
1797	Lagrange	Herhangi bir şekilde değişkenlerin hesaplama için girdiği yararlı herhangi bir ifadedir.
1806	Lagrange	Bilinen nicelikler üzerine gerçekleştirilebilecek işlemlerin bir birleşimiyle bilinmeyen niceliklerin değerlerini elde etme ve ikincisi hesaplamanın düzgün bir şekilde son sonucudur.
1829	Dirichlet	Eğer $a<x<b$ aralığında tanımlanan her bir x değişkeninin değerine karşılık tanımlı bir y değeri varsa, y, x değişkeninin bir fonksiyonudur. Ayrıca burada eşlemenin hangi yolla kuruldu önemsizdir.
1917	Caratherdory	Bir kümeden reel sayılar kümesine karşılıklı eşlemenin bir kuraldır.
1939	Bourbaki	İki küme arasında karşılıklı eşlemenin bir kuraldır.
1939	Bourbaki	E ve F iki küme olsun. (farklı olabilir ya da olmayabilir) E'nin bir değişkeni olan x ve F'nin bir değişkeni y arasındaki bir bağıntıda, eğer E'deki tüm x'lerin her biri için verilen bağıntıda x ile bağlı F'de sadece bir tek y varsa buna y'de fonksiyonel bir bağıntı olarak adlandırılır.
1950'ye kadar	Dirichlet-Bourbaki	Tanım kümesindeki her bir eleman için değer kümesinde sadece ve sadece bir eleman karşılık gelen iki küme arasındaki herhangi bir eşlemedir.

Tablo 2.2'de görüldüğü üzere, birçok matematikçi fonksiyon için farklı tanımlar kullanmışlardır. Hatta bazı matematikçilerin birden fazla tanım kullandıkları ve zamanla tanımlarında değişikliğe giderek geliştirdikleri görülmektedir.

Günümüzde baskın olarak, fonksiyon kavramının çokluklar arasında yapılan eşleme, iki ya da daha fazla değişken arasındaki ilişki ve girdileri çıktılara dönüştüren dinamik bir süreç şeklinde ifade edilebilecek üç farklı tanımının baskın olduğunu söylenebilir. Bu tanımlardan bazıları özetle aşağıda verilmiştir.

- A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, f, A'dan B'ye bir bağıntı olsun. $\forall a \in$ A için, a elemanına f ile bağlı B kümesinde bir ve yalnız bir b elemanı bulunabilirse, f'ye A'dan B'ye bir fonksiyon denir (Çallıalp, 2012; Kleiner, 1989).
- Girdileri çıktılara dönüştüren dinamik bir sürece (bir mekanizmaya) fonksiyon denir (Kleiner, 1989; Usiskin vd., 2003).

- Eğer *y* değişkeni, bir kural çerçevesinde *x*'e sayısal değerler verildiğinde tek bir değer alıyorsa, *x* değişkeniyle arasında bir ilişki belirlenmişse, o zaman *y*'ye, *x* bağımsız değişkeninin bir fonksiyonu denir (Merzbach & Boyer, 2011; Usiskin vd., 2003).

Bu tanımlar incelendiğinde fonksiyon kavramının birinci tanımda Bourbaki ekolünün 1939'da ifade ettiği gibi özel bir bağıntı olarak, ikincisinde günümüz bilgisayar biliminin etkisini de yansıtan süreç olarak (örneğin fonksiyon makinesi şeklinde) ve sonuncusu ise Dirichlet'in 1837'de ifade ettiği gibi bağımlı ve bağımsız değişken arasında bir kural (eşlemenin nasıl yapıldığı önemli değil) olarak düşünüldüğü görülmektedir.

2.1.2. Fonksiyon kavramının öğretiminde karşılaşılan temel zorluklar

Fonksiyonlarla ilgili literatür incelendiğinde kavramın tanımında (Eisenberg, 2002; Markovits, Eylon, & Bruckheimer, 1986; Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989), kullanılan notasyondan (Gray & Tall, 1994; Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990; Thompson, 2013), verilen bir ifadenin fonksiyon belirtip-belirtmediğinden (Leinhardt vd., 1990; Tall & Bakar, 1992), farklı temsillerinden ve bu temsiller arasında bağın kurulamamasından (Adu-Gyamfi, Stiff, & Bossé, 2012; Leinhardt vd., 1990) kaynaklı birçok zorlukla karşılaşıldığı görülmektedir.

Özdemir Erdoğan, Erdoğan ve Yanık'ın (2012) ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonlar konusuyla ilgili hazırbulunuşluk durumlarını inceledikleri çalışmada öğrencilerin fonksiyon kavramını tanımlamada yetersiz olduklarını belirtmişlerdir. Vinner (1983), 10 ve 11. sınıf öğrencilerine "Sence bir fonksiyon nedir?" şeklinde bir soru için öğrenci yanıtlarından dört farklı kategori tespit etmiştir. Bu kategoriler şunlardır: 1. Öğrencilerin bazen kendi kelimelerinin de içine girdiği ders kitabındaki tanım, 2. Kurallı bir eşleme, 3. Cebirsel bir terim, bir formül, bir denklem, bir aritmetik manipülatif, vs. 4. Kavramın tanımı olarak alınan zihinsel bir resimde bazı elemanlar. Benzer bir çalışmayı Vinner ve Dreyfus (1989) üniversite öğrencileri ve ortaokul öğretmenleriyle gerçekleştirmiş, fonksiyonun tanımıyla ilgili eşleme, bağlılık ilişkisi, kural, işlem, formül ve temsil olmak üzere altı farklı sınıflandırma yapmışlardır. Ayrıca söz konusu çalışmada katılımcılardan genellikle Drichlet-Bourbaki tanımını verenlerin tanımlarıyla kavrama ilişkin algılamaları arasında tutarsızlık olduğu belirlenmiştir. Yapılan çalışmaların birçoğunun vurgusu, öğrencilerin fonksiyon kavramıyla ilgili sınırlı düzeyde bir kavrayışa sahip oldukları şeklinde tespit edilmiştir (Even, 1993; Tall & Vinner, 1981).

Tall ve Bakar (1992), öğrencilerin büyük çoğunluğunun sabit fonksiyon türünden eşleştirmeleri fonksiyon olarak görmediklerini ve verilen bir bağıntının grafiğinin fonksiyon belirtip-belirtmediğiyle ilgili kavramın tanımından ziyade zihinlerinde yerleşmiş alışık oldukları fonksiyon prototiplerine göre karar verme eğiliminde olduklarını belirtmiştir.

Fonksiyon kavramının Bourbaki yaklaşımıyla öğretiminin öğrenciler için büyük ölçüde soyut kaldığını belirten birçok araştırmacının, bu yaklaşıma karşı çıktığı görülmektedir (Eisenberg, 2002; Markovits vd., 1986). Çünkü bu yaklaşımda, fonksiyon iki değişken arasında bir ilişki olarak görülmekte, kavramın değişkenler arasında bir denklem ifade etmesi yönü yalnızca üstü kapalı bir şekilde yer almaktadır (Markovits vd., 1986). Bu yaklaşım ilerleyen konularda fonksiyon kavramının gerektiği gibi kullanılamamasına yol açabilmektedir (Janvier, 1998).

Fonksiyon kavramının öğretimiyle ilgili bir diğer zorluk kavramın matematiksel ifadesi için kullanılan notasyondan kaynaklanmaktadır. Thompson (2013), notasyonla ilgili zorlukların iki kaynağı olduğunu belirtmiştir. Birincisi öğrenciler fonksiyonun sadece *y* sembolüyle kullanılabileceğini görmektedir. Ders kitapları ise gerekli olmadığı durumlarda bile öğrencilerin *f(x)* kullanmaları gerektiğini söylemektedir. Bu farklılık öğrencilerde anlam kargaşasına sebep olmaktadır. İkinci zorluk öğrencilerin fonksiyon notasyonunun kullanımını içselleştirememesi şeklinde ifade edilmiştir. Burada bir fonksiyonun notasyonunda girdilerin, fonksiyon isminin, çıktıların ve çıktıların nasıl üretileceğine ilişkin fonksiyonun kuralının parçaları arasındaki ilişkinin uygun bir şekilde kavratılamaması kastedilmektedir. Diğer yandan *y=f(x)* gösteriminde " *f* " sembolü ile "*f(x)*" gösterimi öğrenciler için zorluk oluşturduğu belirtilmiştir (Uygur Kabael, 2010). Burada *f(x)* gösterimi üzerinde hesaplama yapılan cebirsel ifade yani süreci (Gray & Tall, 1994) belirtirken, *f* sembolü matematiksel bir nesne olarak fonksiyona denk gelmektedir.

Fonksiyon kavramın farklı temsillerinin kullanımı öğrenciler için bir başka güçlük kaynağıdır. Öğrencilerin çoğunlukla cebirsel temsilleri kullanma eğiliminde oldukları tespit edilmiştir (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992). Selden, Selden ve Mason (1994), çoğu üniversite öğrencisinin analiz problemlerini çözerken cebirsel teknikleri kullandıklarını ve bu problemlerin çözümlerinde zorlandıklarını tespit etmişlerdir.

Clement (1985) grafik okuma becerisinin matematik okuryazarlığı, fonksiyon ve değişken kavramlarının anlaşılması ve aynı zamanda lisans düzeyinde analiz dersindeki basit kavramların geliştirilebilmesi için büyük önem taşıdığını belirtmiştir. Ancak aynı yayında öğrencilerin fonksiyon grafiğini resim olarak algıladıkları vurgulanmıştır.

Adu-Gyamfi vd. (2012), lineer fonksiyonların cebirsel, grafik ve tablo temsilleri arasındaki geçişlerde öğrenci hatalarını incelemiştir. Öğrencilerin uygulama (işlem hataları), yorumlama (ikililerin yanlış okunması) ve koruma hataları (grafik çiziminde doğru ikililer belirlenmesine rağmen grafiğin eksenleri kestiği noktanın yanlış çizilmesi) olarak ifade edilebilecek üç tür hata yaptıkları tespit edilmiştir. Leinhardt vd. (1990), öğrencilerin lineer olmayan (örneğin ikinci dereceden fonksiyonlar) grafikleri doğrusal çizme eğiliminde olduklarını belirlemiştir. Ayrıca öğrenciler için fonksiyonların grafik temsilinden cebirsel temsile geçişin, cebirsel temsilden grafik temsiline geçişe göre daha zor olduğu tespit edilmiştir. Benzer şekilde Lauten, Graham ve Ferrini-Mundy (1994) öğrencilerin grafik temsilinden cebirsel temsillere geçişte zorlandıklarını vurgulamıştır. Bossé, Adu-Gyamfi ve Cheetham (2011) öğrencilerin temsiller arası geçişte diğer temsillerden (tablo, cebirsel, grafik) sözel temsile geçişte daha fazla zorlandıklarını belirtmiştir.

2.1.3. Fonksiyon kavramının öğretimine ilişkin yaklaşımlar

Literatürde fonksiyonların nasıl öğretilmesi gerektiğiyle ilgili birçok yaklaşım ve öneri bulunmaktadır. Bunlardan bazıları: İşlemsel ve yapısal yaklaşım (Sfard, 1991), süreç yaklaşımı (McGowen, DeMarois, & Tall, 2000), APOS teori yaklaşımı (Dubinsky & Wilson, 2013), Star Modeli (Janvier, 1987) ve çoklu temsiller kullanımı (Lloyd & Wilson, 1998) olarak belirtilebilir.

Sfard (1991) fonksiyon gibi soyut kavramların yapısal (nesne olarak) ve işlemsel (süreç olarak) olarak ifade edilebilecek iki farklı yolla kazanılabileceğini belirtmiştir. Bu yaklaşımların görünüşte farklı olmalarına rağmen gerçekte birbirini tamamladıkları belirtilmiştir. İnsanların çoğu için yeni matematiksel bir kavramın ilk adımda işlemsel kavrama şeklinde kazanıldığı ve yapısal kavramanın daha uzun bir süreç gerektirdiği vurgulanmıştır. Bir kavramın yapısal olarak edinilme süreçleri içselleştirme (interiorization), yoğunlaşma (condensation) ve somutlaştırma (reification) şeklinde açıklanmıştır.

Fonksiyonların nasıl öğretilmesi gerektiği ile ilgili McGowen vd. (2000), kavramın öğreniminde kavramın süreç yönünü temsil eden girdi-çıktı yaklaşımı olarak ifade edilebilecek fonksiyon makinesi yaklaşımıyla başlanabileceğini belirtmişlerdir. Bu konuda farklı bir yaklaşım sunan Cooney ve Wilson (1993), fonksiyon kavramının tarihsel süreçte öncelikle gerçek dünya olgusunda bağlılık ilişkisi olarak, sonra cebirsel olarak, daha sonra rasgele eşleme olarak, en sonunda ise sıralı ikililerin kümesi olarak tanımlandığını belirttiği çalışmasında bu sıralamanın pedagojik gelişim açısından okul matematiği için fonksiyon kavramının nasıl öğretilmesi gerektiği konusunda bir perspektif sunduğunu vurgulamıştır.

Dubinsky ve Wilson (2013), öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarında APOS teorisi yaklaşımını kullanmıştır. Matematik öğrenimi için bir rehber olarak Piaget'nin çalışmalarına dayanan (Asiala vd., 1996) bu yaklaşımda, öğrencilerin fonksiyonları karşılayan örnekleri tanımlama becerilerinde, çoklu temsillerin kullanımı ve temsiller arası geçişte olumlu sonuçlar gözlendiği belirtilmiştir.

Janvier (1987) fonksiyonların öğretiminde farklı temsillerin kullanımı ve temsiller arası geçişe vurgu yaptığı "star" modelini sunmuştur. Star modelinde beş tepeden oluşan beşgenin tepeleri grafik, tablo, cebirsel formül, sözel tanım ve durum olacak şekilde fonksiyon kavramının yaygın olarak kullanılan temsillerine karşılık gelmektedir. Beşgenin kenarları ve köşegenleri ise temsiller arasındaki geçişleri ifade etmektedir (Akt. Bowman, 1993).

Cunningham (2005) fonksiyonların çoklu temsillerinin kullanımının fonksiyonun anlaşılması için kritik bir önemi olduğu belirtilmiştir. Bu konuda Lloyd ve Wilson (1998), değişen bir öğretim programının ilk kez uygulanması sürecinde çoklu temsiller arasındaki çeşitli ilişkilerin özellikleri ile ilgili iyi yapılandırılmış etkinliklerin öğrencilerin söz konusu kavrama ilişkin anlamlı tartışma yapmalarını desteklediklerini belirtmişlerdir. NCTM (2000) fonksiyon kavramının çeşitli temsillerde kullanılması gerektiğini belirtmektedir. NTCM standartlarında ayrıca öğrencilerin problem çözmek için matematiksel temsiller arasında seçim yapabilmesi, uygulama yapabilmesi ve temsiller arası geçiş yapabilmesinin gerektiği de vurgulamaktadır. Matematik dersi öğretim programında fonksiyonu soyut bir kavram olarak tanıtmak yerine gerçekçi yaşam durumları kullanılarak fonksiyonun cebirsel, grafik ve tablo temsilleri üzerinde durulması tavsiye edilmektedir (MEB, 2013).

Öğretimde çoklu temsillerin kullanılmasının nedeni, fonksiyon kavramının farklı temsillerinin kavramı tam olarak tanımlamaksızın kavramın özel bir yönü ile ilgili bilgi sunması (Gagatsis & Shiakalli, 2004) olarak gösterilebilir. Ainsworth (2006) temsillerin bilişsel süreç ve görev farklılıklarını tamamlayarak, birey ve bilgi arasında esnek ilişkilerin kurulmasına yardımcı olduğunu belirtmiştir. Bu durumu destekleyecek şekilde Delice ve Sevimli (2016) çoklu temsillerin kullanılmasının konunun anlaşılmasına yönelik öğrencilerin bireysel farklılıklarını ortadan kaldırabilecek bir araç olarak yararlanabileceğini vurgulamıştır. Adu-Gaymfi (2007) lineer bir fonksiyonun çoklu temsillerle ilişkilendirilerek sunulduğu öğretim ortamının tüm öğrenciler için olmasa da bazı öğrenciler için temsiller arası geçişte öğrencilerin gelişimine yardım etme potansiyeli olduğunu belirtmiştir.

Bu çalışmalardan fonksiyon kavramının öğretiminde genellikle çoklu temsillerin kullanımına vurgu yapıldığı görülmektedir. Kurumsal anlamda birçok yayında matematik öğretiminde çoklu temsillerin kullanılması gerektiği üzerine vurgu yapılmaktadır (NCTM, 2000; MEB, 2005, 2013). Tüm bunlarla birlikte özellikle program değişikliklerinde fonksiyonların öğretiminde yapılan değişikliklerin ne tür yenilikler getirdiğinin bilinmesi gerekmektedir. Öğretmenlerin bu yeniliklere ilişkin adaptasyon sürecinde yaptıkları öğretimsel değişiklikler, değişimin başarısı için önemli faktörler olarak nitelendirilebilir. Bundan dolayı sonraki bölümde öğretim program değişiklikleri, öğretim program değişikliklerinde öğretmen davranışları ve öğretim program değişikliklerinin fonksiyonların öğretiminde getirdiği yenilikler verilmiştir.

2.2. Öğretim Programlarındaki Değişiklikler ve Öğretmenler

2.2.1. Öğretim programlarındaki değişikliklere genel bir bakış

Birçok ülkenin matematik dersi öğretim programı incelendiğinde zaman içerisinde toplumun ihtiyaç duyduğu insan tipi, yapılan araştırmaların çıktılarının eğitime yansıtılmak istenmesi, bilgideki hızlı değişim, çağın gereklerine ayak uydurma, politik baskılar ve gelişen teknolojinin eğitim-öğretime entegrasyonu gibi durumlardan kaynaklı köklü değişikliklere gidildiği görülmektedir (Baki, 2006; Herrera & Owens, 2001; Hiebert vd., 1996; MEB, 2005, 2013). Öğretim programını oluşturan öğelerin dinamik bir ilişkide olduğu ve birinde yapılacak bir değişikliğin sistemin tümünü etkileyebileceği belirtilmiştir (Demirel, 2015). Bu anlamda matematik dersi öğretim programlarına yapılan müdahalelerin mevcut sistemin belli ölçüde ya da tamamen değiştirilmesi sonucunda yeniden düzenlenerek geliştirilmesi niyetiyle gerçekleştirildiği belirtilebilir. Fakat, matematik dersi öğretim programlarında yapılan değişikliklerde her zaman iyi sonuçlar alınamayabilmektedir (Baki, 2006; Güvenç, 2015).

Kilpatrick ve Stanic (2004) Amerika'da yapılan matematik dersi öğretim programlarından iki tanesinin bu açıdan ön plana çıktığını belirtmişlerdir. Bunlardan birincisi 20. yüzyılın başında birleştirilmiş ve uygulamalı matematik programı, diğeri aynı yüzyılın ortalarından sonra ortaya çıkan reform çabalarının merkezindeki modern matematiktir. Bu reformların okullarda öğretilen matematik ile üniversitelerde öğretilen bilimsel matematik arasında boşluk meydana getirdiği belirtilmektedir.

Bu çalışmalarda matematik öğretim programlarına ilişkin değişikliklerde, teoride uygun gibi görülen değişimlerin uygulamada farklı değişkenlerin baskısıyla istenilen başarıyı yakalayamadığını göstermektedir. Bu durumun nedenlerinden biri, belki de en önemlisi, reformu öğretmenlerin nasıl algıladığı ve sınıf kurumunda reformun gerekliliklerini ne ölçüde yansıttığıdır.

2.2.2. Öğretim programı değişikliklerinde öğretmenler

Birçok çalışmada reformların başarısında öğretmenlerin rolüne dikkat çekildiği görülmektedir (Battista, 1994; Güvenç, 2015; Kilpatrick, 2009). Birçok ülkede matematik dersi öğretim programlarında gerçekleştirilen reformların, yeni karşı reformların tetikleyicileri olduğu belirtilmiştir (Artigue vd., 2001; Kilpatrick, 2009). Bu durum öğretmenlerin kimi zaman program değişikliklerinde kısa sürede birbiriyle taban tabana zıt programları sınıf kurumunda uygulamak durumunda kaldıklarını göstermektedir. Bu ise program değişikliklerinin başarısında hangi değişkenlere odaklanılması gerektiği fikrini ortaya çıkarmıştır.

Program değişikliklerinin başarılı olabilmesi program değişimiyle ilgili birçok değişkenin uygun bir koordinasyonda çalışmasıyla mümkündür. Ancak tüm bu çabalar programın uygulayıcıları tarafından anlaşılmazsa hepsi sonuçsuz kalabilir. Battista (1994) Amerika'da matematik eğitiminde reform hareketlerinin başarılı olabilmesi için öğretmenlerin kilit rol oynadığını belirtmiştir. Ancak Battista çoğu öğretmenin matematik hakkında sahip oldukları inanışların reform girişimlerinin altında yatan fikirlerle uyumsuz olduğunu belirtmiştir. Bu inanışların öğretmenin ne öğreteceğinin yanı sıra onu nasıl öğreteceği noktasında da kritik bir rol oynadığı ve burada ortaya çıkan uyumsuzluğun öğrencilerin matematik öğrenmelerine ciddi zararlar verebileceği vurgulanmıştır.

Reform zamanlarında karşılaşılan diğer bir tehlike kısa bir sürede yeni programın çerçevesinde hazırlanmaya çalışılan ders kitapları ve bu kitapları öğretmenlerin nasıl kullanacağı ile ilgilidir. Brumbaugh ve Rock (2001), modern matematiğin uygulanmaya başlandığı ilk yıllarda hazırlanan ders kitaplarının eski kitaplara yapılan küçük eklemelerle oluşturulduğu ve öğretmenlerin genellikle bu eklemeleri atlayarak alışık oldukları matematik öğretimini gerçekleştirdiklerini belirtmiştir. Programa dahil edilen konularla ilgili öğretmenlerin çok az eğitim aldıkları ve bunun sonucunda bu değişikliğin birçok uzman tarafından başarısız olarak görüldüğü belirtilmiştir.

Grant vd. (1996) reform zamanlarında öğretmenlerin birer öğrenenler olarak düşünülebileceğini ve reformu gerçekleştirenlerin öğretmenlerin öğrenmek zorunda oldukları durumlara ilişkin olanakları da (kitaplara, testlere, hizmet içi kurslara, zümre çalışmalarına, üniversitelerin kurslarına ve konuyla ilgili bilimsel çalışmalar, vs.) düşünmeleri gerektiğini belirtmişlerdir. Ancak bu olanaklara ulaşabilme dahi yapılan değişiklikle ilgili genel bir anlamayı garanti etmeyebilir. Benzer öğrenme imkanlarına sahip öğretmenlerde bile, gerçekleştirilen reformla ilgili farklı anlamalar meydana gelebilmektedir (Grant vd., 1996). Çünkü öğretmenlerin öğrenmeleri önceki bilgilerden, deneyimlerden ve başka pek çok faktörden etkilenmektedir. Yani öğretmenlerin değişen programı doğru anlaması ve sınıflarında programın gerektirdiği öğretim pratiklerini uygulaması bir programın başarıyla uygulanmasında büyük öneme sahiptir. Ancak öğretmenler reform zamanlarında öğretim yaklaşımlarının büyük ölçüde değiştiğini düşünmelerine rağmen onları dışarıdan gözlemleyenler için onların öğretim yaklaşımlarında çok da değişiklik olmayabileceği belirtilmiştir (Wilson & Goldenberg, 1998).

Bu çalışmalardan hareketle yeni uygulanmaya başlanan bir programın başarısında programın uygulayıcıları konumunda olanların değişime direnç göstermek yerine öğrenenler topluluğu şeklinde hareket etmeleri gerekmektedir. Bununla birlikte programı hazırlayanların da bu topluluğun programın öğretim yaklaşımını anlamalarına ilişkin ihtiyaç duydukları hizmet içi kurs, eğitim, teknolojik destek türünden ihtiyaçları düşünerek değişiklikleri gerçekleştirmeleri gerektiği söylenebilir.

2.2.3. Matematik öğretim programlarında yapılan değişikliklerde fonksiyonların öğretimi

Okul matematiğinde fonksiyon kavramının önemini vurgulayan birçok araştırma bulunmaktadır (Breslich, 1932; Cha, 1999; Hamley, 1934; Hedrick, 1922; Lloyd & Wilson, 1998; Malik, 1980; Markovits vd., 1986; Vinner & Dreyfus, 1989; Watson & Harel, 2013). Malik (1980) fonksiyonların öğretiminde üniversite düzeyinde öğretim programlarında gerçekleştirilen değişikliklerin ortaöğretim matematik dersi öğretim programlarında yapılan değişikliklerin tetikleyicisi olduğunu belirtmiştir. Ancak ortaöğretim düzeyinde gerçekleştirilen değişikliklerin aniden yapıldığı vurgulanmıştır.

Alman Profesör Felix Klein ortaöğretim matematiğinde fonksiyon kavramının önemine ilk dikkat çekenlerden birisi olmuştur (Breslich, 1932; Hedrick, 1938). Bundan sonra Avrupa'daki birçok ülkede ve Amerika'da 20. yüzyılın başında yayınlanan ders kitaplarında fonksiyon kavramı öğretilmeye başlanmıştır (Hamley, 1934). Yine aynı yıllarda matematik eğitimi reform hareketleri kapsamında öğretim programlarında fonksiyon kavramının önemine ve rolü üzerine odaklanıldığı görülmektedir (Breslich, 1932; Hamley, 1934; Hedrick, 1922).

Bu reform hareketlerinin etkisiyle fonksiyon kavramı ders kitaplarında yer aldığı zamandan günümüze kadar büyük ölçüde değişiklik geçirmiştir. Denbel (2015) fonksiyon kavramının ortaokul matematik dersi öğretim programlarında 20. yüzyılın başlarında gözükmeye başladığını belirtmiştir. Başlangıçta Euler'in 18. yüzyılda kullandığı tanıma benzer bir yaklaşım takip edilse de (Bkz. Tablo 2.2) yeni matematik reformuyla (1950-1970 arası) birlikte çoğu ülkede okul müfredatlarında modern anlamda tanımlandığı belirtilmiştir (Denbel, 2015; Malik 1980). Ancak bu yaklaşımın oldukça soyut olduğu gerekçesiyle çoğu öğrenci için güçlük teşkil ettiği belirtilmiştir (Malik, 1980; Markovits vd., 1986; Tall & Bakar, 1992).

Cha (1999) Amerika'da 1905 ile 1997 arasında yayınlanmış matematik ders kitaplarındaki tanımları incelemiştir. Analiz sonuçlarına göre ders kitaplarında üç farklı fonksiyon tanımı kullanıldığı tespit edilmiştir. Bunlar, mantıksal tanım, genel tanım, analojik tanımdır. Mantıksal tanımda fonksiyon iki küme arasında bazı şartları sağlayan bir eşleme olarak verilmektedir. Genel tanım, birinde yapılan değişiklik diğerinde de değişikliğe neden olacak şekilde, iki değişken arasında bir ilişki olarak sunulmaktadır. Analojik tanım ise fonksiyon makinesi benzetmesi ya da kavramın belirli bir boyutu ile ilgilidir.

Amerika’da yaygın olarak kullanılan ders kitaplarında fonksiyonlar konusuna genellikle fonksiyon kavramının anlaşılmasına yönelik herhangi bir zihinsel hazırlık yapılmadan, düz bir şekilde ve aniden giriş yapıldığı belirtilmiştir (Watson & Harel, 2013). Bu doğrultuda kitaplarda tipik olarak fonksiyon konusunun ilk sayfalarında bağıntı, fonksiyon, tanım kümesi ve değer kümesi kavramları birer cümle ile verilerek açıklandığı belirtilmektedir.

Dreyfus ve Eisenberg (1982) ders kitabı yazarlarının fonksiyon konusuna nasıl başlanacağıyla ilgili farklı yaklaşımlar benimsediklerini belirtmiştir. Bazı yazarların grafik yaklaşımıyla, bazılarının reel sayıların sıralı ikililerinin bir kümesi şeklinde ve bazılarının ise ok diyagramı yaklaşımıyla kavrama giriş yaptıkları belirlenmiştir. Benzer şekilde Jones (2006) dördü okul matematiği düzeyinde ve diğerleri üniversite düzeyinde toplamda dokuz kitapta fonksiyon kavramının tanımının nasıl yer aldığını incelemiştir. Bu kitaplarda aynı düzeyde bile fonksiyon kavramının farklı yaklaşımlarla tanıtıldığı ve bir uzlaşmanın olmadığı gözlenmiştir. Bunun sonucunda çoğu öğrencinin üniversiteye geldiklerinde yetersiz bir fonksiyon algısına sahip oldukları belirtilmiştir.

Fonksiyon kavramının öğretiminde programlarda bir uzlaşının olmamasına dikkat çeken Denbel (2015), mevcut haliyle birçok ülkede fonksiyonların bulunduğu yerin bir çeşit kimlik krizi ile sonuçlandığını belirtmiştir. Aynı çalışmada teknolojinin bazı olanaklar sağlasa da bu krizin çözümüne yönelik genel bir çözüm sunmadığı ifade edilmiştir.

Bu çalışmalardan birçok ülkede fonksiyon konusunun öğretiminde zaman içerisinde birçok değişiklik yapıldığı anlaşılmaktadır. Bu değişikliklerin kaynağının ortaöğretim düzeyinde konunun öğretiminde bir uzlaşı olmaması ve bunun üniversite düzeyinde de hissedilmesi olarak belirlenmiştir. Bu doğrultuda çalışmalar fonksiyon öğretiminde okul matematiğinin üniversite matematiğini destekleyecek şekilde ve tutarlı bir yaklaşımla sunulması gerektiğine vurgu yapmaktadır. Bundan sonraki başlıkta ülkemizde ortaöğretim düzeyinde program değişiklikleri ve son iki program değişikliklerinin fonksiyonların öğretiminde ortaya çıkardığı yenilikler incelenmiştir.

2.2.4. Türkiye’de ortaöğretim matematik dersi öğretim program değişiklikleri ve fonksiyonlar

Cumhuriyetin ilanından günümüze ülkemizde ortaöğretim matematik dersi öğretim programında birçok değişiklik yapıldığı görülmektedir. Bu değişikliklerin kaynağı modern bir medeniyet kurma düşüncesi, toplumsal beklentilerin karşılanmak istenmesi, uluslararası kuruluşların desteği doğrultusunda programların geliştirilmesi (World Bank gibi), teknolojik gelişmelerden yararlanma düşüncesi, bazı bilim insanlarının raporlarının öğretime yansıtılması (örneğin John Dewey), Avrupa Birliği'ne üye olma isteği, çeşitli uluslararası faktörler ve politik durumlar olarak tespit edilmiştir (Argün, Arıkan, Bulut, & Sriraman, 2010; Güvenç, 2015).

Belirli aşamaları olan ve devamlılık arz eden bir süreç olarak nitelendirilen program geliştirme hedef, içerik, öğrenme-öğretme süreci ve ölçme-değerlendirme olarak belirtilen öğeleri vardır (Argün vd., 2010; Demirel, 2015). Bunlardan birinde ortaya çıkan sorunlar bütün sistemi etkilemektedir. Bu anlamda matematik dersi öğretim program değişikliklerinin sistemli bir şekilde gerçekleştirilmediği belirtilmektedir (Argün vd., 2010). Yani, genellikle program değişikliği yapılırken program geliştirme sürecinde yararlanılan bilimsel argümanlardan yeterince yararlanılmadığı görülmektedir (Ünal & Ünal, 2010). Sonuç olarak, matematik dersi öğretim programlarında konuların birbirinden kopuk olarak sunulduğu, programın içeriğinin öğrencilerin ve toplumun beklentilerini ve ihtiyaçlarını karşılamaktan uzak olduğu vurgulanmıştır (Zeybek, 2012). Diğer taraftan 2005 program değişikliğinin önceki program değişiklikleriyle karşılaştırıldığında daha detaylı hazırlandığı ve çağdaş yaklaşımlardan etkilendiği belirtilmektedir (Argün vd., 2010; Ünal & Ünal, 2010).

Ortaöğretim matematik dersi öğretim programında son yıllarda hızlı bir değişim sürecine girildiği görülmektedir (MEB, 2005, 2013). Bu değişikliklerde 2005 ve 2013 matematik dersi öğretim programlarında farklı düzeylerde yer verilen öğrenme alanları içerisinde geçen konular karşılaştırılarak değişimin boyutları hakkında bir fikir edinilebilir. Bu doğrultuda ilk olarak Tablo 2.3'te 2005 matematik dersi öğretim programı ana hatlarıyla verilmiştir.

Tablo 2.3. *2005 programında farklı sınıf düzeylerinde yer verilen konu başlıkları*

Öğrenme Alanı	**9. Sınıf**	**10. Sınıf**	**11. Sınıf**	**12. Sınıf**
Mantık	1. Mantık			
Cebir	2. Kümeler 3. Bağıntı, Fonksiyon ve İşlem 4. Sayılar	1. Polinomlar 2. İkinci dereceden denklemler, eşitsizlikler ve fonksiyonlar	1. Karmaşık sayılar 2. Logaritma 3. Tümevarım ve Diziler	1. Fonksiyonlar

Tablo 2.4. *(Devam) 2005 programında farklı sınıf düzeylerinde yer verilen konu başlıkları*

Öğrenme Alanı	**9.Sınıf**	**10.Sınıf**	**11.Sınıf**	**12.Sınıf**
Trigonometri		3. Trigonometri		
Lineer Cebir			4. Matris, Determinant ve doğrusal denklemler	
Olasılık-istatistik			5. Olasılık ve İstatistik	
Temel Matematik				2. Limit ve Süreklilik, 3. Türev 4. İntegral

Tablo 2.3'te görülebileceği gibi, 2005 yılı matematik dersi öğretim programında 6 farklı öğrenme alanı vardır. Bunlar; 1. Mantık, 2. Cebir, 3. Trigonometri, 4. Lineer cebir, 5. Olasılık-istatistik, 6. Temel matematik şeklindedir. Burada konuların genellikle parçalanmadan bütün olarak tek bir sınıf düzeyinde işlendiği anlaşılmaktadır. Örneğin trigonometri öğrenme alanındaki trigonometri konusunun sadece 10. sınıf düzeyinde öğretimi gerçekleştirilmektedir. Tabloda herhangi bir sınıf düzeyinde konular yukarıdan aşağıya doğru verilmiştir. Bu sıralama ilgili sınıf düzeyindeki konuların öğretim sıralamasını göstermektedir. Örneğin 2005 ortaöğretim matematik dersi öğretim programında 9. sınıfta konuların öğretimine ilişkin sıralama mantık, kümeler, bağıntı, fonksiyon ve işlem ve sayılar şeklindedir. Benzer yaklaşımla Tablo 2.4'te 2013 programının ana hatları görülmektedir.

Tablo 2.5. *2013 programında farklı sınıf düzeylerinde yer verilen konu başlıkları*

Öğrenme Alanı	**9. Sınıf**	**10. Sınıf**	**11. Sınıf**	**12. Sınıf**
Sayılar ve Cebir	1. Kümeler 2. Denklemler ve Eşitsizlikler 3. Fonksiyonlar	3. Fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları 6. İkinci dereceden denklem ve Fonksiyonlar 7. Polinomlar	1. Mantık 2. Modüler Aritmetik 3. Denklem ve Eşitsizlik Sistemleri 5. Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar 6. Diziler	1. Türev (limit, süreklilik, türev) 2. İntegral
Geometri	4. Üçgenler 5. Vektörler	4. Analitik Geometri 5. Dörtgenler ve Çokgenler 8. Çember ve Daire 9. Geometrik Cisimler	4. Trigonometri 7. Dönüşümler	3. Analitik Geometri 4. Vektörler 7. Uzay Geometri

Tablo 2.6. *(Devam) 2013 programında farklı sınıf düzeylerinde yer verilen konu başlıkları*

Öğrenme Alanı	9. Sınıf	10. Sınıf	11. Sınıf	12. Sınıf
Veri, Sayma ve Olasılık	6.Veri 7. Olasılık	1. Sayma 2. Olasılık		5. Sayma 6. Olasılık

Tablo 2.4'te görülebileceği gibi, 2013 yılı matematik dersi öğretim programında öğrenme alanları üçe indirilmiştir. Bunlar; 1. Sayılar ve cebir, 2. Geometri, 3. Veri, sayma ve olasılık şeklindedir. Bu tabloda herhangi bir sınıf seviyesinde ilgili öğrenme alanlarında yer alan konular görülebilmektedir. Örneğin fonksiyonlar; sayılar ve cebir öğrenme alanında 9. sınıfta fonksiyonlar ve 10. sınıfta fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları şeklinde yer almaktadır. Ayrıca tabloda sınıf düzeylerinde 9. sınıf hariç tutulursa öğrenme alanlarında karışık bir sıra izlendiği görülmektedir. Örneğin 10. sınıf düzeyinde sırayla sayma, olasılık, fonksiyonlarda işlemler ve uygulamaları, analitik geometri, dörtgenler ve çokgenler, ikinci dereceden denklem ve fonksiyonlar, polinomlar, çember ve daire, geometrik cisimler şeklinde konuların öğretilmesi istenmektedir.

Ülkemizde ortaöğretim matematik dersi öğretim programında son iki öğretim programın karşılaştırılması yoluyla yapılan değişiklikler genel olarak aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. Matematik ve geometri dersi öğretim programlarının matematik dersi öğretim programı altında birleştirilmesi,
2. Öğrenme alanlarının azaltılması,
3. Bazı konuların öğretim programından çıkarılarak (örneğin bağıntı, karmaşık sayıların kutupsal gösterimi, vs.) öğretim programında sadeleştirilmeye gidilmesi ve yoğunluğun azaltılmaya çalışılması,
4. Sadece belli bir sınıf seviyesinde öğretilen ve öğretimi uzun zaman alan konuların (örneğin fonksiyon, trigonometri, olasılık, vs.) parçalanarak farklı sınıf seviyelerinde öğretiminin gerçekleştirilmesi,
5. Bazı konuların ilk kez öğretildiği yerler değiştirilerek farklı sınıf seviyelerinde öğretilmesi (örneğin mantık konusunun 9. sınıftan 11. sınıfa alınması),
6. Konuların belli bir sınıf düzeyinde öğretim sıralamasının değişmesi (örneğin 2005 programında 9. sınıf seviyesinde konular mantık, kümeler, bağıntı, fonksiyon ve işlem, sayılar şeklinde sıralanırken 2013 programında kümeler, denklemler ve eşitsizlikler, fonksiyonlar şeklinde sıralanmaktadır)

7. Bazı konulara yeni eklemeler yapılması (örneğin, 10. sınıfta fonksiyonlarla uygulamalar).

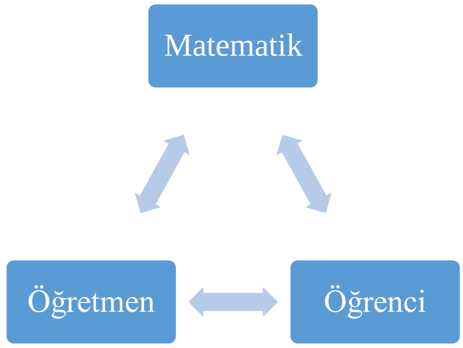
Bu değişikliklerin tümü göz önüne alındığında ülkemizde matematik öğretim programında köklü bir değişikliğe gidildiği söylenebilir. Dolayısıyla yapılan bu değişiklikler öğretmenlerin matematik öğretim yaklaşımlarını derinden etkileme potansiyeline sahiptir.

Denbel (2015), fonksiyonların formal tanımı, modelleme için pratik uygulamaları ve okul matematiğinde bunların aşamalı olarak nasıl yer alması gerektiğiyle ilgili kararlar alınarak, fonksiyonun programda bulunma amacının netleştirilmesi gerektiği ve böylece öğretmenlere neyi öğrettikleri ve bu öğrettiklerini niçin seçmeleri gerektiği konusunda yardımcı olunabileceğini belirtmiştir. Diğer taraftan Denbel'in belirttiği düşüncenin aksi olarak, eğer programda fonksiyonların niçin bulunduğu noktasında bir karmaşa söz konusuysa ve kavramlar arası ilişkiler parçalanmış bir şekilde sunuluyorsa bu durum öğretmenlerin öğretim yaklaşımlarını olumsuz yönde etkilemesi söz konusu olabilir. Bunun göstergelerinden biri Alkan, Güven ve Yılmaz (2017) çalışmasında öğretmenlerin fonksiyon kavramının öğretiminde farklı örnek türlerine yer vermemeleri şeklinde ortaya çıkmıştır. Fonksiyon kavramının öğretimde sınırlı ve tek düze örneklerle sunulması kavramın farklı konularla ilişkilendirilememesi ve kavramların öğretimde birbirini destekleyecek şekilde sunulamaması sonucunu doğurduğu söylenebilir. Fonksiyon kavramının diğer konularla yeterince ilişkilendirilememesi ise program değişikliklerinde bu konunun yeniden organize edilmesine yol açtığı çıkarımında bulunulabilir.

Birçok ülkede olduğu gibi ülkemizde de fonksiyonlar konusunda birçok değişiklik yapılmıştır. Ülkemizde özellikle 2005 ve 2013 matematik dersi öğretim programlarının fonksiyon öğretimine ilişkin istediği yaklaşımlar anlamında derin farklılıklar olduğu gözlenmektedir. Bir konu ya da kavramın öğretiminde yapılan değişiklikler Didaktiğin Antropolojik Teorisi ile incelenebilir. Bu doğrultuda teori programların karşılaştırılması yoluyla değişimin boyutlarını ortaya çıkaracak ve öğretmenlerin sınıf uygulamalarında gerçekleştirdikleri prakseolojilerin tutarlılığını ortaya koyacak araçlara sahiptir. Bu yüzden bu çalışmada ortaöğretim matematik dersi öğretim programında fonksiyonlar konusunda yapılan değişikliklerle ilgili öğretmenlerin sınıf uygulamalarında neler ortaya koyduğu, bunları nasıl gerçekleştirdiği ve süreçte yaptığı açıklamalar Didaktiğin Antropolojik Teorisi kapsamında incelenmiştir.

2.3. Didaktiğin Antropolojik Teorisi

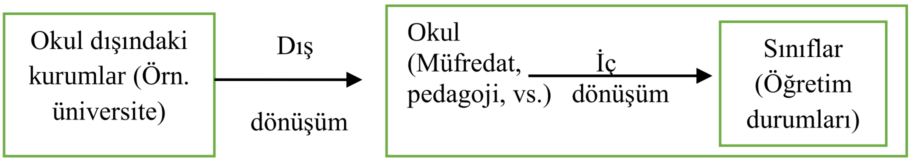
Kelime anlamı öğretimle ilgili olarak ifade edilebilen “didaktik” kelimesi farklı bir bakış açısıyla, alan bilgisi öğretimini ve alan bilgisinin öğretiminin bağlı olduğu faktörleri, kurumları ve süreçleri inceleyen bilim dalını tanımlamak için kullanılmaktadır (Brousseau, 2010; Johsua & Dupin, 1993). Chevallard ve Sensevy (2014) didaktiği toplumda bilginin kazanılması ve yayılması bilimi olarak tanımlamaktadır. Didaktik teoriler genel olarak matematik eğitiminde matematiksel bilgi, öğretmen ve öğrenci arasındaki ilişkileri araştıran teoriler olarak ifade edilebilir. Bu kavramlar arasındaki ilişki Şekil 2.1’de verilmiştir.



Şekil 2.1. *Didaktik sistem (Steinbring, 2005)*

Steinbring (2005) didaktik sistemin matematik öğretme-öğrenme sürecinin temel elemanlarını oluşturduğunu belirtmiştir. Chevallard (1994) didaktik sistemin bileşenleri arasındaki ilişkinin büyük bir öneme sahip olduğunu vurgulamıştır. Bu bileşenlerin okulda öğretilen bilgiyi etkilediğini ve hatta bazen bu bilgide değişiklik yapılmasına neden olduğunu belirtmiştir. Bilimsel bilgilerden hangilerinin, ne kadar ve nasıl öğretilecek bilgi olması gerektiği ve bu bilgilerin öğretmenler tarafından nasıl öğrencilere sunulduğu gibi durumlar ise didaktik dönüşüm içerisinde incelenmektedir.

Yves Chevallard tarafından 1980’li yıllarda ortaya atılan (Bosch & Gascón, 2006) didaktik dönüşüm teorisi, bilimsel bilginin üretildiği andan itibaren okulda öğretilen bilgi oluncaya kadar geçirdiği dönüşümleri modelleyen bir teori olarak belirtilebilir (Bosch, 2012; Chevallard, 1985, 1988; Chevallard & Bosch, 2014). Winsløw (2011) didaktik dönüşümün dış ve iç dönüşüm olarak gerçekleştiğini belirtmiştir. Şekil 2.2’de okul dışında üretilen bilimsel bilginin sınıf kurumunda öğretilen bilgi olması sürecinde geçirdiği dönüşümler verilmiştir.



Şekil 2.2. *Didaktik dönüşüm süreci: Okul dışındaki kaynaklardan bilginin sınıfta öğretilecek biçimde adaptasyonu (Winsløw, 2011)*

Didaktik dönüşüm sürecinde bilimsel bilgi, öğretilecek bilgi ve gerçekte öğretilen bilgi arasında ayrımın yapılması gerekmektedir. Dış dönüşüm, *bilimsel bilgiden öğretilecek bilgiye geçişi* belirtmektedir (Østergaard, 2013). Bu noosphere tarafından gerçekleştirilmekte ve bunun sonucunda öğretim programı, kitaplar, öğretmene tavsiyeler ve didaktik materyaller elde edilmektedir (Bosch & Gascón, 2006). Noosphere, eğitimsel süreçler hakkında kararlar alan ve düşünen insanların oluşturduğu topluluk olarak tanımlanmaktadır (Bosch, 2012). Noosphere, politika yapıcıları, matematik eğitimcileri, öğretmenler, veliler, öğrenci temsilcileri, vs. oluşmaktadır. Bu yüzden noosfer, didaktik dönüşüm sürecinin ilk aşamasının kalbi olarak nitelendirilmiştir (Tavignot, 1995).

Öğretmen tarafından yapılan ikinci dönüşümde ise *öğretilecek bilgiden sınıfta öğretilen bilgiye geçiş* söz konusudur. Buna da iç dönüşüm denmektedir (Østergaard, 2013). Burada öğretmenin görevi öğretilecek bilgiyi seçmek olmayıp, noosfer tarafından seçilen bilginin organizesini yapmaktır (Chevallard, 1991). Tam bu noktada öğretmenler tarafından yapılan dönüşümün aynı olup-olmadığı düşünülebilir. Öğretmenlerin matematik öğretimine ilişkin bireysel farklılıklarının bir sonucu olarak Tavignot (1995) öğretmenlerin aynı teoremi kullanarak aynı sonuca ulaşmalarına rağmen öğretim yaklaşımlarının öğrenci anlamasını etkileyebileceğini tespit etmiştir. Dolayısıyla öğretmenlerin bireysel farklılıklarından kaynaklı olarak öğretim programında yer alan matematiksel kavramlarla ilgili sınıf uygulamalarında farklı iç dönüşümler gerçekleştirebilmektedir.

Bosch ve Gascón (2006) didaktik dönüşüm sürecinin dönüştürülecek bilginin seçimiyle başladığını belirtmiştir. Daha sonra seçilen bilginin işlevsel karakteri ve gücü korunarak öğretilebilir yapma amacıyla dönüştürme, adapta etme ve basitleştirme gibi süreçlerle bilgi yeniden yapılandırılmaktadır. Ancak bu işlemlerin sonucunda bazen gerçekte verilmek istenen bilginin verilememesi ya da özünden kopuk bir şekilde verilerek bilginin işlevsizleştirilebilmesine neden olunabileceği belirtilmiştir. Bu durumu (Chevallard, 2004, 2006) zaman içerisinde gerçekliği kaybolmuş bilgiyi seyretmek için öğrencilerin davet edilmesi anlamında eserleştirilmiş (monumentalistic) eğitim olarak adlandırmaktadır. Bu konuda Assude'nin (1994) didaktik dönüşüm bağlamında karekök kavramını incelediği çalışma örnek olarak verilebilir. Çalışmanın sonuçları, sayı sisteminin genişletilmesinde anahtar bir rolü olan karekök kavramının yapılan reformlarla en sade biçime getirme ya da paydayı rasyonel yapma şeklinde sayı özelliklerine dayandırıldığı ve süreklilik gibi fonksiyon özellikleriyle ilişkilendirilmediği tespit edilmiştir.

Kökleri didaktik dönüşüm teorisine uzanan Didaktiğin Antropolojik Teorisi (DAT) (Bosch & Gascón, 2006; Chevallard, 1997, 1999; Chevallard & Sensevy, 2014), prakseolojiler olarak ifade edilen insan eylemlerini incelemenin bir yolunu sunmaktadır (Artigue, 2016; Chevallard, 2006). Bu bağlamda matematik de bir insan eylemi olarak nitelendirilmektedir. Teorinin çıkış noktasını okulda öğretilen matematiksel bilginin kaynağı ve doğasını sorgulamanın mümkün olduğu fikri oluşturmaktadır (Bosch, 2012).

Bu doğrultuda yapılacak bir incelemede kurum kavramı ön plana çıkmaktadır. Dolayısıyla teoride kurum kavramının anlaşılması büyük önem taşımaktadır (Artigue & Houdement, 2007). Kurum, kendine özgü bir işlevi, mantığı olan ve bünyesindeki bireylerin bilmesi gereken bilgileri, kabul etmesi gereken kültürü ve uyması gereken açık veya örtük kurallarının empoze eden bir yapıdır (Chevallard, 1992). Bu kapsamda her sınıf, her ders (fizik dersi, matematik dersi, vs.) birer kurum olarak nitelendirilmektedir.

DAT matematik dersi öğretim program değişikliklerinin karşılaştırmalı olarak incelenerek değişimin boyutlarının ortaya çıkarılmasında ve sınıf kurumunda öğretmenlerin prakseolojilerinin belirlenmesinde etkili olarak kullanılabilecek ekolojik ve prakseolojik analiz yöntemlerine sahiptir. Bu yüzden bu çalışmada 2013 yılında uygulamaya giren ortaöğretim matematik dersi öğretim programında büyük ölçüde değişikliğe uğrayan fonksiyon konusunu öğretmenlerin sınıf uygulamalarında nasıl ele alacağı ekolojik ve prakseolojik açıdan incelenecektir.

2.3.1. Ekolojik analiz

Ekolojik analiz, canlılarda görülen ilişkilere benzer bir yaklaşımla eğitim sisteminin incelenmesini içermektedir (Rajoson, 1988; Arsac, Chevallard, Martinand & Tiberghien, 1994). Chevallard (1992), ekolojik analizi iki soru ile özetlemektedir. Birincisi, verilen bir gerçeğin altında yaşanabilir ya da konuşulabilir olmanın koşulları nelerdir? İkincisi ise, verilen bir durumda bu koşulların uygun olduğunu gösterecek zorunluluklar nelerdir? Bu sorular habitat ve niş kavramları ile açıklanabilir.

DAT'de habitat bir bilginin bulunduğu yerler yani bir tür adres olarak belirtilmiştir (Rajoson, 1988; Yıldırım & Şahin, 2009). Ekolojik niş ise, bilginin bulunduğu habitatta sahip olduğu görevler, yaşamını sürdürme şekli (Erdoğan vd., 2015; Sağlam Arslan, 2016) ve etkileşim içerisinde olduğu bilgi sistemindeki işlevidir (Rajoson, 1988; Arsac vd., 1994). Bu doğrultuda bir bilginin sistem içerisinde yaşamını devam ettirmesi ya da yok olması bilginin habitatı ve nişi ile bağlantılı olduğu belirtilebilir.

Eğer matematik dersi öğretim programı matematiksel kavramların yaşam alanı şeklinde alınırsa, bir bilginin habitatı programda bilginin bulunduğu yerler olarak düşünülebilir. Bir konunun (örneğin fonksiyon konusu) ekolojik analizinde matematik programında fonksiyonların bulunduğu yerler ve oradaki işlevi incelenebilir. Böylece fonksiyon kavramının öğretimine niçin 9. sınıf düzeyinde başlanıldığı ve fonksiyon kavramının öğretimine 9. sınıfta başlamayı zorunlu kılan etmenlerin neler olduğu tespit edilebilir.

2.3.2. Prakseolojik analiz

Prakseoloji günümüzde pratik ve bilgi olarak ifade edilebilecek iki kelimenin birleşiminden yani "praxis" ve "logos" kelimelerinden türetilmiştir (Chevallard, 2006). Bu terimi Chevallard'dan önce vonMises'in "*Human Action. A treatise on economics*" adlı kitabında kullandığı görülmektedir (Winsløw, 2011). Chevallard (2006) prakseolojinin sözlük anlamının insan eylemleri ve davranışlarının çalışılması olduğunu ancak, DAT'de geniş ölçekte insan eylemlerinin analiz edilebilmesinde temel birim olarak belirtmiştir. İnsan eylemleri insanların yaptığı her şey olarak ifade edilebilir. Örneğin evden okula gitmek olarak ifade edilebilecek günlük bir aktivite olabileceği gibi reel sayılarda tanımlı f(x)=ax+b doğrusal fonksiyonunun grafiğini çizmek şeklinde ifade edilebilecek matematiksel bir aktivite de olabilmektedir.

DAT temel nesnesi kurum kavramıdır ve bu kavram teoride geniş bir açıdan anlaşılmak zorundadır (Artigue & Houdement, 2007). Çünkü diğer insan eylemlerinde olduğu gibi bir insan eylemi olarak görülen matematiksel eylemler, kurumlarda prakseolojilerle modellenmektedir (Artigue & Houdement, 2007; Bosch & Gascón, 2006; Chevallard, 2006). Bu doğrultuda matematik, sosyal kurumlarda üretilebilir, öğretilebilir, öğrenilebilir, uygulanabilir ve yayılabilir (García, Gascón, Ruiz-Higueras & Bosch, 2006). Söz konusu prakseolojiler insanların ne yaptıkları ve nasıl yaptıklarının (know-how) yanı sıra bunu yaparken ne düşündükleri ve nasıl düşündüklerinin (knowledge) de incelenmesini içermektedir (Chevallard, 2006). Dolayısıyla bilgiyi (body of knowledge) öğrenme prakseolojiyi öğrenmeyle eşdeğer olarak görülmektedir (Chevallard, 2007). Chevallard (1997, 1999, 2006, 2007) bir prakseolojinin dört temel bileşeni olduğunu belirtmiştir. Bu bileşenler şunlardır.

1. Görev Tipi (Type de Tache: T),
2. Teknik (Technique: τ),
3. Teknoloji (Technologie: θ)
4. Teori (Théorie: Θ)

Prakseolojilerin ilk kavramı görev tipi kavramıdır. Görev tipi, görevlerin belirli bir kümesinden (örneğin aynı teknikle çözülenler) oluşmaktadır. Görev, insanların kasıtlı olarak gerçekleştirdikleri her bir eylem olarak tanımlanmaktadır (Winsløw, 2011). Her bir görev tipini çözüme ulaştırmak için kullanılabilecek matematiksel yöntemler vardır. Teoride bunlar *teknikler* olarak adlandırılmıştır (Chevallard, 2007; Winsløw, 2011). Teknoloji tekniğin açıklanması, ispatlanması ve hatta tasarlanması gibi işlevler içermektedir (Chevallard & Sensevy, 2014). Teori ise, prakseolojik elemanların bir bütün olarak düzenlenmesini sağlayan, teknolojiyi doğrulayan genel modeller, kavramlar ve basit varsayımlar (aksiyom) bütünüdür (Bosch, 2012). Teori teknolojiyi açıklamalı, ispatlamalı ya da teknolojinin belirsiz olan bölümlerinin ortaya çıkarılarak oluşmasını sağlamalıdır (Chevallard & Sensevy, 2014) Diğer bir ifadeyle teori, teknolojinin teknolojisidir (Arzarello, Bosch, Gasco´n & Sabena, 2008; Artigue vd., 2001).

Prakseolojinin bileşenlerinde ilk ikisi olan görev tipi ve teknik (T, τ) pratik bloğu (know-how), teknoloji ve teori ise (θ, Θ) bilgi bloğu (know-that) olarak adlandırılmaktadır (Artigue & Winsløw, 2010; Bosch vd., 2006; Winslow, 2011). Bilgi bloğu pratik bloğunda yapılan sistematik eylemlerin uygunluğuyla ilgili bilgiler sunmaktadır (Artigue & Winsløw, 2010). DAT'de prakseolojilerin bileşenlerine ilişkin bazı varsayımlar bulunmaktadır.

DAT'ın önemli varsayımlarından biri, herhangi bir problem tipini çözmek için mutlaka bir tekniğin var olması gerektiğidir (Barbe´ vd., 2005). Matematiksel olarak bir problem tipini çözmek için birden fazla teknik mümkün olabilecekken bir kurumda çoğunlukla bir tekniğin ön plana çıkarıldığı (Huillet, 2009) ve kurumsal anlamda "legal" teknik olarak tek bir tekniğin kabul edildiği durumlar görülebilmektedir (Barbe´ vd., 2005).

DAT'ın diğer bir varsayımı insan aktivitelerinin bilgi bloğu olmaksızın meydana gelme ihtimalinin çok düşük olduğudur (Barbe´ vd., 2005). Burada programlarda, ders kitaplarında ve sınıfta bir konunun öğretim sürecinde bilgi bloğuyla yetersiz ilişkilendirmeler gözlenebilmektedir. Bunun matematik öğretimini güçleştirdiği ve bilimsel matematiksel bilgi ile öğretilen matematiksel bilgi arasında boşluk meydana getirdiği söylenebilir.

Chevallard (1999) bu bileşenlerle ilgili bazı durumları sınıflandırarak matematiksel prakseolojiyi *noktasal, yerel, bölgesel* ve *global* olarak dört gruba ayırmıştır. *Noktasal prakseolojiler*, genel olarak sadece bir teknikle çözülebilen tek bir problem tipinin ürettiği prakseolojilerdir. Burada teknoloji ya yoktur ya da gizli olarak varsayılır. *Yerel prakseolojiler*, her biri için farklı bir teknik kullanılabilen birkaç noktasal prakseolojinin tek bir teknoloji altında birleşmesiyle üretilir. *Bölgesel prakseolojiler,* genel olarak bilinen bir matematiksel teori çerçevesinde birkaç yerel prakseolojinin düzenlenerek koordine edilmesi sonucu elde edilir. *Global prakseolojiler*, farklı matematiksel teorilere dayanan birkaç bölgesel prakseolojinin birleşmesiyle ortaya çıkmaktadır (García vd., 2006).

Eğitsel bakış açısıyla, bir eğitim kurumunda matematiksel bilgi (prakseoloji) matematiksel ve didaktik prakseolojiler şeklinde ikiye ayrılmaktadır (Billington, 2009; Artigue & Winsløw, 2010). DAT'de matematiksel bilgi, matematiksel prakseolojiler (görev tipi, teknik, teknoloji ve teori bileşenlerinden oluşan) şeklinde açıklanmaktadır (Bosch vd., 2006). Bu doğrultuda matematiksel prakseolojiler, herhangi bir matematiksel bilgiyle ilgili varolan prakseolojilerin kümesi olarak nitelendirilebilir. Didaktik prakseolojiler ise, herhangi bir prakseolojinin öğretimsel amaçlı kullanımına işaret etmektedir (Artigue & Winsløw, 2010). Daha ayrıntılı olarak, matematiksel prakseolojiler belirli bir kurumda öğretimsel amaçlı kullanıldıklarında veya öğretimsel amaçlı süreçlere entegre edildiklerinde didaktik prakseolojilerden bahsedilebilir. Bununla birlikte didaktik prakseolojiler, her türlü insan faaliyetine, özellikle bir problemin incelenmesi ve yeni matematiksel prakseolojilerin (eylemin öznesi için) oluşturulması veya başkalarına yardım etme (örneğin öğretmenin öğrenciye yardım etmesi) süreçlerine kadar uzanabilir (Bosch vd., 2006). Bu tür prakseolojilerde pratik bloğu, didaktik görev türleri ve didaktik teknikler olarak ve bilgi bloğu, didaktik teknolojik-teorik çevre olarak belirtilmektedir (Barbe´ vd., 2005).

Matematiksel prakseolojiler bir kurumda aniden ortaya çıkmaz ve belirgin bir şekle sahip değillerdir. Bunun tersine değişmez bazı ilişkilerle modellenebilen karmaşık ve süregelen aktivitenin bir sonucu olarak var olmaktadır (García vd., 2006). Bu anlamda matematiksel aktivitenin matematiksel yapı süreci (didaktik süreç) ve bu yapının sonucu (matematiksel prakseoloji) olarak ifade edilebilecek iki yönü vardır. Bir matematiksel prakseolojiyi öğretmek için bir öğretmenin didaktik prakseoloji kullanması gerekmektedir (Chevallard, 2002). Bu ise altı didaktik an ile karekterize edilmektedir:

1) T_i problem tiplerinin özel bir tanesiyle *ilk karşılaşma anı*,
2) T_i görev tiplerini *keşfetme* ve bu görev tipleriyle ilgili bir τ_i *tekniği geliştirme anı*,
3) τ_i ile ilgili *teknolojik-teoriksel çevrenin oluşturulması anı*,
4) *tekniksel çalışma anı* yani tekniği geliştirmenin yanı sıra onu daha güçlü, daha güvenilir kılma ve kullanımında uzmanlaşmayı geliştirme, diğer taraftan farklı teknikleri de ortaya çıkarma,
5) *kurumsallaştırma* yani matematiksel prakseolojiyi tamamen detaylandırma anı,
6) *değerlendirme* yani o zamana kadar neler yapıldığının kurumsallaştırma anı ile bağlantılı olarak değerlendirilmesidir (Barbe´ vd., 2005; Chevallard, 1999; García vd., 2006).

Bu açıklanan anlar öğretmenlerin sınıfta gerçekleştirdiği prakseolojileri inceleyebilmek için bir gözlem ve değerlendirme aracı olarak kullanılabilir. Bunların belirtilen sırayla gerçekleşmesinden çok her birinin bir şekilde sınıfta yaşanmasının gerekliliği üzerinde durulmaktadır (García vd., 2006; Huillet, 2009).

Didaktik ve matematiksel prakseolojiler geniş bir bağlamda ele alınmadan anlaşılamaz (Artigue & Winsløw, 2010). DAT insan aktivitelerine (özelde matematiksel aktiviteler) sosyolojik açıdan yaklaşmaktadır (Sierpinska & Lerman, 1996; Artigue, 2002). Artigue (2002) matematiksel nesnelerin sosyo-kültürel kontekse bağlı olarak geliştirilebileceğini vurgulayarak, matematiksel nesnelerin mutlak nesneler olmadığını, varlıklarının ancak verilen kurumların uygulamalarının bir sonucu neticesinde ortaya çıktığını belirtmiştir. Dolayısıyla prakseolojinin toplulukların oluşturacağı yapılardan etkileneceği söylenebilir. Bu noktadan hareketle Chevallard (2002) çalışmasında, prakseolojik analizi etkileyebilecek belli bir hiyerarşisi olan bir takım yapıların olduğunu iddia etmiştir. Aynı çalışmada bu yapılar geniş ölçekliden dar ölçekliye olacak şekilde sekiz başlıkta toplanmıştır (Şekil 2.3).

Toplum → Okul → Pedagoji → Disiplin → Alan → Sektör → Tema → Konu

Şekil 2.3. *Eğitimi etkileyen yapılar (Chevallard, 2002)*

Bu yapılar prakseolojinin temel kavramlarıyla ilişkilendirilirse, sektör→ teoriyle, tema→teknoloji ve konu→problem tipleriyle birlikte tekniklere denk gelecek şekilde karşılıklı bir eşleştirme verilebilir (Artigue & Winsløw, 2010). Bu yapılarda meydana gelebilecek kısa ya da uzun süreli değişim prakseolojileri etkilemektedir. Örneğin matematik dersi öğretim program değişiklikleri bu bağlamda düşünülebilir. Bu çalışmada 2013 yılında gerçekleştirilen program değişikliğinin 10. sınıf düzeyinde fonksiyon konusu bağlamında öğretmenlerin didaktik prakseolojilerini nasıl etkilediği ortaya çıkarılmaya çalışılacaktır.

2.4. Sınırlıklar

Bu çalışmada araştırma sorularının daha ayrıntılı ve açık bir şekilde ortaya çıkarılması açısından bazı sınırlıklar bulunmaktadır. Bunlar:

- Fonksiyonlarla ilgili değişim sadece 2005 programından 2013 programına geçiş kapsamında ele alınmıştır.
- Öğretmenlerin didaktik prakseolojileri 2013 ortaöğretim matematik dersi öğretim programında 10. sınıfta fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunda simetri dönüşümleri, bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlıklarıyla sınırlandırılmıştır.
- Çalışma 2014-2015 öğretim yılı güz ve bahar dönemlerinde Van İl Merkezinde bulunan her liseden birer kişi olacak şekilde üç farklı lisede görev yapan ve 10. sınıfta derslere giren üç matematik öğretmeninden elde edilen verilerle sınırlıdır.

2.5. Araştırmanın Amacı ve Araştırma Soruları

Bu çalışmanın amacı, 2013 yılında değişen matematik dersi öğretim programında 10. sınıf seviyesinde fonksiyon konusuna ilişkin değişimleri tespit etmek, bu değişimlerde matematik öğretmenlerinin didaktik prakseolojilerinin neler olduğunu ve didaktik prakseolojilerini nasıl yapılandırdıklarını belirlemektir. Araştırmada aşağıdaki sorulara yanıt aranmaktadır:

1. 2013 program değişikliği fonksiyonların öğretimiyle ilgili ne tür ekolojik değişiklikler içermektedir?
2. Fonksiyonlar konusuyla ilgili kazanımların (simetri dönüşümleri, bileşke işlemi ve ters fonksiyon kapsamında) öğretimine ilişkin matematiksel prakseolojiler nelerdir?
3. Öğretmenlerin fonksiyonların öğretiminde ortaya koydukları didaktik prakseolojileri nelerdir?
4. Öğretmenlerin fonksiyonların öğretiminde ortaya koydukları didaktik prakseolojilerin bağlı olduğu ekolojik şartlar nelerdir?
5. Öğretmenlerin fonksiyonların öğretiminde ortaya koydukları didaktik prakseolojilerde didaktik anlar nasıl ortaya çıkmaktadır?
6. Öğretmenlerin fonksiyonların öğretimiyle ilgili sahip oldukları matematiksel prakseolojiler nelerdir?

2.6. Araştırmanın Önemi

Bu çalışma matematik dersi öğretim program değişiklikleri sürecinde, programda öğretiminde belli ölçüde değişiklik yapılan fonksiyon konusuyla ilgili öğretmenlerin sınıf uygulamalarındaki didaktik prakseolojilerinde karşılaştıkları ekolojik sorunları ortaya çıkarma noktasında önemli görülmektedir.

Program değişikleri sürecinde öğretmenlerin öğretimi değişen fonksiyon konusunda gerçekleştirdikleri didaktik prakseolojilerin bileşenleri arasında uyum/uyumsuzlukların teşhis edilmesi ve bunların nedenlerinin belirlenmesi ile literatürde program değişikliklerinde büyük ölçüde belirsizlikler içeren öğretmenlerin didaktik prakseolojilerinin nasıl ortaya çıktığının anlaşılmasında literatüre katkı sağlamaktadır. Bununla birlikte öğretmenlere program değişikliklerinde değişiklik yapılan konuların öğretiminde karşılaşılan durumların anlaşılmasına ilişkin (zorunluluklar, sınırlılıklar, vs) bir örneklik teşkil etmesiyle öğretiminde değişiklik yapılan konuların öğretiminde öğretmenlerin maruz bırakıldığı zorunlulukların tespit edilmesi açısından ve program yapıcılara üzerinde değişiklik planlanan konuların programda nasıl yer alması gerektiği noktasında klavuzluk edeceği belirtilebilir.

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli ve planı, araştırmanın katılımcıları ve okulları, veri toplama araçları, araştırmanın yapıldığı ortam, araştırma süreci, araştırmacının rolü, verilerin analizleri (ekolojik analiz, prakseolojik analiz), araştırmanın geçerlik ve güvenirliğine ilişkin bilgiler verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Modeli

Bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden yararlanılmıştır. Nitel araştırma gözlemciye araştırdığı olay ya da olguların ortasında yer veren bir yaklaşımdır (Denzin & Lincoln, 2005). Yin (2011), nitel araştırmanın özelliklerini; gerçek dünya koşulları altında insanların hayatlarını inceleme, insanların bakış açılarını ve görüşlerini yansıtma, insanların yaşamlarındaki bağlamsal koşulları içerme, insan sosyal davranışlarını açıklamaya yardım edebilecek kavramları ortaya çıkarma ya da var olan anlayışlara katkıda bulunma ve tek bir kaynağa güvenmek yerine çoklu kaynakları kullanarak kanıtlamaya çaba gösterme şeklinde açıklamıştır.

Bu araştırmada yenilenen öğretim programı bağlamında öğretmenlerin fonksiyon konusunu doğal sınıf ortamında nasıl öğrettikleri DAT'nin temel analiz yöntemi prakseolojik analizle derinlemesine inceleneceğinden nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması (case study) yöntemi kullanılmıştır. Durum çalışması katılımcı gözlemleri, derinlemesine gözlemler ile doküman toplama yoluyla elde edilen ve analiz edilen verilerin derinlemesine ve boylamsal olarak incelenmesini içermektedir (Glesne, 2013). Merriam (2013) durum çalışmasını sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelemesi olarak tanımlamıştır. Daha ayrıntılı olarak durum çalışması araştırması, araştırmacının sınırlı bir sistem (bir durum) ya da birkaç sistemi (durumları) çoklu bilgi kaynakları (örneğin gözlemler, görüşmeler, görsel-işitsel materyaller, dökümanlar ve raporlar) aracılığıyla detaylı bir şekilde ve derinlemesine veri toplayarak zaman içerisinde keşfettiği ve bir durumu betimleyerek ya da durum temelli temaları raporlaştırdığı nitel bir araştırma yöntemidir (Cresswell, 2007). Bu tanımlarda geçen sınırlı bir sistemden kastedilen, tek bir varlık, etrafında sınırlar olan bir birim şeklinde ifade edilmektedir. Sınırlı bir sistem ya da durum, belirli bir sürecin, konunun ya da kaygının bir kesiti olarak seçilebilmektedir. Dolayısıyla durum bazı olguların bir örneği niteliğinde tek bir kişi, bir program, bir grup, bir kurum, bir toplum ya da özel bir politika olabilir (Merriam, 2013).

Durum çalışması bir araştırmada özellikle ne, nasıl ve niçin soruları temel alındığında tercih edilen bir yöntemdir (Yıldırım & Şimşek, 2016; Yin, 2017). Durum çalışmasının nasıl yürütüleceğini araştırmanın konusu değil, analiz birimi belirlemektedir. Bir çalışmanın durum çalışması olabilmesi için analiz biriminin belirli bir program, öğrenenlerin belirli bir sınıfı ya da bir öğrenenin tipiklik, aykırılık, başarı gibi ölçütler bağlamında seçilmesi gerekmektedir (Merriam, 2013). Farklı bir açıdan bir durum çalışması güncel bir olgunun gerçek yaşamdaki bağlamı içerisinde incelendiğinde, özellikle olgu ve bağlam arasında sınırların açıkça belirgin olmadığında kullanılan görgül bir araştırmadır (Yin, 2017). Bu açıklamalarda belirtildiği gibi matematik öğretmenlerinin köklü bir değişime uğrayan ortaöğretim matematik programında nasıl bir didaktik prakseoloji uygulayacağı, değişimle ilgili ne tür durumlarla karşılaşacakları ve sınıf uygulamalarında tercih ettikleri prakseolojileri seçme nedenleri birçok belirsizlik içerdiğinden çalışmada durum çalışması benimsenmiştir.

Durum çalışmalarında katılımcıların sayısının az tutulması olayın özelliklerinin daha hızlı kavranmasına, çözümlemenin daha açık yapılmasına yardımcı olmaktadır (Mayring, 2011). Nitel araştırmalar genellikle amaçlı bir şekilde seçilmiş küçük örneklemlerle, hatta bazen tek bir örneklemle detaylı bir şekilde yapılabilir (Patton, 2014). Burada amaçlı örnekleme yapılmasının sebebi araştırmanın daha derinlemesine yapılabilmesi için bilgi zengini durumlar seçmektir. Bilgi açısından zengin durumlardan kastedilen, araştırmacının araştırmanın amacı açısından mümkün olduğunca fazla bilgi elde edebileceği durumlardır. Bu tür durumlar deneysel genellemelerden ziyade derinlemesine anlama imkanı sağlamaktadır (Patton, 2014). Bu doğrultuda çalışmada zengin veri elde etme adına sınırlı sayıda öğretmenle çalışılması uygun görülmüştür.

Durum çalışmalarında araştırılan olay veya durum kendi doğal yapısı içinde, yer ve zamanla sınırlı olarak araştırılmalıdır (Hancock & Algozzine, 2006). Bu bağlamda araştırılan duruma ilişkin daha açık, daha anlaşılır ve derinlere inen sonuçlar sağlayabilmektedir (Cresswell, 2007; Ekiz, 2015; Mayring, 2011; Merriam, 2013). Bu çalışmada öğretmenlerin 10. sınıf uygulamaları fonksiyon konusuyla sınırlı tutulmuş ve ortamın doğal yapısı korunarak veriler toplanmıştır.

Durum çalışmalarını araştırmacılar farklı bakış açılarıyla farklı şekillerde sınıflandırdığı görülmektedir (Kaleli Yılmaz, 2014; Paker, 2015). Stenhouse (1988) durum çalışmalarını değerlendirmeye yönelik, etnografik, eğitimsel ve eylem araştırması şeklinde dört kategoride sınıflandırmıştır. Bu çalışma eğitsel durum çalışması olarak belirtilebilir. Eğitimsel durum çalışması, eğitimsel eylemi anlamakla birlikte kuram geliştirme ya da kanıtların sistematik ve yansıtmalı olarak toplanan verilerle dikkatli bir şekilde düzenlenerek eğitimcilerin düşünme ve söylemini zenginleştirmeye yönelik çalışmalardır (Stenhouse, 1988, 50).

3.2. Araştırmanın Planlanması

Araştırma konusuna karar verildikten sonra, doğal gözleme konu olacak ortamı daha yakından tanıyıp veri toplama araçlarının nasıl geliştirilmesi gerektiğine karar vermek için araştırmacı 2013-2014 öğretim döneminde bir ay boyunca Van merkez ilçelerinin birindeki bir Anadolu lisesinde deneyimli bir öğretmenin 9. sınıf matematik derslerini doğal sınıf ortamında gözlemlemiştir.

Bu gözlem sonucu ve yapılan diğer incelemeler göz önünde bulundurularak araştırmanın 10. sınıf düzeyinde yapılması kararlaştırılmıştır. Bu kararın alınmasında 9. sınıfta matematik dersi öğretim programında fonksiyon kavramına genel bir giriş planlanlanmışken, fonksiyon konusuyla ilgili program değişikliğinin önemli ölçüde 10. sınıfta gerçekleştirilmesi etkili olmuştur.

Araştırmalardan sağlıklı sonuçlar alınması, çoğu zaman belli kişi ve kurumlarla, izin ve işbirliği olanaklarının sağlanmasına dönük, ilişkilerin önceden kurulması ve gerektiğinde araştırma süresince de korunmasını zorunlu kılmaktadır (Karasar, 2012). Bu doğrultuda öncelikle Van İl Milli Eğitim Müdürlüğünden araştırmanın uygulamasıyla ilgili beş okuldan izin alınmıştır. (Bkz. Ek 1) Araştırmada bu okulların üçü asıl diğer ikisi yedek olarak düşünülmüştür. Yedek okullar asıl okullarda araştırma yapılmasına bir engel oluştuğunda başvurulacak okullardır. 2014-2015 öğretim döneminin başında araştırmanın yapılacağı asıl okullarda 10. sınıf matematik dersine girecek öğretmenlere okul ziyareti yapılmıştır. Bu ziyaretlerde öğretmenler araştırmayla ilgili bilgilendirilmiştir. Her okulda gerekli kriterlere uyan birden fazla öğretmen olduğu görülmüştür. Bütün öğretmenler gönüllü olarak araştırmaya katılabileceklerini belirtmişlerdir. Araştırmacı daha zengin veri toplayabilecek şekilde her okuldan birer öğretmeni amaçlı örnekleme yoluyla belirlemiştir. Araştırma kapsamında dersleri izlenecek öğretmenlerden yazılı ve sözlü olarak izin alınmıştır. (Bkz. Ek 2) Araştırmada seçilen öğretmenlerin 10. sınıftaki birer sınıfa ait dersleri video kaydına alınacağından ilgili sınıflardaki öğrencileri ve velileri bilgilendirmek amacıyla Veli Bilgilendirme ve İzin formu velilere gönderilmiş ve onlardan yazılı izinler alınmıştır. (Bkz. Ek 3).

3.3. Araştırmanın Katılımcıları ve Okullar

Bu araştırmanın katılımcılarını Van merkeze bağlı liselerde görev yapan ve 2014-2015 öğretim yılında 10. sınıf matematik derslerine giren matematik öğretmenleri oluşturmaktadır. Araştırma Van merkeze bağlı üç okulda gerçekleştirilmiştir. Araştırma kapsamında seçilen okullar, Van'ın en başarılı liseleri arasında olduğu söylenebilir. Nitel araştırmaların doğası gereği araştırmada zengin veri elde etmek ve verileri derinlemesine incelemek için amaçlı örnekleme yapılmıştır (Yıldırım & Şimşek, 2016). Bu doğrultuda her okuldan bir matematik öğretmeni Patton'un (2014) belirttiği amaçlı örneklem çeşitlerinden kombinasyon veya karma amaçlı örnekleme ile belirlenmiştir. Bu tür örneklemelerde araştırmacının önemli bilgileri elde edebileceği ve çalışmaya değer durumların seçilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu doğrultuda örneklem seçimi üç temel kritere göre belirlenmiştir. Bu kriterler:

1. Öğretmenler 10. sınıfta fonksiyon konusunu 2014-2015 öğretim yılında anlatacak olan öğretmenler arasından seçilmeli,
2. Öğretmenler en az 5 yıl mesleki tecrübeye sahip olmalı,
3. Öğretmenler 2013 yılında yürürlüğe giren ortaöğretim matematik dersi öğretim programı uygulama gayretinde olmalı.

Aşağıda Tablo 3.1'de araştırmanın katılımcıları olarak seçilen öğretmenlerle ilgili genel bilgiler yer almaktadır. Araştırmada katılımcı öğretmenlerin gerçek isimleri yerine tabloda belirtilen isimler kullanılmıştır.

Tablo 3.1. *Katılımcılarla ilgili genel bilgiler*

Öğretmenler	Mesleki Deneyim	Yaş	Lisans	Yüksek Lisans	İdari Görev
Burak Öğretmen	14	37	Eğitim Fakültesi	-	-
Arda Öğretmen	15	36	Fen Fakültesi	Fen Bilimleri Enstitüsü (Cebir Dalında)	Zümre Başkanı
Tuna Öğretmen	19	43	Fen Fakültesi	-	Zümre Başkanı

Tablo 3.1'de, araştırma kapsamında seçilen öğretmenlerin en az 14 yıl tecrübeye sahip olduğu görülmektedir. Burak ve Arda öğretmenler öğretmenlik mesleğine ortaokulda başladıklarını, Burak öğretmen 5 yıl ve Arda öğretmen 8 yıl çalıştıktan sonra ortaöğretime geçtiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca bu tabloda, Arda Öğretmenin matematikte yüksek lisans diplomasına sahip olduğu ve Arda ve Tuna öğretmenin bulundukları okullarda zümre başkanlığı yaptıkları görülmektedir. Öğretmenlerin

mesleki deneyimlerinin değişen matematik dersi öğretim programının gerekliliklerini yerine getirme açısından yeterli düzeyde olduğu söylenebilir. Burak öğretmen eğitim fakültesi mezunu ve diğer öğretmenlerin fen fakültesi mezunu oldukları görülmektedir. Bu öğretmenler daha önce birçok kez fonksiyon konusunu 2005 programı yürürlükte iken öğrettiklerini beyan etmişlerdir. Ayrıca 2013 program değişikliğinde 9 ve 10. sınıfta öğretilecek şekilde parçalanan fonksiyon konusunu 9. sınıfta öğrettiklerini belirtmişlerdir. Yine bütün öğretmenlerin 10. sınıfta fonksiyon konusunu 2013 programı kapsamında ilk kez anlattıkları görülmüştür.

Öğretmenlerin genel özelliklerinin yanında okulun ve okulda öğrenim gören öğrencilerin özellikleri de öğretimi etkileyen faktörler arasındadır. Okulun fiziki yapısı, okulu tercih eden öğrencilerin başarı ortalaması ve öğrencilerin ailelerinin sosyo-ekonomik yapısı bu faktörlerin başında gelmektedir. Tablo 3.2'de bu tarz bilgiler verilmiştir.

Tablo 3.2. *Araştırma yapılan okullara ilişkin bilgiler*

Öğretmenler	Okulun Türü	TEOG Taban Puan	Sınıfta Bulunan Öğretim Materyalleri	Öğrencilerin Ailelerinin Sosyo-Ekonomik Profili
Burak Öğretmen	Fen Lisesi	446	Akıllı Tahta, Beyaz Tahta ve Tabletler	Genellikle orta düzey, az sayıda yüksek ve düşük düzey
Arda Öğretmen	Anadolu Lisesi	396	Akıllı Tahta, Beyaz Tahta ve Tabletler	Genellikle orta düzey, az sayıda düşük düzey
Tuna Öğretmen	Anadolu Lisesi	373	Beyaz Tahta	Orta ve düşük düzey

Tablo 3.2'de görüldüğü üzere, araştırma kapsamındaki okullar Fen lisesi ve Anadolu lisesi türündeki okullar arasından TEOG puanları yüksek olan okullardır. Bu tabloda ayrıca öğrencilerin ailelerinin genellikle orta sosyo-ekonomik düzeyde oldukları ve iki okulda akıllı tahta ve tablet kullanıldığı görülmektedir. Okullar arası bir karşılaştırma yapıldığında ise, Burak öğretmenin okulundan Tuna öğretmenin okuluna doğru, TEOG puanlarıyla beraber ailelerin sosyo-ekonomik seviyesinde bir düşüş ve kullanılan öğretim materyallerinde bir sınırlılık dikkati çekmektedir.

Burak ve Arda öğretmenin okullarında Fatih Projesi uygulamaya başlamıştır. Bu öğretmenlerin sınıflarında akıllı tahtaya ek olarak öğrenci ve öğretmen tabletleri de mevcuttur.

3.4. Veri Toplama Araçları ve Veri Toplama Süreci

Bu araştırma her okulda rasgele seçilen bir sınıfta gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın verileri ders gözlemleri, derslerin video ve ses kayıtları, öğretmenlerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler, öğretmenlere fonksiyon konusuyla ilgili uygulanan bir test, öğretmenlerin ders notları, öğretmenlerin derslerinde kullandıkları ders kitapları, öğrenci defterleri ve öğrenci tabletlerinde fonksiyon konusuyla ilgili öğrencilerin ders notları, öğrencilerin yazılı sınav kağıtlarından elde edilmiştir.

Doküman incelemesi durum çalışması araştırmalarında bulguları destekleyecek şekilde kullanılabilmektedir (Glesne, 2013; Cresswell, 2007; Yıldırım & Şimşek, 2016). Araştırmada ilk olarak ortaöğretim matematik dersi öğretim programlarının (2005 ve 2013 öğretim programları) analizi yapılmıştır.

Araştırmanın sınıflardaki veri toplama süreci 10. sınıf fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunun başında başlamış ve bu konunun öğretimi tamamlanıncaya kadar devam etmiştir. Bu süreç bir öğretmenden diğerine üç ile altı hafta arasında değişmektedir.

Bu çalışmada araştırmacı öğretmenlerin 10. sınıf matematik derslerinde fonksiyon konusunu öğretimini katılımcı gözlemci rolüyle gözlemlemiştir. Katılımcı gözlem araştırmacının bir durumun birçok yönünü ayrıntılı olarak gözlemlemesi, sistematik bir biçimde deneyimlemesi ve bilinçli olarak kaydetmesi gibi günlük yaşamdaki gözlemlerden farklı olanaklar sağlamaktadır (Glesne, 2013). Karasar (2012) veri toplama aracı olarak gözlemin, karmaşık davranışların araştırılmasında (öğretmen-öğrenci ilişkilerinin, doktor-hemşire, doktor-hasta ilişkilerinin, vs.) kullanılabileceğini ifade etmiştir. Bu araştırmada araştırmacı öğretmenlerin sınıf uygulamalarında fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusuna ilişkin gözlem notları tutmuştur. Bu notların tutulmasında amaç kameranın görmediği bazı yaklaşımları tespit etmek, ilerde analizlerde kolay kullanılabilecek verileri işaretlemek, sınıf kolektifini araştırmacının gözüyle okumak, sınıf kültürü hakkında belli ölçüde de olsa fikir sahibi olmak şeklinde ifade edilebilir. Bu doğrultuda araştırmacı, öğretmenlerin sınıf uygulamalarında bir görevi nasıl oluşturduğu, sınıf ortamına bu görevi nasıl sunduğu, görevlerin çözümünde hangi teknikleri kullandığı, tekniklerin uygulanması sürecinde öğretmenin teknolojik ya da teorik açıklamalarda bulunup-bulunmadığı, didaktik prakseolojilerde didaktik anların hangi sırayla gerçekleştiği, çözümünde zorluklar yaşanan görevler, bu süreçte öğretmen-öğrenci ve öğrenci-öğrenci diyalogunun nasıl gerçekleştiği gibi durumlar not edilmiştir. Çalışmada kullanılan gözlem formu Ek 4'te verilmiştir.

Araştırma kapsamında öğretmenlerin fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusuyla ilgili tüm dersleri video kamera ve ses kayıt cihazıyla kayıt altına alınmıştır. Toplamda, Burak öğretmenin 27, Arda öğretmenin 15 ve Tuna öğretmenin 13 dersi olmak üzere 55 adet ders kayıt altına alınmıştır.

Nitel araştırmada görüşme, çalışılan alanda olgunun anlaşılmasında nitel veri için gerekli olan temel kaynaktır (Merriam, 2013). Görüşme soruları bir uzmanla birlikte hazırlanmış ve rastgele seçilen iki öğretmene uygulanarak pilot çalışması yapılmıştır. Pilot çalışma doğrultusunda elde edilen verilerden bazı sorularda küçük değişiklikler yapılmış ve bazı sorulara yeni sonda sorular konulması kararlaştırılmıştır. Bu çalışmada her bir öğretmenle dört adet yüz yüze yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Uygulama aşamasının başlangıcında yapılan ilk görüşmede, öğretmenlerin; değişen matematik dersi öğretim programı ile ilgili fikirleri ve bu programda fonksiyon konusunun nasıl yer aldığı, fonksiyon konusunu nasıl öğrettikleri gibi sorulara cevap aranmıştır. Ders gözlemleri sürecinde yapılan ikinci görüşmede öğretmenlerin fonksiyonlarla ilgili problemleri hangi tekniklerle çözdükleri ve ağırlıklı olarak tercih ettikleri teknikler ve bu teknikleri tercih etme nedenleri sorgulanmıştır. Ders gözlemleri sonrasında yapılan üçüncü görüşmede öğretmenlerin sınıf uygulamalarında fonksiyon konusunun öğretiminde karşılaşılan bazı durumlarla ilgili prakseolojilerine ilişkin sorgulamalar yer almaktadır. Burada özellikle öğretmenlerin sınıf uygulamalarında kullandıkları çözüm teknikleriyle ilgili tercihleri ve bazı problemlerde kullanmadıkları teknikleri niçin kullanmadıkları sorgulanmıştır. Son görüşmede öğretmenlerin kullandığı ders kitaplarını tercih etme nedenleri, ders kitaplarının fonksiyon konusunun öğretimini nasıl etkilediği, öğretim programında fonksiyon öğretiminde ne tür sınırlamalarla karşılaştıkları gibi durumlar sorgulanmıştır. Bu sorular öğretmenlerin derslerini etkilememek adına bilinçli olarak son görüşmeye bırakılmıştır. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerde kullanılan görüşme soruları Ek 5'de verilmiştir.

Bu verilere ek olarak, açık uçlu sorulardan oluşan bir fonksiyon testi araştırmacı tarafından hazırlanarak öğretmenlere uygulanmıştır (Ek 6). Bu testteki soruları öğretmenlerin birden fazla yöntemle çözmeleri istenmiştir. Bu sayede öğretmenlerin fonksiyon konusuyla ilgili gerçekte sahip olduğu prakseolojiler ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Öğretmenlere uygulanan testte yer alan görevlere ilişkin bilgiler Tablo 3.3'te verilmiştir.

Tablo 3.3. *Öğretmenlerin uygulanan testte yer alan görevlere ilişkin bilgiler*

Alt Başlık	Görev Tipi	Görev Sayısı
Tanım Kümesini Belirleme	Değer kümesi bilinen cebirsel temsille verilen bir doğrusal fonksiyonun tanım kümesini belirleme (görev 1)	1
Fonksiyon Türleri	Sabit fonksiyon olduğu bilinen bir fonksiyonun cebirsel temsilinde bilinmeyenleri bulma (görev 2)	1
	İki noktası bilinen bir doğrusal fonksiyonda belli bir değerin görüntüsünü bulma (görev 3)	1
	Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonun tek ya da çift olduğunu bulma (görev 7)	1
Fonksiyonun Özellikleri	Reel sayılarda tanımlı cebirsel temsille verilen bir fonksiyonun bire bir olduğunu bulma (görev 4)	1
	Tam sayılarda tanımlı cebirsel temsille verilen bir fonksiyonun örten olduğunu bulma (görev 5)	1
Fonksiyonlarda Dört İşlem	Cebirsel temsille verilen iki fonksiyonun farkını bulma (görev 6)	1
Fonksiyonun Tersi	Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonda belli bir değerin ters görüntüsünü bulma (görev 8, 9, 17)	3
Simetri Dönüşümleri	Grafik temsili verilen fonksiyonların simetri dönüşümleri sonunda elde edilen grafiği bulma (görev 11, 12)	2
Bileşke Fonksiyon	Cebirsel temsilinde bileşkesi ve fonksiyonlardan biri belli iken diğerini bulma (görev 10)	1
Grafik Yorum	İki fonksiyonun grafiğinin birbirine göre durumlarına ilişkin görevler (görev 13, 14)	2
Fonksiyonlarla Uygulamalar	Fonksiyonların günlük yaşam problemlerinde kullanımına İlişkin görevler (görev 15, 16)	2

3.5. Veri Toplama Süreci

Araştırma sürecinde araştırmacı bir saat önceden gelerek araştırmayla ilgili öğretmenleri tekrar bilgilendirmiştir. Bu süreçte öğretmenlerin doğal ders anlatma sürecine devam etmesi istenmiştir. Derse ilk girişte öğretmenler araştırmacıyı öğrencilere takdim etmişlerdir. Çalışmayla ilgili öğrenciler bilgilendirildikten sonra ders işleyişi normal düzende devam etmiştir. Bu süreçte kameranın öğretmenin tahtadaki bilgileri üzerine yoğunlaştıracağı belirtilmiştir.

Ortaöğretim matematik dersi öğretim programına göre 10. sınıf düzeyinde matematik dersi haftada altı saattir. Tablo 3.4'te matematik dersi öğretim programında sayılar ve cebir öğrenme alanında fonksiyon konusunun öğretiminde herbir kazanım için ayrılan sürelere göre, öğretmenlerin 10. sınıfta fonksiyon konusunun öğretiminde veri toplama sürecinde farklı haftalarda anlatmaları beklenen alt başlıklar ve kazanımlara ilişkin ders planı Tablo 3.4'te verilmiştir.

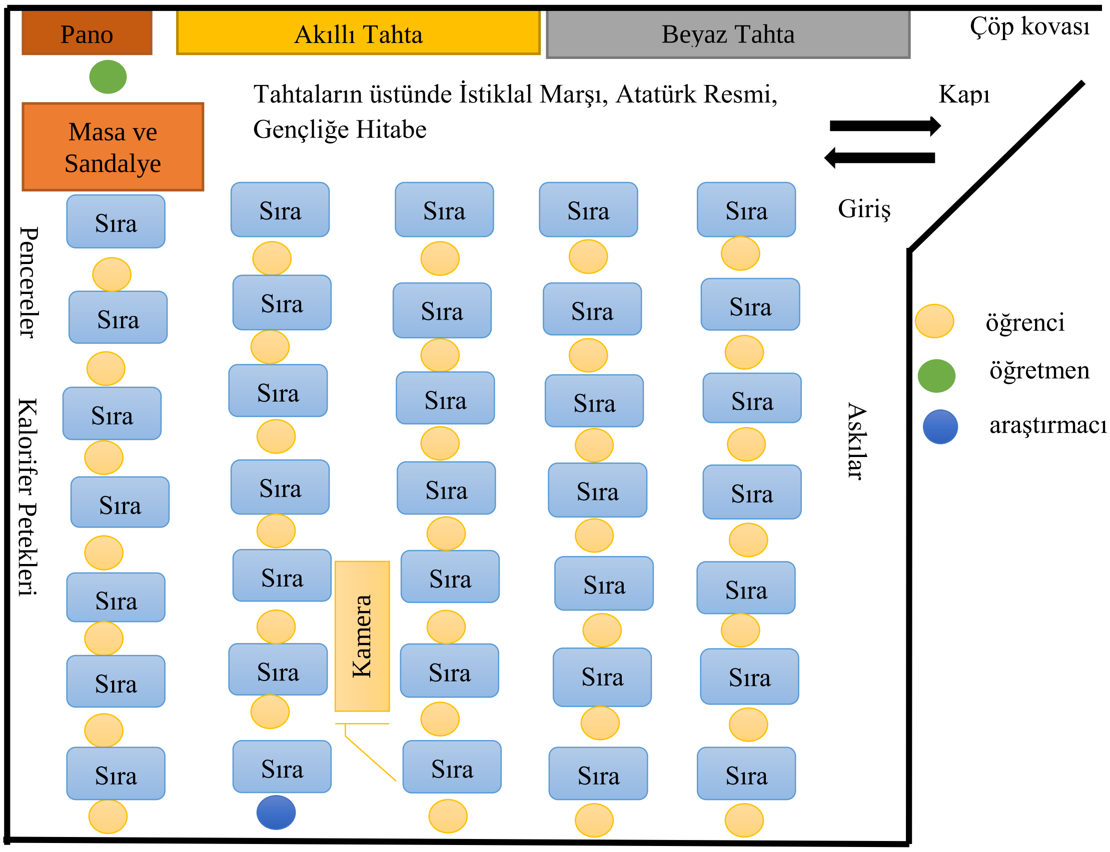
Tablo 3.4. *2013 Matematik dersi öğretim programında 10. sınıfta fonksiyonlar konusunun öğretimi*

Haftalar	Ders Süresi	Alt Başlık	Kazanım
1. Hafta	6	Fonksiyonların Simetrileri ve Cebirsel Özellikleri	Bir fonksiyonun grafiğinden, simetri dönüşümleri yardımı ile yeni fonksiyon grafikleri çizer
2. Hafta	6	Fonksiyonların Simetrileri ve Cebirsel Özellikleri	Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonlarını kullanarak f+g, f-g, fg ve f/g fonksiyonlarını elde eder.
3. Hafta	6	İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersi	Fonksiyonlarda bileşke işlemini açıklar.
4. Hafta	6	İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersi	Bir fonksiyonun bileşke işlemine göre tersinin olması için gerekli ve yeterli şartları belirleyerek, verilen bir fonksiyonun tersini bulur.
5. Hafta	6	İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersi	Bir fonksiyonun bileşke işlemine göre tersinin olması için gerekli ve yeterli şartları belirleyerek, verilen bir fonksiyonun tersini bulur.
		Fonksiyonlarla ilgili Uygulamalar	İki miktar (nicelik) arasındaki ilişkiyi fonksiyon kavramıyla açıklar; problem çözümünde fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanır.
6. Hafta	4	Fonksiyonlarla ilgili Uygulamalar	İki miktar (nicelik) arasındaki ilişkiyi fonksiyon kavramıyla açıklar; problem çözümünde fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanır.

Tablo 3.4'te görüldüğü üzere, matematik dersi öğretim programında 10. sınıfta fonksiyon konusunun altı haftada ve toplamda 34 saatte öğretilmesi planlanmaktadır. Bu doğrultuda ilk iki hafta fonksiyonların simetri dönüşümleri ve cebirsel özellikleri, daha sonraki üç hafta iki fonksiyonun bileşkesi ve bir fonksiyonun tersi ve son hafta fonksiyonlarla ilgili uygulamalar alt başlıklarının öğretilebileceği öngörülmektedir.

Programda fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunun farklı alt başlıklarında yer verilen kazanımların öğretimine ayrılan süreler dikkate alınarak Tablo 3.4 belirtilen tahmini yol haritası oluşturulmuştur. Diğer taraftan bu tablo öğretmenlerin öğretim sürecindeki uygulamalarını göstermemektedir. Öğretmenlerin öğretim sürecinde nasıl bir öğretim planı takip ettikleri bulgular kısmında her öğretmen için ayrı ayrı çıkarılmıştır.

Veri toplanan sınıfların fiziki yapıları belli ölçüde benzerlik göstermektedir. Şekil 3.1'de Burak öğretmenin ders anlattığı sınıfın fiziki yapısı, öğretmenin konumu, araştırmacının konumu, kameranın konumu, öğrencilerin bu sınıfta nasıl yerleştirildiği gibi bilgiler verilmiştir.



Şekil 3.1. *Burak öğretmenin matematik dersini anlattığı sınıf ortamı*

Şekil 3.1'de görüldüğü üzere, sınıfın sağ üst kısmında sınıf kapısı yer almaktadır. Sınıfın sol üst kısmında öğretmen masa ve sandalyesi bulunmaktadır. Bunların arkasında duyuruların asıldığı sınıf panosu duvara yapışık biçimde yerleştirilmiştir. Sınıfın karşı duvarında akıllı tahta ve beyaz tahta duvarla bitişik biçimde yerden 1 m yukarıya monte edilmiştir. Tahtaların üzerinde en solda İstiklal Marşı, ortada Atatürk resmi ve en sağda Atatürk'ün Gençliğe Hitabesi yer almaktadır. Sol duvarda pencereler ve onun altında uzun kalorifer petekleri konumlandırılmıştır. Sağ duvarda askılar yer almaktadır. Sınıfın arkasında bulunan duvar genellikle boş olmakla birlikte bazen resim, performans ödevi gibi etkinlikler asılmaktadır. Sınıfta öğrenciler sıralara birer kişi oturmaktadır ve bu sınıfta 34 öğrenci bulunmaktadır. Genelde öğrencilerin yerleri sabit olmakla birlikte bazı öğrencilerin zaman zaman yer değişikliği yaptığı tespit edilmiştir. Derslerin neredeyse tamamı akıllı tahta üzerinden anlatıldığından kamera akıllı tahtayı karşıdan ve net görecek şekilde soldan ikinci sıra dizisi ve üçüncü sıra dizisi arasına yerleştirilmiştir. Kamera her ders öncesinde tripot ile akıllı tahtayı görecek şekilde sabitlenmiştir. Araştırmacı, kameranın yanında soldan ikinci sıra dizisinin sonunda sınıf uygulamalarını gözlemlemiştir. Ayrıca seslerin anlaşılmama ihtimaline karşı öğretmen masasına bir adet ses kayıt cihazı da yerleştirilmiştir. Şekil 3.1'de görülebileceği üzere, araştırmacı ve kameranın konumu, sınıfı rahatsız etmeyecek şekilde yerleştirilmeye çalışılmıştır. Böyle bir konumlandırmayla doğal sınıf ortamının korunması amaçlanmıştır.

Arda öğretmenin sınıfındaki öğrenci yerleşme düzeni ve sınıf ortamı Şekil 3.1'deki gösterilenle benzerdir. Bu örnekte verilen sınıf ortamından farklı olarak, sadece pencereler ve kalorifer petekleri arka duvarda bulunmaktadır. Ayrıca yan duvarlarda Almanca bazı sözcükler yazıldığı gözlenmiştir.

Tuna öğretmenin sınıfı Şekil 3.1'de verilen yapıyla aynı dizaynda olmakla birlikte bazı farklılıklar mevcuttur. Öğrenci girişi burada da sağ üst köşede bulunmaktadır. Pencereler ve kalorifer petekleri sol duvarda yer almaktadır. Ön duvarda sadece beyaz tahta bulunmaktadır. Tahtanın üstünde İstiklal Marşı, Atatürk resmi ve Gençliğe Hitabe yer almaktadır. Sağ duvarda yine askılar bulunmaktadır. Ancak öğrenciler burada sıralara ikişerli oturmaktadır. Sıralar önden arkaya doğru üç sütun şeklinde dizilmiştir.

3.6. Verilerin Analizi

İlk olarak 55 adet dersin video kayıtlarının dökümleri ile 12 adet görüşmenin dökümleri yapılmıştır. Derslerin dökümlerinde ek olarak, öğretmenlerin tahtada yapmış oldukları işlemler videolardan alınan ekran görüntüleri şeklinde bilgisayar ortamına aktarılmıştır.

Araştırma kapsamında toplanan veriler aşağıdaki sıra ile analiz edilmiştir:

- Matematik dersi öğretim programlarının ekolojik analizi fonksiyon konusu bağlamında yapılarak programda yapılan değişimin boyutları ve değişimin fonksiyon öğretimine nasıl etki edeceği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.
- Fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusuyla ilgili matematiksel prakseolojiler belirlenmeye çalışılmıştır. Matematik öğretim programı ve ders kitaplarında geçen bilgiler doğrultusunda bu analiz gerçekleştirilmiştir.
- Dökümü yapılan ders videoları prakseolojik analiz metoduyla analiz edilerek her bir öğretmenin fonksiyon öğretiminde gerçekleştirdiği görevler, görev tiplerine göre sınıflandırılmıştır. Araştırma sorularını yansıtacak şekilde her görev tipinden yeterli sayıda görevin derinlemesine prakseolojik analizi yapılmıştır.

- Görüşmeler betimsel olarak analiz edilmiştir. Bu analizler prakseolojik analizlerden elde edilen bulguları destekleyecek şekilde doğrudan alıntılar yapılarak sunulmuştur.
- Fonksiyon konusuyla ilgili öğretmenlere uygulanan testin prakseolojik analizi yapılarak öğretmenlerin gerçekte sahip olduğu didaktik prakseolojiler belirlenmeye çalışılmıştır.

Yapılan bu analizlerde elde edilen sonuçlar görüşmelerle ve alan notlarıyla desteklenmiş ve bulgular kısmında sunulmaya çalışılmıştır.

3.6.1. Öğretim programının ekolojik ve prakseolojik analizleri

Bu bölümde 2005 ve 2013 yılı ortaöğretim matematik dersi öğretim programları fonksiyon konusu bağlamında incelenmiştir. Burada öncelikle fonksiyon konusunun bulunduğu sınıf düzeyi ve bu bağlamda fonksiyonların kullanıldığı işlev belirlenmeye çalışılmıştır.

Gerçekleştirilen ekolojik analizlerde, matematik dersi öğretim programında fonksiyonlar konusuyla ilgili kazanımlar ve kazanımlara ilişkin açıklamalar incelenmiştir. Bu doğrultuda kazanımın edinilmesinde kullanılabilecek konu ya da kavramlar belirlenmiştir. Bu konu ya da kavramlar arasındaki uyum ya da uyumsuzluklar belirlenmeye çalışılmıştır. Burada programlarda yer verilen kazanımların hangi sınıf düzeyinde, nasıl geçtiği ve diğer konu ya da kavramlarla ilişkilerine ilişkin analizler yapılmıştır.

3.6.2. Öğretmenlerin didaktik prakseolojilerinin analizi

Bu aşamada Burak Öğretmenle ilgili 27 ders, Arda Öğretmenle ilgili 15 ders ve Tuna Öğretmenle ilgili 13 ders videosunun analizleri yapılmıştır. Bu analizlerde tümevarımsal bir yaklaşım takip edilmiştir. Bu doğrultuda öncelikle didaktik prakseolojilerde didaktik anlar Tablo 3.5'te verildiği şekilde incelenmiştir.

Tablo 3.5. *Didaktik prakselojilerde didaktik anların analizde kullanılan tablo*

Kayıt Yeri	Alt Başlık	Görevler ve Didaktik Anlar	Etkin Aktör	Sunulan Matematiksel Nesneler (Yeni=Y)	Gözlenen Didaktik Aktivite

Tablo 3.5'te, öğretmenlerin sınıf gözlemleri tablonun en sağdaki sütununda ve bunlara ilişkin analizler sol kısımda yer almaktadır. Bu doğrultuda analizlerde tablonun en solundan itibaren ilk sütunda, analizi yapılan dersin kayıt yeri (okul adı), tarih ve ders (1 ya da 2. ders) şeklinde verilmiştir. İkinci sütunda fonksiyonlar konusuyla ilgili gözlenen didaktik aktiviteye ilişkin alt başlık verilmiştir. Üçüncü sütunda didaktik anlardan öğretim sürecinde nelere ve hangi sırada yer verildiği incelenmektedir. Ayrıca bu sütunda görevlerde isimlendirilmeye başlanmıştır. Dördüncü sütunda, öğretim sürecinde aktif olan aktör (öğretmen, öğrenci ya da her ikisi) ve bu aktifliğin kayma yönü (örneğin Ö→Ö1 öğretmenin öğrenci 1'e soru yöneltmesi) verilmiştir. Beşinci sütunda gözlenen didaktik aktivitelerde kullanılan matematiksel nesneler verilmiştir. Bu nesnelerden ilk kez kullanılanlar Yeni (Y) olarak kodlanmıştır. Son sütunda ise gözlenen didaktik aktivite (sınıf ortamında dersin işleyiş sürecinde geçen diyaloglar) verilmiştir.

Bu analiz genellikle didaktik anlara ilişkin bilgiler vermektedir. Daha sonra ilgili dersler Tablo 3.6'ya aktarılarak daha derinlemesine analizler yapılmıştır. Burada görevlerin görev tiplerine indirgenmesi, görev tiplerinde kullanılan teknikler, teknolojik ve teorik açıklamalar tespit edilmiştir. Ayrıca gerçekleştirilen didaktik aktivitelerde baskın didaktik anlar ve alt anlar belirlenmeye çalışılmıştır. Bu çözümleme Tablo 3.6'da verilmektedir.

Tablo 3.6. *Didaktik prakseolojilerinin bileşenleri ve baskın anlar*

Seans	Görev Tipi	Teknik	Teknolojik ve Teorik Açıklamalar	Baskın An ya da Alt Anlar	Didaktik Tekniklerin Bileşenleri

Tablo 3.6'da sınıf ortamında gözlenen didaktik aktivite belli ölçüde derinleştirilerek, didaktik prakseolojilerin bileşenleri ortaya çıkarılmıştır. Bununla birlikte burada didaktik anlarla ilgili incelemeler de yapılmıştır. Ayrıca burada araştırmada önemli olduğu düşünülen görevlere ilişkin daha detaylı prakseolojik analizler yapılmasına yönelik seçimler yapılmıştır. Bu doğrultuda Tablo 3.6'da, en soldan birinci sütunda ilgili dersin seansı, ikinci sütunda bu seansta karşılaşılan görev tipleri, üçüncü sütunda teknikler, dördüncü sütunda teknoloji ve teorilere yönelik açıklamalar, beşinci sütunda didaktik anlara ilişkin inceleme ve son olarak didaktik tekniklerin bileşenlerine yer verilmiştir. Bu analizlerin nasıl gerçekleştirildiğine ilişkin bir örnek Ek 7 ve Ek 8'de bir öğretmenin bir ders saati için yapılmıştır.

Tablo 3.6'da gerçekleştirilen prakseolojik analizlerde elde edilen bilgilerin daha detaylandırılarak incelenmesi gerekmektedir. Böylece öğretmenlerin fonksiyon öğretiminde gerçekleştirdikleri didaktik prakseolojilerde gerçekte neleri, nasıl ortaya koydukları ve bunun mevcut şartlar altında (matematiksel prakseolojiler) ne ölçüde geçerli olduğu incelenmiştir. Bu doğrultuda katılımcı öğretmenlerin fonksiyon öğretiminde kullandıkları görevlerden bazılarının derinlemesine prakseolojik analizleri yapılmıştır. Burak Öğretmenle ilgili görevlerden 49 görevin, Arda Öğretmenle ilgili görevlerden 41 görevin ve Tuna Öğretmenle ilgili görevlerden 25 görevin prakseolojik analizi yapılmıştır. Analizi yapılan görevlerin seçiminde kullanılan bazı kriterler aşağıda verilmiştir.

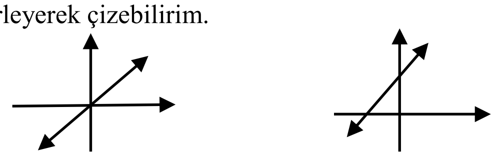
- Aynı şekilde meydana gelen birçok örnek olaydan bir tanesinin seçilmesi,
- Öğretim durumlarında meydana gelen özel durumlar seçilmesi (görevin birden fazla teknikle çözümlenmesi gibi),
- Öğretim durumlarında bir zorluk veya problem yaşanması.

Daha detaylı analizlerde görevler t_{ij} i, j: 1, 2, ... şeklinde sunulmuştur. Buradaki *i* indisi görev tipini ve *j* indisi görev tipindeki görevin öğretim sırasını göstermektedir. Fonksiyonların öğretiminde herbir alt başlıkta görev tipleri T_i, i: 1,2, ... şeklinde gösterilmektedir. Fonksiyonların öğretim sürecinde öğretmenlerin kullandığı teknikler $\tau_{i,j,k}$ i, j, k: 1,2, ... şeklinde gösterilmiştir. Bu gösterimde *i* simgesi görev tipini, *j* simgesi *i*.görev tipindeki görevin öğretim sırasını ve k simgesi ise söz konusu görevin farklı çözümlerinden kaçıncı sırada olduğunu göstermektedir. Burada teknolojik ve teorik açıklamalar sırayla $\theta_{i,j,k}$ ve $\Theta_{i,j,k}$ i, j, k: 1,2, ... şeklinde verilmiştir. Bu gösterimde *i* simgesi görev tipini, *j* simgesi *i*.görev tipindeki görevin öğretim sırasını ve *k* simgesi ise söz konusu görevin farklı çözümlerinden kaçıncı sırada olduğunu göstermektedir.

3.6.3. Matematiksel bir eylemin prakseolojik analizi

Fonksiyonların simetri dönüşümlerinde öğretim durumunda gerçekleşebilecek muhtemel bir matematiksel eylemin analizi Tablo 3.7'de verilmiştir. Bu sayede herhangi bir matematiksel eylemin öğretim sürecinde matematiksel prakseolojilerin ve didaktik anların bileşenleri doğrultusunda nasıl çözümlenebileceği somut bir örnek üzerinden açıklanmıştır. Bu tür bir açıklama ile bulgular bölümündeki analizlerin daha açık bir şekilde anlaşılması hedeflenmiştir.

Tablo 3.7. *Bir matematiksel görevin analizi*

<table>
<tr><th>Didaktik Anlar</th><th>Muhtemel Didaktik Eylem</th><th>Matematiksel Prakseoloji</th></tr>
<tr><td>Kısa TTÇO</td><td>Ö: Bu gün fonksiyonların grafiklerinin simetri dönüşümlerini inceleyeceğiz. Öncelikle dönüşüm nedir?
Ö1: Bir şeyin başka bir şey olması.</td><td></td></tr>
<tr><td>İK</td><td>Ö: Genel olarak öyle düşünebiliriz, ancak matematikte matematiksel bir nesnenin yine matematiksel bir nesneye dönüşmesidir. Düzlemdeki bir noktanın başka noktaya dönüşmesi gibi. Bir örnekle daha iyi anlaşılacaktır. Reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu, f(x)=x olarak verilsin. Buna göre y=f(x)+1 fonksiyonunun grafiğini bulalım.</td><td>Görev</td></tr>
<tr><td>GTK&TG</td><td>Şimdi bu problemi temsili olarak düşünebilirsiniz. Yani y=f(x)+1, y=f(x)+2, y=f(x)-1, y=f(x)+c …gibi aslında bunların hepsi aynı şekilde düşünülebilir. Bizim yazdığımız problem bunlardan sadece birisidir. Bu problemi nasıl çözebiliriz?</td><td>Görev tipi</td></tr>
<tr><td></td><td>Ö4: f(x)=x olarak verilmiş, bunu y=f(x)+1 fonksiyonunda yerine yazarsak y=x+1 elde edilir. Bu fonksiyonun eksenleri kestiği noktaları belirleyerek çizebilirim.
</td><td>Teknik 1</td></tr>
<tr><td>K</td><td>Ö: Evet, doğru. (öğretmen nümerik değerler vererek iki grafiği çizdi) Bunu önceki yıllarda öğrenmiştiniz. Bu iki grafiği karşılaştırırsak ne görüyoruz?
Ö5: İkiside doğrusal fonksiyon ama sağdaki 1 birim soldakinin yukarı kaydırılmış hali.</td><td></td></tr>
<tr><td>TÇ</td><td>Ö: Yani y=f(x)+1 fonksiyonunun grafiği y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin 1 birim y ekseninde yukarı ötelenmesi, değil mi?
Ö5: Evet.
Ö: İki fonksiyonun grafiklerinin karşılaştırılmasını noktalar üzerinden gerçekleştirirsek daha net bir şekilde fonksiyonlar arasındaki farklı gözlemleyebiliriz. Aşağıdaki tabloya bakın.
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>f(x)+1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table></td><td>Teknik 2</td></tr>
<tr><td>TTÇO</td><td>Tabloda x değerleri aynı iken f(x) ve f(x)+1 değerlerini karşılaştırırsak ne gözlemlemekteyiz.
Ö5: f(x)+1 değerleri f(x) değerlerinden sadece 1 fazladır.
Ö: Peki, bunu değerleri fonksiyonların üzerindeki noktalar şeklinde yazmak istersek şöyle olmaz mı? y=f(x) fonksiyonuna ait bazı noktalar (x,f(x))={(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)} şeklinde ve y=f(x)+1 fonksiyonuna ait bazı aynı apsisli bazı noktalar (x,f(x)+1)={(0,1), (1,2), (2,3), (3,4)} olur. Bu durum düzlem üzerinde düşünüldüğünde y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca 1 birim yukarı ötelendiğinde y=f(x)+1 fonksiyonunun grafiğinin elde edildiğini göstermektedir. Burada öteleme kullanıldı. Bu da bir dönüşümdür. Aslında dönüşüm bir fonksiyondur. Bu anlamda bir f dönüşümü, düzlemdeki noktalar kümesini bire bir ve örten olacak şekilde yine düzlem üzerine götürülmesidir. Bunlardan biri öteleme dönüşümüdür. Öteleme dönüşümünü tanımlamadan önce fonksiyonu hatırlayalım. Fonksiyon nedir?
Ö2: Tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir ve yalnız bir elemanla eşlenmesiydi.</td><td>Teknoloji</td></tr>
</table>

Tablo 3.7. (Devam) *Bir matematiksel görevin analizi*

Didaktik Anlar	Muhtemel Didaktik Eylem	Matematiksel Prakseoloji
TTÇO	Ö: Güzel. Bu fonksiyonun klasik tanımıdır. Bu tanımı farklı şekillerde ifade etmek mümkündür. Örneğin koordinat eksenini düşünelim. Koordinat eksenindeki noktalar (x,y) ikililerinden oluşmaktaydı. Buna ne denirdi? Ö3: Sıralı ikililer Ö: Ha, işte burada fonksiyon tanımını sıralı ikililer yoluyla vermek daha avantajlıdır. Bu doğrultuda fonksiyonu "sıralı ikililerin hiç birinin aynı ilk bileşene sahip olmadığı küme" şeklinde tanımlayabiliriz. Burada ilk bileşenler tanım kümesini ikinci bileşenler görüntü kümesini oluşturmaktadır. Bu doğrultuda öteleme dönüşümü, bir vektör yardımıyla düzlemdeki tüm noktaları yine düzlemdeki noktalarla eşleştiren bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Öteleme dönüşümü şeklin yapısını korumaktadır. Yani bir doğruyu ötelediğinizde eğim, eksenlerle yaptığı açı, noktalar arasındaki uzaklık, doğrusallık, gibi özellikler korunur.	Teknoloji
TTÇO	Bu yüzden öteleme dönüşümleri izometrik dönüşümlerdir. İzometrik dönüşüm, uzaklığı koruyan dönüşüm demektir. Bu örnekte f fonksiyonunun herhangi iki noktası (x,y) ve (a,b) olsun. Dönüşüm sonrası bu nokalar (x,y+1) ile (a,b+1) olur. İki nokta arasındaki uzaklık formülünü yazarsak her iki mesafenin uzunluğu, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ şeklinde çıkar. Bu da uzaklığın korunduğunu gösterir.	Teori

İK: İlk Karşılaşma, GTK&TG: Görev Tiplerini Keşfetme-Teknik Geliştirme, TTÇO: Teknolojik Teorik Çevreyi Oluşturma, TÇ: Tekniksel Çalışma, K: Kurumsallaştırma

Matematiksel eylem matematiksel prakseoloji açısından incelendiğinde (Tablo 3.7'de en sağdaki sütun) bir görev ile başlandıktan sonra bu görevin içerisinde bulunduğu görev tipi sunulmuştur. Daha sonra ilgili görev öğrencilerin 9. sınıfta öğrendikleri bir teknikle tamamlanmıştır. Bu teknik üzerinden yapılan çıkarsamayla, görevde ilk verilen grafikle dönüşüm sonrası karşılaştırılan grafiklerden, teknik 2'ye ulaşılmıştır. Daha sonra bu tekniğin niçin geçerli olduğuna ilişkin açıklamalar verildiğinden bunlar teknolojik açıklamalar olarak değerlendirilebilir. Son olarak gerçekleştirilen dönüşümün (öteleme dönüşümü) izometri olduğu belirtilerek teorisi ortaya konmuştur.

Aynı matematiksel aktivite didaktik anlar açısından incelendiğinde (Tablo 3.7'de en soldaki sütun) görev tipindeki bir görevle ilk karşılaşma anı (İK) ile matematiksel aktivitenin başlatıldığı görülmektedir. Daha sonra bu görev tipindeki görevlerin keşfedilmesi ve bu görev tipinin çözümüne ilişkin bir teknik geliştirilmesi anı (GTK&TG) gözlenmiştir. Bu teknik daha önce öğrenciler tarafından bilindiğinden kurumsallaştırılmış bir bilginin kullanımı söz konusudur. Dolayısıyla kurumsallaştırma anı (K) yaşandığına işaret etmektedir. Daha sonra alternatif bir teknik sunularak tekniksel çalışma anı (TÇ) verilmiştir. Sonra bu yeni tekniğin nümerik olarak geçerliliği gösterilmeye çalışılmıştır. Bu da teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı olarak nitelendirilebilir. Son olarak öteleme dönüşümünün izometrik dönüşüm olduğu ve bu dönüşüme ilişkin bilgiler verilerek teknolojik teorik çevrenin oluşturulması anına ilişkin bilgiler devam ettirilmiştir.

Bu analizlerden elde edilenler bulgular kısmında verilenler tablolar ve şekillerle özetlenmiştir. Bu tablolarda ve şekillerde teknikler, cebirsel teknik: C, geometrik teknik: G, eşleme tekniği: E şeklinde ve teknolojik açıklamalar yok, kısmen, yeterli şeklinde sınıflandırılmıştır. Bu sınıflamada geometrik teknik (ya da cebirsel teknik) denildiğinde sadece tek bir teknik anlaşılmamalıdır. Geometrik teknik içerisinde fonksiyonun grafiğinin karekteristik noktalarının belirlenmesi (örneğin doğru iki nokta ile karekterize edilir) yoluyla çizilmesi, özel noktaların belirlenerek çizilmesi (doğrunun eksenleri kestiği nokta ya da parabolün tepe noktası gibi), öteleme kullanılması (y=x fonksiyonunun grafiğinden y=x+1 fonksiyonunun grafiği elde edilmesi) ve yansıma kullanılması ($y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinden $y=-x^2$ fonksiyonunun grafiğinin elde edilmesi) şeklinde ifade edilebilecek teknikler kastedilmektedir. Bu tekniklerin bir kısmının oluşturulmasında Zazkis, Liljedahl ve Gadowsky'nin (2003) çalışmasından yararlanılmıştır. Benzer durum cebirsel teknikler içinde geçerlidir. Farklı cebirsel tekniklerin ortaya çıkarılmasında Bremigan, Bremigan ve Lorch'un (2011) ortaöğretim düzeyindeki öğretmenlere yönelik yazdıkları kitaptan yararlanılmıştır. Ayrıca tablolarda görevlerin tamamlanma sürecinde gözlenen didaktik anlar ve eğer varsa ekolojik sorunlar da verilmiştir. Diğer taraftan şekillerde görev tipleri arasında var olan doğrudan ilişkiler kesikli olmayan oklarla (bir görev tipi diğer bir görev tipinin ön davranışı olması) ve dolaylı ilişkiler ise kesikli oklarla (görev tiplerinde benzer teknik ya da teknoloji kullanılması) gösterilmiştir.

3.7. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Araştırmaların dikkatli bir şekilde planlanması ve uygulanması araştırma ile yakın ya da uzak ilişkisi bulunan kişilere doğru ve kanıtlanabilir anlayışlar ve sonuçlar sunmasıyla mümkündür (Merriam, 2013). Bu doğrultuda nitel araştırmalarda elde edilen bulguların geçerliğine ve güvenirliğine ilişkin bilgiler önemli görülmektedir.

Nitel araştırmalarda geçerlik, araştırmada kullanılan araçların, süreçlerin ve verilerin uygunluğu olarak tanımlanmıştır (Leung, 2015). Nitel araştırmada geçerliğin arttırılması için araştırmacının çalışma alanında yeterince zaman geçirmesi, veri çeşitlemesi yapılması, katılımcılardan elde edilen verilerle ilgili katılımcıların onayının alınması gibi durumların dikkate alınması gerektiği belirtilmiştir (Merriam, 2013; Yıldırım & Şimşek, 2016).

Nitel araştırmalarda güvenirlik, ulaşılan sonuçlarla elde edilen verilerin tutarlılık gösterme derecesidir (Merriam, 2013). Benzer şekilde Leung (2015), nitel araştırmalar için güvenirliğin özünü tutarlılık oluşturduğunu belirtmiştir. Miles ve Huberman (1994), tutarlılıkla kastedilenin zaman, araştırmacı ve mekan açısından araştırma sonuçlarının görece değişmez olması olarak açıklamışlardır. Bu doğrultuda araştırmada güvenirliğin arttırılması için araştırmacı izlediği süreçleri, kullandığı araçları net bir şekilde açıklamalı ve verileri sistematik bir şekilde ele almalıdır. Diğer bir ifadeyle güvenirlik, araştırmacıya bağlı hata ve yanlılığın araştırma bulgularını etkilemeyecek ölçüye indirgenmesi olarak belirtilmiştir (Yıldırım & Şimşek, 2016).

Araştırmada elde edilen verilerin geçerliğini arttırmak için gözlem, görüşme, alan notları, derslerin görsel ve işitsel araçlarla kaydedilmesiyle elde edilen veriler gibi veriler analiz edilerek veri çeşitlemesine gidilmiştir. Ayrıca araştırma bulguları matematik öğretim programlarının fonksiyon konusu bağlamında doküman incelemesi şeklinde ifade edilebilecek ekolojik analiz metoduyla desteklenerek geçerliği arttırılmıştır. Bu durumu Yıldırım ve Şimşek (2016), durum çalışması araştırmalarında elde edilen bulguların araştırma kapsamında ulaşılan kaynakların doküman incelemesiyle analiz edilerek desteklenebileceğini belirtmiştir. Geçerliğin arttırılmasında araştırmada elde edilen veriler katılımcılarla paylaşılarak verilerin geçerliliğine ilişkin katılımcı onayı alınmıştır. Araştırma kapsamında belirlenen üç okulun birer sınıfında dersleri izlenen öğretmenlerin 10. sınıf fonksiyon konusunun öğretim sürecinde katılımcı gözlemci rolüyle gözlemlenmesi çalışmada araştırmacının katılımcılarla yeterince zaman geçirdiğini göstermektedir.

Araştırmanın planlanması, uygulama süreci, veri toplama süreci, verilerin analizi gibi süreçler açık bir şekilde ifade edilmeye çalışılmıştır. Araştırmanın analizleri araştırmacı tarafından yapılmış ve bu analizler alanında uzman bir matematik eğitimcisi tarafından incelenmiştir. Araştırmada takip edilen bu analiz sürecinin çalışmada araştırmacı hatalarını ve yanlılığını azaltarak güvenirliği arttırdığı söylenebilir.

4. BULGULAR

Öğretmenlerin 10. sınıf matematik dersi fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusuyla ilgili didaktik prakseolojilerinin incelendiği araştırmanın bulguları iki ana bölüm altında verilmektedir. Birinci bölümde, matematik dersi öğretim programlarında yapılan son iki değişikliğin fonksiyon kavramı bağlamında karşılaştırmalı olarak ekolojik analizi sunulmuştur. İkinci bölümde, öğretmenlerin didaktik prakseolojileri her öğretmen için detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca fonksiyon konusuyla ilgili öğretmenlerin gerçekte sahip olduğu didaktik prakseolojilerde tespit edilmeye çalışılmıştır.

4.1. 2005 ve 2013 Matematik Dersi Öğretim Programlarındaki Fonksiyon Konusunun Ekolojik Analizi

4.1.1. 2005 matematik dersi öğretim programında fonksiyonlar konusunun ekolojik analizi

Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı altı öğrenme alanından oluşmaktadır. Bunlar; 1. mantık, 2. cebir, 3. trigonometri, 4. lineer cebir, 5. temel matematik, 6. olasılık ve istatistik şeklindedir. Geometri öğrenme alanına bu programda yer verilmemekte ve geometri ayrı bir program olarak sunulmaktadır. Konular sınıf düzeylerinde genellikle bir bütün olarak öğretilmektedir. Örneğin cebir öğrenme alanındaki kümeler konusunun tamamı 9. sınıf düzeyinde verilmektedir. Tablo 4.1'de 2005 matematik dersi öğretim programda fonksiyonlar konusuyla ilgili kazanımlar ve sınıflarda konuların işleyiş sıralaması verilmiştir.

Tablo 4.1. *2005 ortaöğretim matematik dersi öğretim programında fonksiyonlar*

Sınıf	Konu Sıralaması ve Öğrenme Alanında Fonksiyonla İlgili Kazanımlar
9. sınıf	Mantık→Kümeler→Bağıntı, Fonksiyon ve İşlem→Sayılar *Cebir* İki kümenin kartezyen çarpımını açıklar, kartezyen çarpımın özelliklerini belirtir. Bağıntı kavramını açıklar, şema ile gösterir ve bağıntının grafiğini çizer. Bağıntının tersini açıklar, verilen bir bağıntının tersini bulur ve grafiğini çizer Fonksiyon kavramını açıklar, şema ile göstererek fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini belirtir ve fonksiyonların eşitliğini ifade eder. (*Açıklama: Fonksiyon kavramının kartezyen çarpım ve bağıntı kavramları ile ilişkisi açıklanır. Bir fonksiyonun tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir ve yalnız bir eleman eşlemesi gerektiği ancak bu eşleme işlemini cebirsel veya aritmetiksel bir kural aracılığıyla yapmak zorunda olmadığı vurgulanır.)* Fonksiyon çeşitlerini açıklar. Fonksiyonlarda bileşke işlemini örneklerle açıklar.

Tablo 4.1. *(Devam) 2005 ortaöğretim matematik dersi öğretim programında fonksiyonlar*

Sınıf	Konu Sıralaması ve Öğrenme Alanında Fonksiyonla İlgili Kazanımlar
9. sınıf	Birebir ve örten fonksiyonun bileşke işlemine göre tersini bulur, grafiği verilen fonksiyonun tersinin grafiğini çizer. Grafiği verilen bir fonksiyonun tanım kümesindeki bazı elemanların görüntüsünü ve görüntü kümesindeki bazı elemanların ters görüntülerini belirler, belirli aralıklardaki değişimini yorumlar. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı, f ve g fonksiyonlarından elde edilen $f + g$, $f - g$, $f.g$ ve f / g fonksiyonlarını bulur.
12. sınıf	Fonksiyonlar→Limit ve Süreklilik→Türev→İntegral *Cebir* Fonksiyon kavramı, fonksiyon çeşitleri ve ters fonksiyon kavramlarını açıklar. Verilen bir fonksiyonun artan, azalan ve sabit olmasını açıklar; verilen bir fonksiyonun artan, azalan veya sabit olduğu aralıkları belirler. Çift fonksiyonu ve tek fonksiyonu açıklar, grafiklerini yorumlar. Verilen bir fonksiyonun en geniş tanım kümesini belirler. Parçalı fonksiyonun grafiğini çizer, uygulamalar yapar.

Tablo 4.1'de verildiği üzere, ortaöğretim matematik dersi öğretim programında bir kavram olarak fonksiyonun cebir öğrenme alanında 9. sınıf ve 12. sınıf düzeyinde öğretildiği görülmektedir. Burada 9. sınıfta fonksiyon kavramı, farklı temsilleri, çeşitleri, fonksiyonların bileşkesi, bir fonksiyonun tersi, bire bir ve örten fonksiyonlar gibi alt başlıklara yer verilmektedir. 12. sınıf düzeyinde öncelikle 9. sınıfın tekrarı yapılmakta sonrasında fonksiyonların en geniş tanım aralıkları ve parçalı ve mutlak değer fonksiyonların grafik çizimine yer verilmektedir. Ayrıca fonksiyonların artan ve azalan olduğu aralıklar ve tek-çift fonksiyon gibi konu başlıkları da 12. sınıfta incelenmektedir.

10. ve 11. Sınıflarda fonksiyonlarla ilgili herhangi bir kazanım yer almamaktadır. Bu sınıfların programında fonksiyon kavramına kazanımların açıklamalarında ve öğretim etkinliklerinde rastlanmıştır.

9. sınıfta konuların öğretim sırası mantık, kümeler, bağıntı-fonksiyon ve işlem, sayılar şeklinde olduğu belirlenmiştir. Ekolojik açıdan bu sıralama incelendiğinde fonksiyon kavramının programlarında mantık, kümeler, kartezyen çarpım ve bağıntı gibi konulardan beslendiği göze çarpmaktadır. Fonksiyon kavramına ilişkin kazanımımın açıklaması incelendiğinde kavramın Drichlet-Bourbaki tanımıyla öğretilmek istendiği görülmektedir.

Fonksiyon konusunda 9. sınıfta yer verilen konu alt başlıklar incelendiğinde alt başlıkların sırasında belli bir ekolojik uyum gözlenmiştir. Örneğin fonksiyonların bileşkesi ve bire bir ve örten fonksiyon öğretildikten sonra bir fonksiyonun tersinin bulunması istenmiştir. Hatta bu kazanım "Birebir ve örten fonksiyonun bileşke işlemine göre tersini bulur, grafiği verilen fonksiyonun tersinin grafiğini çizer.” şeklinde ifade edilerek tersi bulunacak fonksiyonların bire bir ve örten olması gerektiği ve fonksiyonun tersinin bileşke işlemiyle ilişkilendirilerek alınması istenmektedir.

10. sınıf düzeyinde polinom kavramına ilişkin kazanım “Gerçek katsayılı ve tek değişkenli polinom kavramını örneklerle açıklar, polinomun derecesini, baş katsayısını, sabit terimini belirtir.” şeklinde verilmiştir. Programda bu kazanıma ilişkin “Polinom ile fonksiyon arasındaki ilişki verilir” açıklaması yapılarak polinomun bir fonksiyon olduğu vurgulanmaktadır. Yine 10.sınıfta “$f(x) = ax^2+bx+c$ şeklinde verilen fonksiyonun alacağı değerlerin işaretini inceler ve tabloda gösterir, ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur” şeklinde verilen kazanımın “İkinci dereceden eşitsizliklerin çözümü sürecinde ikinci dereceden fonksiyon kavramının nasıl kullanılacağı üzerinde durulur.” şeklindeki açıklamasında ikinci dereceden eşitsizliklerin çözüm sürecinde fonksiyonların araç olarak kullanılabileceği üzerinde durulmaktadır. Benzer yaklaşımlar 11. sınıfta üstel fonksiyon ve logaritma gibi konularda da gözlenmiştir. Tüm bunlar yavaşta olsa fonksiyonun diğer konularla ilişkilendirilerek bir araç olarak olarak kullanılmak istendiğini göstermektedir.

12. sınıf öğretim programında fonksiyonlar ilk konu olarak ele alınmış, sonrasında analiz konularıyla ilgili kazanımlara yer verilmiştir. Fonksiyon kavramının bu kazanımlarda özellikle değişkenlik boyutu ön plana çıkmaktadır. Örneğin türev konusunda “Türev kavramını örneklerle açıklar.” kazanımının açıklamasında fiziksel ve geometrik modellerin kullanılması istenmektedir. Bu doğrultuda etkinlik ipuçları bölümünde “*Bir hareketlinin t saatte aldığı yol, s(t)= 50t + 2t*^{2} *(km) fonksiyonu ile veriliyor.”* biçiminde yolun zamana bağlı fonksiyonunun kullanıldığı belirlenmiştir. Benzer şekilde aynı konuda “Maksimum ve minimum problemlerini türev yardımıyla çözer.” şeklindeki diğer bir kazanımda kullanılan problemler fonksiyonlardır. Benzer şekilde integral konusunda “İntegral hesabının birinci ve ikinci temel teoremlerinin anlamını açıklar.” biçimindeki kazanımın etkinlik ipuçlarına ilişkin açıklamalarda “*Riemann toplamı yardımı ile ulaşılan* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$ *ifadesinin f(x) eğrisi ile üstten, x ekseni ile alttan sınırlı ve x=0 doğrusu ile x=x şeklinde değişken bir doğrunun arasında kalan alanı ifade ettiği belirtilir. Bu değişken alan A(x) fonksiyonu ile isimlendirilir.”* ifadesinden Riemann toplamının bir fonksiyon olduğu belirtilmektedir (MEB, 2005). Dolayısıyla fonksiyonların öğretiminden sonra yer alan birçok konuda fonksiyonların araç olarak kullanıldığı tespit edilmiştir. Bu kullanımı etkin hale getirmek

için programın 9. sınıfta en genel haliyle kümeler ve bağıntı üzerine inşa ettiği fonksiyon kavramını 12. sınıfın başında tamamen reel sayılardaki fonksiyonlar bağlamında ele aldığı görülmektedir.

4.1.2. 2013 matematik dersi öğretim programlarında fonksiyon kavramının ekolojik analizi

2013 yılında uygulamaya giren ortaöğretim matematik dersi öğretim programında köklü bir değişiklik yapıldığı görülmektedir. Önceki programda her konu genellikle sadece tek bir sınıf düzeyinde yer alırken yeni programda neredeyse her konu farklı sınıf düzeylerinde parçalanarak aşamalı bir biçimde verilmektedir. Programda bazı konuların çıkarıldığı, bazı konulara eklemeler yapıldığı ve bazılarının öğretildiği yerlerinin değiştiği görülmektedir. Tüm bunlara ek olarak önceki programda geometri ayrı bir program olarak verilirken, bu programda bir öğretim alanı olarak karşımıza çıkmaktadır. Tablo 4.2'de 2013 matematik dersi öğretim programında fonksiyonlar konusuyla ilgili kazanımlar ve sınıflarda konuların işleyiş sıralaması verilmiştir.

Tablo 4.2. *2013 ortaöğretim matematik dersi öğretim programında fonksiyonlar*

Sınıf	Konu Sıralaması ve Öğrenme Alanında Fonksiyonla İlgili Kazanımlar
9. sınıf	Kümeler→Denklemler ve Eşitsizlikler→Fonksiyonlar→Üçgenler→Vektörler→Veri→ Olasılık *Sayılar ve Cebir* Fonksiyon kavramını açıklar. *(Açıklama: Bu konuda yalnızca gerçek sayılar üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar ele alınacaktır. Fonksiyon konusuna girişte soyut bir yaklaşım yerine önce bire bir olan ve olmayan fonksiyon durumları ile modellenebilecek gerçek/gerçekçi hayat durumları kullanılarak tablo-grafik inceleme, bağımlı-bağımsız değişken arasındaki ilişki vb. durumlar bağlamında fonksiyon kavramı ele alınır. Fonksiyon "Bir kümenin (tanım kümesi) her bir elemanını başka bir kümenin (değer kümesi) bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişki" olarak ele alınır...)* Fonksiyonların grafik gösterimini yapar. *(Açıklama: ...$f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonların grafikleri ile ilgili uygulamalar yaptırılır... Parçalı tanımlı şekilde verilen fonksiyonların grafikleri çizdirilir ve ilgili işlemler yaptırılır...)* $f(x)=x^n$ ($n \in Z$) biçimindeki fonksiyonların grafiklerini çizer. Bire bir ve örten fonksiyonları açıklar.
10. sınıf	Sayma→Olasılık→ Fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları→Analitik geometri→Dörtgenler ve Çokgenler→İkinci dereceden denklem ve fonksiyonlar→Polinomlar→Çember ve Daire→Geometrik cisimler *Sayılar ve Cebir* Bir fonksiyonun grafiğinden, simetri dönüşümleri yardımı ile yeni fonksiyon grafikleri çizer. *(Açıklama: 9. sınıfta ele alınan $f(x)=x^n$ ($n \in Z$) biçimindeki fonksiyonların grafikleri temel alınarak $y = f(x)+b$, $y = f(x-a)$, $y = k.f(x)$, $y = f(k.x)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ dönüşümleri incelenir. Tek ve çift fonksiyonlar tanımlanır ve bu tür fonksiyonların hem cebirsel ifadesi hem de grafiğinin simetri özellikleri üzerinde durulur. Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.)*

Tablo 4.2. *(Devam) 2013 ortaöğretim matematik dersi öğretim programında fonksiyonlar*

Sınıf	Konu Sıralaması ve Öğrenme Alanında Fonksiyonla İlgili Kazanımlar
10. sınıf	Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonlarını kullanarak $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ ve f / g fonksiyonlarını elde eder. Fonksiyonlarda bileşke işlemini açıklar. Bir fonksiyonun bileşke işlemine göre tersinin olması için gerekli ve yeterli şartları belirleyerek, verilen bir fonksiyonun tersini bulur. *(Açıklama: Grafiği verilen bire bir ve örten fonksiyonun tersinin grafiği çizdirilir; fonksiyonun grafiği ile tersinin grafiğinin y=x doğrusuna göre simetrik olduğu fark ettirilir.)* İki miktar (nicelik) arasındaki ilişkiyi fonksiyon kavramıyla açıklar; problem çözümünde fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanır. *(Açıklama: İki nicelik arasındaki ilişki, gerçek hayat durumları kullanılarak "Herhangi bir şekle sahip kap/havuz suyla dolarken suyun yüksekliğinin su miktarına bağlı değişimi." modellenir. Grafiğin x ve y eksenlerini kestiği noktalar; fonksiyonun pozitif, negatif, artan ve azalan olduğu aralıklar; fonksiyonun maksimum ve minimumları ve bunların (verilen durum bağlamında) anlamları grafik üzerinden açıklanır. Sembolik ifade, grafik veya tablo ile verilen bir fonksiyonun belli bir aralıktaki ortalama değişim hızı (keseninin eğimi, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$) hesaplattırılır.)*

Tablo 4.2'de görüleceği üzere, fonksiyonlar konusu 2013 matematik dersi öğretim programında 9 ve 10. sınıflarda yer almaktadır. 9. sınıfta fonksiyon kavramı, bazı fonksiyonların grafik çizimi, bire bir ve örten fonksiyonlar gibi alt başlıklar incelenmektedir. 10. sınıfta ise fonksiyonların simetri dönüşümleri, bileşke fonksiyon, ters fonksiyon, fonksiyonlarla uygulamalar alt başlıklarına yer verilmektedir. Bu doğrultuda fonksiyonların kavramsal düzeyde 9. sınıfta öğretilirken 10. sınıftan itibaren problem çözümünde araç olarak kullanılmaya başlandığı söylenebilir.

Konu sıralaması incelendiğinde 9. sınıfta kümeler ve denklem ve eşitsizlikler konularından sonra fonksiyonların öğretildiği görülmektedir. Bu durum fonksiyonların kavramsal anlamda bu konular temelinde öğretilmek istendiğini göstermektedir. Tablo 4.2'de programda fonksiyon kavramının bağıntı olmaksızın tanımlandığı, ancak Drichlet-Bourbaki anlamını koruduğu tespit edilmiştir. Ancak ilgili açıklamalarda fonksiyonların denklem anlamında kullanılmasını teşvik eden bir yaklaşım sergilendiği belirlenmiştir.

Fonksiyonların 10. sınıftan itibaren problem çözümlerinde bir araç olarak kullanılmak istendiği anlaşılmaktadır. Örneğin 10. sınıf düzeyinde "İki miktar (nicelik) arasındaki ilişkiyi fonksiyon kavramıyla açıklar; problem çözümünde fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanır" kazanımı, 11. sınıf düzeyinde "Üstel ve logaritmik fonksiyonları gerçek/gerçekçi hayat durumlarını modelleme ve problem çözmede kullanır." kazanımı ve 12. sınıf düzeyinde "Maksimum ve minimum problemlerinin modellenmesi ve çözümünde türevi kullanır." kazanımı gibi kazanımlarda fonksiyonların birer araç olarak problem çözümlerinde kullanılmak istendiği belirlenmiştir. Bu kazanımlar incelendiğinde fonksiyonların “bir değişkenin diğerine göre değiştiği” denklem anlamında kullanıldığı görülmektedir.

2013 matematik dersi öğretim programında 10. sınıfta fonksiyonlar konusunun alt başlıklarının da ekolojik açıdan bazı sorunlar olduğu söylenebilir. 10. sınıfta simetri dönüşümleri ilk alt başlık olarak verilmiştir. Fonksiyonların bileşkesi ise daha sonra öğretilmektedir. Fonksiyonların simetri dönüşümleri cebirsel bağlamda düşünüldüğünde fonksiyonların bileşkesi kavramı ile açıklanabilir. Oysa bileşke fonksiyon kavramı çok daha ileride yer almaktadır. Bu durum simetri dönüşümlerinin cebirsel olarak anlamlandırılmasını zorlaştırabilir. Diğer yandan simetri dönüşümleri bu sınıfın ilk kazanımı olarak verilmesine rağmen bu dönüşümlerin niçin programda yer aldığına dair bir açıklamaya rastlanmamıştır. Simetri dönüşümleri fonksiyonların problem çözümlerinde bir araç olarak kullanımında önemli kolaylıklar sağlayabilir (Erdoğan, 2014). 10. sınıf programında da “İki miktar (nicelik) arasındaki ilişkiyi fonksiyon kavramıyla açıklar; problem çözümünde fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanır.” kazanımı böyle bir kullanımın hedeflendiğini göstermektedir.

2013 ortaöğretim matematik dersi öğretim programında geometrinin bir öğrenme alanı olarak yer almaktadır. 11. sınıf programında simetri dönüşümleri (öteleme, yansıma, dönme ve bunların bileşimleri) Tablo 2.4’te görüleceği üzere programda, geometri öğrenme alanında dönüşümler konusunda yer almaktadır (MEB, 2013). Bu durumda 10. sınıfta fonksiyonların simetri dönüşümlerinin öğretmenler tarafından anlamlı bir şekilde öğretilmesi zorlaşmaktadır.

4.1.3. 2005 ve 2013 matematik dersi öğretim programlarının fonksiyonlar konusunun ekolojik açıdan karşılaştırılması

2005 matematik dersi öğretim programında fonksiyonlar mantık, kümeler ve bağıntı üzerine inşa edilmektedir. Bu doğrultuda fonksiyon kavramı Drichlet-Bourbaki yaklaşımıyla tanımlanmakta ve fonksiyonun özel bir bağıntı olduğu belirtilmektedir. Bu yaklaşımın fonksiyonların denklem olduğu yanının görülmesini zorlaştırdığı söylenebilir (Markovits vd., 1986). Ancak 2013 matematik dersi öğretim programında fonksiyonlardan önce denklemler ve eşitsizlikler ile kümeler konuları yer almaktadır. Programdan bağıntı konusu çıkarılmıştır. Bu anlamda fonksiyon kavramının tanımı iki küme arasındaki eşleme olarak verilmekte ve reel sayılarla sınırlı kalmak şartıyla fonksiyonun süreç tanımı ön plana çıkarılmaya çalışılmaktadır. Bu durumun fonksiyonun denklem anlamını desteklediği söylenebilir. Sonuç olarak iki öğretim programı arasında üzerine inşa edildiği kavramlara bağlı olarak fonksiyon kavramının tanımında önemli bir değişikliğe gidildiği görülmektedir.

Her iki programda da fonksiyonların kendinden sonraki konularda araç olarak kullanımının hedeflendiği görülmektedir. 2005 programında kavramın ekolojisinden kaynaklanan ve ileriki konular için araç olarak kullanımına zorlaştıran sorunların 2013 programında kavramın ekolojisinin değiştirilmesiyle giderilmeye çalışıldığı anlaşılmaktadır. Bununla birlikte 2013 programı da bazı ekolojik sorunları beraberinde getirmektedir. Bunlardan en önemlisi simetri dönüşümlerinin yukarıda açıklandığı şekliyle 10. sınıfta bileşke fonksiyon kavramıyla ilişkilendirilmeden verilmeye çalışılması ve simetri dönüşümlerinin esas habitatının 11. sınıf geometri öğrenme alanında yer almasıdır.

4.1.4. 10. sınıf programındaki fonksiyonların simetrileri ile bileşke ve ters fonksiyon ile ilgili prakseolojiler

Burada programda önemli bir yeri olduğu anlaşılan fonksiyonların simetrileri ile bileşke ve ters fonksiyonun ile ilgili kazanımların gerisindeki prakseolojiler incelenecektir. Fonksiyonların simetrileri yukarıda da değinildiği üzere, 2013 programına yeni giren kazanımlar arasındadır. Bir fonksiyonun tersi kavramı ise fonksiyonların tanım aralıkları, bire birlik, örtenlik ve bileşke fonksiyon gibi birçok kavramı içinde barındırdığından kompleks bir kavramdır (Even, 1990). Öğrencilerin bir fonksiyonun tersinin elde edilmesi sürecinde bu kavramlara ilişkin eksik incelemelerde bulundukları tespit edilmiştir (Özdemir Erdoğan vd., 2012). Her iki programda da ters fonksiyon kavramı yer almasına ve benzer ifadelerle sunulmasına rağmen bulundukları ekolojik koşullar bu kavramın öğretiminde farklı prakseolojilerin ortaya konulmasını kaçınılmaz kılmaktadır. 2005 programında bir fonksiyonun tersi ile ilgili kazanımlar 9. sınıfta yer alırken aynı kazanımların 2013 programında 10. sınıfta yer alması bu tarz bir değişimin işaretlerini taşımaktadır.

Matematik dersi öğretim programında (2013 programında) 10. sınıfta fonksiyon konusunda yer alan kazanımlar doğrultusunda şu görevlere yer verilmek istendiği anlaşılmaktadır:

1. Bir fonksiyonun grafiğine ($f(x)=x^n$, $n \in Z$ şeklindeki fonksiyon grafikleri) dönüşümler ($y = f(x)+b$, $y = f(x-a)$, $y = k.f(x)$, $y = f(k.x)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ dönüşümleri) uygulanmasıyla başka fonksiyonların grafiklerini elde etme,
2. Tek ve çift fonksiyonları belirleme,
3. Fonksiyonlar üzerinde dört işlem gerçekleştirme,
4. Fonksiyonların bileşkesini alma,
5. Bir fonksiyonun tersini bulma,
6. İki nicelik arasındaki fonksiyonel ilişkiyi belirleme,
7. Bir fonksiyonun grafiğinin eksenleri kestiği noktaları bulma,
8. Bir fonksiyonun grafiğinin pozitif ya da negatif olduğu aralıkları bulma,
9. Bir fonksiyonun grafiğinin artan ya da azalan olduğu aralıkları bulma,
10. Bir fonksiyonun belli bir aralıkta maksimum ve minimumlarını bulma,
11. Fonksiyonun belli bir aralıkta ortalama değişim hızını bulma.

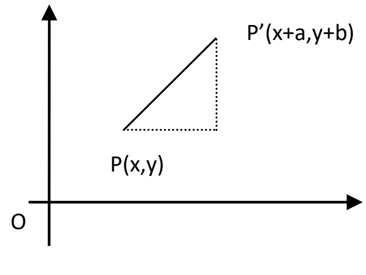
İlk olarak 1 nolu görevler içerisinde, bir fonksiyonun grafiğinin ötelenmesi (x ekseni ya da y ekseni üzerinde), simetriğinin alınması (örneğin x eksenine göre) ve daraltma ya da genişletme gibi dönüşümlerle yeni fonksiyonların grafikleri elde edilebilir. Daha önce de belirtildiği gibi, bu görev her ne kadar öğretim programında fonksiyon konusu bağlamında ele alınsa da geometri öğrenme alanında dönüşüm geometrisinin bir alt konusudur. Yani matematikçilerin bilgisi bağlamında fonksiyonların grafiklerinden bazı dönüşümler uygulanarak (öteleme, simetri, gibi) başka fonksiyonların grafiklerinin elde edilmesi gibi görevler dönüşüm geometrisi içerisinde fonksiyonların dönüşümüne girmektedir. Bu tür incelemeler DAT'ın analiz birimi olarak ifade edilen prakseolojinin bileşenlerinden özellikle teori bileşeninin ortaya çıkarılması açısından önemlidir. Bu doğrultuda ilk olarak dönüşüm kavramının ne olduğu incelenebilir?

Düzlemde bir dönüşüm, $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tanımlı bir fonksiyon olarak belirtilmiştir (Umble & Han, 2015). Yukarıda ifade edilen dönüşümlerin en genel anlamda dönüşüm geometrisi içerisinde afin dönüşüm oldukları söylenebilir. Afin Dönüşüm, bir düzlemde aynı doğru üzerinde bulunan (doğrudaş) üç noktanın dönüşüm altında diğer düzlemde doğrusallığını ve arada olma durumunu koruyan bire bir dönüşüm olarak tanımlanmaktadır (Modenov & Parkhomenko, 1965). Her Öklid uzayı bir afin uzay olarak ifade edilebilir (Tersi doğru değildir). Afin dönüşümlerde paralellik ve aynı doğru üzerinde bulunma (doğrudaş) korunmasına rağmen uzunluk, boyut, açı ve alan gibi özellikler genellikle korunmamaktadır (Modenov & Parkhomenko, 1965). Örneğin y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x)+a, y=f(x)-b, y=-f(x), y=f(-x) gibi dönüşümlerde uzaklık korunurken y=f(kx) ya da y=kf(x) dönüşümlerinde genellikle uzaklık korunmamaktadır.

Bütün afin dönüşümler yatay germe, düşey germe ve benzerlik dönüşümlerinin bileşkeleridir. Afin dönüşümlerde ele alınan şekil ya da grafik sadece bir yönde gerilmeye (daraltma ya da genişletme) uğradığı için bozulabilmektedir (Usiskin vd., 2003).

Düzlemde α: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tanımlı bir dönüşüm ve tanım kümesinde herhangi P ve Q elemanlarının bu dönüşüm altındaki görüntüleri α(P)=$\acute{P}$ ve α(Q)=$\acute{Q}$ olmak üzere, eğer $|PQ| = |\acute{P}\acute{Q}|$ ise o zaman α dönüşümüne izometri denir. Yani bir izometri, düzlemde uzaklığı koruyan bir dönüşümdür (Umble & Han, 2015). Düzlemde uzaklığın korunması açı ölçüsü, alan, dış görünüş, diklik, parelellik ve oran özelliklerinin korunduğu sonucunu da doğurmaktadır (Edwards, 1997). Düzlem geometri içerisinde katı dönüşümler olarak ifade edilen öteleme, yansıma ve dönme bu kategoride değerlendirilmektedir (Flegg, 2001). 10. sınıf programında y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin öteleme (translation) ve yansıma (reflection) yoluyla başka grafiklerin elde edilebilmesi düzlem geometrisi içerisinde izometri olarak düşünülebilir (Usiskin vd., 2003; Zembat, 2013; Flegg, 2001).

Düzlemin bir ötelemesi belli bir yönde sonlu uzaklıkta düzlemin kaydırılmasıdır (Umble & Han, 2015). Yani, orijini O(0,0) olan dikkoordinat sisteminde P(x,y) noktasında bulunan bir nokta, düzlemin T(a,b) vektörü tarafından ötelenmesiyle O_1(a,b) dikkoordinat sisteminde P noktasının koordinatları (x+a, y+b) olmaktadır (Yates, 1961). Bu doğrultuda öteleme, düzlemde bir P(x,y) noktasındaki değişkenlere sabit a ve b eklenerek $\acute{P}$(x+a,y+b) noktasına dönüştürülmesidir (Yates, 1961). Yani, öteleme dönüşümü $T_{(a,b)}: (x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ şeklindedir. Görüldüğü üzere öteleme dönüşümü bir vektör tarafından karekterize edilmektedir (Umble & Han, 2015). Bu durum Şekil 4.1'de verilmiştir.

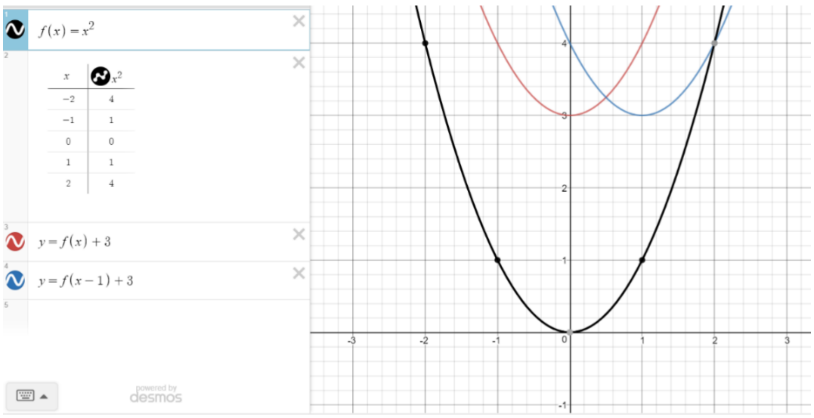


Şekil 4.1. *T(a,b) vektörü tarafından düzlemde bir P noktasının ötelenmesi*

Fonksiyon grafikleriyle öteleme dönüşümü arasındaki ilişki şu şekilde belirtilebilir: Herhangi bir y=f(x) fonksiyonunun grafiği ve bunun T(a,b) öteleme vektörüyle düzlemde y=g(x) fonksiyonunun grafiğine dönüştüğü varsayılsın. Burada g fonksiyonunun grafiği üzerindeki herhangi bir nokta (x,y) ise (x-a,y-b) noktası f fonksiyonunun grafiği üzerinde olmak zorundadır. En son bulunan (x-a, y-b) noktası f fonksiyonunun grafiği üzerinde olduğundan fonksiyonu sağlamalıdır. Yani, (x-a,y-b)∈f olduğundan f(x-a)=y-b olur. Burada eşitliğin her iki yanına +b eklenerek y=f(x-a)+b şeklinde elde edilir. Bu ifadeler öteleme dönüşümü altında,

$$T_{(a,b)}: y = f(x) \rightarrow y = f(x-a) + b$$

şeklindedir. Benzer yaklaşımlarla diğer dönüşümlerde yukarıda ifade edilen basamaklar takip edilerek formüle edilebilir. Yukarıda anlatılan formal durumu örnekleyecek biçimde Şekil 4.2'de y=x^2 fonksiyonunun grafiğinin y ekseninde 3 birim yukarı ve x ekseninde 1 birim sağa ötelenmesi sonrasında elde edilen grafik verilmiştir.



Şekil 4.2. *y=f(x)=x^2 fonksiyonunun grafiğinden yararlanılarak y=f(x-1)+3 fonksiyonunun grafiğini elde etme*[1]

Ortaöğretim programında bir fonksiyonun grafiğine bazı dönüşümler uygulanarak başka fonksiyonların grafiklerini elde etme alt başlığıyla ilgili görülebilecek görev tipleri şunlardır:

T_1: y=f(x) fonksiyonun grafiğinden yararlanarak y=f(x)+a fonksiyonunun grafiğini bulma

[1]https://www.desmos.com/calculator adresinde erişime açık grafik çizme yazılımı olan desmos adındaki programdan yararlanarak çizilmiştir.

T_2: y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x-b) fonksiyonunun grafiğini bulma

T_3: y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(-x) fonksiyonunun grafiğini bulma

T_4: y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=-f(x) fonksiyonunun grafiğini bulma

T_5: y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(kx) fonksiyonunun grafiğini bulma (k≠0,1 ve genellikle rasyonel bir sayı)

T_6: y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=kf(x) fonksiyonunun grafiğini bulma (k≠0,1 ve genellikle rasyonel bir sayı)

Bununla birlikte bu görevlerde görülen dönüşümlerin ikisinin bileşkesi olacak şekilde görevlerle de karşılaşmak mümkündür. Örneğin "y=f(x) fonksiyonun grafiğinden yararlanarak y=f(x+a)+b fonksiyonunun grafiğini bulma ya da y=-f(-x) grafiğini bulma" şeklindeki görevler de bu doğrultuda incelenebilir.

Yukarıdaki görevleri gerçekleştirmek için hangi teknikler ortaya konulabilir? Bu sorunun yanıtı y=f(x)=x^2 fonksiyonu örneği üzerinden verilebilir.

t_1: Reel sayılarda tanımlı y=f(x)=x^2 fonksiyonunun grafiğinden yararlanılarak y=f(x-2) fonksiyonunun grafiğini bulma

$\tau_{1,1}$: Düzlemde y=f(x)=x^2 fonksiyonunun grafiği x ekseni üzerinde 2 br sağa kaydırılarak y=f(x-2) grafiğini elde edilir.

θ: Şekil 4.1'den sonraki ilk pragraftaki açıklamalar bu tekniğin teknolojisini oluşturmaktadır.

Θ: İzometri

Yukarıda verilen görev cebirsel bir teknikler de ele alınabilir:

t_1: Reel sayılarda tanımlı y=f(x)=x^2 fonksiyonunun grafiğinden yararlanılarak y=f(x-2) fonksiyonunun grafiğini bulma

$\tau_{1,2}$: y=f(x)=x^2 fonksiyonunda x yerine x-2 yazılarak elde edilen y=g(x)=$(x-2)^2$ ikinci dereceden fonksiyonunun grafiği çizilebilir.

θ: Fonksiyonlarda bileşke işlemi

Θ: Monoid (Bir küme üzerinde kapalılık, birleşme ve birim eleman özelliğini sağlayan bir ikili işlem monoiddir (Fraleigh, 2003).)

Ortaöğretim matematik programında 10. sınıfta diğer bir önemli alt başlık bileşke ve ters fonksiyonun olarak belirtilebilir. Programda fonksiyonun tersinin bileşke işlemi üzerinden alınması istenmektedir (MEB, 2005, 2013). Diğer taraftan program bazı fonksiyonların tersinin olmayabileceğine yönelik örnekler içermektedir. Örneğin f:R→R olmak üzere, $f(x)=x^2$ fonksiyonunun tanımlandığı aralıkta tersi bir fonksiyon değildir. Ancak bu aralıkların bir kısıtlamasında yani f: $R^+ \to R^+$ olmak üzere, $f(x)=x^2$ şeklinde ifade edildiğinde ters fonksiyonu bulunabilir. Bu durum bir fonksiyonun ters fonksiyonunun belirlenmesinde bazı incelemelerin yapılmasını (bire birlik, örtenlik, tanım aralığının kısıtlanması) gerekli kılmaktadır. Sonuç olarak bir fonksiyonun ters fonksiyonunun belirlenmesi kompleks bir yapı arz etmektedir. Ortaöğretim programında bileşke ve ters fonksiyon ile ilgili karşılaşılabilecek görev tiplerinden bazıları şunlardır:

T_1: Cebirsel temsille verilen iki fonksiyonun bileşkesini bulma

T_2: Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonun ters fonksiyonunun olup-olmadığını belirleme

T_3: Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonun ters fonksiyonunun kuralını bulma

T_4: Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonda bazı değerlerin ters görüntüsünü bulma

T_5: Cebirsel temsilde iki fonksiyonun bileşkesi ve fonksiyonlardan biri belli iken diğerini bulma

T_6: Grafik temsili verilen iki fonksiyon için iki fonksiyonun bileşkesinde belli bir değerin görüntüsünü bulma

T_7: Grafik temsili verilen bir fonksiyonda bazı değerlerin ters görüntülerini bulma

T_8: Grafik temsili verilen bir fonksiyonun ters fonksiyonunun grafiğini çizme

Yukarıda önemlileri verilen görev tiplerinin dışında iki fonksiyonun bileşkesinin tersi gibi görevlerin incelenmesi de söz konusu olabilir. Ortaöğretim matematik dersi öğretim programında 10. sınıfta bileşke işlemine göre doğrusal bir fonksiyonun tersini bulmayı içeren bir görev prakseolojik açıdan aşağıdaki şekilde incelenebilir.

Cebirsel Teknik 1

t_2: $f: R \to R$ $f(x) = 2x - 4$ ise $f^{-1}(x)$ nedir?

$\tau_{2,1}$: $\forall\ x_1 \neq x_2$ için $2x_1 - 4 \neq 2x_2 - 4$ olur. Buradan $f(x_1) \neq f(x_2$ elde edilir. O halde f bire birdir. $\forall\ y \in R$ için $y = 2x - 4$ tir. Buradan $x = \frac{y+4}{2} \in R$ olduğundan f örtendir. Dolayısıyla f fonksiyonu bijektif bir fonksiyondur.

$f = \{(x, y): y = 2x - 4,\ x \in R \text{ ve } y \in R\}$

$$y = 2x - 4$$

$$\frac{y + 4}{2} = x$$

$$f^{-1} = \{(y, x): x = \frac{y+4}{2} \text{ ve } (x, y) \in f\}$$

$\theta_{2,1}$:

1. Bir fonksiyonun tersinin olması için bire bir ve örten olması gerekir.
2. Bir fonksiyonun bire bir olması için tanım kümesindeki farklı değerlerin görüntülerinin de farklı olması gerekir. ($\forall\ x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ olmalı)
3. Bir fonksiyonun örten olması için değer kümesindeki her elemanın tanım en az bir elemanla eşleşmiş olması gerekmektedir. ($f: A \to B$ olsun. $\forall\ y \in B$ için $\exists x \in A$ olmalı)
4. R den R ye bir fonksiyon (x,y)∈RxR sıralı ikililerinin özel bir bağıntısı ise f^{-1} de (y,x)∈RxR sıralı ikililerinin özel bir bağıntısıdır.

$\Theta_{2,1}$: Küme teorisi (İlk üç teknoloji fonksiyonlara ait olduğu varsayımıyla ihmal edilirse burada dördüncü teknolojinin teorisi küme teorisi olarak belirtilebilir.)

<u>Cebirsel Teknik 2</u>

t_2: $f: R \to R\ f(x) = 2x - 3$ ise $f^{-1}(x)$ nedir?

$\tau_{2,2}$:

$$(fof^{-1})(x) = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = x$$
$$2f^{-1}(x) - 4 = x$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$$

$\theta_{2,2}$:

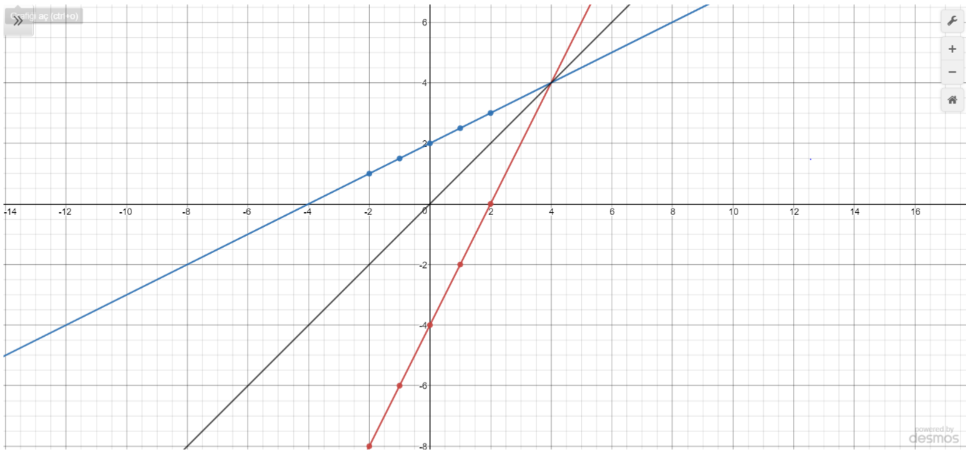
1. Bir fonksiyonun tersi var ise, yani fonksiyon bire bir ve örten ise bu fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyondur.
2. Reel sayılarda tanımlı bir fonksiyonla tersinin bileşkesi reel sayılarda tanımlı f(x)=x fonksiyonudur.
3. $(fof^{-1})(x)$ ifadesinde $f^{-1}(x)$ değeri f'in tanım kümesinin bir elemanıdır. $f^{-1}(x)$ değerinin f altındaki görüntüsü alınıp, $f^{-1}(x)$ in x e bağlı cebirsel ifadesi elde edilir.

$\Theta_{2,2}$: Monoid (f(x)=ax+b ve a,b∈R a≠0 doğrusal fonksiyonlar bileşke işlemine göre reel sayılar kümesinde üzerinde bir gruptur)

<u>Geometrik Teknik</u>

t_2: $f: R \to R\ f(x) = 2x - 4$ ise $f^{-1}(x)$ nedir?

$\tau_{2,3}$: Fonksiyonun grafiği çizildikten sonra bu grafiğin y=x doğrusuna göre simetriği tersinin grafiğidir. Fonksiyonun tersinin grafiğinden, grafiğin kuralı elde edilebilir. Bu kural başlangıçtaki fonksiyonun tersidir (Şekil 4.3).



Şekil 4.3. *Bir f fonksiyonu için f ile f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri*[2]

Yukarıdaki grafikte $x = 0$ için $y = -4$ olduğundan f fonksiyonu (0,-4) noktasından geçmelidir. Benzer şekilde $y = 0$ için x= 2 olduğundan f fonksiyonu (2,0) noktasından geçmelidir (kırmızı grafik). Doğrusal bir fonksiyonun tersi yine bir doğrusal fonksiyondur. Doğrusal fonksiyonlar iki farklı nokta ile karakterize edilebileceğinden, f fonksiyonunun koordinat eksenlerini kestiği belirlenen bu iki noktanın y=x doğrusuna göre simetriği alınarak $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun eksenleri kestiği noktalar bulunabilir. Buradan $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{x}{-4} + \frac{2y}{4} = 1$$

$$-x + 2y = 4$$

$$y = \frac{x + 4}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 4}{2}$$

$\theta_{2,3}$:

[2] https://www.desmos.com/calculator adresinde erişime açık grafik çizme yazılımı olan desmos adındaki programdan yararlanarak çizilmiştir.

1. x eksenine paralel çizilen bir doğru grafiği iki farklı noktada keserse $\exists\ x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1)=f(x_2)$ olacağından bire bir değildir. Aksi taktirde fonksiyon bire birdir.

2. x eksenine paralel çizilen bir doğru grafiği en az bir noktada kesmiyorsa $\forall y \in R$ için $\exists x \in R$ olamayacağından fonksiyon örten değildir. Aksi taktirde örtendir.

3. Bir fonksiyon bire bir ve örten ise tersi vardır.

4. $f=\{(x,y):\ x \in R \text{ ve } y \in R\}$ iken $f^{-1}=\{(y,x):\ y \in R, x \in R\}$ olduğundan bir fonksiyon ile tersinin grafiği y=x doğrusuna göre simetriktir.

$\Theta_{2,3}$: İzometri (ilk 3 teknoloji fonksiyonlara ait olduğu için ihmal edilirse dört nolu teknolojik bileşen düzlem simetrisine dayandığından izometri altında düşünülebilir)

Yukarıda belirtildiği üzere, 10. sınıf programı doğrultusunda herbir görevle ilgili birden fazla teknik söz konusu olabilir. Bu teknikler aynı teknoloji ve teoriden beslenebilecekleri gibi farklı teknoloji ve teoriden de beslenebilirler. Dolayısıyla aynı bir görev için farklı prakseolojiler söz konusu olabilir. Diğer yandan öğretim uygulamalarında karma tekniklerle de karşılaşılabilir. Özellikle cebirsel ve grafik teknikler iç içe geçmiş olarak kullanılabilir.

4.2. Öğretmenlerin Didaktik Prakseolojileri

4.2.1. Burak öğretmen durumu

Burak öğretmen fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunu 6 haftada ve 27 ders saatinde tamamlamıştır. Bu süreçte Cumhuriyet bayramından dolayı 2 gün resmi tatil olduğu için ders yapılamamıştır. Ayrıca 1. ve 2. yazılıların yapıldığı günlerde de ders işlenememiştir. Fonksiyon öğretiminde Burak öğretmenin Tablo 4.3'te verilmiştir.

Tablo 4.3. *Burak öğretmen'in uygulaması*

Tarih	Ders Sayısı	Alt Başlık
20.10.2014	2	Fonksiyonlarda Simetri Dönüşümleri
21.10.2014	2	Fonksiyonlarda Simetri Dönüşümleri
22.10.2014	2	1. Fonksiyonlarda Simetri Dönüşümleri, 2. Tek ve Çift Fonksiyon
27.10.2014	2	Fonksiyonlarda Simetri Dönüşümleri (alıştırmalar)
04.11.2014	2	1.Tek ve Çift Fonksiyon, 2.Fonksiyonlarda Dört İşlem
05.11.2014	2	Fonksiyonlarda Dört İşlem
10.11.2014	2	Fonksiyonların Bileşkesi
11.11.2014	1	Fonksiyonların Bileşkesi
12.11.2014	2	1. Fonksiyonların Bileşkesi, 2. Fonksiyonun Tersi
18.11.2014	2	Fonksiyonun Tersi
19.11.2014	2	Fonksiyonun Tersi
24.11.2014	2	Fonksiyonun Tersi
25.11.2014	2	1. Fonksiyonun Tersi, 2. Fonksiyonlarla Uygulamalar
26.11.2014	2	1. Fonksiyonun Tersi, 2. Fonksiyonlarla Uygulamalar

Tablo 4.3’ten Burak öğretmenin öğretimde konunun bütün alt başlıklarına ve kazanımlarına yer verdiği görülmektedir. Bu tabloda ayrıca, Burak öğretmen derslerini, kazanımların öğretim programındaki sırasını takip ederek organize ettiği görülmektedir. Burak öğretmen simetri dönüşümlerine yaklaşık yedi saat, tek ve çift fonksiyona 2 saat, fonksiyonlarda dört işleme 3 saat, bileşke fonksiyona 4 saat, bir fonksiyonun tersine 5 saat, bileşke ve ters fonksiyonun birlikte kullanımına 4 saat ve fonksiyonlarla uygulamalara 2 saat ayırdığı tespit edilmiştir.

4.2.1.1. Burak öğretmenin matematik öğretim programında yapılan değişikliklere ilişkin görüşleri

Uygulama öncesinde yapılan görüşmede Burak öğretmene ilk olarak, matematik dersi öğretim programlarıyla ilgili yapılan değişiklikleri genel anlamda nasıl değerlendirdiği sorulmuştur:

A: Yeni ve eski programları öğretim bağlamında karşılaştırabilir misiniz? Mesela çıkarılan konular var, eklenen konular var, yeri değişen konular var. Bu anlamda sizce nasıl oldu?

BÖ: Biz 11’de (11. sınıf) çok rahat ediyorduk, 9. sınıfların müfredatı çok yoğundu. Bunu düzenlemeye çalıştılar, güzel oldu bir yönden ama bazı konuların bölünmesi sadece fonksiyonlar konusu değil başka konularda da bölünme oldu. Bu bölünmelerde çocuklar biraz afallıyor. Hani bazen soru getiriyorlar diyoruz ki, seneye anlatılacak bunlar. Orada biraz zorlanıyoruz.

A: Anladım. Peki, hocam neden böyle bir yaklaşım sergilemiş olabilirler? Eskiden konular hepsi bir arada veriliyordu, şimdi ayrılıyor.

BÖ: Biraz konular geniş olduğu için bölme ihtiyacı hissetmiş olabilirler. Çünkü konuların sonuna geldiğimizde bazen öğrenci ilk kısmı unutabiliyordu. Konuları bölmüş olmanın herhalde temelinde bu yatıyor. Yani parça parça verip biraz daha işi kolaylaştırmak gibi düşünceye sahip olabilirler.

Burak öğretmenin programdaki değişiklikleri bazı sınıf düzeylerindeki yoğunluğun azaltılması ve uzun konuların farklı sınıf düzeylerine parçalanarak daha kolay öğretilmesi amacıyla yapıldığını düşündüğü görülmektedir. Diğer yandan öğretmenin konuların parçalanmasının bazı zorluklar doğurduğunu belirtmiştir. “*Hani bazen soru getiriyorlar diyoruz ki, seneye anlatılacak bunlar”* şeklindeki ifadesiyle Burak öğretmenin sınırlı düzeyde de olsa programda konuların ekolojisindeki değişikliklerin ve bu değişikliklerle beraber gelen sorunların farkında olduğu belirtilebilir.

Son iki program değişikliğinde fonksiyonlar konusuyla ilgili yapılan değişikliklere ilişkin öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Hocam yeni ve eski programlarda fonksiyon nasıl sunulmaktadır?

BÖ: Fonksiyonlar konusu tanıtılırken büyük bir fark yok, sadece fonksiyonları parça parça anlatmamız gerekiyor. Bileşke fonksiyondur, fonksiyonlarda işlemlerdir, fonksiyonların grafikleridir, bunları bir üst sınıfa bırakmışlar, o kadar. Yani, yaklaşım tarzı o kadar değişmiş değil.

A: Fonksiyonlarla ilgili bazı alt başlıkların yerleri değişti, bazıları çıkarıldı ve bazı alt başlıklar eklendi. Örneğin 12. sınıftaki grafiklerin hepsi 9. sınıfa verildi. Fonksiyonlarda uygulamalar eklendi. Bunları nasıl değerlendiriyorsunuz?

BÖ: Biz o kısımda baya sıkıntı yaşıyoruz. Grafik verdiğimizde $y=x^2$ grafiğini verirsek bunlarla ilgili 4 tane soru çözmemiz lazım. Ama öğrencilerin seviyeleri onu algılayabilecek düzeyde değil. Geçen yıllarda on ikilerde bunu veriyorduk, sonra onunla alakalı işte türevdir, integraldir, yani onlarla ilgili çizimlerdir, bunları çok rahat verebiliyorduk. Ama şimdi burası böyle çizilir, şurası şöyle çizilir. Öğrenci diyor ki "O niye öyle?" detaylı bir açıklama yapamıyoruz sadece yüzeysel olarak vermemiz istenmiş, bu da bizde rahatsızlık uyandırıyor. Tam veremiyoruz.

Bu açıklamalardan öğretmenin fonksiyon konusuyla ilgili değişikliklerde büyük bir fark olmadığını belirttiği ve konunun bir kısmının farklı sınıf düzeylerinde öğretilmesi dışında aynı şekilde öğretildiğini düşündüğü görülmektedir. Diğer taraftan yapılan değişikliklerin özellikle grafik çizme konusunda sorunlar doğurduğunu belirtmiştir. Burada grafiğin şeklinin nasıl oluşturulduğuna ilişkin sorunlar göze çarpmaktadır. Öğretmenin grafik çiziminde detaylı açıklamalar vermekten kaçındığı ve bunun nedenini grafiğin niçin öyle çizildiğine ilişkin açıklamalar verebilmek için gerekli kavramların daha önceki konularda ve yıllarda yer almamasına bağladığı anlaşılmaktadır. Başka bir ifadeyle, Burak öğretmen yine bir ekolojik soruna dikkat çekmektedir.

Daha önceki bölümde belirtildiği üzere, ekolojisi değişen fonksiyon kavramını Burak öğretmenin hangi konu ya da kavramlar üzerine inşa ettiği sorulmuştur. Konuyla ilgili öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Siz fonksiyonu hangi konu temelinde anlattınız hocam? Bağıntıya dayalı mı anlattınız, yoksa bağıntıyı anlatmadınız mı?

BÖ: Eski müfredatta bağıntıyı verdikten sonra fonksiyonu anlatıyorduk, bu sefer bağıntıdan bağımsız vermeye çalıştık. Çünkü bağıntı çıkarılmıştı. Açıkçası biraz zorlandık ama çocuklar sonuçta anlıyor yani.

A: ...Bağıntı olmadan fonksiyon anlatın şeklinde bir yaklaşım sergilemiş program ee neden kaynaklanıyor olabilir? Neden böyle bir değişiklik yapılmış olabilir?

BÖ: Eski müfredatta konular çok fazlaydı. Yani zannediyorum bunu yapanlar düşünmüşler, biraz şey yapmışlar, demişler ki bazı konuların çıkarılması lazım. Çıkardığımızda hangi konuyu çıkarırsak çocuklara bir zarar vermez ya da şu konu biraz daha gereksiz gibi görülmüş olabilir. Bu konuda bağıntıları görmüşler herhalde, öyle bir şey..

A: Siz fonksiyon kavramını öğrencilere nasıl anlattınız?

BÖ: Benim bir lokanta örneği var. Önceden hocalarımızda bunu anlatmıştı. Yani işte lokantada sunulan yemekleri bir değer kümesi olarak, tanım kümesi olarak da lokantaya giden atıyorum 3 arkadaş olarak şey ediyoruz. 2 kuralımız var. Birincisi lokantaya giden herkesin yemek yemesi, ikincisi herkesin birden fazla yemek yememesi, üçüncüsü lokantanın dışından yemek istenmemesi. Biri yemek yemese fonksiyon olmaz, biri atıyorum birden fazla yemek yemeye kalkışırsa fonksiyonu bozar ya da bir diğeri lokantanın yemeğini beğenmeyerek dışardan yemek yemeğe kalkışırsa o kümenin dışına çıktığı için bu şekilde fonksiyonu bozuyor diye anlatıyoruz.

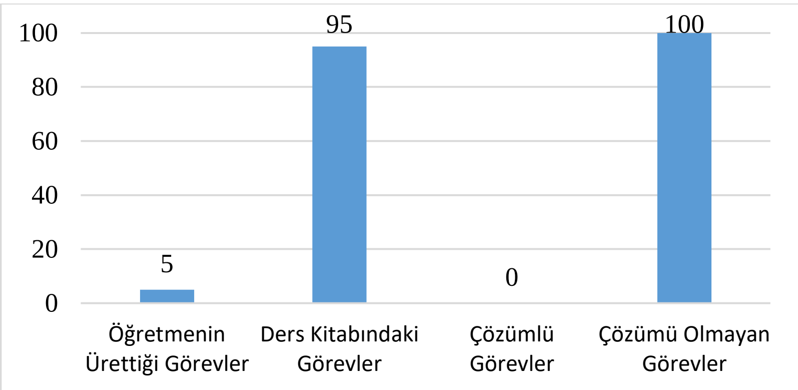
Bu açıklamalardan öğretmenin, 2005 ortaöğretim matematik dersi öğretim programında fonksiyon kavramını bağıntı temelinde öğrettiği, ancak 2013 programında, bağıntı programdan çıkarıldığından dolayı, bağıntı konusunu anlatmadan fonksiyon kavramını öğretmeye çalıştığı anlaşılmaktadır. Ancak fonksiyon kavramını besleyen konularda büyük ölçüde değişiklik yapılmasına ve bu değişiklikle birlikte fonksiyonların farklı temsilleri ile birlikte uygulamaya ve analiz konularına dönük öğretilmesinin amaçlanmasına rağmen Burak öğretmenin fonksiyon kavramının öğretiminde bağıntı konusunu anlatmama dışında bir değişiklik yapılmadığını düşündüğü anlaşılmaktadır. Öğretmenin diyalogda "*Çıkardığımızda hangi konuyu çıkarırsak çocuklara bir zarar vermez ya da şu konu biraz daha gereksiz gibi görülmüş olabilir. Bu konuda bağıntıları görmüşler*" şeklindeki açıklamalarından, bağıntı konusunun çıkarılmasını köklü bir ekolojik değişiklik olarak değil sadece programın hafifletilmesi bağlamında düşündüğü anlaşılmaktadır. Ayrıca öğretmenin fonksiyon kavramına girişte vermiş olduğu "lokanta" örneğinin bağıntı temelinde fonksiyon kavramına uygun bir örnek olduğu görülmektedir. Yani programdan bağıntı konusu çıkarılmış olmasına rağmen, öğretmenin bağıntı kavramını formal bir biçimde öğretmeme ve fonksiyon kavramını formal bir şekilde bağıntı kavramı üzerine inşa etmeme dışında fonksiyon kavramının öğretiminde programın beklentilerini karşılayacak bir değişiklik yapmadığı düşünülebilir.

Sonuç olarak, Burak öğretmen 2013 yılında yapılan köklü program değişikliğini, doğurduğu bazı ekolojik sorunların farkında olmakla birlikte, daha çok programdaki yoğunluğun azaltılması şeklinde yorumladığı görülmektedir. Buna paralel olarak öğretmen, fonksiyon konusunun öğretiminde yapılan paradigma değişimini tam olarak algılayamadığı söylenebilir.

4.2.1.2. Burak öğretmenin fonksiyon konusuyla ilgili gözlemlenen didaktik prakseolojilerine ilişkin bazı genel bulgular

Burak öğretmen fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunu MEB onaylı özel bir yayının ders kitabı olan kaynak A'nın elektronik sürümünden akıllı tahta üzerinden gerçekleştirmiştir. Bu kaynak öğrencilere ücretsiz olarak dağıtılandan farklıdır. Öğretmenin konunun öğretiminde sınıfa sunduğu görevlerde kaynak A'dan ne ölçüde yararlandığına ilişkin bilgiler Tablo 4.4'te verilmiştir.

Tablo 4.4. *Burak öğretmenin fonksiyon konusunun öğretiminde yer verdiği görevler*



Tablo 4.4'te görüldüğü üzere, öğretmen fonksiyon konusunun öğretiminde görevlerin %5'ini (14 görev) kendisi üretmiştir. Gözlemler, öğretmenin bu görevleri daha önceki bir hazırlığa bağlı olmaksızın anlık olarak ürettiğini göstermektedir. Öğretmen geriye kalan görevler için ders kitabından yararlanmıştır. Öğretmenin ders kitabı olarak kullandığı kaynak A'nın akıllı tahta sürümünde de verilen görevlerin çözümünün

olmadığı tespit edilmiştir. Öğretmen ders kitabında yer alan görevler doğrultusunda fonksiyon öğretimini gerçekleştirmiştir. Bu durum, öğretmenin konunun öğretiminde büyük ölçüde ders kitabına bağlı kaldığını göstermektedir. Sınıf gözlemleri sonrasında yapılan görüşmede, öğretmenin ders kitabının kullanımına ilişkin görüşlerini şu şekilde ifade etmiştir:

A: Fonksiyon konusunun öğretiminde kullandığınız alt başlıkların sıralamasında kullandığınız kaynak ne ölçüde etkilidir?

BÖ: Bunun da etkisi var. Ben zaten Kaynak A'yı inceleyip (programına uygunluğu) ona göre… Bu geçen yıl mesela ben başka kaynaktan anlatıyordum…

A: Geçen sene işlediğiniz kaynağı terk edip bu sene ki kaynağa dönmenizde etkili olan ne oldu?

BÖ: Tamamen teknolojik bir şey, akıllı tahtaları kullanmaya çalışıyorum.

A: Kendi notlarınız var mıydı?

BÖ: Özet yapıyordum birkaç kaynaktan, özet yapıp o şekilde anlatıyordum.

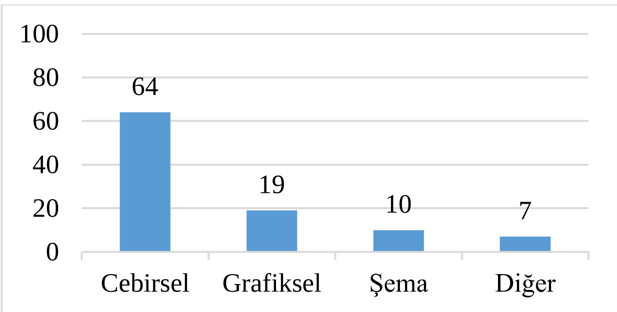
A: Oradan niye anlatmadınız da böyle bir kaynağı tercih ettiniz?

BÖ: Bu sefer klasik bir anlatma yöntemi gibi olacaktı. Öğrencide kaynak yok. Siz kendi kafanızdan anlatıyorsunuz, onun da güzel yanları var ama onunla öğrenciye bol soru çözme ihtimali azalıyor.

Burak Öğretmenin kendi notları ya da öğrencilere ücretsiz dağıtılan kitap yerine fonksiyon öğretiminde kaynak A'yı kullanmıştır. Bu nedenini öğretmen, ders kitabının akıllı tahta versiyonu olması ve bunun daha çok soru çözme olanağı sunması şeklinde açıklamıştır.

Burak öğretmenin fonksiyonların öğretiminde görevleri öğrencilere hangi temsiller bağlamında sunduğu Tablo 4.5'te verilmiştir.

Tablo 4.5. *Burak öğretmenin öğretimde başvurduğu görevlerde fonksiyon kavramının farklı temsillerinin dağılımı*



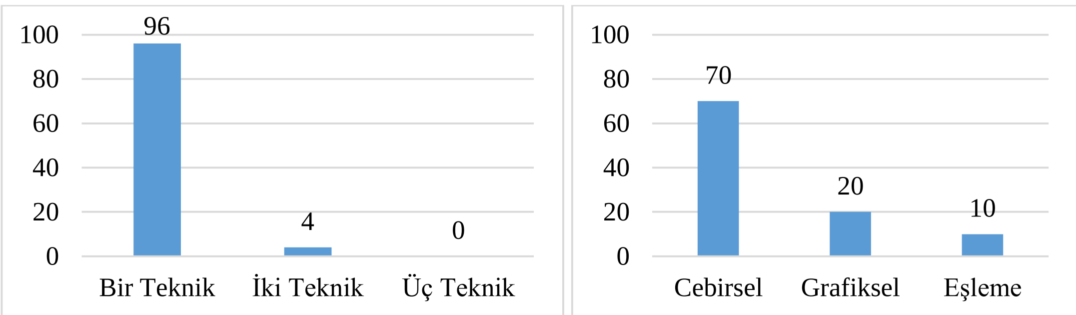
Tablo 4.5'ten Burak öğretmenin fonksiyon konusuyla ilgili didaktik prakseolojilerde kullandığı görevlerin yarıdan çok daha fazlasının cebirsel temsillerle verildiği anlaşılmaktadır. İkinci sırada grafik temsil gelmekle birlikte, bu temsile dayalı görev sayılarının cebirsel temsile dayalı görevlerden üç kat daha az olduğu görülmektedir. Uygulama öncesinde yapılan görüşmede, fonksiyonların öğretiminde yeni programda temsillerin kullanımına ilişkin bir değişiklik olup-olmadığıyla ilgili öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Hocam, yeni öğretim programında fonksiyon konusunun öğretiminde kullanılan temsiller açısından değerlendirildiğinde bir değişim gözlemlediniz mi?

BÖ: Sanki biraz daha görselliğe, grafiklere önem verilmiş gibi ama onu biz çocuklara sunarken biraz daha zorlanıyoruz. Çocukların grafik bilgisi temeli biraz daha sıkıntılı, yani bize gelen öğrenciler cebirsel işleme daha ağırlık veriyor. Cebirsel ifade olduğunda daha iyi anlıyorlar, ama grafiklerde biraz zorlanıyorlar. Onları da aşmaya çalışıyoruz.

Burak öğretmen yeni programda eski programla karşılaştırıldığında fonksiyonların temsillerinden grafik temsiline belli ölçüde ağırlık verildiğini fakat, grafik temsilindeki eksiklerinden dolayı öğrencilerin, bu temsildeki görevleri anlamakta zorluk çektiklerini belirtmiştir. Burak öğretmen cebirsel temsillerde fonksiyon konusunu öğrencilerin daha kolay öğrendiklerini ifade etmiştir. Bu açıklamanın Burak öğretmenin en çok cebirsel temsilleri kullanma eğilimi ile uyumlu olduğu görülmektedir. Tablo 4.6'da Burak öğretmenin görevleri kaç farklı teknikle çözdüğü ve görevlerde üretilen tekniklerin türlerine göre dağılımı verilmiştir.

Tablo 4.6. *Burak öğretmenin görevlerde başvurduğu teknikler*



Burak öğretmenin konunun öğretimindeki görevlerde genellikle bir tek tekniğe başvurduğu ve alternatif tekniklere yer vermediği görülmektedir. Öğretmenin söz konusu görevlerin %70’inde cebirsel tekniklere başvurması fonksiyonların öğretiminde baskın olarak cebirsel tekniklerin kullanıldığını göstermektedir. Belli ölçüde bunu grafiksel tekniklerin takip ettiği görülmektedir. Tablo 4.6, Tablo 4.5 ile karşılaştırılırsa, görevlerin cebirsel-grafiksel oranları ile tekniklerin cebirsel-grafiksel oranları arasında belli bir uyumun olduğu söylenebilir.

Fonksiyonlarla ilgili uygulama sonrasında yapılan görüşmede, Burak öğretmenin farklı tekniklerin kullanılmasına ilişkin bakış açısı aşağıdaki diyalogdan anlaşılmaktadır:

A: Fonksiyon konusuna ilişkin bir görevi hangi teknikle ya da tekniklerle çözüme ulaştırırsınız?

BÖ: Hocam şimdi sorusuna göre değişir desem ama grafiksel anlatılabilecek soruyu önce grafikten anlatmaya çalışırım. Çünkü daha önce de söylediğim gibi görsel boyuta indirgediğimiz zaman çoğu öğrenci daha iyi anlıyor. Ama bir kısım öğrencimizde var, illaki o cebirsel olacak ki, öğrenci biraz daha kavrayabilsin. Mümkünse hem grafiksel hem cebirsel yoldan anlatmayı tavsiye ederim. Tercih ederim.

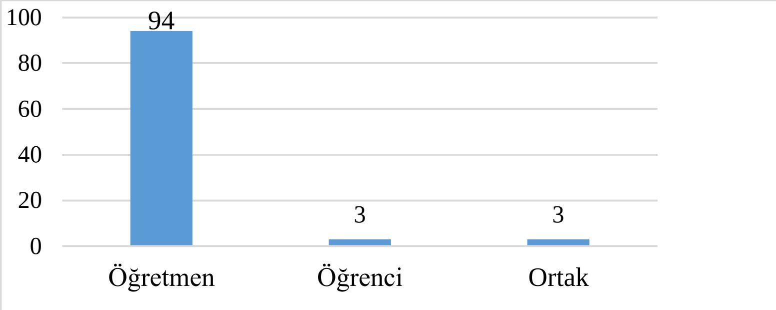
A: Soru çözümlerinde de fazla kullanmadınız. Tablo yöntemiyle soru çözümlerine nasıl bakıyorsunuz?

BÖ: Şüphesiz tablo yöntemi iyi bir yöntem ama zaman olarak çok böyle fazla zamanımız yok

Burak öğretmen görevlerde ürettiği tekniklerin görevden göreve farklılık arz etse de, genellikle cebirsel ve grafiksel teknikleri olduğunu belirtmiştir. Görevlerde eğer grafiksel bir teknikle çözüm varsa öğretmenin bu tekniği öncelikle vermeye çalıştığı anlaşılmaktadır. Ancak bazı öğrencilerin kendisinden cebirsel tekniklerle görevin çözülmesini istediğini belirtmiştir. Tablo 4.6’da görevlerde en çok cebirsel tekniklerin üretilmesi, bu teknikleri kullanmada öğretmenin bilinçli bir tercih sergilediği şeklinde yorumlanabilir. Son olarak tablo tekniğini hiç kullanmayan öğretmen, bu tekniğin çoğu öğrenciye hitap ettiğini belirtmesine rağmen tekniğin diğer tekniklere göre daha fazla zaman gerektirmesi nedeniyle kullanmadığını belirtmiştir.

Herhangi bir konuda olduğu gibi, fonksiyonlar konusunun öğretiminde de öğretmenler sınıf uygulamalarında ele aldıkları görevlerin çözümünü kendileri yapabildikleri gibi öğrenciler de yapabilmektedir. Tablo 4.7’de görevlerin ne kadarında Burak öğretenin ne kadarında öğrencilerin etkin olarak yer aldığı bilgisi verilmiştir.

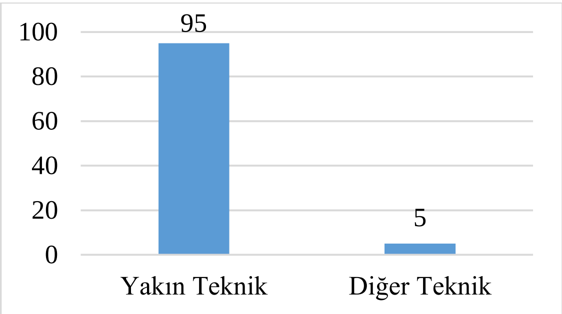
Tablo 4.7. *Tekniklerin üretilmesinde etkin aktör*



Tabloda verildiği üzere görevlerin %94'ünü Burak öğretmen, %3'ünü öğrenciler ve %3'ünü ise öğretmen ve öğrenciler birlikte (ortak) gerçekleştirmişlerdir. Derslerin gözlemlerinden, Burak öğretmenin görev tiplerinin çözüm tekniklerini gösterdikten sonra, fonksiyon konusunun sonlarına doğru olan görevlerde öğrencilerin görevleri yerine getirmelerine izin verdiği belirlenmiştir. Öğrencilerin görevler için kullandıkları çözüm teknikleri, öğretmenin daha önce benzer görevler için kullandığı tekniklere paraleldir.

Burada son olarak 10. sınıfta fonksiyon konusunun öğretiminde görevlerin çözümünde Burak öğretmenin tercih ettiği tekniklerin görevlerin verildiği temsil ile ne ölçüde ilişkili olduğu incelenmiştir. Yani belli bir temsille verilen herhangi bir görevin onunla yakın ilişkisi olan bir teknikle (örneğin grafiksel temsille verilen görevin grafiksel tekniklerle çözülmesi) çözülüp çözülmediği Tablo 4.8'de incelenmiştir.

Tablo 4.8. *Görevlerde temsil-teknik ilişkisi*



Tablo 4.8'de görüldüğü üzere, Burak öğretmenin kullandığı görevlerin %95'i görevlerin verildiği temsile yakın teknikle tamamlanmış ve geriye kalan sadece %5 görevde diğer teknikler tercih edilmiştir. Örneğin, *"f(x)=2x+6 fonksiyonunun grafiği önce x ekseni üzerinde 4 br sağa daha sonra y ekseni üzerinde 2 br yukarı ötelendiğinde elde edilen fonksiyon g(x) tir. Buna göre, g(x) fonksiyonunun grafiğini çiziniz?"*

şeklindeki bir görev f fonksiyonun grafiği çizildikten sonra öteleme dönüşümleri yapılarak g fonksiyonunun grafiği bulunabilir ya da öteleme dönüşümlerinin etkisi f fonksiyonunun cebirsel ifadesinde gerçekleştirilerek g fonksiyonunun cebirsel ifadesinden grafiği elde edilebilir. Burada birincinde geometrik bir teknik söz konusu iken, diğerinde cebirsel bir teknik söz konudur. Burak öğretmen cebirsel temsille verilen bu görevde cebirsel tekniği tercih etmiştir. Diğer yandan Burak *öğretmen "Reel sayılarda tanımlı f bir fonksiyon olmak üzere, f(x)=*x^2*-4x fonksiyonun grafiği y ekseni üzerinde 5 br aşağıya ötelendiğinde oluşan fonksiyon y eksenini hangi noktada keser?"* görevi cebirsel temsille verilmesine rağmen çözümü grafiksel teknikle gerçekleştirmiştir. Burada öğretmen öncelikle y=x^2-4x fonksiyonunun grafiğini kabaca çizdikten sonra y ekseni üzerinde 5 br aşağı ötelemesini gerçekleştirmiştir. Ancak bundan sonraki bölümde inceleneceği üzere, bu tür ikinci dereceden fonksiyonları (orijinden geçmeyen paraboller) öğrenciler henüz öğrenmedikleri için, öğretmen görevin çözümünü gerçekleştirirken bazı sorunlarla karşılaşmıştır. Uygulama sonrası yapılan görüşmede, öğretmenin karşılaştığı görevlerde tercih ettiği tekniklere ilişkin açıklamaları aşağıda verilmiştir.

A: Soru grafiksel verildiği zaman grafiksel çözme eğiliminde bulunuyorsunuz, cebirsel verildiğinde cebirsel. Sorunun veriliş tarzı önemli mi?

BÖ: Yaa, artık bizde yavaş yavaş çocukların bakış açısına sahip oluyoruz. Yani soru çöze çöze. Ee yani bir soruya en kısa nereden ulaşabilirim mantığıyla yaklaşıyor insan.

A: Burada cebirsel yolun daha kolay olacağını mı düşündünüz hocam, grafik çizerek de yapılabilir mi? (f(x)= x^4 *fonksiyonunu y ekseni boyunca üç birim aşağı ötelendiğinde g(x) elde ediliyor. Buna göre g (-1) nedir? sorusuna karşılık)*

BÖ: Tabi yapılabilir ama öğrencilerin soracağı sorular çok fazla artacaktı. Öğrencilerin kafalarının karışacağını düşünüyorum. Yani, bu tür bir soruyla tekrar karşılaşırsam yine böyle bir cebirsel ifade kullanacağımı düşünüyorum. Daha iyi anlatabilirim. Onlarında daha iyi anlayacağını düşünüyorum.

Diyalogda da görüleceği üzere, Burak öğretmenin sınıf uygulamalarında karşılaştığı görevlerde en hızlı şekilde ve en az sorunla hangi teknikle görevi çözebileceğini düşünüyorsa o tekniği kullanmaya çalıştığı anlaşılmaktadır. Bununla birlikte, öğretmenin görevlerde genellikle cebirsel teknikleri kullanılma eğiliminde olduğu görülmektedir. Bunun nedenini öğretmen, cebirsel teknikleri öğrencilerin daha rahat kullanması ve daha kolay anlaması şeklinde açıklamıştır. Bu durumda, öğretmenin sınıf uygulamalarında karşılaştığı görevlerin çözümünde kullandığı teknikleri rasgele seçmediği bu seçimlerin belirli gerekçeler doğrultusunda gerçekleşen bilinçli seçimler olduğu görülmektedir.

4.2.1.3. Burak öğretmenin fonksiyonlar konusuyla ilgili didaktik prakseolojilerinin analizi

Burak öğretmenin 10. sınıfta fonksiyon konusunun öğretiminde sınıf ortamında kullandığı alt başlıklar kronolojik sırada aşağıda verilmiştir.

- Fonksiyonlarla İşlemler ve Uygulamaları
    - Fonksiyonların Simetri ve Cebirsel Özellikleri
        - Fonksiyonlarda Simetri
        - Tek ve Çift Fonksiyonlar
        - Fonksiyonlarda Dört İşlem
    - İki Fonksiyonun Bileşkesi
        - Bileşke Fonksiyon
    - Bir Fonksiyonun Tersi
        - Fonksiyonun Tersi
    - İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersi
        - Fonksiyon ile Tersinin Bileşkesi
    - İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar
        - Bileşke Fonksiyon ve Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar

Burak öğretmen 10. sınıfta ilk olarak veri, sayma ve olasılık öğrenme alanında yer alan sıralama ve seçme ile koşullu olasılık konularını öğrettikten sonra sayılar ve cebir öğrenme alanında bulunan fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunu öğretmeye başlamıştır. Öğretmen Ekim ayının ortasında öğretimine başladığı bu konuyu, toplamda 6 hafta süresince devam ederek Kasım ayının sonunda bitirmiştir. Öğretmen 9. sınıfta öğretilen fonksiyon kavramını hatırlatma gereği duymadan doğrudan 10. sınıf konularını öğretmeye başlamıştır. Bu düzeyde sırayla fonksiyonlarda simetri dönüşümleri, tek ve çift fonksiyonlar, fonksiyonlarda dört işlem, bileşke fonksiyon, fonksiyonun tersi, fonksiyonlarla ilgili uygulamalar alt başlıklarına yer vermiştir. Bu alt başlıklar altında öğretmenin toplam 281 göreve ve prakseolojik bileşenlerine yer verdiği belirlenmiştir. Araştırmada öğretmenin fonksiyonlarda simetri dönüşümleri ile bileşke ve ters fonksiyon alt başlıklarına odaklanılmıştır.

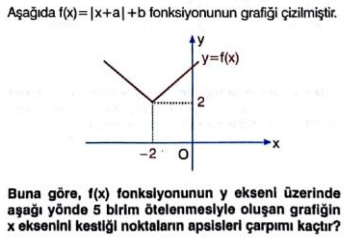
4.2.1.3.1. *Burak öğretmenin fonksiyonların simetrileri dönüşümleriyle ilgili didaktik prakseolojileri*

Burak öğretmen *fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları* konusunda *fonksiyonlarda simetri* alt başlığına yedi ders saati ayırmıştır. Bu süreçte 61 göreve yer vermiştir. Bu görevler incelenerek 8 görev tipi tespit edilmiştir. Bu görev tipleri ve her bir görev tipine ait görevlerin sayısı Tablo 4.9'da sunulmuştur.

Tablo 4.9. *Burak öğretmenin simetri dönüşümleri alt başlığında yer verdiği görev tipleri*

Görev Tipleri	Görev Tiplerinin İfadesi	Görev Sayısı
T_1	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(x)±b fonksiyonunun grafiğini elde etme	18
T_2	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(x±a) fonksiyonunun grafiğini elde etme	9
T_3	y=f(x) fonksiyonun grafiğinden y=f(x±a)±b fonksiyonunun grafiğini elde etme	7
T_4	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=kf(x) fonksiyonunun grafiğini elde etme	10
T_5	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(kx) fonksiyonunun grafiğini elde etme	8
T_6	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=kf(x±a) fonksiyonunun grafiğini elde etme	4
T_7	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(kx)±b fonksiyonunun grafiğini elde etme	2
T_8	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=kf(x±a)±b fonksiyonunun grafiğini elde etme	2

Tablo 4.9'da görüldüğü üzere, T_8 görev tipi üç dönüşüm, T_3, T_6 ve T_7 görev tipleri iki dönüşüm ve diğer görev tipleri tek dönüşüm içermektedir. Burak öğretmen, 18 T_1 tipi görevden 13 tanesini geometrik tekniklerle ve 4 tanesi cebirsel tekniklerle tamamlamıştır. Geriye kalan 1 görevi ise öğretmen sonlandıramamıştır. Bu görev Şekil 4.4'te verilmiştir.



Şekil 4.4. *Burak öğretmenin sonlandıramadığı görev*

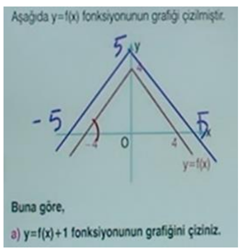
Bu görevde söz konusu olan fonskiyon T_3 görev tipi dönüşümleri gerçekleştirilmiş bir fonksiyondur. Cebirsel ifadesi $y = |x + a| + b$ biçiminde olan bir fonksiyonun grafiği verilmekte ve y ekseninde 5 br aşağı ötelenmesiyle oluşan fonksiyonun x eksenini kestiği noktaların apsisler çarpımı istenmektedir. Başka bir ifadeyle, üzerine simetri dönüşümleri uygulanmış bir fonksiyona tekrar simetri dönüşümleri uygulanması istenmektedir. Diğer yandan, bu görev öğretim programı açısından değerlendirildiğinde, görevde kullanılan grafiğin programda söz konusu dönüşümün yapılması için kullanılması istenen fonksiyon grafiklerinden daha zorlayıcı olduğu anlaşılmaktadır. Çünkü, her ne kadar 9. sınıfta "*Parçalı tanımlı şekilde verilen fonksiyonların grafikleri çizdirilir ve ilgili işlemler yaptırılır*" şeklinde bir açıklama yer alsa da (Bkz. Tablo 4.2) programda simetri dönüşümlerinin, Tablo 4.2 de görüldüğü üzere, $y=x^n$ (n=1, 2, 3 ve -1) türünden fonksiyonlarla sınırlandırılması istenmiştir (MEB, 2013).

Burak öğretmen, T_1 görev tipinde kullandığı ilk 2 görevi kendisi üretmiştir. Diğerlerinde ise kaynak A'dan yararlanmıştır. İlk derste art arda 5 görev verilmiş, diğer görevler sonraki derslerde diğer görevlerle birlikte karışık bir şekilde sunulmuştur. Burak öğretmen T_1 görev tipine girişi, akıllı tahtada kaynak A'nın elektronik sürümünden aşağıdaki şekilde gerçekleştirmiştir.

BÖ: Fonksiyonlar konusuna geçiş yapıyoruz arkadaşlar. Şunu yazıyorsunuz. (tahtayı göstererek) y=f(x) fonksiyonu k birim yukarı ötelenirse y=f(x)+k fonksiyonunun grafiği elde edilir. y=f(x) fonksiyonu k birim aşağı ötelenirse y=f(x)-k fonksiyonunun grafiği elde edilir.

Burak öğretmenin fonksiyon konusunun öğretimine özel bir problemle başlamayı ifade eden *görev tipiyle ilk karşılaşma anı* yerine, "k birim aşağı-yukarı kaydırma" görev tipi için tekniğin doğrudan verilmesi ile başladığı görülmektedir. Sonra öğretmen akıllı tahtada boş bir sayfa açarak, görev tipiyle *ilk karşılaşma anı* olarak, y=3 sabit fonksiyonunu çizmiş ve bu fonksiyonun y ekseni üzerinde 2 br yukarı ötelenmesiyle elde edilecek grafiğin ne olduğunu öğrencilere sormuştur. Benzer şekilde y=3 fonksiyonunun y ekseni üzerinde 3 br aşağı ötelenmesiyle oluşan fonksiyon ve grafiği de incelenmiştir.

Bu iki örneği öğretmenin T_1 görev tipinin çözüm tekniğini öğrencilerin anlaması için gerçekleştirdiği anlaşılmaktadır. Burak öğretmen bu örneklerden sonra, kaynak A'da yer alan T_1 görev tipi içerisinde üçüncü görev olarak ifade edilen Şekil 4.5'teki görevi aşağıdaki gibi tamamlamıştır.



Şekil 4.5. *Burak öğretmenin T_1 görev tipinde $t_{1,3}$ görevi ile ilgili oluşturduğu grafik*

BÖ: Arkadaşlar y=f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiş, y=f(x)+1 fonksiyonunun grafiğini çiziniz? Fonksiyonun 1 br yukarı taşınmasından bahsediliyor. Unutmayalım fonksiyonun kendisine dokunmuyoruz. Bakın burada şu açı kaç olur diye sorsam bana ne dersiniz?((-4,0) noktasının olduğu yer)

Öğrenciler: 45

BÖ: Şurası 45... Şimdi 1 br yukarı taşıdığınız zaman şekli bozulmayacak ki, yine 45. Mavi ile alsam arkadaşlar. Buna paralel çizeceğim. Sadece 1 br yukarı beşten geçecek. Gençler bu beşten geçecekse burası 5 br olacaksa burası da 5 olacak ki, demin 45'ten bahsettik ya, o korunsun. (İki noktayı birleştirerek grafiği çiziyor) Aynı şey burası için de geçerli arkadaşlar (Koordinat ekseninin sağı). Yeni fonksiyon budur.

Yukarıdaki diyaloglarda ve Şekil 4.5'te T_1 görev tipi ile ilgili $t_{1,3}$ görevini Burak öğretmenin nasıl tamamladığı görülmektedir. Bu göreve ilişkin öğretmenin ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler şu şekilde ifade edilebilir:

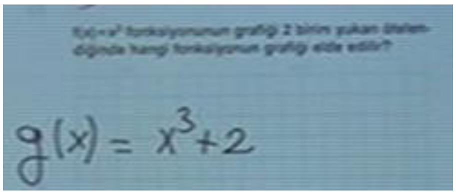
- $t_{1,3}$: Grafik temsiliyle verilen ve kolları doğrusal fonksiyonlardan oluşan y=f(x) parçalı fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x)+1 fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{1,3}$ (Geometrik teknik): *Fonksiyonun 1 br yukarı taşınmasından bahsediliyor* [y=f(x) fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca 1 br yukarı yönde ötelenmelidir]
- $\theta_{1,3}$ (Geometrik tekniğin teknolojisi): *Fonksiyonun 1 br yukarı taşınması* [öteleme], *fonksiyonunun kendisine dokunmuyoruz* [izometrik dönüşüm], *şekli bozulmayacak* [izometrik dönüşüm], *45'ten bahsettik ya, o korunsun* [izometrik dönüşüm], *paralel çizeceğim* [izometrik dönüşüm]

Öğretmen tekniği "*fonksiyonun 1 br yukarı taşınması"* şeklinde açıklamıştır. Bu doğrultuda öncelikle parçalı fonksiyon grafiğinin (-∞,0] aralığındaki kolu çizilmiş ve daha sonra grafiğin diğer kolu benzer yaklaşımla çizilmiştir. Bu teknik gerçekleştirilirken dikkat çeken diğer bir nokta, öğretmen grafiğin her bir noktasını ötelemek yerine özel noktalar üzerinden dönüşümü gerçekleştirmesidir. Öğretmen, yeni grafiğin oluşturulması sürecinde, çizime y ekseninde (0,5) noktasından başlamıştır. Diyalogda *"Sadece 1 br yukarı 5'ten geçecek*" şeklinde yapılan açıklamada bu durum net bir şekilde görülmektedir. Grafiğin özellikleri korunduğundan yeni grafiğin de x ekseniyle 45 derece açı yapmasından dolayı grafiğin x eksenini (5,0) noktasında keseceği "*bu beşten geçecekse burası 5 br olacaksa burası da 5 olacak ki, demin 45'ten bahsettik ya, o* *korunsun."* sözüyle ifade edilmiştir. Bu sayede örtük bir şekilde yeni grafiğin iki nokta ile karekterize edilebilecek doğrusal bir yapıda olduğu vurgulanmak istenmektedir.

Burak öğretmen, tekniği uygulama sürecinde "*1 br yukarı taşınmasından bahsettik"* açıklamasıyla öteleme dönüşümünü informal olarak açıklamıştır. Ayrıca diyalogda *"45'ten bahsettik ya, o korunsun", "şekli bozulmayacak ki", "paralel çizeceğim"* gibi ifadelerden ötelemenin grafiğin açı, doğrultu, uzaklık gibi özelliklerini koruduğu belirtilmektedir. Bu tür ifadeler tekniğin nasıl gerçekleştirildiğini açıkladığından dolayı teknolojik açıklamalar olarak görülebilir. Aslında bu görevde kullanılan öteleme dönüşümü izometrik bir dönüşümdür. Bu tür dönüşümlerin temelleri bir önceki bölümde ortaya konulduğu gibi 11. sınıfta yer almaktadır. Öğretmen tekniği gerçekleştirirken açıkça "dönüşüm" kelimesini kullanmamaktadır.

Daha net bir ifadeyle, izometriler geometri öğrenme alanında dönüşüm geometrisi içerisinde yer almaktadır. Bunların ortaokul düzeyinde sezgisel olarak temelleri atılmaktadır. Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programında ise 11. sınıfta ilk kez öğretilmeye başlandığı görülmektedir. Fonksiyon grafiğinin araç olarak kullanıldığı bu alt başlıkta gerçekleştirilen didaktik prakseolojide, izometrik dönüşümlerden öteleme dönüşümünün kaynak A'da verilen bilgi doğrultusunda informel biçimde açıklandığı görülmektedir. Burada y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(x)+1 fonksiyonun grafiği elde edilirken neden y ekseni boyunca grafiğin 1 br yukarı ötelenmesi gerektiği ve bu süreçte grafiğin hangi özelliklerinin niçin korunduğuna ilişkin açıklamalar verilmemiştir. Başka bir ifadeyle, öğretmenin bu görev ve gerisindeki prakseloji ile grafiğin neden ve nasıl 1 birim yukarı ötelelenmesi gerektiğini keşfettirmeyi amaçlamadığı, bunu görevin başında tekniğin bir parçası olarak sunduğu ve bunun yerine grafiğin yapısını bozmadan 1 birim nasıl kaydırılacağına yani izometrik dönüşümün nasıl yapılacağına odaklandığı görülmektedir. Bu şekilde öğretmen prakseoljinin merkezine görev tipinin özelliği olan y=f(x) fonksiyonundan f(x)+k fonksiyonuna geçişte fonksiyonun ne yönde grafiğinin öteleneceğine değil 11. sınıf konusu olan ötelemenin nasıl yapılacağına odaklanmaktadır. Bunu da, 10. sınıf konusu olmadığı için, örtük bir şekilde, ilgili matematiksel kavramları kullanmadan yapmaktadır. Dolayısıyla ötelemenin yönünü ve değerini belirlemeyi gerektiren bu görev tipi ile ilgili teknolojik-teorik çevre yer değiştirmiş ve yeni çevre de programda yer almadığı için tam anlamıyla kurulmamıştır.

Burak öğretmenin bu görev tipinde geometrik teknikleri yukarıda ifade edilen süreçlere benzer şekilde gerçekleştirdiği söylenebilir. Bunlardan farklı olarak öğretmen Şekil 4.6'da verilen $t_{1,13}$ görevini cebirsel teknikle sonuçlandırmıştır.



Şekil 4.6. *Burak öğretmenin T_1 görev tipinde $t_{1,13}$ görevi*

BÖ: …Bize grafiği sormuyor ki, gençler. f(x) fonksiyonunu 2 br yukarı ötelersek yeni bir g(x) fonksiyonunu elde ediyoruz. Bu da g(x)=x^3+2 bu kadar.

Ö6: Şöyle bir şey (eliyle bir grafik çizdi)

BÖ: Ya ne olduğu çok umurumuzda değil. Yani hangi fonksiyonu elde ederiz. Bunun grafiğini elde ederiz. (g(x)=x^3+2 işaret etti) 5 br aşağı ötelenirse ne elde ederiz? x^3-5 o kadar.

Ö11: Hocam bizden grafiğini istese x yerine 1, 2, 3 vererek oluşturabilir miyiz?

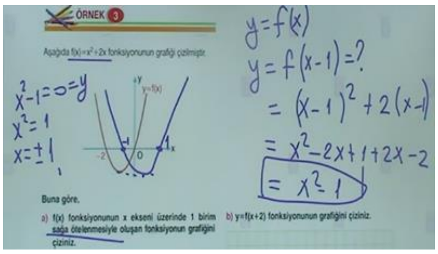
BÖ: Şimdi onu karıştırmayalım. Sonra onu halledeceğiz. Grafiklerle ilgili detaylı bilgi öğreneceğiz arkadaşlar.

Öğretmenin kullandığı kaynakta bu görevde söz konusu olan öteleme için "*y=f(x) fonksiyonu k birim yukarı ötelenirse y=f(x)+k fonksiyonunun grafiği elde edilir. y=f(x) fonksiyonu k birim aşağı ötelenirse y=f(x)-k fonksiyonunun grafiği elde edilir.*" bilgisi yer almaktadır. Öğretmen başka hiçbir açıklamaya yer vermeksizin bu bilgi doğrultusunda görevi sonlandırmaktadır. Burada öğretmenin benzer nitelikte farklı görevler sunarak tekniği bu görevler üzerine uygulaması didaktik anlardan belli ölçüde de olsa *görevleri keşfetme anı* olarak nitelendirilmektedir. Öğrencilerin ısrarla görevde fonksiyonun grafiğini işaret etmelerine rağmen öğretmenin grafik konusuna girmekten kaçındığı ve fonksiyonun cebirsel ifadesine odaklandığı görülmektedir. Programda ön görülen öğrencilerin öteleme grafiklerini çizmeleridir. Belirli bir ötelemenin fonksiyonun cebirsel kuralında nasıl bir değişiklik meydana getirdiği programın beklentisinin karşıtı olup kazanımla ilişkilidir. Ancak öğretmen burada bu ilişkiyi iki yönlü kurmak yerine sadece tek yönüyle yetinmektedir. Burak öğretmenin daha sonra T_2 görev tipine geçmiştir. Öğretmen T_2 görev tipine geçişi aşağıdaki şekilde yapmıştır.

BÖ: Şunu yazın. y=f(x) fonksiyonunun grafiği x ekseni üzerinde k birim sağa ötelenirse y=f(x-k) fonksiyonunun grafiği elde edilir. y=f(x) fonksiyonunun grafiği x ekseni üzerinde k birim sola ötelenirse y=f(x+k) fonksiyonunun grafiği elde edilir. Bakın, şimdiye kadar yukarı-aşağı ile ilgiliydi. Şimdi sağ-sol ile alakalı ama bir terslik var. Sağa ötelediğimiz zaman k birim y=f(x-k), sola ötelediğimiz zaman k birim y=f(x+k).

Öğretmen x ekseni üzerindeki öteleme tekniğini doğrudan kaynak A'da verildiği şekliyle ifade etmiştir. Öğretmen neden y=f(x) fonksiyonuna uygulanan y=f(x+k) dönüşümünün fonksiyonun grafiğini x ekseninde k birim sola ve y=f(x) fonksiyonuna uygulanan y=f(x-k) dönüşümünün fonksiyonun grafiğini x ekseninde k birim sağa ötelediğine yönelik hiçbir açıklama sunmamaktadır. Bu anlamda teknolojik açıklamalara yer verilmediği ve buna paralel olarak özel bir görev tipiyle ilk karşılaşma anı ile görev tiplerini keşfetme ve bir teknik geliştirme anının "baypas" edildiği görülmektedir.

Burak öğretmen, sadece birini iki farklı teknikle tamamladığı, 9 T_2 tipi görevini altı geometrik ve 4 cebirsel teknikle sonuçlandırmıştır. Bu görevlerden Şekil 4.7'de görülen $t_{2,1}$ görevine, T_2 görev tipiyle ilgili ilk görev olmasından ve iki farklı teknikle tamamlanmasından dolayı burada yer verilmiştir.



Şekil 4.7. *Burak öğretmenin T_2 görev tipinde $t_{2,1}$ görevi*

BÖ: Şimdi arkadaşlar y=f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiş. Burada işlemini yazmış $f(x) = x^2 + 2x$, bir işlemle yapabiliriz. Bir de artık grafik üzerinde yapabiliriz. Bir birim sağa ötelenmesiyle oluşan fonksiyonun grafiği soruluyor arkadaşlar. Şuna benzeyen bir grafik olmaz mı arkadaşlar?(Grafiği çizdi) Ama dikkat edin buna tepe noktası diyoruz. Tepe noktası yukarı aşağı kaymayacak. Aynı hizada olacak çünkü sadece sağa öteliyoruz. Şekli adeta kopyalayıp, şuraya yapıştırıyoruz. 1 br sağa öteledik. Şimdi şu noktayı merak ederseniz nedir orası?

Öğrenciler: -1((-1,0) kastediliyor.)

BÖ: Burası ((1,0) noktasını gösterdi)

Öğrenciler: 1

Ö2: Hocam bir işlemle yapalım.

BÖ: Bana neyi soruyor?

Ö2: y=f(x+1)

Ö3: y=f(x-1)

BÖ: Bana y=f(x) vermişti. Sağa ötelenmesi neydi? 1 br eksi demekti yani, y=f(x-1)'i bana soruyor. Sağa dediği için x-1, şimdi bu şu demektir, f'de x yerine x-1 gelmiştir. O zaman devam ediyorum y=f(x-1)= $(x-1)^2+2(x-1)=x^2-2x+1+2x-2=x^2-1$

Ö2: Hocam x^2-1'in grafiği nasıl olur?

BÖ: (Öğretmen biraz düşündükten sonra daha önce çizdiği grafiği işaret ediyor) Aynen böyle olur.

Ö3: Tamam da çizer misiniz?

Ö2: Ama nereden anlayacağız böyle olduğunu?

BÖ: Güzel güzel arkadaşlar, bir bakabilir misiniz? Şimdi arkadaşlar 1 br sağa öteleyin diyor. Biz işlem olarak eğer önümüzde grafik olmasaydı sadece şu ($f(x) = x^2 + 2x$) olsaydı işlem olarak yapıp bunu bulacaktık. (x^2-1 kastediliyor) Bunun da grafiğini çizecektik. Zaten grafik çizimleri şeyde var ileride var. Parabol konusunda. Ama sadece doğru yapıp yapmadığımızı anlamak istersek, $x^2-1=0$, $x^2=1$, $x = \pm 1$ Böyle olmaz mı? Çünkü 1'in karesi de 1, -1 in karesi de 1'dir. Bakın x=1 ve -1, gördünüz. Tepe noktası değişmedi. Tamam mı arkadaşlar.

Ö4: Hocam onu niye sıfır yaptık hocam? Onu niye sıfıra eşitledik? (x^2-1=0 işaret ediyor)

BÖ: Güzel niye sıfıra eşitledik, söyleyebilecek olan var mı?

Ö1: Çünkü hocam x=0 için y'yi, y=0 için x'i buluyorduk.

BÖ: Ben bu noktaları merak ediyorum ya.((-1,0) ve (1,0) işaret ediyor.) O noktalarda y sıfır. Ne yukarıda ne aşağıdadır. Yani şu x^2-1=y değil mi? y nerede 0 dır? x kaç iken, y, 0 dır? Soru bu, o yüzden sıfıra eşitledik oradan -1,+1 bulduk.

Ö1: Peki tepe değerleri nasıl oluyor?

BÖ: Onla çok uğraşmayalım…Tepe noktası bunlar ilerde parabol konusunda verilecek onun için şimdi geçelim.

Yukarıdaki diyaloglarda ve Şekil 4.7'de T_2 görev tipi ile ilgili $t_{2,1}$ görevini Burak öğretmenin nasıl tamamladığı görülmektedir. Bu göreve ilişkin öğretmenin ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler şu şekilde ifade edilebilir:

- $t_{2,1}$: Cebirsel ve grafik temsiliyle verilen $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonun grafiğinin x ekseninde 1 br sağa ötelenmesiyle oluşan fonksiyonun grafiğini bulma
- $\tau_{2,1,1}$ (Geometrik Teknik): *…grafik üzerinde yapabiliriz… Şekli adeta kopyalayıp, şuraya yapıştırıyoruz. 1 br sağa öteledik.*
- $\theta_{2,1,1}$: *Ama dikkat edin buna tepe noktası diyoruz.* [informel açıklama], *Tepe noktası yukarı aşağı kaymayacak. Aynı hizada olacak çünkü sadece sağa öteliyoruz.* [izometri] *Şekli adeta kopyalayıp, şuraya yapıştırıyoruz*. [izometri] *1 br sağa öteledik*. [öteleme]
- $\tau_{2,1,2}$ (Cebirsel Teknik): *… işlemle yapabiliriz. Bana y=f(x) vermişti… y=f(x-1)'i bana soruyor. Sağa dediği için x-1, … f'de x yerine x-1 gelmiştir. Biz işlem olarak ...sadece şu ($f(x) = x^2 + 2x$) olsaydı işlem… yapıp bunu bulacaktık.(x^2-1 kastediliyor) Bunun da grafiğini çizecektik.*
- $\theta_{2,1,2}$: *Bana y=f(x) vermişti… y=f(x-1)'i bana soruyor. Sağa dediği için x-1, … f'de x yerine x-1 gelmiştir* [y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin 1 br sağa ötelenmesiyle y=f(x-1) fonksiyonunun grafiğinin elde edildiği bilgisi], *f'de x yerine x-1 gelmiştir* [değişken değiştirme], *bunu bulacaktık. (x^2-1 kastediliyor) Bunun da grafiğini çizecektik.* [ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çizme]

İlk olarak $t_{2,1}$ görevi $y=(x+1)^2-1$ şeklinde düzenlenirse $y=x^2$ parabolüne iki dönüşüm (x ekseninde bir birim sağa ve y ekseninde bir birim aşağıya) uygulanmasıyla elde edilebilir. Bu anlamda görev T_3 görev tipi içerisinde değerlendirilebilir. Ancak burada bu düzenlemeden sonra görevin tekrar x ekseninde 1 birim sağa ötelenmesi istenmiştir. Dolayısıyla T_2 görev tipiyle ilgili ilk görev için zorlayıcı olduğu ve programdaki kazanımın ötesinde güçlük içerdiği söylenebilir (MEB, 2013). Bunun ötesinde, görevde hem fonsiyonun cebirsel kuralı hem de grafiği verilmiştir. Bu durumun da bir ikilem oluşturduğu görülmektedir. Fonksiyonun grafiği verilip bir birim sağa ötelenmesi istendiğinde, yapılacak iş aslında geometrik teknikte olduğu gibi, grafiği bir birim sağa ötelemekten ibarettir. Burada teknoloji olarak izometri devreye girmektedir.

Eğer görev, sadece fonksiyonun kuralı verilip "f(x+1) fonksiyonunun grafiğini çiziniz" şeklinde olsaydı, o zaman hiç kuşkusuz öğretim programının beklentileri ile daha uyumlu olurdu. Zira öğrencilerin bu durumda ötelemenin hangi yöne kaç birim olduğuna karar vermeleri, daha sonra ise f fonskiyonunun grafiğini çizerek belirledikleri ötelemeyi gerçekleştirmeleri gerekirdi. $f(x)=x^n$ şeklindeki fonksiyonların grafikleri 9. sınıf kazanımları arasında yer almaktadır. Oysa herhangi bir ikinci dereceden fonksiyonun grafiği ne 9. sınıf ne de 10. sınıf kazanımları arasında fonksiyonlar konusundan önce yer almamaktadır. Bu durumda öğrenciler f fonksiyonunun grafiğini, $f(x)=x^2$ fonksiyonun grafiğine ($y=(x+1)^2-1$ ifadesini göz önünde bulundurarak) dayandırarak çizebilirlerdi. Ama bu çizimi $f(x)=x^2$ fonksiyonun grafiğinden hareketle gerçekleştirebilmeleri zaten x ve y ekseni üzerindeki ötelemelerin fonksiyonun cebirsel kuralı üzerindeki hangi dönüşümlere karşılık geldiğini bilmeleri anlamına gelirdi. Burada ayrıca öğrencilerin $f(x) = x^2 + 2x$ ifadesinden $f(x)=(x+1)^2-1$ ifadesini elde etmeyi (henüz) bilmediklerini de göz önünde bulundurmak gerekmektedir. Tüm bunlar söz konusu olan görevin ne tür ekolojik sorunlar barındırdığını ve bu ekolojik sorunlar altında, nasıl gerçek amaçtan uzaklaşmış bir şekilde sunulduğunu göstermektedir.

Bu görevi öğretmenin iki farklı teknikle tamamlayabileceği "*Burada işlemini yazmış* $f(x) = x^2 + 2x$*, bir işlemle yapabiliriz. Bir de artık grafik üzerinde yapabiliriz.*" şeklindeki açıklamalarından anlaşılmaktadır. Bunlardan biri geometrik teknik ve diğeri cebirsel tekniktir. Geometrik teknikte ($\tau_{2,1,1}$) verilen grafiğin x ekseni üzerinde 1 br sağa ötelemesi yapılarak yeni grafik elde edilmiştir. Geometrik teknik şeklin bütününün değişiklik yapılmadan 1 birim sağa kaydırılmasıyla oluşturulduğu belirtilmiştir. Bu durum öğrencilere tepe noktası ve fonksiyonun x eksenini kestiği noktalardan açıklanmıştır. Ancak grafiğin sağa ötelenmesinin fonksiyonun kuralında ne tür değişikliklere neden olduğuna ilişkin öğretmenin yeterli açıklama vermediği görülmektedir. Aşağıda bu görev için öğretmenin verebileceği açıklamalardan biri sunulmuştur (Diğer açıklamalar için bkz. 4.1.4. 10. sınıf programındaki fonksiyonların simetrileri ve ters fonksiyon ile ilgili prakseolojiler)

Öğretmen y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin 1 birim sağa ötelenmesini nümerik teknikle şu şekilde gerçekleştirebilirdi: f fonksiyonunun 1 birim sağa ötelendiğinde elde edilen fonksiyon g olsun. Tablo 4.10'da sayısal olarak görüleceği üzere, eğer g fonksiyonunun grafiği üzerindeki herhangi bir nokta (x_0, y_0) ise $(x_0 - 1, y_0)$ noktası f fonksiyonunun grafiği üzerindedir. Dolayısıyla $(x_0 - 1, y_0)$ noktası f fonksiyonunu sağlamalıdır. Buradan f($x_0 - 1$)= y_0 olmalıdır. Burada kaydırma işlemi seçilen noktadan bağımsız olduğundan x_0 yerine x ve y_0 yerine y yazılabilir. Böylece y=f(x-1) elde edilir. Bu sonuç y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin x ekseni üzerinde 1 birim sağa ötelendiğinde elde edilen fonksiyonun y=f(x-1) olduğunu göstermektedir.

Tablo 4.10. *Bazı x değerlerine karşılık f ve g fonksiyonlarının görüntüleri*

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
y=f(x)	0	-1	0	3	8
y=g(x)	3	0	-1	0	3

Öğretmenin dönüşüm sonrası elde ettiği grafik incelendiğinde, grafiğin yanlış çizildiği tespit edilmiştir. Buradaki temel sorun parabolün tepe noktasının ötelenmesiyle ilgilidir. Öğretmen grafikte açık bir şekilde verilen (-2,0) ve (0,0) noktalarını x ekseni üzerinde 1 br sağa öteleyebilmesine rağmen grafikte koordinatları açıkça görülmeyen parabolün (-1,-1) tepe noktasını x ekseni üzerinde gereğinden fazla öteleyerek düzlemde dördüncü bölgede işaretlediği görülmektedir. Burada gerçekleştirilecek öteleme dönüşümü sonucunda yeni grafiğin çizilebilmesi için parabolün tepe noktasının koordinatlarına ilişkin özelliklerinin bilinmesi gerekmektedir. Öğretmen parabolün tepe noktasını sadece eliyle işaret ederek göstermiş ve bunun nasıl bulunacağına ilişkin bir açıklama yapmamıştır. Tepe noktasının ne olduğu ve nasıl elde edildiği ikinci dereceden fonksiyonların grafikleri kapsamında değerlendirilmektedir. Bu yüzden öğretmen bu konuya girmeden tepe noktasını informel biçimde açıklamış ve öteleme sonucu geldiği noktayı kabaca tahmin etmiştir. Bu durum kavramlar arasında ilişkinin kurulamamasını doğurduğundan teknolojik-teorik çevre anı burada anlamlı bir biçimde gözlenememiştir.

Ö2 kodlu öğrencinin "*hocam bir işlemle yapalım*" demesi üzerine, Burak öğretmen bu görevi $\tau_{2,1,2}$ cebirsel tekniği ile çözmeye başlamıştır. Öğretmen ilk olarak y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca 1 br sağa ötelenmesinin y=f(x-1) fonksiyonunun grafiğini bulmakla eşdeğer olduğunu belirtmiş, bu şekilde aslında kaynaktan doğrudan aldığı görevi biraz olsun programın beklentisiyle uygun hale getirmeye çalışmıştır. y=f(x) fonksiyonunda değişken değiştirme yöntemiyle yeni fonksiyonun kuralını y=f(x-1)=x^2-1 şeklinde elde etmiştir. Ancak bu tekniğin uygulanma sürecinde öğretmen ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çizme bilgisini öğrencilerin bilmesi gerektiğini hissederek tekniği tamamlamadan bu noktada durdurmuş ve daha önceki teknikle çizdiği grafiği işaret ederek "*Aynen böyle olur*" şeklinde tekniği grafik çizimine girmeden eksik biçimde tamamlamıştır. Bu açıklamadan tatmin olmayan bazı öğrenciler "*Ama nereden anlayacağız böyle olduğunu*?" ve "*Peki tepe değerleri nasıl oluyor?*" şeklinde sorularla anlamlandıramadıkları noktaları dile getirmişlerdir. Bu türden sorular uygulanan tekniğin neden geçerli olduğuna ve tekniğin uygulanma sürecinde bilinmeyen kavramların tanımlanmasına ilişkin teknolojik açıklamalar verilmesini gerektirmektedir. Ancak öğretmen bu soruların yanıtlarını ileride parabol konusunda işleneceğini "*Onla çok uğraşmayalım…Tepe noktası bunlar ilerde parabol konusunda verilecek onun için şimdi geçelim.*" şeklinde sözlerle belirterek geçiştirmiştir. Dolayısıyla bu tekniğin parabol grafiğinin nasıl çizilmesi gerektiği bilgisi henüz öğrencilerde bulunmadığından dolayı bu noktada tıkandığı belirlenmiştir. Diğer yandan burada karşılaşılan $t_{2,1}$ görevi ilgili alternatif bir teknik olan cebirsel teknikle çözüm gerçekleştirilmeye çalışıldığından tekniksel çalışma anı belli ölçüde de olsa gözlendiği söylenebilir. Ancak verilen fonksiyonun grafiği daha önce gerçekleştirilen tekniğin sonucu olarak sunulmuştur. Yani parabol bilgisinin öğretilmemesinin doğurduğu bu tür bir durumda söz konusun görevin tamamlanması için öğretmen cebirsel tekniğin tıkandığı noktada geometrik tekniğe kaydırılarak görevi sonuçlandırmıştır. Ayrıca geometrik teknikle elde edilen grafiğin x eksenlerini kestiği noktaları tekrar cebirsel tekniklerle vermeye çalışmıştır. Yani öğretmen cebirsel tekniği belli bir yere kadar sürdürmüş sonra görevi geometrik teknikle tamamlamış ancak görevin açıklamalarının bir kısmını tekrar cebirsel teknikle vermeye çalışmıştır. Tepe noktasının konumuna ilişkin açıklamaları ise daha sonra öğretileceği düşüncesiyle vermeden tekniği tamamlamıştır. Ancak teknikler arasında yapılan bu geçiş anlamsız bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Bu görevle ilgili öğretmenin vermiş olduğu ikinci teknik herhangi bir tıkanıklık yaşanmadan anlamlı bir şekilde şu şekilde verilebilirdi: İlk olarak, y=f(x) fonksiyonunun grafiği x ekseninde 1 birim sağa kaydırıldığında y=f(x-1) fonksiyonunun elde edildiği bilgisi yukarıda açıklandığı şekliyle verilebilirdi. Buradan $y=f(x-1)=x^2-1$ fonksiyonu bulunduktan sonra bu fonksiyonun grafiğinin öğrencilerin 9. sınıfta öğrendikleri $y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca 1 br aşağı ötelenmesi olduğu belirtilerek görev sonuçlandırılabilirdi. Bunun, göreceli olarak daha tutarlı bir yaklaşım olmakla birlikte, ötelenmeye konu olan f fonksiyonun grafiğini tamamen görünmez kıldığı da göz önünde bulundurulmalıdır.

Burak öğretmen T_2 görev tipiyle ilgili geometrik teknikleri yukarıda açıklanan benzer süreçlerle tamamlamıştır. Bunlardan başka üç görevi cebirsel tekniklerle tamamlamıştır. Bunlar T_1 görev tipinde verilen cebirsel teknikle benzer süreçler izlenerek uygulanmıştır. Burada tek fark T_1 görev tipinde öteleme y ekseninde yapılırken, T_2 görev tipinde öteleme x ekseni yapılmasıdır.

T_2 görev tipi ile ilgili görevlerin ardından öğretmen T_3 görev tipine (y=f(x) fonksiyonun grafiğinden y=f(x±a)±b fonksiyonunun grafiğini elde etme) ilişkin didaktik prakseolojileri vermiştir. Burada yer alan görevlerde diğerlerinden farklı olarak hem x hem de y ekseni üzerinde öteleme dönüşümü uygulanmıştır. Tamamı kaynak A'da yer alan yedi görevin kullanıldığı T_3 görev tipine ilişkin didaktik prakseolojilerde parçalı fonksiyon, doğrusal fonksiyon ve $y=x^4$ fonksiyonlarının kullanıldığı görülmektedir. Bu görevlerin üçü geometrik tekniklerle ve diğer dördü ise cebirsel tekniklerle tamamlanmıştır. Bu tekniklerin uygulanmasında etkin aktörün öğretmen olduğu görülmektedir. Bu görev tipine ilişkin didaktik prakseolojiler, genellikle T_1 ve T_2 görevlerinde gerçekleştirilen didaktik prakseolojilerle paralel bir şekilde gerçekleşmiştir.

Burak Öğretmenin T_3 görev tipinden sonra T_4 görev tipine yer vermiştir. Bu görev tipinde öğretmen, k=-1 ve k≠-1 olacak şekilde iki farklı durumda y=f(x) fonksiyonun grafiğinden yararlanarak y=kf(x) fonksiyonunun grafiğini ele almıştır. Burada ilk olarak k≠-1 durumu incelenmiştir. Bu doğrultuda öğretmen aşağıdaki şekilde bu görev tipine giriş yapmıştır.

BÖ: Bu da önemli arkadaşlar. Şimdiye kadar ki, öğrendiklerimiz şekli koruyordu ama buraya dikkat edin burada şekil değişebiliyor. k∈R olmak üzere, y=f(x) fonksiyonunun grafiğinde, görüntü kümesinin tüm elemanları k ile çarpılırsa y=kf(x) fonksiyonunun grafiği elde edilir.

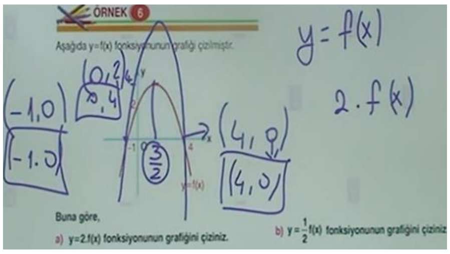
Ö1: Tamam da bu ne için?

BÖ: Bir fonksiyon verildiğinde atıyorum y=f(x)'i vermiş y=2f(x) grafiği ne olur? Sadece görüntü kümesinin elemanları çarpılıyor burada.

Öğretmen T_4 görev tipiyle ilgili tekniği ders kitabında geçtiği şekilde vermiştir. Burada yapılan informel açıklamada daha önce verilen dönüşümlerin şekli koruduğu ancak bu dönüşümün şeklin yapısını korumak zorunda olmadığı belirtilmiştir. Bu anlamda teknikte kullanılan dönüşümün karekterine (izometrik ya da afin dönüşüm) ilişkin bir açıklama yapıldığı söylenebilir. Diğer taraftan dönüşümler arasındaki farkı belirten bu açıklama dışında herhangi bir açıklama verilmemiştir. Bu durum teknolojik teorik çevre anının uygun yapılandırılmadığını düşündürmektedir. Ayrıca tekniğe ilişkin açıklamada “*y=f(x)’i vermiş y=2f(x) grafiği ne olur? Sadece görüntü kümesinin elemanları çarpılıyor burada.*” şeklindeki ifade *ilk karşılaşma anı* olarak sunulmuştur.

Burak öğretmen diyalogda görüleceği üzere, T_4 görev tipiyle ilgili kaynak A’da verilen bilgiyi kısaca açıkladıktan sonra bu dönüşümün öncekilerden farklı olduğunu belirtmiştir. Ancak bunları yaparken sadece sözel olarak ifade etmiş ve herhangi bir örnek üzerinde ya da ispatlayarak durumu gösterme girişiminde bulunmamıştır. Burada da daha önceki görev tiplerinde olduğu gibi öğretmenin özel bir görev tipiyle ilk karşılaşma anı ile görev tiplerini keşfetme ve bir teknik geliştirme anının “baypas” ettiği görülmektedir.

Bu görev tipi içerisinde öğretmen sınıf uygulamalarında 10 görev sunmuştur. Bu görevlerden dokuzunda geometrik bir tekniğe başvurulurken, birinde cebirsel bir teknik kullanılmıştır. Bu tekniklerin uygulanmasında etkin aktörün öğretmen olduğu görülmektedir. Bu görev tipine ilişkin ilk görevi öğretmenin nasıl tamamladığı aşağıda Şekil 4.8’de verilmiştir.



Şekil 4.8. *Burak öğretmenin T_4 görev tipinde $t_{4,1}$ görevine ilişkin tekniği uygulaması*

BÖ: y=f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiş, y=2f(x) fonksiyonunun grafiğini bulmanızı istiyor. Arkadaşlar, y=f(x) grafiği bu, acaba 2f(x) nasıl olur? Yani y’yi 2 ile çarp demek istiyor. Bu nokta kaça kaçtır?

Ö1: eksi bir, dört (x eksenindeki noktaların apsislerini ifade etti)

BÖ: (-1,0) dır. y’yi 2 ile çarparsam ne olur? (-1,0) olur. Yani yine bu nokta bizim için geçiş noktası, parabol diyoruz buna, parabol yine bu noktadan geçecek. Burası da (4,0) değil mi? Buradaki y’yi 2 ile çarparsam yine (4,0)’dan geçecek. Yani aradığımız parabol yine aynı yerden geçecek. Burası kaça kaçtır?

Ö2: (0,2)

BÖ: (0,2) 2 ile çarptığımız zaman (0,4)… Tepe noktası değişecek y’yi ilgilendirdiği için, x için aynı hizada, kökler toplamının yarısı oluyor (tepe noktasının apsisi), ama bunu ileride anlatacağız. 3/2 değil mi? Tepe noktasının x’i değişmiyor. Ama y’si 2 kat artıyor. Şu şekilde bir şey çıkıyor arkadaşlar. y’yi 2 ile çarptım. (Grafiği *çiziyor) Tepe noktasının y'si atıyorum 4 olursa 8 olur, ben kaç olduğunu bilmiyorum. Grafiğin kendisi değişti artık, ötelemeden çıktık artık.*

Ö2: Hocam soru sorabilir miyim? Niye y'yi 2 ile çarptık, o zaman 2y olması gerekmiyor mu?

BÖ: Tabi ki, 2y'yi istiyor bizden.

Ö2: O zaman 2y=f(x) diye bir şey var.

BÖ: Bana y=f(x) vermiş. y=2f(x)'i soruyor.

Ö2: Ama siz niye sadece f(x)'i çarptınız onu anlamadım?

BÖ: Bakın (grafikleri göstererek) y=f(x) buradaki, y=2f(x) bunun 2 katı, y'ler değişiyor, x'de bir oynama yok. Bak, x'ler korundu ama şurası 4'e denk geldi. Bakın 2 katı.

Ö2: y nasıl 2f oluyor?

BÖ: y'nin grafiği bu, 2y'nin grafiği de bu. Neyse eminim anlayacaksın. Ee diğerine bakalım.

Burak Öğretmenin T_4 görev tipiyle ilgili $t_{4,1}$ görevine ilişkin ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{4,1}$: Grafik temsiliyle verilen y=f(x) fonksiyonun grafiğinden yararlanarak y=2f(x) fonksiyonunun grafiğini çizme
- $\tau_{4,1}$ (Geometrik Teknik): *y=f(x) grafiği bu, acaba 2f(x) nasıl olur? Yani, y'yi 2 ile çarp demek istiyor.* [Her noktanın ordinatı 2 ile çarp] *…(-1,0) dır. y'yi 2 ile çarparsam ne olur? (-1,0) olur… Burası da (4,0) değil mi? Buradaki y'yi 2 ile çarparsam yine (4,0)'dan geçecek.* [eğrinin x eksenini kestiği noktalar] *(0,2) 2 ile çarptığımız zaman (0,4)* [eğrinin y eksenini kestiği nokta]
- $\theta_{4,1}$: *... parabol diyoruz buna* [informel tanım]… *Tepe noktası değişecek* [dönüşüm]… *Tepe noktasının x'i değişmiyor. Ama y'si 2 kat artıyor* [afin dönüşüm]… *Tepe noktasının y'si atıyorum 4 olursa 8 olur, ben kaç olduğunu bilmiyorum. Grafiğin kendisi değişti artık, ötelemeden çıktık artık.* [afin dönüşüm]

İlk olarak $t_{4,1}$ görevi parabol olduğu kesin olmamasına rağmen öğretmenin verilen eğriyi parabol olarak nitelendirildiği ve tekniği bu doğrultuda kurduğu görülmektedir. Burada yer alan grafikte, aslında daha öncekilerde olduğu gibi f(x)=x^2 fonksiyonuna bazı simetri dönüşümleri uygulandıktan sonra elde edilen bir fonksiyonun grafiğidir.

Dolayısıyla görevde programın kazanımlarından ötesinde bir grafik kullanıldığı söylenebilir.

Geometrik teknik "*y=f(x) grafiği bu, acaba 2f(x) nasıl olur? Yani, y'yi 2 ile çarp demek istiyor*" şeklinde belirtilmiştir. Bu söylemden kastedilen y=f(x) üzerindeki her noktanın sadece ordinatının 2 ile çarpılmasıdır. Görüleceği üzere teknik ders kitabında verilen bilgiye paralel biçimde uygulanmaktadır. Öğretmen söz konusu kuralı verilen eğrinin üç noktası üzerinden ((-1,0), (4,0) ve (0,2) noktaları) gerçekleştirerek y=2f(x) grafiğini elde etmiştir. Ancak öğretmenin kullandığı dilin ve öğrencilerin önceki bilgilerinin uygulanan tekniğin anlaşılmasında bazı sorunlar yarattığı gözlenmiştir. Örneğin, Ö2 kodlu öğrenci öğretmenin "*Yani, y'yi 2 ile çarp demek istiyor*" ifadesini y=f(x) fonksiyonu üzerindeki her bir noktanın ordinatı olarak algılamamış, bunun yerine fonksiyonu ifade eden bağımlı ve bağımsız değişken anlamında bağımlı değişken olarak algılamıştır. Öğretmenin matematiksel kavramlara ilişkin dili özensiz kullanması matematiksel kavramlara ilişkin notasyonların karışmasına neden olduğu görülmektedir. Bu notasyon karışıklığı ve tekniğin niçin geçerli olduğu şöyle giderilebilirdi: y=f(x) fonksiyonunun grafiği üzerindeki her noktanın ordinatı 2 ile çarpıldığında g(x) elde edilsin. Eğer g(x) üzerindeki herhangi bir nokta (x_0, y_0) ise $\left(x_0, \frac{y_0}{2}\right)$ noktası f fonksiyonu üzerinde olmalıdır. O halde bu nokta $y = f(x)$ fonksiyonunu sağlar. Buradan $\frac{y_0}{2} = f(x_0)$ ve $y_0 = 2f(x_0)$ olur. Genelliği bozmadan bu son eşitlik y=2f(x) şeklinde ifade edilebilir. Zaten bu da g(x) fonksiyonunu ifade etmektedir. Yani y=f(x) fonksiyonunun grafiği üzerindeki her noktanın ordinatı 2 ile çarpıldığında y=2f(x) fonksiyonu elde edilmektedir. Ancak bu görevde öğretmen bu tür teknolojik açıklamalar yapmamıştır. Bu doğrultuda gerçekleştirilen didaktik prakseolojinin teknoloji bileşeni büyük ölçüde eksik bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

Öğretmen gerçekleştirilen dönüşüme ilişkin diyalogda "*Grafiğin kendisi değişti artık, ötelemeden çıktık artık.*" ifadeleriyle bu dönüşümün daha önce gerçekleştirilen dönüşümlerden farklı olduğunu vurgulamaktadır. Bu anlamda afin dönüşümü örtük biçimde ifade etmiş ve izometrik dönüşümlerle farkını ortaya koymuştur. Ancak dönüşümün ne olduğu, hangi özellikleri sabit bıraktığı ve hangi özellikleri değiştirdiğini açıklamamıştır. Dolayısıyla teknolojik teorik çevreyi kurma anı eksik bir şekilde verilmiştir.

Bu görevi cebirsel tekniklerle tamamlamak için şöyle bir yol ortaya atılabilir. Öncelikle verilen eğrinin fonksiyonu ikinci dereceden bir fonksiyon olarak varsayılabilir. Buradan parabolün eksenleri kestiği noktalar (x eksenini (-1,0) ile (4,0) ve y eksenini (0,2) noktasında) bilindiğinden, bu noktalar kullanılarak parabolün denklemi elde edilebilir. Buradan y=2f(x) fonksiyonunun kuralı elde edilebilir. Daha sonra y=2f(x) ikinci dereceden fonksiyonunun grafiği çizilebilir. Ancak hemen farkedileceği üzere, bu teknik parabol konusunu bilmeyi gerektirmektedir. Programda parabol konusu fonksiyonlardan daha sonra yer aldığından bu görevi bu tür bir cebirsel teknikle tamamlamak ekolojik sorunlar ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla bu didaktik prakseoloji için tekniksel çalışma anı geometrik teknikle sınırlı kalmıştır.

Burak öğretmen bu görev tipine ilişkin bir göreve daha yer vermiştir. Benzer tartışmalar bu görevde de devam etmiştir.

BÖ: b şıkkına bakalım. Bu sefer yine ½ f(x)…o zaman bu (1,0) ve (4,0) noktalarını koruyalım biz. Şöyle bir şey olacak. (Yukarıdaki şekildeki grafiği çizdi) Böyle bir şey y=1/2f(x).

Ö4: Hocam uzun uzun yapsanıza.

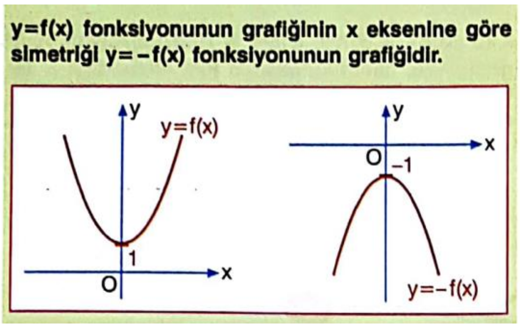
BÖ: y=f(x) fonksiyonunun grafiği kırmızıyla, y=3f(x) derse daha yukarıdan geçecek, 5f(x) dediği zaman daha da yukarıya, bu şekilde gidecek. y=1/2f(x) dediği zaman böyle, y=1/5f(x) dediği zaman biraz daha aşağıdan geçecek.

Ö1: Hocam sadece bir nokta mı oynuyor yoksa?

BÖ: Öyle görünüyor ama grafik tamamen değişiyor. Sadece x eksenini kestiği noktalar değişmiyor.

Burada görüleceği üzere teknolojik açıklamaların olmayışı tekniğin anlaşılmasını öğrenciler açısından zorlaştırmaktadır. Ayrıca Ö4 bu görevi "*…uzun uzun yapsanıza.*" ifadesinden kastedilen görevin cebirsel olarak tamamlanmasıdır. Ancak öğretmen bu tekniği uygulamak yerine kendi uyguladığı tekniği nasıl gerçekleştirdiğini farklı bağlamlar üzerinden tekrarlamakla yetindiği görülmektedir. Burada öğretmenin cebirsel tekniği vermemesinde tekniğin parabol bilgisi içermesi nedeniyle ekolojik açıdan sorunlu olduğunun öğretmen tarafından belli ölçüde bilinmesiyle açıklanabilir.

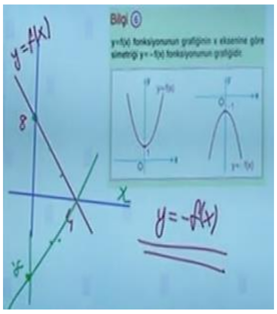
Daha sonra öğretmen T_4 görev tipinde ikinci olarak k=-1 için y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanılarak y=kf(x) fonksiyon grafiklerini elde etme durumunu incelemiştir. Öğretmen aşağıda Şekil 4.9'da verildiği şekliyle konuya giriş yapmıştır:



Şekil 4.9. *x eksenine göre simetri dönüşümü ve $t_{4,3}$ görevi*

BÖ: Gençler şunu da yazalım. y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği y=-f(x) fonksiyonunun grafiğidir. y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği dediği zaman, x eksenini bir ayna gibi düşünürsek arkadaşlar birinde kollar yukarı doğru ise diğerinde aşağı doğru olacaktır (Şekil 4.9).

Öğretmen diyalogda T_4 görev tipinde y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=-f(x) fonksiyon grafiklerini elde etme tekniğini ders kitabında geçtiği şekliyle ifade etmiştir. Buradaki f eğrisi *ilk karşılaşma anı* olarak nitelendirilebilir. Diğer taraftan öğretmen bu tekniğin ifadesinde geçen y=f(x) ve y=-f(x) fonksiyonlarının x eksenine göre niçin birbirinin simetrisi olduğuna ilişkin açıklama yapmamıştır. Buradan teknolojik teorik çevreyi kurma anı da uygun bir şekilde yapılandırılmadığı söylenebilir. Sonra öğretmen bu görev tipi ile ilgili, Şekil 4.10'da verilen o an kendinin ürettiği, $t_{4,4}$ görevini sunmuştur.



Şekil 4.10. *Burak öğretmenin T_4 görev tipinde $t_{4,4}$ görevi*

BÖ: Kafadan bir fonksiyon grafiği çizeyim. Burası 4 olsun. Şurası da 8 olsun. Bu y=f(x)'e ait, ben sizden y=-f(x)'i istersem, şunu (y=-f(x)'i işaret ediyor) gördüğüm *zaman bileceğim ki, x eksenine göre simetriği isteniyor benden. Arkadaşlar ne olacak o zaman?*

Ö1: Kolaydır.

BÖ: Kolaydır ama...(cümleyi tamamlamadı) Bunu da başka bir renkle yeşille (çizeyim demek istedi). Şu 8 noktası kendisini burada görür ((0,8) noktası (0,-8) dönüşür). x eksenine göre simetriğini aldım.

Ö2: Ben orijine göre aldım.

BÖ: Orijine göre değil, x eksenine göre gençler.

Ö2: Ben yanlış aldım.

BÖ: Haa, arkadaşlar x eksenine göre simetriği demek, x eksenini tıpkı bir ayna gibi düşünürsek şu nokta kendisini 8 br uzakta altta görür ((0,8) noktası (0,-8) olur demek istedi). 4 sıfır da olduğu için (simetri ekseni kastediliyor) kendisini burada görür ((4,0) noktası (4,0) olur).

Ö2: x eksenini değiştirmeyeceğiz yani (öğretmen onaylıyor).

Burak Öğretmenin T_4 görev tipiyle $t_{4,4}$ görevine ilişkin ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler şu şekilde verilebilir:

- $t_{4,4}$: Grafik temsili verilen y=f(x) doğrusal fonksiyonun grafiği yardımıyla y=-f(x) fonksiyonunun grafiğini çizme
- $\tau_{4,4}$ (Geometrik Teknik): *Bu y=f(x)'e ait, ben sizden y=-f(x)'i istersem,… x eksenine göre simetriği isteniyor…*[y=f(x) verilmişse y=-f(x) isteniyorsa x eksenine göre simetri alınır]
- $\theta_{4,4}$: *…x eksenine göre simetriği demek, x eksenini tıpkı bir ayna gibi düşünürsek…*[izometrik dönüşüm]

Burak Öğretmen, $t_{4,4}$ görevini x eksenine göre simetri alarak geometrik teknikle tamamlamıştır. Öğretmen bunu y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktaların (burada (0,8) ve (4,0) noktaları) x eksenine göre simetrilerinden geçen doğru olarak tekniği gerçekleştirmiştir. Burada x eksenine göre simetriyi öğretmen "*x eksenine göre simetriği demek, x eksenini tıpkı bir ayna gibi düşünürsek"* şeklindeki informel biçimde öğrencilerin ortaokulda öğrendikleri bilgiyle ilişkilendirmiştir. Ancak Ö2 kodlu öğrencinin "ben orijine göre aldım" ifadesi tekniğin niçin orijine göre değilde x eksenine göre alınmasına ilişkin teknolojik bir açıklama gerektirmektedir. Ancak öğretmenin bu konuda herhangi bir açıklama vermediği görülmektedir. Bu konuda öğretmen şöyle bir açıklama yapabilirdi: Nokta simetrisinden hareketle (x,y) noktasının x eksenine göre simetrisinin (x, -y) olduğu ifade edildikten sonra y=f(x) fonksiyonunun x eksenine göre simetrisi y=g(x) ise g fonksiyonu üzerinde herhangi bir nokta eğer (x,y) ise (x, -y) noktası f fonksiyonunun grafiği üzerindedir. Ayrıca (x, -y) noktasının f fonksiyonunu sağlayacağı ifade edilerek, bunun fonksiyonda yazılmasıyla –y=f(x) elde edileceği ve düzenlenirse y=-f(x) olarak g fonksiyonu elde edilebilirdi. Ancak bu tür bir açıklama öğretmen tarafından verilmemiştir.

Burada *tekniksel çalışma an*ı da gözlenmemiştir. Ancak $t_{4,4}$ görevi cebirsel tekniklerle şu şekilde tamamlanabilirdi: y=f(x) fonksiyonunun kuralı f(x)=-2x+8 dir. Buradan y=-f(x)=2x-8 şeklinde elde edildikten sonra grafiği çizilebilirdi. Burada simetri dönüşümünün ayna simetrisi şeklinde ifade edilmesi belli ölçü de de olsa teknolojik teorik çevrenin oluşturulması olarak nitelendirilebilir.

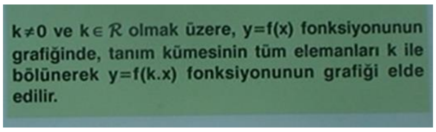
Bu didaktik prakseolojiden sonra T_4 görev tipiyle ilgili ikinci duruma ilişkin iki görev (parabol ve eğri grafikleri içeren iki görev) benzer süreçler takip edilerek gerçekleştirilmiştir. Bu görev tipi içerisinde yer alan toplam sekiz görevin çözümü geometrik tekniklerle yukarıda açıklanan benzer süreçler takip edilerek gerçekleşirken, geriye kalan bir görev ($t_{4,6}$ görevi) için cebirsel teknikler kullanılmıştır. Bu görevde f(x)=x^6 fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetrisi g fonksiyonunda -1 değerinin görüntüsü istenmiştir. Bu görevi Burak öğretmen aşağıdaki gibi tamamlamıştır:

BÖ: Arkadaşlar x eksenine göre simetriği ne oluyordu? Sabit olan x ekseniydi değil mi? Fonksiyonun başına eksi yazıyorduk, değil mi? Yani g(x)=-x^6.

Ö2: Hocam o eksi gitmez mi?

BÖ: Hayır bu altı eksiye ait değil. Onun için sorun yok. Peki, bana g(-1) soruyor. g(-1)=-$(-1)^6$=-1.

Bu teknikte öğretmen eksenlerle fonksiyonun kuralındaki değişkenler (x ve y) arasında informel bir ilişkilendirmede bulunmuştur. Bu doğrultuda grafiğin x eksenine göre simetri almanın fonksiyonun kuralında x değişkenini değiştirmezken y değişkeninin işaretini değiştirdiği belirtilmektedir. Bu bilginin daha önce öğrencilere kazandırıldığı anlaşılmaktadır. Bu anlamda belli ölçüde kurumsallaştırma anı gözlenmiştir. Diğer yandan bu görevde teknolojik açıklamalar hiç verilmemiştir. Burak öğretmen daha sonra T_5 görev tipine geçmiştir. Bu görev tipinde sekiz göreve yer verilmiştir. Bu görevlerin tamamı ders kitabında yer almaktadır. Bu görevlerin altısı geometrik tekniklerle ve geri kalan ikisi cebirsel tekniklerle tamamlanmıştır. Tekniklerin uygulanması sürecinde aktif aktörün öğretmen olduğu görülmektedir. Burada y=f(x) fonksiyonun grafiğinden y=f(kx) fonksiyonlarının bulunmasına ilişkin görevler k≠-1 ve k=-1 olacak şekilde iki farklı gruba ayrılabilir. Bu iki yaklaşımdan öncelikle k≠-1 durumu incelenmiştir. Burada öğretmen görev tipinde yer alan görevlerden önce aşağıda Şekil 4.11'deki bilgiyi vermiştir.


k≠0 ve k∈ℛ olmak üzere, y=f(x) fonksiyonunun grafiğinde, tanım kümesinin tüm elemanları k ile bölünerek y=f(k.x) fonksiyonunun grafiği elde edilir.

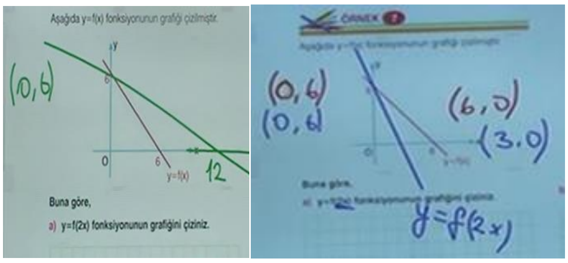
Şekil 4.11. *Ders kitabında y=f(kx) dönüşümüne ilişkin bilgi*

BÖ: Tanım kümesinin tüm elemanlarını k'ya böldüğümüz zaman, y=f(kx) fonksiyonunun grafiği elde edilir. Biraz soyut kalıyor, değil mi?

Ö5: Evet hocam.

BÖ: Yazdık mı arkadaşlar? Tamamız herhalde (açıklama yapmadan soruya geçti).

Öğretmenin ilk olarak görevlerin tamamlanmasında anahtar rol oynayacak olan tekniği ders kitabında geçtiği şekliyle öğrencilere sunduğu görülmektedir. Bu durum ilk karşılaşma anı ile görev tiplerini keşfetme ve bu görev tipine ilişkin bir teknik geliştirme anının anlamsız kılmaktadır. Ayrıca y=f(x) ile y=f(kx) grafikleri arasındaki bağlantının niçin bu şekilde olduğu açıklanmamıştır. Bu durumun yarattığı zorluğu farkeden öğretmen "*Biraz soyut kalıyor, değil mi?"* şeklinde bu bilginin anlaşılmadığını teyit etmiştir. Ancak yine de herhangi bir açıklama vermeksizin ilgili görevlere geçmiştir. Burada öğretmen ilk olarak Şekil 4.12'de verilen $t_{5,1}$ görevine başvurmuştur.



Şekil 4.12. *Burak öğretmenin T_5 görev tipinde $t_{5,1}$ görevi*

Bu görevde öğretmen tekniği öncelikle yanlış uygulamış ve sonra hatasını fark ederek bir sonraki derste tekrar ele almıştır.

<u>Yanlış Çözüm:</u>

BÖ: Demin görüntü kümesinin elemanları çarpılıyordu k ile, şimdi de tanım kümesinin elemanları k ile çarpılıyor. Yani x'ler k ile çarpılıyor, y aynen *kalıyor…Bu nokta (0,6) noktası x'i 2 ile çarpacağım arkadaşlar (0,6) olur. Bu nokta kaça kaç (6,0). x'i 2 ile çarptığım zaman (12,0) olacaktır. Yani grafik (0,6) ve (12,0)'dan geçecek. Şöyle bir şey olur (soldaki grafiği çizdi). Anladık mı akadaşlar?*

Öğrenciler: Evet, gayet basit.

Doğru Çözüm:

BÖ: Tanım kümesinin her elemanı 2'ye bölünecek, değil mi arkadaşlar? Bu (0,6) idi aynen kalıyor, değil mi arkadaşlar? Bunu 2'ye böldüğümde bir şey değişmez ki, bu (0,6)'dır. Bakın tanım kümesinin elemanını 2'ye bölün demiş. 2'ye böldüm (0,6). Öteki ((6,0) kastediliyor) (3,0) bu sefer arkadaşlar. (0,6)'dan geçecek ama 3'den ((3,0) kastediliyor) geçecek. Şöyle bir şey olacak, y=f(2x).(Sağda mavi ile gösterilen grafiği çizdi)

Ö4: Hocam ben anlamadım.

Ö3: Ben anladım ama…

BÖ: Şimdi kurala geri dönelim. Şuraya bakın tekrar açacağım burayı (daha önceki slayttaki kuralı gösteriyor). Tanım kümesinin tüm elemanları k ile bölündüğünde şu elde edilir. (y=f(kx) işaret etti) Tanım kümesi dediğim zaman arkadaşlar x'ler aklıma gelecek. Şöyle bir şey düşünürsek arkadaşlar. ((x,y) noktasını yazdı) Birincisi her zaman x, ikincisi y dir. f(2x)'i elde etmek istersem şunları (x'leri işaret etti) 2'ye böleceğim. f(5x)'i elde etmek istersem 5'e böleceğim. İleri alıyorum. (diğer soruya geçti)

Burak Öğretmen T_5 görev tipi ile ilgili $t_{5,1}$ görevini yukarıda verildiği şekilde sonuçlandırmıştır. Bu göreve ilişkin öğretmenin ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler şu şekilde ifade edilebilir:

- $t_{5,1}$: Grafik temsili verilen y=f(x) doğrusal fonksiyonun grafiği yardımıyla y=f(2x) fonksiyonunun grafiğini çizme
- $\tau_{5,1}$ (Geometrik Teknik): *Tanım kümesinin her elemanı 2'ye bölünecek,… (0,6) idi aynen kalıyor…(0,6)'dan geçecek ama 3'den ((3,0) kastediliyor) geçecek.* [Dönüşüm doğruyu karakterize eden iki noktaya uygulanarak grafik çizilmiştir.]
- $\theta_{5,1}$: *Tanım kümesinin her elemanı 2'ye bölünecek,…*[y=f(kx) dönüşümü]

Burak öğretmen $t_{5,1}$ görevinde geçen fonksiyon, y=x fonksiyonunun x eksenine göre simetriği ve y ekseninde 6 birim yukarı ötelenmesiyle oluşmuştur. Görevde bu fonksiyona y=f(2x) dönüşümü uygulanmak istenmektedir. Bu dönüşümle ilgili ilk görev için görevde kullanılan grafiğin programın kazanımlarının ötesinde olduğu belirtilebilir.

Ayrıca görevdeki dönüşümün (afin dönüşüm) temellerinin programda geometri öğrenme alanında bulunmaması ekolojik bir sorundur. Çünkü ortaokul düzeyinde dönüşüm geometrisi kapsamında izometrik dönüşümler verilmektedir. Dahası ortaöğretim düzeyinde dönüşüm geometrisinin temelleri 11. sınıfta verilmekte ve burada da afin dönüşümler öğretilmemektedir. Öğretmen, bu görevi başlangıçta yanlış çözmüş (Şekil 4.11'de soldaki resim) ve daha sonra (1 gün sonra) hatasını fark ederek bu kez doğru bir şekilde çözmüştür (Şekil 4.11'de sağdaki resim). Diyalogda görüleceği üzere, öğretmenin tekniği yanlış uyguladığında öğrencilerin bu duruma ilişkin bir itirazı olmamıştır. Sonraki derste öğretmen daha önce verdiği kuralları özetleyerek derse geçmiş (y=f(x)+k, y=f(x)-k, y=f(x+k), y=f(x-k) ve y=kf(x) dönüşümleri) ve daha önce tamamladığı $t_{4,1}$ve $t_{4,2}$ görevlerini aynı şekilde yeniden sonuçlandırımıştır. Sonrasında Şekil 4.10'daki bilgiyi vererek $t_{5,1}$ görevini tamamlamıştır.

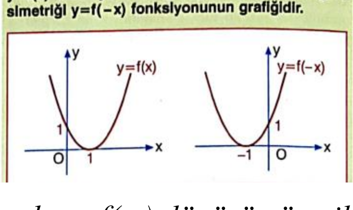
Diyalogda tekniğin uygulanma biçimi "*Tanım kümesinin her elemanı 2'ye bölünecek…*" şeklinde ifade edilmiştir. Burada y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(2x) fonksiyonun grafiğini elde edilirken, y=f(x) grafiği üzerindeki her noktanın sadece apsisini 2 ile bölerek yeni grafiğin noktaları elde edilmesi hedeflenmiştir. Ancak öğretmenin bunu gerçekleştirirken f doğrusal fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktalara (yani y ekseninde (0,6) ve x ekseninde (6,0) noktalarına) odaklandığı görülmektedir. Bu tekniğin teknolojisinde öğretmen daha önce ders kitabında verilen bilgi bağlamında dönüşümü informel bir şekilde gerçekleştirdiği görülmektedir. Ancak öğretmenin bu dönüşümün neden bu şekilde olduğuna ilişkin bir doğrulamaya girişmediği görülmektedir. Burada öğretmen şöyle bir açıklama yaparak dönüşümün neden bu şekilde uygulandığını gösterebilirdi. Görevde y=f(x) fonksiyonunun grafiği üzerindeki her bir noktanın apsisi 2 ile bölündüğünde g(x) fonksiyonunun grafiği elde edilsin. Eğer g(x) fonksiyonu üzerindeki herhangi bir nokta (x, y) ise (2x, y) noktası f fonksiyonu üzerinde olmalıdır. Bu nokta f fonksiyonunu sağlar. O halde y=f(2x) fonksiyonu g fonksiyonunun f türünden değeri olarak elde edilir (burada g(x)=f(2x) tir). Bu anlamda gerçekleştirilen didaktik prakseoloji teknolojik olarak eksik biçimde sunulmuştur. Diğer taraftan öğretmenin doğrunun iki nokta ile karakterize edildiği bilgisinden hareketle bu dönüşümü f fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktalar üzerinden gerçekleştirmesi örtük bir teknolojik bilgi olarak ifade edilebilir. Burada uzaklık korunmadığından bu didaktik prakseolojide teori afin dönüşümdür. Ancak öğretmen bu konuda herhangi bir açıklama yapmamıştır.

Gerçekleştirilen didaktik prakeoloji öğretim programındaki ekolojik ilişkiler bağlamında incelenirse, dönüşüm geometrisinin 11. sınıfta yer alması ve burada afin dönüşümlere yer verilmemesi nedeniyle, öğretmenlerin 10. sınıf düzeyinde fonksiyon grafiklerinin afin dönüşümler altında yeni grafiklerin elde edilmesi türündeki görevlerde zorlanacakları düşünülebilir. Nitekim Burak öğretmenin ders kitabında bu dönüşüme ilişkin verilen bilgiyi soyut olarak nitelendirmesi, bu kuralın nereden geldiğine ilişkin yeterli teknolojik açıklama yapamaması ya da yapmaması ve verilen görevi yanlış çözmesi bu tür zorluklar arasında sayılabilir.

Burak öğretmenin bu görev tipindeki görevlerde tek bir tekniğe başvurması ve alternatif tekniklere yer vermemesi *tekniksel çalışma anının* göz ardı edildiğini göstermektedir. Bu anlamda $t_{5,1}$ görevinde farklı bir teknik şöyle uygulanabilirdi. Grafiği verilen f fonksiyonunun kuralı y=f(x)=-x+6 şeklinde elde edildikten sonra, y=f(2x)=-2x+6 şeklinde elde edilebilir. Buradan yeni fonksiyonun eksenleri kestiği nokta (0,6) ve (3,0) şeklinde bulunarak grafik çizilebilirdi. Ancak Burak öğretmen söz konusu göreve ilişkin bu tür alternatif teknik geliştirememiştir. Dolayısıyla bu didaktik prakseolojide *tekniksel çalışma anı* gözlenmemiştir. Bu alternatif teknik incelendiğinde bileşke fonksiyon ve eğim temelinde görevin tamamlandığı görülmektedir. Dolayısıyla burada afin dönüşüme girilmeden görev tamamlanabilirdi ve öğretmenin çözümünde ortaya çıkan ekolojik sorunlarda ortaya çıkmaya bilirdi.

Bu görev tipinde öğretmen, ikinci olarak k=-1 olduğunda y=f(x) fonksiyonun grafiğinden yararlanarak y=f(kx) fonksiyonlarının grafiklerini bulmaya ilişkin görevlere yer vermiştir. Bu görev tiplerine girişte öğretmen aşağıda Şekil 4.13'teki bilgiyi vermiştir.

BÖ: Arkadaşlar şunu unutmayın. y eksenine göre simetriği dediği zaman y sabit kalır, x eksi ile çarpılır. x eksenine göre simetriği dediği zaman x sabit kalır, y eksi ile çarpılır…y eksenine göre simetriği dediği zaman y sabit kalır, x eksi ile çarpılır. Yani fonksiyonun içi (f(-x) demek istedi).



Şekil 4.13. *Ders kitabında y=f(-x) dönüşümüne ilişkin bilgi ve* $t_{5,3}$ *görevi*

Öğretmen burada da, önceki görevlerde olduğu gibi, bu bilginin nereden geldiğine ilişkin herhangi bir açıklamada bulunmamıştır. Diğer bir ifadeyle, y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği alındığında neden y=f(-x) elde edildiğini sınıfın anlamlandırmasına yönelik bir çaba sarfetmemiştir. Burada verilen f eğrisi ilk karşılaşma anı olarak düşünülebilir. Bu görev aşağıdaki şekilde tamamlanmıştır:

BÖ: y eksenine göre simetriği dediği zaman y sabit kalır, x eksi ile çarpılır. Bunun (y=f(x) grafiğinin) şuradan tutulup (y ekseninden tutulup) da çevrildiğini düşünün (soldaki eğrinin) bunun görüntüsü karşı tarafta olur. Aynen bunun gibi (sağdaki şekil gibi) Ya da bunu tutup çevirirseniz diğerini elde edersiniz.

Ö3: Hocam şekli aslında hayal edersek kolay olur.

BÖ: Yapabilirsiniz. İlerde daha net anlaşılacaktır.

Burak Öğretmenin T_5 görev tipi ile ilgili $t_{5,3}$ görevi ile ilgili ortaya koyduğu didaktik prakseolojilerin bileşenleri aşağıda verilmiştir:

- $t_{5,3}$: Grafik temsili verilen y=f(x) eğrisinin y eksenine göre simetriği alındığında oluşan fonksiyonun grafiğini bulma
- $\tau_{5,3}$: (Geometrik Teknik) … *y eksenine göre simetriği dediği zaman y sabit kalır x eksi ile çarpılır. Bunun (y=f(x) grafiğinin) şuradan tutulup (y ekseninden tutulup) da çevrildiğini düşünün (soldaki eğrinin) bunun görüntüsü karşı tarafta olur.*
- $\theta_{5,3}$: ... *y eksenine göre simetriği dediği zaman* [yansıma dönüşümü], *Bunun (y=f(x) grafiğinin) şuradan tutulup (y ekseninden tutulup) da çevrildiğini düşünün (soldaki eğrinin)* [yansıma dönüşümü] *bunun görüntüsü karşı tarafta olur.*

Görüleceği üzere, öğretmen, $t_{5,3}$ görevindeki eğrinin y eksenine göre simetri dönüşümünün nasıl gerçekleştirileceğini f fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktaların ordinatların sabit bırakılarak, apsislerin işaret değiştirmesiyle sağlanacağını belirtmiştir. Ancak burada öğretmenin y eksenine göre simetri dönüşümüne ilişkin informal betimlemesi fonksiyonların grafikleri üzerindeki noktalar olan (x,y) olarak anlaşılabileceği gibi koordinat ekseni ve fonksiyonun kuralındaki bağımlı ve bağımsız değişken olarak da anlaşılabilmektedir.

Burada grafiğin üzerindeki noktaların dönüşüm altında neden böyle bir değişime uğradığı incelenmemiştir. Bu doğrultuda öğretmenin gerçekleştirdiği prakseolojide, ders kitabında verilen kural, kaynakta yer aldığı şekliyle ifade edildikten sonra, bu kuralın nereden geldiğine ilişkin herhangi bir açıklama yapılmadığı anlaşılmaktadır. Öğretmenin "*İlerde daha net anlaşılacaktır*" şeklindeki açıklamaları ile kurala ilişkin örnekler çözüldükçe kuralın kavranacağını ima etmektedir. Bu bağlamda öğretmenin bir kuralı verildikten sonra, yeterli sayıda örnek çözüldüğünde kuralın anlaşılabileceği düşüncesinde olduğu görülmektedir. Burak öğretmen $t_{5,3}$ görevinden sonra $t_{5,4}$ görevinde parçalı bir fonksiyonun grafiğinin y eksenine göre simetri dönüşümü altında görüntüsünü benzer yaklaşımlar takip edilerek incelemiştir. Daha sonra T_5 görev tipindeki görevlerden $t_{5,5}$ görevinde cebirsel tekniğe başvurmuştur. Bu teknik, kullanılan dönüşüm dışında T_1 görev tipinde $t_{1,13}$ görevi ile benzer olduğundan, ayrıntılı didaktik prakseolojisine yer verilmemiştir.

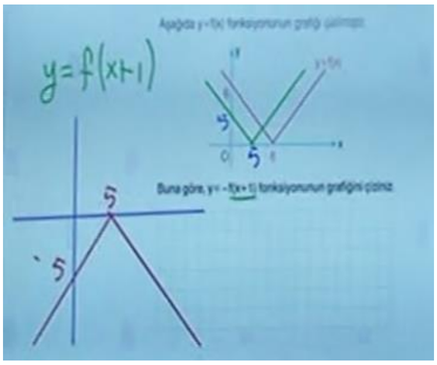
Bu aşamadan sonra T_1, T_2, T_4 ve T_5 görev tiplerinde yer alan dönüşümlerden en az ikisinin birleşiminden oluşan dönüşümlerin kullanıldığı görev tiplerine yer verilmiştir. Bu görevlere ilişkin açıklamalar Tablo 4.11'de verilmiştir.

Tablo 4.11. *Birden fazla dönüşümün kullanıldığı görev tipleri*

Görev Tipi	Dönüşümler	Önceki Görev Tipleriyle İlişkisi	Görev Sayısı	Teknikler
T_3	x ekseninde öteleme y ekseninde öteleme	$T_1 \cup T_2$	7	3 Geometrik 4 Cebirsel
T_6	x ekseninde öteleme x ekseninde yansıma	$T_2 \cup T_4$	4	3 Geometrik 1 Cebirsel
T_7	y ekseninde öteleme y ekseninde yansıma	$T_1 \cup T_5$	2	1 Geometrik 1 Cebirsel
T_8	y ekseninde öteleme x ekseninde öteleme x ekseninde yansıma	$T_1 \cup T_2 \cup T_4$	2	2 Geometrik

Tablo 4.11'deki görev tiplerinin en az iki simetri dönüşümü içerdiği görülmektedir. Ayrıca bunların daha önce verilen görev tipleriyle ilişkisi de verilmiştir. Örneğin T_6 görev tipinin T_2 ve T_4 görev tiplerinin birleşimi olduğu tespit edilmiştir. Bu görevler çoğunlukla geometrik tekniklerle tamamlansa da cebirsel tekniklere de belli ölçüde başvurulduğu belirlenmiştir. Burada T_3 görev tipine ilişkin bulgular daha önce verildiğinden T_6, T_7 ve T_8 görev tiplerine ilişkin bulgular sunulacaktır. Buradaki görevlerin tamamının ders kitabından seçildiği, tamamında öğretmenin etkin rol oynadığı ve bunların izometrik dönüşümler olduğu görülmektedir.

Birden fazla dönüşümün uygulandığı görev tiplerinde (T_3, T_6, T_7 ve T_8) yer alan görevlerde benzer süreçler izlendiği gözlenmiştir. Bu yüzden bu dönüşümlerin tamamına ilişkin görevlerin prakseolojik analizini incelenmek yerine bu dönüşümleri karakterize eden T_6 dönüşümü içerisinde bulunan geometrik teknikle tamamlanan $t_{6,1}$ görevi ile T_7 içerisinde bulunan cebirsel teknikle çözülen $t_{7,2}$ görevinin prakseolojik analizine yer verilmiştir. İlk olarak $t_{6,1}$ görevi aşağıda Şekil 4.14'te verilmiştir.



Şekil 4.14. *Burak öğretmenin T_6 görev tipi ile ilgili $t_{6,1}$ görevi*

BÖ: Bir birim sola ötelendikten sonra simetriği alınacak… y=f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiş, y=-f(x+1) soruluyor…Gençler önce şu f(x+1)'i bulalım. x'in yanına gelmiş bir sayı, sağa sola kayacağı, öteleneceği anlamına geliyor. Artı olduğu için sola 1 br kaydırın diyor. Şekli olduğu gibi 1 br sol tarafa kaydırırsak, arkadaşlar şöyle bir şey olur. Tam paralel çizmek istiyorum. Tamam mı? (sol parçayı çizdi) Şuna da paralel çizersem (sağ tarafı çizdi)… Böyle olsun. Bu yeşille çizdiğim y=f(x+1) dir. 1 br sola öteledim. Ama bunu istemiyor ki benden, bunun eksilisini istiyor. Yani x eksenine göre simetriğini istiyor. Bunun x eksenine göre simetriğini de ben maviyle çizersem bunun aynısı haa (bir şey unuttuğunu fark etti) 1 br kaydırdık onu yazmayı unuttum. Şurası 1 br kayarsa 5 olur. Şurası da 5 olur. Oran korunuyor. Kırk beşlik açı var. Altıya altı olduğu için o zaman beşe beş kalır. Şimdi bunun x eksenine göre simetriğini alırsam şöyle bir şey elde ederim (Yeni bir koordinat ekseni çizdi şeklin sol altına). Gençler şöyle bir şey (Grafiği çizdi). Şurası 5 (x ekseninde (5,0)), şurası 5 olduğu için (y ekseninde (0,5) kastediyor) aşağıya 5 br yani -5. Yeni fonksiyon bu, tamam mı arkadaşlar?

Burak Öğretmenin T_6 görev tipi ile ilgili $t_{6,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmektedir:

- $t_{6,1}$: y=f(x) parçalı fonksiyonun grafiği yardımıyla y=-f(x+1) fonksiyonunun grafiğini çizme
- $\tau_{6,1}$ (Geometrik Teknik): *Bir birim sola ötelendikten sonra simetriği alınacak…*

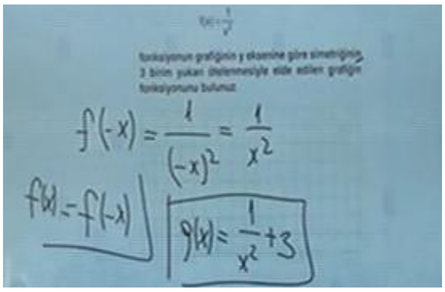
- $\theta_{6,1}$*:… x'in yanına gelmiş bir sayı, sağa sola kayacağı, öteleneceği anlamına geliyor* [öteleme dönüşüm] *Şuna da paralel çizersem… Oran korunuyor. Kırk beşlik açı var* [öteleme dönüşümünün özelliği], *x eksenine göre simetriğini…* [simetri dönüşümü]

İlk olarak $t_{6,1}$ görevinde yer alan fonksiyon grafiğinin y=x fonksiyonunun sol koluna (x<0 olduğu parçaya) yansıma dönüşümü ve sonrasında elde edilen grafiğin x eksenine 6 birim sağa ötelenmesiyle oluştuğu görülmektedir. Burada ise bu dönüşümlere ilave olarak söz konusu görevde kullanılan fonksiyonun grafiğine yine x eksenine göre öteleme ve sonra x eksenine göre yansıma dönüşümleri uygulanmak istenmektedir. Bu anlamda görevin programın kazanımlarının ötesinde olduğu belirtilebilir

Bu görevde kullanılan $\tau_{6,1}$ geometrik tekniğini öğretmenin nasıl gerçekleştirdiği diyalogda "*Bir birim sola ötelendikten sonra simetriği alınacak*" şeklindeki açıklanmıştır. Burak öğretmen, y=f(x) fonksiyonun grafiğini 1 birirm sola öteleyerek y=f(x+1) fonksiyonunun grafiğini elde etmiştir. Sonra ise y=f(x+1) fonksiyonun grafiğinin x eksenine göre simetrisini alarak y=-f(x+1) fonksiyonunun grafiğini bulduğu anlaşılmaktadır. Bunların nasıl elde edildiğine ilişkin açıklama yapmamıştır. Yani y=f(x) fonksiyonu sola ötelendiğinde neden y=f(x+1) olduğu ve bunun da x eksenine göre simetrisi alındığında niçin y=-f(x+1) elde edildiği açıklanmamıştır. Bununla birlikte dönüşümlerin gerçekleştirilme sürecinde bazı teknolojik açıklamalara yer verildiği görülmektedir. Bu açıklamalar informel bir biçimde yapılmıştır. Diyalogda bu açıklamalar "*x'in yanına gelmiş bir sayı sağa sola kayacağı, öteleneceği anlamına geliyor*" ve "*bunun eksilisini istiyor. Yani x eksenine göre simetriğini*" şeklinde ortaya çıkmaktadır. Ayrıca diyalogda geçen "*Tam paralel çizmek istiyorum*" ve *"Oran korunuyor. Kırk beşlik açı var"* gibi ifadeler de diğer teknolojik açıklamalardır. Öğretmenin yaptığı dönüşümlerde paralellik, açı ve eğim gibi bazı özellikleri koruduğunun farkında olduğu görülmektedir. Bu tür dönüşümler izometriler olarak ifade edilmektedir. Ancak öğretmenin bu dönüşümlere ilişkin yukarıda ifade edilenler dışında bir açıklama yapmadığı görülmektedir. Diğer yandan, öğretmenin daha önceki görevlerde olduğu gibi, öğretmenin buradaki teknolojik açıklamalarının da, fonksiyonlar altındaki dönüşümlerin nasıl oluştuğuna ve bunların fonksiyonun cebirsel ifadesi ve grafiği arasındaki ilişkiye değil, öteleme ve simetrilerin nasıl çizileceğine odaklandığı görülmektedir.

Bu görev alternatif cebirsel tekniklerle çözülebilmektedir. Bunlardan biri şu şekilde verilebilir: Parçalı fonksiyonun kuralı elde edildikten sonra değişken değiştirilerek y=f(x) fonksiyonunun kuralından y=-f(x+1) fonksiyonunun kuralı bulunabilirdi. Daha sonra son elde edilen fonksiyonun grafiği çizilebilirdi. Cebirsel teknik olarak ifade edilebilecek bu tekniğin gerçekleştirilmesinde parçalı fonksiyonun kuralının bulunması, değişken değiştirme, yeni parçalı fonksiyonun grafiğinin çizilmesi gibi bir takım zorluklar bulunmaktadır. Ancak program incelendiğinde öğrencilerin bu zorlukların üstesinden gelebilecek dolanımları sağladığı belirtilebilir. Çünkü programda 9. sınıfta doğrusal ve parçalı fonksiyonun grafik çizimleri, değişken değiştirme gibi alt başlıklar öğretilmektedir. Sonuç olarak bu didaktik prakseolojide tekniksel çalışma anı gözlenmemiştir. Burada bir önceki paragrafta açıklandığı üzere, belli ölçüde teknolojik teorik çevrenin oluşturulması anı ortaya çıkmıştır.

Burak Öğretmen daha sonra T_7 görev tipi ile ilgili bir parçalı fonksiyonun grafiğinin y ekseninde simetrisi ve y ekseninde ötelemesini içeren $t_{7,1}$ görevini benzer yaklaşımlar izleyerek geometrik tekniklerle çözmüştür. Burada T_7 görev tipinde $t_{7,2}$ görevi diğerlerinden farklı olarak cebirsel tekniklerle çözülmüştür. Aşağıda Şekil 4.15'te bu görevinin detaylı analizi sunulmuştur.



Şekil 4.15. *Burak öğretmenin T_7 görev tipi ile ilgili $t_{7,2}$ görevi*

BÖ: Fonksiyonun grafiğinin y eksenine göre simetriğinin 3 br yukarı ötelenmesiyle…(cümleyi tamamlamadı) Önce bir simetriği alalım. Sonra da 3 br yukarı öteleriz. Elde edilen grafiğin fonksiyonunu bulunuz? Şimdi y eksenine göre simetriği dediği zaman y sabitti, x'in başına eksi yazıyorduk. Yani parantez içine eksi yazıyorduk, değil mi arkadaşlar?

Öğrenciler: Evet

BÖ: y eksenine göre simetri bir hatırlayın orada not tutturmuştuk arkadaşlar. f(-x)'i önce bunu bulacağız, değil mi? Sonra bunu 3 br öteleyeceğiz yukarı doğru…(öğrenci sorusuyla cümle tamamlanmadı)

Ö5: Hocam ama çift kuvvet,

BÖ: Haklısın, Ö5. $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2}$ *arkadaşlar fark ettiniz mi? Yine kendisini elde ettim. Ama şuraya kadar olan kısmı buldum.(f(-x) kastediyor)…Yani f(-x) gerçi f(-x)=f(x) çıktı. Bunlar çift fonksiyonlarda f(-x)=f(x) eşittir. Ama bunu sormuyordu. Bana 3 br yukarıdaki halini soruyor. Yani g(x) dersek, g(x)=* $\frac{1}{x^2} + 3$ *fonksiyonu elde edilir.*

Burak Öğretmenin T_7 görev tipiyle ilgili $t_{7,2}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{7,2}$: Cebirsel temsille verilen y=f(x) fonksiyonun grafiğinin y eksenine göre simetriği alındıktan sonra elde edilen grafiğin y ekseni üzerinde 3 br yukarı ötelenmesiyle oluşan fonksiyonun kuralını bulma
- $\tau_{7,2}$ (Cebirsel Teknik): *) Önce bir simetriği alalım. Sonra da 3 br yukarı öteleriz* …[Bu görevin y eksenine göre simetriği alındıktan sonra 3 birim yukarı ötelendiğinde tamamlanabileceği belirtiliyor.] *Şimdi y eksenine göre simetriği dediği zaman y sabitti, x'in başına eksi yazıyorduk… y eksenine göre simetri bir hatırlayın orada not tutturmuştuk arkadaşlar. f(-x)'i önce bunu bulacağız* [açıklamayla "y=f(x)= $\frac{1}{x^2}$ fonksiyonun grafiğinin y eksenine göre simetriği y=f(-x) tir] *…3 br yukarıdaki halini soruyor. Yani g(x) dersek, g(x)=* $\frac{1}{x^2} + 3$[bunun y ekseni üzerinde 3 br ötelenmesiyle y=f(-x)+3 fonksiyonunu elde edilir]
- $\theta_{7,2}$: *…y eksenine göre simetriği dediği zaman y sabitti, x'in başına eksi yazıyorduk.* [yansıma dönüşümü] *3 br öteleyeceğiz yukarı doğru* [öteleme dönüşümü]… *f(-x)=f(x) çıktı. Bunlar çift fonksiyonlarda f(-x)=f(x) eşittir* [çift fonksiyon]

Öğretmen, bu görevde kullandığı tekniği "*f(-x) önce bunu bulacağız, değil mi? Sonra bunu 3 br öteleyeceğiz yukarı doğru"* şeklinde açıklamıştır. Burada y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriğinin fonksiyonun kuralına etkisinin y=f(-x) ile denk olduğu ifade edilmektedir. Daha sonra da bunun y ekseni üzerinde 3 br yukarı ötelenmesi gerektiği belirtilmektedir. Bunun sonucunda ulaşılan fonksiyonun $g(x)=\frac{1}{x^2}+3$ şeklinde olduğu görülmektedir.

Bu görevde teknik daha öncekilere benzer şekilde ders kitabında yer alan bilgiye atıf yapılarak verilmiştir. Bu durum öğretmenin "*y eksenine göre simetri bir hatırlayın orada not tutturmuştuk arkadaşlar"* şeklindeki açıklamasında görülebilmektedir. Bu açıklama belli ölçüde kurumsallaştırma anının gözlendiğini göstermektedir. Diğer taraftan y ekseninde simetrinin nasıl yapıldığına ilişkin açıklama da teknolojik teorik çevrenin oluşturulması anının büyük ölçüde eksik olsa da yaşandığı şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmenin bazı teknolojik açıklamaları "*y eksenine göre simetriği dediği zaman y sabitti, x'in başına eksi yazıyorduk"*şeklinde ne kastettiğinin anlaşılması güç bir şekilde ifade ettiği görülmektedir. Burada uygulanan tekniğinin $\theta_{7,2}$ teknolojisinde grafik üzerinde yapılan simetri ve ötelemenin fonksiyonun kuralına etkisi söz konusu olmasına rağmen bunlara ilişkin açıklamalar yapılmamıştır. Bu yönüyle tekniğin teknolojisi eksik bir şekilde verilmiştir. Yani teknolojik teorik çevre burada da doğru bir şekilde kurulmamıştır.

4.2.1.3.2. Burak öğretmenin fonksiyonların simetri dönüşümleriyle ilgili didaktik prakseolojilerine ilişkin bulgular

Didaktik prakseolojilerin bileşenleri ile ilgili bulgular

Fonksiyonların simetri dönüşümleri ile ilgili Burak öğretmenin didaktik prakseolojilerinin bileşenleri, bu süreçte gözlenen didaktik anlar ve karşılaşılan ekolojik sorunlar Tablo 4.12'de verilmiştir.

Tablo 4.122. *Burak öğretmenin simetri dönüşümlerinde prakseolojik bileşenler ve anlar*

Görev	Teknik*	Teknoloji	Gözlemlenen Anlar**	Ekolojik Sorunlar
$t_{1,3}$	G	Kısmen	TTÇO	y=f(x), y ekseninde öteleme y=f(x)±k
$t_{1,13}$	C	Yok	GTK	y=f(x), y ekseninde öteleme y=f(x) ±k
$t_{2,1}$	1.G 2. C	Kısmen	İK→TTÇO→K→TÇ	y=f(x), x ekseninde öteleme y=f(x±k), İkinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çizme
$t_{4,1}$	G	Kısmen	İK→TTÇO→K	y=f(x), y ekseninde genişleme-daralma y=kf(x), Afin dönüşüm, İkinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çizme, Notasyon

Tablo 4.12. *(Devam) Burak öğretmenin simetri dönüşümlerinde prakseolojik bileşenler ve anlar*

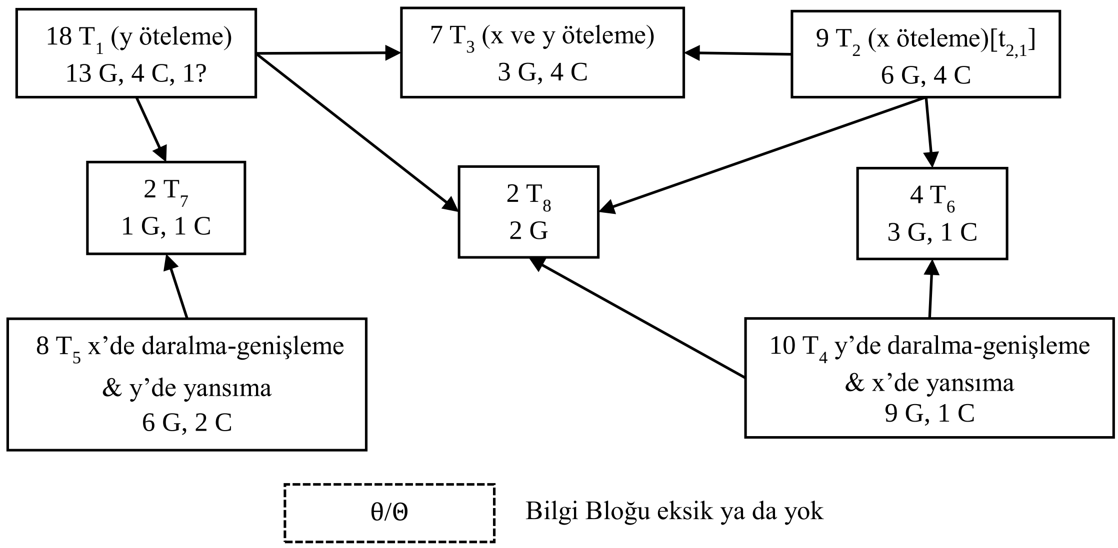
Görev	Teknik*	Teknoloji	Gözlemlenen Anlar**	Ekolojik Sorunlar
$t_{4,2}$	G	Kısmen	GTK→TTÇO	y=f(x), y ekseninde genişleme-daralma y=kf(x), Afin dönüşüm, İkinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çizme
$t_{4,3}$	G	Kısmen	İK→TTÇO	y=f(x), x ekseninde yansıma y=-f(x)
$t_{4,4}$	G	Kısmen	TTÇO	y=f(x), x ekseninde yansıma y= -f(x)
$t_{4,6}$	C	Yok	K	y=f(x), x ekseninde yansıma y= -f(x)
$t_{5,1}$	G	Kısmen	TTÇO→GTK	y=f(x), x ekseninde genişleme-daralma y=kf(x), Afin dönüşüm
$t_{5,3}$	G	Kısmen	İK→TTÇO	y=f(x), y ekseninde yansıma y=f(-x) Notasyon
$t_{6,1}$	G	Kısmen	TTÇO	y=f(x), x ekseninde yansıma y= -f(x), y=f(x), x ekseninde öteleme y=f(x±k)
$t_{7,2}$	C	Kısmen	K→TTÇO	y=f(x), y ekseninde yansıma y=f(-x) y=f(x), y ekseninde öteleme y=f(x)±k Notasyon

* G: Geometrik teknik, C: Cebirsel teknik
**İK: İlk Karşılaşma, GTK&TG: Görev Tiplerini Keşfetme ve bir Teknik Geliştirme, TTÇO: Teknolojik-Teorik Çevrenin Oluşturulması, TÇ: Tekniksel Çalışma, K: Kurumsallaşma, D: Değerlendirme

Öğretmen, genellikle ders kitabında yer alan görevleri kullanmakla birlikte çok az da olsa kendi ürettiği görevleri kullanmıştır. Bu anlamda öğretmenin görevleri oluşturmasında takip ettiği kaynağa aşırı bağlı kalmıştır. Bu görev tiplerinde doğrusal fonksiyon, parçalı fonksiyon, parabol, $y=x^n$ (n=-1, 3, 4, 5, 6) biçiminde fonksiyonların yer aldığı tespit edilmiştir. Tekniklerin uygulanmasında öğretmen aktif rol oynamıştır. Görevler genellikle geometrik tekniklerle tamamlanmıştır. Bununla birlikte belli ölçüde cebirsel teknikler de kullanılmıştır. Görevlerde verilen fonksiyonun dönüşüm/dönüşümler sonunda; fonksiyonun grafik temsili isteniyorsa geometrik teknikler kullanılırken, fonksiyonun cebirsel temsili isteniyorsa cebirsel tekniklerin kullanıldığı ($t_{1,13}$, $t_{7,2}$, $t_{5,5}$, $t_{4,5}$ gibi görevler) belirlenmiştir. Görevlerde, $t_{2,1}$ görevi hariç, sadece bir teknik kullanılmıştır.

Burada en çarpıcı nokta tekniklerle ilgili öğretmenin teknolojik/teorik açıklamalarında ortaya çıkmıştır. Öğretmen bazı informel açıklamalar dışında teknolojik ve teorik açıklamalar yapmamıştır. Bu anlamda Burak öğretmenin bilgi bloğu yetersiz ya da olmaksızın prakseolojilerini ortaya koyduğu tespit edilmiştir. Burada genellikle başlangıç fonksiyonu ile dönüşüm sonrası elde edilen fonksiyon arasındaki bağlantılar, dönüşümün ne olduğu ve bunun fonksiyonun kuralına etkisi gibi durumlar anlamlı bir şekilde verilmeden prakseoloji gerçekleştirilmiştir. Bu alt başlıkta teknolojik açıklamaların anlamlı bir şekilde verilmemesinin en temel nedeni öğretmenin bu tür açıklamaları söz konusu dönüşümler üzerine kurmak istemesi (izometri ve afin dönüşüm), ancak programın ekolojisinin buna izin vermemesidir. Burada bilgisayar yazılımları ya da nümerik yaklaşımlarla teknolojik açıklamalar verilebilmesine rağmen bunlar öğretmen tarafından belirtilmemiştir.

Şekil 4.16'da öğretmenin fonksiyonların simetri dönüşümlerinde başvurduğu sekiz görev tipinin birbiriyle ilişkisi, görev tiplerinin tamamlandığı teknikler ve teknolojik-teorik açıklamaların ne ölçüde yer aldığı görülmektedir.



Şekil 4.16. *Burak öğretmenin simetri dönüşümlerinde ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler arasındaki ilişkiler*

Şekil 4.16'da Burak öğretmenin T_1 görev tipinde 18 göreve yer verdiği ve bunların 13'ü geometrik tekniklerle, diğer 4'ü cebirsel tekniklerle ve 1 görevin tamamlanamadığı görülmektedir. Ayrıca T_2 görev tipinde 9 göreve yer verildiği, ilk görev olan $t_{2,1}$ görevinin iki teknikle tamamlandığı ve bu doğrultuda görevlerin 6 geometrik ve 4 cebirsel teknik ile sonuçlandırıldığı anlaşılmaktadır. Diğer görevlerde benzer şekilde belirtilebilir.

Şekil 4.16 bu alt başlıktaki görev tiplerinin birbiriyle ilişkisini ortaya koymaktadır. Oklarla belirtilen bu ilişkiler görevlerin birbirini destekleyecek şekilde öğretilmek yerine birbirinden kopuk bir şekilde çok az bağlantı kurularak öğretilmeye çalışıldığını göz önüne sermektedir. Örneğin $t_{2,1}$ görevine uygulanan cebirsel teknik sonrasında $y=x^2-1$ fonksiyonu elde edilmektedir. Bu grafiğin çizimi $y=x^2$ parabolünün y ekseninde 1 birim aşağı ötelenmesiyle elde edilebilirdi. Bu doğrultuda T_1 görev tipiyle ilişkilendirilebilirdi.

Ancak bu tür bir ilişkilendirme olmaksızın genellikle görevler kopuk bir şekilde öğretilmiştir.

Didaktik anlar ile ilgili bulgular

Burak öğretmenin fonksiyonların simetri dönüşümleri alt başlığında genellikle bir görev tipiyle ilgili *ilk karşılaşma anı* ve görev tiplerini *keşfetme* ve görev tiplerine ilişkin bir *teknik geliştirme anını* ders kitabında verilen kuralları ilgili görevlerin hemen başında sunarak "baypas" ettiği tespit edilmiştir. Dolayısıyla öğretmenin herhangi bir görev tipiyle ilgili özel bir görevi sunduktan sonra bu görev tipiyle ilgili olası görevleri ortaya çıkararak, bunların nasıl çözüleceğine ilişkin anlamlı bir yaklaşım sergileyemediği söylenebilir. Görevlerin tamamlanma sürecinde *teknolojik-teorik çevre oluşturma anına* ilişkin informel ya da sözel açıklamalar öğretmen tarafından verildiği belirlenmiştir. Ancak bu açıklamalar yetersiz bir şekilde gerçekleştirilmiştir. *Tekniksel çalışma anı* sadece $t_{2,1}$ görevinde gözlenmiştir. Bu anlamda görevlerin tamamlanmasında alternatif tekniklere bu alt başlıkta neredeyse hiç yer verilmemiştir.

Kurumsallaştırma anı, bilinen ve prakseolojilerinin detayları ortaya konan önceki bir konudan değil de parabol gibi öğrencilerin hiçbir bilgilerinin olmadığı bir konu üzerinden hatalı bir şekilde ortaya çıkmıştır. Bu bağlamda didaktik prakseoloji değerlendirildiğinde tutarlı ve anlamlı bir şekilde simetri dönüşümlerinin öğretilemediği söylenebilir.

Didaktik prakseolojilerde ekolojik sorunlara ilişkin bulgular

Tablo 4.12'de birçok görevde Burak öğretmenin sınıf uygulamalarında gerçekleştirdiği didaktik prakseolojilerde ekolojik sorunlar olduğu göze çarpmaktadır. Bunlar temelde ikiye ayrılmaktadır. Bunlardan birincisi dönüşümlerle ilgili sorun ve diğeri görevlerde kullanılan fonksiyon grafikleriyle ilgili sorundur.

İlk olarak, ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programında geometri öğrenme alanında yer alan dönüşüm geometrisi ilk kez 11. sınıfta öğretilmektedir. Bu kapsamda sadece izometriler öğretilmekte ve afin dönüşümler öğretilmemektedir. Ancak fonksiyonların grafiklerinin bu dönüşümler (izometri ve afin dönüşümler) altında görüntülerinin bulunması 10. sınıfta yer almaktadır. Bu ekolojik sorunun öğretmenin fonksiyonların simetri dönüşümleri alt başlığını öğretim sürecinde yeterli ve anlamlı teknolojik ve teorik açıklamalar yapamaması sonucunu doğurduğu söylenebilir.

İkinci olarak, bazı görevlerde henüz anlatılmayan konular da benzer ekolojik sorunlar doğurmuştur. Örneğin $t_{2,1}$ görevi iki farklı teknikle tamamlanmaya çalışılmıştır. Burada görev geometrik teknikle tamamlandıktan sonra cebirsel tekniklerle sonuçlandırılması sürecinde parabol konusu bilinmediğinden dolayı tekniğin sonlandırılamadığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla bazı görevlerde ekolojik sorunlardan dolayı tekniğin uygulanmasında öğretmenin problemler yaşadığı tespit edilmiştir ($t_{2,1}$, $t_{1,3}$, $t_{4,1}$ ve $t_{5,1}$ görevleri). Bu ekolojik sorunların kısmen farkında olan öğretmen (örneğin parabol bilgisi gereken görevler) görevlerde bunların giderilmesi adına açıklama yapmaktan kaçındığı ve henüz öğretilmeyen bu konuların ilerde öğretildiğinde sorunun giderilebileceğini düşündüğü belirlenmiştir.

4.2.1.3.3. Burak öğretmenin fonksiyonlarda bileşke işlemi ve ters fonksiyon ile ilgili kullandığı didaktik prakseolojiler

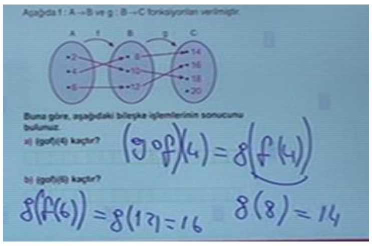
Burak öğretmen *fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları* konusunda *bileşke işlemi ve ters fonksiyon* alt başlığına 13 ders saati ayırmıştır. Bu süreçte 148 göreve yer vermiştir. Bu görevler incelenerek 15 görev tipi tespit edilmiştir. Bu görev tipleri ve her bir görev tipine ait görevlerin sayısı Tablo 4.13'te sunulmuştur.

Tablo 4.13. *Burak öğretmenin bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında yer verdiği görev tipleri*

Görev Tipleri	Görev Tiplerinin İfadesi	Görev Sayısı
T_1	Cebirsel temsille verilen en az iki fonksiyonun bileşkesini bulma	36
T_2	Cebirsel temsilde kendisiyle bileşkesi bilinen doğrusal bir fonksiyonu bulma	2
T_3	Cebirsel temsilde bir fonksiyonun başka bir fonksiyon türünden ifadesini bulma	2
T_4	Şema temsiliyle verilen bir eşlemenin fonksiyon olduğunu bulma	6
T_5	Şema temsiliyle verilen bir fonksiyonun bire bir olduğunu bulma	8
T_6	Şema temsiliyle verilen bir fonksiyonun örten olduğunu bulma	8
T_7	Şema temsiliyle verilen bir fonksiyonda bazı değerlerin ters görüntüsünü bulma	5
T_8	Liste temsiliyle verilen ve tersi bir fonksiyon belirten (ya da bire bir-örten) fonksiyonda bilinmeyenleri bulma	2
T_9	Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonda belli bir değerin ters görüntüsünü bulma	22
T_{10}	Cebirsel temsilde verilen bir fonksiyonun tersini bulma	15
T_{11}	Bir fonksiyonun grafiği ile ters fonksiyonunun grafiği arasındaki ilişkiyi bulma	1
T_{12}	Cebirsel temsilde herhangi bir fonksiyon ile bir fonksiyonun tersinin bileşkesini bulma	12
T_{13}	Cebirsel temsilde bileşke fonksiyonun tersini içeren bileşke işlemlerini bulma	8
T_{14}	Cebirsel temsilde bileşkesi ve fonksiyonlardan biri belli iken diğerini bulma	16
T_{15}	Cebirsel temsilde ters ve bileşkenin kompleks olarak yer aldığı işlemleri bulma	5

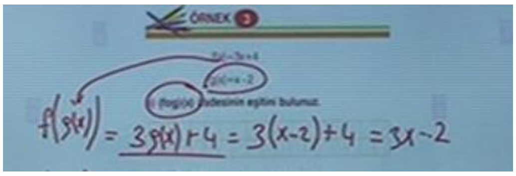
Tablo 4.13’te görüleceği üzere, Burak öğretmenin bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında 15 farklı görev tipine yer verdiği belirlenmiştir. Öğretmenin bileşke işlemiyle ilgili görev tiplerinden sonra ters fonksiyona ilişkin görev tiplerini verdiği daha sonra bunlarla ilgili özellikler ve daha karmaşık görev tiplerinin sunulduğu görülmektedir. Bu görev tipleri incelendiğinde cebirsel temsille verilen görev tiplerinin ve bu görev tiplerinde yer alan görevlerin sayıca fazla olduğu görülmektedir. Bu doğrultuda bu alt başlıkta T_1, T_9 ve T_{10} görev tiplerinin temel görev tipleri olduğu söylenebilir. Bu görevler genellikle öğretmen tarafından sonuçlandırılmakla birlikte, bazı görevleri öğrenciler tamamlamıştır. Çoğunlukla bir tekniğin kullanıldığı görevlerde bazen alternatif tekniklere de yer verilmiştir.

Görevlerin çoğunluğunun T_1 görev tipinde olduğu belirlenmiştir. Bu alt başlıktaki görevlerin tamamı kaynak A’da yer almaktadır. Bu görevler öğretmen tarafından genellikle cebirsel tekniklerden biri ile tamamlanmıştır (ilk 3 görevde eşleme tekniği kullanıldı). Sadece $t_{1,22}$ görevi farklı iki cebirsel teknikle çözülmüştür. Burak öğretmen bu alt başlığa bileşke işleminin nasıl yapıldığını, ders kitabında verilen bilgiler üzerinde açıklamaya çalıştığı belirlenmiştir. Bu doğrultuda bileşke işlemi şema temsiliyle verilen f ve g fonksiyonları için, f: A→B ve g: B→C tanımlı olmak üzere, gof: A→C olduğu ifade edilmiştir. Burada bileşke işlemi eşleme tekniğiyle tanıtılmıştır. Bundan sonra ders kitabında geçen şema temsiliyle verilen ilk üç görev eşleme tekniğiyle sonuçlandırılmıştır. Bunlardan $t_{1,1}$ görevi aşağıda Şekil 4.17’de verilmiştir.



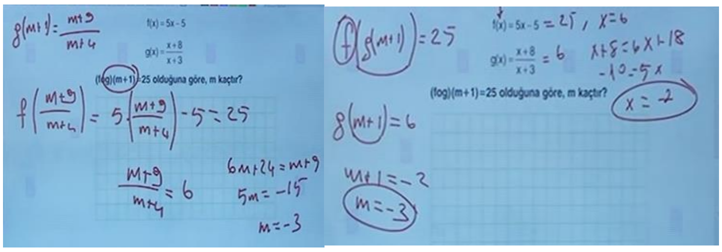
Şekil 4.17. *Burak öğretmenin T_1 görev tipiyle ilgili* $t_{1,1}$ *görevi*

Şekil 4.17’de görüleceği üzere, öğretmen (gof)(4) ifadesini öncelikle g(f(4)) şeklinde yazmıştır. Eşleme yoluyla f(4)’ün 8 olduğunu belirledikten sonra benzer yaklaşımla g(8) incelenerek çözüm (gof)(4) = g(f(4)) = g(8) = 14 şeklinde elde edilmiştir. Burada eşleme tekniği kullanılmıştır. Bu prakseolojide öğretmen şema temsilinde eşleme tekniği üzerinden bileşke işlemini anlattıktan sonra $t_{1,1}$ görevini vermiştir. Bu durum ilk karşılaşma ile görevleri keşfetme anının hızlı bir şekilde geçilerek tekniğin tanıtıldığını işaret etmektedir. Öğretmenin cebirsel temsille verilen fonksiyonların bileşkesini nasıl aldığı Şekil 4.18'de verilmiştir.



Şekil 4.18. *Burak öğretmenin T₁ görev tipiyle ilgili* $t_{1,4}$ *görevi*

Şekil 4.18'de görüldüğü üzere, Burak öğretmenin iki fonksiyonun bileşkesini değişken değiştirme kuralı temelinde verdiği anlaşılmaktadır. Çünkü (fog)(x)=f(g(x)) şeklinde yazılmıştır. Daha sonra g(x) fonksiyonu f fonksiyonunda x yerine yazılarak f(g(x))=3g(x)+4=3(x-2)+4=3x-2 şeklinde bileşke işlemi yapılmıştır. Didaktik anlar açısından bu görev incelendiğinde, cebirsel temsille verilen ilk görev olmasından dolayı *ilk karşılaşma anı* gözlendiği şeklinde yorumlanabilir. Bu prakseolojide değişken değiştirme 9. sınıfta öğretildiğinden, $t_{1,4}$ görevi belli ölçüde eski bir görevin çözüm tekniği doğrultusunda tamamlanmıştır. Bu anlamda *kurumsallaştırma anı* gözlendiği söylenebilir. Birçok görevin didaktik prakseolojisini benzer şekilde gerçekleştiren Burak öğretmen, cebirsel temsille verilen Şekil 4.19'daki $t_{1,22}$ görevini iki farklı teknikle tamamlamıştır.



Şekil 4.19. *Burak öğretmenin T₁ görev tipi ile ilgili* $t_{1,22}$ *görevi*

BÖ: Gençler bu sorunun iki farklı çözümü var. İlk çözüm klasik yol. Arkadaşlar şurada bana g'de g(m+1) lazım. g'de x gördüğüm yere m+1 yazacağım. g(m+1)=$\frac{m+9}{m+4}$ *artık şunu çerçeve içine aldım. f şöyle bir şey çıkar ortaya,* $(fog)(m+1) = f\left(\frac{m+9}{m+4}\right)$ *yani, f'de x gördüğümüz yere bu ifadeyi yazacağız. Yani,*

$f\left(\frac{m+9}{m+4}\right) = 5.\left(\frac{m+9}{m+4}\right) - 5 = 25$ *olarak verilmiş. 5'i öbür tarafa attım. 30, her tarafı da 5'e böldüğüm zaman,* $\left(\frac{m+9}{m+4}\right) = 6, 6m + 24 = m + 9,\ 5m = -15,\ m = -3$

Bu bir yol. Bu yolu yazacaksanız yazın, ikinci yolu size yazdırmayacağım artık.

Ö6: Hocam diğerini yazdırmayacak mısınız?

BÖ: Size yazdırmayacağım ama yapacağız... Diğerini dinleyin belki işinize yarar. Kısa yol gibi gelebilir size. Bunu siliyorum. Gençler buraya bakar mısınız? f(g(m+1)) var, değil mi? Sonuç 25. Arkadaşlar f ve bir ifade sonuç 25 çıkmış, x yerine ben ne yazmalıyım ki, sonuç 25 çıksın? 5x-5=25 ise x=6, x yerine 6 yazarsam sonuç 25 çıkar, değil mi? x yerine bakın şuradaki x yerine ben 6 yazarsam sonuç 25 çıkıyor. Yani parantez içindeki ifade 6 dır…İç kısım 6 dır. Yani, g(m+1)=6 dır. Peki, g'de x yerine ne yazmalıyım ki, sonuç 6 çıksın? Yani, $\left(\frac{x+8}{x+3}\right) = 6,\ x + 8 = 6x + 18,\ 5x = -10,\ x = -2$ *Artık şurası(g(m+1)'deki m+1 ifadesini gösterdi) -2 dir. Yani m+1=-2, m=-3 böyle.*

Burak Öğretmenin T_1 görev tipiyle ilgili $t_{1,22}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{1,22}$: İki fonksiyonun bileşkesinde görüntü kümesi bilinen belli bir değer için tanım kümesindeki elemanı bulma
- $\tau_{1,22,1}$ (Cebirsel Teknik 1): *İlk çözüm klasik yol.* [m+1 değerinin g altındaki görüntüsü bulunduktan sonra bu değerin f altındaki görüntüsü bulunur. Çıkan sonuç 25 sayısına eşitlenerek birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem elde edilir. Bu denklem çözülerek görev tamamlanır.]
- $\tau_{1,22,2}$ (Cebirsel Teknik 2): *Kısa yol gibi gelebilir size…*[Tersten gidilerek görev tamamlanır. Eğer f(g(x))=25 ise g(x)=6 olmalı ve g(x)=6 ise x=-2 olmalıdır. Burada x yerine m+1 olduğundan aslında m+1=-2 ise m=-3 tür.]
- $\theta_{1,22,1}$: *g'de x gördüğüm yere m+1 yazacağım* [değişken değiştirme], *f şöyle bir şey çıkar ortaya,* $(fog)(m+1) = f\left(\frac{m+9}{m+4}\right)$ [Bileşke işlemi], $\left(\frac{m+9}{m+4}\right) = 5.\left(\frac{m+9}{m+4}\right) - 5 = 25$ [fonksiyonda belli bir değerin görüntüsü], $6m + 24 = m + 9$ [Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökü]

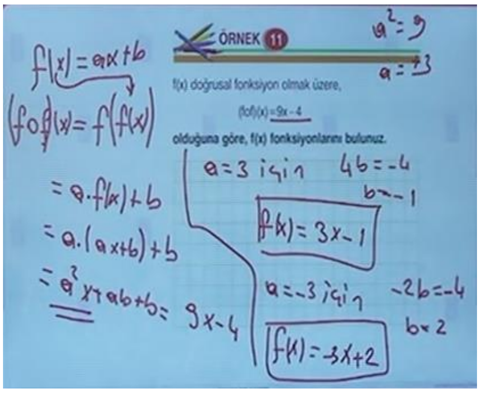
- $\theta_{1,22,2}$: *f(g(m+1)) var, değil mi?* [bileşke işlemi], *f ve bir ifade sonuç 25 çıkmış, x yerine ben ne yazmalıyım ki, sonuç 25 çıksın?* [fonksiyonun ters görüntüsünü], *5x-5=25 ise x=6* [Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi kökü]

Burak öğretmenin $t_{1,22}$ görevini iki farklı cebirsel teknikle tamamlamıştır. İlk olarak $\tau_{1,22,1}$ cebirsel tekniği diyalogda "*İlk çözüm klasik yol"* ve *"f(g(m+1)) var, değil mi? Sonuç 25."* şeklindeki açıklanmıştır. Burada öğretmen değişken değiştirme ve bileşke işlemi sonucunda bir denklem elde etmiştir. Daha sonra bu denklemin kökü bulunarak görev tamamlanmıştır. Bu tekniğin $\theta_{1,22,1}$ teknolojisinde "*g'de x gördüğüm yere m+1 yazacağım"* ifadesiyle değişken değiştirme kullanıldığı, "*f şöyle bir şey çıkar ortaya,* $(fog)(m+1) = f\left(\frac{m+9}{m+4}\right)$" ifadesiyle bileşke işlemi, "$f\left(\frac{m+9}{m+4}\right) = 5.\left(\frac{m+9}{m+4}\right) - 5 = 25$" ifadesi fonksiyonda belli bir değerin görüntüsünün araştırıldığını, "$6m + 24 = m + 9$" ifadesi birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin kullanıldığını göstermektedir.

İkinci olarak, $\tau_{1,22,2}$ cebirsel tekniğinde fonksiyonların görüntü kümesinde verilen bir değere karşılık tanım kümesindeki değerin araştırılmasını içeren fonksiyonun ters görüntüsünü bulma yaklaşımıyla görev sonuçlandırılmıştır. Bu doğrultuda önce f(g(m+1))=25 ise f fonksiyonunun kuralından hareketle g(m+1) ifadesinin 6 olması gerektiği, daha sonra ise g(m+1)=6 ise m=-3 olduğu belirtilmiştir. Bu tekniği $\theta_{1,22,2}$ teknolojisinde fonksiyonda belli bir değerin görüntüsü, fonksiyonda görüntü kümesinde belli bir değerin tanım kümesinde eşlendiği elemanı belirleme ve birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökünü belirleme gibi bilgilerin kullanıldığı belirlenmiştir. Bu görevin tamamlanmasında öğretmenin kullandığı her iki teknikte fonksiyonun denklem anlamının ön plana çıktığı söylenebilir.

Bu görev için kullanılan teknikler didaktik anlar açısından incelendiğinde, *"İlk çözüm klasik yol"* ifadesinden daha önce gerçekleştirilen tekniklere atıf olması nedeniyle kurumsallaştırma anı ile çözüme başlandığı belirtilebilir. Ayrıca "*Bu bir yol. Bu yolu yazacaksanız yazın, ikinci yolu size yazdırmayacağım artık."* şeklindeki açıklamalarından, öğretmenin $\tau_{1,22,1}$ tekniğini kurumsal bir yol olarak sunduğu ve diğer tekniği ise alternatif bir teknik olarak kullandığı anlaşılmaktadır. Öğretmenin diğer görevlerde bu görevdeki ilk tekniği kullanması da ilk verilen tekniğin kurumsallaştırıldığı düşüncesini güçlendirmektedir. Diğer yandan bu görevin iki farklı teknik ile tamamlanması teknikler üzerine çalışma anının gözlendiğini göstermektedir. Ayrıca ikinci tekniğin ilk tekniğe göre daha kullanışlı olduğunun belirtilmesi tekniğin geliştirilmek istendiği algısını çağrıştırmaktadır. $t_{1,22}$ görevinin daha önceki görevlerde kullanılan bir tekniğe paralel bir şekilde sonuçlandırılması (örneğin $t_{1,4}$ görevi), bileşkenin değişken değiştirme temelinde teknolojik-teorik çevresinin kurulmak istendiğini göstermektedir. Daha sonra kaynak A'da T_2 görev tipi ile ilgili $t_{2,1}$ görevine geçilmiştir.

Burak öğretmenin T_2 görev tipi ile ilgili $t_{2,1}$ görevini aşağıda Şekil 4.20'de verildiği şekliyle tamamlamıştır.



Şekil 4.20. *Burak öğretmenin T_2 görevine ile ilgili $t_{2,1}$ görevi*

Ö4: (Öğretmen soruyu okudu) Hocam fonksiyonlarını derken.

BÖ: İki tane fonksiyon çıkıyor da o yüzden. Doğrusal fonksiyonları hatırlıyor musunuz?

Öğrenciler: ax+b,

BÖ: (tahtaya f(x)=ax+b yazdı)$(fof)(x)=9x-4$ ise f'ler ne olur?

Ö3: Hocam 3x-1

BÖ: İki tane fonksiyon çıkması lazım yahu…

Ö2: Bu ne yahu, hocam ben anlamadım.

BÖ: Bunu kullanacaksınız, öğrenmeniz lazım. Tekrar ediyorum f(x), ax+b idi…Doğrusal fonksiyon olduğu için f(x), ax+b dedik. $(fof)(x) = f\big(f(x)\big)$ demek. Birinde parantez içinde x varken öbüründe f(x) gelmiş. Yani x yerine f(x) yazmışım. O zaman devamında da x yerine f(x) yazarım. a f(x)+b. f(x) neydi peki? ax+b. Biraz karışıyor tabi ama olacak. f(x) yerine ax+b yazarım.

$$(fof)(x) = f\big(f(x)\big), (fof)(x) = af(x) + b, (fof)(x) = a(ax + b) + b,$$

$$(fof)(x) = a^2x + ab + b = 9x - 4$$

…Burada ne kadar x varsa orada da o kadar da x olması lazım. Burada a^2 tane var, burada 9 tane, o zaman a^2=9 olmalı. a ya 3 tür ya da -3 tür. Çünkü -3'ün karesi de +3'ün de karesi 9 yapıyor. $a^2=9, a=\pm3$. Bir a=3 için bir de a=-3 için çözüm yapacağız. a=3 için. Bunu yerine yazarsak 9x+3b+b =9x-4. 4b=-4, b=-1. O zaman a=3 iken b= -1. Arkadaşlar fonksiyon a=3, b=-1 yazdığımız zaman f(x)=3x-1. Şimdi a=-3 için, -3b +b=-2b, -2b=-4, b=2, a=-3 iken b=2 çıktı. a yerine -3, b=2 yazıyorum. f(x)=-3x+2. İki tane fonksiyon var biri f(x)=3x-1 diğeri f(x)=-3x+2.

Ö5: Hocam o denklemden sonrasını bir daha anlatır mısınız?

BÖ: Şurayı mı?

Ö5: Hocam işte ondan sonrasını,

BÖ: Burada ne kadar x varsa öbür tarafta da o kadar olması lazım. Burada a^2 var burada 9 var, o zaman a^2 = 9, a = ±3. a yerine 3 yazdım bir sonuç buldum, a yerine -3 yazdım başka bir sonuç buldum. Biraz dinlenip sağlam bir kafayla bir daha bakmanız lazım. Zor değil kesinlikle zor değil.

Burak Öğretmenin T_2 görev tipiyle ilgili $t_{2,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{2,1}$: f doğrusal fonksiyon ve (fof)(x)=9x-4 eşitliğini sağlayan f fonksiyonlarını bulma
- $\tau_{2,1}$ (Cebirsel Teknik): f(x)=ax+b doğrusal fonksiyonundan yararlanarak (fof)(x) bileşke fonksiyonu bulunduktan sonra 9x-4 eşitlenir. Buradan a ve b elde edilerek f(x)=ax+b doğrusal fonksiyonları bulunur.
- $\theta_{2,1}$: $(fof)(x)=f\big(f(x)\big)$ *demek… Yani x yerine f(x) yazmışım.* [Bileşke fonksiyon ve değişken değiştirme],$(\mathrm{fof})(\mathrm{x})=\mathrm{a}^2\mathrm{x}+\mathrm{ab}+\mathrm{b}=9\mathrm{x}-4$ [İki polinomu eşitliği açıklanmadı], $\mathrm{a}^2=9,\ \mathrm{a}=\pm3$. ve 4b=-4, b=-1 [birinci ve ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler]

Bu görev T_1 görevinin tersine, kendisiyle bileşkesi bilinen fonksiyonun kuralının bulunmasıyla ilgilidir. Burak öğretmen $t_{2,1}$ görevinde cebirsel tekniğini doğrusal fonksiyonun kendisiyle bileşkesini alarak uygulamıştır. Bu anlamda bileşke işlemi T_1 görev tipinde uygulanan tekniklerle aynı şekilde verilmiştir. Burada doğrusal fonksiyonun f(x)=ax+b şeklinde olduğu hatırlatıldıktan sonra (fof)(x)=$\mathrm{a}^2\mathrm{x}+\mathrm{ab}+\mathrm{b}$ şeklinde elde edilmiştir. Görevde (fof)(x)=9x-4 verildiğinden bu iki değer eşitlenmiştir. Tam bu noktada örtük olarak a=b ve a=c ise b=c aksiyomunun kullanıldığı görülmektedir.

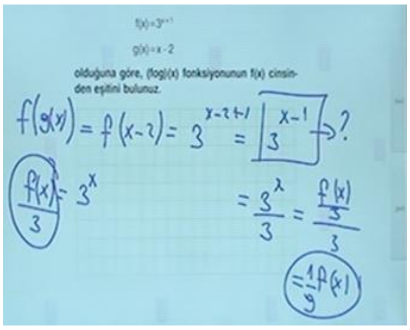
Ancak bu aşamadan sonra ise öğrencilerin henüz karşılaşmadıkları $a^2x + ab + b = 9x - 4$ polinom eşitliği elde edilmiştir. Polinom eşitliği kuralından a ve b değerleri elde edildikten sonra eşitliği sağlayan iki farklı doğrusal fonksiyon bulunmuştur.

Bu tekniğin teknolojisinde bileşke işlemi değişken değiştirme temelinde gerçekleştirilmiştir. Doğrusal fonksiyon hatırlatılması ve eşitlik bağıntısının geçişme kuralları örtük olarak kullanılan diğer teknolojilerdir. Değişken değiştirme ve doğrusal fonksiyon ilk kez 9. sınıfta kazandırılmaktadır. Ancak tekniğin sonlarında polinom eşitliği kullanılmasına rağmen buna ilişkin teknolojik açıklamalar verilmeksizin polinom eşitliğinin kullanıldığı belirlenmiştir. Bu doğrultuda tekniğin uygulanma sürecinde teknolojik açıklamalar eksik yapılmıştır.

Polinom konusu programında 10. sınıfta fonksiyonlardan sonra yer almaktadır. Bu durum ekolojik bir sorun teşkil etmektedir. Polinom konusunun fonksiyon konusundan daha sonra anlatılıyor olması didaktik açıdan problem teşkil etmesine rağmen öğretmenin polinom eşitliğiyle ilgili yeterli açıklama yapmadığı belirlenmiştir. Nitekim Ö5 "*Hocam o denklemden sonrasını bir daha anlatır mısınız?*" diyerek $\tau_{2,1}$ tekniğinde polinom eşitliği kısmının nasıl gerçekleştiğini anlamlandıramadığını ifade etmiştir. Öğretmen burada polinom eşitliğine ilişkin teknolojik açıklamalar vermek yerine tekniği aynı şekilde ifade ederek tekrarlamıştır.

Bu teknik didaktik anlar açısından incelendiğinde, kendisiyle bileşkesi bilinen fonksiyonun bulunması görev tipine ilişkin görevlerden biri ile karşılaşıldığından *ilk karşılaşma anı* ortaya çıkmıştır. T_1 görev tipinde fonksiyonların bileşkesi alınıyorken T_2 görev tipinde bunun tersi bir durum söz konusu olmasına rağmen öğretmenin bu konuda hiçbir açıklama yapmadığı dikkat çekicidir. Öğretmenin görev tipini keşfetme ve bir teknik geliştirme girişiminde bulunmadan daha önce kullandığı bileşke işlemi doğrultusunda $t_{2,1}$ görevini tamamlamaya çalıştığı anlaşılmaktadır. Yani bileşke işleminin T_1 görev tipinde öğretildiği şekilde kullanılması ve doğrusal fonksiyonların hatırlatılması (önceden öğretildiği anlamına gelir) burada belli ölçüde *kurumsallaştırma anı*na işaret etmektedir. Teknolojik-teorik çevrenin kurulması anı polinom eşitliği kavramının bilinmemesi ve öğretmenin burada yeterince açıklama vermemesi nedeniyle eksik bir şekilde gerçekleşmiştir. Öğrenciler tekniği anlamadıklarında öğretmen alternatif bir teknik kullanmamış, sadece yaptığı çözümü tekrarlamıştır. Bu doğrultuda teknikler üzerine çalışma anı gerçekleşmemiştir. Burada alternatif bir tekniş şu şekilde açılanabilirdi: f(x)=ax+b ve (fof)(x)= $9x - 4$ ifadesinde x=0 için f(0)=b ve f(f(0))=-4 ise f(b)=-4 elde edilebilirdi. Buradan ab+b=-4 bulunabilirdi. Daha sonra x=1 için f(1)=a+b ve f(f(1))=5 ise f(a+b)=5 elde edilebilirdi. Buradan da a·(a+b)+b=5 ise a^2+ab+b=5 (ab+b=-4 yerine yazılırsa) ise a^2-4=5 ise a^2=9 ise a=$\pm$3 elde edilebilirdi. Bundan sonra a=3 için b=-1 dolayısıyla f(x)=3x-1 ve a=-3 için b=2 dolayısıyla f(x)=-3x+2 şeklinde elde edilebilirdi. Bu alternatif tekniğe dikkat edildiğinde polinom eşitliği kullanılmadan çözüm gerçekleştirildiği görülmektedir. Ancak Burak öğretmen sınıf uygulamasında bu tür bir tekniğe yer vermemiştir. Öğretmen bu görev tipiyle ilgili diğer görevi de yukarıda açıklanan süreçlere paralel şekilde sunarak tamamladıktan sonra T_3 görev tipine geçmiştir.

Burak öğretmen, T_3 görev tipi ile ilgili $t_{3,1}$ görevini aşağıda Şekil 4.21'de verildiği şekliyle tamamlamıştır.



Şekil 4.21. *Burak öğretmenin T_3 görev tipiyle ile ilgili $t_{3,1}$ görevi*

BÖ: Soruyu yazdık mı? Çözümü yapıyorum. Bana f(g(x))'i soruyor. Yani, f(g(x))=f(x-2)=$3^{x-2+1} = 3^{x-1}$ Şimdi kaçtır deseydi cevabımız buydu. 3^{x-1} idi. Ama bunu f(x) cinsinden bulunuz, diyor. Bu tür sorularla karşılaşırsınız. Burada 3^x yalnız bırakmanızı tavsiye ederim. Bak bu bir köşede dursun. Acaba bu kaç tane f(x) eder?((fog)(x) fonksiyonunu işaret etti) f(x) cinsinden değerini soruyor. f(x)= 3^x ·3 değil mi?

Ö2: Evet

BÖ: 3^x'i yalnız bıraktığım zaman böyle olmaz mı?(3^x=f(x)/ 3 şeklinde eşitlikten çekti.) 3^x gördüğüm yere f(x)/3 yazacağım. Peki, burada ne var? f(g(x))=$3^{x-1} = \frac{3^x}{3} = \frac{\frac{f(x)}{3}}{3} = \frac{f(x)}{9}$ Ne yazıyordum? 3^x yerine f(x)/3 yazıyordum. Sonuç ne oldu? Bir bölü 9 f(x)…

Öğrenciler: Hocam bunu bir daha anlatın. (öğretmen aynı şekilde tekrar anlattı)

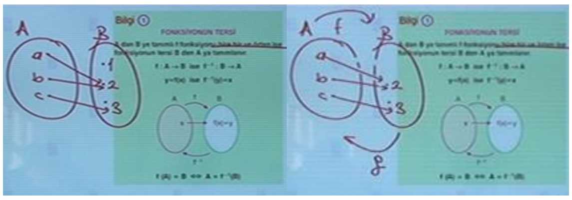
Burak Öğretmenin T_3 görev tipiyle ilgili $t_{3,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{3,1}$: Doğrusal fonksiyonla üstel fonksiyonun bileşkesini üstel fonksiyon türünden bulma
- $\tau_{3,1}$ (Cebirsel Teknik): (fog)(x) bileşke işlemi bulunduktan sonra f(x) fonksiyonu 3^x üstel fonksiyon cinsinden çekilir. Bu değer (fog)(x)'de yerine bırakılır.
- $\theta_{3,1}$: Yok

Burak öğretmenin $t_{3,1}$ görevi için $\tau_{3,1}$ cebirsel tekniğini üç aşamada gerçekleştirmiştir. Birinci olarak, f ve g fonksiyonlarının kurallarından hareketle (fog)(x) daha önce T_1 görev tiplerine benzer şekilde alınmıştır. İkinci olarak, f(x) fonksiyonunda 3^x ifadesi f(x) cinsinden bulunmuştur. Bu değer (fog)(x)'de yerine bırakılarak çözüm gerçekleştirilmiştir. Bu tekniğin $\theta_{3,1}$ teknolojisinde bileşke işlemi, denklem çözme ve değişken değiştirme gibi bilgiler örtük olarak kullanıldığı belirlenmiştir. Bu kavramlara ilişkin öğretmenin açıklama yapmadığı görülmektedir. Çünkü bu kavramlar bu düzeyde öğrenciler tarafından bilinmesi gerekmektedir.

Öğretmen "*Şimdi kaçtır deseydi cevabımız buydu.*" şeklindeki açıklamasıyla T_1 görev tipindeki görevlerde kullanılan tekniklere atıfta bulunmaktadır. Bu anlamda belli ölçüde kurumsallaştırma anı ortaya çıkmıştır. Diğer taraftan bu görev ters fonksiyona hazırlayıcı bir görev olarak nitelendirilebilir. Çünkü bu görevde bir fonksiyonun diğer fonksiyon cinsinden bulunmak istenmektedir. Burada f fonksiyonu üstel bir fonksiyon olduğundan bağımsız değişkeni yalnız bırakmak logaritma fonksiyonunu bilmeyi gerektirmektedir. Öğretmen burada 3^x fonksiyonunu f(x) cinsinden ifade ederek bu engeli aşmıştır. Öğretmenin "*Burada 3^x yalnız bırakmanızı tavsiye ederim.*" ifadesinden bu görevde farklı yolların olduğu işaret edilmektedir. Ancak yukarıda da açıklandığı üzere bu alternatif yol ekolojik açıdan sorunludur (logaritma fonksiyonunun henüz öğretilmediğinden dolayı). Bu görev tipindeki diğer görevde ters fonksiyona ilişkin hazırlayıcılık daha net bir şekilde ortaya çıkmıştır. Burada öğretmen "f(x)=2x-4 fonksiyonunda x değeri f(x) cinsinden nedir?" şeklinde $t_{3,2}$ görevini tamamlamıştır.

Burak öğretmen fonksiyonun tersine girişte öncelikle kaynak A'da verilen bilgileri okumuştur. Sonra bu bilgileri açıklamak için spontane olarak sunduğu T_4, T_5 ve T_6 görev tipleri sınıflandırılan görev tiplerini birbirinin içine geçmiş olarak sunmuştur. Bunlar görevlerin birbirini destekleyecek şekilde organize edilmesinden çok, aynı örnek üzerinde farklı görevlerin incelenmesi şeklinde ortaya çıkmıştır. Bu görev tiplerinden ilk sunulanlar aşağıda Şekil 4.22'de verilmiştir.



Şekil 4.22. *Burak öğretmenin fonksiyonun tersine girişte sunduğu görevler* ($t_{4,1}$, $t_{5,1}$, $t_{6,1}$)

BÖ: (kaynak A'da verilenleri okuyor) ...Neden bire birlik örtenlik işin içine girmiş. Bakın f, A'dan B'ye ise f^{-1} buna ters diyoruz, B den A'ya dır...

Ö2: Hocam bire bir, örten nedir?

BÖ: Anlatacağım şimdi. Bir eleman bir elemana gidiyorsa, her elemanın farklı bir görüntüsü varsa, bire birdir. Arkadaşlar şöyle olsun f={(a,2), (b,2), (c,3)} ne oldu?

Öğrenciler: Örten değil.

Ö1: Bire bir de değil.

BÖ: Burada (değer kümesi) hiçbir eleman boşta kalmamış olsaydı, boşta eleman kalmayacak, bir düşünün örtenliği çağrıştırıyor mu?

Öğrenciler: Evet

BÖ: Bu örten değil, bire bir de değil. Peki, bu f, A'dan B'ye bir fonksiyon mu?

Öğrenciler: Evet

BÖ: Fonksiyondur. Buna f diyelim. Tersine de biz g diyelim. g düşüncesinde okları ters çevireceğiz, değil mi arkadaşlar? Peki, g={(3,c), (2,b), (2,a)} gitmiş. 1'inde görüntüsü yok.

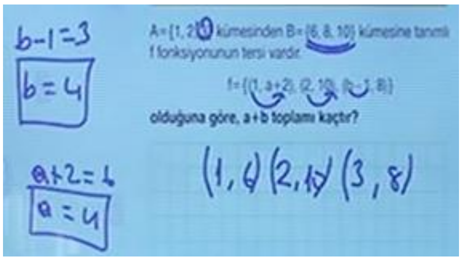
Ö10: Fonksiyon olmuyor. Çünkü bir elemanın 2 tane görüntüsü olmayacak.

BÖ: Tabii. Bir elemanın birden fazla görüntüsü olamaz. f bir fonksiyon, ama tersi fonksiyon değil. Çünkü bir elemanın birden fazla görüntüsü var. O yüzden bir fonksiyon değil. Yani bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için fonksiyonun hem bire bir hem de örten olması şart. (başka örneklerle açıklamayı destekledi)

Bir fonksiyonun tersinin fonksiyon olma koşulunu öğretme düşüncesiyle öğretmenin iki küme arasında tanımladığı bir bağıntının fonksiyon, bire bir ve örten olma durumlarını incelediği görülmektedir. Bunlar 9. sınıfta incelendiğinden dolayı ilk karşılaşma anının yeniden 10. sınıfta yaşanması olarak değerlendirilmektedir. Bununla birlikte 9. sınıfta kazanılan bir prakseolojinin yeni bir bilginin üretilmesinde ardışık olarak kullanılmasını içerdiğinden kurumsallaştırma anının kapsamına girmektedir. Teknolojik teorik çevrenin inşası informel açıklamalar şeklinde kısmen ortaya çıkmıştır.

Burada öğretmen fonksiyonların bire bir ve örten olma durumlarını sadece şema temsili ile sınırlandırarak incelemiştir. Dolayısıyla diğer temsillerle, özellikle cebirsel temsille, ilgili incelemelerde bulunulmamıştır. Bu görevler eşleme tekniğiyle tamamlanmıştır. Bu konuda öğretmenin vermiş olduğu teknolojik açıklamalardan bazıları "*her elemanın farklı bir görüntüsü varsa, bire birdir*" ve "*boşta eleman kalmayacak, bir düşünün örtenliği çağrıştırıyor mu?*" şeklindedir. Öğretmen ayrıca verilen bir eşlemenin fonksiyon olmasına ilişkin "*f bir fonksiyon, ama tersi fonksiyon değil. Çünkü bir elemanın birden fazla görüntüsü var.*" şeklinde teknolojik açıklama vermiştir. Öğretmen bu görevleri tamamladıktan sonra diyalogda nihai amacını "*Yani bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için fonksiyonun hem bire bir hem de örten olması şart.*" şeklinde açıklamıştır. Burada dikkat çeken noktalardan biri fonksiyonun bire bir ve örten olması sadece şema temsilinde eşleme tekniğiyle verilmesi olarak belirtilebilir. Sonraki başlıklarda cebirsel temsille verilen fonksiyonların tersinin bulunması sürecinde bu tür fonksiyonların bire bir ve örtenliğinin ne ölçüde sorgulanacağı belirsizlik taşımaktadır. Burada verilen teknolojik açıklamaların informel olarak sunulması ve farklı temsillerde açıklanmaması yeterli açıklamalar sunulmadığını göstermektedir. Sonra öğretmen T_7 görev tipiyle ilgili beş görevi eşleme tekniğiyle benzer şekilde sonuçlandırmıştır. Bu yüzden bu görevlerin didaktik prakseolojilerine yer verilmemiştir. Bundan sonra T_8 görev tipiyle ilgili $t_{8,1}$ görevine geçilmiştir.

Burak Öğretmenin T_8 görev tipi ile ilgili $t_{8,1}$ görevi kaynak A'da yer almaktadır. Bu görevin didaktik prakseolojisine yer verilmesinde ters fonksiyon ile ilgili açıklamalar ve ilk örnek olması etkili olmuştur (Şekil 4.23).



Şekil 4.23. *Burak öğretmenin T_8 görev tipi ile ilgili $t_{8,1}$ görevi*

BÖ: Arkadaşlar, diyor ki, fonksiyonun tersi vardır. Demin ne demiştik? Tersinin olabilmesi için, hem bire bir hem örten olmalı. Yani, her elemanın bir görüntüsü mutlaka olması lazım. Bak önemli bir nokta. Her elemanın bir görüntüsü olması lazım. Ama f, A'dan B'ye tanımlı. hem 1'in görüntüsü olacak, hem 2'nin hem 3'ün. Bir de her elemanın farklı bir görüntüsü olacak, bire birlikten dolayı. Yani 1'in görüntüsüyle 2'nin görüntüsü aynı olamaz. Şurada boşta eleman kalmayacak ki (değer kümesinde), örten olsun, değil mi? O zaman 2, 10'a gitmiş, değil mi arkadaşlar? Bakın 1 buna (a+2'ye) gitmiş, 2 şuna (10 ile eşleşmiş) gitmiş, şurası (b-1) mecburen 3 olacaktır. Fonksiyon olabilmesi için, her elemanın bir görüntüsünün olabilmesi için, b-1=3 tür. b-1=3 ise b=4 bu bir. 3, 8'e gidiyormuş. 2, 10'a gidiyormuş. 1'in 6' ya gitmesi zorunlu çünkü bire bir örten olması lazım ki, tersinin fonksiyon olabilmesi için, yani tersten bahsetmeseydi, bu (b-1 işaret etti) 3 olurdu, ama bu (a+2) hem 10 hem 6 hem 8 olabilirdi. Ama tersi fonksiyon olduğu için, yani örten olmak zorunda olduğu için burada da boşta eleman kalmayacak, yani her görüntünün bir karşılığı olacak. 1'de 6'ya gitmeli.(Tahtaya söylediklerini yazdı) (3,8), (2,10), (1,6) Yani, a+2=6 ise a=4 Bana neyi soruyor? a+b toplamını soruyor. 8 olur cevap.

Burak Öğretmenin T_8 görev tipi ile ilgili $t_{8,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

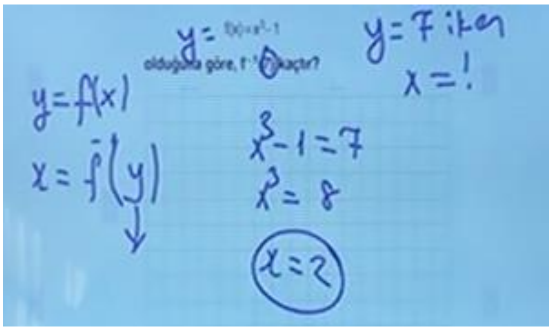
- $t_{8,1}$: Sonlu iki küme arasında tanımlı, liste temsiliyle verilen ve tersi bir fonksiyon belirten bir f fonksiyonun liste temsilinde verilmeyen değerleri bulma
- $\tau_{8,1}$ (Eşleme Tekniği): f: A→B fonksiyonunun tersi bir fonksiyon ise bire bir ve örten olmalıdır. A ve B kümelerinde bulunan elemanların tamamı açıkta eleman kalmayacak şekilde eşlenmelidir. Bu doğrultuda b-1→8, 2→6 ve 1→a+2 şeklinde eşleşme yapılmalıdır. İlk bileşenler tanım kümesiyle ve ikinci bileşenler değer kümesiyle karşılaştırılarak b-1=3 ve a+2=6 eşitliklerinden a ve b değerleri elde edilir.
- $\theta_{8,1}$: *Tersinin olabilmesi için, hem bire bir hem örten olmalı.* [Bire bir fonksiyon-örten fonksiyon], *Bir de her elemanın farklı bir görüntüsü olacak, bire birlikten dolayı.* [bire bir fonksiyon] *Şurada boşta eleman kalmayacak ki* (değer kümesinde), *…örten olsun değil mi?* [örten fonksiyon], *Fonksiyon olabilmesi için, her elemanın bir görüntüsünün olabilmesi için* [fonksiyon kavramı informel],

Ters fonksiyonla ilgili sunulan ilk görev olması itibariyle bu görev *ilk karşılaşma anı* olarak bu görev değerlendirilebilir. Ancak öğretmenin "*…diyor ki, fonksiyonun tersi vardır. Demin ne demiştik? Tersinin olabilmesi için, hem bire bir hem örten olmalı…*" sözlerinden teknik görevden önce ifade edildiği bir teknik geliştirmeye ihtiyaç bırakılmadan tekniğin doğrudan verildiği görülmektedir. Bu durum *teknik geliştirme anı*nı işlevsizleştirmiştir. Bu doğrultuda öğretmen $t_{8,1}$ görevini $\tau_{8,1}$ eşleme tekniğiyle yaptığı görülmektedir. Daha önce bire bir ve örten fonksiyonların öğretmen tarafından eşleme yaklaşımıyla verilmesi burada belli ölçüde *kurumsallaştırma anı*nın gözlendiği şekilde yorumlanabilir. Bire bir, örten, bir fonksiyonun tersinin fonksiyon belirtmesi gibi durumlara ilişkin informel açıklamalar teknolojik teorik çevre oluşturma çabası olarak nitelendirilebilir.

Öğretmen bu tekniği nasıl gerçekleştirdiğini, verilen fonksiyonun tanım kümesinde her değerin değer kümesinde başka bir elemanla (bire bir) ve değer kümesinde boşta eleman kalmayacak şekilde (örten) eşleşmesi gerektiği şeklinde açıklamıştır. Buradan hareketle f(1)=a+2, f(2)=10, f(b-1)=8 olarak elde edilmiştir. Burada A={1, 2, b-1} şeklinde ifade edilebilir. Görev verilirken başlangıçta A={1, 2, 3} şeklinde zaten ifade edilmiştir. Buradan b-1=3 olduğu ortaya çıkmaktadır. Benzer yaklaşımla B={a+2, 10, 8} ve B={6, 8, 10} olduğundan a+2=6 olduğu ortaya çıkmaktadır. Bu tekniğin $\theta_{8,1}$ teknolojisinde "*Tersinin olabilmesi için, hem bire bir hem örten olmalı*." açıklamasıyla bir fonksiyonun tersinin fonksiyon olma şartına, "*Bir de her elemanın farklı bir görüntüsü olacak, bire birlikten dolayı*." açıklamasıyla bire bir fonksiyona, "*Şurada boşta eleman kalmayacak ki (değer kümesinde), örten olsun değil mi?*" açıklamalarıyla örten fonksiyona, "*Fonksiyon olabilmesi için, her elemanın bir görüntüsünün olabilmesi için*" açıklamalarıyla fonksiyon kavramına vurgu yapıldığı belirlenmiştir. Ancak bu açıklamalar dikkat edilirse informel açıklamalardır. Formal anlamda teknolojik açıklamalar verilmediği söylenebilir. Dolayısıyla teknolojiler belli ölçüde eksik olarak gerçekleştirilmiştir. Bundan sonra öğretmen T_9 görev tipine girişte kaynak A'da yer alan aşağıdaki açıklamaları yapmıştır.

> *BÖ: Bir de şuna dikkat etmeniz gerekiyor. Kullanacağız şu formülü y=f(x) ise f^{-1}(y)=x tir. Siz fonksiyonun tersini aldığınız zaman parantez içindekini dışarıya dışardakini içeriye alıyorsunuz. Yani f^{-1}(y)=x oluyor. Bunları yer değiştirdiğiniz zaman yani x yerine y, y yerine x yazdığınız zaman f fonksiyonunun tersini bulmuş oluyoruz.*

Bu açıklama ile öğretmen tekniği doğrudan vermiştir. Böylece *teknik geliştirme anın*ı iptal etmiştir. Bu açıklamadan sonra öğretmen kaynak A'da yer alan T_9 görev tipine ilişkin $t_{9,1}$ görevini öğrencilere sunarak aşağıdaki şekilde sonuçlandırmıştır. Bu görev fonksiyonun tersine ilişkin cebirsel temsille verilen ilk görevdir. Bu görev Şekil 4.24'te verilmiştir.



Şekil 4.24. *Burak öğretmenin T_9 görev tipi ile ilgili $t_{9,1}$ görevi*

Ö4: 2 hocam.

BÖ: Gençler şunu düşünüyorsunuz. Terste parantez içindeki değer y değeridir. Şunu hatırlayın... y=f(x) ise x=f^{-1}(y)... Bize sorduğu şey bu y'ye karşılık x ne olur? Yani y=7 iken, y=f(x)'tir ya arkadaşlar, x kaçtır? Bunu soruyor. Yani x^3-1=7 ise x^3=8 olur. x=2.

Burak Öğretmenin T_9 görev tipi ile ilgili $t_{9,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{9,1}$: Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonda belli bir değerin ters görüntüsünü bulma
- $\tau_{9,1}$ (Cebirsel Teknik): Fonksiyonun ters görüntüsünde parantez içerisindeki değer y değeridir ve 7 olarak verilmiştir. Bu değer fonksiyonda $y=f(x)=x^3-1$ olduğundan $x^3-1=7$ denklemi çözülmesiyle $f^{-1}(7)$ elde edilmiştir.

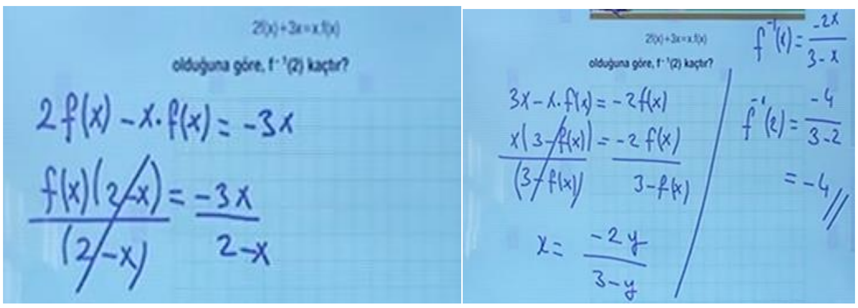
  $\theta_{9,1}$: *Terste parantez içindeki değer y değeridir. Şunu hatırlayın... y=f(x) ise x=f^{-1}(y)* [y=f(x) ise $x=f^{-1}(y)$ özelliğine atıf], *y=7 iken, y=f(x)'tir ya arkadaşlar, x kaçtır?* [f altındaki görüntü], *x^3=8 olur. x=2.*[Üçüncü dereceden denklemler.]

Cebirsel temsille verilen $t_{9,1}$ görevi bu görev tipinde ilk karşılaşma anı olarak belirlenmiştir. Bu görevde $\tau_{9,1}$ cebirsel tekniği "*Terste parantez içindeki değer y değeridir… Şunu hatırlayın. y=f(x) ise x=f^{-1}(y). Bize sorduğu şey bu y'ye karşılık x ne olur?"* şeklinde uygulanmıştır. Bu informel açıklamalar formal anlamda "f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta bire bir ve örten olduğunda y=f(x) ⟺ x=f^{-1}(y) dir.” şeklinde verilebilirdi. Ancak tekniğin uygulanma sürecinde f fonksiyonunun bire bir ve örten olup-olmadığına ilişkin bir inceleme yapılmamıştır. Bu anlamda teknik eksik verilmiştir. Bu doğrultuda teknoloji de tam anlamıyla ortaya çıkmamıştır. Ayrıca 11. sınıfta mantık konusunda işlenilecek olan ise bağlacı hatalı bir şekilde uygulanmıştır. Burada bu önerme, f bire bir ve örten olduğunda,

y=f(x) ⟺ x=f^{-1}(y) ifadesi, y=f(x) ⇒ x=f^{-1}(y) ve f^{-1}(y)=x ⇒f(x)=y

şeklinde belirtilen her iki durumu sağlaması gerekirdi. Burada öğretmen bu durumlardan hatalı olarak y=f(x) ⇒ x=f^{-1}(y) durumunu kullanmıştır. Bu anlamda bu görevde *teknolojik teorik çevrenin oluşturulması anı* matematiksel olarak anlamsız bir şekilde kurulmuştur. Bu görev verilen fonksiyonun tersi bulunduktan sonra 7 değerinin ters fonksiyon altında değerinin belirlenmesi yoluyla da çözülebilirdi. Ancak öğretmen henüz bir fonksiyonun tersinin bulunuşunu anlatmadığından bu alternatif teknikte ortaya çıkmamıştır. Yani tekniğin geliştirilmesine yönelik bir çalışma gözlenmemiştir. Dolayısıyla *tekniksel çalışma anı* bu görevde gözlenmemiştir.

Öğretmen $t_{9,2}$ görevini de benzer süreçler takip ederek sonuçlandırılmıştır. Sonra bu görev tipiyle ilgili $t_{9,3}$ görevi iki farklı cebirsel teknikle aşağıda Şekil 4.25’te verildiği şekliyle tamamlanmıştır.



Şekil 4.25. *Burak öğretmenin T9 görev tipi ile ilgili* $t_{9,3}$ *görevi*

BÖ: …bana yardımcı olun, sonuç istemiyorum.

Ö1: Hocam, fonksiyonları bir yere alacağız, diğerlerini bir yere, öyle yapacağız.

BÖ: Yani, f(x)’i yalnız bırakacağız, sonra tersini alacağız, değil mi arkadaşlar? İşte ben bunu bekliyorum. (Sonra öğretmen işlemi yaptı)

$2f(x) - xf(x) = -3x, \frac{f(x)(2-x)}{(2-x)} = \frac{-3x}{2-x}, f(x) = \frac{-3x}{2-x}$

BÖ: Gençler bir kural var. Belki bir adım ötede vardır, ama o kuralı bilmediğimizi varsayarak, zor yoldan yapıyoruz.

Ö2: Hocam söyleyebilir miyim? Katsayıyı yukarıya alacaksın.

BÖ: Bir dakika yaa. (Öğretmen düşünüyor) Gençler biraz uzun yola saptık, ben fark ettim. Yazmayın bir, yazmayın. ...Burada aslında bizim x'i yalnız bırakmamız lazım. x'i yalnız bıraktıktan sonra x yerine y, y yerine x yazarsak, fonksiyonun tersini buluruz... Buradan da çıkar ama uzun olacak. (Tahtayı temizledi.) x'i yalnız bırakma gayretindeyim.

Burak öğretmenin diyalogda "*Gençler bir kural var. Belki bir adım ötede...* " şeklindeki ifadesi $t_{9,3}$ görevinin başka bir teknikle çözülebileceğini ve bu tekniği ilerleyen derslerde öğrencilere anlatacağını ifade etmektedir. Bu anlamda yeni bir tekniğin varlığını işaret ettiğinden teknolojik teorik çevrenin oluşturması anı olarak nitelendirilebilir. Öğretmenin burada kullandığı $\tau_{9,3}$ tekniğini "*...zor yoldan yapıyoruz"* şeklinde adlandırdığı ve bu yolu "*x'i yalnız bıraktıktan sonra x yerine y, y yerine x yazarsak, fonksiyonun tersini buluruz"* şeklinde açıkladığı görülmektedir. Ancak bu değişim sonucunda neden ters fonksiyon elde edildiğine ilişkin bir açıklama yapmamıştır. Buradan tekniğin teknolojik açıklamalar olmadan anlamsız biçimde kurulduğunu göstermektedir (Bkz. Bölüm 4.1.4).

Ö2: Hocam niye x'i?

BÖ: Dur. İçinde x olanları bir tarafa alıyorum. $3x - xf(x) = -2f(x)$,

$x(3 - f(x)) = -2f(x)$, *Her tarafı x'in katsayısına, yani (3-f(x))'e bölüyorum.*

$\frac{x(3-f(x))}{3-f(x)} = \frac{-2f(x)}{3-f(x)}$, $x = \frac{-2y}{3-y}$, *Arkadaşlar sonra x yerine y, y yerine x yazdığımda bulduğum fonksiyon ters fonksiyon olur.* $f^{-1}(x) = \frac{-2x}{3-x}$

Ö3: Hocam $f^{-1}(y)$ *değil mi? Orası.*

Ö4: Bir şey anlamadım ya.

Burak öğretmenin ders işleyişinde ara geçişlere dikkat etmediği görülmektedir. Bu durum Ö3'ün yapılan işlemi anlamlandıramamasına neden olduğundan, çıkan sonuçla ilgili öğretmenden teknolojik açıklama beklemektedir. Burada öğretmen şöyle bir teknoloji sunabilirdi. Daha önce öğretmen f(x) = y ise f^{-1}(y) = x kuralını verdiğinde f^{-1} de y değerlerinin işleme girdiğini ifade etmişti. Burada $x = \frac{-2y}{3-y}$ ifadesinden sonra f^{-1}(y) = x olduğu belirtilerek, fonksiyon $f^{-1}(y) = \frac{-2y}{3-y}$ şeklinde elde edilebilirdi. Son olarak değişken değiştirilerek, bu son eşitlikte y yerine x yazıldığında, $f^{-1}(x) = \frac{-2x}{3-x}$ şeklinde f fonksiyonunun tersi elde edilebilirdi. Burak öğretmenin $t_{9,3}$ görevinin çözüm tekniğinde "*…x yerine y, y yerine x yazdığımda bulduğum fonksiyon ters fonksiyon olur.*" şeklinde teknolojik açıklamalar bulunmaktadır. Ancak bunlar yukarıdaki diyalogda görüldüğü üzere, sihir yapılıyor gibi uygulanmakta ve tekniğin niçin öyle uygulandığına ilişkin ara basamaklarla ilgili teknolojik açıklamalara yer verilmemektedir. Bu durum tekniğin teknolojisinin eksik bir biçimde yapılandırıldığını göstermektedir.

BÖ: Ee, artık, gençler bir başka yolu da var. Bekleyin biraz sabredin. Bu bulduğumuz ters fonksiyondur. x yerine y, y yerine x yazdığımızda bulduğumuz ters fonksiyondur. Artık benden şunu istiyor. ($f^{-1}(2)$ gösteriyor) $f^{-1}(2) = \frac{-4}{3-2} = -4$

Ö3: Hocam bir şey anlamadık.

Ö4: Hocam bence hata var hocam.

Ö1: Hata yoktur. (cevap anahtarına baktı. Yanıtın -4 olduğu gösterdi)

BÖ: Arkadaşlar bu bir yol. Ben anlatmak için böyle uzun uzadıya anlattım. Yani, biraz karıştı ama x'i yalnız bırakıyorsunuz, x yerine y, y yerine x yazıyorsunuz, bu kadar basit, bu bir. İkincisi paydalı olan $\frac{ax+b}{cx+d}$ onun kuralını vermediğim için buradan yaptım. Başka bir kural var, gayet basit olduğunu göreceksiniz.

Ö6: Şu tarafı anladım da, $f^{-1}(x)$'ten sonrası orayı anlamadım.

BÖ: Şimdi x'i yalnız bıraktım mı?

Ö6: Evet.

BÖ: x yerine y yazarsam y=$\frac{-2x}{3-x}$ işte bu bulduğum fonksiyon ters fonksiyon. Şu adımdan sonra arkadaşlar, x yalnız kaldıktan sonra x yerine y, y yerine de x yazıyorum.

Ö2: Orada aynı şey yapılmaması gerekiyor. (x ile y değişimi kastetti) x yerine y yazarsanız, bir daha sonra y yerine x yazıyorsunuz. Aynı şey. Bu nasıl oluyor?

BÖ: x gördüğüm yere y yazıyorum y gördüğüm yere x yazıyorum kardeşim.

Ö2: Tamam da, x gördüğümüz yere y yazıyoruz, y gördüğümüz yere x yazıyoruz aynı şeyi yapmış olmaz mıyız?

BÖ: … x ile y nin yerini değiştiriyorum ya…Tamam kısa yoldan anlatacağım yav. Önce bunu anlamanız lazım ezber yollar kolay. Bütün ters fonksiyonlar bulunurken x'i yalnız bırakıyorsunuz, x'i yalnız bıraktıktan sonra x gördüğünüz yere y, y *gördüğünüz yere x yazıyorsunuz bu kadar basit. Bu bulduğunuz fonksiyon ters fonksiyondur.*

Burak Öğretmenin T_9 görev tipiyle ilgili $t_{9,3}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

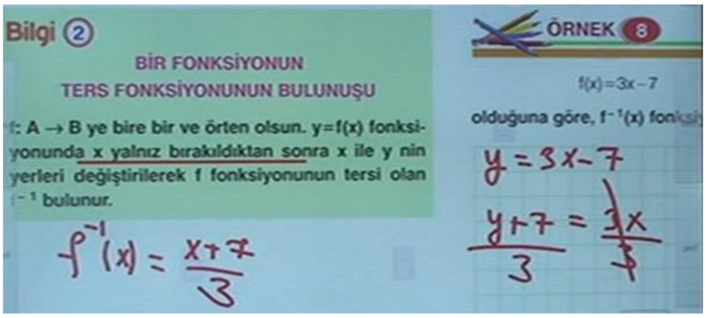
- $t_{9,3}$: Cebirsel temsilli $2f(x) + 3x = xf(x)$ şeklinde verilen bir fonksiyonda belli bir değerin ters görüntüsünü bulma
- $\tau_{9,3}$ (Cebirsel Teknik): *Bütün ters fonksiyonlar bulunurken x'i yalnız bırakıyorsunuz, x'i yalnız bıraktıktan sonra x gördüğünüz yere y, y gördüğünüz yere x yazıyorsunuz bu kadar basit. Bu bulduğunuz fonksiyon ters fonksiyondur.*
- $\theta_{9,3}$: *…x ile y nin yerini değiştiriyorum* [Değişken değiştirme anlamsız bir şekilde yapıldı], *f(x)'i yalnız bırakacağız,… x'i yalnız bırakma gayretindeyim.* [denklem çözme]

Bu diyalogda görüleceği üzere öğretmenin tekniği uygularken bazı basamakları atlaması ve o basamaklara ilişkin teknolojik açıklamalar yapmaması öğretimi büyük ölçüde engellediği görülmektedir. Burada Ö6 anlamadığı noktayı "$f^{-1}(x)$*'ten sonrası orayı anlamadım"* şeklinde ifade ederek, tam da öğretmenin tekniğin uygulamasındaki aşamalardan teknolojik açıklama vermesi gereken noktayı işaret etmiştir. Ancak öğretmen tam bu noktaya odaklanmak yerine sadece ters fonksiyonun bulunuşuna ilişkin daha önce yaptığı açıklamaları aynı şekilde tekrarladığı görülmektedir. Bu açıklamalarda x ile y arasında yapılan değişimle nasıl ters fonksiyona geçildiğini Ö2 kodlu öğrencinin anlamlandıramadığı görülmektedir. Öğretmen yine yaptığı açıklamayı tekrarlayarak, ilerde vereceği başka bir teknikle görevin anlaşılacağını belirtmiştir. Bu anlamda kısa yolu sadece işaret ettiğinden *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı* burada gözlenmiştir. Ayrıca öğretmenin diyalogda "*Önce bunu anlamanız lazım ezber yollar kolay."* şeklindeki ifadesinden belli ölçüde kanıt gerektiren uzun yoldan bir fonksiyonun tersini bulma yaklaşımına kurumsal bir statü vermeye çalıştığı görülmektedir. Bu anlamda bu tekniği kurumsallaştırmaya yönelik çabası olsa da *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı*nı uygun oluşturmadığından bu anlamlı şekilde yapılandırılamamıştır.

T_9 görev tipindeki görevler, f bire bir ve örten olmak şartıyla, $\mathrm{f^{-1}(y) = x}$ ise $\mathrm{f(x) = y}$ özelliğinden ya da fonksiyonun ters kuralı bulunduktan sonra ters fonksiyonda belli bir değerin görüntüsü belirlenerek tamamlanabilmektedir. Öğretmen $t_{9,1}$ görevini ilk teknikle sonuçlandırırken $t_{9,3}$ görevini ikinci teknikle sonuçlandırmak istediği görülmektedir. Öğretmenin $t_{9,3}$ görevinde farklı bir teknik kullanması *tekniksel çalışma anı* olarak nitelendirilebilir. Burada öğretmenin ters fonksiyonun nasıl bulunacağına ilişkin kuralı henüz vermediği görülmektedir. Bu anlamda T_{10} görev tipindeki görevler $t_{9,3}$ görevinde ortaya çıkarılan yeni teknik bağlamında incelenmek istenmektedir. Bundan sonra öğretmen, T_{10} görev tipine aşağıdaki şekilde giriş yapmıştır.

BÖ: Fonksiyonun tersine başlarken, y yerine x, x yerine y yazmamız gerektiğini söylemiştim. İşte bu ona dair nottur. (Kaynak A'da geçen notu gösteriyor) İsteyen yazsın hemen. x yalnız bırakıldıktan sonra x ve y yer değiştirildiğinde f'nin tersi bulunur, bu kadar.

Öğretmenin bir önceki görevde de belirttiği gibi, herhangi bir fonksiyonun tersi bulunurken x değişkeni yalnız bırakıldıktan sonra y yerine x ve x yerine y yazılması gerekmektedir. Bu tür bir bilgi ile öğretime giriş yapılması fonksiyonların ters kuralının nasıl belirleneceğine ilişkin *bir teknik geliştirilmesi anı*nın "paypas" edildiğini göstermektedir. Ancak öğretmenin bu işlem sonucunda neden ters fonksiyon elde edildiğine ilişkin herhangi bir açıklama ya da kanıt yapmadığı görülmektedir. Ayrıca f fonksiyonunun bire bir ve örtenliği de incelenmemiştir. Buradan *teknolojik-teorik çevreyi oluşturma anı* eksik bir şekilde öğretim gerçekleştirilmiştir. Bu açıklamalardan sonra Burak öğretmen T_{10} görev tipiyle ilgili kaynak A'da geçen ilk görevi aşağıdaki Şekil 4.26'da verildiği şekilde sonuçlandırmıştır.



Şekil 4.26. *Burak öğretmenin T_{10} görevi ile ilgili $t_{10,1}$ görevi*

BÖ: $f(x) = 3x - 7$ *fonksiyonunun tersini istiyor. Gayet basit bu nota göre yaparsak,* $\frac{x+7}{3}$ *olur.*

Ö11: Nasıl?

Ö12: Nasıl oldu hocam?

Ö6: x'i yalnız bıraktık.

BÖ: Gençler bu y dir. $y = 3x - 7$ *dir. Benim amacım x'i yalnız bırakmak, yalnız bıraktıktan sonra x yerine y, y yerine x yazmak.* $\frac{y+7}{3} = \frac{3x}{3}$ *bize bir x lazım. (her tarafı 3 ile böldü)* $x = \frac{y+7}{3}$ *bu bulduğumuz f fonksiyonunun tersidir.* $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$ *bu kadar.*

Burak Öğretmenin T_{10} görev tipiyle ilgili $t_{10,1}$ görevine ilişkin didaktik prakseoloji aşağıda verilmiştir.

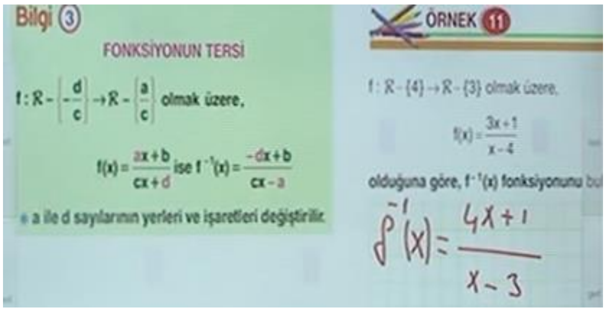
- $t_{10,1}$: $f(x) = 3x - 7$ doğrusal fonksiyonunun tersini bulma
- $\tau_{10,1}$ (Cebirsel Teknik): *Benim amacım x'i yalnız bırakmak, yalnız bıraktıktan sonra x yerine y, y yerine x yazmak. …bulduğumuz f fonksiyonunun tersidir.* [f(x) yerine y yazıldıktan sonra x değişkeni y değişkeni cinsinden çekilir. Elde edilen değer fonksiyonun tersidir.]
- $\theta_{10,1}$: *x yerine y, y yerine x yazmak.* [Değişken değiştirme anlamsız uygulandı],

Burak Öğretmenin $t_{10,1}$ görevinde $\tau_{10,1}$ cebirsel tekniğini nasıl uyguladığını diyalogda "*Amacımız x'i yalnız bırakmak, yalnız bıraktıktan sonra x yerine y, y yerine x yazıyoruz*" şeklinde açıkladığı görülmektedir. Burada öğretmenin f(x) yerine y yazdıktan sonra $y = \frac{5x+1}{3}$ ifadesinde x değişkenini yalnız bıraktığı görülmektedir. Daha sonra ise x ile y'nin yerini değiştirildiğinde elde edilen fonksiyonun f^{-1} olduğu ifade ediliyor. Ancak bu tekniğin uygulanmasında öğretmenin tekniğin uygulamasına ilişkin bazı aşamaları atladığı görülmektedir. Burada f bire bir ve örten olduğunda $x = \frac{y+7}{3}$ ifadesinden sonra $y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ olduğundan $f^{-1}(y) = \frac{y+7}{3}$ ve son olarak y yerine x değişken değiştirmesi gerçekleştirilerek, $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$ şeklinde elde edilmeliydi. Görüldüğü gibi tekniğin uygulanmasında öğretmenin birçok aşamayı atladığı tespit edilmiştir. Bu doğrultuda öğretmenin verebileceği birçok teknolojik açıklamayı da yapamadığı anlaşılmaktadır.

Bu tekniğin $\theta_{10,1}$ teknolojisinde Şekil 4.28'de belirtilen kurala atıf yapılmakla birlikte bunun neden öyle olduğuna ilişkin herhangi bir açıklama yapılmadığı görülmektedir. Ayrıca tekniğin uygulamasında atlanan aşamalarda değişken değiştirme, bire bir ve örten fonksiyonda $y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ kuralı ve aynı şeye eşit olan şeyler eşittir aksiyomu gibi bilgiler kullanılmasına rağmen bunlara ilişkin açıklama yapılmadığı tespit edilmiştir. Burada yapılan değişken değiştirme "*x yerine y, y yerine x yazmak*" şeklinde anlamsız biçimde gerçekleştirilmiştir. Ayrıca $y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ kuralı sadece bire bir ve örten fonksiyon için geçerli olmasına rağmen bire bir ve örtenlikle ilgili herhangi bir açıklama yapılmamıştır. Dolayısıyla gerçekleştirilen didaktik prakseolojinin teknoloji bileşeni olmaksızın yapılandırıldığı belirlenmiştir. Bu durumun ortaya çıkmasında öğretmenin kullandığı kaynağın etkili olduğu görülmektedir. Şekil 4.28'de kaynak A'da bir fonksiyonun tersine ilişkin kuralı öğretmenin aynen uygulaması ve problem çözümünde bu kurala atıfta bulunması bunun en güçlü göstergesidir.

Bu prakseoloji didaktik anlar açısından düşünüldüğünde cebirsel temsille verilen bir fonksiyonun ters kuralını bulma görev tipine ilişkin ilk görev olması açısından ilk karşılaşma anı gözlendiği belirtilebilir. Öğretmenin ders kitabında geçen kuralı doğrudan vermesi onun bir teknik geliştirmekten ziyade anlamlı olmayacak şekilde bir tekniğin ifadesinin empoze edilmesi şeklinde düşünülmektedir. Ayrıca tekniğin geliştirilmesi sürecinde değişken değiştirmenin birçok aşaması atlanarak matematiksel açıdan anlamsız bir şekilde gerçekleştirilmesi teknolojik teorik çevrenin oluşturulması anının uygulanmak istendiğini ancak anlamsız bir şekilde gerçekleştirildiğini ortaya koymaktadır.

Diğer taraftan bu didaktik prakseolojide Burak öğretmenin alternatif teknikleri kullanmadığı görülmektedir. Öğretmen fonksiyon konusunun alt başlıklarında ters fonksiyondan önce bileşke işlemini öğretmiştir. Dolayısıyla bir fonksiyonun tersini cebir alanında bileşke işlemi doğrultusunda aşağıdaki şekilde gerçekleştirilebilirdi. $f(x) = 3x - 7$ ifadesinde x değişkeni $f(x)$ türünden $x = \frac{f(x)+7}{3}$ şeklinde çekildikten sonra $x \rightarrow f^{-1}(x)$ değişken değiştirmesi yapılırsa $f^{-1}(x) = \frac{f(f^{-1}(x))+7}{3}$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$ şeklinde bulunabilirdi. Ancak böyle bir teknik öğretmen tarafından gerçekleştirilmemiştir. Dolayısıyla öğretmenin tekniksel çalışma anı bu didaktik prakseolojide gerçekleşmemiştir. Farklı bir açıdan bir fonksiyonla tersinin bileşkesinin birim fonksiyon olması kuralından yararlanılarak bir fonksiyonun tersi aşağıdaki şekilde elde edilebilirdi. $(fof^{-1})(x) = x$ ise $f(f^{-1}(x)) = x$ burada bileşke işlemi uygulanırsa $3f^{-1}(x) - 7 = x$ şeklinde elde edilir. Buradan f^{-1} yalnız bırakılırsa $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$ şeklinde fonksiyonun tersi elde edilebilirdi. Görüldüğü gibi buradaki didaktik prakseolojide tekniksel çalışma anı için iki farklı alternatif yaklaşım olmasına rağmen bunların hiçbirine yer verilmemiştir. Bundan sonra öğretmen bu görev tipiyle ilgili iki görevi benzer yaklaşımlarla tamamlamıştır. Bu görev tipinden sonra öğretmen rasyonel fonksiyonlarla ilgili Şekil 4.27'de verilen $t_{10,4}$ görevini sunmuştur.



Şekil 4.27. *Burak öğretmenin T10 görev tipine geçişi ve $t_{10,4}$ görevi*

BÖ: R-{-d/c}→ R-{a/c} bunu demesinin bir sebebi var. Bu tanım kümesi bu görüntü kümesi değil mi? Tanım kümesini tanımsız yapan, paydayı sıfır yapan ifade bakın cx+d=0 olursa tanımsız oluyor, değil mi? cx+d=0 ve x=-d/c. O yüzden –d/c'yi çıkarmışlar. Peki, şu ne?(R-{a/c} gösterdi) Bu da tersini tanımsız yapıyor. Çünkü tersinin tanım kümesi bu olur. Tersten bakıyoruz ya. Tersinin tanımsız olması için paydanın 0 olması gerekir. Şunu sıfıra eşitleyelim. cx-a=0 ise cx=a ve x=a/c. x=a/c olamaz. x=a/c yazarsak burası 0 oluyor. Payda 0 olursa tanımsız olur. Şimdi sorumuza geçelim. Sadece arkadaşlar (a ile d'yi işaret ediyor) biz buna asal köşegen diyoruz, yer ve işaret değiştiriyor. Ötekilere dokunmuyoruz. Sadece asal köşegendekiler yer ve işaret değiştiriyor. (Soruda 3 ile -4 gösteriyor) $f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{x-3}$ sorun var mı gençler? Anlamadığınız yeri sorun.

Burada öğretmenin rasyonel fonksiyonların tersine ilişkin tekniği verdiği görülmektedir. Bu durum didaktik anlardan görev tipiyle ilgili bir tekniğin geliştirilmesi anını anlamsız kılmaktadır. Diğer taraftan öğretmenin rasyonel fonksiyonların tanım kümelerinin nasıl belirlendiğini açıkladığı görülmektedir. Bunlar teknolojik açıklamalar olarak değerlendirilebileceğinde belli ölçüde de olsa teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı gözlemlendiği söylenebilir. Daha sonra öğretmenin T10 görev tipine ilişkin $t_{10,4}$ görevini öğrencilere sunduğu görülmektedir. Bunun prakseolojik analizine yer verilmesinde ilk görev olması ve öğretmenin bu görevin çözümünde farklı bir teknik kullanması etkili olmuştur. Burak öğretmenin T10 görev tipiyle ilgili $t_{10,4}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{10,4}$: *f*:$R - \{4\} \to\ R - \{3\}, f(x) = \frac{3x+1}{x-4}$ rasyonel fonksiyonunun tersini bulma
- $\tau_{10,4}$ (Cebirsel Teknik): *Ötekilere dokunmuyoruz. Sadece asal köşegendekiler yer ve işaret değiştiriyor.* ($\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{ax+b}}{\mathrm{cx+d}}$ ise $\mathrm{f^{-1}(x)} = \frac{\mathrm{-dx+b}}{\mathrm{cx-a}}$ dır.)

- $\theta_{10,4}$: *R-{-d/c}→ R-{a/c} bunu demesinin bir sebebi var* [bire bir ve örten fonksiyon] *Tanım kümesini tanımsız yapan, …cx+d=0 olursa tanımsız oluyor, …O yüzden –d/c'yi çıkarmışlar.*[fonksiyonların en geniş tanım kümesi], *Sadece asal köşegendekiler yer ve işaret değiştiriyor* [rasyonel fonksiyonun tersinin niçin bu şekilde uygulandığı belirtilmemiş]

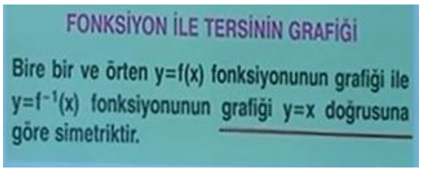
Bu görev tipine girişte öğretmenin, kaynak A'da rasyonel fonksiyonların tersinin bulunuşuna ilişkin bazı teknolojik açıklamalar yaptığı görülmektedir. Diyalogda öğretmen "*R-{-d/c}→ R-{a/c} bunu demesinin bir sebebi var.*" şeklindeki ifadelerle teknolojik açıklama vermeye başladığı gözlenmektedir. Burada her ne kadar diyalogda geçmese de, fonksiyon olma şartını sağlama açısından, rasyonel fonksiyonun paydasını tanımsız yapan değerlerin fonksiyonun tanım kümesinden çıkarılması gerektiği, fonksiyonun tersini tanımsız yapan değerin ise fonksiyonun değer kümesinden çıkarılması gerektiği belirtilmek istenmiştir. Ancak bunların niçin çıkarıldığı üzerinde durulmadığı görülmektedir. Bu anlamda teknolojik açıklamalar eksik yapılmıştır.

Bu didaktik prakseolojide $t_{10,4}$ görevi öğretmenin kullandığı kaynakta yer alan bilgi doğrultusunda tamamlandığı görülmektedir. Burada "*Ötekilere dokunmuyoruz. Sadece asal köşegendekiler yer ve işaret değiştiriyor*" sözleriyle öğretmen tekniği nasıl gerçekleştirdiğini açıklamıştır. Ancak öğretmen bu bilginin neden bu şekilde olması gerektiğine ilişkin açıklamada bulunmamıştır. Diğer yandan bu bilginin teknolojik açıklama olarak ne kadar kullanılabilirliği de tartışmalıdır. Dolayısıyla gerçekleştirilen didaktik prakseoloji teknolojik açıklamalar verilmeksizin gerçekleştirilmiştir. Bu görev tipinde de bir önceki görev tiplerinde bahsedilen aşamaların atlandığı ve benzer teknolojik açıklamalara yer verilmediği söylenebilir. Ayrıca daha önceki görevde ifade edilen alternatif çözüm tekniklerinin de uygulanmadığı görülmektedir.

Didaktik anlar açısından sadece teknolojik teorik çevrenin oluşturulmasına yönelik fonksiyonun tanım aralıklarına ilişkin inceleme dışında herhangi bir didaktik an ortaya çıkmamıştır.

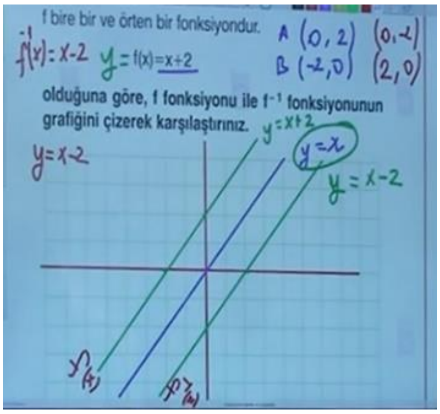
Öğretmen bu görev tipiyle ilgili benzer süreçler takip ederek öğrencilere iki görev daha sunmuştur. İlerleyen derslerde benzer süreçler takip edilerek 6 görev daha benzer yolla sonuçlandırılmıştır. Daha sonra öğretmen aşağıdaki notu yazdırarak T_{11} görev tipine geçmiştir (Şekil 4.28).

BÖ: Bu notu yazıyorsunuz. Fonksiyon ile tersinin grafiği y=x doğrusuna göre simetriktir.



Şekil 4.28. B*urak öğretmenin fonksiyon ile tersinin grafiğine ilişkin verdiği bilgi*

Görüldüğü üzere öğretmen, bir fonksiyon ile tersinin grafiğinin y=x eksenine göre simetrik olduğunu takip ettiği kaynak A'da yer alan bilgiye atıf yaparak göstermektedir. Bu tür bir yaklaşımda teknik doğrudan verilmekte ve öğrencilerde herhangi bir merak duygusu oluşturulmamaktadır. Diğer taraftan öğretmenin fonksiyon grafiği ile tersinin grafiğinin niçin y=x doğrusuna göre simetrik olduğunu açıklamadığı görülmektedir. Daha sonra öğretmen, T_{11} görev tipiyle ilgili Şekil 4.29'da sunulan $t_{11,1}$ görevini aşağıdaki şekilde tamamlamıştır.



Şekil 4.29. *Burak öğretmenin T_{11} görev tipiyle ilgili $t_{11,1}$ görevi*

Ö3: (Öğretmen soruyu okuyor) Hocam bire bir ve örten olması önemli mi?
BÖ: Evet. Eğer bire bir ve örten değilse tersi fonksiyon değildir…y=x doğrusu şu, değil mi? Tam 45'lik açı yapacak, y=x, ben bunu nereden anlıyorum? Arkadaşlar y=x olduğunu nereden anlıyorum ben? x, 1 iken y, 1; x, 2 iken y, 2; x, 5 iken y, 5; x, 0 iken y, 0; x, -1 iken y, -1 yani x ne ise y'de o dur…Gelelim şunun çizimine. (y=x+2 gösteriyor) Bunun çizimi bir doğru oluşturacak, değil mi? Nereden biliyorum?
Ö1: x'in kuvveti 1 dir.
BÖ: Doğru olduğunu şu üstten anlıyoruz arkadaşlar. Eğer kare olsa eğri olacak, küp olsa eğri olacak ama derece 1 olsa doğru olacak. Bir de hani size diyorlar ya f(x) doğrusal fonksiyon hemen ne aklımıza geliyor?

Öğrenciler: ax+b

BÖ: ax+b. Dikkat ettiniz mi? x üstü 1 dir. Kare yok. Doğrusal.

Ö1: O zaman bu da doğrusal.

BÖ: Aynen bu da bir doğru. Bunun (y=x+2 kastediyor) grafiğini çizebilmemiz için iki noktaya ihtiyacımız var. İki noktayı kafadan veriyoruz. Burada x=0 için arkadaşlar y=2 çıkıyor, değil mi?(A(0,2) noktası olarak yazdı) y yerine 0 yazınca bakalım -2 çıkıyor, değil mi? (B(-2,0) noktası olarak yazdı) İki tane nokta bulmamız yeterli, bir doğru için 2 tane nokta bulmak yeterlidir. İşte bu noktalar birleştirildiği zaman bir doğru elde ederiz. y=x+2 dir. (Doğruyu çizdi) Böyle bir şey arkadaşlar.

Bu görev f fonksiyonunun grafiği ve tersinin grafiğiyle ilgili ilk görev olduğundan *ilk karşılaşma an*ının gerçekleştiği belirtilebilir. Burak öğretmen doğrusal fonksiyonun iki nokta ile karakterize edildiği bilgisinden hareketle y=x ve y=x+2 fonksiyonlarının grafiklerini çizdiği görülmektedir. Bu 9. Sınıfta öğrencilerin bildiği nümerik teknikle fonksiyon grafiğinin çizildiği görülmektedir. Eski bir tekniğin kullanılması daha önce bilinen bir prakseolojinin kullanılması olarak ifade edilebileceğinden *kurumsallaştırma an*ının gözlemlendiği söylenebilir. Burada bir fonksiyon bire bir ve örten değilse tersinin fonksiyon olmaması, y=x doğrusu üzerindeki noktalarda apsis ve ordinatın aynı olması gerektiği, doğrusal bir fonksiyonun birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem içermesi, fonksiyonda bağımsız değişkenin derecesi kare ya da küp olduğunda fonksiyonun grafiğinin eğrisel olacağı durumları teknolojik açıklamalardır. Bu tür teknolojik açıklamalar *teknolojik teorik çevreyi oluşturma an*ının gözlemlendiği şeklinde değerlendirilebilir.

Ö5: Hocam bir şey sorabilir miyim?

BÖ: Efendim

Ö5: Hocam buna 2 br sola çekilmiş diyebilir miyiz?(y=x doğrusunun 2 br sola çekilmiş hali kastediliyor)

BÖ: Evet (onayladı ama tekrar kendi çözümüne devam etti) Arkadaşlar, bunun ismi neydi? y=x+2. Peki, fonksiyonun tersi nasıl.

Ö10: x-2

BÖ: Arkadaşlar fonksiyonun tersini kırmızıyla yazayım. $f^{-1}(x)=x-2$ bunu biliyorsunuz, değil mi artık? x'i yalnız bırakıyorduk. (Öğretmen yan tarafta fonksiyonun tersini buldu) Şimdi y=x-2' yi çizeceğiz. x=0 için y=-2, (0,-2). y=0 için x=2 Yani her zaman önce x sonra y yazıldığına göre (2,0). Bunları birleştirdiğimiz *zaman aradığım doğruyu bulurum. (y=x-2 çizdi) Arkadaşlar, yeni bulduğumuz y=x-2. Biri diğerinin tersi.*

Burada Ö5 kodlu öğrenci y=x+2 fonksiyonunun grafiğinin çizimi için farklı bir alternatif yaklaşım işaret ettiği görülmektedir. Burak öğretmen bu tekniği onaylamış ancak hiç açıklama yapmadan kendi tekniğini uygulamaya devam etmiştir. Bu anlamda farklı bir teknikle y=x+2 fonksiyonunun grafiği çizimine işaret edildiğinden teknolojik teorik çevrenin kurulması anı burada gözlenmiştir. Diğer taraftan öğretmenin doğrusal fonksiyon grafiğinin çiziminde öğrencinin işaret ettiği tekniği onayladıktan sonra kendi tekniğini uygulamaya devam etmesi kullandığı tekniği kurumsallaştırdığı algısını güçlendirmektedir. Hatta birkaç ders önce anlattığı simetri dönüşümlerini bu görevde kullanmaması beklenmeyen bir durum olarak gözlenmiştir. Öğretmen simetri dönüşümlerini sadece öğretim programında yer aldığı için anlattığı ancak bunun kurumsal bir statü kazanmadığını burada gösterdiği davranışla kanıtlamaktadır. Dahası bu görevi simetri dönüşümleriyle gerçekleştirebilecekken, bunu görmezden gelerek alternatif tekniklerin kullanılmasını engellemiş ve böylece bu görevde *tekniksel çalışma anı* gerçekleşmemiştir. Diğer taraftan burada öğretmenin kullandığı tekniğin 9. Sınıf düzeyinde kullanılan farklı bir teknik olduğu görülmektedir. Bu teknikte öğretmen fonksiyonun koordinat eksenlerini kestiği noktaları belirleyerek görev tamamlamıştır.

Ö5: Hocam x+2, x-2'nin simetrisi olmuyor mu? Orijine göre simetrisi.

BÖ: Orijine göre değil. y=x doğrusuna göre.

Ö3: Hocam diğer sorularda da böyle bulabiliyor muyuz? Yoksa tesadüfen mi çıktı?

BÖ: Her zaman bu şekil bir şey çıkacak. Şu aradaki doğru bir ayna gibi olacak. (y=x doğrusu) Yani şu nokta kendisini şurada görecek, bu nokta kendisini burada görecek. Dolayısıyla bu doğru kendisini burada görecek.

Ö4: y=x doğrusu doğrusal olmasa, doğrusal olmasa parabol olsa…

BÖ: y=x doğrusaldır.

Ö3: Hocam öyle değil.

BÖ: (Öğrenci müdahale edecekken) Bir dakika, bir dakika. Arkadaşlar bir fonksiyon ve tersi y=x doğrusuna göre simetriktir. y=x doğrusuna göre simetrik, başka herhangi bir şeye göre simetrik değil.

Ö1: Parabol ise de simetrik.

BÖ: Ya, fonksiyon ne olursa olsun, simetri ekseni budur. (y=x gösteriyor)

Ö4:Hee.

BÖ: Bir tanesi f(x) diğeri f^{1}(x). (Çizdiği doğruları gösterdi)

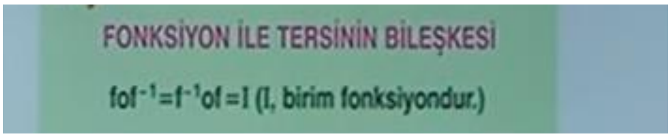
Burak Öğretmenin T_{11} görev tipi ile ilgili $t_{11,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{11,1}$: y=x+2 doğrusal fonksiyonunun grafiği ile tersinin grafiği arasındaki ilişkinin belirlenmesi
- $\tau_{11,1}$: *Bunun (y=x+2 kastediyor) grafiğini çizebilmemiz için iki noktaya ihtiyacımız var… Şimdi y=x-2' yi çizeceğiz* [y=x+2 grafiği iki nokta belirlenerek çizildikten sonra cebirsel olarak tersi bulunur. Benzer şekilde tersinin grafiği çizilir.] *…Şu aradaki doğru bir ayna gibi olacak. (y=x doğrusu) Yani şu nokta kendisini şurada görecek,…*[Bu iki grafiğin y=x doğrusuna göre katlandığında çakışacağı ifade edilerek simetri doğruları y=x şeklinde belirlenir.]
- $\theta_{11,1}$: *Eğer bire bir ve örten değilse tersi fonksiyon değildir* [fonksiyon belirtme] *Eğer kare olsa eğri olacak, küp olsa eğri olacak ama derece 1 olsa doğru olacak.* [eğrinin karekteri] *…bir doğru için 2 tane nokta bulmak yeterlidir.* [Doğru grafiğini karekterize etme] *Şu aradaki doğru bir ayna gibi olacak.* [simetri ekseni]

Burak Öğretmen $t_{11,1}$ görevini alışık olduğu bir teknikle çözdüğü anlaşılmaktadır. Burada öğretmenin öncelikle y=x ve y=x+2 doğrularının grafiklerini çizdiği görülmektedir. Sonra y=x+2 fonksiyonunun tersi cebirsel olarak y=x-2 şeklinde bulunmuştur. Bunun grafiği de benzer yaklaşımlarla çizilerek, y=x+2 ile y=x-2 doğrularının y=x doğrusuna göre simetrik olduğu "*aradaki doğru bir ayna gibi olacak"* sözüyle ifade edilerek teknik tamamlanmıştır. Bu tekniğin uygulanması öncesinde öğretmen fonksiyonla tersinin grafiğinin y=x doğrusuna göre simetrik olduğunu hiçbir açıklama yapmadan verdiği görülmektedir.

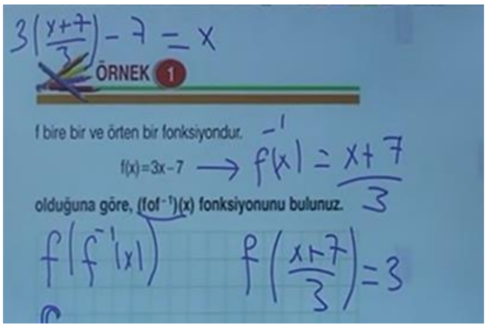
Bu tekniğin teknolojisinde "*Eğer bire bir ve örten değilse tersi fonksiyon değildir"* ifadesiyle bir fonksiyon tersinin fonksiyon belirtmesi, "*Eğer kare olsa eğri olacak, küp olsa eğri olacak ama derece 1 olsa doğru olacak."* ifadesiyle fonksiyonun kuralıyla grafiği arasındaki ilişkiye ve hangi şartlarda doğrusal fonksiyon olmasına ve "*Şu aradaki doğru bir ayna gibi olacak"* ifadesiyle fonksiyon grafiği ile tersinin grafiklerinin simetri eksenine yönelik açıklamalarda bulunulduğu görülmektedir. Ancak görevin çözümünde anahtar bir rolü bulunan fonksiyon grafiği ve tersinin grafiğine ilişkin açıklamanın informel biçimde ve yetersiz bir şekilde açıklandığı görülmektedir. Dahası bir örnek üzerinde bunun doğruluğu gösterilmeye çalışılmakta, diğer grafiklerde de durumun aynı olduğu belirtilmektedir. Bu belli ölçüde *görev tiplerini keşfetme* ve bunlara yönelik bir *teknik geliştirme anı* içerisinde düşünülse de büyük ölçüde eksik kaldığı söylenebilir. Özellikle görevin başında f ile f^{-1} grafiğinin y=x doğrusuna göre simetrik olduğunun belirtilmesi teknik geliştirme çabasını anlamsız kılmıştır. Diğer taraftan herhangi bir fonksiyonla tersinin grafiğinin y=x doğrusuna göre neden simetrik olduğuna ilişkin bir açıklamada bulunulmadığı görülmektedir. Sadece simetrik olduğu ifade edilmiş, ancak neden böyle olduğuna ilişkin açıklama yapılmamıştır. Bu durum $t_{11,1}$ görevine ilişkin gerçekleştirilen didaktik prakseolojinin teknolojisi eksik bir şekilde yapılandırıldığını göstermektedir. Burada öğretmenin şu şekilde bir teknolojik açıklama yapabilirdi. f bire bir ve örten bir fonksiyonunda, $y = f^{-1}(x)$ kuralı elde edilirken, $y = f(x)$ kuralında x çekilip, x yerine y ve y yerine x koymak gerekmektedir. Bu durum herhangi bir (a,b) noktasının f fonksiyonunun grafiği üzerinde ise (b,a) noktasının f^{-1} grafiği üzerinde olduğunu göstermektedir. Seçilen bu nokta keyfi bir nokta olup, (a,b) ve (b,a) noktaları y=x doğrusuna göre simetrik olduğundan f ile f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri y=x doğrusuna göre simetriktir. Görüldüğü üzere, noktanın simetrisinden grafiklerin simetri doğrularına yönelik çıkarımda bulunulabilinmektedir. Ancak öğretmen, bu anlamda hiçbir açıklama yapmadan tekniği gerçekleştirmiştir. Dolayısıyla teknik, teknolojisi büyük ölçüde eksik bir biçimde gerçekleştirilmiştir.

Bu görevin alternatif tekniklerden geometrik tekniklerle x ya da y ekseni üzerinde fonksiyonun ötelenmesiyle çözümün gerçekleştirilmesi de mümkündür. Ö5'in "*Hocam buna 2 br sola çekilmiş diyebilir miyiz?"* şeklindeki soruya öğretmenin olumlu yanıt vermesinde bu geometrik tekniğe vurgu görülmektedir. Ancak öğretmen bu çözümü gerçekleştirmemiştir. Öğretmenin alternatif çözümü gerçekleştirmemesinin altında yatan neden, bu görevin çözümünde kullanılan tekniği kurumsallaştırmaması şeklinde açıklanabilir. Bu durum öğretmenin öğretim programında yapılan değişiklikleri gerçekleştirmeye çalışmakla birlikte, yapılan değişikliği yüzeysel bir biçimde algıladığı ve bu değişiklikleri yeri geldiğinde kullanma gayretinde olmadığı anlaşılmaktadır. Bu açıdan programda yapılan değişikliklerin görevlerde kullanılan teknikler anlamında öğretmenin didaktik prakseolojilerini çok da değiştirmediği söylenebilir. Daha sonra öğretmen yeni bir alt başlığa geçmiştir. Bu alt başlık ders kitabında fonksiyonla tersinin bileşkesi şeklinde verilmektedir. Bu alt başlığa öğretmenin aşağıdaki şekilde giriş yaptığı görülmektedir (Şekil 4.30).



Şekil 4.30. *Fonksiyon ile tersinin bileşkesi alt başlığında girişte kullanılan bilgi*

Bu nottan hemen sonra öğretmen, T_{12} görev tipi ile ilgili kaynak A'da yer alan $t_{12,1}$ görevini vermiştir (Şekil 4.31). Bu görevin prakseolojik analizine yer verilmesinde birden fazla teknikle çözülmesi ve ilgili kuraldan sonra ilk görev olması etkili olmuştur.



Şekil 4.31. Burak öğretmenin T_{12} görev tipi ile ilgili $t_{12,1}$ görevi

BÖ: Bu sorunun cevabı ne olur?

Ö5: Hocam 1 mi?

Ö3: Hocam x-7,

Ö2: x olur ya.

BÖ: Şuradaki ne ise sonuç o olur? ((fof^{-1})(x) ifadesindeki x'i gösterdi) Arkadaşlar fof^{-1} her zaman I'yı verir. Ya da $f^{-1}of$ bunların yeri değişse fark etmez I'yı verir. Yani etkisiz elemanı, parantez içi ne ise arkadaşlar fonksiyonu ne verirse versin. Şurada bana (fof^{-1})(5x)'i sorsaydı cevabı ne olacaktı?

Öğrenciler: 3x-7, x, 5x (Farklı cevaplar geldi.)

BÖ: Yine 5x olacaktı arkadaşlar. Birim fonksiyon etkisiz bir fonksiyon, giren neyse ürün de o.

Ö3: f(x)=x yani.

BÖ: Evet, bizim sorumuzun cevabı da x olacak. Ama uzun yoldan yapmak istersek bakalım nasıl oluyor? (fof^{-1}) bakılım nasıl oluyor? İlk soruya has olmak üzere uzun yoldan yapalım. Bunun cevabının x olduğunu biliyoruz ama bir bakalım. f'nin tersini bana kim söyleyecek?

Ö6: Ben,

BÖ: Söyle.

Ö6: $\frac{x+7}{3}$

BÖ: f(f^{-1}(x))'i bana soruyor, değil mi? f^{-1}(x)'i bulmuştum ben. $f(\frac{x+7}{3})$ *bana soruyor. Benim elinde f(x)'in kuralı var. Her elemanı kendisinin 3 katının 7 eksiğine götürür. O zaman bunu (parantez içini kastetti) da 3 katının 7 eksiğine götürür. (Çözüm aşağıdaki gibi yapıldı)*

$$(fof^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x+7}{3}) = 3(\frac{x+7}{3}) - 7 = x$$

Demek ki, adam doğru söylemiş. f ile f'nin tersini gördüğünüz zaman onun birim fonksiyon olduğunu etki etmeyeceğini parantez içinde ne varsa sonucun o olduğunu anlayacaksınız.

Burak Öğretmenin T_{12} görev tipi ile ilgili $t_{12,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{12,1}$: $f(x) = 3x - 7$ fonksiyonu için $(fof^{-1})(x)$ nedir?
- $\tau_{12,1,1}$: *…fof^{-1} her zaman I'yı verir.*
- $\tau_{12,1,2}$ (Cebirsel Teknik): f fonksiyonunun tersi bulunduktan sonra f ile f fonksiyonunun tersine bileşke işlemi uygulanarak birim fonksiyon elde edilir.
- $\theta_{12,1,1}$: *Birim fonksiyon etkisiz bir fonksiyon, giren neyse ürün de o*. (Birim fonksiyon)
- $\theta_{12,1,2}$: $f(x) = ax + b$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$, deneysel olarak f ile tersinin bileşkesi birim fonksiyon olduğunu gösterme

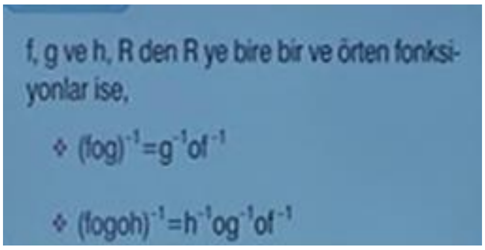
Burak öğretmenin $t_{12,1}$ görevinde iki farklı teknikle tamamladığı belirtilebilir. İlk teknik olan $\tau_{12,1,1}$ tekniğini öğretmen diyalogda "*fof^{-1} her zaman I'yı verir*" şeklinde açıklamaktadır. Burada çözümün nasıl bulunduğu kaynak A'da verilen bilgiye dayanmaktadır. Ancak bir fonksiyonla tersinin bileşkesinin niçin bileşke işlemine göre etkisiz eleman olduğu ve birim fonksiyonun burada üstlendiği rol matematiğin cebir alanıyla bağlantı kurularak açıklanmamıştır. Burada bundan farklı olarak birim fonksiyon örnekler üzerinden açıklanmaya çalışıldığı görülmektedir. Öğretmen, bir fonksiyonla tersinin bileşkesinin sıra önemli olmaksızın daima birim fonksiyonu vereceğini ifade etmiştir. Bu durumu öğrencilerin açık bir şekilde görmeleri için bu görevi uzun yoldan ikinci bir teknikle öğretmenin sonuçlandırdığı görülmektedir. Burada öğretmen doğrusal fonksiyonun tersini bulduktan sonra f ile f^{-1} bileşkesini alarak I birim fonksiyonu elde etmiştir. Bu tekniğin $\theta_{12,1,2}$ teknolojisinde öğretmenin bir doğrusal fonksiyonun tersine ilişkin bilgi ve bileşke işleminin nasıl alınacağı gibi bilgileri kullanıldığı görülmektedir. Burada öğretmenin bir örnek üzerinden de olsa fonksiyonla tersinin bileşkesinin birim fonksiyon olduğunu göstermesi bu kavramın niçin doğru olduğunu gösteren deneysel bir açıklama olarak nitelendirilebileceğinden teknoloji olarak düşünülmektedir. Ancak bu teknolojik açıklama öğretmen tarafından informel biçimde genelleştirilmiştir.

Bu görevde didaktik anlardan *ilk karşılaşma, tekniksel çalışma* ve *teknolojik-teorik çevreyi oluşturma anı* gözlenmiştir. Ancak teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı verilen bilginin niçin geçerli olduğuna yönelik yeterli açıklama yapılmadan sunulmuştur. Bu durumun öğrenciler için büyük ölçüde belirsizlikler taşıdığı öğrencilerin fonksiyonla tersinin bileşkesine verdikleri yanıtlarda hissedilmektedir. Diğer taraftan öğretmenin bu görevde iki farklı teknik kullanması alternatif tekniklere yer verdiğini göstermektedir. Bu doğrultuda teknikler üzerine çalışma anı gerçekleşmiştir. Ancak f fonksiyonun tersinin bileşke işlemi üzerinden alınmadığı dikkat çekicidir. Bu durum ters fonksiyonun matematiğin cebir alanıyla ilişkilendirilmeksizin kopuk bir şekilde inşa edildiğini göstermektedir.

Bu didaktik prakseoloji incelendiğinde, daha önce bir fonksiyonun tersine ilişkin birçok görev tipi incelenmesine rağmen (9 görev tipinde 67 görev) öğretmenin fonksiyon ile tersinin bileşkesinin birim fonksiyon olduğunu ilk kez burada ifade etmesi dikkat çekicidir. Bu durum fonksiyonların tersinin bileşke işlemiyle ilişkilendirilmeden verildiğini göstermektedir. Nitekim daha önce bir fonksiyonun tersiyle ilgili görevlerde fonksiyonların tersinin eşleme tekniğiyle ele alındığı ve cebirsel temsil verilen fonksiyonlarda da anlamsız bir biçimde değişken değiştirme yapılarak ters fonksiyonun elde edildiği gösterilmişti. Diğer yandan alt başlıkların öğretim sıralaması incelendiğinde önce bileşke işlemi, sonra bir fonksiyonun tersi ve daha sonra fonksiyon ile tersinin bileşkesinin anlatıldığı görülmektedir. Burada başlangıçta bileşke işleminin verilmesi fonksiyonun tersinin bileşke işlemi çerçevesinde ele alınacağını düşündürse de öğretmenin sergilediği didaktik prakseolojiler bunun bu şekilde incelenmediğini göstermektedir. Çünkü eğer bir fonksiyonun tersi bileşke işlemi doğrultusunda incelenseydi, ilk olarak fonksiyonla onun bileşkesinin birim fonksiyon olduğu konunun başında vurgulanmalıydı. Ancak birçok görev başka tekniklerle tamamlandıktan sonra bu yaklaşımın verilmeye çalışıldığı tespit edilmiştir. Nitekim bu görevde Ö5’in işlemin sonucuna 1 demesi onun çarpma işlemindeki birim eleman kavramını düşündüğünü göstermektedir. Ancak bu yaklaşım öğretmen tarafından fark edilmediği buna yönelik herhangi bir açıklama yapılmadığı görülmektedir. Bu doğrultuda bu didaktik prakseolojide cebir alanında monoid yapısı kullanılmasına rağmen buna ilişkin yeterli açıklama yapılmadığını göz önüne sermektedir.

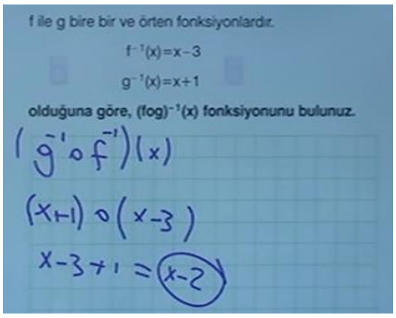
Bu görevden sonra 5 görev yukarıda açıklanan tekniklerden biri ile tamamlanmıştır. Bundan sonra T_{13} görev tipine ilişkin aşağıdaki teknolojik açıklama verilmiştir.

BÖ: Bakın burada (Şekil 4.32) dikkat edilmesi gereken bir şey var. Sıra da değişiyor. (fog)'un tersi g ters bileşke f ters oluyormuş. Kartezyen çarpımda da vardı bu. Kartezyen çarpımda AxB'nin değili B'nin değili çarpı A'nın değili oluyor. Çünkü Kartezyen çarpımda da değişme özelliği yoktur. (fog)'da da değişme özelliği yok.



Şekil 4.32. *Burak öğretmenin T_{13} görev tipine girişte verdiği bilgi*

Burak öğretmenin açıklamalarından da görüleceği üzere, sadece verilen bilgiyi ifade ettiği görülmektedir. Diğer yandan bu bilgiye ilgili ilişkilendirmeyi yanlış bir şekilde kümelerin kartezyen çarpımıyla ilişkilendirmek istemiştir. Ayrıca bu bilginin neden böyle olduğu ve nereden geldiğine ilişkin bir açıklama da yapılmadığı görülmektedir. Dolayısıyla verilen bilginin büyük ölçüde eksik bir biçimde yapılandırıldığı anlaşılmaktadır. Burak öğretmen bu bilgiden sonra kaynak A'da yer alan T_{13} görev tipiyle ilgili Şekil 4.33'te sunulan $t_{13,1}$ görevini öğrencilere sunmuştur.



Şekil 4.33. *Burak öğretmenin T_{13} görevi ile ilgili $t_{13,1}$ görevi*

BÖ: Gençler şunu açacağız, değil mi?($(fog)^{-1}(x)$ *kastetti) Bak yer değişiyor.* $(g^{-1}of^{-1})(x)$*'i soruyor bana. Yani önce g'nin tersini yazacağım. (x+1) bileşke (x-3), bu kadar. Bunu (x-3 ifadesini) x'de yerine yazacağız sol tarafta.*

$$(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$$
$$= (x+1)o(x-3) = x-3+1 = x-2$$

Ö9: Hocam çok kolay.

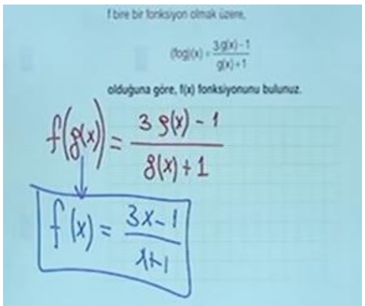
Burak öğretmenin T_{13} görev tipi ile ilgili $t_{13,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{13,1}$: Ters kuralları verilen iki fonksiyonun bileşkelerinin tersini bulma
- $\tau_{13,1}$ (Cebirsel Teknik): $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$ eşitliğinden sonra fonksiyonların terslerinin bileşkesi alınmaktadır.
- $\theta_{13,1}$: ?

Burak Öğretmenin $t_{13,1}$ görevinde $\tau_{13,1}$ cebirsel tekniğini nasıl gerçekleştirdiği diyalogda "*şunu açacağız değil mi?(* $(fog)^{-1}(x)$ *kastetti) Bak yer değişiyor.* $(g^{-1}of^{-1})(x)$*'i soruyor"* şeklinde açıklanmıştır. Burada öğretmen $(fog)^{-1}(x)$ ifadesinin $(g^{-1}of^{-1})(x)$ şeklindeki ifadeye eşit olduğunu belirtmiştir. Sonra verilen sırada fonksiyonları yazarak bileşke işlemini uygulamıştır. Bu prakseoloji teknoloji bileşeni olmaksızın gerçekleştirilmiştir. Dolayısıyla bu görevle ilgili didaktik prakseolojinin kaynak A'da verilen bilgiye dayandırıldığı, ancak bu bilginin nereden geldiği açıklanmadığından teknolojik anlamda eksik bir biçimde yapılandırıldığı anlaşılmaktadır.

Bu didaktik prakseolojide öğretmen $(fog)^{-1}o(fog) = I$ ya da $(fog)o(fog)^{-1} = I$ olması gerektiğinden hareketle $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ şeklinde açılması gerektiği sonucuna ulaşılabilirdi. Bu bağlamda cebir alanında grup özellikleri ile ilişki kurulabilirdi. Bu özelliklere ilişkin bilgiler verilebilirdi. Ancak öğretmenin bu tür bir açıklamada bulunmadığı görülmektedir. Yani bu göreve ilişkin gerçekleştirilen didaktik prakseolojinin teknoloji bileşeni eksik bir şekilde uygulanmıştır.

Didaktik anlarla ilgili ilk karşılaşma anı hariç tutulursa diğer anlar burada gözlenmemiştir. Bununla birlikte görevden önce tekniğin ifade edilmesi görev tiplerine ilişkin bir teknik geliştirilmesi anını anlamsız kıldığı belirtilebilir. Sonra öğretmen T_{14} görev tipiyle ilgili $t_{14,1}$ görevini aşağıda Şekil 4.34'te sunulduğu şekilde tamamlanmıştır.



Şekil 4.34. *Burak öğretmenin T*$_{14}$ *görev tipi ile ilgili* $t_{14,1}$ *görevi*

BÖ: Hemen bulmanız gerekiyor…$f\big(g(x)\big) = \frac{3g(x)-1}{g(x)+1}$ *Bunu vermemiş mi? Bunu kendisi vermiş.*

Ö2: g(x) yerine x yazacağız.

BÖ: Tabi ki,

Ö1: $\frac{3x-1}{x+1}$

BÖ: Yani, arkadaşlar gördünüz değil mi? Bunu yapmasının bir sebebi var. g(x) yerine x yazmışsa devamında da g(x) yerine x yazacağım. Yani $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ *bu kadar.*

Ö2: Hocam bire bir demesi bir şey değiştirir mi?

Ö4: Öyle bu kadar hocam. (Ö2'nin sözünden sonra) Ama diyor ki, bire bir x'e eşitlemeyecek miyiz?

Ö1: Hocam evet, x'e eşitleyeceğiz bire bir diyor.

BÖ: Gençler bire birlik örtenlik fonksiyonun tersiyle alakalı, yani bire bir ve örten bir fonksiyonun tersi vardır. O yüzden bunu vermiş...(biraz düşündü sonra bu soruyu görmezden geldi) Geçiyorum.

Burak öğretmenin T$_{14}$ görev tipi ile ilgili $t_{14,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

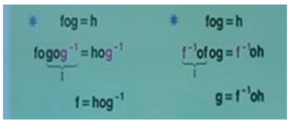
- $t_{14,1}$: Bileşke fonksiyon (fog)(x) ifadesi g(x) türünden bilinen bir eşitlikte f(x) fonksiyonunun kuralı bulma.
- $\tau_{14,1}$ (Cebirsel teknik): *Bunu yapmasının bir sebebi var. g(x) yerine x yazmışsa devamında da g(x) yerine x yazacağım. Yani* $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ *bu kadar*…[(fog)(x)=f(g(x)) şeklinde yazılarak değişken değiştirmeye zemin hazırlanmıştır. Daha sonra g(x) yerine x yazılarak f(x) fonksiyonunun kuralı bulunmuştur.]

- $\theta_{14,1}$: $f\big(g(x)\big) = \frac{3g(x)-1}{g(x)+1}$ … *Bunu yapmasının bir sebebi var. g(x) yerine x yazmışsa devamında da g(x) yerine x yazacağım.* [Değişken değiştirme ve bileşke fonksiyon], *bire bir ve örten bir fonksiyonun tersi vardır* [fonksiyonun tersi]

Bu görev ters fonksiyon henüz anlatılmadan öğrencilere sunulduğundan değişken değiştirme kuralından yararlanılarak tamamlanmıştır. Burada bileşke işlemi (fog)(x)=f(g(x)) şeklinde yazıldıktan sonra g(x) yerine x değişken değiştirme kuralı uygulanmıştır. Böylece değişken değiştirme yoluyla f fonksiyonunun g ile bileşkesi alınmadan önceki kuralı elde edilmiştir. Diğer bir ifadeyle bileşke işleminin tersine değişken değiştirme yoluyla geçilmiştir. Öğretmen değişken değiştirmeyi ve bileşkeyi öğrencilerin bildiği gerekçesiyle teknolojik açıklama yapmaksızın kullandığı görülmektedir.

Burada ilk kez değişken değiştirme kavramında g(x) yerine x yazılması ele alınmıştır. Fonksiyonlarda bileşke işleminde x yerine herhangi bir fonksiyon yazılırken burada bunun tersi gerçekleştirilmiştir. Bu durumu öğretmen kavramsallaştırmış olsa da öğrenciler için çok yeni bir kavram olduğu gözlenmektedir. Burada öğretmenin değişken değiştirme ile bileşke işlemi arasında ilişki olduğunu ve değişken değiştirme ile bileşke işlemine nasıl geçilebileceğini ifade eden açıklamalar yapabilirdi. Diğer taraftan öğrenciler bire bir ifadesinin görevde neden yer aldığına ilişkin soru sorduklarında öğretmen geçiştirerek "*bire bir ve örten bir fonksiyonun tersi vardır. O yüzden bunu vermiş."* şeklinde bir açıklama yapmıştır. Bu yanıt öğrencileri tatmin etmese de öğretmen bu konuda başka açıklama yapmamıştır. Öğretmenin gerçekleştirdiği didaktik prakseolojide tekniğin doğru uygulandığı görülmektedir. Ancak tekniğin neden o şekilde uygulandığına ilişkin teknolojik açıklamalar eksik kaldığı anlaşılmaktadır. Örneğin Ö2'nin "*Hocam bire bir demesi bir şey değiştirir mi?"* şeklindeki soruya açıklayıcı bir yanıt vermediği görülmektedir. Bire bir fonksiyon programda 9. sınıf düzeyinde anlatılmaktadır. Bu anlamda öğretmen bire bir fonksiyona ilişkin açıklamalar yaparak daha önce kurumsallaştırılan bir prakseoloji üzerine tekniğini kurabilirdi. Bu anlamda kurumsallaştırma anı gözlemlenebilirdi. Öğretmenin bu tür ilişkilendirmeler yapmaması teknolojik açıklamaları eksik bir şekilde prakseolojiyi sunduğunun göstergesi olarak nitelendirilebilir.

Bu görev tipinde ilk görev olma özelliği taşıması nedeniyle ilk karşılaşma anı gözlendiği belirtilebilir. Ayrıca çok az da olsa ters fonksiyonla ilgili açıklamalar teknolojik teorik çevreyi oluşturmaya yönelik olarak düşünülebilir. Öğretmen bu görev tipiyle ilgili beş görevi benzer şekilde çözdükten sonra T_{14} görev tipine ilişkin aşağıdaki açıklamaları vermiştir (Şekil 4.35).



Şekil 4.35. *Burak öğretmenin T_{14} görev tipine geçişte kullandığı bilgi*

BÖ: Size yalnız f lazımsa g'yi sağ taraftan birleştiriyorsunuz ki, g gitsin. g ile g'nin tersi. Size burada g lazımsa f'yi sol taraftan (düzeltti) f'nin tersini yazıyorsunuz bileşke şeklinde f'ler birbirini götürüyor, g kalıyor ortada. Kullanışlı bir formül, yazıyorsunuz.

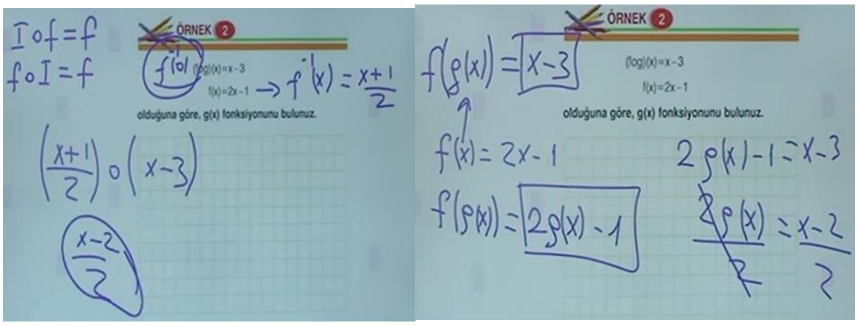
Ö4: Hocam ben anlamadım.

BÖ: Gel bakalım.

Ö4: Hocam şimdi, g olunca buraya (fogog^{-1}=hog^{-1} işaret etti) yazıyorsunuz, f olunca buraya.(f^{-1}ofog=f^{-1}oh gösterdi)

BÖ: Çünkü değişme özelliği yok. Benim f'yi götürmem için f'nin yanına yazmam lazım. (Gülüşmeler) Niye gülüyorsunuz? Çok mantıklı bir soru. Şimdi bize burada g lazımsa, f^{-1} bu yandan birleştirmemiz lazım ki, f'ler yan yana gelsin. f ile f'nin tersi yan yana olmadığı sürece birbirini götürmez. Yani şu f'yi buradan (fog=h ifadesinde sağ tarafı işaret etti) birleştirmemin hiçbir manası yok. Çünkü onun yanında g var.

Bu diyalogda görüleceği üzere, Burak öğretmen kaynak A'da yer alan bilgiyi öğrencilere sunduktan sonra, kısaca kaynakta yer aldığı şekliyle açıklamıştır. Ancak bu açıklamalar dahi incelendiğinde fonksiyonlarla fonksiyonların terslerinin çoğu zaman karıştırılarak ifade edildiği görülmektedir. Ayrıca birleşme özelliği anlamsız bir şekilde parantez olmaksızın kullanılmakta ve fonksiyonla tersinin bileşkesi yanlış bir şekilde ifade edilmektedir. Buradaki özellik diyalogda "*f ile f'nin tersi yan yana olmadığı sürece birbirini götürmez*" şeklinde birleşme özelliği hissedilmeyecek biçimde açıklanmıştır. Dahası birim fonksiyonla herhangi bir fonksiyonun bileşke işlemiyle karşılaşılmasına rağmen buna ilişkin hiçbir açıklama yapılmamıştır. Açıklamalardan görüleceği üzere, cebir alanında grup özellikleriyle ilişki kurularak anlatılabilecek aşamalar atlanarak kural informel biçimde açıklanmıştır. Bu durum gerçekleştirilen didaktik prakseolojinin teknolojik-teorik çevresi sağlam bir şekilde kurulmadan gerçekleştirildiğini göstermektedir. Bundan sonra öğretmen bu görev tipiyle ilgili $t_{14,3}$ ve $t_{14,4}$ görevlerini öğrencilere sunmuştur. Öğretmen bu görevlerden önce bu görev tipiyle ilgili iki görevi başka bir teknik kullanarak çözdüğü görülmektedir. Bu görevler ise, hem önceki teknik hem de yukarıda anlatılan kurala ilişkin teknik olmak üzere iki farklı yaklaşımla çözülmüştür. Aşağıda bu görevlerden $t_{14,4}$ görevine ilişkin didaktik prakseolojiler verilmiştir (Şekil 4.36).



Şekil 4.36. *Burak öğretmenin T_{14} görev tipi ile ilgili* $t_{14,4}$ *görevi*

BÖ: Bakın, burada demin öğrendiğimiz kuralı yapmaya çalışalım. Bize g(x) lazım o yüzden f'yi bu taraftan yani sol taraftan yazacağım. Arkadaşlar, f'nin tersini bulayım ben, (x+1)/2 değil mi?

Öğrenciler: Evet.

BÖ: Arkadaşlar buna bakın dikkat edin. Şu taraftan f^{-1}'i birleştireceğim.

Ö6: Hocam neden?

BÖ: Çünkü f'leri götürmek istiyorum. Bana g(x) lazım. f'yi götürmem için f'nin yanına f'nin tersini yazmalıyım. $\frac{x+1}{2}$ bu f'nin tersiydi bileşke fog dur. Arkadaşlar bu f^{-1} dir, bu da fog dur. f'nin tersiyle f gider geriye g(x) kalır.(Aşağıdaki işlemi yaptı)

$$f^{-1}o(fog)(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)o(x-3) = \frac{x-2}{2}$$

Ö7: …Hocam $\frac{x+1}{2}$'yi x-3'de x yerine bırakmayacak mıyız?

BÖ: Hayır. Her zaman sağdakini solda yerine yazıyoruz. Unutmayın bak onu.

Ö7: Haa, tamam. Onu onun yerine yazacağız.

Ö8: Hocam o ikisini niye yazmadık? ($f^{-1}o(fog)(x)$ ifadesindeki f'nin tersi ve f'i kastetti) Üç tane değer oldu ya.

BÖ: Şimdi üç tane değer oldu ama bu ikisi I yapıyor. I gidiyor. I'yı hangi fonksiyonla birleştirirseniz birleştirin, fonksiyonun kendisini bulursunuz. Iof=f dir. foI=f dir. I etki etmez.

Ö9: Hocam f^{-1}oI?

BÖ: f^{-1}oI=f^{-1} dir. Gençler şunların tamamını siliyorum öteki yoldan yapıyorum. Takip edin. Benim elimde f(g(x))=x-3 var, değil mi? Benim elimde f(x)'de var, değil mi? f(x)=2x-1, değil mi? Peki f(g(x)) ne olur? Dikkat edin, x yerine g(x) yazmam gerekiyor. Takip edin, her elemanı kendisinin 2 katının 1 eksiğine götürüyor. O zaman f(g(x))=2g(x)-1 olur. f(g(x))=2g(x)-1 ve f(g(x))=x-3 Bunlar birbirine eşit olmak zorundadır. Bana g(x) lazım. Eşitleyerek buluyorum. 2g(x)-1=x-3 ise 2g(x)=x-2 buradan g(x)=(x-2)/2 İşte g fonksiyonumuz budur.

Ö7: Bu şekilde daha kolay.

BÖ: Aslında siz diğerini anlamadınız, anlasaydınız, onun daha kolay olduğunu göreceksiniz.

Burak Öğretmenin T_{14} görev tipi ile ilgili $t_{14,4}$ görevine ilişkin didaktik prakseolojiler aşağıda verilmiştir.

- $t_{14,4}$: (fog)(x)=x-3 ve f(x)=2x-1 ise g(x) nedir?
- $\tau_{14,4,1}$: (Cebirsel Teknik 1) *Bana g(x) lazım. f'yi götürmem için f'nin yanına f'nin tersini yazmalıyım…f'nin tersiyle f gider geriye g(x) kalır* [f ve fog fonksiyonlarının bilindiğinden (fog)(x)=h(x) ifadesinde eşitliğin her iki tarafına soldan f^{-1} ile bileşke işlemi uygulanırsa g(x) elde edilir.]
- $\tau_{14,4,2}$: (Cebirsel Teknik 2) *f(x)=2x-1, değil mi? Peki f(g(x)) ne olur? Dikkat edin, x yerine g(x) yazmam gerekiyor. …O zaman f(g(x))=2g(x)-1 olur. f(g(x))=2g(x)-1 ve f(g(x))=x-3 …Eşitleyerek buluyorum. 2g(x)-1=x-3 ise …g(x)=(x-2)/2* [(fog)(x)=h(x) ifadesinde f bilindiği için f(x) fonksiyonunun kuralında x yerine g(x) yazılarak (fog)(x) fonksiyonu g(x) cinsinden bulunur. (fog)(x) fonksiyonu için bulunan değer h(x)'e eşitlenerek g(x) bulunmuş olur.]
- $\theta_{14,4,1}$: *f'nin tersini bulayım ben, (x+1)/2…* [$f(x) = ax + b$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$], *$f^{-1}$'i birleştireceğim* [soldan bileşke işlemi], *Çünkü f'leri götürmek istiyorum…f'yi götürmem için f'nin yanına f'nin tersini yazmalıyım* [fof^{-1}=I ve bileşke işlemi eksik], *Her zaman sağdakini solda yerine yazıyoruz* [bileşke

işlemi] *I'yı hangi fonksiyonla birleştirirseniz birleştirin, fonksiyonun kendisini bulursunuz* [etkisiz eleman özelliği].

- $\theta_{14,4,2}$: *Peki f(g(x)) ne olur? Dikkat edin, x yerine g(x) yazmam gerekiyor.* [değişken değiştirme], *f(g(x))=2g(x)-1 ve f(g(x))=x-3 Bunlar birbirine eşit olmak zorundadır* [A=B ve A=C ise B=C aksiyomu],

Burak Öğretmenin $t_{14,4}$ görevinde iki farklı cebirsel teknik kullandığı görülmektedir. Birinci olarak $\tau_{14,4,1}$ cebirsel tekniğini öğretmenin nasıl gerçekleştirdiği diyalogda "*Bana g(x) lazım. f'yi götürmem için f'nin yanına f'nin tersini yazmalıyım… f'nin tersiyle f gider geriye g(x) kalır*" şeklinde açıklanmaktadır. Burada öğretmen fog=h eşitliğin her iki tarafını f^{-1} ile soldan bileşke işlemi uyguladığı görülmektedir. Ancak f^{-1}o(fog)=f^{-1}oh eşitliğinde birleşme özelliğini anlamsız bir şekilde gerçekleştirmiştir. Dahası tekniğin ilerleyen safhalarında birleşme özelliği sonrasında ortaya çıkacak olan $f^{-1}$of=I ve Iof=f gibi aşamaların atlanarak tekniğin uygulandığı ve bu aşamalara ilişkin yeterli açıklama yapılmadığı belirlenmiştir. Bu yetersiz açıklamalar nedeniyle, birçok öğrenci gerçekleştirilen didaktik prakseolojiye ilişkin öğretmene anlamlandıramadıkları noktaları sorma ihtiyacı hissetmiştir. Öğrencilerin sorduğu sorulara teknolojik açıklama vermesi beklenen öğretmenin bu soruların çözümünü daha önce anlattığı şekilde tekrarlayarak yanıtladığı görülmektedir. Bu sorularda Ö7 bileşke işleminin nasıl gerçekleştiğini, Ö8 yapılan işlemde üç fonksiyon $(f^{-1}o(fog)(x))$ olmasına rağmen neden iki fonksiyonla işlem yapıldığını, Ö9 herhangi bir fonksiyonla birim fonksiyonun bileşkesini sormuştur. Dolayısıyla eksik açıklamalar sebebiyle teknolojik-teorik çevrenin uygun bir şekilde kurulmaması bu tür öğrenci sorularının ortaya çıkmasına neden olmuştur. Burada öğretmen sadece söz konusu kuralları daha önce anlattığı şekilde aynen tekrarlayarak açıklama yapmıştır. Son olarak $t_{14,4}$ görevine ilişkin gerçekleştirilen didaktik prakseolojide tekniklerin uygulanması sürecinde cebir alanına ilişkin teknolojik açıklamalar yapmak mümkün iken (birleşme özelliği, birim eleman özelliği, ters eleman özelliği, vs.) bu tür bir açıklama yapılmadan ve herhangi bir ilişkilendirme vurgusu olmaksızın çözüm gerçekleştirilmiştir. Bu durum birçok ilişkilendirme ve açıklamanın yapılabileceği $t_{14,4}$ görevinin çözümünün öğretmen tarafından anlamsız bir şekilde gerçekleştirildiğini göstermektedir.

Bu görevin tamamlanmasında ilk teknikle ilgili öğrenciler birçok soru sorması nedeniyle, öğretmen öğrencilerin daha önce kullandığı bir teknikle bu görevi çözmeye karar vermiştir. Öğretmenin ikinci tekniği nasıl gerçekleştirdiğini diyalogda "*f(x)=2x-1* *değil mi? Peki f(g(x)) ne olur? Dikkat edin, x yerine g(x) yazmam gerekiyor… f(g(x))=2g(x)-1, f(g(x))=x-3, Bunlar birbirine eşit olmak zorundadır"* şeklinde açıklamıştır. Burada öğretmen f(x)=2x-1 ifadesinde x yerine g(x) yazarak, f(g(x))=2g(x)-1 bileşke işlemine geçiş yapmıştır. Ancak burada yapılan işlem, temelde değişken değiştirme işlemine dayanmaktadır. Öğretmen gerçekleştirilen değişken değiştirme işleminin bileşke ile nasıl bir ilişkisi olduğuna yönelik herhangi bir açıklama yapmadan tekniği gerçekleştirdiği görülmektedir. Öğretim programında değişken değiştirme işlemi 9. sınıf düzeyinde fonksiyon kavramının tanıtılması sürecinde bir açıklama içerisinde birkaç kelimeyle yer almaktadır (MEB, 2013). Bu durum fonksiyon konusunda birçok kavramın (Örneğin bileşke, simetri dönüşümleri, ters fonksiyon, vs) temelinin dayandığı değişken değiştirme kavramının öğretmenlere bırakıldığı hissini uyandırmaktadır. Ancak burada da görüleceği üzere, bu tür bir görevin çözüm sürecinde karşılaşılan örtük durumların farkında olmak ve bunlara yönelik açıklamalarda bulunmak öğretim sürecinde büyük önem taşımasına rağmen deneyimli bir öğretmenin dahi gözünden kaçabilmektedir. Dolayısıyla teknik teknolojisi olmadan ya da eksik bir şekilde yapılandırılmıştır. Daha sonra öğretmen, f(g(x)) ifadesinin hem 2g(x)-1 hem de x-3 olduğunu ifade ederek bunların eşit olması gerektiğini ifade etmiştir. Dolayısıyla burada aynı şeye eşit olan şeylerin eşit olduğu aksiyomu örtük biçimde kullanılmıştır.

Burak öğretmenin $t_{14,4}$ görevine ilişkin gerçekleştirdiği didaktik prakseolojinin bileşenlerinden teknik bileşenine ilişkin bazı aşamaların atlandığı ve dolayısıyla bunlara ilişkin teknolojik açıklamalar yeterli düzeyde yapılmadığı belirlenmiştir. Diğer taraftan bu görevde iki farklı tekniğin kullanılması öğretmenin alternatif görevlere yer vermeye çalıştığını, dolayısıyla teknikler üzerine çalışma anının gerçekleştiğini göstermektedir. Ayrıca öğretmenin diyalogda "*Aslında siz diğerini anlamadınız, anlasaydınız, onun daha kolay olduğunu göreceksiniz"* ifadelerinden bu görevde kullanılan ilk tekniği kurumsallaştırmak istediği anlaşılmaktadır. Ama bunun gerçekleştirilemediği belirtilmektedir. Bundan sonra öğretmen dört görevi daha burada kullanılan ve kurumsallaştırmak istenilen ilk teknikle çözmüştür. Daha sonra bundan önceki görevlerin bileşkeleri niteliğinde bileşke ve ters içeren daha kompleks görevlerden T_{15} görev tipine geçilmiştir. Burak öğretmen, T_{15} görevine ilişkin didaktik prakseolojileri daha önce gerçekleştirdikleriyle büyük ölçüde benzerlik gösterdiğinden bunların detaylı analizine yer verilmemiştir.

4.2.1.3.4. *Burak öğretmenin bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında didaktik prakseolojilerine ilişkin bulgular*

Didaktik prakseolojilerin bileşenleri ile ilgili bulgular

Fonksiyonlarda bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında Burak öğretmenin didaktik prakseolojilerinin bileşenleri, bu süreçte gözlenen anlar ve karşılaşılan ekolojik sorunlar Tablo 4.14'te verilmiştir.

Tablo 4.14. *Burak öğretmenin bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında prakseolojik bileşenler ve anlar*

Görev	Teknik*	Teknoloji	Gözlemlenen Anlar**	Ekolojik Sorunlar
$t_{1,1}$	E	Yok	-	-
$t_{1,4}$	C	Kısmen	İK→K	-
$t_{1,22}$	1.C1 2.C2	Yeterli	K→TTÇO→TÇ	-
$t_{2,1}$	C	Kısmen	İK→TTÇO→K	Polinom eşitliği
$t_{3,1}$	C	Yok	İK→ K	Üstel fonksiyon
$t_{4,1}$	E	Kısmen	İK→K→TTÇO	-
$t_{5,1}$	E	Kısmen	İK→K→TTÇO	-
$t_{6,1}$	E	Kısmen	İK→K→TTÇO	-
$t_{8,1}$	E	Kısmen	İK→K→TTÇO	-
$t_{9,1}$	C	Kısmen	İK→TTÇO	Mantık (Niceleyiciler ve bileşik önerme)
$t_{9,3}$	1.C1 2.C2	Kısmen	TTÇO →K→TÇ	-
$t_{10,1}$	C	Yok	İK→TTÇO	-
$t_{10,4}$	C	Kısmen	TTÇO	Bileşke işlemi (Monoid yapısı)
$t_{11,1}$	G***	Kısmen	İK→K→TTÇO→GTK&TG	-
$t_{12,1}$	1.C1 2.C2	Kısmen	İK→TÇ→TTÇO	Bileşke işlemi (Monoid yapısı)
$t_{13,1}$	C	Yok	İK	Bileşke işlemi (Monoid yapısı)
$t_{14,1}$	C	Kısmen	İK→TTÇO	-
$t_{14,4}$	1.C1 2.C2	Kısmen	TÇ→TTÇO→K	-

* G: Geometrik teknik, C: Cebirsel teknik, E: Eşleme tekniği

**İK: İlk Karşılaşma, GTK&TG: Görev Tiplerini Keşfetme ve bir Teknik Geliştirme, TTÇO: Teknolojik-Teorik Çevrenin Oluşturulması, TÇ: Tekniksel Çalışma, K: Kurumsallaştırma, D: Değerlendirme,

*** Doğruyu karekterize eden noktaların belirlenmesiyle grafik çizilmesine ilişkin geometrik teknik.

Burak öğretmen bu alt başlıkta neredeyse bütün görevleri ders kitabından seçmiştir. Bazı görevlerde fonksiyonun sadece belli temsillerine yer verilmiştir. Örneğin fonksiyonun tersinin bulunmasında kritik bir öneme sahip olan bire bir ve örtenlik sadece şema temsiliyle sunulmuştur. Ancak bu alt başlıkta cebirsel temsillerin ağırlıklı olarak sunulduğu ve bu doğrultuda cebirsel tekniklerin yaygın olarak kullanıldığı görülmektedir. Ancak cebirsel temsille verilen görevlerin bire bir ve örtenliğine ilişkin incelemelerde bulunulmadığı belirlenmiştir.

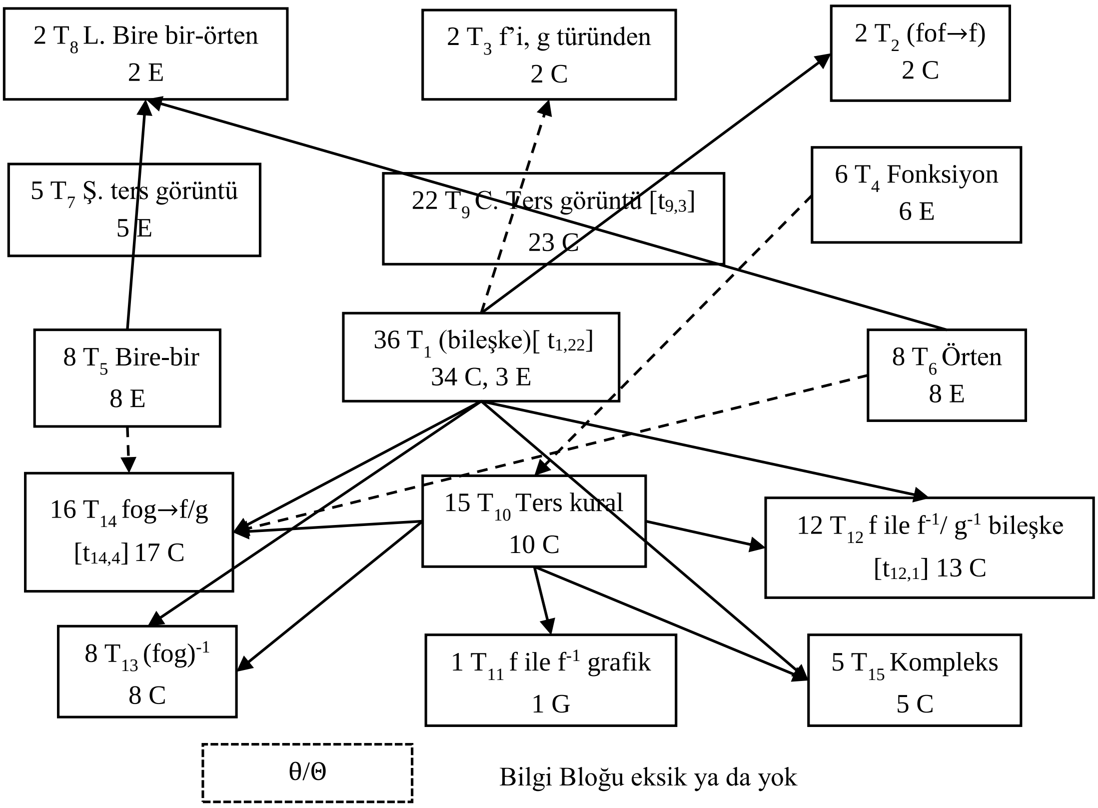
Cebirsel tekniklerle tamamlanan görevlerde fonksiyonun cebirsel temsillerle verildiği tespit edilmiştir. Şema temsiliyle verilen görevlerde ise eşleme tekniği kullanıldığı göze çarpmaktadır. Buradan hareketle görevin verildiği temsille görevin sonuçlandırılmasında kullanılan teknik arasında bir ilişki olduğu söylenebilir. Diğer taraftan bu alt başlıkta geometrik tekniklerden biri sadece $t_{11,1}$ görevinde üretilmiştir.

Bu alt başlıkta tekniklerin uygulanma sürecinde bazı aşamaların öğretmen tarafından bilinçli bir şekilde atlanarak uygulandığı tespit edilmiştir. Bu tür durumlar özellikle cebirsel olarak verilen fonksiyonların terslerinin kuralının bulunmasıyla ilgili görev tiplerinde açık bir şekilde ortaya konulmuştur (örneğin $t_{10,1}$ ve $t_{10,4}$ görevleri). Bu tür durumların ortaya çıkmasına tekniğin aşamalarının azaltılarak basitleştirilmesi ve böylelikle daha kolay uygulanması neden olduğu söylenebilir. Ancak bunlar matematiğin anlamlı öğrenilmesini engelleyen unsurlar olarak görülmektedir. Burada ters fonksiyonun bileşke işlemi üzerinden alınmaması ve bu sayede monoid yapısıyla ilişkilendirme yapılamaması bunun en çarpıcı örneğidir.

Teknoloji bileşeni açısından görevler incelendiğinde genellikle informel açıklamalar ve büyük ölçüde eksik açıklamalar sunulduğu görülmektedir. Ayrıca bir önceki paragrafta belirtilen tekniklerin aşamalarının atlanılması ve matematiksel kavramlar arasında ilişkiler anlamlı bir şekilde organize edilmemesinin bir sonucu olarak tekniklerin açıklamalarında da verilmesi gereken açıklamaların yetersiz kaldığı tespit edilmiştir. Bu alt başlıkta teknolojik açıklamalara ilişkin eksikliklerden bazıları:

1. Cebirsel temsille verilen görevlerde fonksiyonun ters kuralının bulunmasında fonksiyonun bire birliğine ilişkin inceleme yapılmaması,
2. Cebirsel temsille verilen görevlerde fonksiyonun ters kuralının bulunmasında fonksiyonun örtenliğine ilişkin inceleme yapılmaması,
3. Fonksiyonun tersinin kuralının bulunması sürecinde değişken değiştirmenin anlamsız bir şekilde açıklanması,
4. Fonksiyonun tersinin kuralının bulunması sürecinde bazı aşamaların atlanması ve bunlara ilişkin açıklama yapılmaması,
5. Bileşke işleminin özelliklerinin doğru bir şekilde uygulanmaması ve bunlara yönelik açıklamaların verilmemesidir.

Burak öğretmenin bu alt başlıkta gerçekleştirdiği didaktik prakseolojinin bileşenleri arasındaki ilişki Şekil 4.37'de verilmiştir. Bu sayede fonksiyonların öğretiminde bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında öğretmenin başvurduğu görev tiplerinin birbiriyle ilişkisi ortaya çıkarılmaktadır.



Şekil 4.37. *Burak öğretmenin bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler arasındaki ilişkiler*

Bu alt başlıkta prakseolojik bileşenler arasındaki ilişkiler Şekil 4.37'de ortaya konulmaktadır. Görev tiplerinin birbirini desteklemediği, ilişkilendirmenin çok düşük düzeyde (kesikli oklar) kaldığı, ilişkilendirmenin yapıldığı durumlarda (kesikli olmayan oklar) ise yeterli sayıda ilişkilendirme yapılmadığı ve görev tiplerinin parçalanmış biçimde öğretilmeye çalışıldığı anlaşılmaktadır. Fonksiyonların ters görüntülerini bulmaya ilişkin görev tiplerinin hiçbir görev tipi ile ilişkisi kurulmadığı göze çarpmaktadır. Diğer önemli durum fonksiyonun ters kuralının belirlenmesine ilişkin prakseolojilerin bileşke işlemi ile ilgili prakseolojilerle ilişkilendirilmeden organize edilmesi şeklinde açıklanabilir.

Didaktik anlar ile ilgili bulgular

Burak öğretmenin bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında didaktik anlardan bazılarına yer vermediği ve yer verdiği anlarda ise eksiklikler olduğu belirlenmiştir. Didaktik anlardan ilk karşılaşma anı görev tiplerinin çoğunda yaşanmıştır. Öğretmenin genellikle bir görev tipiyle ilgili tekniğin ifadesini (teknik geliştirme anı değil) vererek öğretime başladığı bunun neticesinde görev tiplerini *keşfetme* ve görev tiplerine ilişkin bir *teknik geliştirme anı*nı işlevsiz kıldığı anlaşılmaktadır. Tekniğin uygulanma sürecinde *teknolojik-teorik çevre oluşturma anına* ilişkin informel ya da sözel açıklamalar dışında öğretmen teknolojik açıklama yapmadığı tespit edilmiştir. Tekniksel çalışma anı bazı görevde gözlenmiş ($t_{1,22}$, $t_{9,3}$, $t_{12,1}$ ve $t_{14,4}$ görevleri), ancak bu alt başlıktaki bütün görevler dikkate alındığından bunun çok düşük düzeyde kaldığı söylenebilir. Bu da görevlerin tamamlanmasında alternatif tekniklere bu alt başlıkta yeterince yer verilmediğini göstermektedir.

Kurumsallaştırma anı, sınırlı sayıda da olsa gözlenmiştir. Matematiksel eylemlerde kurumsallaştırma özellikle 9. sınıfta öğretildiği düşünülen değişken değiştirme, doğrusal fonksiyonun grafik çizimi, bire bir ve örtenlik, fonksiyon belirtme gibi durumlarda ortaya çıkmıştır. Yine bazı görev tiplerinde (örneğin T_{10} görev tipi) tekniklerin matematiğin tutarlı ve ilişkili bir şekilde öğretilmesini zorlaştıracak şekilde kurumsallaştırılmak istendiği tespit edilmiştir. Tüm bu açıklamalar birlikte düşünüldüğünde Burak öğretmenin fonksiyon öğretiminde bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığındaki matematiksel eylemlerde didaktik anlardaki eksiklikleri nedeniyle didaktik yapı sürecini iyi organize edemediği söylenebilir.

Didaktik prakseolojide ekolojik sorunlara ilişkin bulgular

Burak öğretmenin fonksiyon öğretiminde bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında bazı görevlerin tamamlanma sürecinde ekolojik sorunlarla karşılaşıldığı görülmektedir ($t_{2,1}$, $t_{3,1}$, $t_{9,1}$, $t_{10,4}$, $t_{12,1}$ ve $t_{13,1}$ görevleri). Bu ekolojik sorunlar iki kısma ayrıldığı belirlenmiştir.

Birincisinde tekniğin uygulanma sürecinde belirli bir aşamaya gelindiğinde programda fonksiyonlardan daha sonra gelmesi nedeniyle polinom eşitliği, üstel fonksiyon, bileşik önermeler gibi henüz anlatılmayan kavramların kullanılması şeklinde ortaya çıkmıştır. Bu tür ekolojik sorunlarda öğretmenin yeterli açıklama yapmadığı görülmektedir. Tekniğin uygulanma sürecinde genellikle ekolojik sorunla karşılaşılan aşamalarda öğretimde zorluklar yaşandığı tespit edilmiştir (örneğin $t_{2,1}$ görevinde polinom eşitliği ile karşılaşıldığında).

İkincisi ise programda fonksiyonun tersinin bileşke işlemi üzerinden alınması istenmesine rağmen öğretmenin didaktik prakseolojilerinde bu tür bir ilişkilendirme olmaksızın prakseolojinin inşa edilmesi şeklinde ortaya çıkmıştır. Öğretmen fonksiyon konusunun öğretiminde alt başlıkların sıralamasında önce bileşke işlemini, sonra ters fonksiyonu daha sonra ise fonksiyonla tersinin bileşkesini vermiştir. Bu sıralama fonksiyonun tersinin bileşke işlemi üzerinden gerçekleştirilmesine de uygundur. Ancak öğretmenin ters fonksiyonu bileşke işlemi üzerinden vermediği tespit edilmiştir. Bu ters fonksiyonun matematiğin cebir alanıyla bağlantı kurulmasını zorlaştırmaktadır. Bu durumun matematikçilerin bilgisiyle öğretilen bilgi arasında boşluk meydana getirdiği söylenebilir.

4.2.1.4. Burak öğretmenin fonksiyonlar konusuyla ilgili sahip olduğu didaktik prakseolojiler

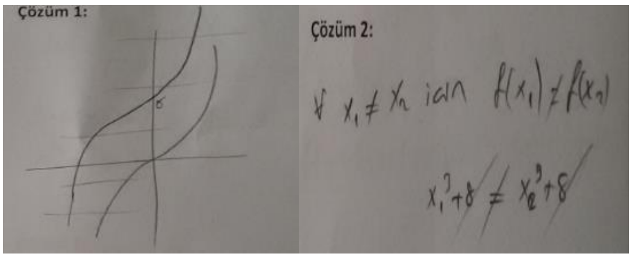
Bu bölümde Burak öğretmene araştırmacı tarafından fonksiyon konusuyla ilgili 17 adet görev verilmiştir. Bu görevlerde fonksiyonun tanım kümesini belirleme, fonksiyon türleri, bire bir ve örten fonksiyon, fonksiyonlarda dört işlem, tek ve çift fonksiyon, ters fonksiyon, bileşke fonksiyon, fonksiyonların simetri dönüşümleri, fonksiyonlarda uygulamalar şeklinde alt başlıklar incelenmiştir. Bu doğrultuda her bir alt başlıkla ilgili en az bir görev hazırlanarak bu görevleri öğretmenin bildiği bütün tekniklerle tamamlaması istenmiştir. Burak öğretmene fonksiyon konusuyla ilgili alt başlıklarda kaç görev verildiği ve ilgili görev tipinin ifadesi Tablo 3.3'de belirtilmiştir (Bkz. Tablo 3.3).

Tablo 3.3'deki görevler incelendiğinde fonksiyon konusunun öğretiminde temel görev tiplerine ilişkin görevlere yer verildiği söylenebilir. Bu görevler az iki yolla tamamlanacak şekilde tasarlanmıştır. Bu görevleri sonuçlandırmak için öğretmenden bildiği her tekniği kullanması istenerek, Burak öğretmenin belirlenen görevlere ilişkin sahip olduğu didaktik prakseolojiler ortaya çıkarılmıştır. Öğretmen bu görevlerde en çok 4 teknik kullandığı görülmektedir. Bu görevler toplam 31 teknikle tamamlanmıştır. Bunların 21 tanesi cebirsel, 8 tanesi geometrik ve 2 tanesi nümerik ağırlıklı teknikler olarak belirlenmiştir. Öğretmen bu tekniklerden soru 7'de kullandığı cebirsel tekniği doğru kullanmasına rağmen yanlış yorumladığı görülmektedir. Diğer görevlerde teknikler doğru sonuçlandırılmıştır.

Bu görevleri öğretmenin tamamlaması istendikten sonra görüşme yapılarak didaktik prakseolojilerde kullanılan bileşenler açığa çıkarılmıştır. Bu yüzden bu bölümde öğretmenin görevlere ilişkin didaktik prakseolojileri görüşmelerden alıntılar yapılarak desteklenmiştir. Burada bütün görevleri vermek yerine araştırma kapsamında araştırmanın bulgularını destekleyecek şekilde gerçekleşen görevlerin prakseolojik analizlerine yer verilecektir. Bu doğrultuda bu problemlerden dördünün prakseolojik analizine yer verilmiştir.

Bu görevlerden görev 1'de öğretmenin araştırma kapsamında birçok görevde verilen fonksiyonların bire bir olduğu belirtilmesine rağmen bu konuda yeterince açıklama yapmaması üzerine sorulmuştur. Görev 2'nin prakseolojik analizine yer verilmesinde simetri dönüşümlerinde öğretmenin sınıf uygulamalarında gerçekleştirdiği didaktik prakseolojilerle sahip olduğu prakseolojiler arasında bir karşılaştırma yapılmak istenmiştir. Görev 3'te günlük yaşamda problem durumunda fonksiyonların ne ölçüde öğretmen tarafından bir araç olarak kullanılabildiğini anlamak hedeflenmiştir. Son olarak görev 4, öğretmenin fonksiyonların tersine ilişkin bir görevde sınıf uygulamalarında sergilediği prakseolojilerle sahip olduğu prakseolojiler arasında karşılaştırma yapmak için yöneltilmiştir. Aşağıda sırayla bu görevlerin detaylı prakseolojik analizi verilmiştir.

Görev 1: Reel sayılarda tanımlı f fonksiyonunun kuralı, $f(x) = x^3 + 8$ şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre f fonksiyonunun bire birliği ile ilgili ne söylenebilir? Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamaları Şekil 4.38'de verilmiştir.



Şekil 4.38. *Burak öğretmenin görev 1 ile ilgili uygulaması*

BÖ: Bire birliğiyle ilgili ne söyleyebiliriz? Bire bir fonksiyon, kare olmadıktan sonra sıkıntı yok. Yani, çift kuvvet olmadıktan sonra her elemanın farklı bir görüntüsü olur. O yüzden bire birdir.

A: Nasıl ispatlarsınız hocam?

BÖ: Şeyden, x^3 zaten şudur. ($y=x^3$ çizdi)

A: Temel grafiklerden mi yararlanacaksınız?

BÖ: 8 br yukarıya kaldırsak yine bununla benzer olacaktır.

A: Bire bir midir?

BÖ: Bire birdir. Çünkü yatay doğru testi yaptığımız zaman her seferinde tek bir noktada kesiyor. Dolayısıyla bire birdir.

A: Başka bir çözüm yapabilir miyiz?

BÖ: Bir de şey desek, hani kare olduğunda iki sayının karesi aynı sayıya gidiyor. Ama küp olduğunda her sayının küpü farklı buna 8 eklesem de bir şey değişmez. Dolayısıyla bire birdir. Bunu nasıl anlatacağız? (Düşünüyor) $\forall x_1 \neq x_2$ *iken* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *çıkıyor.*

A: Olur mu? Nasıl ispatladınız hocam.

BÖ: Çünkü $x_1 \neq x_2$ *iken* $x_1^3 + 8 \neq x_2^3 + 8$ *dir. Küpünü aldık 8 ekledik. Çıkıyor hakkaten. Bir birinden farklılar. Bire birdir.*

A: Başka bir çözüm düşünebilir misiniz hocam?

BÖ: Benim aklıma gelmiyor.

Bu görev tipiyle ilgili öğretmenin iki farklı didaktik prakseoloji verdiği görülmektedir. Birinci didaktik prakseolojide öğretmenin bire bir olduğunu bildiği bir referans grafikten hareketle ($y=x^3$ fonksiyonunun grafiği), bu grafiğin y ekseninde 8 br yukarı yönde ötelenmesiyle elde edilen grafiğin de bire bir olacağını düşündüğü anlaşılmaktadır. Burada geometrik bir teknik kullanılmıştır. Bu teknikte temelde izometrik dönüşümlerden öteleme dönüşümünün bire bir olma özelliğini koruduğu örtük bir şekilde uygulanmıştır. Bu tekniğin teknolojisinde ise referans fonksiyonun ve öteleme dönüşümü gerçekleştirildikten sonra elde edilen fonksiyonun grafiğinin niçin bire bir olarak düşünüldüğü yatay doğru testi gereğince açıklanmaya çalışıldığı belirlenmiştir. Bu testin nasıl işlediği Şekil 4.38'de soldaki resimde gösterilmiştir. Ancak buna ilişkin ayrıntılı açıklama yapılmamıştır. Burada yatay doğru testi, fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta y eksenine paralel olarak çizilen bütün doğruların fonksiyonun grafiği en çok bir noktada kesmesi gerektiği şeklinde ifade edilebilirdi.

İkinci didaktik prakseolojide cebirsel tekniklerin kullanıldığı görülmektedir. Öğretmen bu tekniği "*…her sayının küpü farklı buna 8 eklesem de bir şey değişmez. Dolayısıyla bire birdir.*" şeklinde informel biçimde açıklamıştır. Burada tanım kümesinden alınan herhangi bir reel sayının küpünün alındığında sonucun başka reel sayıların küpünden farklı olduğu vurgulanmıştır. Devamında buna sabit bir sayının eklenmesinin bu farklılığı değiştirmeyeceği ifade edilerek verilen fonksiyonun bire bir olduğu belirtilmiştir. Bu durumun niçin her zaman geçerli olduğuna ilişkin teknolojik açıklama bir fonksiyonun bire bir olmasının cebirsel ifadesine atıfta bulunularak, ispat yöntemlerinden doğrudan ispat yöntemini kullanarak kanıtlamıştır. Burak öğretmenin bu iki yaklaşımdan hangisini kurumsallaştırdığı bu noktada önemli görülmektedir. Uygulama sonrası yapılan son görüşmede öğretmenin bir fonksiyonun bire birliğine ilişkin hangi çözüm yaklaşımını kullanma eğiliminde olduğu ve bunun nedenleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Aşağıdaki diyalogda bu durum açıklanmaktadır.

A: Mesela grafiksel de yapılabilir değil mi?...Mesela cebirsel ispatları da var ona girmek istiyorum da. Bire birlik ne idi? $\forall\, x_1, x_2 \in R, f(x_1) = f(x_2)\ ise\ x_1 = x_2.$

BÖ: Evet

A: Böyle bir yaklaşıma giriyor musunuz derste?

BÖ: Çok fazla girmemeye çalışıyorum. Çünkü çocukların kafası karışıyor diye düşünüyorum.

A: Aslında şunu merak ediyorum ben, çocukların kafasını hangi kısım karıştırıyor.

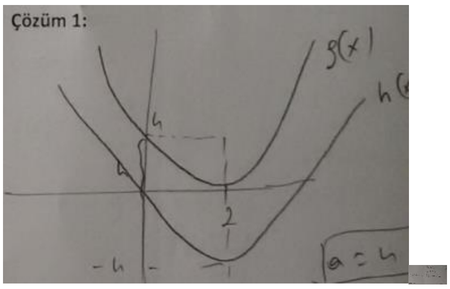
BÖ: Aslında ispat yöntemleri var ya onları biraz yani biz üniversitede öğrendiğimizi burada uygulamıyoruz, uygulayamıyoruz. Bunları ben ilk göreve başladığım senelerde uyguluyordum. Çocuklar biraz şey yapıyordu yani hani sürekli böyle bir görselliğe bakıyorlar. Zaten anlamak için ekstra bir çaba göstermiyorlar. Onun bilincinde oluyoruz. Onu fark ediyoruz. Öyle olunca mümkün mertebe en kolay yol nasıl onu biz de şey yapmaya çalışıyoruz. Zaten akademik olarak bu çok doğru bir şey değil ama iyi anlasın diye böyle bir şey yapıyoruz.

A: Grafiksel yaklaşımı tercih ediyor musunuz hocam?

BÖ: Tabii, bire birlik bu düşey doğru testi falan var şey yatay doğru testi. Yatay doğru testini verdik zaten anlattık. Bu sadece fonksiyonun bire bir olup olmadığıyla alakalı. Onu şey yapıyoruz. Çocuk bire bir mi değil mi? Onu sorguluyorsa grafikleri şey yapıyoruz.

Bu açıklamalardan görüleceği üzere, bir fonksiyonun bire birliğine ilişkin Burak öğretmenin 2 farklı teknik ortaya koyduğu anlaşılmaktadır. Ancak öğretmenin yatay doğru testi olarak ifade ettiği tekniği zaman içerisinde kurumsallaştırdığı anlaşılmaktadır. Öğretmenin bu tekniği kullanmasında görsel olması ve öğrencilerin daha kolay anlaması etkenlerin etkili olduğu belirlenmiştir. Öğretmenin cebirsel tekniği öğretmenliğinin ilk yıllarında kullandığını belirtmesine rağmen şimdilerde bu tekniği ispat yöntemlerini içermesinden dolayı tercih etmediği görülmektedir. Bu durumun ortaya çıkmasında ispatları öğrencilerin anlamaması neden olduğu ifade edilmiştir. Burada mantık konusunun yeni programda 11. sınıfta anlatılması ve ispat çeşitlerinin bu konu içerisinde yer almasının etkili olduğu düşünülmektedir. Sonuç olarak öğretmenin fonksiyonun bire birliğini cebirsel olarak ispatlandığı tekniği zaman içerisinde terk ettiği anlaşılmaktadır. NCTM (2000) ortaöğretim düzeyinde öğrencilerin seviyelerine uygun ispat yapabilmeleri gerektiğini belirtmesine rağmen Burak öğretmenin fonksiyon öğretiminde bunun tam tersi bir öğretim yaklaşımı tercih ettiği belirlenmiştir.

Görev 2: Tepe noktası (0,0) ve grafiğin kolları yukarı yönde olan ikinci dereceden bir f fonksiyonu (-2,4) ve (2,4) noktalarından geçmektedir. f fonksiyonunun g ve h fonksiyonları arasında g(x)=f(x-2) ve h(x)=g(x)-a şeklinde bir ilişki vardır. h fonksiyonunun orijinden geçtiği biliniyorsa a değeri kaçtır? Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamaları Şekil 4.39'da verilmiştir.



Şekil 4.39. *Burak öğretmenin görev 2 ile ilgili uygulaması*

BÖ: Şimdi birinci durum şudur. x'i 2 br sağa öteledik. Şöyle bir şey olur. Şurası 4 tür. Bu g(x), g(x)'i a br aşağı doğru a'yı pozitif alırsak, orijinden geçti. Tamam, grafiğin aynısını alacağız, aşağı doğru getireceğiz.

A: Nasıl aşağı doğru kaydırılırsa orijinden geçer?

BÖ: Ancak 4 br aşağı indirirsek, orijinden geçer, a=4 tür. (Grafiği çizdi)

A: Bu birinci yol, başka var mı hocam?

BÖ: Başka…(düşünüyor) Şöyle düşünebiliriz, h(x) orijinden geçiyorsa h(0)=0 sağlar. Yani, g(0)-a=0 dır. O zaman g(0)=a dır. g(0) aynı zamanda f(-2) dir. Bu da 4 tür. (g(0)=f(-2)=4)

A: Başka var mı?

BÖ: Mümkün değil, aklıma gelmez.

Bu görevde öğretmen iki farklı teknikle görevi tamamlamıştır. Birinci teknikte y=f(x) fonksiyonunun grafiği x ve y eksenlerinde ötelenerek tamamlanmıştır. Bu doğrultuda geometrik ağırlıklı bir tekniğin kullanıldığı görülmektedir. Burada öteleme sonucu yine parabol grafiği çizilmesi öğretmenin örtük olarak öteleme dönüşümünün verilen fonksiyonun grafiğin karakterini bozmadığını bildiği şeklindedir. Bu durumu destekler nitelikte diyalogda "*…grafiğin aynısını alacağız…*" şeklindeki açıklamasında da grafiğin parabol yapısının değişmediği vurgulanmıştır. Çünkü f fonksiyonunda (-2,4) noktası ve (0,0) tepe noktası 2 br sağa ötelendiğinde yine parabol olan g fonksiyonu elde edilmekte ve g fonksiyonunun sırayla (0,4) noktasıyla ve (2,0) noktasıyla ilişki kurulduğu anlaşılmaktadır. Daha sonra benzer şekilde g fonksiyonunun y ekseninde aşağı yönde "a" br ötelenmesiyle h fonksiyonunun elde edildiği görülmektedir. Öğretmen h fonksiyonunun grafiğinin orijinden geçtiğini bildiğinden g fonksiyonda (0,4) noktasının (0,0) noktasına gelmesi gerektiği düşüncesiyle ötelemenin y ekseninde 4 br olması gerektiğini ifade etmiştir. Dahası g fonksiyonunun grafiğinin (2,0) tepe noktası dönüşüm sonrasında (2,-4) olarak bulunmuştur. Bu durum her üç grafikte de parabollerin tepe noktasıyla belli bir nokta (f fonksiyonunda (-2,4) noktası, g fonksiyonunda (0,4) noktası ve h fonksiyonunda (0,0) noktası) arasındaki uzaklığın değişmediği ve sabit olduğu görülmektedir. Bu da örtük olarak öteleme dönüşümünde uzaklığın korunduğunu göstermektedir. Yani öğretmen öteleme dönüşümünü izometrik bir dönüşüm olarak ifade etmemesine rağmen uzaklığı koruduğunun farkında olduğunu bildiği söylenebilir.

İkinci didaktik prakseolojide ise grafik yorumundan yararlanarak önce eşleme tekniğiyle bazı sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra bunlar görevde verilen fonksiyonlara uygulanarak görevin tamamlandığı görülmektedir. Bu doğrultuda eşleme ve cebirsel tekniğin birlikte kullanıldığı anlaşılmaktadır. Bu tekniğin uygulanması sürecinde de teknolojik açıklamaya rastlanmamıştır. Bunun nedeni bu teknikte kullanılan kavramların biliniyor olmasından kaynaklanmakta olduğu belirtilebilir.

Bu görev f fonksiyonunun kuralı $f(x)=x^2$ olarak elde edildikten sonra değişken değiştirme yoluyla $g(x)=(x-2)^2$ ve buradan $h(x)= (x-2)^2-a$ şeklinde elde edilebilirdi. Görevde h fonksiyonunun orijinden geçtiği bilgisinden görev cebirsel teknikle sonuçlandırılabilirdi. Ancak bu tekniğin kullanılmadığı görülmektedir. Bu alternatif tekniği öğretmenin neden kullanmadığı sorulduğunda bunu bilmekle birlikte öğretmen o an bu çözümü hatırlayamadığını belirtmiştir. Uygulama sonrası yapılan üçüncü görüşmede öğretmenin bu konudaki düşünceleri aşağıda verilmiştir.

A: Yani bir grafik yorumundan bir de ötelemeden çözmüşsünüz soruyu. Fakat burada dikkat ederseniz ikinci dereceden bir fonksiyon diyor. $y = x^2$*olduğu belli. Bunu bulduktan sonra f(x-2)'yi bulup cebirsel olarak daha sonra da "a" bulunabilirdi. Bu yola hiç girmemişsiniz… Burada cebirsel yolu neden kullanmadınız? Sorunun veriliş tarzı önemli mi?*

BÖ: Yaa, artık bizde yavaş yavaş çocukların bakış açısına sahip oluyoruz. Yani soru çöze çöze. Ee yani bir soruya en kısa nereden ulaşabilirim mantığıyla yaklaşıyor insan.

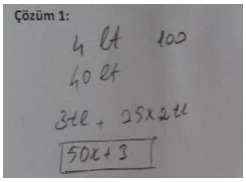
A: Evet

BÖ: O esnada dediğiniz şekil $y = x^2$ *hiç aklıma gelmemiş olabilir. Bir de özellikle parabol konusuna daha hala gelmedik. Bunları tekrar anlatacağız ama dediğiniz gibi soru nasıl sorulmuşsa özellikle oraya odaklanmaya çalışıyoruz.*

Bu açıklamalardan da görüleceği üzere, öğretmen görevin veriliş temsiline (örneğin grafik temsiline) yakın tekniklerle görevi tamamlama eğilimindedir. Ayrıca görevi en kısa yoldan sonuçlandırma gayreti içerisinde olduğu anlaşılmaktadır. Ancak bir görevi en kısa yoldan sonuçlandıracak tekniklerin öğrenciler için ne ölçüde uygun olduğu didaktik açıdan tartışmalıdır.

Herhangi bir görevin simetri dönüşümleriyle tamamlanabildiği durumda öğretmenin görevde ilk olarak bu tekniği tercih etmesi geometrik tekniği bildiğini göstermektedir. Ancak bu tekniğin nasıl uygulandığına ilişkin çok fazla açıklama yapmadığı görülmektedir. Bu anlamda teknik uygulanmakta ancak tekniğin uygulanmasına ilişkin açıklamalar yeterli düzeyde verilmemektedir. Bunlar genellikle örtük bir şekilde kullanılmaktadır. Dolayısıyla bu görevde gerçekleştirilen didaktik prakseolojilerde geometrik tekniğe ilişkin teknolojik açıklamalar eksik bir şekilde gerçekleştirilmektedir. Diğer taraftan öğretmen bu görevde cebirsel tekniği bildiğini ifade etmiş ancak onu o an hatırlayamadığını beyan etmiştir. Bu anlamda öğretmenin bilgisinin yapılan çözümlerle sınırlandırılmaması gerektiği ve bunun daha ötesinde bir didaktik prakseolojiye sahip olduğu söylenebilir.

Görev 3: Bir ticari taksi kat ettiği her 100 km'de 4 litre benzin tüketmektedir. Taksi metrenin açılışı 3 lira olan bu takside, gidilen her km 2 lira olarak ücretlendirilmektedir. Deposunda 40 litre benzin bulunan bu taksiyle seyahate çıkan bir kişinin, taksinin harcayacağı benzin miktarına karşılık taksiciye ne kadar ödemesi gerektiğini ifade eden fonksiyonu bulunuz? Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamaları Şekil 4.40'ta verilmiştir.



Şekil 4.40. *Burak öğretmenin görev 3 ile ilgili uygulamaları*

BÖ: (problemi okudu) 100 km 4 litre gidecek. 4 litreye karşılık 100 km gidiyorsa 40 litreye karşılık…Ama ne kadar harcayacağımızı bulacağız.

A: x litre harcasa ne kadar para verecek aslında. Sorulan şey o aslında burada. Toplam 40 litre gitsin demiyor. Mesela x litre benzin harcasa ne kadar gider, ona da ne kadar öder? Gidilen x'e karşılık fonksiyon nedir?

BÖ: Açılış 3 tl, değil mi? Artı her litre başına (her km demek istedi) 2 tl gidiyor. Litrede ne kadar gidiyor? Bir litrede 25 km gidiyor. Bir litrede 25 km 25x olur.

A: Her km için 2 lira ödüyor.

BÖ: Çarpı 2 olur. (3 tl+25x·2 tl yazdı) Fonksiyonun ifadesini istiyor, değil mi? 50x+3 tür.

A: Başka bir yoldan çıkar mı hocam?

BÖ: Aaa şimdi bilmiyorum. Benim pek aklıma gelmedi.

A: Biraz düşünün isterseniz. Ben size zaman vereyim.

BÖ: Acaba kalan benzin miktarından şey yapabilir miyiz? Her litrede 25 km gidiyor. x km gittiğini düşünürsek, 40-x olacak değil mi? Bunu sonraya bırakalım.

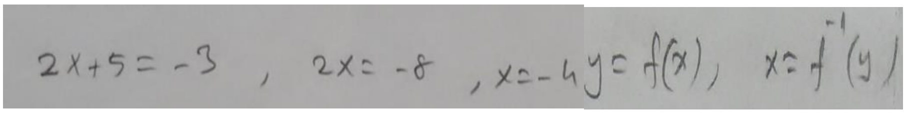
Bu görevi öğretmenin orantı kullanarak cebirsel teknikle tamamlandığı görülmektedir. Örneğin "bir litrede 25 km gidiyorsa ise x litrede 25x km gider" ve "her litre için 2 lira ödüyorsa 25x km için 50x öder" ifadelerinde orantı kullanarak cebirsel ifadeler elde etmiştir. Diğer taraftan öğretmenin buradaki fonksiyonel yaklaşımı göremediği uygulama sonrası yapılan görüşmede aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

A: 4 litreyle 100 gidiliyorsa 1 litreyle 25 diye düşünmüşsünüz. (Onun yaptığı işlemleri hatırlatıyorum) x litre de 25x gibi düşünmüşsünüz. Daha sonra bunu 2 ile çarpmışsınız. Artı 3 deyip soruyu çözmüşsünüz. Fonksiyonel olarak niye yaklaşmadınız da bu tarz bir yaklaşım tercih ettiniz? Onu merak ettim.

Ö: Ben onu görememişim. Şimdi de pek göremedim.

Öğretmen burada fonksiyonel yaklaşımı göremediğini ifade etmiştir. Bu görev fonksiyonel yaklaşım kullanılarak bileşke fonksiyon çerçevesinde tamamlanabilirdi. Taksinin benzin tüketimine karşılık gidilen yol f fonksiyonuyla ve gidilen yola karşılık ödenen para g fonksiyonuyla gösterilirse, f(x)=25x ve g(x)=2x+3 şeklinde elde edilir. Görevde benzin tüketimine karşılık verilmesi gereken para istendiğinden gof fonksiyonu sorulmaktadır. O halde (gof)(x)=(2x+3)o(25x)=50x+3 şeklinde elde edilebilirdi. Ancak bu teknik ortaya çıkmamıştır. Öğretmenin bileşke fonksiyonu bilmesine rağmen bunu gerçek yaşam problemlerinde kullanamadığı görülmektedir. Buradan gerçek yaşam görevlerinden biri olarak ifade edilebilecek bir görevde, Burak öğretmenin sözel temsille verilen ve iki fonksiyonun bileşke işlemini içeren bir görevi cebirsel teknik olarak uygulamada fonksiyonlar kullanılarak sonuçlandırılamadığı belirlenmiştir. Bu durum öğretmen tarafından belli bir temsilde bilinen bir kavramın (bileşke işleminin cebirsel olarak uygulanması) başka bir temsile transferinin gerçekleştirilememesini ortaya koymaktadır. Dolayısıyla görevlerde farklı temsillerin kullanılması bazı tekniklerin gerçekleştirilememesiyle sonuçlanabilmektedir.

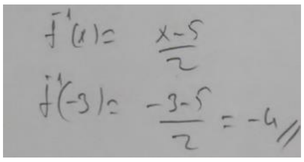
Görev 4: $f: R \to R$ ve $f(x) = 2x + 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f^{-1}(-3)$ değeri kaçtır? Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamalarından birincisi Şekil 4.41'de verilmiştir.



Şekil 4.41. *Burak öğretmenin görev 4 ile ilgili uygulamaları teknik 1*

BÖ: ...Hani sonucu sonuca eşitlemek, hani ben bunu $y = f(x)$ içeridekini dışarıya dışarıdakini içeriye alma olayı vardı ya, $x = f^{-1}(y)$ yani diyorum ki öğrencilere eğer ters fonksiyon varsa içerideki değer y değeridir. y değeri dediğimizde şudur. (2x+5'i işaret etti) Yani sonuçtur. O zaman $2x + 5$'i -3 e eşitliyoruz. $2x + 5 = -3$ buradan x'i bulacağız. Zaten aradığımız şey odur evet. $2x = -8$, $x = -4$ Birinci yol bu.

Bu teknikte öğretmen bire bir ve örten fonksiyonlarda y=f(x) ise $f^{-1}(y)$=x kuralından hareketle elde edilen birinci dereceden denklemin kökünün arandığı anlaşılmaktadır. Bu eşitlik fonksiyonun bire bir ve örten olmasının araştırılmasını içermesine rağmen buna ilişkin bir açıklama yapılmamıştır. Ayrıca burada mantıksal bir hata da söz konusudur. Şöyleki, $f^{-1}(-3)$=x olsun. O zaman $f^{-1}(-3)$=x ve f bire bir ve örten olduğunda f(x)=-3 olur. Burada 2x+5=-3 ise x=-4 olur. Zaten bulunan x değeri $f^{-1}(-3)$ olarak elde edilir. Görüldüğü üzere bazı aşamaların atlanıldığı ve atlanan aşamalara ilişkin teknolojik açıklamalar yapılmadığı görülmektedir. Bu teknik öğretmenin sınıf uygulamalarında da benzer şekilde gerçekleştirilmiştir. Ayrıca öğretmenin tekniğin uygulanması sürecinde informel bir dil kullandığı görülmektedir. Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamalarından ikincisi Şekil 4.42'de verilmiştir.



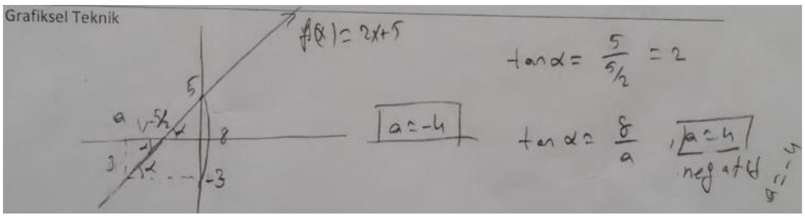
Şekil 4.42. *Burak öğretmenin görev 4 ile ilgili uygulamaları teknik 2*

BÖ: Klasik yolumuz, fonksiyonun tersini bulup, -3 değerini yerine yazmaktır.

A: Aynen

BÖ: Fonksiyonun tersini önce bulalım. $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ *tersinin kuralını bulduktan sonra değeri ne olursa olsun onu artık yazabiliriz.* $f^{-1}(-3) = \frac{-3-5}{2} = -4$, $f^{-1}(-3)$*'ün değeri -4 olur*

Görev 4 ile ilgili öğretmenin kullandığı ikinci teknik, fonksiyonun tersi bulunduktan sonra istenen değerin yerine yazılması şeklinde gerçekleştirilmiştir. Burada fonksiyonun tersi doğrudan bulunmuştur. Burada öğretmenin $f(x) = ax + b$ şeklindeki bir fonkiyonun tersini $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ kuralında elde ettiği düşünülmektedir. Çünkü öğretmenin daha önce ders işleyiş sürecinde kullandığı yaklaşımlarda bu teknik kullanılmıştır. Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamalarından üçüncüsü Şekil 4.43'te verilmiştir.



Şekil 4.43. *Burak öğretmenin görev 4 ile ilgili uygulamaları teknik 3*

BÖ:…grafiksel ve tablo tekniklerine de bir şey yapalım.

A: Tamam

BÖ: Gözden geçirelim. x=0 için y=5 tir. y=0 için x=-5/2 dir. Yani şöyle bir şey olacak. (fonksiyonun grafiğini çizdi) x=-3 olduğunda y kaç olur diye soruyor. Burasına ne demiştik? -5/2.

A: f'in grafiği değil mi hocam bu?

BÖ: Hı hı f'in grafiği. f(x)=2x+5'in grafiği, Şimdi burası -5/2 idi. Açıya baktığımız zaman karşı bölü komşu 2 kat oluyor. O zaman burası da 2 kattır. Şurası ½ dir. Şey…x eksi 3 iken pardon y eksi üç iken x kaç olur? Ha burası 8 br etti. Burasıda 4 br edecek. -3 tü. Evet 4 br oldu.

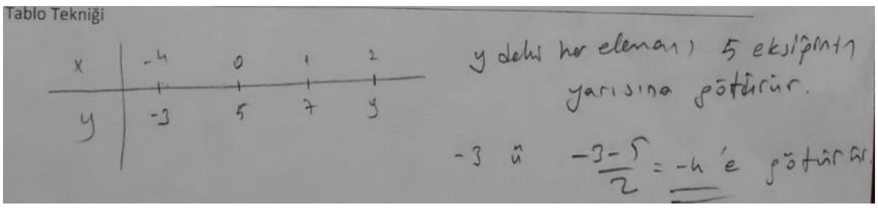
A: 4 br oldu.

BÖ: 4 br olduğu için a=-4 çıkar.

A: Evet hocam, ne kullandığımızı yazabilir misiniz?

BÖ: Evet, Benzerlik. Alfa alfa diyebiliriz. (İşlemleri anlatıyor) a=4 negatif tarafta olduğu için a=-4.

Burak öğretmen cebirsel temsille verilen görev 4'ü grafik temsiline transfer ettikten sonra doğrunun eğiminden yararlanarak geometrik bir teknikle tamamladığı görülmektedir. Burada öğretmen y=2x+5 doğrusunun eksenleri kestiği noktalardan bir üçgen oluşturarak grafiğin x eksenini pozitif yönde kestiği açının tanα değerini belirlemiştir. Daha sonra benzer bir üçgen elde ederek (AAA benzerlik kuralı) aynı açının tanjant değerlerinin aynı olduğu yaklaşımıyla tekniği gerçekleştirdiği görülmektedir. Doğru üzerinde oluşturulan iki üçgenin benzer olduğu ifade edilmekle birlikte niçin benzer olduğuna ilişkin açıklama yapılmadığı görülmektedir. Bu doğrultuda gerçekleştirilen didaktik prakseoloji teknoloji bileşeni eksik bir şekilde uygulanmıştır. Ancak bunun öğretmen tarafından bilindiği düşünülmektedir. Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamalarının dördüncüsü Şekil 4.44'te verilmiştir.

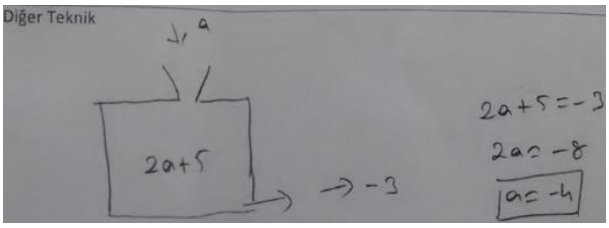


Şekil 4.44. *Burak öğretmenin görev 4 ile ilgili uygulamaları teknik 4*

A: Hocam tablo tekniğini kullanabilir miyiz?

BÖ: Kullanabiliriz. Onu da ha bu yine ters fonksiyon tamam o zaman x, y dersek. x=0 iken y=5, x=1 olduğunda y=7 oluyor. x=2 olduğunda y=9 oluyor. Şimdi bana diyor ki, acaba -3 te, bu sefer tersten bakacağız. y eksi 3 iken acaba x kaç olur? y ye bakıyorum şurada bir yerde y'ye bakıyorum -3 yazdığımda acaba kaç olur? Şimdi bunun kuralına bakacak olursak 5 eksiğinin yarısı olur. 5 eksiğinin yarısı -4, yani her elemanı 5 eksiğinin yarısına götürüyor. O halde $f^{-1}(-3)$'ü $\frac{-3-5}{2} = -4$ 'e götürür.

Görev 4 ile ilgili öğretmenin kullandığı teknik 4'te tablo temsili kullanılmış ve x'in 0, 1 ve 2 değerlerine karşılık y değerlerinin sırayla 5, 7 ve 9 olduğu ifade edilerek, nümerik bir teknikle x ve y arasında kurallı bir eşleme olduğu sezgisel olarak belirtildikten sonra y değerlerinden x değerlerine fonksiyonun kuralı örüntü bulma yaklaşımıyla belirlenerek teknik gerçekleştirilmiştir. Buradaki örüntünün herhangi bir y değerine karşılık y değerinin 5 eksiğinin yarısı olarak örüntü açıklanmıştır. Dolayısıyla burada bir y değerlerinden x değerlerine bir örüntü olduğu ve bu örüntünün kuralı ifade edilerek tekniğin gerçekleştirildiği anlaşılmaktadır. Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamalarının sonuncusu Şekil 4.45'te verilmiştir.



Şekil 4.45. *Burak öğretmenin görev 4 ile ilgili uygulamaları teknik 5*

A: Teşekkür ederiz. Hocam başka aklınıza gelen bir yöntem var mı? İsterseniz bir dakika düşünün hocam.

BÖ: Ya bilmiyorum ki onu da şey yapsak, yani hani şey yapıyorduk ya fonksiyon makinesi başka bir şey olacak mı onu da bilmiyorum. Şöyle bir şey yapıyorduk herhalde, bir de çıktı vardı burada şöyle miydi? Buradan gelen elemanlar a attığımızı varsayalım. 2a+5 olarak çıkıyordu. Haa acaba ne atmalıyız ki, -3 olarak çıksın. Bu da ilk şeye aa şuna denk geldi.

A: Ona biraz benziyor.

BÖ: Bu şeye uğramış hangi sayıdır? O zaman diyebiliriz ki hangi sayıyı 2 ile çarpıp 5 eklersek -3 olur. -4 atmalıyız ki -3 olsun.

Burak öğretmenin görev 4 ile ilgili kullandığı teknik 5'in büyük ölçüde teknik 4 ile benzer olduğu belirlenmiştir. Burada da büyük ölçüde nümerik yaklaşımıyla teknik gerçekleştirilmiştir. Bu yüzden bu teknik ayrı bir teknik olarak değerlendirilmemektedir.

4.2.1.4.1. Burak öğretmenin fonksiyon konusuyla ilgili gerçekte sahip olduğu didaktik prakseolojilere ilişkin bulgular

Burak öğretmenin 17 görevi toplamda 31 teknikle tamamladığı belirlenmiştir. Bu tekniklerin 21'si cebirsel, 8'i geometrik ve 2'si nümerik ağırlıklı tekniklerdir. Araştırma kapsamında detaylı prakseolojilerine yer verilen görevlerden; görev 1 ve görev 2 görevleri geometrik ve cebirsel olacak şekilde 2 farklı teknikle, görev 3 sadece cebirsel teknikle ve görev 4 ikisi cebirsel, biri geometrik ve diğeri nümerik olarak ifade edilen 4 farklı teknikle tamamlanmıştır.

Görevlerin tamamlanmasında kullanılan teknikler cebirsel, geometrik ve nümerik olarak sınıflandırılmıştır. Ancak bu ayrımdan sadece bir tek cebirsel teknik ya da bir tek geometrik teknik kullanıldığı düşünülmemelidir. Bunlarda kendi içerisinde farklılaşmaktadır. Ancak araştırma kapsamında bu tür bir ayrım yapılmamıştır. Bununla birlikte cebirsel ve geometrik tekniklerin bir kısmının sınıf uygulamalarında gösterilenler doğrultusunda gerçekleştiği tespit edilmiştir. Diğer taraftan sınıf uygulamalarından farklı olarak öğretmene sunulan görevlerde orantısal ve nümerik tekniklerinin kullanıldığı da belirlenmiştir.

Farklı bir bakış açısıyla verilen görevlere ilişkin teknikler incelendiğinde, öğretmenin görev 1'de cebirsel tekniği bilmesine rağmen bilinçli bir şekilde bu tekniği sınıf uygulamalarında kullanmadığını belirttiği görülmektedir. Bunun nedenini öğretmen bu tekniğin ispat yaklaşımlarını içermesi ve bu tür tekniklerin öğrencilerin isteksiz olmasıyla açıklamıştır. Bu yüzden öğretmenin fonksiyonların bire birliğine ilişkin incelemeleri geometrik teknikle yapma eğiliminde olduğu anlaşılmaktadır. Bu teknik cebirsel olarak verilen bir fonksiyonun grafiği çizildikten sonra bire bir olduğunun belirlenmesinde yatay doğru testinin uygulanmasını içermektedir.

Öğretmenin sıklıkla kullandığı başka bir teknik görev 4'te bir fonksiyonda belli bir değerin ters görüntüsünün elde edilmesinde kullanılan cebirsel tekniklerden ikincisidir. Bu teknikte öğretmen verilen fonksiyonun tersini aldıktan sonra görevde istenen değeri yerine yazarak tekniği gerçekleştirmiştir. Diyalogda öğretmen "*Klasik yolumuz*" şeklinde bu tekniği ifade ederek her zaman kullanılabilecek bir teknik olduğunu belirtmiştir.

Öğretmenin görevlerde en az bir en çok 4 teknik kullandığı görülmektedir. Bu tekniklerin bazıları sınıf uygulamalarında kullanılmazken, bazılarına sınıf uygulamalarında yer verildiği belirlenmiştir.

Öğretmenin bazı teknikleri bilmesine rağmen anketin uygulanma sürecinde o an tekniği hatırlayamadığını belirtmiştir. Örneğin, görev 2'de alternatif cebirsel teknik olarak bulgularda ifade edilen tekniği öğretmen bildiğini ancak o an hatırlayamadığını belirtmiştir. Diğer taraftan öğretmenin sınıf uygulamalarındaki görevlerde herhangi bir durumu özellikle cebirsel tekniklerle ispatlama girişiminde bulunmadığı belirlenmesine rağmen cebirsel ispatları görev 1'de doğrudan ispat kullanarak yaptığı görülmektedir. Bu anlamda bazı teknikler öğretmen tarafından bilinmekle birlikte bilinçli olarak sınıf uygulamalarında verilmediği anlaşılmaktadır. Bu durum öğretmenin sahip olduğu didaktik prakseolojilerin öğretmenden bir anketle elde edilen veriler doğrultusunda oluşturulan didaktik prakseolojilerin ötesinde olduğunu göstermektedir.

Öğretmen bir görevi en kısa yoldan sonuçlandıran ve görevin verildiği temsile yakın teknikle tamamlamayı sağlayacak teknikleri tercih ettiğini belirtmiştir. Görev 2'de öğretmenin kullandığı tekniklerin bu doğrultuda seçildiği görülmektedir. Ayrıca bu görevde öğretmenin hatırlayamadığı alternatif tekniği de en kısa yol olmamasına bağladığı belirlenmiştir. Diğer taraftan görev 3'te öğretmenin cebrsel teknikle görevi tamamladığı görülmektedir. Gerçek hayat problemlerinde fonksiyonların nasıl kullanılabileceğini gösteren bu görevi öğretmen fonksiyonel tekniklerle çözememiştir. Bu durum bazı teknikleri öğretmenin bilmediğini göstermektedir. Burada öğretmenin sözel temsille verilen iki fonksiyonun cebirsel temsile tranfer edilmesi sürecinde sorun yaşadığı belirlenmiştir. Dolayısıyla görevin verildiği temsilin (örneğin sözel temsil) bazı tekniklerin (cebirsel olarak bileşke işlemi yapılması) ortaya çıkmasında engelleyici bir faktör olduğu tespit edilmiştir.

Öğretmenin tekniklere ilişkin yaptığı teknolojiler incelendiğinde görev 1'de geometrik teknikte $y=x^3+8$ fonksiyonunun grafiğinin $y=x^3$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseninde 8 br yukarı ötelenmesiyle oluştuğu belirtilmesine rağmen bunun nedeni açıklanmamıştır. Benzer bir şekilde görev 2'de $g(x)=f(x-2)$ eşitliğinde g fonksiyonunun grafiğinin f fonksiyonunun grafiğinin x ekseninde 2 br sağa olduğu belirtilmesine rağmen bunun nedeni açıklanmamıştır. Öğretmenin sınıf uygulamalarında da benzer bir yaklaşım sergilediği görülmektedir. Diğer bir ifadeyle, bu tekniklere ilişkin teknolojik açıklamalar genellikle eksik olarak yapılandırılmakta ve örtük olarak kullanılmaktadır. Görev 4'te cebirsel tekniklerde bazı aşamaların atlanıldığı ve bu aşamalara ilişkin teknolojik açıklamalar yapılmadığı görülmektedir. Burada genellikle değişken değiştirme aşamasının atlanıldığı ve değişken değiştirmenin anlamsız bir şekilde gerçekleştirildiği belirlenmiştir. Bu durum sınıf uygulamalarında da benzer bir şekilde gerçekleşmiştir. (Örneğin doğrusal fonksiyonun tersini bulma) Ayrıca görev 4'te geometrik teknik olarak ifade edilen teknikte eğim ve benzerlik kullanılarak teknik gerçekleştirildiği ifade edilmesine rağmen bunlara ilişkin yeterli açıklama yapılmadığı anlaşılmaktadır. Tüm bu sonuçlardan tekniklerin uygulanma sürecinde teknolojik açıklamalar olmakla birlikte bunlar genellikle eksik bir şekilde verilmiştir.

4.2.2. Arda öğretmen durumu

Arda öğretmen fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunu 4 haftada ve 15 ders saatinde tamamlamıştır. Bu süreçte 1 gün ilk yazılılardan dolayı ve 1 günde İl Milli Eğitim Müdürlüğünde okulun proje sorumlusu olarak bir toplantıya katılması gerektiğinden dolayı toplamda 2 gün ders yapılamamıştır. Bu okul dönemin başında bir ay boyunca tadilata alınmıştır. Bu yüzden öğretmenin belli ölçüde de olsa konulara verilen sürelerde bilinçli olarak kısaltmalar yaptığı gözlenmiştir. Arda öğretmenin fonksiyon konusunun öğretiminde konunun farklı alt başlıklarında izlediği sıralama Tablo 4.15'te verildiği şekliyle ortaya çıkmıştır.

Tablo 4.15. *Arda öğretmen'in uygulaması*

Tarih	Ders Sayısı	Alt Başlık
31.10.2014	2	1. Dokuzuncu Sınıf Fonksiyon Konusunun Tekrarı 2. Fonksiyonlarda Simetri Dönüşümleri
06.11.2014	2	1. Fonksiyonlarda Simetri Dönüşümleri 2. Tek ve Çift Fonksiyon
07.11.2014	2	1. Tek ve Çift Fonksiyon 2. Fonksiyonlarda Dört İşlem 3. Bir Fonksiyonun Tersi
12.11.2014	2	1. Bir Fonksiyonun Tersi 2. Bileşke Fonksiyon
13.11.2014	2	1. Bir Fonksiyonun Tersi 2. Bileşke Fonksiyon
14.11.2014	2	1. Bir Fonksiyonun Tersi 2. Bileşke Fonksiyon 3. Fonksiyonlarla Uygulama
19.11.2014	2	1. Fonksiyonlarla Uygulama
21.11.2014	1	Üniversite Giriş Sınav Sorularının Çözümü

Tablo 4.15'te görüldüğü üzere, öğretmenin 2013 matematik dersi öğretim programı kapsamında 10. sınıfta fonksiyon konusunun tüm alt başlıklarına ve kazanımlarına öğretimde yer verdiği görülmektedir. Bu doğrultuda Arda öğretmen konunun başlangıcında 9. sınıf düzeyindeki fonksiyon konusunu bir ders saatinde kısaca özetlediği görülmektedir. Daha sonra 10. sınıfta yer verilen alt başlıklara geçmiştir. Öğretmen öğretim sürecinde fonksiyonların simetri dönüşümlerine üç ders saati, tek ve çift fonksiyona bir ders saati, fonksiyonlarda dört işleme bir ders saati, ters fonksiyona iki ders saati, bileşke işlemine üç ders saati, fonksiyonlarla uygulamalarına üç ders saati ve üniversite giriş sınav sorularına bir ders saati ayırmıştır. Burada konunun alt başlıklarının sıralanmasında özellikle programda bileşke işlemi ters fonksiyondan önce tanıtılması istenmesine rağmen öğretmenin bunun tersi bir yaklaşım sergilediği görülmektedir.

4.2.2.1. Arda öğretmenin matematik öğretim programında yapılan değişikliklere ilişkin görüşleri

Uygulama öncesinde yapılan görüşmede Arda öğretmene ilk olarak, matematik dersi öğretim programlarıyla ilgili yapılan değişiklikleri genel anlamda nasıl değerlendirdiği sorulmuştur:

A: Yeni ve eski programları öğretim bağlamında karşılaştırabilir misiniz? Mesela matematik programından çıkarılan eklenen konular var, konuların yerleri değiştiği kısımlar var.

AÖ: Evet, geometri dersi matematik dersinin içine dağıldı. Artık tek ders olarak görülüyor. Şu an 9 ve 10. sınıfları işleyebildik. Konu bütünlüğü açısından iyi, olumlu görüyorum. 9. sınıfta daha önce gördüğümüz öğrencilere anlattığımız bazı konuların eksik olduğunu görüyorum… Genel itibariyle üzerinde çalıştığımız konu fonksiyonlar 9'da iyi işlenmiş. Kazanımlar 9 için yeterli seviyede 10. sınıftaki matematik konularının birbirini tekrar etmemesi bence çok önemliydi. Bu programda bu vardı. Konular birbirini tekrar etmiyor birbirinin devamı şeklinde oluyor. Kazanımlarda bu şekilde düzenlenmiş. O yönle olumlu bakıyorum programa.

A: Sizce böyle bir değişim neden yapılmış olabilir? Gerekli miydi? Siz nasıl bakıyorsunuz bu olaya.

AÖ: Birincisi sanırım matematikteki başarı oranının Türkiye genelinde düşük olmasıydı. Yani bu başarıyı nasıl artırabiliriz. Matematik acaba öğrenciler *üzerinde çok mu yoğun, çok mu zor geliyor. Bu sorulardan yola çıkılarak yapıldığını düşünüyorum. Biraz daha sadeleştirilip gereksiz bazı konuların gereksiz demiyorum da lise düzeyinde bir öğrenci için gereksiz olan bazı konuların çıkarılması, davranış sıralamasının değiştirilmesi belki öğrenmeyi daha kolaylaştıracaktır diye yaptıklarını düşünüyorum. İkinci bir durum da biz herkese matematik vermeye çalışıyoruz. Bu da büyük bir yanlıştı, bu herhalde yeni programda 11 ve 12. sınıflarda matematik görmek zorunda olan öğrencilerin sadece hayatta kullanabilecekleri kadar matematik görmeleri gerekiyor. Bu programda ona yer verilmiş 11 ve 12'de temel ve ileri matematik diye ikiye ayrılıyor.*

Arda öğretmen program değişikliğiyle ilgili geometri ile matematik öğretim programlarının birleştirilmesi ve konuların parçalanarak, tekrara yer verilmeden, birbirini takip edecek şekilde farklı sınıf düzeylerinde yer alması durumlarını öğretim programının bütüncül olması gerektiği açısından olumlu olarak gördüğünü belirtmiştir. Yapılan program değişikliğinin Türkiye'deki öğrencilerin matematik dersindeki başarı oranının düşük olması, programdaki yoğunluğun azaltılması ve farklı ilgi alanındaki öğrencilere farklı matematik programı uygulanması gerektiği düşüncesiyle gerçekleştirildiği ifade edilmektedir. Bu doğrultuda programda bazı konuların çıkarıldığı ve bazı sınıf düzeylerinde işleyiş sıralamasının değiştirildiği belirtilmiştir. Bu anlamda öğretmenin diyalogda "*…davranış sıralamasının değiştirilmesi belki öğrenmeyi daha kolaylaştıracaktır*" şeklindeki ifadelerinden matematiksel kavramların programdaki ekolojisinin değiştiğinin belli ölçüde farkında olduğunu göstermektedir. Ancak öğretmen bu durumdan kısaca bahsetmiş ve ayrıntısına girmemiştir. Genel program değişiklikleriyle ilgili görüşleri yukarı verilen Arda öğretmen, özelde fonksiyon konusunun öğretiminde yapılan değişikliklerle ilgili görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Yeni ve eski programlar fonksiyonların öğretimi çerçevesinde düşündüğümüzde ne gibi farklılıklar görüyorsunuz? Yani fark var mı?

AÖ: Fark var. Kazanımlar bazında da yine biraz fark var.

A: Sınıf düzeylerinde,

AÖ: Şimdi 9. sınıfta biz sadece mutlak değer fonksiyon herhangi bir fonksiyonun grafiği nasıl çizilir, özel fonksiyonların grafiklerini verdik doğrusal fonksiyon, sabit fonksiyon, mutlak değer fonksiyonların grafikleri nasıl çizilir verdik. …10. sınıfta grafiklerden yararlanarak yeni grafik elde etme yöntemleri gösterdik ki 10. sınıfta *öğrencinin alması gereken davranış buydu zaten. Orada biraz zorlandığımızı düşünüyorum ama hani biraz da sınıf seviyesiyle alakalı olduğunu düşünüyorum hani müfredatın zorluğundan değil de öğrencimizin hazırbulunuşluk seviyesinin biraz az olduğunu, evde yetersiz ilgi alaka gösterdikleri düşünüyorum.*

Arda öğretmen eski ve yeni programlar arasında fonksiyon konusu bağlamında değişiklik olduğunu ifade ettikten sonra yeni programda fonksiyonlarla ilgili sınıf düzeylerinde özellikle grafiklerle ilgili hangi konu alt başlıklarına yer verdiklerini açıklamıştır. Bu doğrultuda özellikle 10. sınıf düzeyinde fonksiyonların grafiklerinden yeni grafiklerin elde edilmesi kazanımında öğrencilerin zorlandıkları beyan edilmiştir. Diyalogda bunun nedeni öğrencilerin genel başarı durumlarının zayıf olması, hazırbulunuşluk düzeylerinin düşük olması ve derslere yeterince hazırlanmamaları olarak belirtilmiştir. Diğer taraftan öğretmenin fonksiyonla ilgili belli ölçüde bir değişiklik olduğunu fark ettiği hatta bazı alt başlıklarda öğrencilerin zorlandığını gördüğünü belirtmesine rağmen bunu fonksiyon öğretimiyle ilgili bir paradigma değişimi olarak görmediği bunun yerine öğrencilerden kaynaklı bilişsel bir durum olarak gördüğü belirlenmiştir. Daha sonra öğretmene fonksiyon konusunun matematik öğretimindeki yeri ve diğer konularla bağlantısının kurulup-kurulamadığı sorulmuştur. Bu konudaki öğretmenlerin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Sizce fonksiyon konusunda matematik öğretimdeki yeri nedir? Lise matematiği için fonksiyon ne demek? Nasıl görüyorsunuz?

AÖ: Evet, şimdi biz öğrencilerimize de bir bilinmeyenli denklem anlatıyoruz, çözüyoruz ama ne olduğunu öğrenciler çok iyi anlayamıyor. Bu cebirsel ifadenin geometrik bir karşılığının olduğunu bildiği zaman biraz durum değişiyor. Yani bir nevi şöyle, görsel zekâsı ön planda olan öğrenci için bu cebirsel ifadeyi görsel hale getirmek o öğrenci için daha faydalı oluyor, daha iyi anlıyor. Zaten fonksiyon da dediğimiz bazı cebirsel ifadelerin görüntüsüdür, görsel hale getirilmesidir, grafiklerdir…Biraz da soyut düşünceyi geliştiriyor öğrencilerde öyle düşünüyorum. İleri düzeyde matematik görecek ya da matematik konuları görmesi gereken öğrencilerin bence fonksiyonların çok iyi bir şekilde yerleşmesi, algılanması gerekiyor.

A: Hocam fonksiyon konusun öğretiminde diğer konularla bağlantı kurulabiliyor mu?

AÖ: Eskiden 4. sınıfta türevden, limitten önce özel tanımlı fonksiyonlar vardı. Fonksiyonlar kısmını önce anlatıyorduk ama çok basit seviyede özel tanımlı fonksiyon konusunda işte orada fonksiyonun grafiğini çizmeyi, grafiği ötelemeyi daha önce 4. sınıfta ilk konu olarak ilk ünite olarak veriyorduk…Şimdi 9'da da ve 10'da da öğrenciler görüyor sınıftaki uygulamalarda da iyi anlayan öğrenciler görüyoruz. İntegral ve türev anlatırken buradaki kazanımların faydasını 11 ve 12'de göreceğiz. Yine de uygulama sonucunu bakmak lazım.

Arda Öğretmen fonksiyon konusunun denklem konusu için tamamlayıcı bir unsur olarak görev yaptığını belirtmiştir. Öğrencilerin denklem konusunu tam olarak anlayamadığını, bunun anlaşılabilmesi için bu denklemlerin görsel olarak grafiklere denk gelen fonksiyonlarla tamamlanabileceği vurgulanmıştır. Bu anlamda fonksiyonları grafikler olarak ifade eden öğretmen, fonksiyonun denklem olduğu anlamına vurgu yaparak, fonksiyonların görsel temsilleri olan grafiklerle sunulmasının özellikle görsel zekaya sahip öğrenciler tarafından fonksiyonun anlaşılmasında kolaylar sağlayacağı belirtilmiştir.

Fonksiyon konusunun diğer konularla özellikle ileri konularla bağlantısının kurulup-kurulamadığına ilişkin soruyu ise önceden 12. sınıfta fonksiyon konusu belli ölçüde tekrar hatırlatıldığı ifade edildikten sonra yeni öğretim programında bunu konuşmanın henüz erken olduğu belirtilmiştir. Ayrıca limit, türev ve integral gibi konuların anlaşılmasında fonksiyonların kritik bir rol oynadığı belirtilmiştir. Bu da öğretmenin fonksiyonun denklem anlamında beslediği ya da araç olarak kullanıldığı konuların farkında olduğunu göstermektedir.

Öğretmene fonksiyon kavramını öğrencilere nasıl tanıttığı ve hangi kavramlar temelinde sunduğu sorulmuştur. Bu konudaki öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Yeni programda fonksiyon kavramını öğrenciye nasıl sunuyorsunuz, mesela bağıntı kavramını kaldırmışlar. Bağıntıyı vererek mi sundunuz ya da bağıntı olmaksızın yeni bir yaklaşımla mı sundunuz?

AÖ: Şimdi doğrusunu söylemek gerekirse bağıntının çıkarılmasını doğru bulmadım. Çünkü fonksiyon bir bağıntıdır. Dolayısıyla bağıntıyı anlatmam lazım ki, öğrenciye "şu şu özellikleri sağlayan bağıntıya fonksiyon denir" diyebilmem lazımdı. Ben anlattım, ama hani anlatsam mı anlatmasam mı diye kararsız da kaldım. Bundan dolayı anlattım ama anlatmasaydım fonksiyona nasıl başlardım onu mu soruyorsunuz acaba?

A: Evet

AÖ: Her öğretmenin bildiği kullandığı bazı örnekler vardır. Doğal örnekler, ben öğrencilerime onu anlattım. Ben bir öğrenci kafilesini… Antalya'da bir otele götüreceğim… Siz (öğrencileri kastetti) tanım kümesisiniz, otelin kendisi değer kümesi, yerleştiğiniz odalar görüntü kümesi. Ben şimdi iki özelliği sağlarsam ben bir fonksiyonum,..Hiç birinizi dışarıda bırakmayacağım hepinizi mutlaka yerleştirmem lazım ya da ikinci şartımız da şu bir öğrenciyi aynı anda iki odaya yerleştiremem. Eğer ben bunları yapabiliyorsam ben bir fonksiyonum öğrenciye böyle bir örnekle giriş yapıp anlatırım.

Arda öğretmenin fonksiyon konusunu bağıntı temelinde işlediği anlaşılmaktadır. Bağıntı konusu tanımlanmadan fonksiyon kavramını tanımlamak mümkün olmadığı gerekçesiyle öğretmenin 2013 öğretim programında yer almayan bağıntı konusunu anlattıktan sonra fonksiyon kavramını tanımladığı anlaşılmaktadır. Bu anlamda öğretmen 2005 öğretim programındaki fonksiyon yaklaşımını yansıtmıştır. Matematik öğretiminde fonksiyon kavramının birçok tanımı bulunmakta ve 2013 öğretim programında bağıntı olmaksızın kavram tanımlanmaktadır. Ancak öğretmenin bağıntı kavramı olmaksızın fonksiyon kavramını tanımlayamaması, 2013 program değişikliğinde fonksiyon kavramı bağlamındaki değişikliğin öğretime yansıtılmadığının işaretleri olarak değerlendirilebilir. Bunun diğer bir göstergesi öğretmenin verdiği örnekte de gözlenebilmektedir. Çünkü öğretmenin fonksiyon kavramına ilişkin bağıntı kavramı olmaksızın verdiğini düşündüğü örnek, temelde bağıntı kavramı temelinde bir fonksiyon örneği olarak nitelendirilmektedir. Bu durum öğretmenin fonksiyon kavramının öğretiminde değişiklik yapmadığını ve fonksiyonun farklı tanımlarını öğretimde kullanmadığını göstermektedir.

Programda henüz öğretilmemiş matematiksel kavramlar ya da nesnelerle öğretim sürecinde karşılaştıklarında öğretmenin yaklaşımı sorulmuştur:

A: Fonksiyon öğretimi sırasında öğretim programının sizi sınırladığını düşündüğünüz zaman oldu mu? Buradaki kastım şu mesela bir problem çözeceksiniz fakat çözmek için...(öğretmen araya girdi)

AÖ: Şuraya girmesem mi? Ya da program beni sınırlandırıyor. Ben o kısımda çok fazla takılmıyorum çünkü müfredatın esnek olduğunu yani çok esnek değil de en azından anlatacağım şeyi öğrencinin kavrayabileceğine inanıyorsam biraz sınırların dışına çıkabiliyorum. Nasıl söyleyeyim çok fazla zorlamadan yani *öğrencinin bilmemesi gereken bir şey varsa da buraya da çok zor da olsa girmem, girmeyeceğim, girmiyorum da. Ama bazen de hafif genişlettiğimiz yerler de oluyor.*

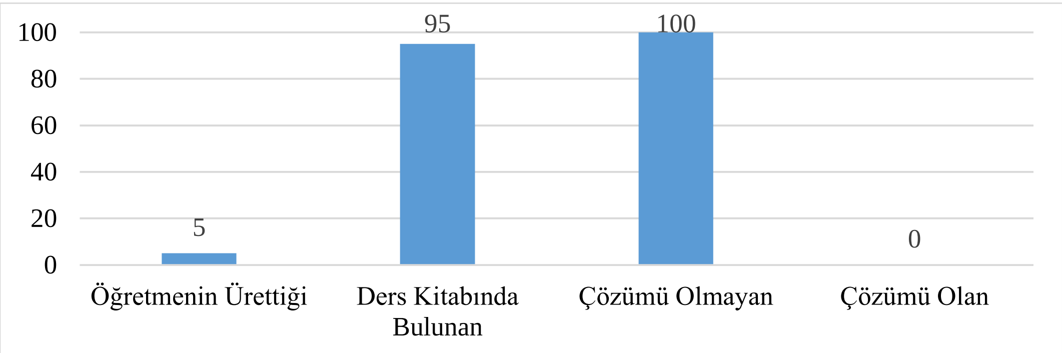
Arda öğretmen öğretim programının esnek olduğunu ifade ederek, gerekli olduğuna inanırsa ve öğrencilerin çok zorlanmayacağını düşünürse problem çözümlerinde kullanacağı kavramları süreç içerisinde anlatabileceğini beyan etmiştir. Öğretmenin fonksiyon kavramında bağıntı kavramının kritik rol oynadığını düşünmesi ve bağıntının kolayca anlaşılabilecek bir konu olduğunu varsayması nedeniyle fonksiyon kavramı öncesinde bağıntı kavramını anlatması bu bağlamda değerlendirilebilir.

Arda öğretmen program değişikliklerinin yapılmasının altında yatan nedenlerin temelde programdaki yoğunluğun azaltılmasına ve matematik başarısının arttırılmak istenmesine bağlamaktadır. Diğer taraftan öğretmenin 2013 yılında yapılan köklü program değişikliğindeki bazı ekolojik değişikliğin farkında olduğu görülmektedir. Ancak bu değişiklikleri öğretimi derinden etkileyen faktörler olarak algılamadığı anlaşılmaktadır. Diğer bir ifadeyle öğretmenin fonksiyon konusunun öğretimi bağlamında yapılan program değişikliğini bir paradigma değişimi olarak görmediği anlaşılmaktadır.

4.2.2.2. Arda öğretmenin fonksiyon konusuyla ilgili gözlemlenen didaktik prakseolojilerine ilişkin bazı genel bulgular

Arda öğretmen fonksiyon konsunun öğretimini MEB tavsiyeli özel bir yayın evinin ders kitabı olan kaynak B üzerinden gerçekleştirmiştir. Öğretmenin konunun öğretiminde sınıfa sunduğu görevlerde kaynak B'den ne ölçüde yararlandığına ilişkin bilgiler Tablo 4.16'da verilmiştir.

Tablo 4.16. *Arda öğretmenin fonksiyon konusunun öğretiminde yer verdiği görevler*



Tablo 4.16'da görüldüğü üzere, Arda öğretmen fonksiyon konusunun öğretimi süresince görevlerin %5'ini spontane kendisi oluştururken, %95'inde ders kitabından yararlanmıştır. Buradan öğretmenin fonksiyonların öğretiminde görevlerin seçiminde ders kitabına aşırı bağlı bir yaklaşım sergilediği söylenebilir. Öğretmenin sınıf uygulamalarında kullandığı görevlerin hiçbirinin çözümlü olmadığı tespit edilmiştir. Bu anlamda görevin çözümlü olmaması nedeniyle ders kitabından alınan görevler dışında didaktik prakseolojinin diğer bileşenlerinin öğretmeni doğrudan yansıtacağı düşünülmektedir.

Öğretmenin fonksiyon konusunu öğretirken tercih ettiği kaynak ve bu kaynağı neden tercih ettiği sorulmuştur. Uygulama sonrası yapılan görüşmede bu konuyla ilgili öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Takip ettiğiniz kaynak fonksiyon konusunun öğretim sürecinde ne ölçüde etkilidir?

AÖ:… PDF formatında hazırlanmış özel kaynaklar kullandık isim vermem gerekirse Kaynak B'yi kullanıyorum …doğrusunu isterseniz takip ettiğim kaynağı beğeniyorum. Yazarını da tanıyorum. Etkilendiğim bir yazar. Kitaplardaki konu sıralaması genelde ÖSYM'nin soru tiplerine bağlı olarak sıralanır.

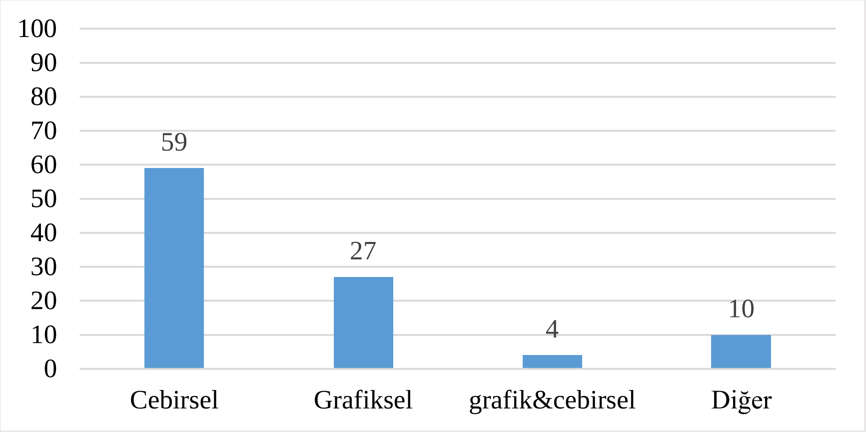
A: Videolar incelendiğinde fonksiyon konusunu daha çok takip ettiğiniz kaynaktan anlattığınız görülüyor. Böyle bir öğretim yaklaşımı tercih etmenizin nedeni nedir?

AÖ:…Milli Eğitimin müfredatı değiştiği için, doğrusunu isterseniz 9 ve 10'larda ben bilerek sadece Kaynak B'yi takip ediyorum. Çünkü onlar müfredata uygun yayın çıkarttılar. Yazın zaten onu incelemiştim. Diğer sınıflarda kaynak kullanıyorum fakat tek bir kaynak değil. Yani benim kendi sunumlarımdır. Bir parçası bir kaynaktan bir parçası bir kaynaktan oradaki kurguyu da ben hazırlıyorum…Benim aslında 9, 10 lara ait slaytlarım çoktu ama program değişince onlar boşa çıktı.

Arda öğretmen program değişikliği nedeniyle fonksiyon öğretiminde 2013 programı doğrultusunda hazırlandığını nitelendirdiği kaynak B'yi kullandığını belirtmiştir. Bu kaynağı tercih etmesinde yazarından etkilenmesi, kaynaktaki soruların üniversite giriş sınavındakilerle paralel olması ve akıllı tahtaya uyumlu olması sebeplerin etkili olduğu görülmektedir.

Arda öğretmenin fonksiyonların öğretiminde görevleri öğrencilere hangi temsiller bağlamında sunduğu Tablo 4.17'de verilmiştir.

Tablo 4.17. *Arda öğretmenin öğretimde başvurduğu görevlerde fonksiyon kavramının farklı temsillerinin dağılımı*



Tablo 4.17'den Arda öğretmenin fonksiyon konusuyla ilgili didaktik prakseolojilerde kullandığı görevlerin yarıdan fazlasının cebirsel temsille ve üçte bire yakınının grafiksel temsille verildiği anlaşılmaktadır. Buradan öğretmenin fonksiyon öğretiminde genellikle cebirsel ve grafiksel temsilleri kullanma eğiliminde olduğu söylenebilir.

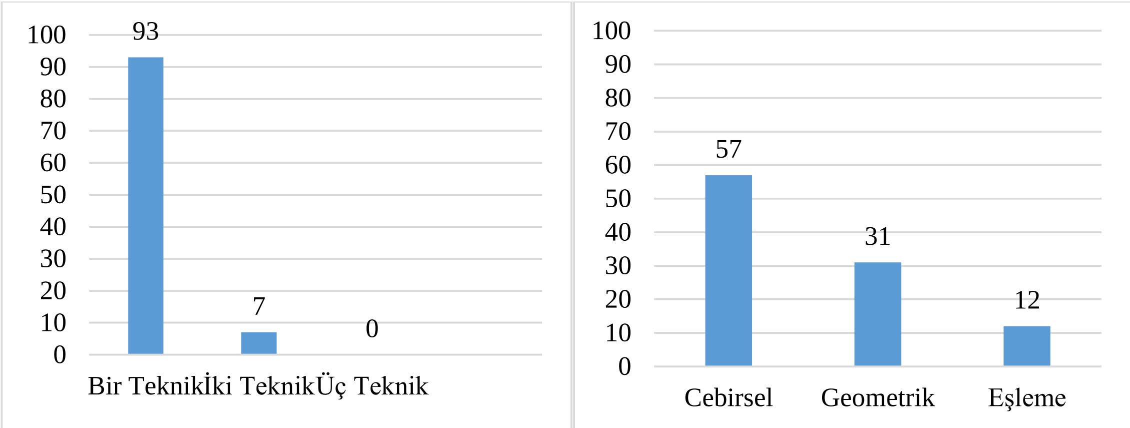
Uygulama öncesinde yapılan görüşmede, fonksiyonların öğretiminde yeni programda temsillerin kullanımına ilişkin bir değişiklik olup-olmadığıyla ilgili öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Yeni eski program arasında fonksiyon konusu öğretilirken kullanılan temsiller arasında bir değişim gözlemlediniz mi? Temsilden kastım şema temsili, cebirsel temsil, tablo temsili, bu tarz şeyler yeni ve eski program arasında fark var mı?

AÖ: Çok fazla fark yoktu. Hemen hemen aynı fonksiyonların grafiklerini çiziyorduk, çizdiriyorduk. Daha önce tabi ki on ikilerde biraz daha zor grafikler de soruyorduk. Şimdi 10. sınıfta bunları bir örnek vereyim. On ikide iken fonksiyon konusunda biz cosx'in grafiğini çiziyorduk ya da $|cosx|$'in grafiğini çiziyorduk. Ama şimdi çocuk 10. sınıfta trigonometri görmediği için o tür örnekler veremedik trigonometrik fonksiyonların grafikleriyle ilgili örnekler vermedik yani. Bu anlamda çok daha sadeleşmiştir. Eskiye nazaran biraz daha basitleşmiştir diyebiliriz.

Program değişikliğinden dolayı fonksiyonların öğrencilere sunuluş tarzında temsil anlamında önemli sayılabilecek bir değişim olmadığı belitilmektedir. Buradaki değişimin sadece daha üst düzey fonksiyonların grafiklerin çizilememesi şeklinde olduğu açıklanmıştır. Bunun nedeni fonksiyonların grafik çiziminin 12. sınıftan alınarak 10. sınıf düzeyinde verilmek istenmesi ve bu düzeyde trigonometri gibi bazı konuların henüz anlatılmamış olmasıdır. Tablo 4.18’de Arda öğretmenin görevleri kaç farklı teknikle çözdüğü ve görevlerde üretilen tekniklerin türlerine göre dağılımı verilmiştir.

Tablo 4.3. *Arda öğretmenin görevlerde başvurduğu teknikler*



Tablo 4.18’de görüldüğü üzere, Arda Öğretmen görevlerin %93’ünü tek bir teknik ve %7’sini iki farklı teknik kullanarak sonuçlandırmıştır. Buradan öğretmenin çoğunlukla herhangi bir görevi tek bir teknikle tamamlama eğiliminde olduğu ve alternatif tekniklere yeterince yer vermediği söylenebilir. Diğer taraftan görevlerde ağırlıklı olarak cebirsel teknikler kullanılmakla birlikte bunu geometrik teknikler ve eşleme tekniğinin izlediği görülmektedir. Burada hatırlatılması gereken önemli bir nokta, cebirsel tekniklerin sadece cebirsel teknik olarak yer almadığıdır. Yani bazı cebirsel tekniklerde ağırlıklı olarak cebirsel teknikler kullanılmakla birlikte bazen bu tekniğin içerisinde eşleme tekniğinin de bulunduğu belirlenmiştir.

Herhangi bir görevde öğretmenin farklı tekniklerin kullanılmasına ilişkin nasıl bir bakış açısına sahip olduğu uygulama sürecinde yapılan görüşmede öğretmene sorulmuştur. Bu konuyla ilgili öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

Araştırmacı: Sizce bir soruyu birden fazla teknikle çözmek önemli midir? İşte cebirsel, grafiksel, tablo ..gibi. Neden?

AÖ: Önemli olduğunu düşünüyorum. Çünkü öğrencinin bir olaya ne kadar çok pencereden bakmasını sağlarsanız öğrencinin bilinçaltında konunun daha iyi yerleşmesine sebep olur. Bizim öğrencilerimiz en kısa yolu ister genelde, ben de buna tamamen karşıyım. En kısa yolu bilmeyin, birçok yolu bilin. ...Farklı çözüm yolları öğrencinin bence daha iyi anlamasını sağlar. Çünkü sizin çözdüğünüz *yöntemi anlamayan bir öğrenci ikinci yöntemden anlayabiliyor. Yani bazen işte cebirsel bir çözüm yaptığınızda daha sonra grafiksel yani görsel bir çözüm de yaparsanız, görsel zekası iyi olan öğrencinin de öğrenmesini sağlamış olursunuz. Onun için önemlidir.*

Arda öğretmen öğretim sürecinde bir görevin farklı tekniklerle tamamlanması durumunu, öğrencilerin farklı zeka türlerinde olmasıyla ilişkilendirerek, görevin daha fazla öğrenci tarafından anlaşılmasını sağladığı gerekçesiyle önemli görmektedir. Ancak Tablo 4.18'de görüleceği üzere, öğretmenin genellikle görevleri bir teknikle tamamladığı anlaşılmaktadır. Bu yönüyle öğretmen düşünce itibariyle öğretim sürecinde birden fazla teknik kullanılması gerektiği şeklinde bir fikre sahip olsa da uygulamada alternatif tekniklere yeterince yer vermediğinden bunu gerçekleştiremediği belirlenmiştir.

Uygulama sonrası yapılan görüşmede fonksiyon konusuna ilişkin verilen herhangi bir görevi öğretmenin hangi teknikle tamamlama eğiliminde olduğu sorulmuştur.

AÖ: Ben örneğin gelişine göre yani her yolu denemeye çalışıyorum ama tercihli yolum değişebilir. İlla ki, cebirsel yolla çözeceğim diye bir kaide yok ya da illa ki, grafikle çözüyorum diye bir kaide de yok. O soruda öğrenci de kolaylık yaratan çözüm yolu hangisi ise önce anlamalarına kolaylık yaratacak önce hangisiyse önce onu tercih ederim. Sonra bakın böyle bir yol daha var, siz de bir düşünün isterseniz ya da siz de başka bir yolla çözmeye çalışın nasıl olur diye bir soru uyandırmaya çalışıyorum kafalarında. Genelde bazen hep üçüncü bir yolu eksik bırakırım öğrencinin düşünmesini isterim.

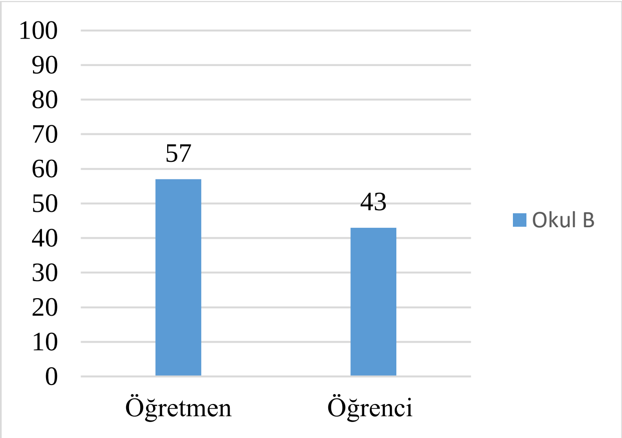
A: Tablo tekniğiyle yapılan çözümleri nasıl değerlendiriyorsunuz?

AÖ: Yani ee şu an lise seviyesinde belki kullanılabilir ama genelleme yaptığınız zaman bana şey geliyor. Değer vermek bu değerin fonksiyonda karşılığını bulmak biraz zahmetli…Bu yöntemi neden burada fazla kullanmıyorum bunu açıklamak istiyorum…Biz bazen öğrencilerden yavaş yavaş üniversite de matematik düşünen öğrenciler olur ya da bazen işte mühendislik düşünenler olur yani aslında bilimle ilgilenen bir öğrencinin ispat yapmasını öğrenmesini istiyoruz yavaş yavaş. Ve diyoruz ki örnekle ispat olmaz ama aksi örnekle ispat olur…Bunu sürekli ben dersimde vurguluyorum. Çünkü ben öğrencinin yani bazen diyoruz işte örneğin bir şey yazıyoruz bir örnek (önerme ya da teori kastediliyor) yazıyoruz. Çocuğa bunu ispatlamaya çalışın dediğimizde hemen örnekle ispatlamaya çalışıyorlar. Ben bunu verdiğimde öğrenci de iyice yerleşiyor. (tablo tekniğiyle yapılan çözümü *kastediyor) Örnekle ispat etme metodu iyice yerleşiyor. Bu da yanlış. Evet, tablo bir örneklemedir. Yani bunu genelleme yapmak belki buradan genellenebilir de ama hani grafik ya da cebirsel şekilde daha çok rahat genelleme yapılıp ispatlanabilir. Böyle yaptığımda yani sanki daha çok örneklerle ispat yoluna gideceğini düşünüyorum ondan dolayı…Onun için biraz sakıncalı görüyorum.*

Arda öğretmenin sınıf kolektifinde karşılaşılan bir görevi öncelikle öğrencilerin kolaylıkla anlayacağı teknik hangisi ise oradan çözmeye çalıştığı anlaşılmaktadır. Bunun yanında görev farklı bir teknikle tamamlanabiliyorsa öğretmen bunu da göstermeye çalıştığını belirtmiştir. Ama genellikle cebirsel ve grafiksel tekniklerle görevleri sonuçlandırdığı anlaşılmaktadır. Tablo tekniğini öğretmenin bilinçli olarak kullanmadığı görülmektedir. Öğretmenin bunun gerekçesini cebirsel ve geometrik tekniklerin aksine tablo tekniğinde genelleme ve ispat yapmanın daha zor olmasına bağladığı anlaşılmaktadır.

Görevlerde tekniği öğretmen yapabileceği gibi öğrenciler de yapabilmektedir. Tablo 4.19'da görevlerin ne kadarını öğretmenin ne kadarını öğrencilerin yaptığına ilişkin bilgiler verilmiştir.

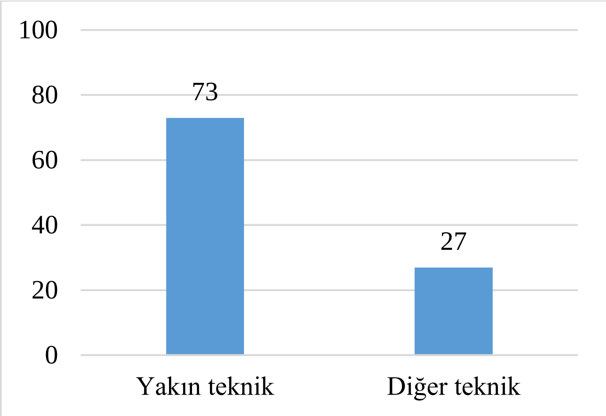
Tablo 4.19. *Tekniklerin üretilmesinde etkin aktör*



Tablo 4.19'da verildiği üzere, Okul B'de fonksiyon konusunun öğretiminde matematik dersi izlenen sınıfta karşılaşılan görevlerin yarıya yakınını öğrencilerin tamamladığı görülmektedir. Ancak Arda öğretmenin öğrencilerin yaptığı çözümlerde genellikle onları yönlendirici bir tavır içerisinde tekniklerin gerçekleştirilmesini sağladığı belirlenmiştir.

Son olarak 10. sınıf düzeyinde fonksiyon konusunun öğretiminde görevlerin çözümünde Arda öğretmenin tercih ettikleri teknikler görevlerin verildiği temsille ne ölçüde ilişkili olduğu incelenmiştir. Bu doğrultuda görevlerde temsil teknik ilişkisi Tablo 4.20'de verilmiştir.

Tablo 4.20. *Görevlerde temsil-teknik ilişkisi*



Tablo 4.20'de görüldüğü üzere, Arda öğretmenin kullandığı görevlerin yaklaşık dörtte üçünde görevlerin verildiği temsile yakın teknik kullanılarak tamamlandığı görülmektedir. Bu sonuç, öğretmenin sınıf uygulamalarında görevi sunduğu fonksiyon temsiliyle görevin tamamlanmasında kullanılan teknik arasında ilişki olduğunu göstermektedir.

Arda öğretmen fonksiyon konusuyla ilgili didaktik prakseolojilerde genelikle ders kitabından yararlanılması öğretimin ders kitabına aşırı bağlı bir şekilde gerçekleştirdiğini göstermektedir. Görevlerde fonksiyonların çoğunlukla cebirsel ve grafiksel temsillerle sunulduğu belirlenmiştir. Bununla paralel olarak görevlerin genellikle cebirsel ve geometrik tekniklerle tamamlandığı tespit edilmiştir. Ayrıca görevlerin neredeyse tamamı tek bir teknikle sonuçlandırılmıştır. Bu durum alternatif tekniklere yeterince yer verilmediği göz önüne sermektedir. Öğretmenin bir görevde kullandığı tekniğin seçiminde, öğrencinin kolay anlamasını sağlayan bilinçli tercihlerde bulunduğu belirlenmiştir. Burada tekniğin özellikle görevi en kısa yoldan sonuçlandıran teknik olmak zorunda olmadığı, genelleme ve ispat yapılmasına imkan veren teknikler olmasına dikkat edildiği ifade edilmiştir.

4.2.2.3. Arda öğretmenin fonksiyonlar konusuyla ilgili didaktik prakseolojileri

Arda öğretmenin 10. sınıfta sınıf ortamında fonksiyon konusunun öğretiminde kullandığı alt başlıklar kronolojik sırada aşağıda verilmiştir.

- Fonksiyon kavramı ve grafik çizimini hatırlatma (9. sınıf tekrarı)
- Fonksiyonların Simetri Dönüşümleri
- Tek ve Çift Fonksiyon
- Fonksiyonlarda Dört İşlem
- Fonksiyonun Tersi
- Bileşke Fonksiyon
- Fonksiyonla İlgili Uygulamalar

Arda öğretmen 10. sınıfta veri, sayma ve olasılık öğrenme alanında yer alan sıralama ve seçme ile koşullu olasılık konularını öğrettikten sonra sayılar ve cebir öğrenme alanında bulunan fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunu öğretmeye başlamıştır. Öğretmen 31 Ekimde öğretimine başladığı fonksiyonları, toplamda 4 hafta süresince devam ederek 21 Kasımda bitirmiştir. Öğretmen ilk derste 9. sınıfta anlatılan fonksiyon kavramını ve grafik çizmeyi hatırlattıktan sonra 10. sınıf konularını anlatmaya başlamıştır. Burada sırayla fonksiyonlarda simetri dönüşümleri, tek ve çift fonksiyonlar, fonksiyonlarda dört işlem, ters fonksiyon, bileşke fonksiyon ve fonksiyonlarla ilgili uygulamalar alt başlıklarına yer verdiği görülmektedir. Bu alt başlıklar altında öğretmenin 119 görevin didaktik prakseolojisine yer verdiği belirlenmiştir. Araştırmada öğretmenin fonksiyonlarda simetri dönüşümleri ile bileşke ve ters fonksiyon alt başlıklarına odaklanılmıştır.

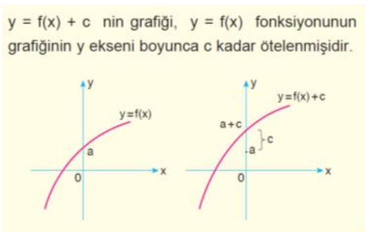
4.2.2.3.1. Arda öğretmenin fonksiyonların simetri dönüşümleriyle ilgili didaktik prakseolojileri

Arda öğretmen fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunda fonksiyonlarda simetri alt başlığına üç ders saati ayırmıştır. Bu süreçte 24 göreve yer vermiştir. Bu görevler incelenerek 8 görev tipi tespit edilmiştir. Görevlerin 22 tanesi bir teknikle ve 2 tanesi farklı iki teknikle tamamlanmıştır. Görevlerde kullanılan tekniklerin tamamı geometrik tekniklerdir. Geometrik tekniklerden kastedilen izometrik, afin dönüşümlerin yanı sıra grafiksel teknikler (eğriyi karekterize eden noktaların belirlenerek çizilmesi) de bu sınıflamada içerisinde düşünülmüştür. Bu görev tipleri ve her bir görev tipine ait görevlerin sayısı Tablo 4.21'de sunulmuştur.

Tablo 4.21. *Arda öğretmenin simetri dönüşümleri alt başlığında yer verdiği görev tipleri*

Görev Tipleri	Görev Tiplerinin İfadesi	Görev Sayısı
T_1	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(x)±b fonksiyonunun grafiğini elde etme	5
T_2	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(x±a) fonksiyonunun grafiğini elde etme	4
T_3	y=f(x) fonksiyonun grafiğinden y=f(x±a)±b fonksiyonunun grafiğini elde etme	1
T_4	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=kf(x) fonksiyonunun grafiğini elde etme	7
T_5	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(kx) fonksiyonunun grafiğini elde etme	4
T_6	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=kf(x)±b fonksiyonunun grafiğini elde etme	1
T_7	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(kx)±b fonksiyonunun grafiğini elde etme	1
T_8	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=kf(kx) fonksiyonunun grafiğini elde etme	1

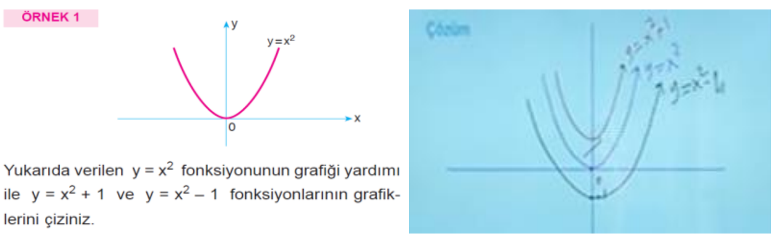
Tablo 4.21'den T_3, T_6, T_7 ve T_8 görev tipleri iki dönüşümü, diğerleri bir dönüşüm içermektedir. Tabloda y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin; x eksenine göre simetriği alınarak elde edilen (y=-f(x) fonksiyonu) T_4 görev tipi içerisinde ve y eksenine göre simetriği alınarak elde edilen (y=f(-x) fonksiyonu) T_5 görev tipi içerisinde yer almıştır. Burada dikkat çeken diğer önemli nokta genellikle bir simetri dönüşümünün kullanıldığı görev tiplerinde birden fazla görev incelenmişken, iki simetri dönüşümünün kullanıldığı görev tiplerinde sadece birer görevin incelenmiş olmasıdır. Bu görev tipleri kapsamında incelenen görevlerde doğrusal fonksiyon, parabol ve parçalı fonksiyon grafiklerinin kullanıldığı belirlenmiştir. Arda öğretmen, T_1 görev tipiyle ilgili görevlere Şekil 4.46'da verilen açıklamaları yaptıktan sonra geçmiştir.



Şekil 4.46. *Arda öğretmenin kaynak B'de y ekseninde ötelemeye ilişkin verdiği bilgi*

AÖ: ... $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiş bize. Biz buna c sayısı bir reel sayı olmak üzere, c kadar bir sayı ilave edelim ve yeni fonksiyon elde edelim. Bu yeni fonksiyonun grafiğini eski fonksiyonun grafiğini öteleyerek bulabiliriz. Yani *yeniden grafiği çizmemize gerek yok…Evet. Şurada $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiş, bizden $y = f(x) + c$'nin grafiği istenirse, y ekseninde arkadaşlar, çünkü neye ilave ediyoruz? $f(x)$, y değil miydi arkadaşlar? Biz y'ye ilave ediyoruz sayıyı tamam mı, y ekseninde a kadar grafiği yukarı öteliyoruz (c kadar demek istiyor), -c deseydi c kadar aşağı öteleyecektik. Eğer $f(x)$'e ilave edilmişse yukarıya, $f(x)$'ten çıkarılmışsa grafiği aşağıya öteleyip, yeni bir grafik elde ediyorum. Şurada bakın $f(x)$ fonksiyonunun grafiği a'dan geçmiş y ekseninde. Şimdi $f(x) + c$'nin grafiği ne olacak? Şurasını c kabul edersek c kadar yukarıya çıkacak. Daha önce a'dan geçiyordu. a'ya bir c ilave ettik. Burası artık a+c oldu, tamam mı? İlk kuralımız bu.*

Arda öğretmen y=f(x) fonksiyonun grafiğinin y ekseninde ötelenmesine ilişkin bilgiyi kaynak B'de verildiği şekliyle aktardıktan sonra informel biçimde açıkladığı görülmektedir. Burada öğretmenin f(x) ifadesiyle ordinatın kastedildiği ifade edilerek f(x) değerine yapılacak bir ekleme ya da çıkarma işleminin ordinata yapılması gerektiği açıklanmıştır. Ancak bu ekleme işlemi grafiğin sadece y eksenini kestiği noktaya yapılıyormuş gibi anlatılmıştır. Halbuki bu tür bir dönüşümde grafiğin bütün noktaları c birim ötelenmektedir. Farklı bir açıdan buradaki ötelemenin grafiğin şeklini bozmayacağı ve uzaklığı koruyan dönüşümlerden biri olan izometri dönüşümü olduğu belirtilmemiştir. Ayrıca y=f(x)+c fonksiyonunun grafiğinin, y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin niçin y ekseninde c br ötelendiğinde elde edildiğine ilişkin bir kanıtlamaya girilmediği görülmektedir. Öğretmenin bu açıklamaları tekniği doğrudan vererek didaktik anlardan görev tiplerini *keşfetme* ve bunlara yönelik *teknik geliştirme anı*nı paypas ettiği belirtilebilir. Bu açıklamalardan sonra öğretmen T_1 görev tipiyle ilgili art arda 5 görevi öğrencilere sunmuştur. Bunlardan ilk ikisi $y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseninde ötelenmesini ve diğer üçü y=x fonksiyonunun grafiğinin y ekseninde ötelenmesini içermektedir. Şekil 4.47'de bu görev tipiyle ilgili ilk görev olan $t_{1,1}$ görevi verilmiştir.



Şekil 4.47. *Arda öğretmenin T_1 görev tipi ile ilgili $t_{1,1}$ görevi*

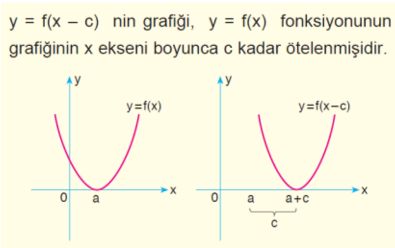
AÖ: Şu örneği görüyorsunuz. Örnekte $y = x^2$ *fonksiyonu verilmiş. Biz* $x^2 + 1$ *ve* $x^2 - 1$ *fonksiyonlarının grafiklerini çizeceğiz. Size şunu sorayım,* x^2 *fonksiyonunun adı neydi? Geçen sene söylemiştik. Bu fonksiyonun adı var.*
Öğrenciler: Ee hocam parabolik, parabol,…
AÖ: Parabol. Parası çok arkadaşlar bunun. Kase şeklindedir. Bütün paraları içine alıyor… Bu paraboldür. En temel paraboldür. Başlangıç noktasından geçen temel paraboldür x^2*. Şimdi biz* $x^2 + 1$ *ve* $x^2 - 1$ *parabollerini çizeceğiz. Grafikte ne diyordu? (Öteleme kuralında ne dediğini soruyor) Eğer +1 ise 1 br yukarı, -1 ise 1 br aşağı öteleyeceğiz. Şimdi önce eski parabolümü çiziyorum. (*$y = x^2$ *kastediliyor) Bu* $y = x^2$ *parabolüdür.* $y = x^2 + 1$*'i nerde çizmem lazım? Şurası 0 olduğundan, şurası eğer 1 ise benim parabolüm buraya gelecek, değil mi? Burası ne olacak* $y = x^2 + 1$*. Peki öbür parabolüm…Şurası -1 olsun. Tamam mı? Buradan geçsin. Bu nedir?* $y = x^2 - 1$ *parabolü. (öğrencilerle birlikte söylediler) Evet. Yazabilirsiniz arkadaşlar. Var mı anlamayan? (Öğrencilerden ses yok)*

Arda Öğretmenin T_1 görevi ile ilgili $t_{1,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{1,1}$: $y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y=x^2+1$ fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{1,1}$ (Geometrik Teknik): *Bu* $y = x^2$ *parabolüdür.* $y = x^2 + 1$*'i nerde çizmem lazım? Şurası 0 olduğundan, şurası eğer 1 ise benim parabolüm buraya gelecek*…[$y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni üzerinde yukarı yönde 1 br ötelenmesiyle $y=x^2+1$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.]
- $\theta_{1,1}$: *Başlangıç noktasından geçen temel paraboldür* x^2. [$y=x^2$ parabolünün informel tanımı] *…benim parabolüm buraya gelecek, değil mi? Burası ne olacak* $y = x^2 + 1$ [örtük bir şekilde izometriye atıf var. Çünkü dönüşüm sonrası oluşan şekil yine bir parabol]

Arda öğretmen $t_{1,1}$ görevini geometrik teknikle tamamlamıştır. Burada $y=x^2$ referans fonksiyonunu y ekseninde 1 birim öteleyerek görevi tamamlamıştır. Bu tekniği öğretmen parabolün tepe noktası üzerinden gerçekleştirdiği tespit edilmiştir. Bu tekniğin $\theta_{1,1}$ teknolojisinde $y=x^2$ parabolü informel biçimde tanıtılmış ve $y=x^2$ parabolünün ötelenmesiyle yine bir parabol elde edileceği belirtilmiştir. Bu anlamda örtük bir şekilde öteleme dönüşümünün izometrik bir dönüşüm özelliğinde uygulandığı anlaşılmaktadır. Diğer taraftan öteleme y=f(x) fonksiyonunun bütün noktaları üzerinde yapılmasına rağmen sadece parabolün tepe noktasına uygulanmış ve gerçekte $y=x^2$ parabolünün bütün noktalarına uygulandığı belirtilmemiştir. Ayrıca $y=x^2$ fonksiyonunun grafiği ile $y=x^2+1$ fonksiyonunun grafiği arasındaki ilişki informel açıklamalarla verilmiştir. Bu dönüşüme ilişkin herhangi bir kanıtlama girişiminde bulunulmamıştır. Bu anlamda gerçekleştirilen didaktik prakseolojide teknolojik açıklamalar eksik bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

Didaktik anlar açısından didaktik prakseoloji incelendiğinde bu görev, T_1 görev tipiyle ilgili ilk görev olduğundan *ilk karşılaşma anı* olarak belirtilebilir. Bu görev tipinden önce görevin nasıl çözüleceğine ilişkin bilgi verildiğinden teknik doğrudan (teknik geliştirme değil) verilmiştir. Ancak y=f(x)+c fonksiyonunun grafiğinin niçin y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin y ekseni üzerinde c birim ötelenerek elde edildiği kanıtlanmadan sözel açıklamalar şekilde verilmiştir. Bu anlamda belli ölçüde *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı* gözlendiği söylenebilir. Ayrıca teknik 9. sınıfta öğretilen $y=x^2$ fonksiyonunun grafiği hatırlatılarak başlanması *kurumsallaştırma anı*nın gözlendiğini göstermektedir. Bu görev tipiyle ilgili 4 görev daha benzer yaklaşımla tamamlanmıştır. Bu görev tipinde yer alan 5 görevin sadece bir teknikle çözülmesi alternatif tekniklere yer verilmediğini göstermektedir. Dolayısıyla burada tekniksel çalışma anı gözlenmemiştir. Burada verilen görevde kullanılan fonksiyonun parabol olması ve parabolün henüz anlatılmamış olması bu alternatif tekniğin yapılmasını güçleştirdiği söylenebilir. Ancak burada verilen fonksiyonlar matematik yazılımlarıyla çizilerek gösterilebilirdi. Ama bu tür bir teknik de ortaya konmamıştır. Bu görevlerden sonra öğretmen T_2 görev tipiyle ilgili Şekil 4.48'deki açıklamaları vermiştir.



Şekil 4.48. *Arda öğretmenin x ekseninde ötelemeye ilişkin verdiği bilgi*

AÖ: Biz herhangi bir fonksiyonun grafiğini bilirsek, ona benzer fonksiyonları, eğer sadece y ekseninde öteleme söz konusuysa, ötelemesini rahatlıkla yapabiliriz. Yani yeniden fonksiyon grafiği için x'e değer ver y'yi bul, y'ye değer ver x'i bul. Onları *göster. Onları çiz. Demenize gerek kalmaz, tamam mı? Ama başlangıç fonksiyonunu iyi bilmeniz lazım…Aklınıza şöyle bir soru gelebilir. Hocam x ekseninde bir öteleme yapılsa, fonksiyonun denkleminde nasıl bir değişme olur? Yani nasıl bir değişme olursa fonksiyon y ekseninde değil de x ekseninde ötelenir, değil mi? Aklınıza geldi mi bu soru?*

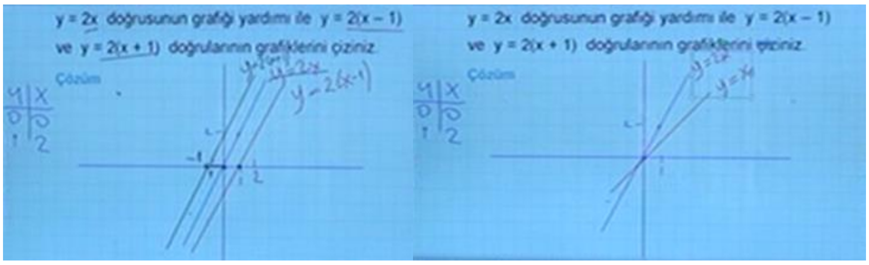
Öğrenciler: Hiç gelmedi, gelmemişti, sonra geldi. (gülüyorlar)

AÖ: Gelmemişti. Sonra geldi…Şimdi $y = f(x)$'ya fonksiyon. $f(x)$, y demektir. Siz şimdi $f(x)$'e bir şey ilave ettiğiniz zaman veya çıkarttığınız zaman koordinatlarda y ordinatı var ya, (x,y) bizim koordinatımız var ya, y ordinattır. $f(x)$'e bir şey ilave ettiğinizde ordinatı oynatmış oluyorsunuz. İlave ederseniz yukarı, çıkarırsanız aşağı gelir. Şimdi biz x'i oynatmak istersek kime ilave edeceğiz.

Ö3: y'ye.

AÖ: Yok, x'e ilave edeceğiz. Yani fonksiyonun içine. $y = f(x + c)$ ya da $y = f(x - c)$ tamam mı? Bu ikisi x ekseninde grafiği oynatır. Yani sağa-sola getirir. Ama y eksenindeki gibi değil. Hani y ekseninde artı olunca yukarı, eksi olunca aşağı gidiyordu. x'te tam ters. Artı olunca bu tarafa (elini sola götürüyor) eksi olunca bu tarafa (elini sağa götürüyor) Şimdi grafiğimizi görelim arkadaşlar. y=$f(x-c)$'nin grafiği, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca c kadar ötelenmesidir. Eksi olunca sağ tarafa artı olunca bu tarafa doğru (sol taraf) kayacak arkadaşlar. Gördünüz mü? Şekli olduğu gibi kaydırıyoruz sağa-sola. Hemen örneğe geçelim.

Bu açıklamalardan görüleceği üzere, öğretmen y ekseninde öteleme bilgisiyle bağ kurarak fonksiyonun grafiğinin x ekseninde ötelemesinin nasıl yapılacağını önce informel biçimde aktarmıştır. Sonra kaynak B'de verilen bilgiyi aktarmıştır. Bu anlamda teknik doğrudan verilmiştir. Bu durum görev tipiyle ilgili bir teknik geliştirilmesi anının geçersiz kıldığı söylenebilir. Burada teknik y=$f(x-c)$'nin grafiğinin, niçin $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca c br ötelemesi olduğuna ilişkin bir kanıtlamaya girilmeden verilmiştir. Burada öğretmen dönüşümü y=f(x) ifadesinde x ekseni boyunca c birim ötelemeyi; f fonksiyonunun grafiği sağa öteleniyorsa x yerine x-c gelmesi gerektiği ve sola öteleniyorsa x yerine x+c gelmesi gerektiği şeklinde açıklanmıştır. Ama bunun neden bu şekilde işlediği açıklanmamıştır. Diğer bir önemli nokta "*…herhangi bir fonksiyonun grafiğini bilirsek, ona benzer fonksiyonları, eğer sadece y ekseninde öteleme söz konusuysa, ötelemesini rahatlıkla yapabiliriz.*" ifadesinden belli ölçüde de olsa öteleme yapıldığında fonksiyonun şekli korunduğu anlaşılmaktadır. Bu anlamda örtük bir şekilde öteleme dönüşümünün izometri olduğuna işaret edildiği söylenebilir. Daha sonra Arda öğretmen Şekil 4.49'da verilen T2 görev tipi ile ilgili $t_{2,1}$ görevini öğrencilere sunmuştur.



Şekil 4.49. *Arda öğretmenin T2 görev tipiyle ilgili $t_{2,1}$ görevi (solda) ve T4 göreviyle ilgili $t_{4,1}$ görevi (sağda)*

AÖ: Bunu çizebilecek bir arkadaş vardır, diye düşünüyorum. Grafiği çizelim sonra ötelemesini ben yaparım. y=2x'in grafiğini nasıl çizeceğiz? Değer vereceğiz. x'e sıfır y, y'ye sıfır x. Ö3 gelsin. Aslında hani y=x'in grafiğini çizdik ya arkadaşlar 2 ile çarpılmış değil mi bu? Biraz daha açısı büyüyecek.

Ö3: y'ye 0 verirsek x sıfır, x'e sıfır verirsek y sıfır.

AÖ: Aynısını bir daha almanın anlamı yok. Başka bir nokta seçebilirsin. Başka dene. Bir sayı ver. Şurada (0,0) noktasını seçtik. x'e 1 verirsek y ne oluyor?

Ö3: 2 oluyor. (İki noktayı birleştiriyor) Şöyle bir doğru.

AÖ: Peki arkadaşlar size bir şey sorayım. Bu da aslında bir özellikti. Şimdi y=x'i hatırladınız mı? Birinci açıortay doğrusunu.

Öğrenciler: Evet.

AÖ: Bu da ona benziyor mu?(y=2x işaret etti)

Öğrenciler: Benziyor

AÖ: Aradaki fark ne?

Ö3: Orada y=x burada y=2x.

AÖ: Öbürünü çizeyim ben? Başka bir renkle. Kırmızı birinci açıortay doğrusu y=x. Bunu da ileriki dakikalarda size anlatacağım. Bu y=x, bu y=2x. Peki y=3x olsaydı ne olacaktı? (y=3x çizmedi)

Ö3: Biraz daha açılacaktı.

AÖ: Biraz daha açılacaktı. Biraz daha y eksenine doğru gidiyor, değil mi?

Öğrenciler: Evet

AÖ: Yine orijinden geçiyor. Katsayısı arttıkça doğru y eksenine yaslanıyor. Y eksenine yaklaşmaya başlıyor. Katsayı azalsaydı mesela ½ olsaydı biraz daha x eksenine yaklaşacaktı. Bunu da aklınızda tutun ilerleyen dakikalarda bununla ilgili bir kural var, tamam mı?

Arda öğretmen $t_{2,1}$ görevi içerisinde y=2x fonksiyonunun grafiğinin çizimini öğrenciye iki nokta belirleyerek çizdirdikten sonra y=2x fonksiyonunun grafiğini y=x referans fonksiyonuyla nasıl çizileceğini göstermiştir. Bu da burada T_4 görev tipiyle ilgili ilk özel göreve işaret etmektedir. Bu anlamda T_4 görev tipinde *ilk karşılaşma anı* T_2 görev tipinde $t_{2,1}$ görevinde tekniğin uygulanma sürecinde ortaya çıkmıştır. Bu doğrultuda öğretmen tarafından y=2x fonksiyonunun grafiğinin y=x referans fonksiyonu yardımıyla çizildiği görülmektedir. Arda öğretmenin T_4 görev tipine ilişkin $t_{4,1}$ görevinde sergilediği prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{4,1}$: y=x fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=2x fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{4,1,1}$ (Geometrik Teknik 1): *Değer vereceğiz. x'e sıfır y, y'ye sıfır x.* [Eksenleri kestiği noktalar belirlenerek doğru grafiği çizilir] *…Şurada (0,0) noktasını seçtik. x'e 1 verirsek y ne oluyor?* [Doğru grafiği 2 farklı nokta belirlenerek çizilir]
- $\tau_{4,1,2}$ (Geometrik Teknik 2): *y=x'in grafiğini çizdik ya arkadaşlar 2 ile çarpılmış değil mi bu? Biraz daha açısı büyüyecek* [y=x referans doğrusundan yararlanarak y=2x çizilir]
- $\theta_{4,1,1}$: [Sezgisel olarak iki noktası bilinen doğru çizilebilir.]
- $\theta_{4,1,2}$: *Bu da ona benziyor mu? (y=2x işaret etti)* [y=x ve y=2x aynı benzer doğrular yani y=kx tipinde fonksiyonlar] *Şimdi y=x'i hatırladınız mı? Birinci açıortay doğrusunu.* [informel tanım] *Katsayısı arttıkça doğru y eksenine yaslanıyor… Katsayı azalsaydı mesela ½ olsaydı biraz daha x eksenine yaklaşacaktı.* [y=kx doğrularının grafiklerinin "k" ile ilişkisi]

Arda öğretmen $t_{4,1}$ görevini iki farklı teknikle tamamlamıştır. Bu tekniklerden birincisini öğrenci öğretmenin yönlendirmeleriyle yaparken, diğerini öğretmen üretmiştir. İlk teknikte düzlemde y=2x doğrusunun geçtiği iki farklı nokta belirlenerek teknik gerçekleştirilmiştir. Bu geometrik tekniğin teknolojisinde sezgisel olarak doğru grafiklerinin iki nokta ile belirlenebileceği düşüncesi olduğu belirtilebilir. Diğer geometrik teknikte ise öğretmenin y=x referans fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=2x fonksiyonunun grafiğini çizdiği görülmektedir. Bu tekniğin teknolojisinde öğretmen öncelikle y=x fonksiyonunu informel biçimde tanıtmıştır. Sonra y=x ve y=2x fonksiyonları arasında benzerliğe dikkat çekmiştir. Bununla öğretmenin bu fonksiyonların karakterinin genel olarak y=kx biçiminde olduğunu göstermeye çalıştığı anlaşılmaktadır. Daha sonra y=kx biçimindeki fonksiyonların grafiklerinin "k" katsayısıyla (k≠0) ilişkisi vurgulanmıştır. Bu yaklaşım *görev tipini keşfetme* ve bunlara yönelik bir *teknik geliştirme anı* olarak nitelendirilebilir. Tekniğin niçin bu şekilde uygulandığı çok kısa da olsa diyalogda öğretmenin "*Aslında hani y=x'in grafiğini çizdik ya arkadaşlar 2 ile çarpılmış değil mi bu? Biraz daha açısı büyüyecek.*" Şeklindeki açıklamalarından anlaşılmaktadır. Burada az da olsa *teknolojik teorik çevre oluşturma anı* yaşandığı söylenebilir. Diğer taraftan yapılan bu dönüşüm uzaklığı koruyan izometrik bir dönüşüm değildir. Bu dönüşüm doğru üzerinde bulunan noktaların arada olma özelliğini koruyan bir afin dönüşüm olarak belirtilebilir. Öğretmenin buna ilişkin herhangi bir açıklama vermediği gözlenmektedir. Bu anlamda teknolojik açıklamalar eksik bir şekilde gerçekleştirildiği söylenebilir. Diğer taraftan öğretmenin bu görevi iki farklı teknikle sonuçlandırması alternatif tekniklerin kullanıldığını göstermektedir. Dolayısıyla bu didaktik prakseolojide *tekniksel çalışma anı* gerçekleşmiştir. Arda öğretmen y=2x grafiği çizildikten sonra (Şekil 4.49'da sağ resim), bu grafikten yararlanarak y=2(x-1) ve y=2(x+1) fonksiyonlarının grafiklerini çizme süreci aşağıda verilmiştir.

Ö3: Çizeyim mi?... (Ö3 ötelemeleri öğretmenin talimatlarıyla yaptı)

Ö4: Hocam bir daha anlatır mısınız?

AÖ: Anlatayım hemen. Şimdi önce mavi renkte gördüğünüz doğru y=2x doğrusu. 2 çarpı sadece x'ten 1 çıkarılmış arkadaşlar. (y=2x'ten y=2(x-1) elde edildiği ifade edildi) Dolayısıyla x ekseni boyunca 1 br sağa öteleyeceğim 2x'in grafiğini. Yani mavi gördüğünüz bu grafiği x ekseninde 1 br sağa kaydırdım. Bakın burası 0 iken tam burada 1'den geçecek, tamam mı? 2(x+1) nedir arkadaşlar? x ekseninde 1 br sola kayacak. 1 br 0'dan sola kayarsa şurası -1 olacak -1'den geçmiş olacak. Tamam mı arkadaşlar? Var mı anlamayan?

Ö4: Hocam bir şey sorabilir miyim?

AÖ: Sor

Ö4: Hocam hani dediniz ya çıkarırsak sağa doğru, toplarsak sola doğru kaydırıyoruz. Her zaman geçerli mi?

AÖ: x ekseni boyunca böyle. x eksenindeki değişimler böyle, ama y'de tam doğru orantılı artı yaparsanız yukarıya, eksi yaparsanız aşağıya, x'te biraz ters, tamam mı?

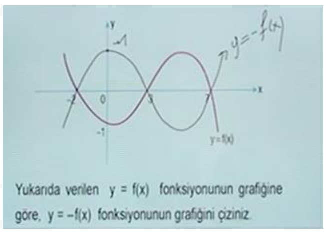
Arda öğretmenin T_2 görev tipiyle ilgili $t_{2,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{2,1}$: y=2x fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=2(x-1) fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{2,1}$ (Geometrik Teknik): *…mavi renkte gördüğünüz doğru y=2x doğrusu…sadece x'ten 1 çıkarılmış arkadaşlar… Dolayısıyla x ekseni boyunca 1 br sağa öteleyeceğim 2x'in grafiğini.* [y=2(x-1) fonksiyonunun grafiği y=2x fonksiyonunun grafiğinin x ekseninde 1 br sağa ötelenmesiyle bulunur]
- $\theta_{2,1}$: *sadece x'ten 1 çıkarılmış…Dolayısıyla x ekseni boyunca 1 br sağa öteleyeceğim 2x'in grafiğini* [x ekseninde öteleme]*… x eksenindeki değişimler böyle* [ötelemenin fonksiyon kuralına etkisi eksik bir şekilde yapılmış]

Bu diyalogda T_2 görev tipinde *ilk karşılaşma anı* olarak sunulan görevin ifadesi y=2x fonksiyonunun grafiğinden yararlanılarak y=2(x-1) fonksiyonunun grafiğini bulma ($t_{2,1}$ görevi) şeklinde belirtilebilir. Bu görevin başlangıcında y=2x fonksiyonunun grafiği düzlemde iki nokta belirtilerek çizilmiştir. Bu bilgi 9. sınıfın bilgisi olduğundan *kurumsallaştırma anı*nın yaşandığı tespit edilmiştir. Bu görev geometrik teknikle x ekseninde sağa doğru 1 birim y=2x fonksiyonunun grafiğinin ötelenmesiyle tamamlanmıştır. Tekniğin teknolojisine ilişkin (öğretmenin grafiğin sağa ya da sola ötelendiğinde yapılan dönüşümün fonksiyonun denklemine etkisi) informel açıklamalar yapılmıştır. Bu da belli ölçüde *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı*na işaret ettiği söylenebilir. Ancak dönüşümün niçin bu şekilde işlediğine ilişkin bir kanıtlama yapılmamıştır. Bu yüzden teknolojik açıklamalar gözlenmekle birlikte eksik kaldığı belirtilebilir. Diğer taraftan bu görev verilen fonksiyonlar doğrusal olduklarından düzlemde bu doğruların geçtiği iki nokta belirlenerek de çözülebilirdi. Ancak bu alternatif teknik kullanılmamıştır. Bu anlamda tekniksel çalışma anı bu didaktik prakseolojide gözlenmemiştir.

Öğretmenin bu görevde didaktik prakseolojilerden teknoloji bileşeninin eksik bir şekilde gerçekleştirildiğinin göstergesi şöyle açıklanabilir: Arda öğretmen kaynak B'de verilen bilgi doğrultusunda $t_{2,1}$ görevini iki kez anlatmasına rağmen Ö4'ün "*Hocam hani dediniz ya çıkarırsak sağa doğru, toplarsak sola doğru kaydırıyoruz. Her zaman geçerli* *mi?”* muhatap olmaktan kaçamamıştır. Aslında bu tür bir soru teknolojik bir açıklama verilmesini gerektirmektedir. Bu teknolojik açıklama x ekseninde fonksiyon grafiklerinin ötelemesine ilişkin bilginin ispatının verilmesini içermektedir. Ancak öğretmen bu bilginin her zaman geçerli olduğunu belirtmesine rağmen herhangi bir kanıtlama girişiminde bulunmamıştır. Bu anlamda gerçekleştirilen didaktik prakseoloji teknoloji bileşeni bulunmakla birlikte eksik bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

Bu görevlerden sonra öğretmen $y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y=(x-1)^2$ ve $y=(x+1)^2$ fonksiyonlarının grafiklerinin çizilmesini içeren iki görevi benzer yaklaşımlarla tamamlamıştır. Daha sonra $y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y=(x-2)^2+3$ fonksiyonunun grafiğini x ekseninde 2 br sağa ve y ekseninde 3 br yukarı öteleyerek T_1 ve T_2 görev tipindeki görevlerde izlenen benzer yaklaşımlarla sonuçlandırmıştır. Bu yüzden bu görevlerin detaylı prakseolojik analizleri verilmeyecektir. Daha sonra öğretmen y=x, y=2x ve $y=\frac{1}{2}x$ fonksiyonları arasında ilişkinin belirlenmesine ilişkin görevleri öğrencilere sunmuştur. Bu görev tipiyle daha önce $t_{2,1}$ görevinde tekniğin uygulanma sürecinde karşılaşılmıştı. Burada tekrar incelenmesine gerek duyulmamaktadır. Bu aşamadan sonra öğretmen bu görev tipiyle ilgili f(x)=x+1 ve y=2f(x) fonksiyonları arasındaki ilişkiyi bulma şeklindeki görevi iki farklı teknikle sonuçlandırmıştır. Bu tekniklerden birincisi doğrunun düzlemde geçtiği iki noktanın belirlenmesine dayanmaktadır. Diğeri ise y=x referans fonksiyonun grafiğinden y=x+1 fonksiyonunun grafiği elde edildikten sonra bu grafikten de y=2(x+1) fonksiyonunun elde edilmesini içermektedir. Daha sonra x eksenini -2, 1 ve 5 noktalarında kesen y=f(x) eğrisi verilmiş ve y=3f(x) fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların bulunmasını içeren görev sonuçlandırılmıştır. Bu tür görevlerde öğretmenin gerçekleştirdiği prakseolojiler daha önce incelendiğinden bu görevlerin analizine yer verilmemiştir. Bu görev tipinde $t_{4,7}$ görevinde öğretmen diğerlerinden farklı bir prakseoloji ortaya koyduğu için bunun prakseolojik analizine yer verilmiştir. Bu görev Şekil 4.50’de sunulmuştur.



Şekil 4.50. *Arda öğretmenin T_4 görev tipinde $t_{4,7}$ görevi*

AÖ: Bir de şu örneğe geçmeden burada dikkatinizi bir şeye çekmek istiyorum. Hani y=f(x) ile y=-f(x) fonksiyonlarının grafikleri x eksenine göre simetriktirler ya, bir bakın bir şey değişiyor mu? Yani x ekseninde kestiği değerler değişiyor mu? Bak, x eksenindekiler değişmiyor, y'deki ise eksilisine gidiyor, tamam mı? Bu önemli, soru çözerken dikkat edeceğiz…Yukarıda verilen y=f(x) fonksiyonunun grafiğine göre, y=-f(x) fonksiyonunun grafiğini çizin?... Çizmek isteyen var mı arkadaşlar?... Gel.

Ö5: Hocam şimdi o zaman burası 1 olur. Şuradan şuraya gidecek

AÖ: Evet, evet. Aynen bu. Teşekkür ederiz. (Öğretmen öğrencinin çözümünü siliyor, kendisi tekrar yapıyor) Görünsün diye rengi değiştiriyorum arkadaşlar. Siyah yapalım, tamam mı arkadaşlar? (Grafiği çizdi) Şurası ne olacak? 1, şurası zaten aynı. (x eksenini kesen nokta) Bu nedir? Neyin grafiğidir? y=-f(x).

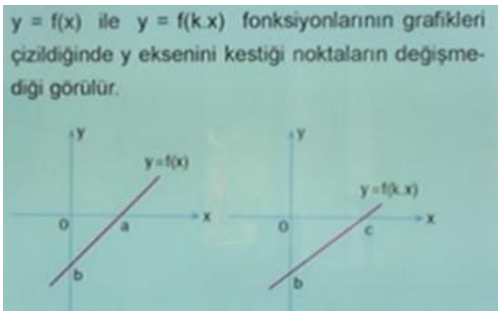
Arda öğretmenin T_4 görev tipinde $t_{4,7}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{4,7}$: y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=-f(x) fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{4,7}$ (Grafiksel Teknik): *…y=f(x) ile y=-f(x) fonksiyonlarının grafikleri x eksenine göre simetriktirler* …[y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetrisi alınarak y=-f(x) fonksiyonunun grafiği elde edilir.]
- $\theta_{4,7}$: ?

Diyalogda görüleceği üzere, öğretmen öncelikle fonksiyonun grafiğinin x eksenine göre simetriğinin nasıl alınacağına ilişkin tekniği vermiştir. Bu yaklaşım görev tipinin çözümüne ilişkin bir teknik geliştirme anına ihtiyaç duyulmamasına neden olmuştur. Ancak y=f(x) ile y=-f(x) fonksiyonlarının grafiklerinin niçin x eksenine göre simetrik olduğu açıklanmamıştır. Bu doğrultuda tekniğin teknolojisi eksik bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

Bu görevi öğretmenin $\tau_{4,7}$ grafiksel tekniğiyle bir öğrenciye yaptırdığı sonra ise benzer şekilde kendisi tamamladığı görülmektedir. Bu tekniği öğretmenin nasıl gerçekleştirdiği diyalogda "*y=f(x) ile y=-f(x) fonksiyonlarının grafikleri x eksenine göre simetriktirler… x eksenindekiler değişmiyor, y'deki ise eksilisine gidiyor.*" şeklindeki ifadelerden çıkarılabilmektedir. Öğretmen y=f(x) fonksiyonunun x eksenine göre simetriğini alarak y=-f(x) fonksiyonunu bulmuştur. Bu teknik grafik üzerindeki x ve y eksenini kesen noktalara odaklanılmak suretiyle dönüşüm gerçekleştirilmiştir. Bu teknik kaynak B'de geçen bilgi doğrultusunda gerçekleştirilmeye çalışıldığı gözlenmiştir.

Bu prakseoloji didaktik anlar açısından incelendiğinde sadece ilk karşalaşma anı gözlendiği ve diğer anların yaşanmadığı görülmektedir. Daha sonra öğretmen T_5 görev tipindeki görevlere yönelik Şekil 4.51'deki bilgiyi vermiştir.



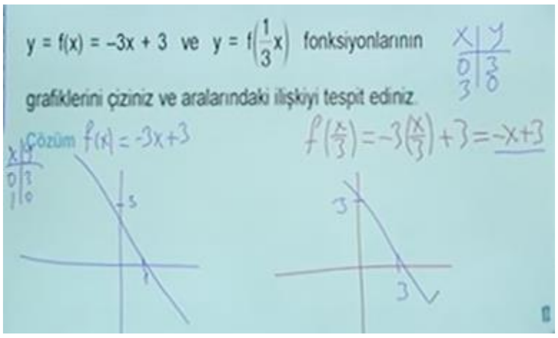
Şekil 4.51. *T_5 görev tipindeki görevlerin tamamlanmasına yönelik verilen bilgi 1*

AÖ: Şimdi bu sefer x'i k ile çarpıyoruz. Şimdiye kadar f(x)'i k ile çarpmıştık. Ne diyorduk? f(x)'i k ile çarptığımız zaman x eksenindeki değerler değişmez, y eksenindeki değerler değişir. Şimdi x'i k ile çarpıyoruz. Ne bekliyorsunuz arkadaşlar?

Öğrenciler: Bu sefer y'ler değişmez, x değişir.

AÖ: y'ler değişmez, x'in değişmesi beklenir. Evet, şurada görüyorsunuz. Bu normalde y=f(x)'in grafiği, bu y=f(kx)'in grafiği, tamam mı? Bakın b hiç değişmemiş, y eksenindeki değer değişmemiş, x eksenindeki değer a'yı kesiyorken şimdi neyi kesiyor? c'yi kesiyor. Buna bir örnek verelim mi?

Burada öğretmenin öncelikle kaynak B'de yer alan T_5 görev tipindeki görevlerin tamamlanmasında kullanılacak bilgiyi verdiği görülmektedir. Bu görev tipiyle ilgili tekniğin ifadesidir. Burada öğretmen bu tekniğin niçin bu şekilde işlediğine ilişkin informel açıklamalar dışında açıklama yapmamıştır. Sadece y=f(x) ve y=f(kx) grafiklerinin eksenleri kestiği noktaları karşılaştırarak açıklama yaptığı görülmektedir. Ancak grafiklerin x eksenini kestiği noktalar arasında nasıl bir ilişki olduğu, bu dönüşümün grafikleri nasıl etkilediği (uzaklığı koruyup-korumadığı), dönüşümün verilen fonksiyonların kurallarına etkisi ve dönüşüm neticesinde elde edilen grafiğin x eksenini hangi noktada kestiğine ilişkin kuralın ne olduğu açıklanmamıştır. Bu anlamda teknolojik açıklamalar yetersizdir. Daha sonra T_5 görev tipiyle ilgili Şekil 4.52'de verilen $t_{5,2}$ görevi öğrencilere sunulmuştur ($t_{5,1}$ ve $t_{5,2}$ görevleri benzer şekilde gerçekleşti).



Şekil 4.52. *Arda öğretmenin T5 görev tipinde $t_{5,2}$ görevi*

AÖ: …Daha önce bunu size söyledik, geçen dersimizde, bir fonksiyonun grafiğini eğer fonksiyon içindeki değişkeni k ile çarparsanız y ekseni değişmez, x ekseninde bir değişme söz konusu olur, değil mi?...Evet, şu örneği çözmek isteyen arkadaşımız var mı? Bunun grafiğini ayrı çiz, bunun grafiğini ayrı çiz. Aradaki farkı inceleyeceğiz. Gel, yardımcı olacağım…f(x) nedir? f(x)=-3x+3 onu çiz buraya istersen. Bir de şunu elde edelim. f(x/3) demektir bu, değil mi? x gördüğüm yere ne yazacağım? f(x/3)=-3(x/3)+3=-x+3 bir de bunun grafiğini buraya çizeceksin, tamam mı?(İki tane koordinat ekseni çizdi) Bunu buraya çizeceksin, bununkini de buraya. x'e değer ver y'yi bul, y'ye değer ver x'i bul. x'e 0 verdiğinde y, 3 mü olur?
Ö1: Evet
AÖ: y'ye 0 verdiğinde x ne olur? 1. Bu noktaları göster x ekseninde 1'i, y ekseninde de 3'ü. İkisini birleştir. Evet, bu bizim -3x+3'ün grafiği doğru mu?
Ö1: Evet, buna 0 verdiğimizde (x'i kastetti) y, 3, buna 0 verdiğimizde (y'yi kastetti) 3 (x=3) olur. Burası 3, burası da 3. (Noktaları birleştirdi)
AÖ: y eksenine öbüründe baktığınız zaman y yine 3, burada da y yine 3.
Ö1: Ama x değişmiş
AÖ: x değişmiş. Çünkü zaten biz x'i değiştiriyoruz, değil mi?
Ö1: Evet
Arda Öğretmen: Bak,… sen x'i değiştiriyorsun, x'i bir sayıyla çarpıyorsun. Onun için y değişmeyecek. y'nin değişmemesi gerek. Anlamayan var mı arkadaşlar?

Arda Öğretmenin T5 görev tipi ile ilgili $t_{5,2}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir:

- $t_{5,2}$: y=f(x)=-3x+3 fonksiyonunun grafiği ile y=f($\frac{1}{3}x$) fonksiyonunun grafiği arasındaki ilişkiyi bulma

- $\tau_{5,2}$ (Geometrik teknik): *Bunun grafiğini ayrı çiz, bunun grafiğini ayrı çiz…x'e değer ver y'yi bul, y'ye değer ver x'i bul.* [Her iki fonksiyonun grafiği ayrı ayrı çizilerek karşılaştırılır.] *…bir fonksiyonun grafiğini eğer fonksiyon içindeki değişkeni k ile çarparsanız y ekseni değişmez, x ekseninde bir değişme söz konusu olur…*[genellemesine ulaşılır.]
- $\theta_{5,2}$: *…x'i değiştiriyorsun, x'i bir sayıyla çarpıyorsun. Onun için y değişmeyecek.* [y=f(kx) ifadesinde x çarpıldığından grafikte y değişmez, değişen x tir. Dönüşüm eksik bir şekilde açıklanmış] *x'e değer ver y'yi bul, y'ye değer ver x'i bul* [örtük olarak doğru iki nokta ile karakterize edilir]

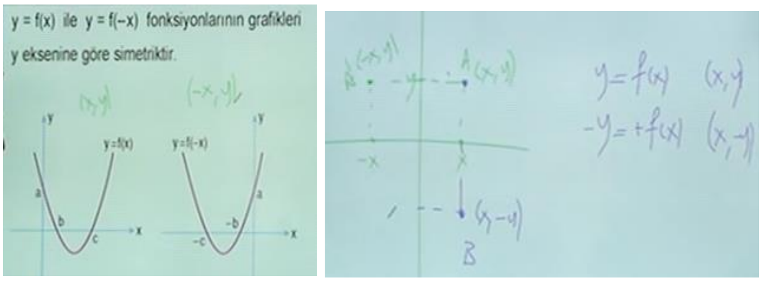
Arda öğretmenin T_5 görev tipiyle ilgili $t_{5,2}$ görevi geometrik teknikle (ya da grafiksel teknik) tamamlamıştır. Bu tekniğin uygulanmasında öğrenci öğretmenin talimatlarıyla öncelikle y=f(x) fonksiyonunun grafiğini çizmiştir. Sonra f(x) fonksiyonun kuralından yararlanarak değişken değiştirerek, y=f($\frac{1}{3}x$) fonksiyonunun kuralını bulmuştur. Bu fonksiyonların grafiklerinin eksenleri kestiği noktalar bulunarak, bu noktaların birleştirilip uzatılması neticesinde grafikler elde edilmiştir. Daha sonra bu grafikler karşılaştırılarak grafiklerin y eksenini kestiği noktaların değişmediği ve x eksenini kestiği noktaların değiştiği genellemesine ulaşılmıştır.

Bu didaktik prakseolojinin teknoloji bileşenine ilişkin ifadeler şu şekilde gerçekleşmiştir. Doğru grafiklerinin çiziminde iki nokta belirlenmesi doğrunun iki noktayla karakterize edildiği bilgisine öğretmenin örtük olarak sahip olduğu şeklinde ifade edilebilir. Diğer bir teknolojik açıklama "*…x'i değiştiriyorsun, x'i bir sayıyla çarpıyorsun. Onun için y değişmeyecek.*" şeklinde yapılmıştır. Bu açıklamada y=f(kx) fonksiyonunun grafiğinin y=f(x) fonksiyonun grafiğinden elde edilirken niçin x eksenini kesen noktanın değiştiği ve y eksenini kesen noktanın değişmediği açıklanmıştır. Ancak bu değişimin kuralı bir örnek üzerinden genelleştirilmeye çalışılmıştır. Bu açıklamanın informel bir açıklama olduğu ve gerçekleştirilen dönüşüm açısından birçok eksiklikleri bulunduğu da belirtilebilir. Bunun yerine burada şu tür bir açıklama yapılabilirdi. Görevde y=f(x) fonksiyonunun grafiği üzerindeki her bir noktanın apsisi 3 ile çarpıldığında g(x) fonksiyonunun grafiği elde edilsin. Eğer g(x) fonksiyonu üzerindeki herhangi bir nokta (x,y) ise ($\frac{x}{3}$,y) noktası f fonksiyonu üzerinde olmalıdır. Bu nokta f fonksiyonunu sağlar. O halde y=f($\frac{x}{3}$)=g(x) fonksiyonu g fonksiyonunun f türünden değeri olarak elde edilir. Bu iki fonksiyonun karşılaştırıldığında f fonksiyonundan g fonksiyonuna geçişte f fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktaların ordinatları sabit kalırken, apsislerinin 3 katına çıktığı görülmektedir. Ancak öğretmen bu tür bir açıklama yapmamıştır. Burada ayrıca bu dönüşümün uzaklığı korumadığı ve afin bir dönüşüm olduğu ifade edilebilirdi. Görüldüğü üzere burada afin dönüşüm yüzeysel bir şekilde incelenmiştir. Sonuç olarak bu didaktik prakseolojide teknolojik açıklamalar eksik bir şekilde verilmiştir.

Farklı bir açıdan bu görev, y=f(x) fonksiyonunun grafiği çizildikten sonra başka geometrik tekniklerle tamamlanabilirdi. Burada y=f(x)=-3x+3 fonksiyonunun grafiği x ve y eksenini sırayla (1,0) ve (0,3) noktalarında kestiği bulunabilirdi. Bir önceki paragrafta ifade edildiği üzere, y=f(x) fonksiyonu üzerindeki her noktanın apsisi 3 ile çarpıldığında y=f($\frac{x}{3}$) fonksiyonunun grafiği elde edildiği ifade edilebilirdi. Buradan da y=f($\frac{x}{3}$) fonksiyonunun grafiğinin x ve y eksenlerini sırayla (3,0) ve (0,3) noktalarında kestiği belirtilebilirdi. Bu noktalar birleştirilerek y=f($\frac{x}{3}$) fonksiyonunun grafiği elde edilebilirdi. Ancak bu tür bir teknik de gerçekleşmemiştir. Dolayısıyla bu didaktik prakseolojide alternatif teknikler kullanılmamıştır. Bu durum tekniksel çalışma anının gerçekleşmediğini göstermektedir. Yine burada öğretmenin geometrik tekniklerle simetri dönüşümlerinden görevi çözmek yerine 9. sınıfta öğrenilen tekniklerin kullanılması simetri dönüşümlerinin kullanıldığı bazı geometrik tekniklerin henüz kurumsallaştırılmadığını göstermektedir. Ancak 9. sınıfta öğrencilerin bildiği bir prakseolojinin kullanılması nedeniyle *kurumsallaştırma an*ının gözlendiği söylenebilir. Ayrıca bu didaktik prakseolojide belli ölçüde *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı* yaşanmıştır.

Farklı bir açıdan bu görevde alternatif teknik olarak sunulan geometrik teknik incelendiğinde, burada kullanılan simetri dönüşümlerinin temelleri 11. sınıf düzeyinde dönüşüm geometrisinde verilmektedir. Ancak bunların içerisinde afin dönüşümler bulunmamaktadır. Yani bu görevde incelenen afin dönüşümün temelleri öğrencilere ortaöğretimde anlatılmamaktadır. Bu durum bu görev tipinin öğrenilmesinde programdan kaynaklı ekolojik bir engel olduğunu göstermektedir.

Bu görevin çözümünden sonra öğretmen $t_{5,3}$ görevinde, y eksenini (0,-2) noktasında kesen y=f(x) eğrisi için y=f(2x) ve y=f(4x) fonksiyonlarının grafiklerinin y eksenini kestiği noktaların toplamını incelenmiştir. Öğretmen y=f(x) fonksiyonundan elde edilen y=f(kx) fonksiyonlarının y eksenini kestiği noktanın değişmeyeceği vurgulanarak teknik uygulanmıştır. Daha sonra öğretmen bu görev tipinde $t_{5,4}$ görevini vermiştir (Şekil 4.53).



Şekil 4.53. *T_5 görev tipindeki görevlerin tamamlanmasına yönelik verilen bilgi 2*

AÖ: …Karıştırmamak için diyorum, y=f(x) ile y=-f(x) bakın, biz bu ikisini öğrendik. Bunlar x eksenine göre simetriktirler. Şimdi bak, burada da bu sefer x'lerin işareti değişiyor. O zaman kime göre simetriği olacak?

Öğrenciler: y eksenine göre

AÖ: Bunu karıştırmamak için bir şey daha göstereceğim size…Şimdi ilköğretimde hatırlayın. (Boş bir sayfa açtı)… Şu noktanın adı nedir? (x,y) Peki (-x,y) neresidir? Şurası –x, burası da (-x,y). Şimdi daha önceki noktamız A, şimdi yeni noktamız A', ne oldu arkadaşlar? y'ye göre simetriklendi, değil mi? Peki, önceki öğrendiğimiz neydi? y=f(x) ve y=-f(x), değil mi?

Öğrenciler: Evet

AÖ: Bu eksiyi buraya alırsanız burası artı olur bir şey değişir mi?

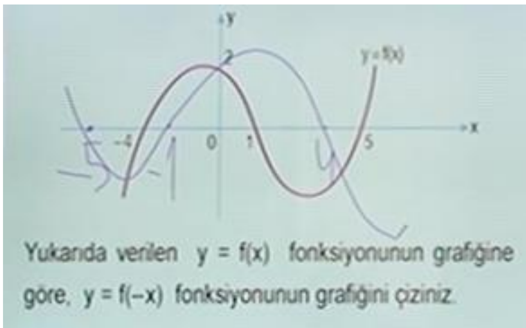
Öğrenciler: Hayır

AÖ: Ha, buradaki bir noktamız (x,y), değil mi?(f(x) üzerinde) Peki, buradaki bir noktamız (x,-y), değil mi?(-y=f(x) için) Bakalım, (x,y) noktası bu, peki (x,-y) noktası neresi çocuklar?

Öğrenciler: Aşağıda

AÖ: Şurada (x,-y) evet burasıda diyelim ki B olsun. İşte böyle olduğunda bakın nokta şöyle katlanıyor (x'e göre simetriyi eliyle gösterdi) Böyle olduğunda da şu şekilde (y'ye göre simetriyi eliyle gösterdi), anladınız mı? Herhangi bir nokta seçtiğim zaman bütün noktaları temsil ettiğinden dolayı grafik y eksenine göre simetriklenecektir, değil mi? Böyle olduğunda da x eksenine göre, bu şekilde iki durum arasındaki farkı ayırt edebileceksiniz.

Bu açıklamalarda Arda öğretmen kaynak B'de geçen bilgiyi verdikten sonra verilen bir y=f(x) fonksiyonunun eksenlere göre simetrileri alındığında bu dönüşümlerin fonksiyonda nasıl bir değişime neden olduğu açıklanmaya çalışıldığı görülmektedir. Bunun için öğretmen düzlemde birinci bölgede herhangi bir (x,y) noktası alarak bu noktanın x ve y eksenlerine göre simetrisini almıştır. Daha sonra fonksiyonun grafiğinin simetrisinin de benzer şekilde olduğu ifade edilmiştir. Bu anlamda burada verilen teknolojik açıklamanın yeterli olduğu ifade edilebilir. Didaktik anlar açısından bu görevde *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı* gerçekleştirilen simetrinin niçin y eksenine göre alındığı, bunun grafik üzerindeki noktalara ve fonksiyonun denklemine etkisi açıklandığından büyük ölçüde gözlendiği söylenebilir. Diğer taraftan teknolojik açıklamalar öğrencilerin daha önce öğrendiği nokta simetrisinden hareketle verildiğinden *kurumsallaştırma anı*nın yaşandığı görülmektedir. Bu açıklamalardan sonra Arda öğretmen kaynak B'de yer alan T_5 görev tipi ile ilgili $t_{5,4}$ görevini öğrencilere sunmuştur (Şekil 4.54).



Şekil 4.54. *Arda öğretmenin T_5 görev tipiyle ilgili $t_{5,4}$ görevi*

Ö5: (f(x)'in köklerinin y eksenine göre simetrisini aldı. Bunları referans alarak f(-x)'i çizdi) Böyle bir şey.

AÖ: Yanlış diyen var mı arkadaşlar?

Ö6: Hocam -4, neden artı 4 oluyor?

AÖ: y'ye göre yansımayacak mı eğri?

Ö6: Aaa, tamam.

AÖ: y'ye göre yansıma olduğu zaman bakın, şu tarafı görmeyin, bunu (grafiğin y eksenine göre sağ kısmı) olduğu gibi bu tarafa (y ekseninin soluna) katlayın, bu taraftakini (soldaki) de olduğu gibi bu tarafa (sağa) katlayın, değil mi?

Öğrenciler: Evet hocam.

AÖ: Ö5 biraz doğru çözmekle beraber, şekli çok (şekli salladı demek istiyor, gülüşmeler) ama genel itibariyle geçtiği noktalar doğru, tamam mı? y eksenine göre simetri aldığımızda arkadaşlar x noktaları tabi ki değişecek, y'nin değişmesi söz konusu değil.

Arda öğretmenin T_5 görev tipi ile ilgili $t_{5,4}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{5,4}$: Grafik temsili verilen y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(-x) fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{5,4}$ (Grafiksel Çözüm): y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktalar referans olacak şekilde y eksenine göre simetriği alınarak y=f(-x) fonksiyonunun grafiği bulunur.
- $\theta_{5,4}$: *y'ye göre yansıma olduğu zaman bakın,... bunu olduğu gibi bu tarafa katlayın* [ayna simetrisi informel] *y eksenine göre simetri aldığımızda arkadaşlar x noktaları tabi ki değişecek, y'nin değişmesi söz konusu değil.* [y eksenine göre simetri]

Bu görevi y ekseninde simetri alınan ilk görev olduğundan ilk karşılaşma anı gerçekleşmiştir. Ancak görev tiplerini keşfetme ve bunlara yönelik bir teknik geliştirme anı gözlenmeksizin teknik doğrudan verilmiştir. Ancak bu teknikte niçin y eksenine göre simetriği alındığına ilişkin teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı yukarıda açıklanmıştır.

Diyalogda teknik öğretmen tarafından grafiğin sağ tarafı sola ve sol tarafının sağa ayna simetrisi ile alınması yoluyla gerçekleştirilmiştir. Bu tekniğin $\theta_{5,4}$ teknolojisinde ayna simetrisi ve y eksenine göre simetride grafik üzerindeki noktaların nasıl etkilendiği açıklanmıştır. Bu tür açıklamalar teknolojik açıklamalar olarak nitelendirilebilir.

Bu görevde yer alan fonksiyonun 3 kökü olmakla birlikte kaçıncı dereceden bir fonksiyon olduğu bilinmemektedir. Bu durum fonksiyonun kuralını bulmayı mümkün kılmadığından cebirsel teknik uygulanamamaktadır. Dolayısıyla alternatif teknikler ortaya çıkmamıştır. Bunun sonucunda bu didaktik prakseolojide tekniksel çalışma anı gözlenmemiştir. Bu görevden sonra öğretmen T_6, T_7 ve T_8 görev tiplerine ilişkin birer görev öğrencilere sunmuştur. Bu görevlerde sırayla doğrusal fonksiyon, parabol ve parçalı fonksiyon grafikleri kullanılmıştır. Burada verilen görevler daha önce gerçekleştirilen dönüşümlere benzer şekilde gerçekleştiğinden ayrıntılı prakseolojik analizleri verilmemiştir.

4.2.2.3.2. *Arda öğretmenin fonksiyonların simetri dönüşümleriyle ilgili didaktik prakseolojilerine ilişkin bulgular*

Didaktik prakseolojilerin bileşenleri ile ilgili bulgular

Fonksiyonların simetri dönüşümleri ile ilgili Arda öğretmenin didaktik prakseolojilerinin bileşenleri, bu süreçte gözlenen didaktik anlar ve karşılaşılan ekolojik sorunlar Tablo 4.22'de verilmiştir.

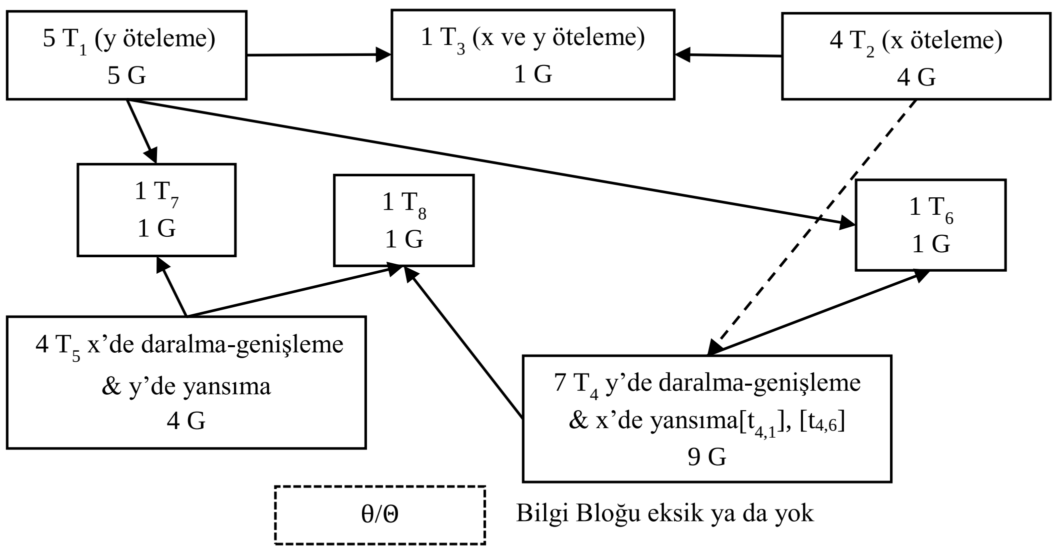
Tablo 4.22. *Arda öğretmenin simetri dönüşümlerinde prakseolojik bileşenler ve anlar*

Görev	Teknik*	Teknoloji	Gözlemlenen Anlar**	Ekolojik Sorunlar
$t_{1,1}$	G	Kısmen	İK→K→TTÇO	y=f(x), y ekseninde öteleme y=f(x)±k, parabol
$t_{2,1}$	G	Kısmen	İK→K→TTÇO	y=f(x), y ekseninde öteleme y=f(x) ±k
$t_{4,1}$	1.G1 2. G2	Kısmen	İK→GTK&TG→ TTÇO→K→TÇ	Afin dönüşüm
$t_{4,7}$	G	Yok	İK	y=f(x), x eksenine göre yansıma y=-f(x), Eğri grafiği
$t_{5,2}$	G	Kısmen	K→TTÇO	Afin dönüşüm,
$t_{5,4}$	G	Yeterli	İK→ K → TTÇO	Eğri grafiği

* G: Geometrik teknik, C: Cebirsel teknik **İK: İlk Karşılaşma, GTK&TG: Görev Tiplerini Keşfetme ve bir Teknik Geliştirme, TTÇO: Teknolojik-Teorik Çevrenin Oluşturulması, TÇ: Tekniksel Çalışma, K: Kurumsallaşma

Arda öğretmen fonksiyonların simetri dönüşümlerinde görevlerin seçiminde ders kitabına aşırı bağlı kaldığı görülmektedir. Öğretmen genellikle bir teknikle tamamladığı tekniklerin tamamını geometrik tekniklerle sonuçlandırmıştır. Bu tekniklerin çoğunlukla teknolojisi eksik bir şekilde verilmiştir. Özellikle fonksiyonların grafiklerine uygulanan dönüşümler ile bu dönüşümlerin fonksiyonun kuralına etkisi eksik bir şekilde informel açıklamalarla sınırlı kalmıştır. Öte yandan $t_{5,4}$ görevinde öğretmenin teknolojik anlamda kabul edilebilir açıklamalar sunduğu görülmektedir. Burada öğretmenin y ekseninde yansıma dönüşümünü nokta simetrisinden hareketle açıkladığı belirlenmiştir.

Bu alt başlıkta kullanılan tekniklerin tamamının geometrik teknikler olduğu göze çarpmaktadır. Bu kapsamda üç tür geometrik teknik kullanıldığı tespit edilmiştri. Birinci olarak izometrik dönüşümlerin kullanıldığı teknik doğrudan verildikten sonra görev bu bilgi vasıtasıyla sonuçlandırılmıştır. İkinci olarak bazı görevler 9. sınıfta öğrencilerin öğrendiği ve eğriyi karekterize eden noktaların düzlemde belirlenmesi yoluyla tamamlanmıştır. Son olarak afin dönüşümlerde bazen eğriyi karekterize eden noktalar yoluyla bazen de afin dönüşümler uygulanarak görevler sonuçlandırılmıştır. Bahsedilen tüm ilişkiler bağlamında Arda öğretmenin bu alt başlıkta gerçekleştirdiği didaktik prakseolojilerin bileşenleri arasındaki ilişkiler Şekil 4.55'de verilmiştir.



Şekil 4.55. *Arda öğretmenin simetri dönüşümlerinde ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler arasındaki ilişkiler*

Şekil 4.55'den simetri dönüşümleri alt başlığında Arda öğretmenin didaktik prakseolojilerde belli ölçüde ilişkilendirme olmakla birlikte, görev tiplerinin tümü birbirini destekleyecek şekilde ilişkilendirilmemiştir. Örneğin T_2 görev tipi sadece T_4 ve T_3 görev tipleriyle ilişkilendirilmiştir. Bu ilişkilendirmenin T_3 görev tipi ile ilgili olanının doğrudan bir ilişkilendirme olduğu ve T_4 ile ilgili olanının spontane gelişen bir durum neticesinde olduğu gözlenmektedir. Diğer yandan bütün görevlerde geometrik tekniğin kullanılması bu tekniğe öğretmenin bu alt başlıkta kurumsal bir statü kazandırma girişimi olarak yorumlanabilir. Son olarak bu alt başlıkta teknolojilerin büyük ölçüde yetersiz olarak verildiği belirlenmiştir. Bu durum gerekli ilişkilendirmenin yapılamaması ve matematiğin anlamlı bir biçimde öğrenimini zorlaştırdığı söylenebilir. Bu ilişkilendirmenin yapılamamasının programdaki ekolojik ilişkiler nedeniyle olduğu düşünülmektedir.

Didaktik anlar ile ilgili bulgular

Arda öğretmen fonksiyonların simetri dönüşümleri alt başlığında ders kitabında tekniğin ifadesi olarak nitelendirilebilecek bilgi ile öğretime başladığı görülmektedir. Bu durum görev tiplerinden birine ilişkin özel bir görev olarak belirtilen *ilk karşılaşma anı* ile öğretime başlanmadığını göstermektedir. İlk karşılaşma anı tekniğin nasıl uygulanacağına ilişkin bilgi verildikten sonra ortaya çıkmıştır. Diğer taraftan tekniğe ilişkin bilginin doğrudan verilmesi ilgili görev tiplerinin keşfedilmesi ve bunlara yönelik bir teknik geliştirme anını ortadan kaldırmıştır. Bununla birlikte öğretmenin tekniği doğrudan vermesi öğrencilerin tekniğin kapsamına ilişkin fikir geliştirmeden ve onların matematiksel düşünceleri desteklenmeden verilmiştir. Bu durum *teknolojik teorik çevrenin oluşturulması anı*na da olumsuz yansımış ve informel açıklamalar dışında bir açıklama ortaya konulamamıştır. Burada özellikle öğretmenin kanıtlamaya yönelik girişimde bulunmaması dikkat çekicidir.

Kurumsallaştırma anı bazı görevlerde ortaya çıkmış ve özellikle 9. sınıfta doğrusal fonksiyonların grafiklerini çizme bilgisinin kullanımı şeklinde ortaya çıkmıştır. Bu alt başlıkta en az ortaya çıkan anlardan biri *teknolojik çalışma anı* olarak nitelendirilebilir. Teknolojik çalışma anının bazı görevlerde gözlemlenmekle birlikte (örneğin doğrusal fonksiyon içeren görevler) bazı görevlerde görevin verildiği temsilden diğer temsillere geçiş mümkün olmadığından (grafiksel temsilden cebirsel temsile geçiş görevdeki eğrinin derecesi belli olmaması nedeniyle zorlaşması gibi) ortaya çıkmadığı tespit edilmiştir.

Didaktik prakseolojilerde didaktik anların genellikle çok azına yer verilmekle birlikte $t_{4,1}$ görevinde ortaya konulan didaktik prakseoloji bu noktada diğerlerinden ayrılmaktadır. Bu görevle ilgili didaktik prakseolojide neredeyse bütün didaktik anların (değerlendirme hariç) yaşandığı tespit edilmiştir. Didaktik anların bütününe didaktik prakseolojilerde yer verilmesinin matematiksel düşünceyi ve anlamlı öğrenmeleri desteklediği söylenebilir.

Didaktik prakseolojilerde ekolojik sorunlara ilişkin bulgular

Fonksiyonların simetri dönüşümleri alt başlığında yer alan dönüşümler incelendiğinde bu dönüşümlerin temellerinin 11. sınıf düzeyinde dönüşüm geometrisinde yer aldığı görülmektedir. Fonksiyonlarda simetri dönüşümleri ise 10. sınıfta öğretilmektedir. Bu durum Arda öğretmenin didaktik prakseolojilerini oluştururken özellikle izometrik dönüşümler ve afin dönüşümler içeren tekniklerin uygulanma sürecinde yeterli teknolojik açıklamalar verememesine yol açtığı belirlenmiştir. Öğretmenin ekolojik sorunlar nedeniyle eksik teknoloji vermesi neticesinde dönüşüm, fonksiyonun grafiği ve kuralı arasındaki ilişkilerin açık bir şekilde ortaya konulamadığı görülmektedir.

Farklı bir açıdan öğretmenin izometrik dönüşümlere (öteleme ve yansıma) ilişkin eksik teknolojik açıklamalarda bulunması konular arası kavramların birbirini besleme ve beslenme ilişkisinden kaynaklanan ekolojik uyumsuzluğun sonucu ortaya çıkmış olabilir. Diğer taraftan fonksiyonların simetri dönüşümlerinde bazı dönüşümlerin (y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(kx) ve y=kf(x) dönüşümleri) temellerinin ortaöğretimde verilmemesine rağmen bunların fonksiyonların grafiklerinde uygulanması istenmektedir. Arda öğretmenin bu konularda en az teknolojik açıklama yaptığı görülmektedir. Bu didaktik prakseolojilerin programda bulunmayışı bilgi bloğundan yoksun bir şekilde verildiğini ortaya çıkarmıştır.

Diğer bir ekolojik sorun, bazı görevlerde fonksiyonun henüz öğretilmeyen parabol ya da eğri türünden grafiklerine dönüşümlerin uygulanması neticesinde ortaya çıkmıştır. Bu görevlerde temsiller arası geçişte zorluklar yaşanması nedeniyle yeni tekniklerin geliştirilmesinin engellediği söylenebilir.

4.2.2.3.3. Arda öğretmenin fonksiyonlarda bileşke işlemi ve fonksiyonun tersi alt başlıklarında kullandığı didaktik prakseolojiler

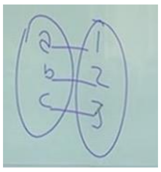
Arda öğretmen fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunda bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığına 5 ders saati ayırmıştır. Bu süreçte 46 göreve yer vermiştir. Bu görevler incelenerek 10 görev tipi tespit edilmiştir. Bu görev tipleri ve her bir görev tipine ait görevlerin sayısı Tablo 4.23'te sunulmuştur.

Tablo 4.23. *Arda öğretmenin bileşke işlemi ve fonksiyonun tersi alt başlığında gerçekleştirdiği görev tipleri*

Görev Tipleri	Görev Tiplerinin İfadesi	Görev Sayısı
T_1	Şema temsiliyle verilen bir fonksiyonun tersinin fonksiyon olup-olmadığını bulma	3
T_2	Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonun tersini bulma	6
T_3	Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonda belli bir değerin ters görüntüsünü bulma	6
T_4	Cebirsel temsilde bileşkesi ve fonksiyonlardan biri belli iken diğerini bulma	7
T_5	Bir fonksiyonun grafiği ile ters fonksiyonunun grafiği arasındaki ilişkiyi bulma	2
T_6	Cebirsel temsille verilen en az iki fonksiyonun bileşkesini bulma	7
T_7	Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonla başka bir fonksiyonun bileşkesinde belli bir değerin görüntüsünü bulma	2
T_8	Cebirsel temside bileşke fonksiyonun tersi ve fonksiyonlardan biri belli iken diğer fonksiyonda belli bir değerin görüntüsünü bulma	1
T_9	Cebirsel temsilde fonksiyonun kendisiyle bileşkesi belli iken fonksiyonun kuralını bulma	1
T_{10}	Fonksiyonların grafiklerinde fonksiyonların belli değerlerin görüntü ve ters görüntüsünü içeren görevler	11

Tablo 4.23'den Arda öğretmenin ters fonksiyona ilişkin görev tiplerini verdikten sonra bileşke işlemini öğrettiği, sonrasında bileşke ve ters fonksiyonla ilgili görev tiplerine öğretim sürecinde yer verdiği görülmektedir. Görev tipleri incelendiğinde cebirsel temsilin egemen olduğu dikkat çekmektedir. Bu alt başlıkta genellikle görev tiplerinde kullanılan görevleri öğretmen, kaynak B olarak isimlendirilen ders kitabından seçmiştir. Tekniklerin uygulanmasında öğretmen daha çok aktif olmakla birlikte öğrencilerin de bu süreçte belli ölçüde etkin oldukları görülmektedir. Görevlerin tamamlanmasında öğretmen ve öğrencilerin genellikle cebirsel tekniklere başvurdukları tespit edilmiştir.

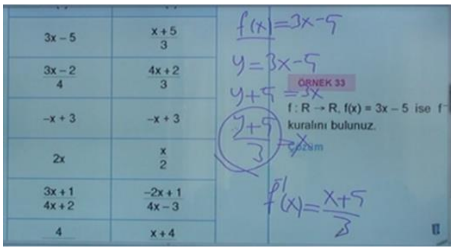
Arda öğretmen fonksiyonun tersi alt başlığına girişte bağıntı temelinde fonksiyon kavramını tanıttıktan sonra şema temsiliyle verilen bir fonksiyonun tersinin fonksiyon belirtip-belirtmemesine ilişkin kendisinin ürettiği 3 görevi art arda sunmuştur. Bu görev tipinde son görev Şekil 4.56'da verilmiştir.



Şekil 4.56. *Arda öğretmenin T_1 görev tipiyle ilgili $t_{1,3}$ görevi*

AÖ: …Peki, şöyle düşünelim. Normal bir fonksiyonun tersinin de tekrar fonksiyon olabilmesi için, o zaman ne olmalı? En az iki elemanın (tanım kümesindeki elemanlar) biriyle (değer kümesinde bir elemanla) eşleşmemesi lazım, bir de şurada açıkta (değer kümesi) elemanın kalmaması lazım. O zaman ancak şöyle olur (tahtaya iki küme çizdi). Evet, bu nasıl bir fonksiyondur?
Öğrenciler: Birebir bir fonksiyondur.
AÖ: Bir özelliği daha var boşta eleman kalmadığı için örten bir fonksiyondur. O zaman ne diyeceğiz? Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için olabilmesi ifadesi biraz yanlış kalır, tersinin de tekrar bir fonksiyon olması için, çünkü her fonksiyonun tersini bulabiliriz, ama bulduğumuz bir ters fonksiyon mudur? Olmayabilir, bir bağıntı olabilir tersi, fonksiyon olmayabilir. Evet, demek ki, bir fonksiyonun tersinin yine bir fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart nedir? Birebir olması ve örten olmasıdır. Bir fonksiyon birebir ve örten değilse tersi fonksiyon olamaz. Sebebini burada gördünüz, değil mi?

Arda öğretmen bu görevde verilen bir fonksiyonun tersinin de bir fonksiyon olabilmesi için gerekli olan şartların neler olması gerektiğini ortaya koyduğu görülmektedir. Bu görev şema temsiliyle verilmiş olup, görevin tamamlanması sürecinde eşleme tekniğinden yararlanıldığı belirlenmiştir. Tekniğin teknolojisinde bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için bire bir ve örten olması gerektiği vurgulanmıştır. Ancak bire bir ve örten fonksiyon kavramları informel biçimde diyalogda verilmiştir. Öğrencilere bu kavramlar 9. sınıfta öğretildiğinden dolayı ayrıntısına girilmediği düşünülmektedir. Bu anlamda görev tiplerinden biri olan şema temsiliyle verilen bağıntılardan fonksiyon olanların belirlenmesine ilişkin görevler verildiği (yeniden *ilk karşılaşma anı*), sonra bunların niçin fonksiyon olduklarının informel biçimde ortaya konulduğu (*teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı*) görülmektedir. Ayrıca burada kullanılan bilgi öğrencilere daha önce 9. sınıfta kazandırıldığından *kurumsallaştırma anı*nın da yaşandığı söylenebilir. Daha sonra öğretmen T_2 görev tipiyle ilgili Şekil 4.57'deki görevleri öğrencilere sunmuştur. Bu görevin bir fonksiyonun tersinin bulunmasında ilk görev olması prakseolojik analizine yer verilmesinde etkili olmuştur.



Şekil 4.57. *Arda öğretmenin T_2 görev tipinde $t_{2,1}$ görevi*

AÖ: f, A'dan B'ye bir fonksiyon olsun. Bu y=f(x) fonksiyonu 1-1 ve örten ise f'in tersi ne? f^{-1} ile gösteriyoruz. Şuraya dikkat etmenizi istiyorum. f(x)=y, değil mi? Bak x'i y ile eşleştiriyorum. Tersi nedir? y'yi x ile eşleştiriyorum. f(x)=y ve $f^{-1}(y)=x$, tamam mı? y'yi x ile eşleştirmiş doğru mu yani bu fonksiyon bir nevi tersleniyor, değil mi? Evet, size bir örnek vereyim. f(2)=5 ise $f^{-1}(5)=2$ oluyor, tamam mı burayı anladınız mı?...Bir fonksiyonun tersinin doğrusal fonksiyonların tersi için bir yol göstermiş burada, bunun nasıl öyle olduğunu tek tek bulacağız ben size anlatacağım. Ezberlemenize gerek yok, yani kendiniz çıkarmaya çalışacaksınız. Şu tablodakileri biz kendimiz çıkarmaya çalışalım. Evet, önce dinleyin arkadaşlar şimdi f(x) bir fonksiyon olsun f(x)=3x-5. Evet, f(x)=y demektir. y=3x-5 siz bu bağıntıda x'i yalnız bırakırsanız işte elde ettiğiniz ifade fonksiyonun tersi olur. Ne *yapacağız? x'i yalnız bırakacağız. y=3x-5; y+5=3x; (y+5)/3=x; Ha, fonksiyonumun tersi bu. Ne yapacağım? $f^{-1}(x)=(x+5)/3$ olur arkadaşlar, tamam mı? Anladınız mı?*

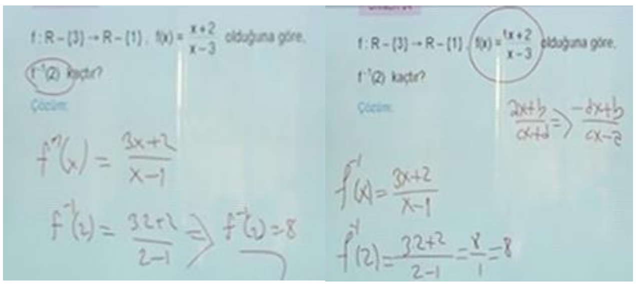
Arda öğretmenin T_2 görev tipi ile ilgili $t_{2,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

$t_{2,1}$: Cebirsel temsille verilen y=f(x)=3x-5 fonksiyonunun tersini bulma

- $\tau_{2,1}$: (Cebirsel Teknik) *f(x)=y demektir. y=3x-5 siz bu bağıntıda x'i yalnız bırakırsanız işte elde ettiğiniz ifade fonksiyonun tersi olur.* [Herhangi bir fonksiyonun tersi bulunurken fonksiyon kuralında f(x)=y yazıldıktan sonra x değişkeni y cinsinden bulunur. Bulunan ifade fonksiyonun tersidir.]
- $\theta_{2,1}$: *… f'in tersi ne? f^{-1} ile gösteriyoruz* [İnformel açıklama], *f(x)=y değil mi? Bak x'i y ile eşleştiriyorum. Tersi nedir? y'yi x ile eşleştiriyorum.* [informel ters fonksiyonu açıklama], *bağıntıda x'i yalnız bırakırsanız işte elde ettiğiniz ifade fonksiyonun tersi olur* [ters fonksiyon]

Bu görev bir fonksiyonun tersinin bulunuşu ile ilgili ilk görev olduğundan *ilk karşılaşma anı* gözlenmiştir. Arda öğretmenin bu görevde tabloda verilen fonksiyonların terslerini bulmak için öğrencilere genel bir teknik vermeye çalıştığı görülmektedir. Bu durum *görev tiplerini keşfetme ve bir teknik geliştirme anı*nın yaşandığını şeklinde yorumlanabilir. Tekniği geliştirme sürecinde öğretmen bazı aşamaların atlanıldığı belirlenmiştir. Öğretmen tekniği uygularken öncelikle f(x) yerine y yazmıştır. Daha sonra x değişkenini y cinsinden (y+5)/3=x şeklinde elde etmiştir. Daha sonra x değişkeni yerine $f^{-1}(x)$ ve y değişkeni yerine x yazarak fonksiyonun tersini elde etmiştir. Burada değişken değiştirme işlemi yapılmasına rağmen bu işlem bazı aşamalar atlanarak gerçekleştirildiğinden anlamsız bir şekilde uygulanmıştır. Bu işlem şu şekilde gerçekleştirilebilirdi. Bir fonksiyonda y=f(x) olduğundan f(x)=3x-5 fonksiyonunda f(x) yerine y yazılırsa, y=3x-5 elde edilir. Buradan x değişkeni y değişkeni cinsinden x=(y+5)/3 bulunur. Bire bir ve örten bir fonksiyonda y=f(x) ise ancak ve ancak $f^{-1}(y)=x$ tir. O halde x yerine $f^{-1}(y)$ yazılabilir. O halde $f^{-1}(y)=(y+5)/3$ şeklinde elde edilir. Bu fonksiyonda y yerine x yazılırsa $f^{-1}(x)=(x+5)/3$ şeklinde bulunabilirdi. Görüldüğü üzere Arda öğretmenin herhangi bir fonksiyonun tersini bulurken değişken değiştirme aşamasını atladığı görülmektedir. Ayrıca fonksiyonun tersinin bulunması sürecinde verilen fonksiyonun bire bir ve örten olması gerektiği belirtilmesine rağmen söz konusu fonksiyonun bir bir ve örtenliğine ilişkin inceleme yapılmadan doğrudan fonksiyonun tersinin bulunmaya çalışıldığı anlaşılmaktadır. Bu tekniğin teknolojisinin teknikteki bazı aşamalar atlanılması nedeniyle açıklanmadığı ve eksik bir şekilde gerçekleştirildiği söylenebilir.

Bu didaktik prakseolojide bir fonksiyonun tersinin bulunmasına ilişkin tekniğin uygulanma sürecinde teknolojik açıklamaların yetersiz bir şekilde sunulması teknolojik-teorik çevreyi oluşturma anının uygun bir şekilde kurulmadığını göstermektedir. Farklı bir teknikle fonksiyonun tersinin kuralının elde edilmesi sürecinde teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı cebir alanıyla bağlantılı bir şekilde şöyle kurulabilirdi: Bu tekniğin öncesinde bileşke işlemi, bire bir ve örten fonksiyon, birim fonksiyon ve bir fonksiyonla tersinin bileşkesinin birim fonksiyon olduğu ($fof^{-1}=f^{-1}of=I$) şeklinde ifade edilebilecek bilgilerin verilmesi gerekirdi. Yani $(fof^{-1})(x)=I(x)$ ve $(f(f^{-1}(x))=x$ tir. Burada değişken değiştirilirse, $3f^{-1}(x)+5=x$ elde edilir. Buradan f'in tersi $f^{-1}(x)=(x-5)/3$ olarak çekilebilirdi. Ancak bu tür bir teknik ortaya çıkmamıştır. Dolayısıyla burada alternatif teknikler bulunmasına rağmen kullanılmamıştır. Bu didaktik prakseolojide alternatif tekniklerden öğretmen yararlanmadığından *tekniksel çalışma anı* gerçekleşmemiştir. Diğer taraftan bu didaktik prakseolojide görevlerde doğrusal, ikinci dereceden ve rasyonel fonksiyonlar kullanılmıştır. Dolayısıyla *görevleri keşfetme anı*nın bu üç fonksiyon kullanılmasıyla elde edilen fonksiyonların tersinin bulunmasını içerdiği belirlenmiştir. Öğretmen diğer beş görevi de benzer yaklaşımlarla tamamladıktan sonra T_3 görev tipindeki görevleri öğrencilere sunmuştur. Bu görev tipiyle ilgili Şekil 4.58'de sunulan $t_{3,2}$ görevinde farklı iki teknik kullanılması nedeniyle prakseolojik analizi yapılmıştır.



Şekil 4.58. *Arda öğretmenin T_3 görev tipinde $t_{3,2}$ görevi*

AÖ: Arkadaşınız önce şu fonksiyonun f(x)=$\frac{x+2}{x-3}$ tersini alıyor. Demin bir kural vardı. Hatırlatalım. $\frac{ax+b}{cx+d}$ ise tersi ne oluyordu? Şu ikisi a ve d yer değiştiriyordu. $\frac{-dx+b}{cx-a}$ hem yer hem işaret değiştirir. Şunun (x+2 kısımdaki x'in yanına 1 yazıyor) katsayısı

1'dir. 1 ile 3 yer değiştirecek. O zaman $f^{1}(x)$ ne olacak? -3 buraya (pay kısmında bulunan x'i işaret ediyor) +3 diye geçecek, burada 1 var. Ne olarak? Geçecek -1. $f^{-1}(x)=\frac{3x+2}{x-1}$. Şimdi, tersini bulduktan sonra x gördüğünüz yere 2 yazıyorsunuz. $f^{-1}(2)=\frac{3.2+2}{2-1}=\frac{8}{1}=8$ Bir başka çözüm yolu sunalım mı? Belki bunu da ilerde sürekli kullanmak istersiniz. Bir dinleyin arkadaşlar. Bunu sık sık kullanabilirsiniz. Rahat kullanılabilir bir metottur. $f^{1}(2)=a$ olsun. Yani kaç olduğunu soruyor ya, bilmiyorum a olsun, olur mu? Peki, yer değiştirelim yani bu (2'yi işaret etti) buraya gelsin bu (a'yı işaret etti) da buraya gelirse ne olur? f(a)=2, f(a) nedir? f(x) buysa (f(x)= $\frac{x+2}{x-3}$ fonksiyonunu gösterdi) o zaman 2=$\frac{a+2}{a-3}$ olmaz mı? İçler dışlar çarpımı yapalım altında gizli 1 var. 2a-6=a+2 mi? Bir a bu tarafa (2a-6'yı işaret ediyor) gelse a kalır 6 öteki (a-6=2) tarafa gitse 8. a=8, tamam mı?

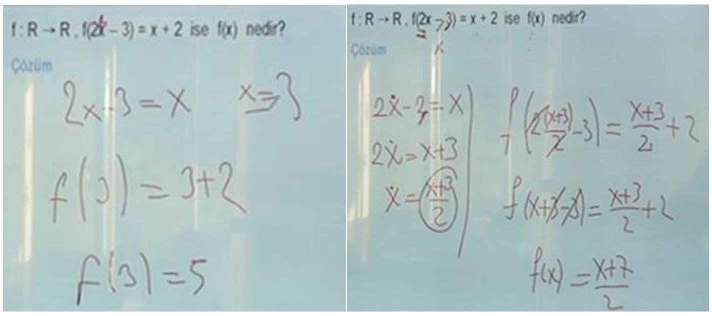
Arda öğretmenin T_3 görev tipi ile ilgili $t_{3,2}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

$t_{3,2}$: Cebirsel temsili f:R-{ 3 }→R-{ 1 } tanımlı f(x)=$\frac{x+2}{x-3}$ verilen f fonksiyonunda $f^{-1}(2)$ nedir?

- $\tau_{3,2,1}$: (Cebirsel Teknik) *Hatırlatalım. $\frac{ax+b}{cx+d}$ ise tersi ne oluyordu?.... $\frac{-dx+b}{cx-a}$ hem yer hem işaret değiştirir...$f^{-1}(x)=\frac{3x+2}{x-1}$... x gördüğünüz yere 2 yazıyorsunuz.*
- $\tau_{3,2,2}$: *$f^{-1}(2)=a$ olsun ...yer değiştirelim...f(a)=2, f(a) nedir? f(x) buysa (f(x)= $\frac{x+2}{x-3}$ fonksiyonunu gösterdi) o zaman 2=$\frac{a+2}{a-3}$ ...a=8.*
- $\theta_{3,2,1}$: ?
- $\theta_{3,2,2}$: *Peki, yer değiştirelim yani bu (2'yi işaret etti) buraya gelsin bu (a'yı işaret etti) da buraya gelirse ne olur?* [örtük bir şekilde f bire bir ve örten olduğunda $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$]

Diyalogda $t_{3,2}$ görevinin 2 farklı cebirsel teknikle çözüldüğü görülmektedir. İlk olarak birinci tekniğin bir önceki görev tipinde rasyonel bir fonksiyonun tersinin genel halini yansıttığı görülmektedir. Burada f:R-{$\frac{-d}{c}$}→ R-{ $\frac{a}{c}$ } tanımlı f(x)=$\frac{ax+b}{cx+d}$ şeklindeki rasyonel bir fonksiyonun tersi f^{-1}:R-{$\frac{a}{c}$}→ R-{ $\frac{-d}{c}$ } tanımlı $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ şeklinde ifade edilmiştir. Bu tekniğin teknolojisi bir önceki görevde üretilen teknikte eksik bir şekilde (değişken değiştirme aşaması ve bire bir ve örtenliğine ilişkin inceleme yapılmaması) ortaya konulmuştur. İkinci teknikte ise bire bir ve örten bir fonksiyonda y=f(x) ise ancak ve ancak $f^{-1}(y)=x$ ifadesi kullanılmasına rağmen burada da fonksiyonun bire bir ve örten olduğu belirtilmemiştir. Bu anlamda bu teknikte teknolojik olarak eksik yapılandırılmıştır.

Didaktik anlar açısından bu didaktik prakseoloji incelendiğinde, birden fazla teknik kullanılması nedeniyle tekniksel çalışmanın yaşandığı anlaşılmaktadır. Bu tekniklerin uygulanma sürecinde açıklamalar büyük ölçüde eksik kaldığından teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı örtük de olsa yaşandığı söylenebilir. Bu görev tipinde diğer tekniklerde benzer süreçler takip edilerek çözülmüştür. Daha sonra T_4 görev tipiyle ilgili görevler öğrencilere sunulmuştur. Bu görev tipinde ilk görev olarak ifade edilen ve Şekil 4.59'da sunulan $t_{4,1}$ görevinin prakseolojik analizi incelenmiştir. Bu görevin prakseolojik analizinin incelenmesinde bir öğrencinin problemin çözümünü yanlış yapması ve bu yanlışlığı öğretmenin giderme sürecinde tekniğin uygulanmasına ilişkin bazı açıklamalarda bulunması etkili olmuştur.



Şekil 4.59. *Arda öğretmenin T_4 görev tipinde $t_{4,1}$ görevi*

AÖ: Evet gel Ö7.

Ö7: 2x-3=x olursa, x=3 çıkar. Ondan sonra yerine yazdığımızda f(3)=3+2=5 çıkar.

AÖ: Ama f(3) istenmiyor bizden.

Ö8: Evet hocam, ben de öyle yaptım.

Ö7: Hocam ee x, 3 çıkıyor ya… İşte x'in yerine 3 yazıyoruz.

AÖ: Ama bizden f(x) isteniyor, f(3) istenmiyor. Genel fonksiyon isteniyor bizden. Anladın mı beni?

Ö7: Hocam böyle değil mi?

AÖ: Yok. Şurada doğru düşündün, ben burasının (2x-3'ü gösterdi) x olmasını istiyorum. O zaman şu x (2x-3'teki) ile şu x'i biraz ayrı gibi düşünün, tamam mı? Hatta şunun üstüne bir nokta atayım ben, bu x'in yerine ne yazarsam $2\dot{x}$-3=x olur? Anladınız mı? Bak, şu x'in ($\dot{x}$ gösterdi) yerine ne yazarsam şurası (2x-3' gösterdi) x olur? Bakın buna nokta koydum şu ikisini ayrı tutacağım bu x'i ($\dot{x}$ gösterdi) yalnız bırakacağım $2\dot{x}$=x+3; $\dot{x}$=(x+3)/2 yani şu x ($\dot{x}$ gösterdi) yerine (x+3)/2 yazmam lazım. (x+3)/2 bunun (2x-3 gösterdi) tersi değil midir? Arkadaşlar bunun tersini biraz sonra bileşke fonksiyonlara geçtiğimizde bunun sebebini net anlayacaksınız. Bir fonksiyonla bileşkesi eğer birimse o fonksiyonlar birbirinin tersi olacak, tamam mı? Orada da size izah edeceğiz bunun tersini (2x-3 gösterdi) yerine yazdığımızda zaten burası f(x)'in ta kendisi çıkacak. Bunun tersini x gördüğümüz her yere yazıyoruz, tamam mı?

Ö8: O zaman (x+3)/2 yazacağız.

AÖ: Evet, x gördüğüm yere ne yazacağım? (x+3)/2, f(2·(x+3)/2-3)=(x+3)/2+2 şu ikiler birbirini götürdü mü? Ne kaldı? f(x+3-3)= (x+3)/2+2; şunlar da birbirini götürdü mü? Geriye ne kaldı? f(x)=(x+7)/2. f(x) buna eşittir (x+7)/2. Demek bu tip sorularda yani f(x)'in farklı bir fonksiyonu verilmişse şurası, (söyleyeceği şeyi değiştirdi) aslında hani diziler bilmiyorsunuz ama ilerde göreceksiniz. f(x) bir dizi ise bu (f(2x-3)'i işaret ederek) bir alt dizidir. Anladınız mı? Yani öyle düşünün bu (f(2x-3)'i işaret ederek) f(x)'in farklı bir fonksiyonu olarak düşünün ötelenmiş hali, değil mi? Ötelenmeyi gördünüz siz, değil mi? Bunu (f(2x-3)'i işaret ederek) verseydi bunu (f(x) işaret etti) bulabilirdik, ya hani. (Öğrenciler gülüyor) Böyle verip kendisini istediği zaman şu içindeki ifadenin tersini x gördüğünüz yere yazacaksınız. Anlaşıldı mı? Bu soruyu bileşkeden sonra öğrenseydik daha iyi olurdu... Burada fonksiyon f(g(x))=h(x) olsun. Peki, x gördüğümüz yere ne yazıyoruz? x gördüğümüz yere bunun (g(x)'in altını çizerek) tersini yazıyoruz. x=g^{-1}(x) yazarsam sen f(x)'i bulursun. Anladınız mı? Mantık bu.

Arda öğretmenin T_4 görev tipi ile ilgili $t_{4,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

$t_{4,1}$: Cebirsel temsille verilen f(2x-3)=x+2 ise f(x) nedir?

- $\tau_{4,1}$: (Cebirsel Teknik) *…bunun tersini (2x-3 gösterdi) yerine yazdığımızda zaten burası f(x)'in ta kendisi çıkacak*. [f(g(x))=h(x) eşşitliğinde x yerine g^{-1}(x) yazılırsa f fonksiyonu bulunur.]

- $\theta_{4,1}$: … *Bir fonksiyonla bileşkesi eğer birimse o fonksiyonlar birbirinin tersi olacak.* [Ters fonksiyon]… *Bunun tersini x gördüğümüz her yere yazıyoruz.* [Değişken değiştirme], *f(x) bir dizi ise bu (f(2x-3)'i işaret ederek) bir alt dizidir… f(x)'in farklı bir fonksiyonu olarak düşünün ötelenmiş hali* [Alt diziye ilişkin açıklama]

Arda öğretmen bu görevde sonuçlandırması için önce Ö7 kodlu öğrenciyi tahtaya kaldırmıştır. Ancak öğrenci bu tip bir görevle ilk kez karşılaştığından bir önceki görev tipindeki öğretmenin sunduğu tekniği uygulamaya çalışmıştır. Bu *ilk karşılaşma an*ının gözlendiğini göstermektedir. Tekniğin bu şekilde uygulanamayacağını belirten öğretmen daha sonra bu tekniğin nasıl uygulanması gerektiğini diyalogda "*bunun tersini (2x-3 gösterdi) yerine yazdığımızda zaten burası f(x)'in ta kendisi çıkacak.*" şeklinde açıklamıştır. Bu sözlerle f(g(x))=h(x) türündeki fonksiyonlarda x yerine g fonksiyonunun tersi yazılması gerektiği ifade edilmektedir.

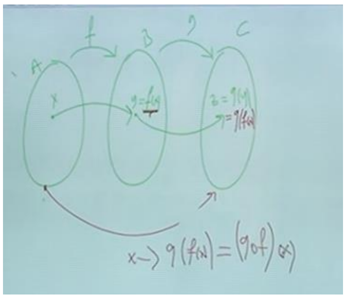
Tekniğin teknolojisi incelendiğinde f(g(x))=h(x) türündeki fonksiyonlarda f(x) fonksiyonu istendiğinde verilen eşitlikte niçin x yerine g fonksiyonunun tersinin yazılması gerektiği "*Bir fonksiyonla bileşkesi eğer birimse o fonksiyonlar birbirinin tersi olacak*" şeklinde ifade edilmiştir. Yine değişken değiştirme işlemi diyalogda "*Bunun tersini x gördüğümüz her yere yazıyoruz*" şeklinde açıklanmıştır. Ayrıca f(2x-3) fonksiyonunun f(x) fonksiyonunun bir alt dizisi olduğu ifade edilerek alt dizi kavramı diyalogda f fonksiyonunun ötelenmiş hali olarak açıklanmaktadır. Bunlar teknolojik teorik çevreyi oluşturma anına ilişkin açıklamalar olarak değerlendirilmekte ancak büyük ölçüde eksik ortaya konulduğu görülmektedir. Bunun nedeni öğretmenin bileşke işlemini henüz anlatmamış olması ve bu teknolojik açıklamalarda bileşke işleminin kullanılacak olmasının etkili olduğu görülmektedir. Örneğin öğretmen niçin f(g(x))=h(x) türündeki fonksiyonlarda f(x) istenirken x yerine g fonksiyonunun tersinin yazıldığını bir örnek görev üzerinden deneysel olarak göstermiş ve informel biçimde bileşke işlemine girmeden açıklamaya çalışmıştır. Bileşke işlemi ile buradaki teknik şu şekilde uygulanabilirdi. fog=h ifadesinde eşitliğin her iki tarafına sağdan g^{-1} eklenirse $(fog)og^{-1}=hog^{-1}$ birleşme özelliğinden $fo(gog^{-1})=hog^{-1}$ şeklinde yazılabilir. Fonksiyonla tersinin bileşkesi birim fonksiyon olduğundan $foI=hog^{-1}$ ve son olarak bir fonksiyonla birim fonksiyonun bileşkesinden $f=hog^{-1}$ şeklinde elde edilebilirdi.

Bu matematiksel prakseolojiden fonksiyon konusunda alt başlıkların sıralamasının öğretmenin didaktik prakseolojilerini etkilediği söylenebilir. Burada ters fonksiyonun bileşke fonksiyondan önce anlatılması bileşkenin henüz anlatılmamış olması Arda öğretmenin burada gerçekleştirdiği didaktik prakseolojide yukarıda açıklanan matematiksel prakseolojiyi uygun bir şekilde sınıfa sunamamasına neden olmuştur. Bu doğrultuda öğretmenin bazı açıklamaları yapamadığı ve bunları bileşke işleminin öğretiminden sonra yapmayı düşündüğü görülmektedir. Buradan fonksiyon konusunda 10. sınıf düzeyinde konu içi alt başlıkların sıralamasının didaktik prakseolojileri etkileyebildiği belirtilebilir.

Öğretmen diyalogda "*Ötelenmeyi gördünüz siz, değil mi? Bunu (f(2x-3)'i işaret ederek) verseydi bunu (f(x) işaret etti) bulabilirdik, ya hani.*" sözleriyle bu görevin geometrik tekniklerle çözülebileceğini işaret etmesine ve öteleme ile bileşke işlemi arasındaki ilişkiyi göstermesine rağmen bu tekniğin çözümünü yapmamıştır. Diğer taraftan öğretmenin y=f(x) fonksiyonundan y=f(2x-3) elde edilmesi durumunu öteleme olarak yanlış biçimde ifade etmiştir. Öteleme izometrik bir dönüşümdür. Ancak burada belirtilen dönüşümün uzaklığı korumadığı ve afin dönüşüm olduğu tespit edilmiştir. Bu anlamda dönüşüm yanlış bir biçimde ifade edilmiştir.

Diğer taraftan geometrik tekniklerle bu görevin tamamlanabileceği işaret edilmiş ancak bu gerçekleştirilmemiştir. Son olarak öğretmenin "*Böyle verip kendisini istediği zaman şu içindeki ifadenin tersini x gördüğünüz yere yazacaksınız*" şeklindeki sözlerinden bu tip görevlerde uygulanacak tekniğin ortaya konulduğu anlaşılmaktadır. Bu durum *görev tiplerini keşfetme ve bir teknik geliştirme anı*nın yaşandığını göstermektedir.

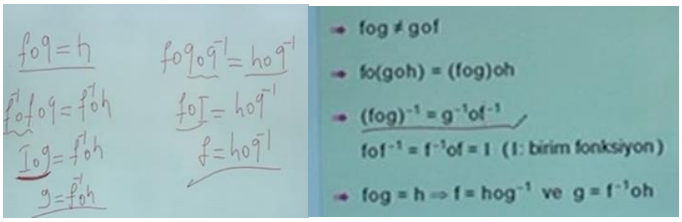
Matematik dersi öğretim programında bileşke işlemine ters fonksiyondan önce yer verilmesine rağmen öğretmenin öğretim yaklaşımında ters fonksiyon alt başlığını öğrettiği ancak henüz bileşke işlemini öğretmediği görülmektedir. Arda öğretmen yukarıda açıklanan görev sonrası bileşke işlemini Şekil 4.60'da verildiği şekliyle açıklamıştır.



Şekil 4.60. *Arda öğretmenin bileşke fonksiyonun girişinde verdiği bilgi*

AÖ: Bileşke fonksiyonuna geçiyoruz… Evet şurası A, şurası B ve şurası C. A'dan B'ye bir fonksiyon tanımlarsak f fonksiyonu olsun. Şuradaki x değeri şurada kime götürecek? y değerine götürecek. Bu y değeri aynı zamanda f(x) demek, değil midir? Evet, y ya da f(x). B'den C'ye bir fonksiyon tanımlayalım bu da g fonksiyonu olsun. Bu değeri burada nereye götürecek z olsun. z=g(y), y yerine ne yazabiliriz arkadaşlar? f(x) yazabiliriz. z=g(f(x)) aslında baştaki x kime gitti arkadaşlar? x kimle eşleşti g(f(x)) gidiyor arkadaşlar. Biz bu g(f(x))'i şöyle yazıyoruz (gof)(x). g(f(x)) demek (gof)(x) demek, anladınız mı? Yani önce x'in f'teki görüntüsü o, f(x) oluyor sonra f(x)'in g'deki görüntüsünü aramaya çalışıyoruz, tamam mı arkadaşlar?

Arda öğretmen burada iki fonksiyonun bileşkesinin nasıl gerçekleştirileceğini ifade ettiği görülmektedir. Burada bileşkenin şema üzerinde eşleme yaklaşımıyla tanıtıldığı görülmektedir. Ayrıca iki fonksiyonun bileşkesinin (fog)(x)=f(g(x)) biçiminde yazılabileceği ifade edilerek, örtük de olsa bileşke ile değişken değiştirme arasında ilişki kurulduğu ifade edilebilir. Bu açıklamalardan sonra öğretmen bileşke işleminin özelliklerini aşağıdaki şekilde ifade etmiştir (Şekil 4.61).



Şekil 4.61. *Arda öğretmenin bileşke fonksiyonun özelliklerine ilişkin verdiği bilgi*

AÖ: Burada bileşke fonksiyonun bazı özellikleri var. Mesela bileşke fonksiyonun birleşme özelliği fo(goh)=(fog)oh üç tane fonksiyonun ikişer ikişer bileşkelendirilmesi, önce sondaki iki fonksiyonun bileşkesini alıp sonra ilk fonksiyonla bileşkesini almanız ya da birinci ve ikinci fonksiyonun bileşkesini üçüncü fonksiyonla sonra bileşkesini alırsanız sonuç değişmez…Ama sıra önemli bileşkede sıranın önemi var. fog ile gof farklı şeylerdir. Yani fog ile gof aynı şeyler değil. Dolayısıyla sıra burada önemlidir. Bileşke fonksiyonun tersini aldığımızda bakın burası önemli $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ harflerin yeri değişir. Bu önemli bir kural…Bir fonksiyonla tersinin bileşkesi birim fonksiyondur. Birim fonksiyonda I(x) şeklinde gösteriyoruz. Bu da x'e eşittir. Birim fonksiyon neydi? Tanım kümesindeki her *değeri kendisiyle eşleştiren fonksiyon. Evet, fog=h ise f=hog^{-1} yani bu nasıl oluyor? Bunu size izah etmeye çalışayım arkadaşlar. fog=h ise burada f'yi yalnız bırakmak yani burada cebirsel bir işlemle özdeştirmek istiyorum. x+2=3 ise x'i bulmak için 2'yi bu tarafa atıyoruz ya, x=3-2; x=1 diyoruz, değil mi?... Fonksiyonlarda da böyle bir şey var, yani böyle bir bileşke işlemi h'a eşit ise f'yi nasıl bulabiliriz ya da g'yi nasıl bulabiliriz? Bunu size söyleyeceğim. Şimdi birinci yol eğer g'yi istiyorsa fonksiyonun her iki tarafına f^{-1} bileşkesi yazılır. fog=h; f^{-1}ofog= f^{-1}oh; Iog= f^{-1}oh elde edilir. Bir fonksiyonla birim fonksiyonun bakın herhangi bir fonksiyon birim ne demektir arkadaşlar? Mesela çarpmada birim nedir?*

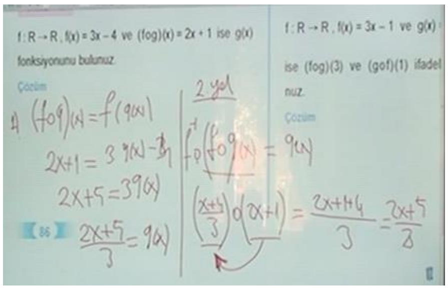
Öğrenciler: Etkisiz eleman

AÖ: Etkisiz eleman bir etkisi yok. Toplamada etkisiz eleman var. Mesela 0 etkisi var mı? Hayır. Fonksiyonlarda birim fonksiyonun bir etkisi yok. Bu ne demek? Aynı zaman da (Iog), g demektir. g= f^{-1} oh eşit. Peki hocam siz g'yi buldunuz, böyle bir soruda f'i isteseydi bizden. Burada (fog=h) f'i isteseydi bizden g'yi yok edecektik, değil mi. Peki g'yi nasıl yok ederiz? g'nin tersiyle. fog=h; fogog^{-1}=hog^{-1} biliyorsunuz bileşke işlemlerde sıra önemli yani sağdan bileşke, soldan bileşke hangi taraftan yazdığınız önemlidir, tamam mı? fog=h; fogog^{-1}=hog^{-1} Burası (gog^{-1}) neye eşittir? Birim fonksiyona eşittir. foI= hog^{-1} bu da f= hog^{-1} elde edilir.

Arda öğretmenin fonksiyonun özelliklerini ilk kez burada verdiği görülmektedir. Öğretmenin bileşke işlemini ters fonksiyondan sonra öğrettiği belirlenmiştir. Bu doğrultuda belli ölçüde de olsa bileşke işleminin cebir alanıyla ilişkisini ortaya çıkarmada kullanılabilecek bileşke işleminin özellikleri de verilmesi gereken yerde incelenmediği söylenebilir. Bu açıdan ters fonksiyon alt başlığında kullanılabilecek bileşke işleminin özelliklerinin fonksiyon konusunun alt başlıklarının sıralamasında ekolojik sorun olacak şekilde organize edilmesi nedeniyle yararlanılamadığı tespit edilmiştir.

Fonksiyonlarda bileşke işlemine ilişkin verilen özellikler öğretmen tarafından genellikle informel açıklamalarla ifade edilmiştir. Bunların tekniklerin uygulanmasına yönelik ipuçları verdiği belirtilebilir. Bunlardan fog ve f belli iken g fonksiyonunun bulunmasına ilişkin özellik kanıtlanmıştır. Ancak bu kanıtlama sürecinde bazı aşamaların atlandığı (örneğin birleşme özelliği) tespit edilmiştir. Diğer taraftan iki fonksiyonun bileşkesinin tersine ilişkin özelliğin ((fog)$^{-1}$=g^{-1}of^{-1} özelliği) ne olduğu açıklanmış, ancak niçin geçerli olduğuna ilişkin bilgi verilmemiştir. Bu anlamda özellikler teknolojik açıdan eksik bir şekilde yapılandırılmıştır.

Bu açıklamalardan sonra öğretmen T_6 görev tipiyle ilgili görevleri öğrencilere sunmuştur. Bu görevlerde bileşke işlemi değişken değiştirme temelinde uygulanmıştır. Bundan sonraki görev tiplerinde de bileşke işlemi benzer şekilde uygulandığından bu görev tipiyle ilgili görevlerin ayrıntılı prakseolojik analizine yer verilmemiştir. Daha sonra öğretmen T_4 görev tipiyle ilgili $t_{4,2}$ görevini öğrencilere sunmuştur. Bu görevin prakseolojik analizine yer verilmesinde iki farklı teknikle çözülmesi ve fonksiyonların bileşkeleriyle ilgili verilen özelliklerden sonra ilk görev olması etkili olmuştur (Şekil 4.62).



Şekil 4.62. *Arda öğretmenin T_4 görev tipinde $t_{4,2}$ görevi*

AÖ: … f(x) ve fog verilmiş bizden g(x) fonksiyonu isteniyor.

Ö12: (fog)(x) eşittir. f(g(x))'ten. (fog)(x)=f(g(x)), 2x+1=3g(x)-4, 2x+5=3g(x), $g(x) = \frac{2x+5}{3}$

Ö13: Eksilisini eklediğimizde g(x) ..(diğer yola işaret etti. Sözünü tamamlamadı)

AÖ: Zaten öyle yapacağız…Şimdi ikinci yoldan yapalım…Şimdi bize ne verilmiş arkadaşlar? (fog)(x) verilmiş, değil mi? Bizden ne isteniyor? g(x). O zaman bu taraftan (fog'un sol tarafı) f'nin tersi işleme dahil edilirse ne olur arkadaşlar? f'ler gidecek geriye g(x) kalacak. Yani bu neye eşittir? (f^{1}o(fog)(x)= g(x) yazdı) g(x)'e eşittir, değil mi? f'nin tersi nedir? x+4 bölü 3. f'nin tersini yazdım mı? fog nedir? 2x+1. ($\frac{x+4}{3}$o2x+1 yazdı) . Arkadaşlar bu fonksiyon bu da fonksiyon, aralarında bileşke varsa bunu getirip (2x+1 'in altını çiziyor) burada x gördüğümüz yere yazacağız. Yani ($\frac{x+4}{3}$ 'ü gösterdi) ikinciyi getirip birincide x gördüğümüz yere yazıyoruz. x gördüğümüz yere ne yazacağız?

Öğrenciler: 2x+1

AÖ: 2x+1 şurada 4 var. Altta ne var? Üç, bu da neye eşit? $\frac{2x+5}{3}$*, tamam mı?*

Arda öğretmenin T_4 görev tipi ile ilgili $t_{4,2}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

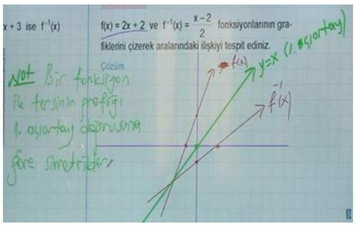
- $t_{4,2}$: Cebirsel temsille bileşkesi ve fonksiyonlardan biri belli iken diğerini bulma
- $\tau_{4,2,1}$: … *(fog)(x) eşittir. f(g(x))'ten.* [Değişken değiştirme uygulandıktan sonra g fonksiyonu çekilir.]
- $\tau_{4,2,2}$: *…(fog)(x) verilmiş değil mi? Bizden ne isteniyor? g(x). O zaman bu taraftan (fog'un sol tarafı) f'nin tersi işleme dahil edilirse ne olur arkadaşlar? f'ler gidecek geriye g(x) kalacak.* [fog=h ise g=f^{-1}oh özelliği]
- $\theta_{4,2,1}$: [Değişken değiştirme temelinde bileşke işlemi]
- $\theta_{4,2,2}$: … *bu taraftan (fog'un sol tarafı) f'nin tersi işleme dahil edilirse ne olur arkadaşlar?* [soldan birleşme özelliği informel], *f'ler gidecek geriye g(x) kalacak* [fof^{-1}=I ve Iog=g eksik açıklanmış] *…ikinciyi getirip birincide x gördüğümüz yere yazıyoruz.* [Bileşke işleminin açıklaması]

Diyalogda da görüleceği üzere, $t_{4,2}$ görevi biri öğrenci diğeri öğretmen tarafından olacak şekilde iki farklı cebirsel teknikle tamamlanmıştır. İlk teknik incelendiğinde bileşke işleminin değişken değiştirme temelinde uygulanmasıyla tekniğin gerçekleştirildiği belirlenmiştir. Teknolojik açıklamaya burada yer verilmemiştir. Bunun nedeni bileşke işleminin değişken değiştirme temeliyle oluşturulması ve bunun öğrenciler tarafından daha önce anlatıldığı için biliniyor olması şeklinde belirtilebilir. Bu anlamda örtük bir şekilde *kurumsallaştırma anı*nın yaşandığı belirtilebilir.

İkinci teknik incelendiğinde, f fonksiyonunun tersi ile fog fonksiyonunun bileşkesinin alınmasıyla g fonksiyonunun elde edildiği görülmektedir. Bu teknikte birleşme özelliği, fonksiyonla tersinin bileşkesinin birim fonksiyon olduğu ve birim fonksiyonla g fonksiyonunun bileşkesinin değişmediği aşamalarının atlanarak tekniğin uygulandığı görülmektedir. Bu aşamaları öğretmenin "*bu taraftan (fog'un sol tarafı) f'nin tersi işleme dahil edilirse ne olur arkadaşlar? f'ler gidecek geriye g(x) kalacak*" şeklinde ifade ettiği görülmektedir. Ancak bu ifadelerden atlanılan aşamaları yeterli bir şekilde açıklanmadığı görülmektedir. Burada görevde verilen bileşke fonksiyonun her iki tarafını soldan f'in tersiyle bileşke işlemi gerçekleştirilirse f^{-1}o(fog)= ($\frac{x+4}{3}$)o(2x+1) ve daha sonra eşitliğin sol tarafında birleşme özelliği uygulanırsa ($f^{-1}$of)og= ($\frac{x+4}{3}$)o(2x+1) elde edilir. Daha sonra fonksiyonla tersinin bileşkesi birim fonksiyon olduğundan Iog= ($\frac{x+4}{3}$)o(2x+1) elde edilir. Son olarak Iog=g ve eşitliğin sağında bileşke işlemi uygulanarak çözüm yapılabilirdi. Bu yapılan işlemlerin teorisi matematiğin cebir alanında grup teoriyle ilişkilendirilebilmektedir. Ancak bu görevde bu tür bir ilişkilendirme gözlenmemiştir.

Didaktik prakseoloji didaktik anlar açısından değerlendirilirse, görevin çözümünde birden fazla teknik kullanıldığından *tekniksel çalışma an*ının gözlendiği belirtilebilir. Ancak burada öğretmenin gerçekleştirmiş olduğu teknikte bazı aşamaların atlanması, atlanan bu aşamalara ilişkin açıklama yapılmaması ve cebir alanıyla bağlantı gerektiği ölçüde bağ kurulamaması *teknolojik-teorik çevreyi oluşturma an*ının uygun bir şekilde yapılandırılmadığını göstermektedir.

Bu görev tipiyle ilgili 4 görev daha burada açıklanan teknikler doğrultusunda benzer şekilde tamamlanmıştır. Bu yüzden bu görev tipinde ayrıntılı prakseolojik incelemede bulunulmamıştır. Daha sonra T_5 görev tipiyle ilgili Şekil 4.63'de sunulan görev öğrencilere sunulmuştur.



Şekil 4.63. *Arda öğretmenin T_5 görev tipinde $t_{5,1}$ görevi*

AÖ: f(x) fonksiyonu verilmiş ve $f^{-1}(x)$ verilmiş ikisinin grafiğini çizmemizi istiyor…Grafik çizmemizi istiyor da bizim neyi görmemizi istiyor?
Ö1: Öteleme
Ö2: Simetri
AÖ: İki fonksiyonun birbirinin neye göre simetrik olduklarını görmemizi istiyor. Yani simetrik olacaklar ama neye göre anladınız mı? x eksenine göre mi, y eksenine göre mi, orijine göre mi? Birinci açıortay doğrusuna göre mi? İkinci açıortay doğrusuna göre mi? Yani bir fonksiyonla onun tersinin grafikleri kesinlikleri simetrik ama neye göre simetrik. …İkisi de doğrusal fonksiyonlar, değil mi?…Grafik çizerken önce fonksiyonun türünü tespit etmelisiniz. Sabit mi, doğrusal mı, parabolik mi? Anladınız mı? Tabi önümüzdeki sene 11'in sonunda dedim ya göreceksiniz. Parabol, hiperbol, elips bunların da grafikleri var. Ama hani o düzeyde bir bilginiz yok, size şuan sabit, doğrusal, parabolik. Bir de küp x^3 de

öğretmişiz size onu da biliyorsunuz, tamam mı? Şimdi arkadaşlar bunlar doğrusal fonksiyonlar, doğrusal fonksiyonlar düz çizgilerdir. x eksenini nerede kesmiş y eksenini nerede kesmiş bunları bulacağız. Hemen birleştirip düz çizeceğiz. Anladınız mı? Peki, şunun (f(x)=2x+2) grafiğini çiziyorum…Önce x yerine sıfır yazarsam y ne olur? 2 olur. y yerine sıfır yazarsam x ne olur? -1 olur. Şu ikisini birleştireceğim arkadaşlar. Burayı anlamayan varsa sorsun, çünkü hemen geçeceğim. Bu y=f(x)'in grafiği arkadaşlar ya da sadece f(x) diyelim y demesek de olur. Şimdi bunun (f^{-1}(x)=(x-2)/2) grafiğini çizeceğim. x yerine sıfır yazarsak y ne olur? y=-1 olur. y yerine sıfır yazarsanız ne olur? x=2 olur. Şunları nasıl birleştireceğiz? Düz doğruyla. Evet, birbirlerini kesebilirler önemli değil. Bu da f^{-1}(x)'in grafiğidir. Şimdi bunları (f ve f^{-1} grafikleri) nasıl katlarsak üst üste gelir? Evet şöyle bir grafik çizelim arkadaşlar. Şuna göre, değil mi?(y=x çizdi) Bu doğrunun bir adı var, değil mi? Neydi bunun adı?

Öğrenciler: Birinci açıortay doğrusu

AÖ: y=x bu, I. açıortay yani birinci bölgeden geçen 45 derecelik tam ortadan geçen doğruya göre simetriktir. Tam bu yeşil çizgiden katlarsak bizim doğrularımız üst üste gelir mi?

Öğrenciler: Evet

AÖ: O zaman bir fonksiyon ile tersinin grafiği I. açıortay doğrusuna göre simetriktir. Notumuzu buraya yazıyoruz.

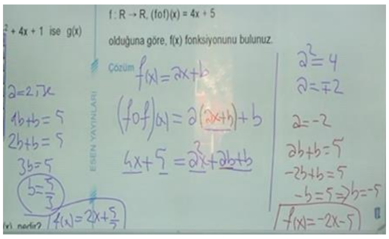
Arda öğretmenin T_5 görev tipi ile ilgili $t_{5,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{5,1}$: f(x)=2x+2 ile tersinin grafiğinin simetri eksenini bulma
- $\tau_{5,1}$: *… f(x) fonksiyonu verilmiş ve f^{-1}(x) verilmiş ikisinin grafiğini çizmemizi istiyor… doğrusal fonksiyonlar düz çizgilerdir. x eksenini nerede kesmiş y eksenini nerede kesmiş bunları bulacağız. Hemen birleştirip düz çizeceğiz… Şimdi bunları (f ve f^{-1} grafikleri) nasıl katlarsak üst üste gelir?.. Şuna göre, değil mi?(y=x çizdi)*
- $\theta_{5,1}$: *... doğrusal fonksiyonlar, doğrusal fonksiyonlar düz çizgilerdir.* [doğrusal fonksiyon informel tanım]*…bunları nasıl katlarsak üst üste gelir?*[simetri informel tanım]... *y=x bu, I. açıortay yani… simetriktir. Tam bu yeşil çizgiden katlarsak bizim doğrularımız üst üste gelir mi?* [f ile f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri simetrik, çünkü y=x doğrusuna göre katlandığında üst üste gelmiş]

Arda öğretmenin f ile f^{-1} arasındaki ilişkiyi incelediği görev ile öğrenciler ilk kez karşılaşmıştır. Bu anlamda *ilk karşılaşma anı* yaşanmıştır. Arda öğretmen $t_{5,1}$ görevini f ile f^{-1} fonksiyonlarının grafiklerini çizdikten sonra bu grafiklerin y=x eksenine göre simetrik olduğunu belirtmiştir. Bu teknik öğrencilerin 9. sınıfta öğrendikleri bir teknik olduğundan *kurumsallaştırma anı*nın gözlendiği söylenebilir. Bu tekniğin teknolojisinde öğretmenin bir fonksiyonun grafiğinin türü (sabit, doğrusal, parabolik) olması, doğrusal grafiklerin düz çizgiler şeklinde olduğu ve iki nokta ile karakterize edilebileceği (eksenleri kestiği noktalar belirlenerek çizilebileceği) ifade edilmiştir. Ayrıca f ile f^{-1} fonksiyonlarının simetri doğrularının y=x olması gerektiği, çünkü bu doğruların ancak y=x doğrusu boyunca katlandıklarında üst üste gelecekleri belirtilmiştir. Bu açıklamalar aynı zamanda *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı*na ilişkin açıklamalar olarak nitelendirilebilir.

Öğretmen diyaloğun sonunda elde ettiği "*…bir fonksiyon ile tersinin grafiği I. açıortay doğrusuna göre simetriktir*" bilgi "grafiği verilen bire bir ve örten bir fonksiyonun y=x doğrusuna göre simetriği alındığında fonksiyonun tersinin grafiği elde edilir" şeklinde alındığında başka bir tekniği işaret etmektedir. Nitekim öğretmen bu görev tipiyle ilgili diğer görev olan $t_{5,2}$ görevini bu doğrultuda tamamlamıştır. Dolayısıyla $t_{5,1}$ görevinde elde edilen çıkarım başka bir tekniği işaret ettiğinden *tekniksel çalışma anı* olarak nitelendirilebilir.

Sonrasında öğretmen T_9 görev tipiyle ilgili Şekil 4.64'teki görevi öğrencilere sunmuştur. Bu görevin prakseolojik analizine yer verilmesinde görevin çözümünde kullanılan tekniğin bazı aşamalarının atlanarak uygulanması etkili olmuştur.



Şekil 4.64. *Arda öğretmenin T_9 görev tipinde $t_{9,1}$ görevi*

AÖ: $f\colon R \to R,\ (fof)(x) = 4x + 5$, *4x+5 nasıl bir fonksiyon?*

Öğrenciler: Doğrusal.

AÖ: O zaman f'de doğrusal bir fonksiyondur. O zaman şöyle düşünebilir miyiz? f(x)=ax+b.

Öğrenciler: Evet

AÖ: Peki, f'de f(x)'i elde ediyorum, yani (fof)(x)'i bu ne demek? f'de x gördüğüm yere bir daha f'yi yaz. Evet, bakın, $(fof)(x) = a(ax + b) + b$ *anladınız mı? Bakın, yani ben burası x idi, değil mi? x gördüğüm yere ne yazdım? f(x) yazdım, yani ax+b. Bu da neye eşittir? Çarparsanız.* $4x + 5 = a^2x + ab + b$ *peki (fof)(x)'i bize ne vermiş? 4x+5. Arkadaşlar terimler aynı olacak. Yani bu buna eşit olacak, yani* $a^2 = 4$*, a eşittir…*

Öğrenciler: a=2

AÖ: Hayır arkadaşlar hem artı hem eksi 2. Bir sayının karesi 4 ise o hem artılı hem eksili olmalı, değil mi? Peki şimdi diyeceğiz ki, a=2 ise b ne olacak? Şurası 5'e eşit, değil midir? (ab+b=5 gösterdi)

Öğrenciler: Evet

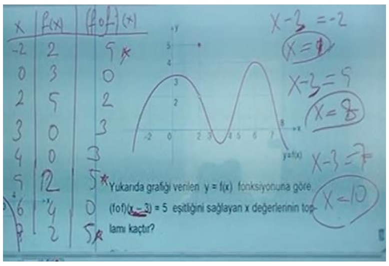
AÖ: $ab + b = 5$*, a yerine 2 yazarsam, 2b+b=5, 3b=5, b=* $\frac{5}{3}$*, o zaman a=2, b=* $\frac{5}{3}$ *ise f(x) ne olur arkadaşlar? f(x)=* $2x + \frac{5}{3}$ *bu bir. Peki a=-2 olsaydı yine bu 5'e eşit (ab+b=5 gösterdi) olacaktı.* $ab + b = 5$*, a yerine -2 yazarsak,* $-2b + b = 5$*,* $-b = 5$*, b kaç olur?* $b = -5$*, O zaman f(x) ne olur arkadaşlar? a yerine -2 yazıyoruz.* $f(x) = -2x - 5$*, Evet, f(x) fonksiyonunu bulunuz, ya o ya bu, tamam mı?*

Arda öğretmenin T_9 görev tipi ile ilgili $t_{9,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{9,1}$: (fof)(x)=4x+5 ise f(x) nedir?
- $\tau_{9,1}$: [(fof)(x)=4x+5 olduğundan f(x)=ax+b şeklinde olmalı. Burada (fof)(x)=a^2x+ab+b=4x+5 eşitliğinde a ve b bulunarak f fonksiyonu belirlenir.]
- $\theta_{9,1}$: ... *O zaman f'de doğrusal bir fonksiyondur.* [Kendisiyle bileşkesi doğrusal ise f doğrusal], *O zaman şöyle düşünebilir miyiz? f(x)=ax+b.* [Doğrusal fonksiyonun informel tanımı], *(fof)(x)'i bu ne demek? f'de x gördüğüm yere bir daha f'yi yaz.* [Bileşke işleminin değişken değiştirme temelli açıklaması], $4x + 5 = a^2x + ab + b$ … *Arkadaşlar terimler aynı olacak.* [Polinom eşitliği açıklaması eksik açıklandı]

Bu görev fonksiyonun kendisiyle bileşkesi biliniyorken kuralının bulunmasına ilişkin ilk görev olduğundan *ilk karşılaşma anı*nın yaşandığı söylenebilir. Arda öğretmen $t_{9,1}$ görevinde fof fonksiyonunun kuralı doğrusal olduğundan f fonksiyonunu da doğrusal olduğunu belirtmiştir. Sonra buradan hareketle fonksiyonu $f(x)=ax+b$ şeklinde ifade etmiştir. Daha sonra bu bilgiden yararlanarak $(fof)(x)=a^2x+ab+b$ şeklinde bulunmuştur. Bu ifade görevde verilen $(fof)(x)=4x+5$ ile aynı olduğundan $a^2x+ab+b=4x+5$ şeklinde ifade edilebilecek eşitlik elde edilmiştir. Bu eşitlik polinom eşitliği olmasına rağmen bu kavram kullanılmadan çözüm gerçekleştirilmiştir. Bu tekniğin teknolojisinde $(fof)(x)=4x+5$ ifadesinin doğrusal olmasından hareketle çıkarımda bulunularak f fonksiyonunun doğrusal olması gerektiği ifade edilmiştir. Bunun nedeni açıklanmamakla birlikte deneysel olarak doğrusal fonksiyonların bileşkesinden doğrusal fonksiyonlar elde edildiği gösterilmiştir. Bu anlamda teknolojik bir ifade olarak nitelendirilebilir. Doğrusal fonksiyonun $f(x)=ax+b$ şeklinde olması bir açıklama içerdiği için yine teknoloji olarak ifade edilebilir. Burada $(fof)(x)$ ifadesi f fonksiyonunda x yerine $f(x)$ yazılmasıyla değişken değiştirme bağlamında elde edileceğinin açıklanması yine teknolojik bir açıklamadır. Ancak bu görevde en kritik nokta polinom eşitliğini öğretmenin nasıl açıklayacağıdır. Bu göreve ilişkin tekniğin uygulanış sürecinde $4x+5= a^2x+ab+b$ eşitliğini diyalogda öğretmenin "*Arkadaşlar terimler aynı olacak*" şeklinde yetersiz bir şekilde açıkladığı görülmektedir. Ancak niçin aynı olması gerektiği belirtilmemiştir. Bu durum polinom eşitliğine ilişkin açıklamaların yapılmadan tekniğin uygulandığını göstermektedir. Polinom eşitliği fonksiyon konusundan sonra anlatılacağı için öğrenciler henüz bu tür bir kavramı tanımamaktadır. Öğrencilere verilen bu tür bir eşitlik öğrenciler tarafından birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olarak algılanabilmektedir. Burada ifade edildiği üzere, öğrencilerin ilk kez karşılaştıkları polinom eşitliği kavramını öğretmen görevin çözüm sürecinde sanki öğrenciler tarafından biliniyormuş gibi kullandığı belirlenmiştir. Dolayısıyla bu teknikte polinom eşitliği kavramı öğretmen tarafından yeterince açıklanmadan teknik gerçekleştirilmiştir. Sonuç olarak burada programda polinomların fonksiyonlardan sonra anlatılmasından kaynaklı konular arasında ekolojik bir sorun tespit edilmiştir ve öğretmenin bu sorunun çözümüne ilişkin teknolojik açıklamalarının eksik olduğu belirlenmiştir.

Didaktik anlar açısından bu görevde alternatif teknikler kullanılmadığından *tekniksel çalışma anı* gerçekleşmemiştir. Bu görev değer verme yaklaşımıyla sonuçlandırılabilirdi. Bu alternatif teknik Burak öğretmen bölümünde benzer bir soruda ifade edildiğinden burada tekrarlanmayacaktır. Bu görevde bileşke işleminin değişken değiştirme temelinde açıklanması, polinom eşitliğinin eksikte olsa ima edilmesi, örtük bir şekilde eşitliğin geçişme özelliğinin kullanılması ($a=b$ ve $b=c$ ise $a=c$) gibi durumlar *teknolojik teorik çevrenin oluşturulma an*ının gözlendiği şeklinde yorumlanabilir. Bu görevden sonra öğretmen ağırlıklı olarak grafik yorumu içeren T_{10} görev tipiyle ilgili görevleri öğrencilere sunmuştur. Bunlardan biri Şekil 4.65'de verilmiştir.



Şekil 4.65. *Arda öğretmenin T_{10} görev tipinde $t_{10,4}$ görevi*

AÖ: Bütün değerleri yazın arkadaşlar,... Şuraya yazalım mı? (tablo yaptı) x, f(x) ondan sonra (fof)(x) tamam mı? x, -2 için f(x) ne olur arkadaşlar? f(-2) ne olur? 2 yazsak.

Ö5: 2 olur.

AÖ: 2 olur. f(2) ne olur? Çünkü burada ((fof)(x) gösterdi) f(x), 2 olacak ya. f(2) kaç?

Ö5: 5

AÖ: 5. x, sıfır olsun. x yerine 0 yazarsak, ...f(0) neye eşittir? ...

Ö7: f(0), 3'e eşit.

AÖ:... f(0), 3 e eşittir. f(3) neye eşittir? Sıfıra. Peki x gördüğümüz yere 2 yazalım. x, 2 yazdığımızda?

Ö7: f(x), 5

AÖ: f(x) ne olur? 5 olur. f(5) ne olur? f(5)'de 2 olur. Peki x gördüğümüz yere 3 yazarsak, 0 (f(x) yerine yazdı), f(0), 3. x, gördüğümüz yere 4 yazalım, 4 yazarsak f(4), 0. Yine 3. (f(0)=3 demek istedi). x, gördüğümüz yere 5 yazarsak, f(5), 2 olur. f(2) (ne olur? demek istedi, bu soruların yanıtlarına öğrencilerde katıldı), f(2), 5 olur. x gördüğümüz yere 6 yazarsak, f(x), 4 olur. f(4), 0 olur. x gördüğümüz yere 7 yazarsak, 7 de 2 olur. f(2), yine 5, değil mi? 8'de ne olur? 8'de sıfır, sıfırda 3 oluyor. 5 olan değerlerimiz şunlar, şunlar, değil mi? ((fof)(x), 5 olanların yanına yıldız attı) Peki, x-2'nin ne olmasını istiyorduk? (x-3'ü yanlışlıkla x-2 yazdı) -2 olursa 5 olur değil mi? (tabloda x, -2 olursa (fof)(x), 5 olur demek istedi) Buradan x=0. (x-2=-2 den) Yine x-2 nerede 5 oldu, 5 te. x=7, değil mi? (x-2=5; ise x=7 demek istedi) Peki, *bir de bu kaçtaydı. Bu kaçtı? 7 miydi? x, pardon -3 olacaktı. Ben -2 yazdım. (hatasını fark etti, düzeltmeye başladı) Burası x-3 tür. Yanlış oldu arkadaşlar. 3 bu tarafa gelirse 1 olur. Burası da 3 tür. 3 bu tarafa gelirse 8 olur. x-3'ün ne olmasını istiyoruz? 7 olmasını istiyoruz. x=10. (x-3=7 ise x=10 demek istedi) x'in alabileceği değerler 10, 8, 1. On dokuz.*

Ö13: Hocam tekrar anlatabilir misiniz? (öğretmen (fof)(x)=5 olan değerleri ifade ederek kısaca bir daha anlattı)

Arda öğretmenin T_{10} görev tipi ile ilgili $t_{10,4}$ görevine ilişkin didaktik prakseoloji aşağıda verilmiştir.

- $t_{10,4}$: Grafik temsili verilen bir fonksiyonun bileşkesinde belli bir değerin ters görüntüsünü bulma
- $\tau_{10,4}$: *Bütün değerleri yazın arkadaşlar* (Tablo yapılarak, grafikte verilen bütün değerler için x, f(x) ve (fof)(x) değerlerinin belirlenmesiyle sonuç bulunur. Burada grafik yorum ya da grafik üzerinde eşleme kullanılır.)
- $\theta_{10,4}$: ?

Arda öğretmen $t_{10,4}$ görevini tablo çizdikten sonra grafik üzerinde eşleme tekniğini kullanarak görevi tamamlamıştır. Bu tekniği grafik yorum olarak adlandırabiliriz. Öğretmen bu tekniği pragmatik bir yaklaşımla gerçekleştirmiştir. Burada f fonksiyonunun bilinen tüm noktaları için, x değerlerine karşılık önce f(x) ve sonra (fof)(x) tabloda belirlenmiştir. Daha sonra (fof)(x) değeri 5 çıkan x değerleri için işlem yapılmıştır. Burada öğretmenin teknolojik açıklama vermediği görülmektedir. Bunun nedeni gerçekleştirilen tekniğin 9. sınıfta öğrenilmiş olmasından dolayı öğrenciler tarafından bilindiğinin varsayıldığı düşünülmektedir. Gerçekleştirilen prakseoloji didaktik anlar açısından incelendiğinde teknolojik-teorik açıklama yapılmamasına rağmen grafik yoruma ilişkin bilgiler 9. sınıf düzeyinde verildiğinden öğretmenin hatırlatma gereği duymamış olabileceği düşünülmektedir. Bu anlamda örtük bir şekilde *kurumsallaştırma an*ının yaşandığı söylenebilir. Diğer taraftan bu görevde alternatif göreve yer verilmemiştir. Dolayısıyla teknikler üzerine çalışma anı burada gözlenmemiştir. Bu görevde öğretmen şu şekilde alternatif bir teknik kullanabilirdi. Görevde f(f(x-3))=5 olabilmesi için f(x-3)=2 olması gerekmektedir. Bu da x-3 ifadesinin -2, 5 ve 7 olması durumunda ortaya çıkmaktadır. Buradan x değerleri {1,8,10} olarak elde edilebilir. Yine f(x-3)=2 bulunduktan sonra f fonksiyonunun grafiği x ekseninde 3 br sağa ötelenerek de görev geometrik olarak tamamlanabilirdi. Görüldüğü üzere, bu görev bileşke işlemi ve öteleme ile ilişkilendirilerek çözülebilmesine rağmen öğretmenin bu tarz bir teknik geliştiremediği anlaşılmaktadır. Bu görev tipindeki görevler genellikle grafik üzerinde eşleme olarak ifade edilebilecek yukarıda belirtilen yaklaşımla tamamlanmıştır.

4.2.2.3.4. Arda öğretmenin bileşke işlemi ve fonksiyonların tersi alt başlığında gerçekleştirdiği didaktik prakseolojilere ilişkin bulgular

Didaktik prakseolojilerin bileşenleri ile ilgili bulgular

Fonksiyonların simetri dönüşümleri ile ilgili Arda öğretmenin didaktik prakseolojilerinin bileşenleri, bu süreçte gözlenen didaktik anlar ve ekolojik sorunlar aşağıda Tablo 4.24'te verilmiştir.

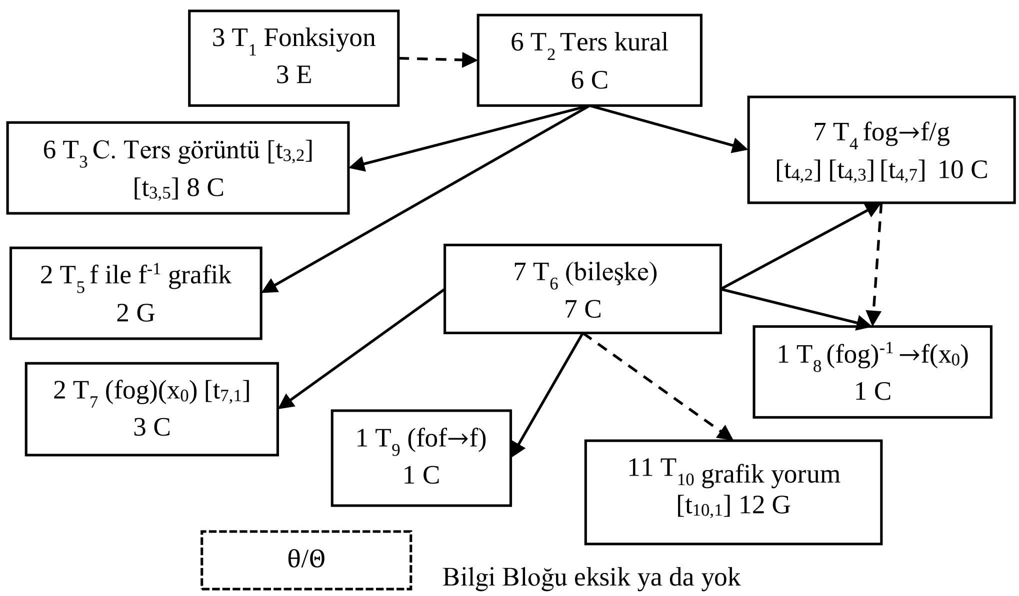
Tablo 4.24. *Arda öğretmenin bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında prakseolojik bileşenler ve anlar*

Görev	Teknik*	Teknoloji	Gözlemlenen Anlar**	Ekolojik Sorunlar
$t_{1,3}$	E	Kısmen	İK→TTÇO→TÇ	-
$t_{2,1}$	C	Kısmen	İK→ GTK&TG → TTÇO	Bileşke işlemi (Monoid yapısı)
$t_{3,2}$	1.C1 2.C2	Kısmen	K→TTÇO→TÇ	-
$t_{4,1}$	C	Kısmen	İK→TTÇO→GTK&TG	Bileşke işlemi, Afin dönüşüm
$t_{4,2}$	1.C1 2.C2	Kısmen	K→TTÇO→TÇ	-
$t_{5,1}$	G	Kısmen	İK→ K→ TTÇO→TÇ	
$t_{9,1}$	C	Kısmen	İK→TTÇO	Polinom eşitliği
$t_{10,4}$	GY	Yok	K	-

* G: Geometrik teknik, C: Cebirsel teknik, E: Eşleme tekniği, GY: Grafik Yorum
**İK: İlk Karşılaşma, GTK&TG: Görev Tiplerini Keşfetme ve bir Teknik Geliştirme, TTÇO: Teknolojik-Teorik Çevrenin Oluşturulması, TÇ: Tekniksel Çalışma, K: Kurumsallaştırma,

Bu alt başlıkta öğretmenin görevlerin neredeyse tamamını ders kitabından aldığı anlaşılmaktadır. Bu anlamda ders kitabına aşırı bağlı bir şekilde öğretim gerçekleştirdiği söylenebilir. Görevler çoğunlukla cebirsel tekniklerle tamamlanmıştır. Ancak ters fonksiyona girişte şema temsiliyle sunulan görevlerde bu temsile uygun olarak eşleme tekniği kullanıldığı anlaşılmaktadır. Ayrıca T_{10} görev tipinde grafik yorum tekniği olarak belirtilen teknikte bu bağlamda istisna olarak değerlendirilebilir. Farklı bir açıdan Arda öğretmenin bu alt başlıktaki görevleri genellikle tek bir teknikle sonuçlandırılma (%87) eğiliminde olduğu görülmektedir. Dolayısıyla alternatif tekniklerden yeterince yararlanılmadığı söylenebilir. Tekniklerle ilgili diğer bir boyut birçok görevde Arda öğretmenin tekniği basitleştirme ya da kolay kılma düşüncesiyle teknikteki bazı aşamaları atlayarak uygulamasıdır. Bunlar cebirsel temsilde verilen bir fonksiyonun kuralının belirlenmesinde bire bir ve örtenliğe ilişkin inceleme yapılmaması ve fonksiyonun tersinin kuralının bulunması sürecinde değişken değiştirme aşamasının doğru bir şekilde uygulanmaması şeklinde ortaya çıkmıştır. Fonksiyonun tersinin bulunması sürecinde programda bileşke üzerinden ters fonksiyonun bulunması istenmesine rağmen tekniğin bu doğrultuda uygulanamdığı tespit edilmiştir.

Teknolojik açıklamalar bazı görevlerde bulunmamakla birlikte çoğu görevde yetersiz informel açıklamalar doğrultusunda verilmiştir. Didaktik prakseolojilerde teknolojinin eksik bir şekilde ortaya çıkmasında tekniğin uygulanma sürecinde atlanan aşamalar, matematiksel nesnelerin informel biçimde öğretim sürecine dahil edilmesi ve tekniğin geçerliliğinin kanıtlanması sürecinde matematiksel aksiyomların özensiz kullanılması gibi faktörlerinin etkili olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca fonksiyonun tersinin bulunmasıyla ilgili görevlerde ters fonksiyonun cebir alanında monoid yapısıyla ilişkilendirilmemesi ve farklı bir yaklaşım takip edilmesi verilebilecek bazı teknolojik açıklamaların verilememesine neden olmuştur. Bu durum öğretmenin fonksiyon öğretiminde konu alt başlıklarının sıralamasını da etkilediği ve bu doğrultuda ters fonksiyon kavramının bileşke işleminden önce öğretildiği belirlenmiştir. Tüm bu anlatılanlar doğrultusunda bu alt başlıkta öğretmenin gerçekleştirdiği didaktik prakseolojilerin bileşenleri arasındaki ilişkiler Şekil 4.66'da verilmiştir.



Şekil 4.66. *Arda öğretmenin bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler arasındaki ilişkiler*

Şekil 4.66'dan fonksiyon konusunda bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında Arda öğretmenin didaktik prakseolojilerin bileşenlerinden görev tipleri arasında doğrudan ilişkilerin (kesikli olmayan oklar) sınırlı sayıda olduğu ve görev tipleri birbirini desteklemeyecek şekilde organize edildiği (örneğin T_1, T_3, T_5, T_7, T_9 ilişki olmaması) görülmektedir. Bunun nedeninin öğretmenin öğretim sürecinde ders kitabına aşırı bağlı kalması olduğu düşünülmektedir. Ayrıca görev tipleri arasında doğrudan olmayan ilişkiler (kesikli oklar) de çok sınırlı düzeyde kalmıştır (prakseoloji oluşturulurken herhangi bir şekilde yapılan ilişkilendirme). Burada özellikle ters fonksiyonun bileşke işlemi üzerinden kurulmaması dikkat çekicidir. Sonuç olarak görev tiplerinin birbirinden kopuk bir biçimde sunulduğu görülmektedir.

Görevlerin, cebirsel teknikler ağırlıklı olmakla birlikte, genellikte tek bir teknikle tamamlandığı anlaşılmaktadır. Tekniklerin uygulanma sürecinde bilgi bloğunun yetersizliği diğer bir önemli boyuttur. Tüm bunlar prakselojik organizasyonun olmadığı bir öğretim durumunun tutarlı ve anlamlı öğrenmeleri destekleyecek şekilde ortaya konulamayacağını göstermektedir.

Didaktik anlar ile ilgili bulgular

Bu alt başlıkta görev tiplerinde didaktik anlardan bazılarına yer verilmekle birlikte bunlardaki eksiklikler ve ortaya konulmayan anların matematiksel eylemin yapılandırılmasını zorlaştırdığı görülmektedir. Genellikle öğretmenin *ilk karşılaşma anı* ile prakseolojileri oluşturmaya başladığı görülmektedir. Ancak bu durum bileşke işleminin özellikleriyle ilgili görev tiplerinde, önce tekniğin ifade edilmesi daha sonra ilk karşılaşmanın gerçekleşmesi şeklinde ortaya çıkmıştır. Öğretmenin bazı görev tiplerinde *görev tiplerinin keşfedilmesi ve bir teknik geliştirme anı*na ilişkin girişimlerde bulunduğu görülmektedir. Ancak buna ilişkin açıklamaların sınırlı, iyi yapılandırılmamış olduğu ve spontane ortaya konulduğu göze çarpmaktadır.

Teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı genellikle eksik bir biçimde ortaya çıkmıştır. Bunun en önemli nedeni ters fonksiyonun bileşke işlemi üzerinden gerçekleştirilmemesi ve ters fonksiyonun bulunmasında cebir alanıyla yeterli ilişkilendirmede bulunulmaması olarak düşünülebilir. *Tekniksel çalışma anı* bazı görevlerde gözlenmekle birlikte bu alt başlıktaki bütün görevler düşünüldüğünde çok düşük düzeyde kaldığı (%13) belirlenmiştir. *Kurumsallaştırma anı* bazı görevlerde 9. sınıfta öğrenilen bilgilerin kullanılması şeklinde ortaya çıkmıştır. Diğer taraftan ters fonksiyonun kuralının bulunmasında ortaya konulan prakseolojinin (x'i yalnız bırak y yerine x ve x yerine y yaz) matematiksel olarak anlamsız biçimde kurumsallaştırılmak istendiği anlaşılmaktadır. Bu alt başlıkta ters fonksiyonun bileşke üzerinden öğretilmemesinin bilimsel bilgi ile öğretilen bilgi arasındaki boşluğu arttırdığı söylenebilir.

Didaktik prakseolojilerde ekolojik sorunlara ilişkin bulgular

Fonksiyonların öğretiminde Arda öğretmenin ortaya koyduğu didaktik prakseolojilerde ekolojik açıdan iki sorun gözlenmiştir. Birincisi fonksiyon konusunun öğretiminde konunun alt başlıklarının sıralanmasında ters fonksiyonun bileşke işleminden önce öğretilmesidir. Matematik dersi öğretim programında ters fonksiyonun bileşke işlemi üzerinden öğretilmesi istenmekte ancak öğretmenin bunu uygulamadığı anlaşılmaktadır. Bu durumun matematiksel kavramlar arasında var olan ilişkilerin kaybolmasına ve bu doğrultuda tutarlı açıklamalar verilememesine yol açtığı belirlenmiştir. Daha genel bir ifadeyle öğretimde konuların alt başlıklarının sıralamasına ilişkin kararların ekolojik sorunlar doğurabileceği ortaya konulmuştur.

İkinci ekolojik sorun ise T_9 görev tipinde görevin tamamlanma sürecinde polinom eşitliği gibi programda daha ileride yer alan ve öğrenciler tarafından henüz bilinmeyen kavramların kullanılması şeklinde ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin ilk kez karşılaştıkları kavramlara bildikleri kavramlar doğrultusunda anlam yükleyecekleri varsayımıyla polinom eşitliği türünden durumlar içeren görevlerle, polinomlar öğretilmeden, ilk kez karşılaşan öğrencilerin bunları denklemler olarak nitelendirilebileceği ve bu doğrultuda sonuçlandıracağı söylenebilir.

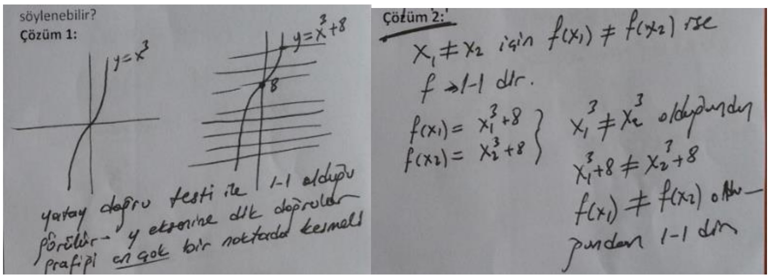
4.2.2.4. Arda öğretmenin fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunda sahip olduğu didaktik prakseolojiler

Arda öğretmene fonksiyon konusuyla ilgili detayları yöntem bölümünde belirtilen 17 adet görevi bildiği bütün yolları kullanarak sonuçlandırması istenmiştir. Öğretmenin görevleri tamamlamak için toplamda 36 teknik kullandığı belirlenmiştir. Bunların 23 tanesi cebirsel, 11 tanesi geometrik, 1 tanesi orantısal ve 1 tanesi nümerik ağırlıklı teknikler olarak belirlenmiştir. Öğretmen görevlerde en az bir teknik üretmekle birlikte bir görevde en çok 4 teknik ortaya koyduğu görülmektedir.

Bu görevleri öğretmenin sonuçlandırması istendikten sonra görüşme yapılarak didaktik prakseolojilerde kullanılan bileşenler açığa çıkarılmıştır. Bu yüzden bu bölümde öğretmenin görevlere ilişkin didaktik prakseolojileri görüşmelerden alıntılar yapılarak desteklenmiştir. Burada bütün görevleri vermek yerine araştırma kapsamında araştırmanın bulgularını destekleyecek şekilde gerçekleşen görevlerin prakseolojik analizlerine yer verilecektir. Bu doğrultuda bu problemlerden dördünün prakseolojik analizine yer verilmiştir.

Arda öğretmen görevleri yaklaşık 40 dakikalık sürede tamamlamıştır. Öğretmenin anket formuna yaptığı çözümlerinden yola çıkarak ve daha sonra yapılan görüşmelerden hareketle prakseolojiler ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Görev 1: Reel sayılarda tanımlı f fonksiyonunun kuralı, $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^3 + 8$ şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre f fonksiyonunun bire birliği ile ilgili ne söylenebilir? Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamaları Şekil 4.67'de verilmiştir.



Şekil 4.67. *Arda öğretmenin görev 1 ile ilgili uygulaması*

Arda öğretmen görev 1'i iki farklı teknikle tamamladığı görülmektedir. Birinci teknikte fonksiyonun grafiğini çizdikten sonra yatay doğru testi kullandığı anlaşılmaktadır. Öğretmenin yatay doğru testini Şekil 4.67'de "y eksenine dik doğrular grafiği en çok bir noktada kesmeli" şeklinde açıkladığı görülmektedir. Burada fonksiyonun bire bir olmasının nedeni yatay doğru testinde çizilen her doğrunun grafiği en çok bir kez kesmesidir. Bu anlamda tekniği açıklayan bu tür açıklamalar teknoloji olarak nitelendirilebilir. İkinci teknikte ise öğretmenin bire bir olmanın cebirsel tanımından hareketle görevi tamamladığı görülmektedir. Burada öğretmen doğrudan ispat yoluyla fonksiyonun bire birliğini kanıtlamıştır. Bu anlamda burada gerçekleştirilen kanıt, tekniğin niçin doğru olduğunu gösteren bir açıklama olduğundan teknoloji olarak belirtilebilir.

Diğer taraftan fonksiyonların bire birliğiyle ilgili öğretmenin bildiği bu tekniklerden hangisini sınıfta göstermeye eğilimi olduğu ve hangisini vermek istemediği önemlidir. Bu konuda uygulama sonrası yapılan görüşmede öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: İspattan bahsediyorum hocam $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ ise bire birdir. Bu tür şeylere giriyor musunuz?

AÖ: Yok, öyle bir şey yok. Basit düzeyde biraz daha.

A: Grafiksel olarak bir de şema üzerinden, değil mi?

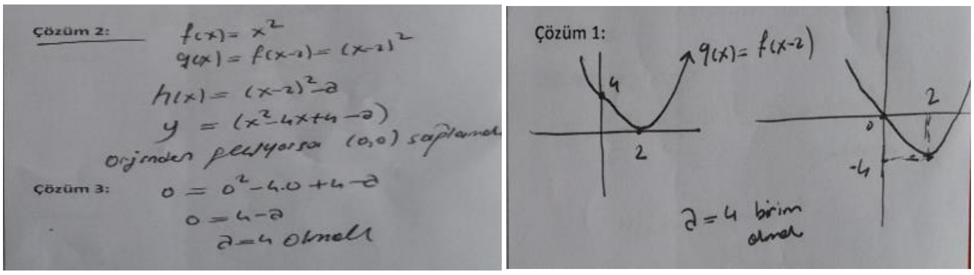
AÖ: Aynen öyle. Aynı grafiksel olarak x^2nin bire bir olmadığını grafiksel olarak çocuk biliyor. Fakat f:R→R f(x)= x^2 nin bire bir olmadığını çocuk biraz zor görüyor (cebirsel temsil kastediliyor). Ha bu paraboldür, bire bir değildir. Biliyorsunuz, tamam diyor. Bu paraboldür. Çocuğun aklına şu geliyor. Paraboller bire bir değil. Akabinde şu örneği yapıştırıyorum. f:N→N tanımlı bir fonksiyon f(x)= x^2 bire bir midir? Çocuk önce diyor yok. Bire bir değil. Ben grafiğimin yarısını kestim, yarısı kaldı. Bunu da şekille gösteriyoruz N'den N'ye olunca bu tarafını almıyoruz. Bu tarafını alıyoruz. O zaman bire birdir.

A: Bir şey dikkatimizi çekti de hocam. O hani soruların üstünde f:R→R bire bir örten veya f:N→R bire bir örten bu tip şeyleri çocuklar çok dikkat ediyor mu?

AÖ: Yok, etmiyor. O örnekte dikkat etmediklerini fark ediyorum. Orada yapıştırıyoruz örneği. Hiçbir fark yok. Tek fark nedir? Tanım kümesi, tanım kümesi soruyu değiştirdi. Demek ona dikkat etmek lazım.

Diyalogdan görüldüğü üzere, öğretmenin bir fonksiyonun bire birliğini şema temsiliyle (eşleme tekniği), grafik çizerek yatay doğru testiyle (geometrik teknik) ve cebirsel tekniklerle (doğrudan ispat) gösterebildiği anlaşılmaktadır. Ancak öğretmen sınıf uygulamalarında cebirsel tekniği kullanmadığını belirtmiştir. Ayrıca öğretmenin bir görevde verilen fonksiyonun tanım kümesinde yaptığı değişikliklerle bire bir olmayan bir fonksiyonun bire bir olmasını sağladığı görevler oluşturduğu da görülmektedir. Bu sayede öğretim sürecinde bir fonksiyonun bire bir olduğunun gösterilmesinde öğrencilerin odaklanmaları gereken yerlere ilişkin öğretmenin bir farklındalık oluşturduğu söylenebilir.

Görev 2: Tepe noktası (0,0) ve grafiğin kolları yukarı yönde olan ikinci dereceden bir f fonksiyonu (-2,4) ve (2,4) noktalarından geçmektedir. f fonksiyonunun g ve h fonksiyonları arasında g(x)=f(x-2) ve h(x)=g(x)-a şeklinde bir ilişki vardır. h fonksiyonunun orijinden geçtiği biliniyorsa a değeri kaçtır? Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamaları Şekil 4.68'de verilmiştir.

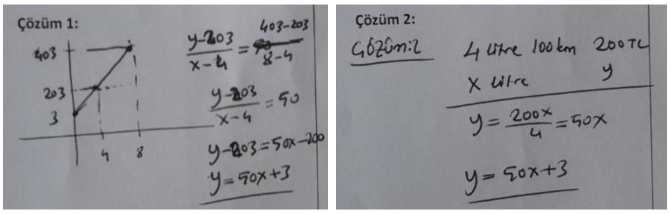


Şekil 4.68. *Arda öğretmenin görev 2 ile ilgili uygulaması*

Bu görevde öğretmen iki farklı teknik geliştirmiştir. Bunlardan ilki geometrik teknik olarak ifade edilebilir. (Şekil 4.68'de sağdaki resim) Bu teknikte öğretmen fonksiyonunu 2 birim sağa kaydırarak g(x)=f(x-2) fonksiyonunu elde etmiştir. Daha sonra g fonksiyonunun y ekseninde ancak 4 br aşağı ötelendiğinde orijinden geçeceği ifade edilerek h fonksiyonunu çizmiş ve dolayısıyla "a" değerinin 4 olması gerektiğini belirtmiştir. Bu tekniğin uygulanma sürecinde f fonksiyonuna öteleme yapıldığında g ve g fonksiyonuna öteleme uygulandığında h fonksiyonu elde edilme süreçlerinde fonksiyonların tamamının parabol olarak çizildiği belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmenin sezgisel olarak izometrik dönüşüm kullandığı ifade edilebilir.

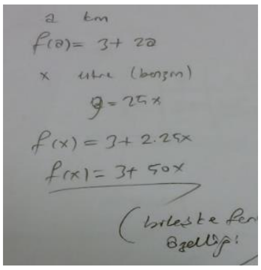
İkinci teknikte ise öğretmen cebirsel bir teknikle görevi tamamlamıştır. Burada öncelikle f fonksiyonunun kuralı f(x)=x^2 şeklinde belirlendikten sonra görevde değişken değiştirilerek önce g fonksiyonunun kuralı g(x)=f(x-2) eşitliğinden elde edilmiştir. Daha sonra h(x)=g(x)-a eşitliğinden yararlanarak h fonksiyonunun kuralı bulunmuştur. Burada h(0)=0 eşitliğinden a değerinin elde edildiği görülmektedir. Bu tekniğin teknolojisinde öğretmenin üç noktası bilinen bir parabolü belirleyebildiği ve değişken değiştirme ve fonsiyonlarda dört işlem gibi kavramlardan yararlandığı tespit edilmiştir. Ayrıca fonksiyona ait bir noktanın bu fonksiyonu sağlaması gerektiğine ilişkin açıklamalar yaptığı görülmektedir.

Görev 3: Bir ticari taksi kat ettiği her 100 km'de 4 litre benzin tüketmektedir. Taksi metrenin açılışı 3 lira olan bu takside, gidilen her km 2 lira olarak ücretlendirilmektedir. Deposunda 40 litre benzin bulunan bu taksiyle seyahate çıkan bir kişinin, taksinin harcayacağı benzin miktarına karşılık taksiciye ne kadar ödemesi gerektiğini ifade eden fonksiyonu bulunuz? Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamaları Şekil 4.69'da verilmiştir.



Şekil 4.69. *Arda öğretmenin görev 3 ile ilgili uygulaması*

Arda öğretmenin bu görevi iki farklı teknikle tamamlamıştır. Birinci teknikte öğretmen harcanan benzin miktarına karşılık ödenen paranın fonksiyonunu doğrusal bir grafik olarak çizdiği görülmektedir. Bu fonksiyonun grafiğinde x bağımsız değişkeni harcanan benzin miktarını litre cinsinden ifade etmekte ve y bağımlı değişkeni de ödenmesi gereken parayı göstermektedir. Fonksiyonun kuralının iki noktası bilinen doğru denklemini bulma yaklaşımıyla elde edildiği görülmektedir. İkinci teknikte ise orantısal bir yaklaşımın kullanıldığı belirlenmiştir. Burada 4 litre benzin kullanımına karşılık 100 km gidileceği ifade edildikten sonra 100 km için 200 lira ödenmesi gerektiği ifade edilerek, harcanan benzin miktarı ile ödenen para arasında bir orantı kurulduğu görülmektedir. Buna başlangıç pozisyonu da dahi edilerek çözüm bulunmuştur. Burada dikkat çeken nokta burada verilen fonksiyonel ilişkinin bileşke fonksiyon içermesine rağmen her iki teknikte de bileşke uygulanmadan çözümün gerçekleştirilmesidir. Bu doğrultuda öğretmene bu görevin fonksiyonlar kullanılarak nasıl sonuçlandırılabileceği sorulmuştur. Bu konuda uygulama sonrası yapılan görüşmede öğretmenin açıklamaları aşağıda verilmiştir (Şekil 4.70).



Şekil 4.70. *Arda öğretmenin görev 3 ile ilgili fonksiyonel tekniğe ilişkin uygulaması*

AÖ: O zaman y'yi yalnız bırakacağız. Pardon y=100x/4, o zaman 25x. O zaman şu da f(a) diyelim burasına, f(a)=3+2a dır. a km idi. Şimdi f(y)=3+50x (f(x)=3+50x demek istedi), şimdi x'e bağlı oldu. Şey pardon f, y, x fark etmez. x litre. Doğru mu?

A: Doğru. Bu yaklaşım nedir sizce hocam? Fonksiyonlarda biz buna ne diyoruz?

AÖ: Bileşke, burada iki değişken var çünkü.

A: Evet teşekkür ederiz hocam, düzgün bir şekilde yazabilir misiniz?

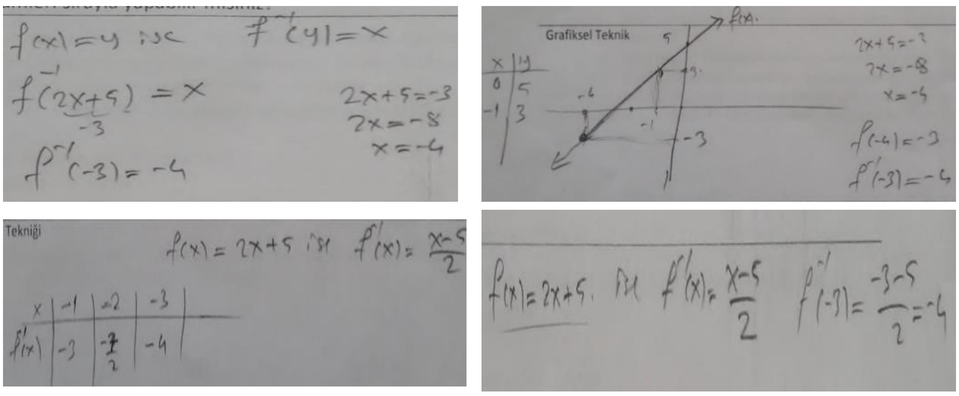
AÖ: a km f(a)=3+2a, ee x litre yani benzin ee burada ne yaptık? g ya da y kaç y=25x, O zaman f(x) ya da f(y) fark etmez. f(x)=3+2·25x, f(x)=3+50x,

A: Aslında bu da g gibi bir fonksiyon değil mi?

AÖ: Evet, hiç fark etmez. Bileşke fonksiyon özelliği.

Bu diyalogda görüleceği üzere, öğretmenin harcanan benzine karşılık gidilen yolu g fonksiyonuyla ve gidilen yola karşılık ödenen parayı f fonksiyonuyla belirtmiştir. Daha sonra bu iki fonksiyonun bileşkesini alarak harcanan benzin miktarına karşılık ödenmesi gereken parayı fog bileşke fonksiyonuyla sonuçlandırmıştır. Dolayısıyla ankette öğretmenin iki teknikle tamamladığı bu görev yapılan görüşmede fonksiyonel teknik olarak adlandırılan farklı bir teknikle daha sonuçlandırılabilmiştir. Bu durum öğretmenlerin gerçekte sahip oldukları prakseolojilerin gözlenen prakseolojilerinin çok daha ötesinde olduğunu göstermektedir.

Görev 4: $f\colon R \to R$ ve $f(x) = 2x + 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f^{-1}(-3)$ değeri kaçtır? Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamaları Şekil 4.71'de verilmiştir.



Şekil 4.71. *Arda öğretmenin görev 4 ile ilgili uygulamaları*

AÖ: İlk önce kullandığımız şey şudur. f(x)=y ise f^{-1}(y)=x mantığını kullanıyoruz. Yani ikisinin yer değiştirmesi, f^{-1}(2x+5)=x, onun kaç olmasını istiyorum, -3 olmasını istiyorum. 2x+5=-3, 2x=-8, x=-4. O zaman f^{-1}(-3)=-4. Bir tanesi bu. İkincisi f(x)=2x+5 ise $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ olur. Tabi bunun cebirsel olarak tersinin nasıl alındığını bilen bir öğrenci için.

A: Tabii.

AÖ: Bilmiyorsa burada tersinin nasıl alındığını izah edeceğim. Sonra çözüme geçeceğim. Buradan $f^{-1}(3) = \frac{-3-5}{2}$ *den -4.*

A: Evet hocam

AÖ: ...Diğer bir çözüm yolu grafiksel çözüm. Grafiksel olarak fonksiyonun grafiğini çizecek olursak, x yerine, x ve y tablosu çizelim. x yerine 0 yazdığımızda y kaç olur? 5, y yerine. x yerine 1 yazalım ya da -1 yazarsak biraz farklı olsun. 3 olur. (0,5) şurası olsun. (-1,3) o da şurası olsun. Şu f(x) fonksiyonunun grafiği.

A: Hı hı.

AÖ: Şimdi tersten biz normalde mesela şurası (-1,3) ya şöyle (-1,3) yani f(-1)=3 tür diyoruz. $f^{-1}(3)=-1$ *yani y'den x'e.*

A: Grafik yorumu.

AÖ: Grafik yorumunu ters okumalarını bu şekilde söylüyorum. Mesela f(-1)=3'e gidiyor. $f^{-1}(3)$ *de -1'e gidiyor ama terste. Bu şekilde öğrencilere grafik üzerinde gösteriyoruz. Şimdi bizden ne isteniyor? -3, eksi üçe giden değer ne olabilir? x yerine ne yazarsak -3 olur? 2x+5=-3, 2x=-8, x=-4. Yani x, -4 iken ee şöyle, -3 denk geliyor. Yani f(-4)=-3 oluyor. Dolayısıyla* $f^{-1}(-3)=-4$ *oluyor. Tablo tekniğiyle şöyle. f(x)=2x+5 ise* $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ *olduğunu bilmemiz lazım. Şimdi x değerleri öbürünü de buraya yazayım.* $f^{-1}(x)$ *değerleri. x'e ...-1 verirsek -3 olur. x'e -2 verirsek kaç olur?*

AÖ: ...Eksi 2 veriyorum. -7/2. ..Yarım birim arttı.

A: Evet

AÖ: ...Bu 1 br azalınca o da yarım birim azalıyor. Bu bir birim daha azalınca -3,5'dan -4'e gelecek. Tersten de böyle.

Arda öğretmen bu görevi dört farklı teknikle tamamlamıştır. Bunlardan birincisinde f(x)=y ise $f^{-1}(y)=x$ özelliğini kullandığı görülmektedir. Bu özelliğin kullanılmasında verilen fonksiyonun bire bir ve örten olması gerekmektedir. Ancak öğretmenin f fonksiyonunun bire bir ve örten olmasına ilişkin herhangi bir incelemede bulunmadığı görülmektedir. İkincisinde fonksiyonun cebirsel olarak tersi alındıktan sonra elde edilen ters fonksiyonda belli bir değerin görüntüsünün bulunduğu belirlenmiştir. Burada öğretmen fonksiyonun cebirsel olarak tersini bilmeyen öğrenciler için bunun nasıl bulunduğunu açıklayacağı ifade edilmektedir. Üçüncü olarak öğretmenin geometrik teknik olarak ifade edilen verilen fonksiyonun grafiğini çizdikten sonra değer fonksiyonun tersinde hangi değer için -3 değerine ulaşılacağı cebirsel olarak belirlendiği görülmektedir. Son olarak öğretmenin tablo yaptıktan sonra yine fonksiyonun tersini cebirsel olarak ifade ederek -3 değerine karşılık ters görüntüyü belli ölçüde örüntü arayarak nümerik bir teknikle bulduğu görülmektedir. Bu tekniklerden geometrik teknikte benzerlikten yararlanılabilirdi. Benzer şekilde tablo tekniğinde örüntü yaklaşımı yoluyla çözüm gerçekleştirilebilirdi. Bu tekniklerin uygulanma sürecinde genellikle teknolojik açıklamaların gizli kaldığı söylenebilir.

4.2.2.4.1. Arda öğretmenin fonksiyon konusunda sahip olduğu didaktik prakseolojilere ilişkin bulgular

Arda öğretmene sunulan görevler en az bir teknik kullanılarak tamamlanmıştır. Görevlerin çözümünde cebirsel, geometrik teknikler ağırlıklı olarak kullanılmakla birlikte orantı ve nümerik tekniklerin kullanıldığı da olmuştur. Cebirsel teknik %64 ile görevlerin tamamlanmasında en çok tercih edilen tekniktir.

Öğretmen bir fonksiyonun bire bir olup olmadığının belirlenmesini içeren görev 1'i hem cebirsel hem de geometrik tekniklerle tamamlamıştır. Ancak sınıf uygulamalarında öğretmenin cebirsel tekniği ispat içermesi nedeniyle tercih etmediği ve bu tür görev tiplerinde geometrik tekniği kullanma eğiliminde olduğu belirlenmiştir. Öğretmen geometrik tekniğin uygulanma sürecinde yatay doğru testini açıklayıcı ifadelere yer vermesi ve cebirsel tekniğin uygulanmasında bire bir olmanın tanımını ifade ettikten sonra doğrudan ispat yaklaşımıyla fonksiyonun bire birliğini göstermesi, tekniklerin niçin geçerli olduğunu açıklayan teknolojik açıklamalardır. Bu doğrultuda görev 1'de öğretmen tekniklerin uygulanma sürecinde bazı teknolojik açıklamalara yer vermiştir.

Bir fonksiyondan simetri dönüşümleri yoluyla başka fonksiyonlar elde edilmesine ilişkin görev 2'yi öğretmenin iki farklı teknikle tamamladığı görülmektedir. Birinci teknikte öteleme kullanmıştır. Bir fonksiyondan diğer fonksiyona geçişte öteleme dönüşümü sonrası şeklin korunması ve parabolde belli iki nokta arasındaki uzaklığın sabit bırakılması sezgisel olarak izometrik dönüşüme işaret etmektedir. Ancak buna ilişkin herhangi bir açıklamaya rastlanmamıştır. Bu anlamda teknolojik açıklamaların eksik kaldığı belirtilebilir. Ayrıca öğretmenin fonksiyonun cebirsel ifadesinde yapılan değişiklik ile grafiği arasında var olan ilişkiye yönelik açıklama yapmadığı da görülmektedir. Bu durum sınıf uygulamalarında da benzer şekilde gerçekleşmiştir. İkinci teknikte fonksiyonun cebirsel kuralından değişken değiştirme ve fonksiyonlarda dört işlem kullanılarak görevin tamamlandığı belirlenmiştir. Bu tekniğin teknolojisine ilişkin açıklama görülmemiştir.

Günlük yaşam probleminin cebirsel kuralının bulunmasını içeren görev 3'ü öğretmenin iki farklı teknikle tamamladığı görülmektedir. İlk teknikte fonksiyonun grafiğinin geçtiği iki nokta belirlenerek iki noktası bilinen doğru denkleminden fonksiyonun kuralının elde edildiği anlaşılmaktadır. Diğerinde ise orantı tekniğiyle çözüm gerçekleştirilmiştir. Ancak çözümlerde teknolojik açıklamalara yer verilmemiştir. Bu görev bileşke işlemiyle fonksiyonel teknik olarak belirtilen teknikle de yapılabilmektedir. Yapılan görüşmede bu teknikle de öğretmenin görevi tamamlayabildiği belirlenmiştir. Öğretmenin ankette yapmadığı bir tekniği kendisinden istenmesi durumunda yapabilmesi öğretmenin bu araştırma kapsamında sahip olduğu didaktik prakseolojilerin gözlenenlerin ötesinde olduğunu göstermektedir.

Son olarak bir fonksiyonun ters görüntüsünün bulunmasını içeren görev 4'ü öğretmen dört teknikle tamamlamıştır. Birinci teknikte $f(x)=y$ ise $f^{-1}(y)=x$ ifadesi kullanılmıştır. Ancak burada fonksiyonun bire bir ve örten olduğu vurgulanmamıştır. İkinci teknikte fonksiyonun tersinin kuralı bulunduktan sonra belli bir değerin görüntüsünü bulma yoluyla fonksiyonun ters görüntüsünün elde edildiği anlaşılmaktadır. Yine burada fonksiyonun tersinin nasıl bulunduğu açıklanmamış ve fonksiyonun tersinin bulunması sürecinde bire bir ve örten olma durumlarından bahsedilmemiştir. Üçüncü olarak fonksiyonun grafiği çizildikten sonra ters görüntüsü elde edilmiştir. Ancak burada öğretmenin benzerlikten yararlanmak yerine fonksiyonun kuralından yararlandığı belirlenmiştir. Bu durum geometrik tekniğin sadece temsil bağlamında kullanılıyor olması gibi bir algı oluşturmuştur. Son teknikte tablo kullanılmasına rağmen burada x değerlerine karşılık y değerleri arasında var olan örüntüyü öğretmenin fonksiyonun tersini bulduktan sonra bulmaya çalıştığı görülmektedir. Bu teknikte de tablo sadece temsil olarak kullanılmıştır. Tabloda x ve y değişkeni arasında bulunan örüntü tam olarak ortaya konamamıştır. Görüldüğü üzere bu görevde kullanılan teknikler teknolojik açıdan eksik bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

4.2.3. Tuna öğretmen durumu

Tuna öğretmen fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunu 4 haftada ve 13 ders saatinde öğretmiştir. Öğretmenin konunun alt başlıklarında takip ettiği sıralama ve bunların öğretimine ayırdığı ders saati Tablo 4.25'te verilmiştir.

Tablo 4.25. *Tuna öğretmen'in uygulaması*

Tarih	Ders Sayısı	Alt Başlık
20.10.2014	2	1. Dokuzuncu Sınıf Fonksiyon Konusunun Tekrarı 2. Fonksiyonlarda Simetri Dönüşümleri (eksik anlattı) 3. Fonksiyonlarda Dört İşlem
23.10.2014	1	Fonksiyonlarda Dört İşlem
24.10.2014	1	Bir Fonksiyonun Tersi
27.10.2014	2	Bir Fonksiyonun Tersi
30.10.2014	1	Bir Fonksiyonun Tersi
31.10.2014	1	Bileşke Fonksiyon
03.11.2014	2	1. Bileşke Fonksiyon 2. Bir Fonksiyonun Tersi
06.11.2014	1	1. Bileşke Fonksiyon 2. Bir Fonksiyonun Tersi
07.11.2014	1	Fonksiyonlarda Simetri Dönüşümleri (eksik anlattı)
10.11.2014	1	Fonksiyonlarda Simetri Dönüşümleri (eksik anlattı)

Tablo 4.25'ten, öğretmenin haftada altı ders saati olan matematik dersini üç ders saati olarak işlediği görülmektedir. Bunun nedeni öğretmenin fonksiyon konusunun hemen başında rahatsızlığı nüksetmesi sebebiyle düzenli tedavi alması neticesinde bazı derslerin yapılamamasıdır.

Öğretmen 9. sınıf konularının tekrarıyla fonksiyon konusunun öğretimine başladığı görülmektedir. Öğretmenin daha sonra öğretim programında 10. sınıf düzeyinde fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusuyla ilgili ilk alt başlık olan fonksiyonlarda simetri dönüşümleri başlığını anlatmaya başladığı anlaşılmaktadır. Ancak öğretmen bu konuyu tamamlamadan aynı ders içerisinde ani bir karar alarak, fonksiyonlarda dört işlem alt başlığına geçiş yaptığı görülmektedir. Öğretmen öğretim programına göre fonksiyon konusunun başında anlatılması gereken fonksiyonların simetri dönüşümlerini konunun sonunda tekrar ele aldığı görülmektedir. Ancak burada da bazı alt başlıkları anlatmadığı tespit edilmiştir (Örneğin y=f(x) fonksiyonun grafiğinden yararlanarak y=f(kx) fonksiyonun grafiğini bulma). Tuna öğretmen fonksiyonlarda simetri dönüşümlerine toplamda üç ders saati, fonksiyonlarda dört işlem alt başlığına bir ders saati, bir fonksiyonun tersi alt başlığına 4 ders saati ve bileşke işlemine 4 ders saati ayırdığı görülmektedir.

Bu tabloda dikkat çeken noktalardan en önemlisi Tuna öğretmenin öğretim programında olmasına rağmen tek ve çift fonksiyon alt başlığı ile fonksiyonlarla uygulamalar alt başlığına öğretimde hiç yer vermemesidir. Sınıfın seviyesinin genel olarak öğretmen tarafından düşük olarak algılanması nedeniyle öğretmenin bu tür bir karar almış olabileceği değerlendirilmektedir.

4.2.3.1. *Tuna öğretmenin matematik öğretim programında yapılan değişikliklere ilişkin görüşleri*

Tuna öğretmene son iki program değişikliği hakkında düşünceleri sorulmuştur. Uygulama öncesinde ve sürecinde yapılan görüşmelerde, öğretmen bu soruyu hem genel hem de fonksiyon konusu iç içe olacak şekilde yanıtlamıştır. Bu konuyla ilgili öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Hocam 2013 yılında yapılan program değişikliğini genel olarak değerlendirebilir misiniz?

TÖ: Genel olarak sıkıntı yok diyebiliriz. Ama bazı sorunlar da var. Bunlardan birkaç tanesi özellikle fonksiyonlar kısmına ayrılan sürenin kısıtlı olması,… bir de …bazı konuların fonksiyonlardan önce verilmesi (simetri dönüşümlerinin parabolden önce gelmesi kastedildi).

A: İçeriğin hala yoğun olduğunu düşünüyor musunuz?

TÖ: İçerik olarak çok yoğun değil. Yani öğrenciye kavratılabilecek şekildedir.

A: 2013'te değişen bir program var. Öncesini ve sonrasını nasıl görüyorsunuz?

TÖ: Eskide ıı fonksiyonlar konusu bir bütün olarak veriliyordu. Şu an 2 bölüme ayrıldı. Lise 1 ve lise 2 olarak, şimdi o programların içerisindeki bağlantı kurmakta bazen zorlanabiliyoruz. Mesela geçen sene fonksiyonları tanımlamışsınız, fonksiyonları anlatmışsınız, bu sene atıyorum ters fonksiyonu anlatmaya başladığınız zaman fonksiyonları tamamıyla yeniden vermek zorundasınız…

A: Pekala hocam yeni ve eski programlarda fonksiyonların öğretimi çerçevesinde düşündüğümüzde farklılık gözlemlediniz mi?

TÖ: Konu içeriği olarak çok farklı bir şey yok. Sadece içerik olarak geçmiş müfredat programlarında mutlak değer, parçalı fonksiyon bir de işaret fonksiyonu vardı. Bir tanesi çıkarıldı. Şu anki mutlak değer ve parçalı fonksiyonu almış ama içerik olarak birbirine yakın.… Ama biz ikinci dereceden parabollere veyahut da eğrilere geçtiğimiz zaman üçüncü dereceden fonksiyonlara geçtiğimiz zaman çocuğa fonksiyonu sadece grafik olarak veriyorsunuz ama grafik çiziminin nasıl olduğunu nasıl gerçekleştiğini çocuk bilmiyor. Hocam siz neye dayanarak grafiği çizdiniz? Biz şunu diyoruz "bu soruda verilecek size" işte f(x) fonksiyonu verilecek sizden f(x+2) fonksiyonunu sorulacak…O çizimlerin doğrusal fonksiyonlarda 4 tane grafik örneği var. Parabol için aynı 4 tane öteleme, kaydırma kuralı vardır…Çocuk hangisini nerde nasıl kullanacağını bilmiyor. Ama çocuk ikinci *dereceden bir fonksiyonun grafiğinin nasıl çizildiğini bilmiş olsa orda hani karıştırsa bile x^2+2x+1'in fonksiyonunu çizdiği zaman orda x yerine ne gelmiş x-2'yi yerine koyup da grafik mantığını uygulayabilir.*

Tuna Öğretmenin diyalogda "*Genel olarak sıkıntı yok*" şeklindeki açıklamalarından öğretim programında yapılan değişiklikleri olumlu olarak gördüğü anlaşılmaktadır. Ayrıca yeni programın içerik olarak da çok yoğun olmadığını ve öğrencilere kavratılabilecek düzeyde olduğunu belirtmiştir.

Fonksiyon konusuyla ilgili eski programda fonksiyon konusunun tamamı bir sınıf düzeyinde verilirken, yeni programda parçalanarak 9 ve 10. sınıflarda öğretildiği beyan edilmiştir. Öğretmen fonksiyon konusunun parçalanması durumu hakkında 9. sınıfta anlatılan parçalarının 10. sınıfta tekrar hatırlatılması gerekmesi ve bunun neticesinde fonksiyonlara verilen sürenin yetmeyeceği düşüncesiyle eleştirmektedir. Diğer taraftan öğretmen bazı konuların programda sıralamalarının uygun olmaması açısından programı eleştirdiği görülmektedir. Burada 10. sınıflarda verilen bir grafikten simetri dönüşümleriyle başka grafikler elde etme alt başlığının fonksiyon konusundan (parabol kastedildi) önce verilmesi sorun teşkil ettiği açıklanmıştır. Örneğin ikinci dereceden bir fonksiyon verildiğinde (örneğin $y=x^2$) bu fonksiyonun grafiğinden yararlanarak yeni fonksiyonların grafiklerinin çizilmesine ilişkin görevlerin parabol konusu bilinmeden anlaşılamayacağını belirtmiştir. Bu tür sorunlar ekolojik sorunlardır. Bu anlamda öğretmen örtük de olsa programda bazı ekolojik sorunların farkında olduğu söylenebilir. Ancak öğretmenin programda örtük anlamda ekolojik sorunlar olduğunu fark etmesine rağmen çıkarılan alt başlıklar dışında içeriğin aynı kaldığını belirtmektedir. Bu da öğretmenin fonksiyon öğretiminde değişiklik yapmayacağına ilişkin güçlü bir kanıttır.

Fonksiyon konusunun matematik öğretiminde diğer konularla bağlantısının kurulup-kurulamadığı öğretmene sorulmuştur. Bu konudaki öğretmenlerin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: …hocam öğretimde fonksiyon konusunun diğer konularla bağlantısı kurulabiliyor mu sizce?

TÖ: Elbette. Özellikle lise 4 konularında integral, grafik çizimlerinde falan bağlantı kurulabilir. Öncesindeyse denklemler adı altında işlediğimiz konularda da kullanabiliyoruz. Hız, hareket, gibi onlarda da fonksiyonları bir şekilde kullanıyoruz. Ha çocuk onu (doğru grafiği) sadece bir çizgi olarak algılıyordur. Ama biz onu fonksiyon olarak tanımladığımız zaman çocuk ileride demek bu *fonksiyondur şeklinde algılayıp daha farklı düşünebiliyor… Eski müfredat programında lise 1'de fonksiyon ile bileşke fonksiyon veriliyordu. Yine son sınıfta bu fonksiyon konusu altında ileri fonksiyonları anlattığımız zaman işte parçalı veyahut da işaret fonksiyonunu anlattığımız zaman doğrusal fonksiyon işte birçok fonksiyon çeşidini de tekrar edebiliyorduk. Çocuk o şekilde bağlantı kurup, bilgilerini yenileyebiliyordu. Şimdi lise1, lise 2'de kaldıktan sonra lise 3 ve lise 4 çocuk bunu tekrar etmediği zaman tamamıyla unutmuş olacak. Bu öğrenci için dezavantajdır diye düşünüyorum ben.*

Tuna öğretmen fonksiyon konusu anlatılmadan önce denklemler konusunda sezgisel olarak yer aldığını, anlatıldıktan sonra ise özellikle son sınıf konuları olarak ifade edilen analize hazırlayıcı birçok konuyla ilişkisi olduğunu belirtmiştir. Diğer taraftan eski programda 9. sınıfta fonksiyon konusu anlatıldıktan sonra son sınıfta tekrar edilmesinin fonksiyonla analize hazırlayıcı konular arasındaki ilişkiyi güçlendirdiği ifade edilirken, yeni programda sadece 9 ve 10. sınıfta anlatılmasının bu ilişkinin kurulmasında öğrenciler açısından zorluk teşkil ettiği belirtilmiştir.

Matematikte genellikle bir kavramın birden fazla öğretim yaklaşımı bulunmaktadır. Bu yüzden öğretmene fonksiyon kavramını öğrencilere nasıl tanımladığı ve bu tanımlama sürecinde hangi kavramlardan yararlandığı sorulmuştur.

A: Fonksiyon kavramı öğrenciye nasıl sunulmaktadır? Kavram olarak söylüyorum eskiden bağıntı vardı şimdi bağıntı yok. Ne tür farklılıklar görüyorsunuz?

TÖ: Bağıntı var hocam şu an.

A: Var, değil mi?

TÖ: Var hocam. Kümeleri kümelerle bağıntılarla birleştirip veriyoruz. Çünkü fonksiyonu tanımlarken öncelikle iki kümeden bahsediyoruz. Boş olmayan iki küme, şimdi çocuk bunu bilmesi lazım. Fonksiyonu tanımlarken A'dan B'ye yazılan bağıntılardan deyip ondan sonra tanımını veriyoruz. Bu bağıntıyı da zaten bundan önce veriyoruz.

A: Anladım hocam.

TÖ: Yani o bağlantı konusunda bir sıkıntı yok. Kümeler, kümelerden sonra bağıntı, bağıntıdan fonksiyona geçiş yapılıyor. Şimdi her fonksiyon bir bağıntı olarak algılayabiliyor, çocuğa sen bağıntıyı vermeden bağıntının ne olduğunu bilmeden f fonksiyonu bağıntıdır veyahut da A'dan B'ye bağıntı dediğin anda çocuk burada sıkıntı yaşayacaktır. Ama bağıntı konusu ondan önce olduğu için sıkıntı yaratmıyor.

Tuna öğretmen programda bağıntı konusu kaldırılmasına rağmen bundan haberdar olmadığı görülmektedir. Bu doğrultuda öğretmen fonksiyon kavramını bağıntı temelinde işlediği belirlenmiştir. Bu durum öğretmenin program değişikliğini yüzeysel bir şekilde incelediğini göstermektedir. Yani öğretmenin fonksiyon kavramının öğretiminde eski programdaki yaklaşımı sürdürdüğü ve konunun öğretiminde neredeyse hiçbir değişiklik yapmadığı söylenebilir. Bu da programın fonksiyon kavramına ilişkin öngördüğü yaklaşımla öğretmenin fonksiyon kavramına ilişkin düşüncelerinin uyuşmadığını göstermektedir.

Fonksiyon öğretiminde programdan kaynaklı öğretmenin sınıf uygulamalarında yapmayı istediği ancak çeşitli nedenlerle ortaya koyamadığı durumlara ilişkin görüşleri sorulmuştur. Bu konuda öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Fonksiyon konusunun öğretiminde öğretim programının sizi sınırladığını düşünüyor musunuz?

TÖ: 9. sınıfta genel anlamda sorun yoktur… Ama ikinci kısım dediğimiz 10. sınıftaki kısımda karşılaşıyoruz. Mesela diyor ki, fonksiyonu çizdiğimiz zaman bir parabol. Örneğin çocuk diyor "parabol nerden geldi." Şimdi sen parabolün nerden geldiğini anlatmasan çocuk diyecek "belki grafik böyle değil de farklı bir şeydir. Böyle bir şekil olsa ne yapacağız?"

A: Evet

TÖ: Orada o tür denklem grafiklerin çizimleri verilmiş olsa veyahut da x^2 li bir ifadeyle karşılaşıyor. Çocuk diyor "hocam biz x^2 li bir şey görmedik." İkinci dereceden bir denklem veya böyle bir ifade görmedik. Bu neyi teşkil ediyor? Bu tür sorularla karşılaşabiliyoruz. Ama daha önce dediğim gibi ikinci dereceden denklemleri grafik çizimleriyle bağlantılı şekilde verseler, parabol çizimlerinden sonra o kaydırmaları verseler biraz daha verimli olacağını düşünüyorum.

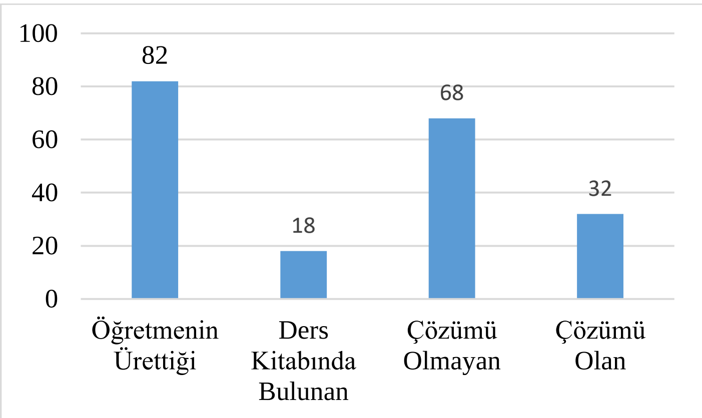
Bu diyalogda öğretmen fonksiyon konusunda yeni program çerçevesinde 9. sınıf düzeyinde sorun olmadığını ancak 10. sınıf düzeyinde simetri dönüşümleri alt başlığında programdan kaynaklı sorunlar yaşadıklarını beyan etmiştir. Burada öğretmen simetri dönüşümlerinde öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlar ve grafikleri gibi konuları bilmemesi nedeniyle sorun yaşadığını belirtmiştir. Bu doğrultuda öğretmen fonksiyonlarda simetri dönüşümlerinin ikinci dereceden denklemler ve grafikleri konularından sonra verilmesi gerektiğini düşünmektedir.

Tuna öğretmenin fonksiyon konusuyla ilgili programda yapılan bazı değişimlerin farkında (örneğin fonksiyon konusunun 9 ve 10. sınıfta anlatılacağı) olduğu görülmektedir. Ancak bu değişimlerde içeriğin aynı kaldığı belirtilerek öğretimde değişiklik yapmadığı anlaşılmaktadır. Burada öğretmenin fonksiyon kavramının tanıtılmasında programda olmamasına rağmen bağıntı kavramının programda olduğunu ileri sürmesi ve fonksiyon konusunu bağıntı temelinde anlatması bunun en önemli göstergesidir. Diğer taraftan fonksiyonların simetri dönüşümlerinin 10. sınıf düzeyinde öğretildiği ifade edilmekte ancak öğrencilerin ikinci dereceden denklemleri ve grafiklerini bilmediğinden dolayı fonksiyonların simetri dönüşümlerinde zorlanabilecekleri belirtilmektedir. Sonuç olarak öğretmenin programda fonksiyonlar konusu bağlamında köklü ekolojik değişimle ilgili sınırlı düzeyde farkındalığı olsa da bu durumun fonksiyon konusunun öğretiminde değişiklik yapmayı gerekli kılmadığını düşündüğü anlaşılmaktadır.

4.2.3.2. Tuna öğretmenin fonksiyon konusuyla ilgili gözlemlenen didaktik prakseolojilerine ilişkin bazı genel sonuçlar

Tuna öğretmen fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunu, kendi notları, kaynak B ve spontane ürettiği görevler üzerinden gerçekleştirdiği gözlenmiştir. Öğretmenin fonksiyon konusunun öğretiminde kaynak B'den ne kadar yararlandığı Tablo 4.26'da verilmiştir.

Tablo 4.26. *Tuna öğretmenin fonksiyon konusunun öğretiminde yer verdiği görevler*



Tuna öğretmen fonksiyon konusunun öğretiminde görevlerin %82'sini kendisi spontane üretirken %18'inde kaynak B'den yararlanmıştır. Öğretmenin ürettiği görevlerin büyük bir kısmının kaynak B'de yer alan görevlerin uyarlanmış hali olduğu belirlenmiştir. Bu görevlerin yarıda fazlasının çözümlü olmadığı görülmektedir. Ancak öğretmenin kaynakta yer alan çözümlere bakmaksızın teknikleri uyguladığı gözlenmiştir. Dolayısıyla öğretmenin fonksiyon öğretiminde kullandığı prakseolojilerin kendisi tarafından ortaya konulduğu söylenebilir.

Sınıf gözlemleri sonrasında yapılan görüşmede, öğretmenin ders kitabının kullanımına ilişkin görüşlerini şu şekilde ifade etmiştir:

A: Hocam fonksiyon konusunun öğretiminde hangi kaynaklardan yararlanıyorsunuz? Bu kaynakları neden tercih ettiniz?

TÖ: Milli eğitimin verdiği kitaplar doğrultusunda hareket edersek öğrenciyi üniversiteye yetiştirmemiş olacağız…MEB izinli yayınlanmış yardımcı kitapları alıp kullanabiliyoruz. Basitten zora öğrenci seviyesine uygun bir kitap tavsiye ediyoruz.

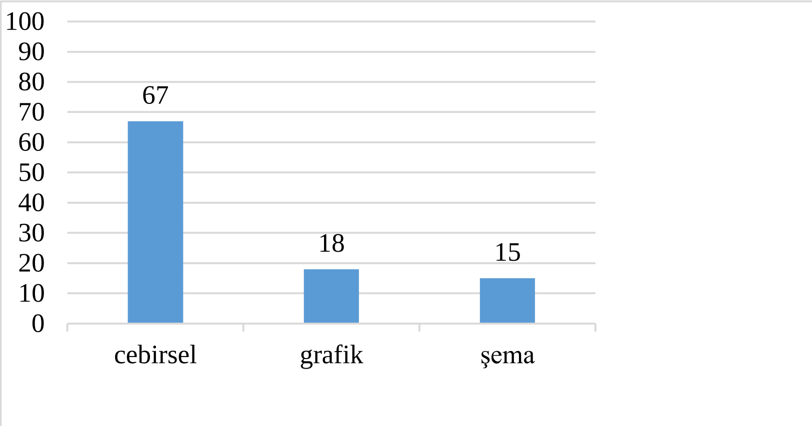
A: Anladım. Hocam ee takip edilen ders kitabı fonksiyon konusunun alt başlıklarını işleyiş sırasını etkilemiş olabilir mi?

TÖ: Yok, kitap kaynaklar çok önemli değil. Bizim önceliğimiz öğrencinin anlayabileceği düzeyde bir yaklaşım tercih ediyoruz. Mesela Kaynak B'de grafikleri önce vermiş kullandığım yayın ders kitabına paralel zaten. Mesela kaynakla beraber ders kitabına paralel gidiyoruz. Orada grafik de olmasına rağmen grafikleri es geçtim belli bir noktadan sonra yani o yayını takip etmedim. Ders kitabını takip etmedim. Çünkü çocuk algılayamıyorsa belli bir kısmı onu farklı bir dönüşümle vermek zorunda kalıyorsunuz. Bunu nasıl yapabilirsiniz? Bir kısmını bırakıp diğer kısmını sonra vermeye çalıştım.

Tuna öğretmen fonksiyon konusunun öğretiminde MEB'in öğrencilere ücretsiz dağıttığı kitabı kullanmadığını bunun yerine yine MEB'in tavsiyeli ve ders kitabıyla paralel bir kaynak kullandığını belirtmiştir. Öğretmenin Kaynak B'yi tercih etmesinde sınav sistemine uygun olması, öğrencilerin seviyesine uygun olması ve basitten zora bir öğretim yaklaşımı sunması durumlarının etkili olduğu görülmektedir. Öğretmenin açıklamalarından kullandığı kaynağın uygunluğunu öğretim programıyla karşılaştırmak yerine MEB'in öğrencilere dağıttığı kitapla paralel olmasıyla kıyaslayarak değerlendirdiği görülmektedir. Öğretmen ayrıca kullanılan kaynağın önemli olmadığını öğretimde daha çok öğrenci seviyesini dikkate aldığını belirtmiştir. Bu doğrultuda öğretmenin bazen konu sıralamasını değiştirdiği, hatta öğrencilerin anlayamayacağını düşündüğü bazı alt başlıkları görmezden gelerek anlatmadığı diyalogda belirtilmiştir. Öğretmenin öğrenci seviyesine uygun olmadığını düşünerek fonksiyon öğretiminde bazı alt başlıkları atlaması öğretim programında didaktik açıdan öğretimde birçok olumsuzluğa neden olma potansiyeli taşımaktadır. Örneğin öğretmenin atladığı bazı kavramların daha sonra bir görevin sonuçlandırılma sürecinde bir teknikte kullanılması durumunda bu kavram anlatılmadığı için ekolojik sorunlara yol açabileceği söylenebilir.

Tuna öğretmenin fonksiyonların öğretiminde görevleri öğrencilere hangi temsiller bağlamında sunduğu Tablo 4.27'de verilmiştir.

Tablo 4.27. *Tuna öğretmenin öğretimde başvurduğu görevlerde fonksiyon kavramının farklı temsillerinin dağılımı*



Tablo 4.27'den, öğretmen birçok temsili bulunan fonksiyonlarla ilgili sadece 3 temsil kullandığı belirlenmiştir. Öğretmenin fonksiyon öğretiminde görevlerin %67'sini cebirsel temsillerle, %18'ini grafiksel temsillerle ve %15'ini şema temsiliyle öğrencilere sunduğu görülmektedir. Buradan öğretmenin cebirsel temsilleri ağırlıklı olarak kullandığı görülmektedir. Öğretim programında fonksiyon öğretiminde fonksiyonların cebirsel, grafik, tablo temsili,..vs dikkat edilmesi istenmektedir (MEB, 2013). Ancak öğretmenin fonksiyonların farklı temsillerine gerektiği kadar yer vermediği söylenebilir.

Uygulama öncesinde yapılan görüşmede, fonksiyonların öğretiminde yeni programda temsillerin kullanımına ilişkin bir değişiklik olup-olmadığıyla ilgili öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Hocam yeni ve eski programda fonksiyon konusunda yer verilen temsiller açısından değerlendirildiğinde nasıl bir değişim gözlediniz?

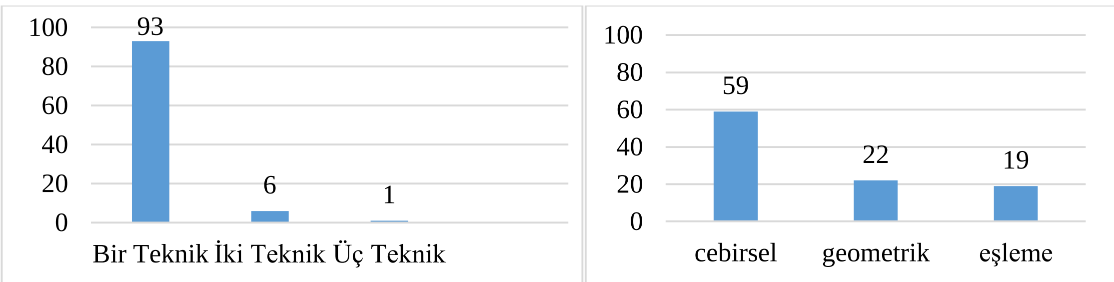
TÖ: Herhangi bir değişiklik yok. Kullanılan cebirsel olarak, grafiksel olarak kullanılan şeyler aynıdır. Zaten onun dışında bir şeyde kullanamayız. Atıyorum bir

fonksiyonu yazabilmemiz için kullanacağımız temsili şeyler bellidir. Bilinmeyenler ve sayılardır. Grafik çizimlerinde de kullanacağımız analitik düzlem geometrik olarak analitik düzlemde noktalar belirlendikten sonra çizimlerin yapılabilmesidir.
A: Peki hocam, siz hangi temsilleri kullanıyorsunuz öğretimde? En çok kullandığınızdan aşağı doğru sayabilir misiniz?
TÖ: En fazla cebirsel kullanıyoruz ama aslında doğru değil. Cebirsel çok kullandığınız zaman çocuk cebirsel temsil içinde boğulabiliyor. Bunu şemalarla, ondan sonra grafiklere geçişle o şekilde daha olumlu olabilir. Örneğin fonksiyonu tanımlamadan önce kümenin şemasını çizip fonksiyonu o şekilde tanıtmak, ondan sonra cebirsel temsillere geçmek biraz daha avantaj sağlıyor.

Tuna öğretmen 2013 program değişikliğinde fonksiyonların öğretiminde görevlerin verildiği temsiller açısından herhangi bir değişiklik olmadığını belirtmiştir. Öğretmen fonksiyon öğretiminin doğru yapılabilmesi için cebirsel, grafik ve şema temsilinin kullanılması gerektiğini ileri sürmüştür. Öğretmenin bu beyanını Tablo 4.27'deki sonuçlar desteklemektedir.

Tuna öğretmenin fonksiyon öğretiminde görevlerde ürettiği teknikler didaktik prakseolojilerin teknik bileşeni içerisinde değerlendirilmektedir. Tablo 4.28'de Tuna öğretmenin görevleri kaç farklı teknikle tamamladığı ve görevlerde üretilen tekniklerin türlerine göre dağılımı verilmiştir.

Tablo 4.28. *Tuna öğretmenin görevlerde başvurduğu teknikler*



Tuna öğretmenin fonksiyonların öğretimiyle ilgili görevlerin %93'ünü bir teknikle tamamladığı ve diğer %7'sinde ise birden fazla teknik kullandığı görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen, sınıf uygulamalarında verilen herhangi bir görevi bir teknikle sonuçlandırma eğilimindedir. Diğer taraftan öğretmenin görevlerin %59'unda cebirsel teknik, %22'sinde geometrik teknik ve %19'unda ise eşleme tekniği kullanıldığı belirlenmiştir. Bu durum öğretmenin fonksiyon öğretiminde genellikle cebirsel teknikler kullandığını göstermektedir.

Tuna öğretmenin bir görevi tamamlamak için farklı tekniklerin kullanılmasına ilişkin nasıl bir bakış açısına sahip olduğu aşağıdaki diyaloglarda verilmiştir.

TÖ: Bu bence gerçekten çok önemlidir. Öğrenci tek bir çerçeveyle baktığı zaman bir camdan bakıp da bir bölgeyi görmek var. Aynı bölgeyi 2 farklı pencereden camdan bakıp, aynı bölgeyi görmek var. Bu öğrencinin hem bakış açısını hem beyin olarak hem de bakış açısı olarak olumlu etki yapacaktır…

Bu diyalogda görüleceği üzere, öğretmen bir görevde birden fazla tekniğin verilmesinin öğrencilerin farklı düşünce yolları geliştirmesinde zihinlerini açıcı bir faktör olduğunu ve ilgili konunun farklı ayrıntılarını da görmeyi sağlaması açısından önemli olduğunu belirtmiştir. Ancak Tablo 4.28'de öğretmenin sınıf uygulamalarındaki görevlerde birden fazla tekniği çok sınırlı düzeyde kullandığı anlaşılmaktadır.

Tuna öğretmene fonksiyon konusunun öğretiminde sınıf uygulamalarında cebirsel teknikleri niçin ağırlıklı olarak kullandığı sorulmuştur. Bu konuda öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Ders videolarınızı izlerken görevleri daha çok cebirsel olarak çözme eğiliminde olduğunuz anlaşılıyor. Neden böyle bir yol takip ettiniz?

TÖ: Geçen sene de benim öğrencilerim olduğu için geçen seneki bilgilere dayanarak çocukların grafiklerde gerçekten zorlandığını gördüm. Çocuklar cebirsel olarak işlem daha kolay yapabiliyor. Cebirsel işlemleri daha sağlıklı yapabildiği içindir. Bunu grafiğe döktüğünüz zaman grafikte çocuk anlamakta zorlanıyor. Zorlandığından dolayı bunu grafik yerine cebirsel işlemleri öncelikli olarak tuttum.

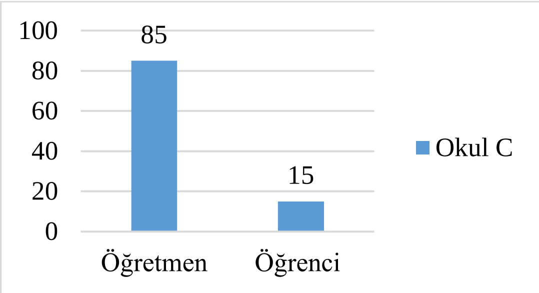
A: Daha çok cebirsel teknikleri kullandınız sınıfta, tablo ve grafik çok göremedim. Neden tabloyu az kullandınız?

TÖ: …Çünkü tabloda verdiğimiz değerle ona karşılık gelen değeri bulmamız gerekiyor. Pratik gerektiren bir şeydir. Bu da öğrenci seviyesinin iyi olması durumunda öğrencinin işlem yeteneğinin hızlı ve doğru olması gerekiyor ki o tabloyu çok rahat görebilsin. Öğrencilerimizin durumu biraz zayıf olduğundan dolayı cebirsel olarak yerine yazıp işlem yapmak daha cazip geliyor.

Öğretmen öğrencilerin grafik bilgilerindeki eksiklikten dolayı görevlerde cebirsel teknikleri yoğun olarak kullandığını belirtmektedir. Öğretmen tablo tekniğini kullanmamasının nedenini, öğrencilerin işlem yeteneklerinin zayıf olması sebebiyle tercih etmediğini açıklamıştır. Öğretmenin görevlerin çözümünde cebirsel teknikleri kullanma eğiliminde olması Tablo 4.28'de verilen sonuçlarla örtüşmektedir.

Fonksiyon öğretiminde sınıf uygulamalarında karşılaşılan görevlere ilişkin tekniğin uygulanmasında öğretmenin ne kadar etkin rol aldığı bilgisi Tablo 4.29'da verilmiştir.

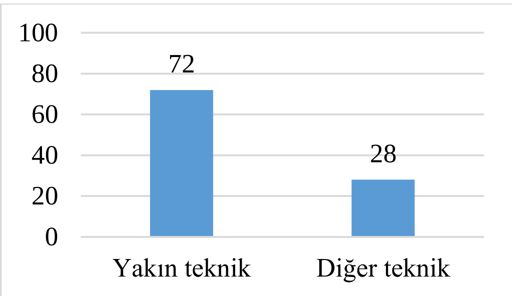
Tablo 4.29. *Görevlerin çözümünde etkin rol oynayan aktör*



Tablo 4.29'da görüldüğü üzere, Okul C'de görevlerin büyük çoğunluğunda teknik öğretmen tarafından gerçekleştirilmiştir. Öğrenci düzeyinin bu okulda zayıf olmasından dolayı öğrenciler genellikle öğretmenin daha önce kullandığı teknikleri kullanma eğilimindedir. Bu tekniklerin uygulanma sürecinde öğretmenin öğrencilerin yönlendirecek şekilde müdahalede bulunduğu gözlenmiştir.

Fonksiyonun herhangi bir temsiliyle verilen bir görev onunla yakın ilişkide bulunan teknikle sonuçlandırılma eğiliminde olup-olmadığı Tablo 4.30'da incelenmiştir.

Tablo 4.30. *Görevlerde temsil-teknik ilişkisi*



Tablo 4.30'da görüldüğü üzere, Tuna öğretmen görevlerin %72'sinde görevlerde verilen fonksiyon temsiline yakın tekniği kullanırken, %28'inde diğer teknikleri kullandığı belirlenmiştir. Bu doğrultuda öğretmenin görevlerde verilen fonksiyon temsilinin büyük ölçüde öğretmenin kullandığı tekniğin türünü belirlediği söylenebilir.

Fonksiyon öğretiminde öğretmenin genellikle ders kitabındaki görevleri uyarlayarak kullandığı tespit edilmiştir. Bu görevlerde fonksiyon çoğunlukla cebirsel temsille verilmekte ve bu doğrultuda görev de cebirsel tekniklerle tamamlanma eğilimindedir. Bunun nedeni öğretmen tarafından öğrencilerin bu tekniği daha kolay kullanabilmeleri ve geometrik tekniklerde zorlanmaları olarak açıklanmıştır. Diğer taraftan öğretmen işlem yeteneği gerektirdiği ve öğrencilerinin bu noktada zayıf oldukları gerekçesiyle nümerik teknikleri kullanmadığını belirtmiştir. Farklı bir açıdan öğretmen görevleri tamamlamasında birden fazla tekniğin kullanılması gerektiğini ifade etmesine rağmen sınıf uygulamalarında görevlerin çoğunda tek bir teknik üretmiştir. Öğretmenin öğretimde kullandığı kaynaktan ziyade öğrencilerin seviyesini dikkate alarak fonksiyon öğretimini yapmaya çalıştığı anlaşılmaktadır. Hatta bu bağlamda bazı alt başlıkları öğrencilerin anlayamayacağı düşüncesiyle öğretmenin öğretmediği belirlenmiş (tek-çift fonksiyon, simetri dönüşümlerinden bazıları ve fonksiyonların uygulamaları) ve bunlar yapılan görüşmelerde de öğretmen tarafından beyan edilmiştir.

4.2.3.3. Tuna öğretmenin fonksiyonlar konusuyla ilgili didaktik prakseolojileri

Tuna öğretmenin 10. sınıfta fonksiyon konusunun öğretiminde sınıf ortamında kullandığı alt başlıklar kronolojik sırada aşağıda verilmiştir.

- Fonksiyonlara Giriş (Fonksiyon kavramı, çeşitleri, bire bir ve örten fonksiyon, ters fonksiyona giriş)
- Fonksiyonların Simetri Dönüşümleri (x eksenine göre simetri ve y ekseninde öteleme)
- Fonksiyonlarda Dört İşlem
- Fonksiyonun Tersi
- Bileşke Fonksiyon ve özellikleri
- Fonksiyonların Simetri Dönüşümleri (x ekseninde öteleme, y ekseninde öteleme, x eksenine göre simetri, y eksenine göre simetri)

Tuna öğretmen 10. sınıfta veri, sayma ve olasılık öğrenme alanında yer alan sıralama ve seçme ile koşullu olasılık konularını öğrettikten sonra sayılar ve cebir öğrenme alanında bulunan fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunu öğretmeye başlamıştır. Öğretmen 20 Ekimde öğretimine başladığı fonksiyonları, toplamda 4 hafta süresince devam ederek 10 Kasımda bitirmiştir. Öğretmen ilk derste büyük ölçüde 9. sınıfta öğretilen fonksiyon kavramını, çeşitleri, bire bir ve örten fonksiyon, bir fonksiyonun tersinin fonksiyon olması gibi alt başlıklara değinmiştir. Sonra 10. sınıf konularını öğretmeye başlamıştır. Burada sırayla fonksiyonlarda simetri dönüşümleri, fonksiyonlarda dört işlem, ters fonksiyon, bileşke fonksiyon ve özellikleri ve son olarak tekrar fonksiyonların simetri dönüşümlerini incelediği görülmektedir. Bu alt başlıklar incelendiğinde programda belirtilen kazanım sıralamasına uyulmadığı ve programda geçen bazı alt başlıklara yer verilmediği (tek ve çift fonksiyon, fonksiyonların simetri dönüşümlerinde bazı dönüşümler, fonksiyonların uygulamaları gibi) belirlenmiştir. Öğretmenin sınıf uygulamalarında yer verdiği alt başlıklar altında 68 görev olduğu tespit edilmiştir.

4.2.3.3.1. Tuna öğretmenin fonksiyonların simetrileri dönüşümleri alt başlığıyla ilgili didaktik prakseolojileri

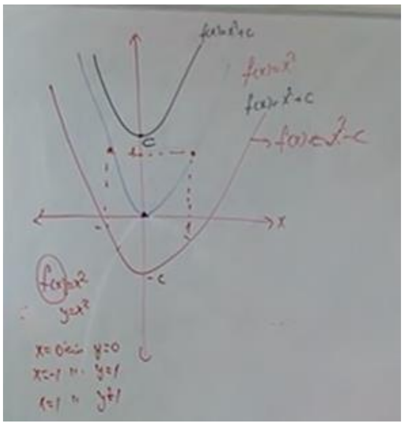
Tuna öğretmen fonksiyonların simetri dönüşümlerini üç ders saatinde tamamlamıştır. Bu derslerden biri konunun başında, diğer ikisi konunun sonunda gerçekleşmiştir. Burada beş görev tipi içerisinde 16 göreve yer verilmiştir. Bu görev tipleri ve her bir görev tipine ait görevlerin sayısı Tablo 4.31'de sunulmuştur.

Tablo 4.31. *Tuna öğretmenin simetri dönüşümleri alt başlığında kullandığı görev tipleri*

Görev Tipleri	Görev Tiplerinin İfadesi	Görev Sayısı
T_1	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(x)±b fonksiyonunun grafiğini elde etme	6
T_2	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(x±a) fonksiyonunun grafiğini elde etme	2
T_3	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y= -f(x) fonksiyonunun grafiğini elde etme	4
T_4	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(-x) fonksiyonunun grafiğini elde etme	3
T_5	y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y= -f(-x) fonksiyonunun grafiğini elde etme	1

Tablo 4.31'de verilen görev tiplerinde yer alan görevlerde fonksiyonların grafiklerine genellikle bir dönüşüm uygulanmasıyla yeni fonksiyonların grafiklerinin elde edildiği görülmektedir. Burada T_1, T_2, T_3 ve T_4 görev tiplerinde bir simetri dönüşümü kullanılmış, T_5 görev tipinde ise iki simetri dönüşüm kullanılmıştır. Bu görev tipleri kapsamında incelenen görevlerde doğrusal fonksiyon, parabol ve parçalı fonksiyon grafiklerinin kullanıldığı belirlenmiştir. Bu görevlerde öğretmenin afin dönüşümleri öğretmemesi göze çarpmaktadır. Görevlerden üçü iki teknikle diğerleri bir teknikle tamamlanmıştır. Görevlerin tamamında geometrik tekniklere başvurulmuştur.

Bu alt başlığı öğretmenin konunun başında T_3 görev tipinden bir görevi ve T_1 görev tipinden 2 görevi tamamladıktan sonra öğrencilerin hazırbulunuşlukları yeterli olmadığı gerekçesiyle fonksiyonlarda dört işleme geçmiştir. Öğretmen bu alt başlıktaki diğer görevleri fonksiyonlarda bileşke işlemi ve özellikleri bittikten sonra tekrar simetri dönüşümlerini incelediği süreçte vermiştir. Tuna öğretmen, T_1 görev tipine girişi Şekil 4.72'de verilen grafikle gerçekleştirmiştir.



Şekil 4.72. *Tuna öğretmenin T_1 görev tipiyle ilgili $t_{1,1}$ görevi*

TÖ: Şimdi şuraya geçelim (y=x^2 grafiğini çizdi). Bu neyin grafiğidir?

Ö2: Çift fonksiyon

TÖ: f(x) eşittir..(tamamlamadı)

Ö1: Sıfır mı? f(x)=0

Ö4: Örten fonksiyon mu?

Ö2: f(x)=y (Öğrencilerden hiç biri grafiği tahmin edemiyor.)

TÖ: f(x)=x^2

Öğrenciler: Aa, evet.

TÖ: f(x)=x^2 bir parabol oluşturuyordu. Açıklamıştık, şöyle hatırlayın. Aynı zamanda bunun yerine ne yazıyorduk. (f(x) yerine)

Ö3: y

TÖ: x=0 verdiğimiz zaman y=0 olur. x=-1 için y=1, x=1 için y=1, şuraya bakın x'in 2 değeri için y nin 1 değeri vardır…Aynı şekil üzerinde bu f fonksiyonu f(x)=x^2 değil de x^2 artı herhangi bir sayı değerini alsın. (f(x)=x^2+c yazdı) y=x^2 fonksiyonu orijinden geçen bir parabol, kolları yukarı doğru geçen bir parabol, biz buna parabol diyoruz. İkinci dönem anlatacağım. Buna herhangi bir sayı ekleyelim.

$f(x)=x^2+c$ şeklinde c gibi bir sayı ekledim. Benim fonksiyonunda nasıl bir değişiklik olur?

Öğrenciler: Nasıl hocam bir daha tekrarlar mısınız? (Ö7), Tersine döner (Ö6), Hocam y artıyor. (Ö2)

TÖ: Şöyle bir şey düşünün, $y=x^2+3$ gibi bir şey yaptım.

Öğrenciler: Simetri olmaz (Ö8), Kural kalkar o zaman (Ö2), Orijinden uzaklaşır (Ö6)

TÖ: Orijinden uzaklaşır, değil mi? Çünkü burada ($y=x^2$ gösterdi) x'e 0 verdiğim zaman y'nin değeri de 0 çıkıyor. Buradaysa ($y=x^2+3$ gösterdi) x'e 0 verdiğimde ne olacak y'nin değeri? 3 olacak. Demek ki, 3 br ne olacak? Fonksiyon yukarı doğru uzaklaşacak (öğrenciler de katıldı), eksi olmuş olsaydı orijinden aşağı doğru. O zaman şunu diyorum,.. orada +c varsa merkezde orijinden y ekseninde +c kadar yukarı kaydırıyoruz, -c ise –c kadar aşağı indiriyoruz.

Tuna öğretmenin T_1 görevi ile ilgili $t_{1,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{1,1}$: $y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y=x^2+c$ ($y=x^2+3$) fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{1,1}$ (Geometrik Teknik): *$y=x^2$ fonksiyonu orijinden geçen bir parabol* [referans fonksiyon],.. *$f(x)=x^2+c$ şeklinde c gibi bir sayı ekledim.* [Dönüşüm] *O zaman şunu diyorum,.. orada +c varsa merkezde orijinden y ekseninde +c kadar yukarı kaydırıyoruz, -c ise –c kadar aşağı indiriyoruz.* [$y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni üzerinde yukarı yönde c br ötelenmesiyle $y=x^2+c$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.]
- $\theta_{1,1}$: *$y=x^2$ fonksiyonu orijinden geçen bir parabol, kolları yukarı doğru geçen bir parabol, biz buna parabol diyoruz* [parabolün informel açıklaması], *$f(x)=x^2+c$…Şöyle bir şey düşünün, $y=x^2+3$ gibi bir şey yaptım* [öteleme dönüşümü]*…Orijinden uzaklaşır, değil mi? Çünkü burada ($y=x^2$ gösterdi) x'e 0 verdiğim zaman y'nin değeri de 0 çıkıyor. Buradaysa ($y=x^2+3$ gösterdi) x'e 0 verdiğimde ne olacak y'nin değeri? 3 olacak. Demek ki, 3 br ne olacak?* [Deneysel bir şekilde y ekseninde ötelemenin niçin yukarı yönde kaydırma olduğu açıklanıyor. Ayrıca dönüşüm sonrası yine parabol çizildi. Sezgisel olarak öteleme dönüşümünün şekli koruduğu görülmektedir.]

Tuna öğretmen bu görevde $y=x^2$ referans parabolünden hareketle $y=x^2+c$ şeklinde bir fonksiyonun grafiğinin geometrik tekniklerle nasıl çizileceğini $y=x^2+3$ özel bir fonksiyon üzerinden deneysel olarak açıkladığı görülmektedir. Burada öğretmen diyalogdaki son cümlede $y=x^2$ referans fonksiyonuna eklenen sayı pozitif ise $y=x^2$ parabolünün y ekseni boyunca yukarı yönde öteleneceğini ve negatif ise aşağı yönde öteleneceğini belirtmiştir. Bu tekniğin teknolojisinde ise $y=x^2$ referans fonksiyonunun informel tanımı yapılarak parabol olarak ifade edildiği açıklanmıştır. Daha sonra $y=x^2$ referans fonksiyonuna c gibi bir sayı eklendiğinde ortaya çıkan $y=x^2+c$ fonksiyonunun referans fonksiyonun grafiğinde nasıl bir değişim yaratacağı, $y=x^2+3$ fonksiyonuyla deneysel bir şekilde gösterilmeye çalışılmıştır. Bu tür bir yaklaşımla öğretmenin ilk olarak y ekseninde öteleme dönüşümü açıklamaya çalıştığı ifade edilebilir. Bu dönüşümün referans fonksiyonun grafiğine etkisi ise $y=x^2$ fonksiyonunun sadece bir noktası (tepe noktası) temel alınarak gerçekleştirilmiştir. Dönüşüm sonrası çizilen grafiğin referans fonksiyonda olduğu gibi yine parabol olması öğretmenin sezgisel olarak öteleme dönüşümünün verilen fonksiyonun şeklini bozmayacağını bildiği şeklinde değerlendirilebilir.

Öğretmenin bu görevde gerçekleştirdiği prakseoloji didaktik anlar açısından incelendiğinde, ilk olarak $y=x^2$ ikinci dereceden fonksiyonunun grafiği (ya da referans fonksiyonu) 9. sınıfta öğretilen üç nokta yaklaşımıyla çizildiğinden kurumsallaştırma anı yaşandığı söylenebilir. Sonrasında $t_{1,1}$ görevi y ekseninde öteleme dönüşümüne ilişkin ilk görev olduğundan *ilk karşılaşma anı* gözlenmiştir. Görevin tamamlanma sürecinde özel bir görev ($y=x^2$ parabolünden $y=x^2+3$ parabolünü elde etme) üzerinden elde edinilen deneysel bilginin genellenmesi yoluyla ($y=x^2$ parabolünden $y=x^2+c$ parabolünü elde etme) *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı*nın belli ölçüde kurulmaya çalışıldığı belirlenmiştir. Ancak y ekseninde yapılan bu ötelemenin şeklin yapısını koruduğu ve uzaklığı koruyan bir dönüşüm olduğu belirtilmemiştir. Ayrıca öteleme sadece bir nokta üzerinden yapılmış, ötelemenin referans fonksiyonun grafiğinin diğer noktalarına da benzer bir etki yapacağına ilişkin açıklama yapılmamıştır. Diğer taraftan $y=x^2$ ikinci dereceden fonksiyonlarından $y=x^2+c$ ikinci dereceden fonksiyonlarının elde edilmesi c'nin farklı değerleri için farklı fonksiyon kurallarını ima ettiğinden ve burada uygulanan teknik (grafiği y ekseninde c birim öteleme) bu tür bütün fonksiyonlar için geçerli olduğunda *görev tiplerini keşfetme* ve bir *teknik geliştirme anı* yaşandığı belirtilebilir.

Görev sadece bir teknikle tamamlanmıştır. Bu anlamda alternatif teknikler kullanılmadığından *tekniksel çalışma anı* gerçekleşmemiştir.

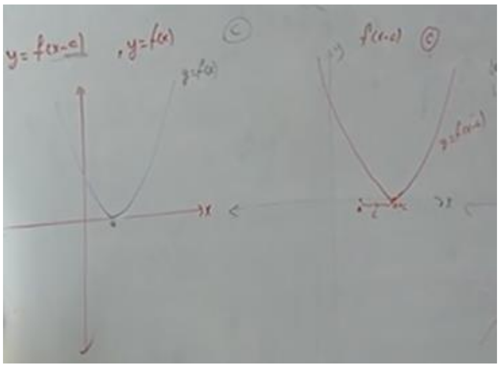
Bu görevin çözümünden sonra öğretmen ani bir karar alarak, dersin ortasında aşağıdaki açıklamaları yaparak bu alt başlığı daha sonra anlatacağını şu sözlerle ifade etmiştir.

TÖ: Çocuklar aslında bu fonksiyon grafikleri ikinci dönem konusudur. Çok daha detaylı üzerinde duracağım. Şu anda bu konuyu biraz verip-vermemekte kararsızım. Şimdi vereceğim sonraki dönem bir daha tekrar etmiş olacağız. Şimdi burada alacağınız bilgileri bir daha orada vermeyeceğim. Çünkü burada aldığınız bilgileri orada tekrar yapmayacağız, o zamana kadar da unutmuş olacaksınız. Ben direkt fonksiyonlarda işlemleri vereyim, grafikler, ikinci dereceden fonksiyonlara geçtiğimizde orada hepsini detaylı bir şekilde vereceğim, tamam mı? Not dedik, değil mi? Devam edeceğim. Not kalsın. Fonksiyonlarda işlem dediğimizde kaç işlem yapabiliriz?

Öğretmen $\mathrm{t}_{1,1}$ görevinin çözüm sürecinde öğrencilere sorular sorarak onların derse katılımını sağladığı görülmektedir. Ancak öğrencilerin hem referans grafiklerin çizilmesinde hem de dönüşümlerle ilgili verdikleri yanıtlardan bu kavramlara ilişkin eksiklerinin olduğu görülmektedir. Burada öğretmenin bu tür dönüşümlerde ikinci dereceden fonksiyonlar kullanıldığını ifade etmesi ve bu konunun programda fonksiyonlardan daha sonra yer alan parabol konusuyla ilişkisi olduğu ifade edilerek orada verileceği belirtilmiştir. Öğretmenle yapılan görüşmede niçin bu alt başlığı atladığı sorulduğunda fonksiyonlarda simetri dönüşümlerini öğrencilerin anlayabilmesi için parabol konusunun anlatılmış olması gerektiği ve öğrenci seviyesinin konuyu anlamaya uygun olmaması nedeniyle böyle bir karar aldığını belirtmiştir. Daha sonraki derste Tuna öğretmen ve aynı okulda başka bir matematik öğretmeni fonksiyonlarda simetri dönüşümleri alt başlığını öğrencilerin anlamadığını belirterek zümre kararı aldıklarını ve bu alt başlığı atladıklarını belirtmişlerdir. Araştırmacı, Tuna öğretmene "Öğretim programına uygun fonksiyon öğretimini gerçekleştireceğinizi söylemiştiniz" hatırlatması üzerine fonksiyonların sonunda öğretmen iki ders saatini bu alt başlığa tekrar ayırmıştır.

Tuna öğretmen simetri dönüşümleri alt başlığını öğrencilerin öğrenmekte zorlandığını belirterek bu alt başlığı öğretmeme kararı almıştır. Bu kararın alınmasında burada yapılan dönüşümlerde kullanılan fonksiyonları öğrencilerin bilmemesini gerekçe göstermiştir. Burada gerçekte programdaki konuların sıralamasından kaynaklı ekolojik sorunlar daha önceki bölümlerde ifade edilmişti. Tuna öğretmen bu sorunu, simetri dönüşümleri alt başlığının parabol konusundan önce anlatılması gerektiği şeklinde ifade etmiştir. Ancak öğretmenin görevlerde kullandığı fonksiyonların grafiklerinin genellikle öğretim programında daha önceden öğretilen grafikler olduğu görülmektedir ($y=x^2$ fonksiyonunun grafiği 9. sınıfta öğretilmektedir). Buradaki asıl sorun simetri dönüşümlerinin temellerinin 11. sınıfta öğretildiğinden dolayı henüz öğrenciler tarafından bilinmemesinden kaynaklı ekolojik sorunlardır. Deneyimli öğretmenlerin bunların farkında olması ve bunlara yönelik tedbirler alması gerekmektedir. Ancak Tuna öğretmenin buradaki ekolojik sorunun kaynağını yanlış bir şekilde ifade ettiği ve dolayısıyla asıl sorunu göremediği belirlenmiştir. Sonuç olarak, bu ekolojik sorunun çözümüne yönelik uygun bir girişimde bulunamadığı anlaşılmaktadır. Hatta deneyimli bir öğretmenin yapmaması gereken simetri dönüşümleri alt başlığını tamamlamadan ani bir kararla fonksiyonlarda simetri dönüşümleri alt başlığını atlama kararı almıştır.

Daha sonra öğretmen fonksiyon grafiklerinin x ekseninde ötelemesine ilişkin aşağıda Şekil 4.73'teki bilgileri vermiştir.



Şekil 4.73. *Tuna öğretmenin x ekseninde ötelemeye ilişkin verdiği bilgi*

TÖ: İki diyelim. y=f(x-c) fonksiyonunun grafiği y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca c kadar ötelenmişidir.

Ö4: Yine aynı işlemler, değil mi hocam?

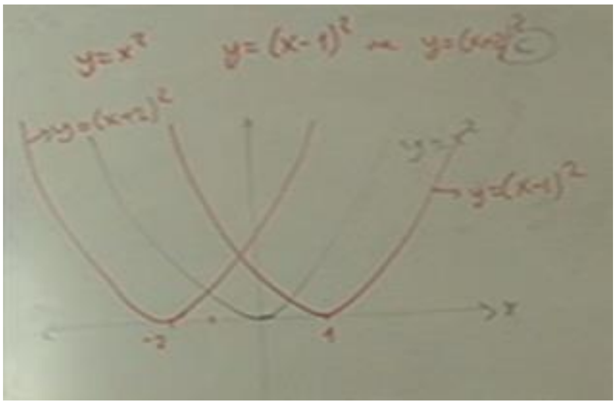
Ö1: Ama bu sefer x ekseni boyunca. (Öğretmen bir parabol grafiği çizdi)

TÖ: Şimdi dikkat ederseniz çocuklar x-c verilmiş bize (y=f(x-c)'deki x-c'yi gösteriyor), ötelenmesini istediği sayı ise c dir. Bak, buradaki sayı ne ise onun zıt işaretlisi kadar öteliyorsunuz. Bu f(x) fonksiyonu çocuklar, bunun yardımıyla f(x-c)'nin ötelenişini yapıyoruz (Başka bir koordinat ekseninde ötelemeyi yapıyor).

Burada grafiğimiz a'dan geçiyordu, değil mi? f(x-c)'nin ötelenişini yapacağım. c burada negatif olduğu için artı c sayısı kadar öteleyeceğim (x ekseninde sağa doğru öteleme yaptı). Bakın fonksiyonumuz f(x-c) olur. Yani fonksiyonun bulunduğu noktadan c sayısı kadar öteleyeceğiz. Artıysa eksi, eksiyse artı. Eğer şurası +c demiş olsaydı, –c kadar öteleyecektik.

Ö3: Yani orijinde c kadar uzaklaşıyor.

Öğretmen y=f(x-c) fonksiyonun grafiğinin y=f(x) referans fonksiyonunun grafiğinin x ekseninde c birim ötelenmesi sonucunda elde edileceğini belirtmiştir. Bu tekniğin doğrudan verilmesi olup didaktik anlardan görev tiplerini keşfetme ve bir teknik geliştirme anını "paypas" etmektedir. Diğer taraftan bu bilginin doğruluğuna ilişkin açıklamalar informel açıklamalarla sınırlı kalmıştır. Bu açıklamaların yetersiz olduğu açıktır. Çünkü y=f(x-c) fonksiyonun grafiğinin y=f(x) referans grafiğinin x ekseninde hangi yönde ötelenmesi gerektiği ve x ekseninde yapılan öteleme dönüşümünün fonksiyonun kuralını nasıl etkilediği kanıtlanmadan ortaya konmuştur. Bu anlamda *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı* burada yetersiz bir şekilde verilmiştir. Daha sonra öğretmen, bu kural doğrultusunda iki görevi öğrencilere sunmuştur. Bu görevlerde $y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanılarak $y=(x-1)^2$ ve $y=(x+2)^2$ fonksiyonlarının grafiklerinin çizilmesi istenmektedir. Aşağıda Şekil 4.74'te bu görevlere ilişkin fonksiyonların grafikleri sunulmuştur.



Şekil 4.74. *Tuna öğretmenin T_2 görev tipiyle ilgili $t_{2,1}$ görevi*

TÖ: Öncelikle neyin grafiğini çizeceğiz?

Öğrenciler: $y = x^2$

TÖ: $y = x^2$*'nin grafiğini çizeceğiz.* $y = x^2$ *nin grafiğini çizdik, değil mi?* $y = (x-1)^2$ *o zaman burada çocuklar -c olduğu için ne yapacağım? Artı c kadar* *oluyor. Yani burada c'nin değeri -1 olduğu için 1 kadar öteleyeceğim. 1 kadar öteledim. Bundan sonra fonksiyonun grafiğini (sözünü bitirmedi, grafiği çizdi) Ne olur? y=(x-1)^2. Peki $y=(x+2)^2$ nasıl öteleyeceğim? x ekseninde -2 br öteleyeceğim. Eksi 1, eksi 2 (x ekseninde noktaları işaretledi). Öteledikten sonra grafiği çizeceğim (Grafiği çizdi). Bu neyin grafiği? y=(x+2)^2.*

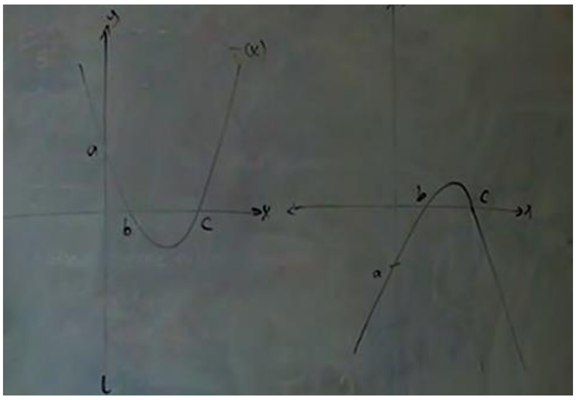
Tuna öğretmenin T_2 görevi ile ilgili $t_{2,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{2,1}$: $y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y=(x-1)^2$ fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{2,1}$ (Geometrik Teknik): $y=x^2$ *'nin grafiğini çizeceğiz.* $y=(x-1)^2$ *o zaman …burada c'nin değeri -1 olduğu için 1 kadar öteleyeceğim.* [Referans fonksiyonunun grafiği x ekseninde 1 br sağa öteleme]
- $\theta_{2,1}$: ?

Tuna öğretmenin $t_{2,1}$ görevini geometrik teknikle tamamlamıştır. Bu tekniği uygulanışında, $y=x^2$ referans fonksiyonunun grafiğini 1 birim x ekseninin pozitif yönünde ötelenmesiyle $y=(x-1)^2$ fonksiyonun grafiği elde edilmiştir. Bu tekniğin teknoloji incelendiğinde öğretmenin teknolojik bir açıklama vermediği söylenebilir. Burada $y=(x-1)^2$ fonksiyonunun grafiğinin $y=x^2$ referans fonksiyonunun grafiğinden nasıl bulunduğu, daha önce x ekseninde öteleme fonksiyonuna ilişkin bilgiye atıfta bulunularak sonuçlandırıldığı görülmektedir. Ancak oradaki bilgide de teknolojik açıklamalar büyük ölçüde eksik bir şekilde yapılmıştı. Yani niçin $y=(x-1)^2$ fonksiyonunun grafiği $y=x^2$ referans fonksiyonunun grafiğinin x ekseni üzerinde pozitif yönde 1 birim sağa ötelenmesi yoluyla elde edildiğine ilişkin bir kanıt verilmediği görülmektedir. Burada her iki grafiğin parabol bilgileri ışığında çizilerek kıyaslanması neticesinde deneysel açıklamalar yapılabilirdi. Bu sayede dönüşüm sonucunda yeni grafiğin eksenleri kestiği noktalar (1,0) ve (0,1) şeklinde bulunabilirdi. Diğer taraftan öğretmenin öteleme dönüşümü sonucunda yine parabol çizmesi sezgisel olarak öteleme dönüşümünün verilen fonksiyonun şeklini bozmayacağını bildiği şeklinde yorumlanabilir. Ancak bu doğrultuda diyalogda herhangi bir açıklama yapılmamıştır.

Tuna öğretmenin burada gerçekleştirdiği prakseoloji didaktik anlar açısından incelendiğinde, T_2 görev tipi ile ilk karşılaşılan görev olması itibariyle *ilk karşılaşma anı* gözlenmiştir. Bu görevde ilk karşılaşma anı dışında herhangi bir an gözlenmemiştir.

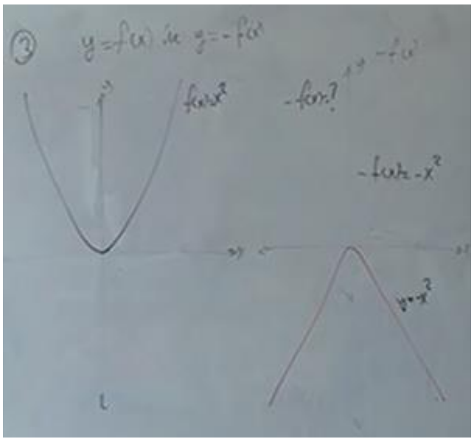
Öğretmen daha sonra bir grafiğin x eksenine göre simetrisine ilişkin aşağıda Şekil 4.75'te verilen bilgiyi öğrencilere sunmuştur.



Şekil 4.75. *Tuna öğretmenin x eksenine göre simetri dönüşümüne ilişkin verdiği bilgi*

> *TÖ: y=f(x) ile y=-f(x) fonksiyonlarının grafikleri x eksenine göre simetriktir. Şimdi diyelim ki, size bir grafik verildi çocuklar. Bu grafik f(x)'in grafiği olsun. Sizden –f(x)'in grafiği istendiğinde, verilen f(x)'in grafiğinin x eksenine göre, (sözünü değiştirdi) x ekseni ne olacak? Bizim aynamız olacak, simetriğini alacağız. Kim çizecek? (Kabaca grafiği kendisi çizdi) Hangi bölgeye gelecek. Burada 2. bölgeden gelip 4. bölgeden 1. bölgeye geçiş yapıyor. Aynı şekilde kollar aşağı geçecek. O zaman a'dan ((0,a) noktası) –a'ya ((0,-a) noktasına), buradan başlayacak burada b, şurası da c, bu da neyin grafiğidir? –f(x)'in grafiğidir.*

Öğretmen öncelikle y=f(x) ile y=-f(x) fonksiyonlarının grafiklerinin x eksenine göre simetrik olduğunu belirtmiştir. Bu ifade tekniğin doğrudan verilmesi anlamına gelmekte ve *görev tiplerini keşfetme ve bir teknik geliştirme anı*nı iptal etmektedir. Daha sonra öğretmen verdiği bilgiyi destekleyecek şekilde simetri ekseni olan x eksenini ayna benzetmesiyle açıklamıştır. Diğer taraftan y=f(x) ile y=-f(x) fonksiyonlarının niçin x eksenine simetrik olduğu kanıtlanmadan sözel ifadelerle sınırlı kalacak şekilde betimlenmiştir. Bu anlamda verilen bilgiye ilişkin *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı* büyük ölçüde eksik olarak verilmiştir. Bu görev tipiyle ilgili ilk görev fonksiyon konusunun başında verilmiştir. Yukarıdaki açıklamadan sonra ise doğrusal bir fonksiyonun grafiği öğretmen tarafından çizildikten sonra x eksenine göre simetriğinin alınmasına ilişkin bir görev incelenmiştir. Bu görevi bir öğrenci sonuçlandırmıştır. Ancak tekniği yanlış uygulamıştır. Öğretmen bu durumu fark etmemiş ve diğer göreve geçmiştir. Daha sonra T_3 görev tipiyle ilgili $t_{3,3}$ görevi aşağıda Şekil 4.76'da vermiştir.



Şekil 4.76. *Tuna öğretmenin* T_3 *görev tipiyle ilgili* $t_{3,3}$ *görevi*

TÖ: Bu neyin grafiğidir?

Ö4: $y = x^2$

TÖ: $f(x) = x^2$*'nin grafiğidir. Peki, –f(x)'in grafiğini kim çizecek bana?*

Ö10: Hocam aşağı mı olacak?

TÖ: Gel (öğrenci grafiği çizdi) Doğru mu?

Ö5: Evet doğru.

Ö6: Doğru, doğru.

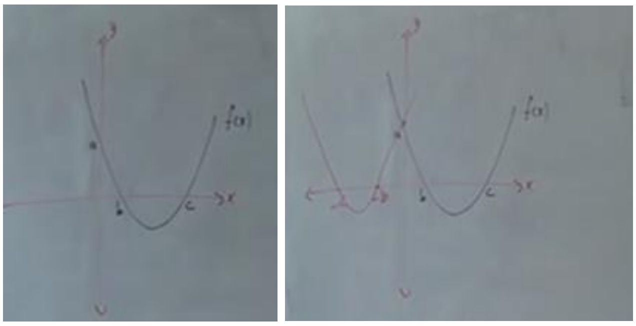
TÖ: x eksenine göre simetrisini aldınız, değil mi? x ekseni buysa görüntüsü ne olur? (y=x^2 *nin grafiğinin görüntüsü) Kolları aşağı olur.* $y = -x^2$*'nin grafiğidir. Zaten –f(x) demek verilen fonksiyonu, (sözünü değiştirdi) bu nedir?* $y = x^2$ *eksi ile çarpacaksın. Zaten bunu önceki derslerimizden de hatırlarsınız. Demiştik işte,* $y = x^2$*'nin kolları yukarı doğru ise eksilisi aşağı doğrudur.*

Tuna öğretmenin T_3 görevi ile ilgili $t_{3,3}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{3,3}$: y=x^2 fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=-x^2 fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{3,3}$ (Geometrik Teknik)*:* $f(x) = x^2$*'nin grafiğidir… –f(x)'in grafiğini kim çizecek bana?.. x eksenine göre simetrisini aldınız, değil mi?* [y=f(x) ile y=-f(x) fonksiyonlarının grafikleri x eksenine göre simetriktir]
- $\theta_{3,3}$: ?

Tuna öğretmenin $t_{3,3}$ görevinde f(x)=x^2 fonksiyonun grafiğinden yararlanarak y=-f(x) fonksiyonunun grafiği elde edilirken x eksenine göre simetriği alınması gerektiğini belirtmiştir. Bu tekniği Ö10 kodlu öğrenci gerçekleştirmiştir. Tekniğin doğrulayan, açıklayan ya da tasarlanmasına ilişkin anlamlı ifadelere burada rastlanmamıştır. Dolayısıyla teknoloji bu didaktik prakseolojide verilmemiştir.

Didaktik anlar açısından $y=x^2$ ve $y=-x^2$ fonksiyonlarının grafiklerini öğretmenin daha önce öğrettiği diyalogda "*Zaten bunu önceki derslerimizden de hatırlarsınız. Demiştik işte,* $y = x^2$*'nin kolları yukarı doğru ise eksilisi aşağı doğrudur*" şeklinde açıklanmıştır. Bu durum *kurumsallaştırma an*ının sınırlı da olsa yaşandığı şeklinde yorumlanabilir. Daha sonra öğretmen bu görev tipiyle ilgili x eksenini 3 farklı noktada kesen bir eğrinin x eksenine göre simetrisinin bulunmasını içeren bir görevi belli noktaların ayna simetrisini alarak tamamlamıştır. Bunun akabinde öğretmen bir diğer görev tipiyle ilgili aşağıda Şekil 4.77'deki bilgileri vermiştir.



Şekil 4.77. *Tuna öğretmenin y eksenine göre simetri dönüşümüne ilişkin verdiği bilgi*

TÖ: y=f(x)'in grafiği veriliyor. f(-x)'in grafiğini bulunuz?(bir öğrenciyi kaldırdı)

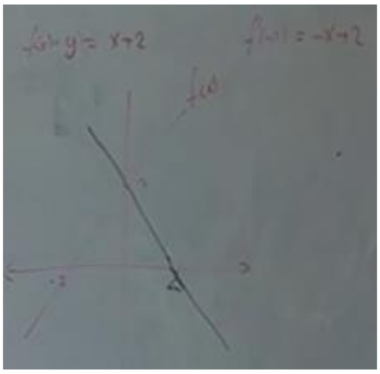
Ö11: Hocam -b, -c (x ekseninde noktaları işaretledi ve grafiği çizdi) böyle bir şey olur.

TÖ: Evet, a noktası değişmez çocuklar. Hangi eksen simetri ise o eksen üzerindeki değer değişmez. Dedik y eksenine göre simetrik, değil mi? O zaman y'nin değeri değişmeyecektir.

Ö3: a değeri değişmeyecek.

TÖ: Şurada y ekseni üzerindeki nokta değişmeyecektir. x ekseni üzerindekilerin negatifini alacaksınız. Eğer x eksenine göre simetri ise o zaman ne olacak çocuklar? x ekseni üzerindeki nokta değişmeyecek. y ekseni üzerindeki nokta değişecektir. a'yı –a'ya çevirecek (eğer x eksenine göre simetri alınsaydı). Dikkat ettiyseniz buradaki değerler değişmedi (y ekseni üzerindeki çünkü y eksenine göre simetri alındı demek istedi).

Bu açıklamada y eksenine göre simetrinin grafiğin eksenleri kestiği noktaları nasıl etkilediği açıklanmaktadır. Eğer y eksenine göre simetri alınıyorsa y ekseni üzerindeki noktaların değişmediği ve x ekseni üzerindeki noktaların ise apsislerinin işaretinin değişeceği ifade edilmektedir. Bu tür açıklamalar y eksenine göre yansıma dönüşümünün nasıl alınacağını göstermektedir. Ancak y eksenine göre yapılan yansıma dönüşümünde niçin grafik üzerindeki noktaların apsislerinin işaret değiştirmesi gerektiği ve y ekseni üzerindeki noktaların değişmeyeceği açıklanmamıştır. Bununla birlikte grafiğin eksenlere göre simetriği alındığında sanki sadece eksenleri kesen noktaların simetriği alınıyormuşçasına tekniğin sunulduğu anlaşılmaktadır. Burada da tekniğin ifadesinin doğrudan verildiği ve bu yüzden *görev tiplerini keşfetme* ve bir *teknik geliştirme an*ının anlamsız kılındığı gözlenmektedir. Bu açıklamalardan sonra öğretmen T_4 görev tipinde aşağıda şekil 4.78'de grafiği verilen $t_{4,2}$ görevini öğrencilere sunmuştur.



Şekil 4.78. *Tuna öğretmenin T_4 görev tipiyle ilgili $t_{4,2}$ görevi*

TÖ: y=x+2, (sözünü değiştirdi) bir parabol, bir doğru bir de üçüncü dereceden fonksiyonun grafiğini veriyorum. Şu şekilde gelen var ya o 3. dereceden …fonksiyonlardır. y=x+2 doğrunun grafiğini çizelim. x=0 için y=2, y=0 için x=-2, Eksi 2 artı 2 noktalarından geçen fonksiyonun grafiği. Peki, f(-x)'in grafiğini kim çizecek?

Ö9: Hocam şey y eksenindeki değişmeyecek, x eksenindeki değişecek (Grafiği çizdi).

TÖ: Doğru mu?

Öğrenciler: Doğru

TÖ: Doğru olup-olmadığını nasıl anlarsınız çocuklar?

Ö1: Nasıl mı anlarız? y'deki değerler değişmez, x'deki değerler değişir.

TÖ: Onu unutun. Değişir mi değişmez mi bilmiyorum.

Ö6: Hocam x'in şeyi değişti ya işareti, eksiden artı oldu ondan dolayı olabilir mi?

TÖ: Şimdi çocuklar, dinle, f(-x)=-x+2 olmayacak mı?

Öğrenciler: Evet hocam.

TÖ: O zaman getirip değer verebilirim. x'in yerine 0 yazdığım zaman y'nin değeri 2, değil mi? y'ye 0 verdiğim zaman x'in değeri 2, demek o zaman 2 (2,0), 2 (0,2) noktasından geçiyor. Ya da kuralı biliyorsanız, y eksenine göre simetride y ekseni değişmeyecek, x ekseninde -2'nin simetriği nedir? Artı 2.

Tuna öğretmenin T_4 görevi ile ilgili $t_{4,2}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

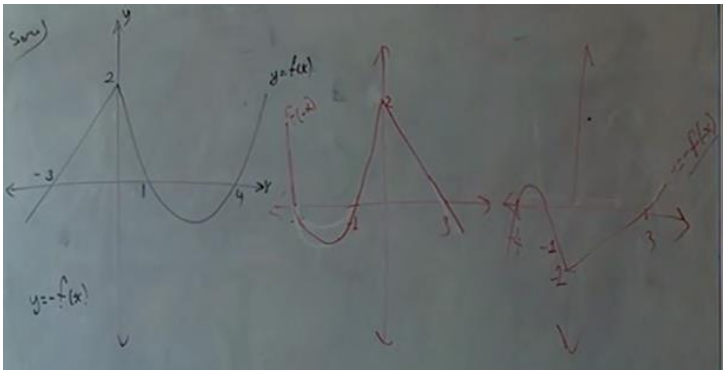
- $t_{4,2}$: y=f(x)=x+2 fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak f(-x) fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{4,2,1}$ (Geometrik Teknik): *y=x+2 doğrunun grafiğini çizelim…Peki f(-x)'in grafiğini kim çizecek? y eksenine göre simetride y ekseni değişmeyecek, x ekseninde -2'nin simetriği nedir? Artı 2.* [y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=f(-x) fonksiyonunun grafiği elde edilirken y eksenine göre simetriği alınır]
- $\tau_{4,2,2}$ (Geometrik Teknik): y=f(x)=x+2 fonksiyonun kuralından f(-x) değişken değiştirmeyle elde edilir. Eksenleri kestiği nokta belirlenerek grafiği çizilir.
- $\theta_{4,2,1}$: ?
- $\theta_{4,2,2}$: *Doğru olup-olmadığını nasıl anlarsınız çocuklar?...f(-x)=-x+2 olmayacak mı?...O zaman getirip değer verebilirim.* [Yansıma dönüşümünü deneysel olarak kanıtlanmasıyla açıklama]

Bu görev y=x fonksiyonunun simetri dönüşümüne (örneğin y ekseninde 2 birim yukarı ötelenerek) uğrayarak y=x+2 fonksiyonudur. Programda fonksiyonlarda simetri dönüşümlerinin $y=x^n$, $n\in Z$ ile sınırlı kalınması istenmektedir. Bu anlamda görevin programın kazanımlarının ötesinde olduğu söylenebilir.

Diyalogda $t_{4,2}$ görevini Ö9 kodlu öğrencinin daha önce öğretmenin verdiği kurala benzer şekilde geometrik teknikle tamamlamıştır. Bu tekniğin teknolojisi olmaksızın gerçekleştirildiği tespit edilmiştir. Daha sonra y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetri dönüşümü sonrasında elde edilen grafiğin doğru olup olmadığını kontrol etmek için 9. sınıfta öğrencilerin öğrendiği başka bir teknikle görevi sonuçlandırmıştır. Bu görevde kullanılan ikinci teknik birinci tekniği doğruladığından teknolojik bir açıklama olarak nitelendirilebilir. Ancak burada da y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği alındığında y=f(-x) fonksiyonunun grafiğinin elde edildiği bilgisinin nereden geldiği bahsedilmeden teknik gerçekleştirilmiştir. Bu anlamda teknolojik açıklamalar eksik yapılmıştır.

Didaktik anlar açısından, öğretmenin "*bir parabol, bir doğru bir de üçüncü dereceden fonksiyonun grafiğini veriyorum.*" şeklindeki beyanından bu görevde ne tür görevlere yer verdiğine yönelik ima bulunduğundan *görev tiplerini keşfetme* ve *bir teknik geliştirme anı*na yönelik işaretler bulunduğu söylenebilir (teknik geliştirmesi eksik). Diğer bir boyutta 9. sınıfta öğretilen bir tekniğin 10. sınıftaki tekniği doğrulama durumu gözlendiğinden *kurumsallaştırma anı*nın yaşandığı söylenebilir. Ayrıca görevin tamamlanmasında birden fazla teknik kullanıldığından *tekniksel açılışma anı* gözlenmiştir. Farklı bir açıdan ikinci teknik birinciyi doğrulamak amacıyla kullanıldığından *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı* kısmen ortaya çıkmıştır.

Bu açıklamalardan sonra öğretmen y=f(x) eğri grafiği vererek öğrencilerden y=f(-x) fonksiyonunun grafiğini benzer şekilde buldurmuştur. Son olarak öğretmen T_5 görev tipiyle ilgili iki simetri dönüşümünün birlikte kullanıldığı Şekil 4.79'daki görevi öğrencilere sunmuştur.



Şekil 4.79. *Tuna öğretmenin T_5 görev tipiyle ilgili $t_{5,1}$ görevi*

TÖ: Soru şu, yukarıda verilen y=f(x) fonksiyonunun grafiğine göre y=-f(-x) fonksiyonunun grafiğini bulunuz? Biraz önce 2 özellik gördük, değil mi? İki özelliği bir arada istemiş sizden, değil mi? Önce ne yapacağız?

Ö3: ee –f(-x)'i bulacağız (öğretmen görmezden geldi).

TÖ: Önce eksilisini bulacağız. Şurada –x'i bulacağız, değil mi? (-f(-x) ifadesinde parantezdeki -x gösterdi) Ondan sonra –f'i elde edeceğiz. Gel. Şurayı sil. Biraz bu tarafa çiz. Bir tane daha çizeceğiz.

Ö11: Hocam önce –x'in grafiğini çizeyim (öğrenci verilen noktaların simetriğini aldı ve çizdi). Sonra diğerini çizerim. İşte y=-f(-x) elde ederim.

TÖ: Oldu, tamam. Bu neyin grafiği? Evet, f(-x)'in grafiği, tamam sen otur, diğerini de başka biri çizsin. Şimdi bunu neye göre, y eksenine göre simetriğini aldık, değil mi? –f dediğine göre ne yapacağız? Bu defa, x'e göre simetri. Gel.

Ö12: Doğru olmuyor mu? Eee..(Ö12 kodlu öğrenci son elde edilen grafiğin eksenlerini kestiği noktaların x eksenine göre simetriğini aldı ve grafiği çizdi hiçbir açıklama yapmadı. Ancak öğrenci fonksiyonu y=-f(x) şeklinde yazdı).

TÖ: Doğrudur diyenler? Yanlış diyenler? Neresi yanlış? Ö13 niye yanlış söyle?

Ö13: Hocam buna (f fonksiyonunun grafiği) göre mi yapacağız buna (f(-x) fonksiyonu) göre mi?

TÖ: f eksinin tersinin alacağız (simetrisi demek istedi). Şurası yanlış. Şu yazılan ifadeye göre şu yapılan y=-f(-x) olması lazım.

Tuna öğretmenin T_5 görevi ile ilgili $t_{5,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{5,1}$: Grafiği verilen y=f(x) parçalı fonksiyonundan yararlanarak y=-f(-x) fonksiyonunun grafiğini bulma
- $\tau_{5,1}$ (Geometrik Teknik)*: Önce eksilisini bulacağız. Şurada –x'i bulacağız, değil mi?... Ondan sonra –f'i elde edeceğiz…f(-x)'in grafiği,..y eksenine göre simetriğini aldık, değil mi? –f dediğine göre ne yapacağız? Bu defa, x'e göre simetri…* [y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetrisi alınarak y=f(-x) fonksiyonunun grafiği elde edilir. Sonra y=f(-x) fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetrisi alınarak y=-f(-x) fonksiyonunun grafiği elde edilir.]
- $\theta_{5,1}$: ?

Öğretim programında simetri dönüşümlerine ilişkin kazanımlarda görevlerde fonksiyonların simetri dönüşümlerinin $y=x^n$, $n\in Z$ şeklindeki fonksiyonlarla yapılması istenmektedir. Ancak burada $t_{5,1}$ görevinde parçalı bir fonksiyon kullanıldığı görülmektedir. Bu anlamda bu görevde kullanılan fonksiyon grafiği programın öngördüğü fonksiyon grafiklerinden daha zorlayıcı olduğu belirtilebilir. Burada özellikle parçalı fonksiyonun grafiğinin I ve IV. bölgesindeki kısmı öğrencilerin ilk kez karşılaştığı bir grafik olması nedeniyle ekolojik sorunlara neden olma potansiyeli yaşımaktadır.

Tuna öğretmen $t_{5,1}$ görevini iki öğrenciye bazı yönlendirmelerde bulunarak geometrik tekniklerle sonuçlandırmıştır. Bu teknikler incelendiğinde çözüm y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetrisi alınarak y=f(-x) fonksiyonunun grafiği elde edildikten sonra y=f(-x) fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetrisi alınarak y=-f(-x) fonksiyonunun grafiği elde edildiği anlaşılmaktadır. Ancak tekniğin teknolojisine ilişkin herhangi bir açıklama yapılmamıştır.

Didaktik anlar açısından burada gerçekleştirilen didaktik prakseoloji iki dönüşümün ilk kez kullanıldığı bir görev olması açısından ilk karşılaşma anı yaşandığı söylenebilir. Öğretmenin diyalogda "*Biraz önce 2 özellik gördük, değil mi? İki özelliği bir arada istemiş sizden, değil mi?*" şeklindeki sözlerinden daha önce anlatılan özelliklere atıf yapılarak teknik gerçekleştirilmiştir. Bu da kurumsallaştırma anının belli ölçüde de olsa görüldüğünü göstermektedir. Diğer taraftan öğretmen ortaya koyduğu tekniğe ilişkin daha önce verilen kurallara atıfta bulunmanın dışında açıklama yapmadığından *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı*na yönelik bir açıklamanın olmadığı söylenebilir.

Görevde verilen fonksiyonun parçalarından biri olan eğrinin (I ve IV. bölgedeki grafik) derecesine ilişkin herhangi bir bilgi olmadığından cebirsel çözüm bulunmamaktadır. Ancak bu eğrinin ikinci dereceden bir fonksiyon olması durumunda cebirsel çözümler de yapılabilir. Diğer taraftan y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden y=-f(-x) fonksiyonun grafiği elde edilirken grafik üzerindeki noktaların (x,y)'den (-x,-y) dönüşeceği belirtilerek orijine göre simetri alınması gerektiği ifade edilerek de çözüm yapılabilirdi. Ancak bu alternatif tekniklere bu görevde yer verilmemiştir. Bu anlamda tekniksel *çalışma çalışma anı* gerçekleşmemiştir.

4.2.3.3.2. Tuna öğretmenin fonksiyonların simetri dönüşümleriyle ilgili didaktik prakseolojilerine ilişkin bulgular

Didaktik prakseolojilerin bileşenleri ile ilgili bulgular

Tuna öğretmen fonksiyonlarda simetri dönüşümleri alt başlığına üç ders saati ayırmıştır. Bunlardan birini konunun başında diğer ikisini konunun sonunda öğretmiştir. Öğretmen fonksiyonların simetri dönüşümleri alt başlığında genellikle tek dönüşüm kullanılan görev tiplerine yer vermiştir ($t_{5,1}$ hariç tutulursa). Bu dönüşümler incelendiğinde dönüşümlerin tamamının izometrik dönüşümler olduğu ve öğretmenin afin dönüşümlere öğretim sürecinde yer vermediği belirlenmiştir. Fonksiyonların simetri dönüşümleri ile ilgili Tuna öğretmenin didaktik prakseolojilerinin bileşenleri, bu süreçte gözlenen didaktik anlar ve ekolojik sorunlar aşağıda Tablo 4.32'de verilmiştir.

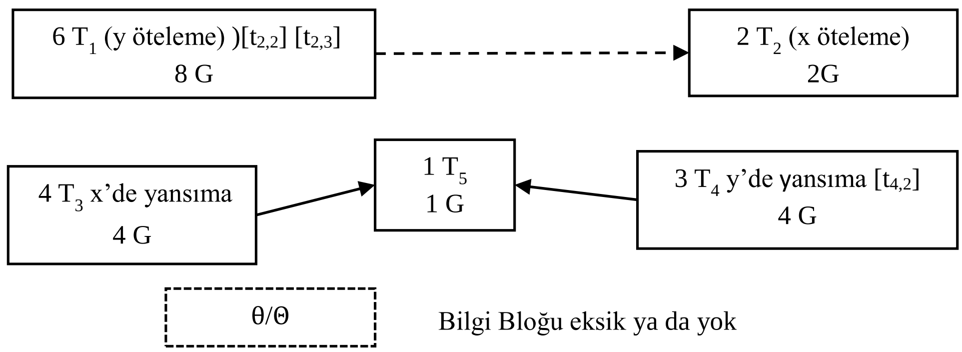
Tablo 4.32. *Tuna öğretmenin simetri dönüşümlerinde prakseolojik bileşenler ve anlar*

Görev	Teknik*	Teknoloji	Gözlemlenen Anlar**	Ekolojik Sorunlar
$t_{1,1}$	G	Kısmen	K→İK→TTÇO→GTK&TG	y=f(x), y ekseninde öteleme y=f(x)±k, İkinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çizme
$t_{2,1}$	G	Yok	İK→TTÇO	y=f(x), x ekseninde öteleme y=f(x±k), İkinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çizme
$t_{3,3}$	G	Yok	K→TTÇO	y=f(x), x ekseninde yansıma y= -f(x)
$t_{4,2}$	1. G1 2. G2	Kısmen	K →GTK&TG→ TTÇO→TÇ	y=f(x), y ekseninde yansıma y=f(-x)
$t_{5,1}$	G	Yok	İK→K	y=f(x), x ekseninde yansıma y=-f(x), y=f(x), y ekseninde yansıma y=f(-x), Parçalı fonksiyon grafiği

* G: Geometrik teknik, C: Cebirsel teknik
**İK: İlk Karşılaşma, GTK&TG: Görev Tiplerini Keşfetme ve bir Teknik Geliştirme, TTÇO: Teknolojik-Teorik Çevrenin Oluşturulması, TÇ: Tekniksel Çalışma, K: Kurumsallaşma

Tuna öğretmenin çoğunlukla ders kitabındaki görevlerde küçük uyarlamalar yaparak görevleri ürettiği görülmektedir. Bu görevlerde doğrusal, ikinci dereceden fonksiyonlar, eğriler ve parçalı fonksiyonların kullanıldığı belirlenmiştir. Görevlerin tamamlanmasında kullanılan tekniklerin tamamının geometrik teknikler olduğu tespit edilmiştir. Görevlerde genellikle tek bir teknik kullanıldığı görülmektedir. Görevlerde iki tür geometrik teknik kullanıldığı belirlenmiştir. Birincisi izometrik dönüşümlere (örneğin öteleme, yansıma gibi) dayanan tekniklerdir. İzometrik dönüşümlere dayanan tekniklerde çoğunlukla tekniğin ifadesi görevlerden önce ders kitabında geçtiği şekilde verilmiştir. İkincisi ise 9. sınıfta öğrencilerin verilen fonksiyonu karekterize eden noktaların düzlemde belirlenmesi yoluyla grafiğin çizildiği teknikler olarak ortaya çıkmıştır.

Teknoloji bileşeni açısından didaktik prakseolojiler incelendiğinde birçok tekniğin teknolojik açıklamalar verilmeksizin uygulanmaya çalışıldığı görülmüştür. Bazı görevlerde öğretmenin informel açıklamaları bulunmakla birlikte bunlar verilen bilginin niçin geçerli olduğuna ilişkin formel anlamda bir kanıtlama girişimi yapılmadan ortaya konulmuştur. Bu doğrultuda gerçekleştirilen didaktik prakseolojilerde teknoloji bileşeni büyük ölçüde eksiktir. Diğer taraftan bazı görevlerde (örneğin $t_{4,1}$ görevi) deneysel anlamda verilen bilginin niçin geçerli olduğuna ilişkin açıklamalar verildiği gözlenmiştir. Burada incelenen görevlerde öğrencilerin 9. sınıfta öğrendikleri ve alışık oldukları tekniklerle simetri dönüşümlerine ilişkin verilebilecek tekniklerin geçerliliği gösterilmiştir. Bu anlamda daha sonra öğrenilen bir teknik daha önce öğrenilen teknikle doğrulanmıştır. Geometrik tekniğin (izometriye dayanan) niçin doğru olduğu başka bir teknikle (9. sınıfta kazanılan) gösterildiğinden bu durum teknolojik bir açıklama olarak nitelendirilebilir. Teknolojilerin anlamlı bir şekilde verilmemesinde birçok neden etkili olmakla birlikte bunun en önemlilerinden birinin altında ekolojik sorunlar yattığı düşünülmektedir. Tuna öğretmenin bu alt başlıkta gerçekleştirdiği didaktik prakseolojilerin bileşenleri arasındaki ilişkiler Şekil 4.80'de verilmiştir.



Şekil 4.80. Tuna *öğretmenin simetri dönüşümlerinde ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler arasındaki ilişkiler*

Şekil 4.80'de görüldüğü üzere, Tuna öğretmenin fonksiyonların simetri dönüşümleri alt başlığının öğretiminde genellikle tek bir dönüşüm içeren görevlere yer vermiştir. Sadece T_5 görev tipinde parçalı bir fonksiyonun grafiğinin x ve y eksenlerinde yansımasına ilişkin görevde iki dönüşümün birlikte kullanıldığı belirlenmiştir. Bu görevler arasında büyük bir parçalanmışlık ve kopukluk dikkat çekicidir. Çünkü görev tipleri arasında doğrudan (kesikli olmayan ok) ya da dolaylı (kesikli ok) çok az ilişki olduğu anlaşılmaktadır. Bu alt başlıktaki görevlerin tamamı geometrik tekniklerle tamamlanmıştır. Son olarak didaktik prakseolojilerde teknoloji bileşeni anlamlı ve tutarlı bir yaklaşımla neredeyse hiçbir görevde ortaya konulamamıştır.

Didaktik anlar ile ilgili bulgular

Fonksiyonlarda simetri dönüşümleri alt başlığında Tuna öğretmenin matematiksel eylemleri didaktik anlar açısından incelendiğinde didaktik prakseolojinin yapılandırılma sürecinde bazı anlara yer verilmediği görülmektedir ($t_{1,1}$ görevi hariç). Bu durumun ortaya çıkmasında bazı görevlerde tekniğin doğrudan verilerek *ilk karşılaşma anı* ile *görev tiplerini keşfetm*e ve *bir teknik geliştirme anı*nın paypas edilmesi etkili olmuştur. Ayrıca öğretmenin teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı sadece sözel ifadeler ve informel açıklamalarla sınırlı kalmış, anlamlı öğrenmeleri destekleyecek şekilde kanıtlama ve tekniği tasarlamaya ilişkin girişimlere neredeyse hiç rastlanmamıştır.

Sınırlı sayıda olsa da bazı görevlerde alternatif tekniklere yer verilmesi çok sınırlı kalacak şekilde tekniksel çalışmanın yaşandığını göstermektedir. *Kurumsallaştırma anı* 9. sınıfta özellikle $y=x^2$ ikinci dereceden fonksiyonunun ve doğrusal fonksiyonların grafiklerinin çizilmesine ihtiyaç duyulduğunda ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte bu alt başlıktaki görevlerde sadece geometrik tekniklerin kullanılması örtük de olsa bu alt başlıkta geometrik tekniklerin kurumsallaştırılmak istendiği şeklinde yorumlanabilir.

Didaktik prakseolojilerde ekolojik sorunlara ilişkin bulgular

Tuna öğretmenin fonksiyonlarda simetri dönüşümleri alt başlığındaki ekolojik sorunlar iki kısımda incelenebilir. Birincisinde görevde verilen fonksiyonlar (örneğin parçalı fonksiyon gibi) programda belirtilenlerin daha ötesinde zorlayıcılığa sahiptir, ya da henüz anlatılmamış bir konu ile ilgili grafikler (ikinci dereceden fonksiyonların grafikleri) söz konusudur.

Diğerinde ise dönüşümlerin programdaki habitatından kaynaklanan sıralaması nedeniyle henüz öğretilmemesi sonucunda ortaya çıkmaktadır. Çünkü fonksiyonların simetri dönüşümlerine programda 10. sınıfta yer verilirken bunların temelleri dönüşüm geometrisi kapsamında 11. sınıfta yer almaktadır. Dolayısıyla fonksiyonların simetri dönüşümlerinde öteleme ve yansıma dönüşümlerinin temellerinin fonksiyonlarda simetri dönüşümünden sonra öğretilmesinden kaynaklı ekolojik bir sorun olduğu belirlenmiştir. Bu ekolojik sorun öğretim sürecinde öğretmenin görevlerde eksik teknolojik açıklamalar vermesi şeklinde hissedilmektedir.

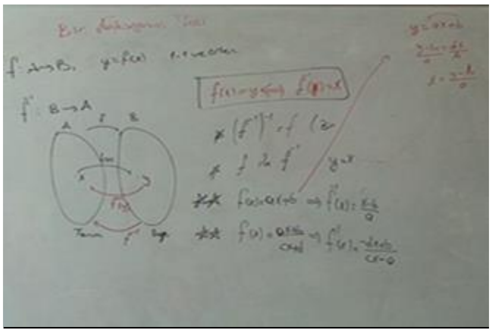
4.2.3.3.3. Tuna öğretmenin bileşke işlemi ve fonksiyonların tersi alt başlığında gerçekleştirdiği didaktik prakseolojiler

Tuna öğretmen fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunda bileşke işlemi ve bir fonksiyonun tersi alt başlığını 8 ders saatinde öğretmiştir. Bu süreçte 32 göreve yer vermiştir. Bu görevler incelenerek 7 görev tipi tespit edilmiştir. Bu görev tipleri ve her bir görev tipine ait görevlerin sayısı Tablo 4.33'te sunulmuştur.

Tablo 4.33. *Tuna öğretmenin bileşke işlemi ve fonksiyonun tersi alt başlığında gerçekleştirdiği görev tipleri*

Görev Tipleri	Görev Tiplerinin İfadesi	Görev Sayısı
T_1	Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonun tersini bulma	12
T_2	Cebirsel temsille verilen bir fonksiyonda belli bir değerin ters görüntüsünü bulma	4
T_3	Cebirsel temsille verilen en az iki fonksiyonun bileşkesini bulma	6
T_4	Cebirsel temsilde bileşkesi ve fonksiyonlardan biri belli iken diğerini bulma	3
T_5	Bir fonksiyonla başka bir fonksiyonun bileşkesinde belli bir değerin görüntüsünü bulma	4
T_6	Fonksiyonun kendisiyle bileşkesi bilinen fonksiyonun kuralını bulma	1
T_7	Bileşke fonksiyonun tersi ve fonksiyonlardan en az birinin cebirsel ifadeleri bilinen görevler	2

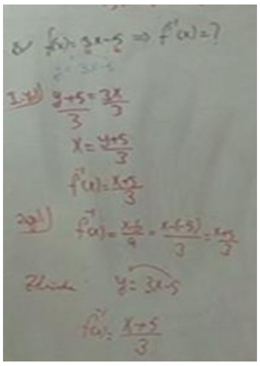
Tablo 4.33'ten Tuna öğretmenin önce ters fonksiyon ile ilgili görev tiplerini öğrettiği sonrasında ise bileşke işlemi ve özellikleriyle ilgili görev tiplerini sunduğu belirlenmiştir. Görevlerin ders kitabındaki görevlerin değiştirilmeden ya da uyarlanarak öğrencilere sunulduğu tespit edilmiştir. Görevlerin tamamlanmasında cebirsel tekniklerin egemen olduğu ve genellikle öğretmen tarafından uygulandığı gözlenmiştir. Tuna öğretmen bir fonksiyonun tersine aşağıdaki şekilde giriş yapmıştır (Şekil 4.81).



Şekil 4.81. *Tuna öğretmenin bir fonksiyonun tersine ilişkin verdiği bilgi*

TÖ: $f: A \to B$ $y = f(x)$ fonksiyonu bire bir örten ise tersi de bir fonksiyondur. Daha önceki derslerde açıklama yaptık (ilk derste). Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için fonksiyonun ne olması gerekiyor? Birebir ve örten olması gerekiyor. İki kümede de açıkta eleman kalmamış olacaktı. Bir eleman bir elemanla eşleşmiş olsaydı bu fonksiyonun tersi olabilirdi. $f: A \to B$ tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu 1-1 ve örten ise ters fonksiyonu tersi vardır. Tersi şu şekilde gösteriyoruz. f^{-1} ile gösteriyoruz. $f: A \to B$ ise $f^{-1}: B \to A$ tanımlı olacak…O zaman şöyle yazabilir miyim? $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ Ne yaptım burada? x'i f'ye yükledim. Nereye getirdi bizi? y'ye getirdi. Bunun tersinde de çocuklar o zaman $f^{1}(y)$=x. Bunun tersi *de geçerli çocuklar. Bu çift yönlü ok olarak ancak ve ancak çift gerektirme geçen sene kümeler konusunda mı hatırlatmıştık size?*

Bu diyalogda öğretmen 10. sınıfta fonksiyon konusunun öğretimine girişte (9. sınıfın tekrarını yaparken) ilk derste öğrettiği kısmı kısaca tekrarlamıştır. Öğretmen fonksiyonun tersinin de bir fonksiyon olabilmesi için bire bir ve örten olması gerektiğini ifade ederek bire bir ve örten fonksiyonu informel biçimde açıklamıştır. Daha sonra ters fonksiyonu tanımlamıştır. Son olarak fonksiyonda tanım ve değer kümeleri arasında herhangi bir eşlemeye ilişkin kuralı vermiş ve bu kuralı informel biçimde açıklamıştır. Burada öğretmenin fonksiyonun tersine ilişkin birçok teknolojik açıklama verdiği görülmektedir. Ancak bunların bileşke işlemi üzerinden gerçekleştirilmediği dikkat çekicidir. Bu anlamda bu teknolojik açıklamalar eksik kaldığı söylenebilir. Sonrasında Tuna öğretmen ters fonksiyonla ilgili bazı özellikleri öğrencilere vermiştir. Bu özellikler bir fonksiyonun tersinin tersinin tekrar fonksiyonun kendisi olacağı, fonksiyonla tersinin grafiklerinin y=x eksenine göre simetrik oldukları, doğrusal fonksiyonun tersinin kuralı ve rasyonel fonksiyonun tersinin kuralı verilmiştir. Ancak bunların nereden geldiğine ilişkin açıklama yapılmamıştır. Daha sonra öğretmen T_1 görev tipiyle ilgili Şekil 4.82'de verilen ilk görevi öğrencilere sunmuştur.



Şekil 4.82. *Tuna öğretmenin T_1 görev tipiyle ilgili $t_{1,1}$ görevi*

TÖ: $f(x) = 3x - 5$ *ise* $f^{-1}(x)$ *nedir?*

Ö1: (x+5)/3.

TÖ: Şimdi burada çocuklar 3 yöntemle soruyu çözeceğim. Birincisi uzun yol dediğimiz x yalnız kalana kadar işlem yapmak. Birinci doğru olan da budur, çocuklar. Hata payı sıfır olan bir yöntem. (şu işlemleri yaptı) $y = 3x - 5$, $\frac{y+5}{3} = \frac{3x}{3}$, $x = \frac{y+5}{3}$. *Burada dönüştürüyoruz. Dönüşümü yapıyorduk, fonksiyonun tersini* *yazıyorduk, değil mi?* $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$*. Sadece şu y yerine x gelir. Başka bir şey yok. Bu birinci yol.*

Ö1: Biz hepsini alalım mı?

Ö2: Birinci yol daha kolay.

TÖ: (öğrencilere yanıt vermedi) İkinci yol olarak, formülü ezberlersem formül neydi? $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{x-(-5)}{3} = \frac{x+5}{3}$ *Üçüncü yol olarak da, zihinden çocuklar. Dedik burayı x olarak düşüneceğiz (f(x)'i işaret etti). Sabit sayıyı yanına göndereceğiz, x'in kat sayısına bölüyoruz.* $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$.

Tuna öğretmenin T_1 görevi ile ilgili $t_{1,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

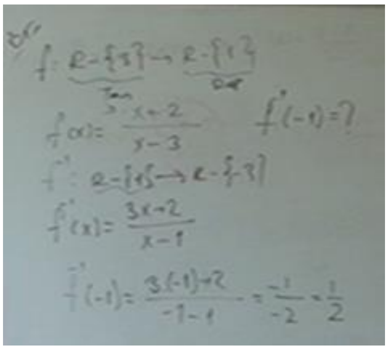
- $t_{1,1}$: f(x)=3x-5 fonksiyonunun tersi nedir?
- $\tau_{1,1,1}$: *Birincisi uzun yol dediğimiz x yalnız kalana kadar işlem yapmak... Dönüşümü yapıyorduk...* [f(x) yerine y yazılır. x değişkeni y cinsinden çekilir. Değişken değiştirilir]
- $\tau_{1,1,2}$: … *formülü ezberlersem formül neydi?* [$\mathrm{f(x) = ax + b}$ ise $\mathrm{f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}}$ dir.]
- $\tau_{1,1,3}$: *Üçüncü yol olarak da, zihinden çocuklar. Dedik burayı x olarak düşüneceğiz. Sabit sayıyı yanına göndereceğiz, x'in kat sayısına bölüyoruz.* $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$.
- $\theta_{1,1}$: … *x yalnız kalana kadar işlem yapmak* [fonksiyonun tersini informel açıklaması] *Dönüşümü yapıyorduk…*[değişken değiştirme informel açıklama]

Tuna öğretmen $t_{1,1}$ görevini üç cebirsel teknikle tamamlamıştır. Ancak bu teknikler incelendiğinde temelde tek bir tekniğin farklı şekilde ifade edildiği görülmektedir. Burada kullanılan ilk teknik temel teknik olarak nitelendirilebilir. Çünkü ikinci teknik doğrusal bir fonksiyonun genel kuralının ilk teknikteki süreçler izlenerek elde edilmiş hali olduğu görülmektedir. Üçüncü teknik ise benzer şekilde ilk tekniğin farklı bir şekilde söylenişidir.

Bu tekniklerin teknolojisi incelendiğinde bir fonksiyonun tersi informel biçimde x yalnız bırakılana kadar işlem yapmak olarak açıklanmıştır. Ayrıca gerçekleştirilen değişken değiştirme de benzer şekilde dönüştürme biçiminde informel olarak verilmiştir. Burada bir diğer önemli nokta bu görevde kullanılan ilk tekniğin diğerlerinin deneysel olarak kanıtı olması açısından teknolojik bir açıklama olarak sunulabilir. Dolayısıyla *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı* gözlenmekle birlikte birçok eksikleri bulunmaktadır. İlk olarak verilen fonksiyonun bire bir ve örten olduğuna ilişkin herhangi bir inceleme yapılmadan fonksiyonun tersini alma işlemine geçilmiştir. Öğretmen fonksiyon konusunun başında bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için bire bir ve örten olması gerektiğini şema temsiliyle eşleme tekniği bağlamında göstermiştir (fonksiyon konusuna ilk girişte ilk derste). Bir fonksiyonun tersi alt başlığında ilk derse atıfta bulunulduktan sonra ters fonksiyon anlatılmıştır. Ancak öğretmenin bu görevde cebirsel temsilde verilen fonksiyonun bire bir ve örten olduğuna ilişkin bir incelemede bulunmadığı görülmektedir. Fonksiyonun temsilinin değişmesi onun bire bir ve örten olduğuna ilişkin inceleme yapılacak araçları da değiştirmesi nedeniyle bu tür incelemeler ayrıca önem arz etmektedir. İkinci olarak verilen görevde ilk teknik bağlamında gerçekleştirilen değişken değiştirme eksik bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Burada y=3x-5 ise x=(y+5)/3 olarak elde edildikten sonra bire bir ve örten bir fonksiyonda $\mathrm{f(x) = y} \Leftrightarrow \mathrm{f^{-1}(y) = x}$ çift gerektirmesi olan eşlemeden yararlanılarak $f^{-1}(y)$= (y-5)/3 olduğu ifade edildikten sonra y yerine x yazılarak fonksiyonun tersi elde edilebilirdi. Bu açıklamalardan görüleceği üzere öğretmenin ters fonksiyonun bulunuşuna ilişkin birçok aşamayı atladığı ve değişken değiştirmeyi anlamsız biçimde yaptığı belirlenmiştir. Dolayısıyla teknolojik birçok açıklama bu didaktik prakseolojide eksik bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

Bu prakseoloji didaktik anlar açısından incelendiğinde, $\mathrm{t}_{1,1}$ görevinin fonksiyonun ters kuralının bulunmasında ilk görev olması itibariyle *ilk karşılaşma anı* yaşanmıştır. Görev birden fazla teknikle tamamlandığından tekniksel çalışma anının gözlendiği söylenebilir. Bu tekniklerden ilkini öğretmen diyalogda "*Birinci doğru olan da budur, çocuklar. Hata payı sıfır olan bir yöntem"* şeklinde belirtmesi bir teknik geliştirmeye yönelik girişim olarak belirtilebilir. Bu anlamda *görev tiplerini keşfetme* ve bir *teknik geliştirme anı*nın belli ölçüde yaşandığı söylenebilir.

Öğretmen bu görev tipinde doğrusal, rasyonel, ikinci dereceden, kübik fonksiyonların terslerini $\tau_{1,1,1}$ tekniği ile tamamlamıştır. Bu durum örtük bir şekilde fonksiyonun ters kuralının belirlenmesinde "x'i yalnız bırak, y yerine x ve x yerine y yaz" bilgisine kurumsal bir statü verilmek istendiği şeklinde yorumlanabilir. Ancak bu durumun fonksiyonun tersinin bileşke işlemi üzerinden alınmaması nedeniyle cebir disipliniyle bağlantı kurulamaması sonucunu ortaya çıkarmıştır. Ayrıca tekniğin bazı aşamalarının atanılması nedeniyle anlamlı öğrenmeler gerçekleşmediği belirtilebilir. Teknikteki bazı aşamaların atlanılmasının sebebi tekniği basitleştirmek olarak belirtilebilir. Sonrasında T_2 görev tipine geçilmiştir. Bu görev tipinin ilk görevinde öğretmen doğrusal bir fonksiyonda belli bir değerin ters görüntüsünü, fonksiyonun tersini bulduktan sonra verilen değeri değişkende yazarak elde etmiştir. Bu görev tipiyle ilgili $t_{2,2}$ görevi aşağıda Şekil 4.83'te verildiği şekliyle öğrencilere sunulmuştur.



Şekil 4.83. *Tuna öğretmenin T_2 görev tipiyle ilgili $t_{2,2}$ görevi*

TÖ: $f: R-\{3\} \rightarrow R-\{1\}$ $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ olduğuna göre, $f^{-1}(-1)=?$ Bundan önce şöyle bir soru yazmıştım çocuklar. $f(x)=2x-3$ ise $f^{-1}(-2)$=? böyle bir soru yazmıştım, değil mi? İki soru arasında fark var mı?...

Ö3: Hocam ee öncekinde tüm reel sayılar olabilirdi ama bunda tüm reel sayılar olamaz.

TÖ: Hangilerini alamıyoruz?

Ö3: 3 ve 1

TÖ: Niye 3 ve 1'i alamıyoruz?

Ö1: Hocam e şeyden olabilir mi? $\frac{x+2}{x-3}$ ya hani yer değiştireceğiz.

Ö3: Hocam paydası 0 olabilir mi?

TÖ: Paydayı 0 yapıyor. Çocuklar burası f fonksiyonu için tanım kümesi burası değer kümesidir. Fonksiyonda diyor ki, tanım kümesini şu şekilde tanımladığında x yerine 3 yazarsam paydayı ne yapacaktır? Tanımsız yapacaktır. Dolayısıyla fonksiyon tanımsız olacak. Peki, bu 1 nereden geldi? Tamam, bunu anladım. 1 niye? (bazı öğrencilerin görüşlerini aldı) Benden istenen fonksiyonun tersidir, değil mi çocuklar? Fonksiyonun tersinde burası ne olacak? Tanım kümesi olacak. Tanım kümesi olacağından dolayı buradaki 1 sayısı paydaya geçecek. 1 sayısı paydayı *sıfır yapacağından dolayı 1'i de alamıyorum. O zaman burada şu ifade burayı 0 yaptığı için 3'ü almadım. Benden istenen fonksiyonun tersi olduğu için fonksiyonun tersini de yazalım.* $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}$. *Şimdi çocuklar bu fonksiyon nereden nereye olmuş oldu? Şimdi f fonksiyonu* $f: R - \{3\} \rightarrow R - \{1\}$ *iken* $f^{-1}: R - \{1\} \rightarrow R - \{3\}$ *olacaktır. Burası ne olacak? (*$R - \{1\}$ *gösterdi) Tanım kümesi olduğundan dolayı diyor ki, sen 3 ve 1'i alamazsın. 3'ü alamazsın, f fonksiyonunda paydayı sıfır yaptığı için, 1'i alamazsın bu defa fonksiyonun tersinde paydayı 0 yaptığı için. Tanımsız olur. Bundan sonra ne yapacağız?*

Ö1: Fonksiyonda x yerine -1 koyacağız.

TÖ: x yerine -1 koyacağız. $f^{-1}(-1) = \frac{3(-1)+2}{-1-1} = \frac{1}{2}$.

Tuna öğretmenin T_2 görevi ile ilgili $t_{2,2}$ görevine ilişkin didaktik prakseoloji aşağıda verilmiştir.

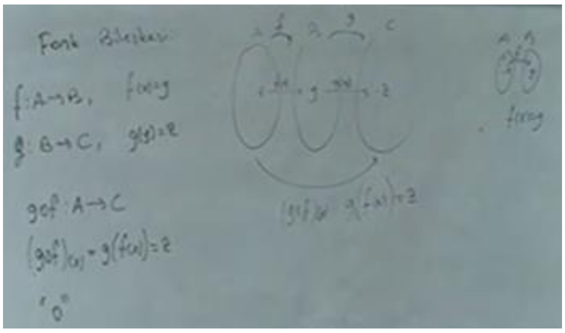
- $t_{2,2}$: $\mathrm{f}: \mathrm{R} - \{3\} \rightarrow \mathrm{R} - \{1\}$ $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}+2}{\mathrm{x}-3}$ fonksiyonunda $f^{-1}(-1)$ değeri nedir?
- $\tau_{2,2}$: *...Benden istenen fonksiyonun tersi olduğu için fonksiyonun tersini de yazalım... f fonksiyonu* $f: R - \{3\} \rightarrow R - \{1\}$ *iken* $f^{-1}: R - \{1\} \rightarrow R - \{3\}$ *tanımlanmış olacaktır...* $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}$*... x yerine -1 koyacağız.* [$\mathrm{f}: \mathrm{R} - \left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}}\right\} \rightarrow \mathrm{R} - \{\mathrm{a}/\mathrm{c}\}$ $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{ax}+\mathrm{b}}{\mathrm{cx}+\mathrm{d}}$ ise $\mathrm{f}^{-1}: \mathrm{R} - \left\{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}\right\} \rightarrow \mathrm{R} - \{-\mathrm{d}/\mathrm{c}\}$ $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}) = \frac{-\mathrm{dx}+\mathrm{b}}{\mathrm{cx}-\mathrm{a}}$]
- $\theta_{2,2}$: *Fonksiyonda diyor ki, tanım kümesini şu şekilde tanımladığında x yerine 3 yazarsam paydayı ne yapacaktır? Tanımsız yapacaktır* [f fonksiyon olmasının gereği]*... Tanım kümesi olacağından dolayı buradaki 1 sayısı paydaya geçecek. 1 sayısı paydayı sıfır yapacağından dolayı 1'i de alamıyorum* [f tersinin fonksiyon olmasının gereği]*...3'ü alamazsın, f fonksiyonunda paydayı sıfır yaptığı için, 1'i alamazsın bu defa fonksiyonun tersinde paydayı 0 yaptığı için. Tanımsız olur.* [f ve f^{-1} fonksiyon olmasının gereği]

Tuna öğretmen $t_{2,2}$ görevini rasyonel fonksiyonun tersini alma kuralından yararlanarak bulduktan sonra ters fonksiyonda istenen değeri yerine yazarak görevi tamamlamıştır. Görevdeki rasyonel fonksiyonun tanımlandığı aralıklara odaklanarak, fonksiyonun en geniş tanımlı olduğu yerler için, tanım ve değer kümesinden çıkarılan sayıları verilen ifadenin fonksiyon olmasıyla bağlantılı olarak açıklamıştır. Bu açıklamalar teknolojik açıklamalardır. Ancak bu açıklamalarda bazı eksiklikler olduğu belirlenmiştir. Bunlardan birincisi f fonksiyonunun tersinin fonksiyon olduğuna ilişkin bilgi verilmemesine rağmen öğretmenin fonksiyonun tersi de bir fonksiyon gibi hareket ederek teknik gerçekleştirmektedir. Burada f fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu gösterildikten sonra bu tür bir inceleme yapılması gerekirdi. Yine burada bire bir ve ters fonksiyon hatırlatılabilirdi. Görüldüğü üzere, tekniğin uygulanma sürecinde bazı aşamaların atlandığı ve bu aşamalara ilişkin açıklamalar yapılmadığı tespit edilmiştir. Bu anlamda gerçekleştirilen teknik teknolojik açıdan eksik bir şekilde yapılandırılmıştır.

Bu görevin çözümü fonksiyonun tersi bulunmadan da çözülebilirdi. Bu bağlamda f fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu gösterildikten sonra $f^{-1}(-1)=a$ değerinin tek bir değeri bulunmaktadır. Daha sonra $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$ gerektirmesinden yararlanılarak f(a)=-1 denklemini sağlayan a değeri elde edilebilirdi. Ancak böyle bir teknik bu görevde verilmemiştir. Bu görev tipindeki diğer görevler yukarıda açıklanan tekniklerle benzer şekilde tamamlanmıştır.

Didaktik anlar açısından fonksiyonun ters görüntüsünü bulma ile ilgili bu görev ikinci görev olduğundan ilk karşılaşma anı olarak değerlendirilmemektedir. Bu görevde rasyonel fonksiyonun tersinin kuralı daha önce özellik olarak verildiğinden dolayı tekniğin ifadesi başlangıçta verildiğinden *görev tiplerini keşfetme* ve bir *teknik geliştirme* anı paypas edilmiştir. Burada fonksiyonun tanımlandığı aralıkla ilgili açıklamalardan dolayı *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı* yaşanmış ancak bu an da eksik olarak ortaya konulmuştur.

Daha sonra öğretmen bileşke işlemine girişi şema temsiliyle eşleme tekniği üzerinden aşağıda Şekil 4.84'te verildiği şekilde gerçekleştirmiştir.



Şekil 4.84. *Tuna öğretmenin fonksiyonların bileşkesine yaptığı giriş*

TÖ: $f: A \to B$, *f(x)=y ve* $g: B \to C$, *g(y)=z fonksiyonları tanımlansın.* $gof: A \to C$, *x'i f'ye yükledim. g(f(x)) nereye götürüyordu?*

Öğrenciler: z

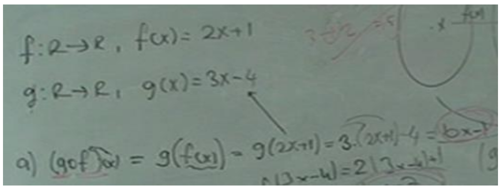
TÖ: (gof)(x)=g(f(x))=z şeklinde tanımlanan fonksiyona g ile f'nin bileşkesi denir. "o" ile gösterilir. İşte burada A'dan C'ye tanımlanan fonksiyona ne fonksiyonu denir? gof fonksiyonu denir. (gof)(x) ne yapıyor çocuklar? x'i alıp, z'ye taşıyor. Şimdi burada bakın çocuklar bir dönüşüm yapacağım. Hani Türkçede harf düşmeleri oluyor ya.

Ö1: Ses olayları

TÖ: Burada da çocuklar sembol düşmeleri gerçekleştireceğim. ((gof)(x) işaret etti) x'i f'ye yüklediğim zaman bu bileşke işlemi düşüyor. (gof)(x)=g(f(x))=z eşittir.

Tuna öğretmen bileşke işlemini şema temsilinde eşleme tekniğiyle açıklamıştır. Diyalogda bir fonksiyonun belli bir x değerindeki görüntüsünün alınması "yüklemek" fiiliyle açıklandığı görülmektedir. Bu anlamda öğretmen (gof)(x)=g(f(x))=z ifadesiyle x değerinin f'deki görüntüsünden f(x)=y değeri elde edildiği ve sonra bu y değerinin g'deki görüntüsünün z değeri elde edildiği açıklanmıştır. Yani temelde eşleme tekniğiyle bileşke işleminin anlatıldığı belirlenmiştir.

Sonrasında öğretmen bileşke işlemiyle ilgili en az iki fonksiyonun bileşkesinin alınmasına ilişkin T_3 görev tipinde Şekil 4.85'te verilen $t_{3,1}$ görevini sunmuştur.



Şekil 4.85. *Tuna öğretmenin T_3 görev tipiyle ilgili $t_{3,1}$ görevi*

TÖ: İlk örnekte olayın mantığını kavramaya çalışın. İlk örnekte nasıl bir mantıkla hareket ettiğimizi anlarsanız, diğer soruları rahatlıkla çözebilirsiniz. Burada dedik ki çocuklar, x'ten sondan başlıyoruz. Sondan x direkt nereye geçer?

Öğrenciler: f fonksiyonuna.

TÖ: O zaman x'i f'ye yüklediğim zaman aradaki bileşke işlemi düşüyor. g(f(x)) çocuklar burada diyor ki, f(x)'in değerini yaz. O zaman g(2x+1) peki burada g fonksiyonunda x yerine ne yaz diyor?

Öğrenciler: 2x+1

TÖ: g(x) fonksiyonunda x yerine bunu (2x+1) yaz diyor. O zaman g(2x+1)=3(2x+1)-4 Burayı anladınız mı? (Tahtanın sağına başka bir fonksiyon *yazdı) f(x)=3x+1 verdim. Sizden f(x-3)'ü istedim. f'de x yerine getirip bunu (x-3) yazmıyor muyum?*

Öğrenciler: Evet

TÖ: Aynı şeyi yaptım orada. g fonksiyonunda x yerine 2x+1 yazdım. g fonksiyonu nedir? 3x-4, x yerine ne yazacağım? 2x+1 yazacağım. (gof)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=3(2x+1)-4=6x-1 Anladık mı?

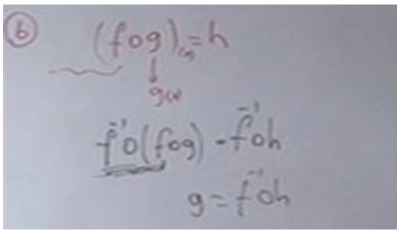
Öğrenciler: Anladık.

Tuna öğretmenin T_3 görevi ile ilgili $\mathrm{t}_{3,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $\mathrm{t}_{3,1}$: $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x + 1$ ve $g: R \rightarrow R, \mathrm{g}(x) = 3x - 4$ ise $(gof)(x)$ nedir?
- $t_{3,1}$: [f fonksiyonu g'de x yerine yazılırsa gof elde edilir]
- $\theta_{3,1}$:… *f(x)=3x+1 verdim. Sizden f(x-3)'ü istedim. f'de x yerine getirip bunu (x-3) yazmıyor muyum?...Aynı şeyi yaptım orada.* [Bileşkenin değişken değiştirme temelinde deneysel olarak açıklanması]

Tuna öğretmen $t_{3,1}$ görevinde iki fonksiyonun bileşkesini cebirsel tekniklerle gerçekleştirmiştir. Burada öğretmenin bileşke işlemini değişken değiştirme temelinde öğrettiği belirlenmiştir. Diyalogda bu durum öğretmen tarafından "*g fonksiyonunda x yerine 2x+1 yazdım*" şeklinde ifade edilmiştir. Bu tekniğin teknolojisinde değişken değiştirme işlemi öğretmenin daha önce verdiği bir örnek görev üzerinden deneysel bir şekilde açıklanmıştır. Öğretmenin diğer beş görevde de bileşke işlemini benzer yaklaşımlarla değişken değiştirme temelinde $t_{3,1}$ görevinde gerçekleştirilen teknik çerçevesinde uyguladığı görülmektedir.

Didaktik anlar açısından bu görevde *ilk karşılaşma anı* ve belli ölçüde teknolojik *teorik çevreyi oluşturma anı* gözlendiği söylenebilir. Daha sonra öğretmen bileşke ile ilgili özellikleri vermiştir. Bu özelliklerden biri öğretmen tarafından aşağıda şekil 4.86'da verilmiştir.



Şekil 4.86. *Bileşke fonksiyon ile ilgili Tuna öğretmenin verdiği özelliklerden biri*

TÖ: Soruda size şu fonksiyon verildi, fog verildi. Bize f fonksiyonu da verildi. h fonksiyonu da verildi. Benden g fonksiyonu istenildiği zaman,…nasıl bulacağız?

Ö3: Tersini mi alacağız?

Ö7: f'in tersini bulup karşıya atacağız.

TÖ: Peki, burada g'nin yalnız kalması için buranın birim fonksiyon olması gerekmiyor mu? Burası birim fonksiyon olursa g yalnız kalır. Çünkü birim fonksiyon burayı etkilemeyecektir. Ben her iki tarafı ne ile işleme sokmam gerekiyor? g'nin yalnız kalması için. $f^{-1}o(fog) = f^{-1}oh$ *Bak her iki tarafa ne ekledim çocuklar?*

Ö1: f'in tersi

TÖ: Her iki tarafa aynı sayı eklediğinizde ya da çıkardığınızda işlem değişiyor muydu?

Öğrenciler: Hayır

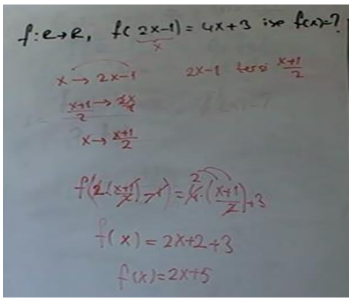
TÖ: Değişmiyordu. O zaman $f^{-1}o(fog) = f^{-1}oh$ *oldu mu? Peki, burası bana neyi verecekti?*

Ö1: Birim fonksiyon.

TÖ: (Şunu yazdı) $g = f^{-1}oh$ *oldu mu? Bak g'yi bulmuş olduk. Her iki tarafa ne ekledim?* f^{-1} *ekledim. Bu f ile f'nin tersi neyi verecek bana? Birim elemanı, birim fonksiyonu verecek, birim fonksiyonla da g işleme girecek g olduğu gibi gelecek. Diğer tarafta f'nin tersi bileşke h. (*$f^{-1}oh$ *gösterdi)*

Bu açıklamalardan görüleceği üzere, Tuna öğretmen bileşkesi ve fonksiyonlardan biri verildiğinde diğerinin nasıl bulunacağına ilişkin tekniğin ifadesini belli ölçüde kanıtlamıştır. Kanıtlama sürecinde bazı aşamaları (birleşme özelliği gibi) sözel olarak açıklamış ancak bunları açık bir şekilde ortaya koymamıştır. Bu ispat uygun bir tarzda şu şekilde verilebilirdi: fog=h ifadesinde f biliniyorsa soldan eşitliğin her iki yanına f^{-1} eklendiğinde $f^{-1}o(fog)=f^{-1}oh$ birleşme özelliğinden eşitliğin sol tarafı $(f^{-1}of)og=f^{-1}oh$ şeklinde yazılabilirdi. Bir fonksiyonun tersi ile bileşkesi birim fonksiyon olduğundan $Iog= f^{-1}oh$ olur. Son olarak birim fonksiyonla herhangi bir fonksiyonun bileşkesi kendisi olduğundan $g=f^{-1}oh$ olarak elde edilebilirdi. Görüldüğü üzere, öğretmen burada gerçekleştirdiği ispatlama sürecinde bazı aşamaları atladığı, açık bir şekilde ifade etmediği ve birleşme özelliğinden bahsetmeksizin ispatı gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Bu anlamda teknolojik açıdan bazı eksiklikler olduğu belirtilebilir.

Daha sonra T_4 görev tipiyle ilgili Şekil 4.87'deki görev öğrencilere sunulmuştur.



Şekil 4.87. *Tuna öğretmenin T4 görev tipiyle ilgili* $t_{4,1}$ *görevi*

TÖ: $f: R \rightarrow R \quad f(2x-1) = 4x + 3$ *ise* $f(x) = ?$ *Bu da farklı bir soru değil mi? ...burada çocuklar benden istenen* $f(2x-1)$ *vermiş,* $f(x)$*'i istiyor.*

Ö7: Bire eşitleyeceğiz.

Ö2: Hocam 2x-11'i sıfıra eşitlemeyecek miyiz?

TÖ: Çocuklar f(x)'in bir sayı olacağını zannetmiyorum. Tamam, o zaman şöyle diyeyim ben. Burayı iyi dinleyin. Eğer şuradaki 3 olsaydı (f(x)'deki x'i gösterdi)

Ö10: 2x-1'i 3'e eşitleyecektik.

TÖ: Bakın, 2x-1'i 3'e eşitleyecektik, değil mi?

Öğrenciler: Evet

TÖ: Peki, buranın ne olması gerekiyor?

Ö3: x

Ö7: 1

TÖ: Ö7, x olması lazım. Bana f(x) lazım. Buranın x olabilmesi için çocuklar, şu fonksiyonun (2x-1) tersini bulup, x yerine yazmanız lazım. Yani şöyle düşünelim. $x \rightarrow 2x - 1$ *eşit demiyorum çünkü eşit olamaz.* $x + 1 \rightarrow 2x$ *her tarafı 2'ye böldüm.* $x \rightarrow \frac{x+1}{2}$ *Yani neyi buldum? Şu fonksiyonun tersini bulmuş oldum, tamam mı?...O zaman getirip x yerine yazacağım.*

$f\left(2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1\right) = 4\left(\frac{x+1}{2}\right) + 3, f(x) = 2x + 2 + 3, f(x) = 2x + 5$

Ö1: Valla çok iyi anladım.

TÖ: Burada şunu yapın, çocuklar. Şurada verilen fonksiyonun (2x-1 işaret etti) tersini bulup, x yerine yazacağız.

Tuna öğretmenin T4 görevi ile ilgili $t_{4,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{4,1}$: f: R → R, f(2x-1)=4x+3 ise f(x) nedir?

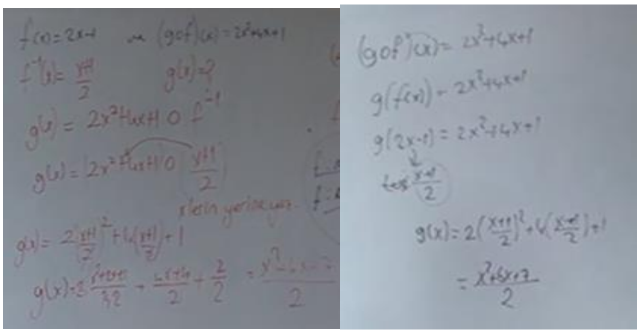
- $\tau_{4,1}$: *... Bana f(x) lazım. Buranın x olabilmesi için çocuklar, şu fonksiyonun (2x-1) tersini bulup, x yerine yazmanız lazım…* [(f(g(x))=h(x) fonksiyonunda x yerine g'nin tersi yazılarak f(x) elde edilir.]
- $\theta_{4,1}$: *Buranın x olabilmesi için çocuklar, şu fonksiyonun (2x-1) tersini bulup, x yerine yazmanız lazım.* [değişken değiştirme], $x \leftarrow 2x-1$ *eşit demiyorum çünkü eşit olamaz.*[değişken değiştirme], $x+1 \leftarrow 2x$ *her tarafı 2'ye böldüm.* $\frac{x+1}{2} \leftarrow x$ *Yani neyi buldum? Şu fonksiyonun tersini bulmuş oldum, tamam mı?* [f(g(x))=h(x) fonksiyonunda g fonksiyonun tersinin niçin x yerine yazılması gerektiği deneysel olarak gösterildi]

Tuna öğretmen $t_{4,1}$ görevindeki fonksiyonun f(g(x))=h(x) biçiminde olduğunu ifade ederek bu tür fonksiyonlarda f(x) fonksiyonunun kuralı istendiğinde x yerine g fonksiyonunun tersi yazılarak görevin sonuçlandırılabileceğini belirttiği görülmektedir. Bu anlamda değişken değiştirme yoluyla görevin çözümünü gerçekleştirmiştir. Bu tekniğin teknolojisinde öğretmenin f(g(x))=h(x) eşitliğinde niçin g fonksiyonunun tersinin yazılması gerektiğini deneysel olarak açıklanmıştır. Bu görevde g(x)=2x-1 olarak ifade edilmiştir. Öğretmenin 2x-1 ifadesinin x olabilmesi için ancak tersinin x yerine yazılması gerektiği diyalogda açıkça belirtilmiştir. Bu anlamda bu tür açıklamalar tekniğin niçin geçerli olduğunu ortaya koyduğundan teknolojik açıklamalar olarak ifade edilebilir.

Bu görevi alternatif tekniklerle çözmek mümkündür. Bu görev bileşkesi ve fonksiyonlardan biri belli iken diğerini bulma yaklaşımıyla şöyle yapılabilir. Burada (fog)(x)=4x+3 ve g(x)=2x-1 olduğu ifade edildikten sonra fog=h özelliğinde $f=hog^{-1}$ olduğu ifade edilerek çözüm gerçekleştirilebilirdi. Başka bir ifadeyle bu teknik matematiğin cebir alanındaki araçlarla gerçekleştirilebilirdi. Ancak bu çözümün gerçekleştirilebilmesi için bileşke işleminin ve bileşke işleminin özelliklerinin bilinmesine gerek duyulmaktadır (örneğin sağdan bileşke işlemi alma, $fof^{-1}=I$, Iof=f özellikleri). Tuna öğretmen fonksiyonların öğretiminde önce ters fonksiyonu anlatmış ve bileşke fonksiyonu ise daha sonra anlatmıştır. Bu anlamda bu tekniğin uygulanması ekolojik sorunlar nedeniyle burada mümkün gözükmemektedir. Diğer taraftan diyalogda "*Buranın x olabilmesi için çocuklar, şu fonksiyonun (2x-1) tersini bulup, x yerine yazmanız lazım.*" şeklinde öğretmen tarafından verilen bilgi fonksiyonla tersinin bileşkesinin birim fonksiyon olması kuralının bilinmesini içermektedir. Ancak öğretmenin bu özelliği henüz öğretmediği tespit edilmiştir. Bunun nedeni bileşke işleminin ters fonksiyondan sonra öğretilmesi olarak gösterilebilir. Buradan fonksiyon konusunun öğretiminde konu içi yapılan değişikliklerin bazı tekniklerin uygulanmasını sınırlandırdığı söylenebilir. Bunun en büyük göstergesi öğretmenin bileşke fonksiyon ve özelliklerini anlattıktan sonra benzer bir görevi hem $\tau_{4,1}$ tekniğiyle hem de bu paragrafın başında anlatılan alternatif teknikle sonuçlandırması kanıt olarak gösterilebilir.

Didaktik anlar açısından $t_{4,1}$ görevi T_4 görev tipiyle ilgili ilk görev olduğundan *ilk karşılaşma anı* ortaya çıkmıştır. f(2x-1)=4x+3 ifadesinde f(x)'in elde edilebilmesi için 2x-1'in fonksiyonda tersinin x yerine yazılamsı gerektiği deneysel olarak açıklandığından *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı*nın ortaya çıktığ söylenebilir. Öğretmenin bu tür görevlerde (f(g(x))=h(x) ise f(x) nedir?) f fonksiyonunun parantezinin içinde verilen fonksiyonun tersinin alınarak x yerine yazılması gerektiğini açıklaması *görev tiplerini keşfetme* ve *bir teknik geliştirme anı* olarak nitelendirilebilir.

Daha sonra öğretmen T_4 görev tipiyle ilgili Şekil 4.88'de verilen $t_{4,2}$ görevini öğrencilere sunmuştur.



Şekil 4.88. *Tuna öğretmenin T_4 görev tipiyle ilgili $t_{4,2}$ görevi*

TÖ: Tanımlı olduğu bölgede... $f(x) = 2x - 1$ *ve* $(gof)(x) = 2x^2 + 4x + 1$ *ise* $g(x)$ *fonksiyonunu bulunuz?...*

Ö1: Hocam bu soruyu çözebilir miyim?

TÖ: Gel.

Ö1: Bizden g(x)'i istiyor. f(x)'i bu sayının sağ tarafına atacağız (soruyu çözdü).

TÖ: Şurada fonksiyonun tersini bulduk. Fonksiyonun tersini bulduktan sonra bileşke fonksiyonla fonksiyonun tersini işleme tabi tuttu. Yerine yazdı. Aslında çözüm olarak doğru ama işlemin sonucu doğru mu onu bilmiyorum... Bakın çocuklar, gof=h olsun, tamam mı? Şimdi g'yi bulmam için f'nin tersini her iki *tarafta işleme tabi tutuyorduk veyahutta f'yi bu tarafa gönderdim. g=hof^{-1}* olur. *Eğer çocuklar f başta ise başa gelir, sonda ise sona gelir. Bu bizim bildiğimiz kural yani biraz önce yazmış olduğumuz kural gereği yapacağınız işlem…(öğretmen Şekil 4.94'te verilen öğrencinin yaptığı çözümde bazı düzeltmeler yaptı. Diğer çözüme geçti) Şimdi burada* $(gof)(x) = 2x^2 + 4x + 1$ *şeklinde verilmemiş mi?*

Öğrenciler: Evet

TÖ: Ben bunun nasıl yazıldığını biliyorum? g(f(x))= $2x^2 + 4x + 1$ *sadece x'i yükledim, başka bir şey yok. Burada ne yapacağım şimdi? f(x)'i yerine yazacağım. g(2x-1)=* $2x^2 + 4x + 1$ *işlem kendiliğinden yürüyor. Fazla bir şey yapmıyorum. Sadece verilenleri kullanıyorum. Şimdi ne yapacağım?...*

Ö1: 2x-1'in tersini bulup, yerine yazacağız.

TÖ: Burada çocuklar şu ifadenin tersini bulup yazacaktık, değil mi?

Öğrenciler: Evet

TÖ: Bunu ne yapardık? x'e dönüştürecektik. Bunun x olmasını istiyorum. Çünkü soruda ne istiyor? g(x). Bunun da x olması için bunun yerine ne yazacağım?

Ö1: 2x-1'in tersi

TÖ: O zaman şu ifadenin tersi nedir?

Öğrenciler: (x+1)/2

TÖ: Tersini yazdığım zaman burası x olacak mı?

Öğrenciler: Evet

TÖ: $g(x) = 2(\frac{x+1}{2})^2 + 4(\frac{x+1}{2}) + 1$ *işlemler azaldı mı?*

Öğrenciler: Evet

TÖ: Buradan g(x)'i bulmuş oluruz. Ne bulmuştuk. $g(x) = \frac{x^2+6x+7}{2}$.

Tuna öğretmenin T_4 görevi ile ilgili $t_{4,2}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

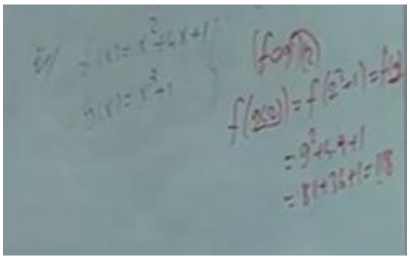
- $t_{4,2}$: $f: R \to R$, $f(x) = 2x - 1$ ve $(gof)(x) = 2x^2 + 4x + 1$ ise g(x) fonksiyonu nedir?
- $\tau_{4,2,1}$: *Şurada fonksiyonun tersini bulduk. Fonksiyonun tersini bulduktan sonra bileşke fonksiyonla fonksiyonun tersini işleme tabi tuttu. Yerine yazdı.* [gof=h ise g=hof^{-1} olmalıdır.]
- $\theta_{4,2,1}$: *... Bakın çocuklar, gof=h olsun, tamam mı?...g=hof^{-1} olur…Bu bizim bildiğimiz kural…*[Daha önceki verilen kurala atıf]

- $\tau_{4,2,2}$: *Ben bunun nasıl yazıldığını biliyorum? g(f(x))=* $2x^2 + 4x + 1$*... f(x)'i yerine yazacağım. g(2x-1)=* $2x^2 + 4x + 1$*... Burada çocuklar şu ifadenin tersini bulup yazacaktık, değil mi?* [(gof)(x)=h(x) ise g(f(x))=h(x) ve x yerine $f^{-1}(x)$ yazılır]
- $\theta_{4,2,2}$: *... Bunun da x olması için bunun yerine ne yazacağım?*[Değişken değiştirme]*... Tersini yazdığım zaman burası x olacak mı?...*[fonksiyonla tersinin bileşkesi birim fonksiyon informel açıklama]

Tuna öğretmenin $t_{4,2}$ görevini iki farklı teknikle tamamlamıştır. İlk tekniği öğrencinin öğretmenin daha önce anlattığı bir özellik doğrultusunda yaptığı belirlenmiştir. Daha sonra öğretmen bu tekniği inceleyerek, tekniği açıklamıştır. Burada görevin daha önce öğretmenin açıkladığı, bileşkesi ve fonksiyonlardan biri verilmişken diğerinin nasıl bulunacağına ilişkin özellik doğrultusunda yapıldığı anlaşılmaktadır. Tekniğin açıklamasında da bu özelliğe atıf yapılmaktadır. Bu özelliğin uygulanmasında sağdan bileşke işlemi, fonksiyonla tersinin bileşkesinin birim fonksiyon olduğu, birim fonksiyonla herhangi bir fonksiyonun bileşkesinin işleme giren fonksiyona eşit olduğu ve burada birleşme özelliğinin uygulandığı şeklinde ifade edilebilecek aşamalar ve bunlara ilişkin açıklamalar verilebilirdi. Ancak bunların hiçbirine değinilmeden tekniğin uygulandığı belirlenmiştir. Diğer çözümde ise öğretmenin görevi değişken değiştirme temelinde açıkladığı görülmektedir. Burada benzer bir göreve atıfta bulunularak, teknik (gof)(x)=h(x) ise g(f(x))=h(x) ve x yerine $f^{-1}(x)$ yazılmasıyla tamamlanmıştır. Bu teknikte örtük olarak fonksiyonla tersinin bileşkesinin birim fonksiyon olduğu belirtilmektedir. Ancak bu açıkça gösterilmemiştir. Görüldüğü üzere, tekniklerin uygulanma sürecinde bazı aşamalar atlanmıştır. Dolayısıyla atlanılan aşamalara ilişkin verilebilecek teknolojilerin eksik olduğu belirtilebilir.

Didaktik anlar açısından bu göreve ilişkin Tuna öğretmenin gerçekleştirdiği prakseoloji incelendiğinde, görevin birden fazla teknikle tamamlanması *tekniksel çalışma anı*nın gözlendiği işaret etmektedir. Ayrıca teknikler daha önce açıklanan bir özelliğe ve bir görevde uygulanan tekniğe atıf yapılarak sunulduğundan belli ölçüde *kurumsallaştırma anı* gözlenmiştir. Bu tekniklerden birinde kullanılan fog ve f belli iken g fonksiyonunun bulunmasına ilişkin özellik daha önce kanıt yapılarak sunulduğundan *teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı* olarak değerlendirilebilir.

Daha sonra öğretmen T_5 görev tipiyle ilgili Şekil 4.89'da $t_{5,3}$ görevini öğrencilere sunmuştur.



Şekil 4.89. *Tuna öğretmenin T5 görev tipiyle ilgili* $t_{5,3}$ *görevi*

TÖ: $f: R \to R,\ f(x) = x^2 + 4x + 1,\ \ g: R \to R,\ g(x) = x^3 + 1$ *ise* $(fog)(2) = ?$ *Verilen iki fonksiyonun bileşke fonksiyonunun nasıl bulunacağını öğrendik, değil mi? Şimdi burada kısa yöntemle bazı değerleri bulmak var. Diyelim ki, bize f fonksiyonu veridi, g fonksiyonu verildi. fog fonksiyonunda 2'nin değerini istiyor. Benim önce şu fonksiyonu bulmam lazım, değil mi? (Bileşke fonksiyonun kuralını kastetti) Ondan sonra x yerine 2 yazacağım. Şimdi burada önce şu bileşke fonksiyonunu bulmadan nasıl işlem yapabiliriz? Onu öğreteceğiz size çocuklar. Burası x olsaydı ne olacaktı? g'ye yüklediğimde ne olacaktı? f(g(2)) olacaktı, değil mi? …Bu ne demek çocuklar? g fonksiyonunda x yerine 2 yaz demiş, değil mi?*

Ö3: Evet

TÖ: g fonksiyonunda x yerine 2 yaz. O zaman yazalım. Açtık parantez, 2'nin küpü artı 1. Bu da eşittir f(9) oldu. $(fog)(2) = f\big(g(2)\big) = f(2^3 + 1) = f(9)$ *Burada ne demek istiyor?*

Ö1: x'in yerine 9 yaz.

TÖ: f fonksiyonunda x'in yerine 9 yaz. O zaman getirip yazalım. $9^2 + 4 \cdot 9 + 1$

$(fog)(2) = f\big(g(2)\big) = f(2^3 + 1) = f(9) = 9^2 + 4 \cdot 9 + 1 = 118$

Ö3: 118

TÖ: …İşte sonuç 118. Yani burada ben ne yaptım çocuklar? fog fonksiyonunu bulmadan işlem yapmış oldum.

Tuna öğretmenin T5 görevi ile ilgili $t_{5,3}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{5,3}$: $f: R \to R,\ f(x) = x^2 + 4x + 1,\ \ g: R \to R,\ g(x) = x^3 + 1$ ise (fog)(2) nedir?
- $t_{5,3}$: *Ne yaptık? Önce 2'yi g'ye yükledim…g(2). g(2) nedir çocuklar? … 9 çıktı. Burası ne oldu? f(9)… f fonksiyonunda x yerine 9 yazdım. İşte sonuç 118.*

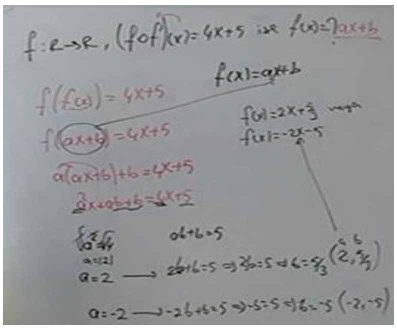
[(fog)(2)=f(g(2))=f(9)=118 bileşke işlemini en sağdan başlayarak fonksiyonlarda belli değerlerin görüntüsünü bulma biçiminde gerçekleştirme]

- $\theta_{5,3}$: *...burada önce şu bileşke fonksiyonunu bulmadan nasıl işlem yapabiliriz? Onu öğreteceğiz size çocuklar* [farklı tekniğe işaret]… *f(g(2)) olacaktı, değil mi?... g fonksiyonunda x yerine 2 yaz demiş, değil mi?* [Bileşke işleminde g fonksiyonunda 2'nin görüntüsü], *Bu da eşittir f(9) oldu… f fonksiyonunda x'in yerine 9 yaz* [f fonksiyonunda 9'un görüntüsü].

Tuna öğretmen $t_{5,3}$ görevini cebirsel teknikle tamamlamıştır. Burada bileşke fonksiyonda belli bir değerin görüntüsünü bileşke aldıktan sonra bulmak yerine bileşkesi istenen değerin bileşke işleminde sağdan itibaren önce ilk fonksiyondaki görüntüsünü bulmuştur. Elde edilen değer diğer fonksiyonda yazarak görev sonuçlandırılmıştır. Bu tekniğin teknolojisinde öğretmenin (fog)(2) ifadesinin f(g(2)) şeklinde yazılabileceğini açıklaması, g(2) ifadesinin g fonksiyonunda 2 değerinin görüntüsünü olduğunun ve f(9) ifadesinin de benzer şekilde f fonksiyonunda 9 değerinin görüntüsünün olduğunun açıklanması teknolojik açıklamalardır.

Didaktik anlar açısından bu görev incelendiğinde diyalogda öğretmenin "*…burada önce şu bileşke fonksiyonunu bulmadan nasıl işlem yapabiliriz? Onu öğreteceğiz size çocuklar"* şeklindeki açıklamalarından daha önce bileşke işleminde belli bir değerin görüntüsünü bulma görev tipinde kullanılan teknikten başka bir tekniğin kullanılabileceği ifade edildiğinden *teknolojik-teorik çevreyi oluşturma* anının gözlendiği söylenebilir. Diyalogun sonunda yeni tekniğin uygulanmasıyla "*fog fonksiyonunu bulmadan işlem yapmış oldum."* ifadelerinden de artık bu yeni tekniğin uygulandığı ve *tekniksel çalışma anı*nın gerçekleştirildiği belirlenmiştir.

Daha sonra Tuna öğretmen T_6 görev tipinde Şekil 4.90'da verilen bir görevi öğrencilere sunmuştur.



Şekil 4.90. *Tuna öğretmenin T_6 görev tipiyle ilgili $t_{6,1}$ görevi*

TÖ: f:R→R (fof)(x)=4x+5 ise f(x) nedir? Şu soruya bakalım, çocuklar, bana (fof)(x)=4x+5 verilmiş, f(x) isteniyor. Şimdi bir fonksiyonun kendisiyle bileşkesi birinci dereceden ya da doğrusal bir fonksiyon ise o zaman f(x) fonksiyonu da doğrusal bir fonksiyondur. Yani f(x) fonksiyonu nedir?

Ö6: Doğrusal.

TÖ: Doğrusal bir fonksiyon olduğuna göre doğrusal fonksiyonun genel denklemi nedir?

Öğrenciler: ax+b

TÖ: Yani, f(x)=ax+b bu doğrusal fonksiyondur. Getirip şurada yerine yazalım. Şunu dağıttığınız zaman çocuklar, f(f(x))=4x+5. Bak fazla hiçbir şey bırakmıyorum. Sadece verilenleri kullanarak…Şimdi diyor ki, burada f fonksiyonunun değerini yaz. (f(f(x))'i gösterdi) f(x) nedir?

Öğrenciler: ax+b

TÖ: f(ax+b)=4x+5. f fonksiyonunda x gördüğüm yere ne yazacağız?

Öğrenciler: 4x+5

TÖ: Bak f fonksiyonunda x gördüğüm yere ax+b yazacağım. f(x) fonksiyonum bu, değil mi? Zaten x yerine bunu yazalım. a(ax+b)+b böyle oldu mu? Bak şunu f(x)=ax+b almadım mı? Bak şunu (ax+b'yi işaret etti) almadım mı?

Öğrenciler: Evet

TÖ: Şimdi bak bunu fonksiyonda getirip x yerine yazıyorum.

Ö7: b nereden geldi (öğretmen görmezden geldi)

TÖ: a parantezinde x değerini yazıyorum. x nedir? ax+b, yazdım artı b eşittir, 4x+5, bak bu tarafa hiç dokunmuyorum. Sadece burada işlem yapıyorum. Bunu dağıttım ben bu taraftan $a^2x+ab+b=4x+5$. Geçen sene fonksiyon eşitliğini hatırlayın. Şöyle bir şeydi. $2x^2+4x=ax^2+bx$ ise dereceleri aynı olanların katsayıları da birbirine eşit miydi?

Ö1: Evet

TÖ: Hatırladınız mı?

Ö1: O zaman a da 2 dir, b de 4 tür.

TÖ: Buradan a=2, b=4 tür, değil mi? Dereceleri aynı olan ifadelerin katsayıları birbirine eşittir. O zaman burada a^2 neye eşittir? 4'e. $a^2=4$, şurası da neye eşittir? Beşe. ab+b=5 bu iki ifadeden yararlanarak a'yı bulacağım. a'yı bulduktan sonra *burada yerine yazarak b'yi bulacağım, tamam mı? Burada $a^2=4$ ise a=2, a=-2 diyor ki, sadece 2 midir?*

Ö6: Hayır, artı eksi 2

TÖ: Karekökünü aldığınız zaman a eşittir, mutlak değer 2 olarak çıkmıyor mu?

Ö1: Evet

TÖ: Mutlak değer 2 de ne olacak çocuklar? Artı ve eksi 2. O zaman burada getirip a yerine değerini yazıyorum. 2b+b=5 ise 3b=5 ise b=5/3 yani buradan şunu yazıyorum. (2, 5/3) 2 ye 5/3 şurası a şurası b, tamam mı? Bu defa -2'yi kullanıyorum. -2b+b=5 ise o da -b olur. –b=5 ise b=-5 bu da ikinci noktamız, (-2,-5) Bunları getirip fonksiyonda yerine yazıyorum. f(x) eşittir a yerine 2 yazdım mı? 2x+5/3 (f(x)=2x+5/3 yazdı) veya f(x)=-2x-5. Kaç tane fonksiyon elde edebiliyoruz burada 2 tane fonksiyon elde edebiliyoruz.

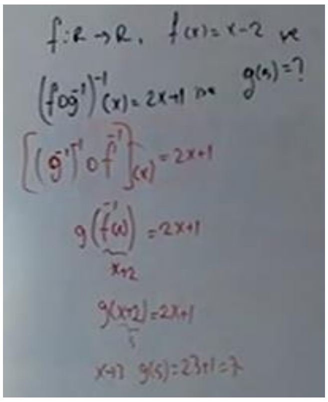
Tuna öğretmenin T_6 görevi ile ilgili $t_{6,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{6,1}$: *f:R→R (fof)(x)=4x+5 ise f(x) nedir?*
- $t_{6,1}$: [f doğrusal fonksiyonun genel denkleminden bileşkesi alındıktan sonra görevde verilen bileşkeye eşitlenerek genel denklemde bilinmeyen değerler elde edilerek fonksiyonlar bulunur.]
- $\theta_{6,1}$: *... bir fonksiyonun kendisiyle bileşkesi birinci dereceden ya da doğrusal bir fonksiyon ise o zaman f(x) fonksiyonu da doğrusal bir fonksiyondur* [fonksiyonun karekterine ilişkin açıklama], *Yani, f(x)=ax+b bu doğrusal fonksiyondur* [doğrusal fonksiyon açıklama], *Geçen sene fonksiyon eşitliğini hatırlayın. Şöyle bir şeydi. $2x^2+4x=ax^2+bx$ ise dereceleri aynı olanların katsayıları da birbirine eşit miydi?*[polinom eşitliği deneysel açıklama], *Mutlak değer 2 de ne olacak çocuklar? Artı ve eksi 2.* [Mutlak değer deneysel açıklama]

Tuna öğretmen $t_{6,1}$ görevini cebirsel teknikle tamamlamıştır. Bu tekniği öğretmenin öncelikle f fonksiyonunun karakterini belirledikten sonra fonksiyonla kendisinin bileşkesini alarak elde edilen sonucun görevde verilen değere eşitlenmesiyle polinom eşitliği elde etmiştir. Polinom eşitliği kavramından fonksiyonun genel denkleminde bilinmeyenlerin tespit edilmesiyle fonksiyonların elde edildiği görülmektedir. Tekniğin teknolojisinde birçok açıklama yapıldığı tespit edilmiştir. Teknolojik açıklamalarından bazıları fonksiyonla kendisinin bileşkesinin sonucu birinci dereceden olduğundan fonksiyonun karakterinin birinci dereceden olması gerektiği, doğrusal fonksiyonun genel denkleminin ax+b şeklinde olduğu, polinom eşitliğinin bir örnek üzerinde deneysel bir şekilde açıklandığı ve benzer şekilde mutlak değerden bir fonksiyonun deneysel bir şekilde nasıl çıkacağına yönelik açıklamalarda bulunulduğu belirlenmiştir. Diğer taraftan sezgisel olarak, bileşke işleminin değişken değiştirme temelinde yapılması ve bileşke fonksiyonun ((fof)(x) ifadesi) iki farklı değerinin eşitlenmesi aynı şeye eşit olan ifadelerin eşit olduğu aksiyomlarının (a=b ve b=c ise a=c aksiyomu) kullanıldığını göstermektedir.

Didaktik anlar açısından bu görev tipinde ilk görev olduğundan *ilk karşılaşma an*ının gerçekleştiği söylenebilir. Tekniğin uygulanma sürecinde teknolojik teorik çevreyi oluşturmaya yönelik birçok açıklamanın yer aldığı tespit edilmiştir. Diğer anlar gözlenmemiştir.

Bu didaktik prakseolojide tekniğin uygulanma sürecinde öğretmen polinom eşitliği kavramını daha önceki yıllarda öğrettiğini ifade etse de öğrencilerin bu kavramı programdaki öğretim sıralamasından dolayı henüz öğrenmedikleri tespit edilmiştir. Bu anlamda ekolojik bir sorunla karşılaşıldığı söylenebilir. Bu görevden sonra T_7 görev tipiyle ilgili Şekil 4.91'de verilen $t_{7,1}$ görevi sunulmuştur.



Şekil 4.91. *Tuna öğretmenin T_7 görev tipiyle ilgili $t_{7,1}$ görevi*

TÖ: f:R→R f(x)=x-2 ve $(fog^{-1})^{-1}(x)=2x+1$ ise g(5)=?

Ö10: Hocam cevap 11

Ö1: 9 mu?

TÖ: Tahtaya bakalım. Öncelikle verilen bileşke fonksiyonda tersini dağıtmam gerekiyor, değil mi? Burayı dinle. Dağıttığımda ne yapıyordu çocuklar? Sondaki başa gelmiyor muydu? Açıklayıcı bir şekilde yazayım. Şunu başa aldığım zaman tersinin tersi kendisi olmayacak mı?

Öğrenciler: Evet

TÖ: (Şunları yazdı)$[(g^{-1})^{-1} o f^{-1}](x) = 2x + 1$ *Fonksiyonun tersinin tersi kendisiydi. Bunu da dağıtıyorum.* $g(f^{-1}(x))$ *bunu da dağıttık, değil mi? g fonksiyonunda f fonksiyonunu mu yoksa tersini bulduktan sonra mı yazacağız?*

Ö1: Hocam tersini bulduktan sonra

TÖ: $g(f^{-1}(x)) = 2x + 1$, *f'in tersi x+2.* $g(x + 2) = 2x + 1$ *benden istenen değer kaçtır?*

Ö1: g(5)

TÖ: Ben buranın ne olmasını istiyorum?

Ö2: 5

TÖ: x yerine 3 yazarsam, g(5)=2·3+1=7

Tuna öğretmenin T_7 görevi ile ilgili $t_{7,1}$ görevine ilişkin prakseolojik bileşenler aşağıda verilmiştir.

- $t_{7,1}$: *f:R→R f(x)=x-2 ve* $(fog^{-1})^{-1}(x)=2x+1$ *ise g(5) nedir?*
- $\tau_{7,1}$: Bileşke fonksiyonun tersi alındıktan sonra f fonksiyonunun tersi g'de yazılır.
- $\theta_{7,1}$: *?*

Tuna öğretmen $t_{7,1}$ görevini cebirsel teknikle tamamlamıştır. Bu tekniği bileşke fonksiyonunun tersi yapıldıktan sonra görevde verilen f fonksiyonunun tersi g'de x yerine yazlarak g(x+2)=2x+1 elde edilmiştir. Burada g(5) elde edilmesini sağlayan x=3 değeri eşitlikte yazılarak görev tamamlanmştır. Bu tekniğin teknolojisinde birçok kural olmasına rağmen bunlara ilişkin açıklama yapılmamıştır. Bu kural ya da özellikleri öğretmen daha önce anlatıldığını varsayarak açıklama yapmadan tekniği gerçekleştirilmiştir. Burada iki fonksiyonun bileşkesinin tersine ilişkin kuralın nereden geldiği kanıtlanarak açıklanabilirdi. Ayrıca bir fonksiyonun tersinin tersi niçin kendisine eşit olması gerektiği tartışılabilirdi. Ancak bu tür açıklamalar olmaksızın teknik gerçekleştirilmiştir. Bu anlamda teknolojik açıdan bu didaktik prakseoloji eksik bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

Didaktik anlar açısından gerçekleştirilen prakseoloji incelendiğinde, ilk karşılaşma anı gerçekleşmiştir. Diğer taraftan alternatif yaklaşımlar bulunmasına rağmen sadece bir teknikle görev tamamlanmıştır. Bu anlamda bu görevde tekniksel çalışma anı gözlenmemiştir. Ayrıca gerçekleştirilen didaktik prakseoloji birçok açıklamadan yoksun bir şekilde uygulandığından teknolojik-teorik çevreyi oluşturma anı ortaya çıkmamıştır.

4.2.3.3.4. Tuna öğretmenin bileşke işlemi ve fonksiyonların tersi alt başlığında gerçekleştirdiği didaktik prakseolojilere ilişkin bulgular

Didaktik prakseolojilerin bileşenleri ile ilgili bulgular

Fonksiyonlarda bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında Tuna öğretmenin didaktik prakseolojilerinin bileşenleri, bu süreçte gözlenen anlar ve karşılaşılan ekolojik sorunlar Tablo 4.34'te verilmiştir.

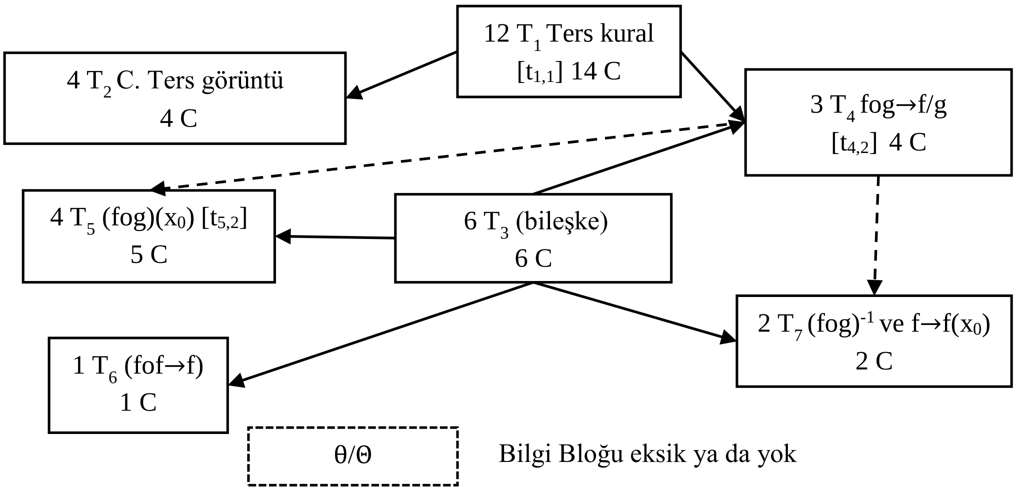
Tablo 4.34. *Tuna öğretmenin bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında prakseolojik bileşenler ve anlar*

Görev	Teknik*	Teknoloji	Gözlemlenen Anlar**	Ekolojik Sorunlar
$t_{1,1}$	1.C1, 2.C2 3.C3	Kısmen	İK→GTK&TG→TÇ→K →TTÇO	Bileşke işlemi (Monoid yapısı)
$t_{2,2}$	C	Kısmen	TTÇO	-
$t_{3,1}$	C	Kısmen	İK→TTÇO	-
$t_{4,1}$	C	Kısmen	İK→TTÇO→GTK&TG	Bileşke işlemi (Monoid yapısı)
$t_{4,2}$	1.C1, 2.C2	Kısmen	TÇ→K→TTÇO	-
$t_{5,3}$	C	Kısmen	TTÇO→TÇ	-
$t_{6,1}$	C	Kısmen	İK→ TTÇO	Polinom eşitliği
$t_{7,1}$	C	Yok	İK	-

* G: Geometrik teknik, C: Cebirsel teknik, E: Eşleme tekniği, GY: Grafik Yorum
**İK: İlk Karşılaşma, GTK&TG: Görev Tiplerini Keşfetme ve bir Teknik Geliştirme, TTÇO: Teknolojik-Teorik Çevrenin Oluşturulması, TÇ: Tekniksel Çalışma, K: Kurumsallaştırma,

Bu alt başlıkta görevler genellikle ders kitabındaki görevlerde küçük değişiklikler yapılarak sunulmuştur. Bu görevlerde Tuna öğretmen çoğunlukla cebirsel teknikler kullanma eğilimindedir. Görevlerin büyük ölçüde tek bir teknikle tamamlandığı görülmektedir. Tekniklerle ilgili önemli boyutlardan biri fonksiyonun tersinin kuralının bulunması sürecinde ortaya çıkmıştır. Öğretmenin fonksiyonun tersini bileşke işlemi üzerine kurmadığı, ters alma sürecinde fonksiyonların bire bir ve örten olma gibi özelliklerini incelemeden fonksiyonların terslerini sonuçlandırdığı belirlenmiştir. Ayrıca tekniğin gerçekleştirilme sürecinde bazı aşamaların atlanıldığı tespit edilmiştir. Bunun yapılmasında amaç, tekniği basitleştirme, kısaltma ve daha kolay anlaşılmasını sağlamak şeklinde açıklanabilir.

Görevlerde teknolojik açıklamaların informel ve sözel açıklamalarla sınırlı kaldığı tespit edilmiştir. Özellikle fonksiyon konusunun öğretiminde alt başlıkların sıralamasında bileşke işleminin ters fonksiyondan sonra anlatılması bazı teknolojik açıklamaların yapılamamasına neden olduğu söylenebilir. Tüm bunlar doğrultusunda bu alt başlıkta öğretmenin gerçekleştirdiği didaktik prakseolojilerin bileşenleri arasındaki ilişkiler Şekil 4.92’de verilmiştir.



Şekil 4.92. *Tuna öğretmenin bileşke işlemi ve ters fonksiyon alt başlığında ortaya koyduğu prakseolojik bileşenler arasındaki ilişkiler*

Bu alt başlıkta görev tipleri arasında belli ölçüde doğrudan ilişki (kesikli olmayan oklar) kurulduğu gözlenmekle birlikte bunların sayılarının anlamlı öğrenmelerin desteklenmesi açısından düşünüldüğünde büyük ölçüde eksik kaldığı söylenebilir. Diğer taraftan çok az sayıda dolaylı ilişki (kesikli oklar) kurulduğu görülmektedir. Görev tipleri arasında yapılan doğrudan ya da dolaylı ilişkilerin az olması bunların birbirini destekleyecek şekilde tutarlı biçimde organize edilmediğini ve parçalanmış şekilde sunulduğunu göstermektedir. Bu doğrultuda buradaki en önemli bulgu, bir fonksiyonun tersinin bileşke işleminden önce anlatılması ve fonksiyonun tersinin bileşke işlemi üzerinden öğretilmemesidir. Bu durumun üniversite matematiği ile ortaöğretim matematiği arasında var olan boşluğu arttırdığı söylenebilir. Ortaöğretim düzeyinde bir fonksiyonun tersi eşleme üzerinden değişken değiştirme temelinde oluşturulmaya çalışıldığı belirlenmiştir. Ancak üniversite matematiğinde cebir alanında monoid yapısıyla ilişkili bir şekilde fonksiyonun tersi öğretilmektedir. Diğer taraftan, öğretim programında bir fonksiyonun tersinin bileşke işlemiyle ilişkili bir şekilde üniversite matematiğini destekleyecek şekilde öğretilmesi istenmesine rağmen Tuna öğretmenin bir fonksiyonun tersine ilişkin gerçekleştirdiği prakseolojinin bu doğrultuda gerçekleştirilmediği anlaşılmaktadır.

Didaktik anlar ile ilgili bulgular

Tuna öğretmenin sınıf uygulamalarında ortaya koyduğu matematiksel eylemlerde didaktik anların tutarlı bir biçimde yapılandırılmadığı, çok az sayıda didaktik prakseolojilerde didaktik anlara yer verildiği ve bunların da tam anlamıyla ortaya konulamadığı görülmektedir. Öğretmenin didaktik anlara ilişkin sabit bir döngüsünün olmadığı ve her bir görevde farklı şekilde anların ortaya çıktığı gözlenmektedir. Örneğin $t_{1,1}$ görevinde birçok didaktik ana bir şekilde yer verilmesine rağmen diğer görevlerde bu sürekliliğin devam etmediği tespit edilmiştir. Ayrıca bazı görevlerde tekniğin doğrudan verildiği ve bu tür durumlarda bazı anların "paypas" edildiği de dikkat çekicidir.

Diğer taraftan bazı görevlerde teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı büyük ölçüde eksik şekilde ortaya çıkmıştır. Bunun arkasında ekolojik sorunlar olduğu belirtilebilir. Örneğin $t_{6,1}$ görevinde öğretmenin tekniğin aşamalarından birinde polinom eşitliğini geçmişte öğrettiğini varsayarak öğrencilerin sahip olduğu bir bilgi olarak polinom eşitliğini sunması bunun göstergesidir. Sonuç olarak Tuna öğretmenin sınıf uygulamalarında ortaya koyduğu matematiksel eylemlerde didaktik anların öğrencilerin anlamlı öğrenmelerini destekleyecek şekilde organize edilmediği ve öğrenme ortamında gözlenemediği söylenebilir.

Didaktik prakseolojilerde ekolojik sorunlara ilişkin bulgular

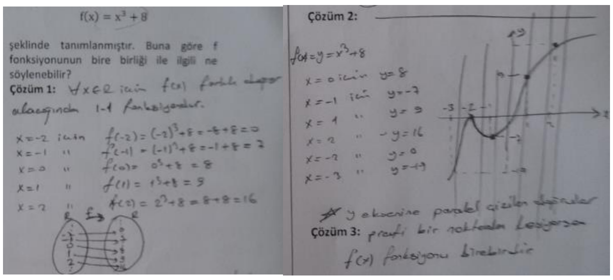
Tuna öğretmenin bu alt başlıkta sınıf uygulamalarında ortaya koyduğu didaktik prakseolojilerde iki temel ekolojik sorun gözlenmiştir. Birincisi ters fonksiyonun bileşke işleminden önce anlatılması ve bir fonksiyonun tersinin bileşke işlemiyle bağlantı kurulmaksızın öğretilmesidir. Bu konuda matematik dersi öğretim programıyla Tuna öğretmenin sınıf uygulamalarının çeliştiği tespit edilmiştir. Çünkü programda önce bileşke işleminin öğretilmesi istenmekte ve bir fonksiyonun tersinin de bileşke işlemi üzerinden bulunması üzerine vurgu yapılmaktadır.

İkincisinde ise görevin tamamlanmasında tekniğin uygulanma sürecinde aşamalardan birinde aniden ortaya çıkan ve programda kavramın daha ileride konumlandırılmasından kaynaklı öğretmenin öğretmediği durumlardır. Bunlardan biri $t_{6,1}$ görevinin tamamlanmasında kullanılan tekniğin uygulanma sürecinde bir aşamada polinom eşitliği olarak ortaya çıkmıştır. Bu kavram 10. sınıfta fonksiyonlardan sonra öğretilmekte ve bu kavrama ilişkin öğrencilerin henüz bilgilerinin olmadığı görülmektedir. Sonuç olarak, köklü program değişikliklerinde eğitim sistemlerinde kavramlar arası ilişkilerin her yönüyle düşünülmesi zor olacağından bunlar ekolojik sorunlara neden olmakta ve bu sorunlar konuların öğretimini zorlaştırmaktadır.

4.2.3.4. *Tuna öğretmenin fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunda sahip olduğu didaktik prakseolojiler*

Bu bölümde Tuna öğretmene araştırmacı tarafından fonksiyon konusuyla ilgili 17 adet görev verilmiştir. Bu görevlere ilişkin bilgiler yöntem kısmında verilmiştir (Bkz. Tablo 3.3).

Tuna öğretmen bu görevlerde toplam 28 teknik üretmiştir. Bunların 25 tanesi cebirsel, 2 tanesi nümerik ve 1 tanesi de geometrik teknik olarak belirlenmiştir. Öğretmenin görev 1'de iki farklı teknik kullanmasına rağmen bunları yanlış biçimde gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Görev 2'de sadece bir teknik üretebilmiştir. Görev 3'te teknik geliştirme girişiminde bulunmuş ama tekniği tamamlayamadığı belirlenmiştir. Görev 4'te dört teknik geliştirdiği görülmesine rağmen temelde bu teknikler iki kısımda sınıflandırılabilmektedir. Öğretmenle yapılan son iki görüşmede bu görevlere ilişkin sorular da yöneltilmiştir. Öğretmenin görevlere ilişkin didaktik prakseolojileri bu görüşmelerden alıntılar yapılarak desteklenmiştir. Görev 1: Reel sayılarda tanımlı f fonksiyonunun kuralı, $f(x) = x^3 + 8$ şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre f fonksiyonunun bire birliği ile ilgili ne söylenebilir? (Şekil 4.93)



Şekil 4.93. *Tuna öğretmenin görev 1 ile ilgili uygulaması*

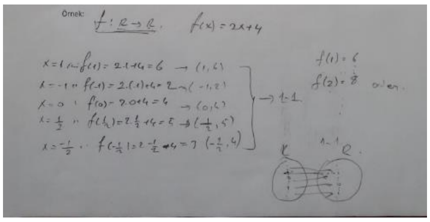
Tuna öğretmen görev 1'i iki farklı teknikle tamamladığı görülmektedir. Birinci teknikte görevde verilen fonksiyonun tanım kümesindeki her bir reel sayı değeri için değer kümesinde farklı bir değer alacağı belirtilmiştir. Ancak bu ifadenin tüm reel sayılar için kanıtlanması gerekirken bazı reel sayılar için doğruluğu nümerik teknikle gösterilerek örneklenmiştir. Matematikte bir kuralın yanlış olduğunu fikrini, bir örnek göstererek kanıtlamak mümkündür. Ancak bu görevde verildiği şekliyle bir kuralın doğru olduğunu göstermek için örnekleme yoluna başvurmak yanlış bir metottur. Bu anlamda tekniği doğru kabul etmek mümkün değildir. Öğretmen burada bire bir fonksiyonun cebirsel tanımını kullanarak görevi çözebilirdi (f fonksiyonu bire birdir ⟺ ∀x∈R için $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$) Ancak bu görevde bu tür bir açıklama öğretmen tarafından yapılmamıştır. Geometrik teknik olarak ifade edilen teknikte ise öğretmenin fonksiyonun grafiğini yanlış çizdiği görülmektedir. Dahası yatay doğru testini de yanlış biçimde uygulamıştır. Burada öğretmen yatay doğru testini "y eksenine paralel çizilen doğrular grafiği bir noktada kesiyorsa f(x) fonksiyonu bire birdir" şeklinde ifade etmiştir. Yatay doğru testi verilen fonksiyonun grafiği çizildikten sonra fonksiyonun tanımlı olduğu bölgelerde x eksenine paralel doğruların çizilmesini içermektedir. Ancak öğretmenin bunu karıştırarak y eksenine paralel doğrular çizdiği görülmektedir. Bu anlamda öğretmen hem tekniği yanlış gerçekleştirmiş hem de teknolojik bilgileri (örneğin yatay doğru testine ilişkin açıklama) yanlış vermiştir. Dolayısıyla bu görevde öğretmenin teknik ve teknololojik anlamda hatalarının olduğu belirlenmiştir. Her iki tekniği yanlış gerçekleştirmesi nedeniyle yapılan son görüşmede bir fonksiyonun bire bir olduğunun nasıl gösterilebileceği öğretmene sorulmuştur. Bu konuda öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

A: Derste nasıl gösterirsiniz bir fonksiyonun bire bir ve örten olduğunu nasıl anlatabilirsiniz?

TÖ: f:A→B f(x)=2x+4 bire bir ve örten olduğunu gösteriniz? (bir örnek verdi) Her değere karşılık bir reel değer olup olmadığına bakacağız. x=1 için f(1)=6, x=-1 için f(-1)=2, x=0 için f(0)=4. Reel sayılarda dediğim için f(1/2)=5 aynı değerin negatifini alalım. f(-1/2)=3 her x değerine karşılık gelen değer farklıdır. Buna dayanarak fonksiyonun her reel değerine karşılık bir değer geleceğini düşünerek bire bir olduğunu söyleyebilirim. Bunu bu şekilde her sayıya karşılık bir sayı gelecektir. Örten olabilmesi için bunu f(1)=6, f(2)=8. Bu arada kalan değerler açıkta kalacaktır. Bu açıkta kalan sayılar için bazı değerler de gelecektir yani orada verdiğim rasyonel değerlere karşılık tam sayı değerleri gelecektir. Bunu devam ettirdiğimde burada da örten bir fonksiyon olduğunu göreceğim. Benim için önemli olan fonksiyonun tanım aralığıdır. Bu tanım aralığında karşılık gelen değerler eğer karşılıyorsa bu bire bir ve örtendir. Şayet bu reel sayılarda değil de atıyorum reel sayılardan tam sayılara veya tam sayılardan reel sayılara olmuşsa yüzde yüz rahatlıkla örten olmadığını görürüz. Bu bu şekilde anlatıldığı gibi *şemayla da gösterebiliriz. Reel sayılardan reel sayılara, -1,0,1 devam edecek sonsuza kadar. -1,0,1,.. devam edecek. Burada verdiğimiz her sayı değerine karşılık bir değerin geleceğini göreceğiz. Yani burada bir sayının 2 farklı değerle eşleşmeyeceğini görmeyeceği şekilde karşılayacağını göreceğiz. Bunun rahatlıkla bire bir olduğunu göreceğiz. Her sayıya karşılık bir sayıyı da göreceğimizden dolayı tanım kümesiyle görüntü kümesinin eşit olduğunu göreceğimizden dolayı da bire bir olduğunu söyleyeceğiz. Ya da ikinci bir yol fonksiyonun grafiğini çizerek yatay doğru testi uygulayacağız. Eğer fonksiyonu 1 noktada kesiyorsa bunun bire bir olduğunu söyleyeceğiz. Eğer fonksiyon açıkta eleman kalmayacak, fonksiyonda her hangi bir boşluk veya 2 farklı noktada kesmeyeceğini göreceğimiz için rahatlıkla bire bir ve örten olduğunu söyleyebiliriz.*

A: Hocam üniversitede bire birlikle alakalı şöyle bir şey vardı. $f(x_1) = f(x_2)$ *ise* $x_1 = x_2$ *bu tür cebirsel işlemlerle ispat yapıyor musunuz? Lise düzeyinde bunlara giriyor musunuz? Bire bir de veya her y eleman A dan B ye olan bir fonksiyonda f(y)=x olacak şekilde en az bir x var mıdır? Bu şeyleri veriyor musunuz?*

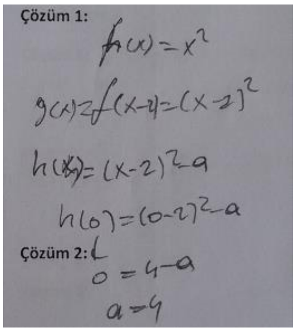
TÖ: Genel olarak bunu teorik bilgide veriyoruz. Ama örnek üzerinde vermiyoruz. Birkaç tane değer vererek çocuk bu değerleri gördükten sonra bunu her x için bunu uygulayabilirsiniz yani her değer için söyleyebiliyoruz. Hatta bazen çocuklara her kelimesini kullanmıyorum. Her kelimesini kullandığımda hocam diyor "A herhalde amuda kalkmış" gibi şeylerle karşılaşabiliyoruz. Ama ı değerleri verdikten sonra artık çocuklara o şekilde anlatıyoruz (Şekil 4.94).



Şekil 4.94. *Tuna öğretmenin bire bir ve örten fonksiyona ilişkin açıklamaları*

Bu açıklamalardan da görüleceği üzere, Tuna öğretmen bir fonksiyonun bire bir olduğunun gösterilmesinde bire bir fonksiyonun tanımını kullanmak yerine değer vererek eşleme tekniğiyle fonksiyonun bire bir olduğunu göstermiştir. Ancak fonksiyonların bire bir olma durumu doğrudan ispat yaklaşımıyla örnek vererek kanıtlanması matematiksel olarak geçerli değildir. Bu anlamda öğretmenin teknolojik açıklamaları yanlış olarak vermiştir. Öğretmen fonksiyonun bire bir olduğunun belirlenmesinde ikinci bir teknik olarak yatay doğru testinin kullanılabileceğini belirtmiştir. Ancak bunun nasıl kullanıldığına ilişkin bilgiyi karışık biçimde açıklamıştır.

Görev 2: Tepe noktası (0,0) ve grafiğin kolları yukarı yönde olan ikinci dereceden bir f fonksiyonu (-2,4) ve (2,4) noktalarından geçmektedir. f fonksiyonunun g ve h fonksiyonları arasında g(x)=f(x-2) ve h(x)=g(x)-a şeklinde bir ilişki vardır. h fonksiyonunun orijinden geçtiği biliniyorsa a değeri kaçtır? Bu görevle ilgili öğretmenin uygulaması Şekil 4.95'te verilmiştir.



Şekil 4.95. *Tuna öğretmenin görev 2 ile ilgili uygulaması*

Bu görevi öğretmen sadece bir cebirsel teknikle sonuçlandırmıştır. Burada öncelikle f fonksiyonunun kuralı $f(x)=x^2$ şeklinde belirlendikten sonra görevde değişken değiştirilerek önce g fonksiyonunun kuralı g(x)=f(x-2) eşitliğinden elde edilmiştir. Daha sonra h(x)=g(x)-a fonksiyonunun kuralı g fonksiyonunun kuralından yararlanılarak bulunmuştur. Görevde verilen h(0)=0 eşitliğinden a değerinin elde edildiği görülmektedir. Burada geometrik teknikle çözüm yapılabilirdi ancak öğretmenin bu tekniği kullanmadığı belirlenmiştir. Öğretmenin geometrik tekniği niçin kullanmadığı ve tekniğin nasıl kullanılabileceği uygulama sonrası yapılan görüşmede öğretmene sorulmuştur. Konuyla ilgili öğretmenin görüşleri aşağıda verilmiştir.

> *TÖ: Şu an cebirsel olarak daha kolayıma geldiği için onu tercih etmişimdir. Grafik olarak hiç şey yapmadım. Orada parabolü gördüğümden hemen ax^2 şeklinde bir grafik aklıma gelmiştir. Belki de ondan dolayıdır ama bakmam lazım hocam bu soruya biraz (düşünüyor). Bunu (f(x)'in grafiğini) …kaydırarak g(x)'i bulmak için, bu 2 noktasına kaydırılmak şartıyla, g(x) fonksiyonu bulunurdu. g(x) fonksiyonu bulunduktan sonra h(x) fonksiyonunda a br kaydırıp ı y ekseni üzerinde kaydırma yaparak bulunabilirdi.*

A: Nasıl yaparız onu hocam?

TÖ: f(x)'i çizmiyorum, +2 br kaydırdığımda g(x)'i bulurum. Bu g(x) olur. g(x) fonksiyonundan h(x)'i bulmak için –a kadar kaydıracağız. Şu şekilde h(x)=g(x)-a elde ettikten sonra a'yı bulmaya çalışacağız (Düşünüyor). Şurası 4 noktası, şurası a dır, -4 br….h orijinden geçiyorsa 4 br kaydırmış olacağız.

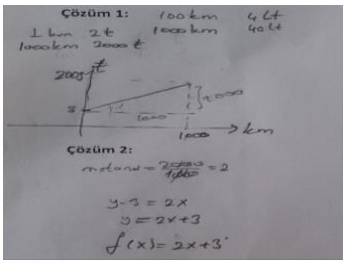
A: Evet

TÖ: O zaman şurası da 4 birim, a değerini bulmuş olacağız.

Bu açıklamalardan görüleceği üzere, Tuna öğretmenin cebirsel teknikleri daha kolay uygulayabildiği ve geometrik tekniklerde belli ölçüde zorlandığı görülmektedir. Öğretmenin simetri dönüşümlerini istenildiğinde uygulayabilmektedir. Ancak bu dönüşümlere ilişkin teknolojik açıklama vermediği görülmektedir. Daha açık bir ifadeyle f fonksiyonun niçin x ekseninde 2 br sağa kaydırıldığında g fonksiyonu elde edildiği ve g fonksiyonunun y ekseninde a br kaydırıldığında niçin h elde edilmesi gerektiği açıklanmamıştır. Ayrıca bu öteleme dönüşümlerinin fonksiyonların grafiklerini nasıl etkilediğine ilişkin bilgiler de verilmemiştir. Dolayısıyla gerçekleştirilen didaktik prakseoloji teknolojik anlamda eksik bir biçimde sunulmuştur.

Görev 3: Bir ticari taksi kat ettiği her 100 km'de 4 litre benzin tüketmektedir. Taksi metrenin açılışı 3 lira olan bu takside, gidilen her km 2 lira olarak ücretlendirilmektedir. Deposunda 40 litre benzin bulunan bu taksiyle seyahate çıkan bir kişinin, taksinin harcayacağı benzin miktarına karşılık taksiciye ne kadar ödemesi gerektiğini ifade eden fonksiyonu bulunuz?

Tuna öğretmen bu görevi önce grafiğini çizerek geometrik teknikle tamamlamayı denemiştir. Ancak bunu başaramamıştır. Daha sonra cebirsel teknikle görevi tamamlama girişiminde bulunmuştur. Burada da f fonksiyonunun kuralını bulmuştur. Ancak bu tekniği de tamamlayamamıştır. Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamaları Şekil 4.96'da verilmiştir.



Şekil 4.96. *Tuna öğretmenin görev 3 ile ilgili uygulaması*

Bu görev öğretmene uygulama sonrası yapılan görüşmede tekrar sorulmuştur.

TÖ: Şurada y yerine f diyebilirim. f(x)=2x+3 şeklinde düşünerek fonksiyonu çizmiş olabiliriz.

A: Bu tam şey olmuyor. Çünkü bu km karşılık gelen olmuş oluyor. Her km ya karşılık gelen fiyat bu ama benzine karşılık gelen fonksiyon soruluyor (Soruyu tekrar okudu).

TÖ: Bunu ee şurada toplam ödediği miktarı bulduktan sonra f(x) ne olacaktır? Kaç km toplam? 100 km de 4 litre yakıyorsa ..

A: Biz x diye düşünüyoruz, fonksiyon sonuçta.

TÖ: Şimdi direkt men biz soruyu problem olarak algılıyoruz. Soruyu şey sorusu olarak algılamıyoruz. Fonksiyon sorularımızda ya x'li terim olacak ya grafik olacak ya da bağıntıdan bahsedeceğiz. O şekilde oldu mu biz fonksiyon düşünüp çözümü o şekilde yapmaya çalışıyoruz. Ama burada soruyu okuduğum zaman tamamıyla problem gibi algılanıyor. Bunu problem gibi çözdükten sonra fonksiyona döneceğim.

A: Anladım

TÖ: O şekilde, ben burada fonksiyonu düşünemiyorum. Yani onu direkt fonksiyon olarak düşünüp de soru çözümüne gidemiyorum. 100 km de 4 litre ee 40 litrelik benzinimiz vardır. x km de yapacaktır şeklinde 4x=(40)(100) ise x=1000

A: Bütün hepsi bitse bu kadar gider.

TÖ: Evet, toplam aldığı yani gittiği km dir. Bu km'yi getirip fonksiyonda x yerine yazıp işlemi yapmış olacağız.

A: Evet hocam.

TÖ: 2 çarpı burada x yerine 1000 yazacağız. +3 o da eşittir. 2003 elde etmiş olacağız. Sizin dediğinizi düşünmem lazım, direkt bunu orantıyla değil de direkt fonksiyondan benzinle ücretlendirmeyi nasıl fonksiyon haline dönüştürebilirim?

A: Onu istiyoruz hocam

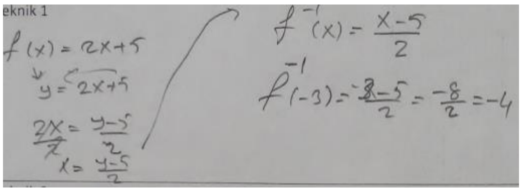
TÖ: Olabilir, belki orada da o şekilde düşünmüşüz. Biz km tl bazında düşünmüşüz. Aslında normalde bizim benzin tl bazında düşünmemiz gerekiyor. Yani litre tl düşünmemiz gerekecekti.

A: Şu an aklınıza geliyor mu?

TÖ: Gelirse söyleriz (gülüyoruz).

Bu açıklamalarda da görüleceği üzere, iki fonksiyonun bileşkesinin bulunmasını içeren bir günlük yaşam görevine ilişkin öğretmenin teknik üretemediği belirlenmiştir. Burada öğretmen, taksinin harcadığı benzine karşılık gidilen yola f fonksiyonu ve gidilen yola karşılık ödenmesi gereken ücrete g fonksiyonu dedikten sonra bunların kurallarını bulabilirdi. Sonrasında bu iki fonksiyonun bileşkesi alınarak görev tamamlanabilirdi.

Görev 4: $f: R \rightarrow R$ ve $f(x) = 2x + 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f^{-1}(-3)$ değeri kaçtır? Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamalarından birincisi Şekil 4.97'de verilmiştir.



Şekil 4.97. *Tuna öğretmenin görev 4 ile ilgili uygulaması teknik 1*

TÖ: Önce burada fonksiyonun tersini bulduktan sonra rahatlıkla (istenen değeri) verebiliriz. f(x)=y diyerek, y=2x+5'i kullanarak x'i yalnız bırakmak şartıyla işlem yapıyoruz. 2x=y-5 her iki tarafı 2'ye böldüğümüzde $x = \frac{y-5}{2}$ *burada dönüşümü sağlıyoruz. x yerine f(x)'in tersini uygulayarak.*

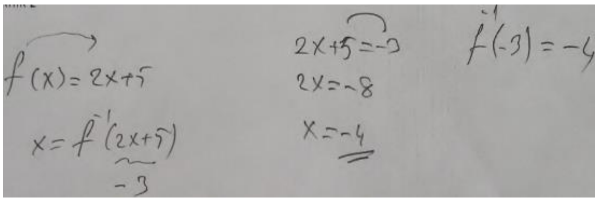
A: hı hı

TÖ: $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ *bizden istenilen değer nedir? x yerine -3 yazarak,*

$f^{-1}(-3) = \frac{-3-5}{2} = -4$

A: Birinci çözüm bu…Diğer teknik varsa alalım.

Tuna öğretmen bu görevde ilk teknik olarak, verilen doğrusal fonksiyonun tersini bulduktan sonra fonksiyonun tersinde -3 değerinin görüntüsünü bularak görevi tamamlamıştır. Burada fonksiyonun tersinin daha önce öğretmenin sınıf uygulamalarında bir fonksiyonun tersini bulurken kullandığı tekniğe benzer şekilde uygulandığı belirlenmiştir. Bu doğrultuda öğretmen önce f(x) yerine y yazmıştır. Sonra fonksiyonun kuralında x değerini y cinsinden belirlemiştir. Daha sonra da değişken değiştirerek fonksiyonun tersini elde etmiştir. Ancak bu süreçlerde özellikle değişken değiştirme işleminin anlamsız bir şekilde gerçekleştirildiği görülmektedir. Ayrıca tersi alınan fonksiyonun bire bir ve örten olmasına ilişkin herhangi bir inceleme yapılmadığı belirlenmiştir. Dolayısıyla teknolojik olarak bu teknik eksik biçimde gerçekleştirilmiştir. Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamalarından ikincisi Şekil 4.98'de verilmiştir.



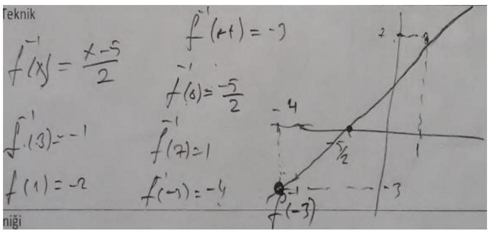
Şekil 4.98. *Tuna öğretmenin görev 4 ile ilgili uygulaması teknik 2*

TÖ: Diğer bir tekniğimiz basit bir yöntemimiz direkt men f(x)=2x+5 şurayı f'e attığımız zaman eksi olarak atıyorduk. Pratik yöntem olarak. $x=f^{-1}(2x+5)$ tekniğimizdi demiştik. Buranın bizden istenilen değerin -3 olması gerekiyor. -3 olmasını istiyoruz. O zaman 2x+5=-3 bu tarafa attık. 2x=-8, x=-4. O zaman bunun değeri nedir? -4 tür.

A: Evet

TÖ: Bu şekilde bir teknik uygulayabiliyoruz. Yani ıı pardon şurada x'in yerine -4 yazdığımızda $f^{-1}(-3)$ olacaktır. 4 yazdığımızda o da eşittir -4.

Bu görevde ikinci teknik olarak f bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere, y=f(x) ancak ve ancak $f^{-1}(y)=x$ tir. Bağıntısından yararlanılarak tekniğin uygulandığı görülmektedir. Ancak burada da görevde verilen fonksiyonun bire bir ve örten olduğuna ilişkin herhangi bir incelemede bulunulmamıştır. Bu yüzden bu prakseoloji teknolojik açıdan eksik biçimde gerçekleştirilmiştir. Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamalarından üçüncüsü Şekil 4.99'da verilmiştir.

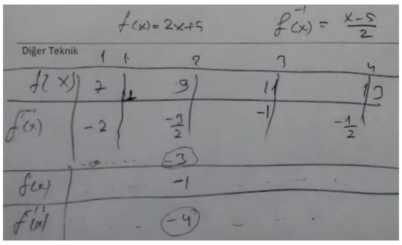


Şekil 4.99. *Tuna öğretmenin görev 4 ile ilgili uygulaması teknik 3*

A: Grafiksel olarak çözebilir miyiz?

TÖ: Grafik olarak mı? Fonksiyonun tersini bulduktan sonra grafiğini çizip bulabiliriz. O da o şekilde olabilir… f(x)'in tersi $\frac{x-5}{2}$ *dedik. Grafik olarak…(düşünüyor) Değer verip sonuçlarını yazacağım. 3 verdiğimde -1, tam değer vereceğim. 1 verdiğimde -2, -1 verdiğimde -3,…şeklinde devam edeceğim. Grafiği çizeceğim. Sıfır verdiğimde grafik -5/2 olacak. Bunlar benim için önemli x=0 için -5/2 olacak. -5/2 noktasını kesecek. y değeri için -5/2. Bazı pozitif değerlerde 7 verdiğimde ee 7 için 1 olacak (düşünüyor). 7 verdiğimizde x'i 7, y'si 1. Grafiği çizdik. -3 için verdiğimizde -4. -3 değerimiz için* $f^{1}(-3)=-4$.

Bu görevde üçüncü teknik olarak öğretmen grafik temsilinden yararlanmıştır. Ancak bu teknik incelendiğinde bu tekniğin birinci teknik doğrultusundan uygulanarak tamamladığı belirlenmiştir. Teknik kapsamında çizilen grafik temsil bağlamının ötesine geçememiştir. Çünkü fonksiyonun tersi daha önce birinci teknikte belirlenen kural doğrultusunda incelenmiştir. Eğer burada grafik çizildikten sonra bilinen değerlerden hareket ederek orantı ya da benzerlik yoluyla teknik uygulansaydı farklı bir teknik olarak nitelendirilebilirdi. Bu görevle ilgili öğretmenin uygulamalarından dördüncüsü Şekil 4.100'de verilmiştir.



Şekil 4.100. *Tuna öğretmenin görev 4 ile ilgili uygulaması teknik 4*

A: Tabloyla çözebilir miyiz hocam?

TÖ: (tablo yaptı) x şurası da f(x) değerimiz olsun. x, f(x) ve $f^{1}(x)$ *değerlerini alalım. x'e 1 verdiğimizde bulduğumuz değer 7.*

A: Alt alta mı yazacağız?

TÖ: Şöyle yapalım. 1 için, 2 için, 3 için şeklinde yazalım (x değerlerini tablonun üstüne yazdı) f(1) için 7, 2 için 9, f(3) için 11, 4 için 13. Bu şekilde devam edecektir. Tersini aldığımızda bu defa tersinde f(x)=2x+5, f'in tersi de ee $\frac{x-5}{2}$. *x yerine 1 yazdığımızda -2, x yerine 2 yazdığımızda -3/2, x yerine 3 yazdığımızda -1, 4 yazdığımızda -1/2. Benden istenen değer -3 olduğu için bunun negatif yönünü* *devam ettireceğiz. Aynı şeyi şurada negatifi için alalım. x, f(x), f^{-1}(x) eksi sonsuzdan geleyim. Benim için önemli olan -3 değeridir. Eksi 6, eksi 1. (f(x)'i hesapladı) -3 koyduğumda -8, -4. (f^{-1}(x)'i hesapladı)*

A: Evet

TÖ: Bu şekilde gösterebiliriz.

Bu görevde son teknikte öğretmen değerler tablosundan yararlanmıştır. Ancak bu teknik incelendiğinde değerler tablosunun sadece temsil bağlamında kaldığı gözlenmiştir. Burada fonksiyonun cebirsel temsilinde daha önce birinci teknikte elde edilen fonksiyonun ters kuralından yararlanılarak teknik gerçekleştirilmiştir. Bu anlamda bu teknik birinci teknikle benzer şekilde ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla burada kullanılan değerler tablosu teknik düzeyine geçememiş ve temsil düzeyinde kalmıştır. Bu teknik şöyle uygulanabilirdi. İlk olarak değerler tablosunda x ve f(x) değerleri arasında karşılıklı örüntüler belirlendikten sonra görevde istenen değere kadar örüntü işletilebilirdi. Sonra ilgili değer için y=f(x) ise ancak ve ancak $x=f^{-1}(y)$ bağıntısı kullanılarak görev tamamlanabilirdi. Öğretmenin gerçekleştirdiği işlemler incelenirse tekniğin eksik kaldığı ve tamamlanamadığı görülmektedir.

4.2.3.4.1. Tuna öğretmenin fonksiyon konusunda sahip olduğu didaktik prakseolojilere ilişkin bulgular

Tuna öğretmen verilen görevlerin çoğunu tamamlamakla birlikte bazı görevlerde teknik üretmekte zorlandığı ve hatta bazı teknikleri yanlış uyguladığı belirlenmiştir. Tekniklerin %89'unun cebirsel teknikler olduğu ve bu doğrultuda görevlerde öğretmenin cebirsel teknikleri kullanma eğiliminde olduğu söylenebilir.

Öğretmen bir fonksiyonun bire birliğinin bulunmasını içeren görev 1'i nümerik teknik ve geometrik teknik ile sonuçlandırma girişiminde bulunsa da bunların ikisi de yanlış uygulanmıştır. Nümerik teknikteki temel sorun doğrudan ispat yaklaşımıyla gösterilmek istenen bir durumun öğretmen tarafından örnekler yoluyla kanıtlanmak istenmesi olarak açıklanabilir. Bu tekniğin yerine burada bir fonksiyonun bire bir fonksiyon belirtmesine ilişkin cebirsel kuraldan (f fonksiyonu bire birdir ⇔ ∀x∈R için $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$) yararlanılabilirdi. Benzer şekilde geometrik teknikte kullanılan görevde verilen fonksiyonun grafiğinin yanlış çizildiği gözlenmiştir. Ayrıca yatay doğru testinin de yanlış biçimde açıklandığı belirlenmiştir. Görüldüğü üzere, bu görevde öğretmen ne teknikleri doğru bir şekilde uygulayabilmiş ne de tekniklerde yer alan kavramlara ilişkin teknolojik açıklamaları doğru olarak verebilmiştir. Bu doğrultuda gerçekleştirilen didaktik prakseoloji bileşenleri büyük ölçüde hatalı ve eksik biçimde uygulanmıştır.

Bir fonksiyondan simetri dönüşümleri yoluyla başka fonksiyonlar elde edilmesine ilişkin görev 2'yi öğretmenin sadece cebirsel teknikle tamamlamıştır. Bu görevi öğretmenin görüşmelerde tekrar sorulduğunda geometrik tekniklerle de tamamlaya bildiği belirlenmiştir. Ancak bu tekniğin üretilmesi sürecinde dönüşümleri uygulamada belli düzeyde öğretmenin zorlandığı gözlenmiştir. Öğretmenin geometrik tekniği kullanmamasında cebirsel tekniği daha kolay uygulayabilmesi neden olarak gösterilebilir.

Günlük yaşam probleminin fonksiyonel ifadesinin bulunmasını içeren görev 3'ü öğretmenin önce geometrik ve sonra cebirsel teknikle sonuçlandırma girişiminde bulunduğu ama teknikleri tamamlayamadığı görülmektedir. Öğretmene bu görev daha sonra tekrar sorulmasına rağmen öğretmen yine herhangi bir teknik üretememiştir. Bu anlamda günlük yaşam problemlerinde bileşke işlemi içeren sözel problemleri öğretmen tamamlayabilecek bir teknik geliştirememiştir. Bu durum öğretmenin günlük yaşamda fonksiyonel ilişkiler içeren bazı durumların farkında olmadığı şeklinde yorumlanabilir.

Son olarak bir fonksiyonun ters görüntüsünün bulunmasını içeren görev 4'te öğretmen dört teknik üretmiştir. Ancak son iki teknik birinci teknikle benzer nitelik taşımaktadır. Bu yüzden burada öğretmenin gerçekte iki farklı teknik kullandığı belirlenmiştir. Birinci teknikte öğretmen fonksiyonun tersini bulduktan sonra fonksiyonun ters kuralında belli bir değerin görüntüsünü bulmuştur. Burada öğretmen fonksiyonun tersini bulma sürecinde değişken değiştirme işlemini sınıf uygulamalarıyla benzer bir şekilde anlamsız bir biçimde gerçekleştirmiştir. Ayrıca fonksiyonun bire bir ve örten olduğuna ilişkin bir teknolojik açıklama da yapmamıştır. İkinci teknikte $f(x)=y$ ancak ve ancak $f^{-1}(y)=x$ eşleme kuralından yararlanılarak görev tamamlanmıştır. Burada da benzer şekilde f fonksiyonunun bire bir ve örten olmasına ilişkin bir açıklama yapılmamıştır. Dolayısıyla teknolojik anlamda didaktik prakseoloji eksik bir şekilde verilmiştir.

Tuna öğretmenin görevlerin tamamlanmasında teknik geliştirmede bazı tekniklerle ilgili zorluklar yaşadığı ve teknolojik açıklamaları eksik bir şekilde verdiği görülmektedir. Ayrıca verilen görevlerde ürettiği prakseolojiler ile sınıf uygulamalarında gerçekleştirdiği didaktik prakseolojilerinin büyük ölçüde benzer şekilde ortaya çıktığı belirtilebilir.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç

Çalışmada matematik öğretmenlerinin program değişikliği sürecinde 10. sınıfta fonksiyon konusunu nasıl öğrettiklerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bunun için Didaktiğin Antropolojik Teorisi referans alınmış ve teorinin temel analiz yöntemi prakseolojik analizden yararlanılmıştır. Prakseolojik analizlerin daha iyi anlaşılması ve sağlam temellere oturtulması için ilk olarak fonksiyon konusu bağlamında programlardaki değişimin (2005 programından 2013 programına geçiş) ekolojik analiz yöntemiyle ortaya çıkarılması kararlaştırılmıştır.

Öğretmenlerin didaktik prakseolojileri daha detaylı analizlerin yapılabilmesi için 10. sınıftaki tüm fonksiyon konusu yerine çalışma kapsamında önemli olduğu tespit edilen fonksiyonların simetri dönüşümleri ile bileşke ve ters fonksiyon alt başlıkları incelenmiştir. Öğretmenlerin didaktik prakseolojileri ve gerçekte sahip oldukları prakseolojiler, bu alt başlıklarda gerçekleştirilebilecek muhtemel prakseolojiler ile karşılaştırılarak ortaya çıkarılmıştır. Ayrıca bu alt başlıklarda öğretmenlerin didaktik prakseolojilerini oluşturma süreçlerinin ortaya çıkarılabilmesine yönelik didaktik anlar belirlenmeye çalışılmıştır.

5.1.1. Program değişikliğinin doğurduğu ekolojik sorunlar ve öğretmenlerin bu değişikliğe ilişkin algıları ile ilgili sonuçlar

Çalışmanın bulguları, 2005 programından 2013 programına geçişte fonksiyon konusunun öğretiminde süregelen yaklaşımının önemli ölçüde değiştiğini ve buna bağlı olarak kavramın öğretim programındaki ekolojisinde önemli değişiklikler oluştuğunu göstermektedir.

Fonksiyonların programda yer aldığı sınıflar, inşa edildiği konular ve kullanımına ilişkin değişiklikler ekolojisinin değiştiğini göstermektedir. Fonksiyon konusu 2005 programında mantık, kümeler ve bağıntı konuları temelinde ilk kez 9. sınıfta öğretilmekte ve 12. sınıfta belli ölçüde tekrarlandıktan sonra özel tanımlı fonksiyonlarla öğretimi sürdürülmektedir. 2013 programında bağıntı kavramının programdan kaldırılmasıyla fonksiyonlar konusunun denklemler ve eşitsizlikler ile küme konuları üzerine inşa edildiği görülmektedir. 2013 programında 9. sınıfta genel bir giriş yapılan fonksiyonların 10. sınıftan itibaren araç olarak kullanılmaya başlandığı görülmektedir. Bu amaçla, programda fonksiyonların simetri dönüşümlerine özel bir yer ayrıldığı anlaşılmaktadır.

Simetri dönüşümleri ile kavramın grafik ve denklem boyutları ön plana çıkarılmış ve bu boyutların problem çözümlerinde etkin bir biçimde kullanılması amaçlanmıştır.

Bu bağlamda 2013 programında yapılan değişiklikler fonksiyon kavramının öğretimi için bir paradigma değişimi olarak nitelendirilmiştir. Bununla birlikte, 2013 programında fonksiyonların araç olarak kullanımında fonksiyonların simetri dönüşümleri alt başlığında ekolojik açıdan tutarsızlıklar olduğu görülmektedir. Fonksiyonların simetri dönüşümleri, geometri programının bir öğrenme alanı olarak matematik programına dahil edilmesinin bir ürünü olarak da düşünülebilir. Programda simetri dönüşümlerinin temelleri 11. sınıfta yer alırken, bu dönüşümlerin fonksiyonların grafiklerine uygulanarak yeni fonksiyonların grafiklerinin elde edilmesi 10. sınıfta yer almaktadır. Ayrıca bu kazanım kapsamında bazı dönüşümlerin (afin dönüşümler) programda temellerine yer verilmemekte, ancak fonksiyonların simetri dönüşümleri kapsamında örtük şekilde yer almaktadır.

Öğretmenlerin didaktik prakseolojilerinde bir diğer ekolojik sorun 10. sınıfta fonksiyon öğretiminde konu alt başlıklarının sıralanmasında ortaya çıkmıştır. Programda bir fonksiyonun tersinin bileşke işlemi üzerinden gerçekleştirilmesi istenirken, öğretmenler konu alt başlıklarının sıralanmasında çoğunlukla önce ters fonksiyonu sonrasında bileşke işlemini anlattığı tespit edilmiştir. Ayrıca hiçbir öğretmen fonksiyonun tersini bileşke işlemi üzerine kurmamıştır. Bu durum konu içi alt başlıklarının sıralamasının da bazen ekolojik sorunlara neden olabileceğini göstermektedir.

Çalışmanın sonuçları diğer yandan, öğretmenlerin bu yeni ekolojiyi tam olarak algılayamadıklarını ve öğretim içeriklerini bu yeni ekolojiyi dikkate alarak planlamadıklarını göstermektedir.

Öğretmenlerin bu ekolojik değişim ile ilgili sınırlı düzeyde farkındalıkları olduğu belirlenmiştir. Öğretmenlerin bağıntı konusunun programdan çıkarılması (Tuna öğretmen hariç), simetri dönüşümlerinin programa dahil edilmesi, fonksiyonların parçalanarak 9 ve 10. sınıflarda öğretilmesi, grafik çiziminin 9. sınıfa taşınması gibi durumlara ilişkin bilgilerinin olduğu tespit edilmiştir. Ancak programda olmamasına rağmen Arda ve Tuna öğretmenler bağıntı kavramını öğrettikten sonra fonksiyonları bu kavram temelinde öğretmişlerdir. Ayrıca fonksiyonun sadece özel bir bağıntı olduğu şeklindeki baskın yaklaşımı öğretmen görüşleri de desteklemektedir. Yine öğretmenler değişikliklere ilişkin görüşlerinde konunun parçalanarak farklı sınıflarda öğretilmesinin konunun öğretimini değiştirmediğini beyan etmişlerdir. Buradan öğretmenlerin fonksiyon konusuyla ilgili ekolojik değişikliği bir paradigma değişimi olarak görmedikleri ve bu doğrultuda öğretim yaklaşımlarını değiştirmedikleri ve alışık oldukları yaklaşımları devam ettirdikleri görülmüştür. Öğretmenlerin görüşlerinden bu değişikliklerin nedenleri konulardaki yoğunluğun azaltılması, konuların parçalanarak daha kolay öğretilmesi ve matematik başarısının arttırılmak istenmesi şeklinde ortaya çıkmıştır.

Öğretmenlerin program değişikliğinde öğretim yaklaşımlarında yaptıkları değişiklik, kendi notlarını terk ederek, programın çerçevesinde hazırlandığını düşündükleri bir ders kitabını takip etmek şeklinde ortaya çıkmıştır. Bu doğrultuda öğretmenler fonksiyon öğretimlerinde kitaba aşırı bağlı kalmışlardır.

5.1.2. Fonksiyon konusunda öğretmenlerin didaktik prakseolojilerine ilişkin sonuçlar

Çalışmanın bulguları, öğretmenlerin fonksiyon konusuyla ilgili didaktik prakseolojilerinin bileşenlerinin birçoğunda eksiklikler olduğunu ve bu eksikliklerin büyük bir bölümünün yukarıda belirlenen ekolojik sorunlardan kaynaklandığını göstermektedir.

Öğretmenlerin didaktik prakseolojileri incelendiğinde fonksiyon öğretiminde prakseolojik bileşenler (görev, teknik, teknoloji ve teori) eksik bir şekilde ortaya çıkmıştır. *Görevler*, birbiriyle çok az ilişkili olarak, genellikle parçalanmış şekilde verilmiş ve bazı görevlerde verilen fonksiyon grafiklerinin ekolojik sorunlara neden olduğu görülmüştür. Simetri dönüşümlerinde öğretmenlerin seçtiği görevlerde parabol grafiklerinin (orijinden geçmeyen) kullanılması bu ekolojik sorunlardan biridir. Parabol konusu bu sınıf düzeyinde henüz öğretilmemiştir. Bu ekolojik sorun özellikle Burak öğretmen durumunda daha belirgin olarak ortaya çıkmıştır. Buradaki ekolojik sorunun nedeni görevlerin öğretmenler tarafından üretilmek yerine genellikle ders kitabında verildiği şekilde programdaki kazanım düşünülmeden kullanılmasıdır.

Öğretmenler fonksiyonların simetri dönüşümlerindeki görevleri çoğunlukla geometrik tekniklerle tamamlarken, bileşke ve ters fonksiyon alt başlığındaki görevleri cebirsel tekniklerle sonuçlandırmışlardır. Öğretmenler görüşmelerde bir görevin farklı tekniklerle tamamlanması gerektiğini belirtmelerine rağmen uygulamada çok az görevde bunu gerçekleştirmişlerdir. Öğretmenlerin alternatif tekniklerin kullanılmama nedenleri programı yetiştirme kaygısı, alternatif tekniklerin zaman kaybettirmesi, bazı teknikleri kullanmak istememeleri (örneğin tablo temsilinde nümerik teknik) ve bazı tekniklerle görevleri daha kolay tamamlayacaklarını düşünmeleri (genellikle cebirsel teknik ve kısmen geometrik teknik) ve bunun sonucunda aynı teknikleri kullanma eğiliminde olmaları şeklinde ortaya çıkmıştır. Alternatif tekniklerin kullanılamamasının diğer bir nedeni ekolojik sorunlardır. Örneğin Burak öğretmenin cebirsel temsille verilen ikinci dereceden bir fonksiyonun simetri dönüşümü sonrasında elde edilen fonksiyonun grafiğinin bulunmasına ilişkin görevde simetri dönüşümünün fonksiyonun kuralına etkisi bulunduktan sonra yeni elde edilen ikinci dereceden fonksiyonun grafiğini çizme parabol bilgisi gerektirdiğinden tamamlanamamıştır.

Fonksiyonların bileşkesi ve ters fonksiyon alt başlığındaki görevlerde ise tekniğin birçok aşamasının atlanıldığı görülmektedir. Öğretmenler, tekniği basitleştirme ve daha kolay anlaşılmasını sağlamak amacıyla, tekniğin üzerine inşa edildiği kavramları azaltmaya, tekniğin aşamalarının bir kısmının atlamaya ve matematiksel özellikleri hatalı bir şekilde kullanılmaya ve sonuç olarak tekniği olması gerektiğinden farklı bir şekilde gerçekleştirilmeye yönelmişlerdir. Bu bağlamda öğretmenlerin prakseolojilerinde yer yer *tekniksel kaymalar* tespit edilmiştir. Programlarda ters fonksiyonun bileşke işlemi üzerinden elde edilmesi (MEB, 2005, 2013) istenmesine rağmen bununla ilişkili görevler öğretmenler tarafından farklı şekilde sonuçlandırılmıştır. Programın ters fonksiyonu bileşke işlemi üzerinden öğretilmesini istemesi cebir alanında monoid yapısıyla ilişkilendirilmektedir. Bu ise fonksiyonların öğretiminde önce bileşke işleminin sonra ters fonksiyonun bileşke işlemi üzerine öğretilmesini gerektirmektedir. Ancak öğretmenlerin konu sıralaması incelendiğinde Arda ve Tuna öğretmenlerin önce ters fonksiyonu daha sonra bileşke işlemini öğrettikleri ve Burak öğretmenin bileşke işlemini önce öğretmesine rağmen ters fonksiyonu bileşke işlemi üzerine kurmadığı tespit edilmiştir. Sadece Tuna öğretmen geçmişte fonksiyon tersini bileşke işlemi üzerinden gerçekleştirdiğini belirtmiş, ancak öğrencilerin bu yolu anlamadıkları gerekçesiyle terk ettiğini ifade etmiştir. Öğretmenlerin bir fonksiyonun tersinin kuralını belirledikleri didaktik prakseolojilerde fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta bire bir ve örten olduğuna ilişkin incelemeler yapmaması, ters fonksiyonu bileşke işlemi üzerine inşa etmemesi, değişken değiştirmeyi olması gerektiği şekilde kullanmayarak kısaltmaları ve birleşme özelliğini hatalı bir şekilde kullanmaları tekniksel kaymalara neden olmuştur.

Öğretmenlerin didaktik prakseolojileri teknoloji bileşeni açısından incelendiğinde ise informel açıklamalar dışında bu bileşenin genellikle eksik bir şekilde gerçekleştirildiği görülmektedir. Bu anlamda çalışmada fonksiyonların simetri dönüşümleri alt başlığının ön plana çıktığı görülmektedir. Öğretmenlerin 10. sınıfta fonksiyonların öğretiminde programda yer verilen ekolojik ilişkiler bağlamında yapılabilecek teknolojik açıklamaları terk ederek farklı teknolojik açıklamalar vermeye çalıştıkları görülmüştür. Bu bağlamda, *teknolojik kayma* olarak adlandırılabilecek durumlar meydana gelmiştir. Fonksiyonların simetri dönüşümlerindeki ekolojik sorunun nedeni, dönüşümlerin (izometriler ve afin dönüşümler) temellerinin programda daha ileri sınıflarda (11. sınıfta) öğretilmesidir. Öğretmenlerin genellikle teknolojik açıklamaları bu dönüşümler üzerine inşa etmeye çalıştıkları ancak ekolojik sorunlar nedeniyle bunu başaramadıkları tespit edilmiştir. Ekolojik sorunlar öğretmenlerin teknikleri uygulama sürecinde genellikle öğrencilerin ilk kez karşılaştıkları matematiksel kavramların kullanılmasını zorunlu kılmaktadır. Bu tür durumlarda öğretmenler farklı yaklaşımlar sergilemişlerdir. Burak öğretmen ilk kez karşılaşılan bir kavramı o an öğretme girişiminde bulunmamakta, programda habitatta nerede yer alıyorsa orada öğretilmesi gerektiğini savunmaktadır. Arda öğretmen ise öğrencilerin anlayabileceğini düşünüyorsa o an kavramı öğretme eğilimindedir. Tuna öğretmenin karşılaşılan yeni kavramları açıklamamakla birlikte programda yer alan bazı dönüşümleri (afin dönüşümler) öğrencilerin anlamayacağı düşüncesiyle öğretmediği görülmüştür.

Fonksiyonun tersinin bileşke işlemi üzerinden gerçekleştirilmemesi birçok sorunu da beraberinde getirmiştir. Fonksiyonun tersinin bulunması sürecinde anlamlı olarak kullanılabilecek bileşke işlemine ilişkin özellikleri (birim eleman, birleşme özelliği, fonksiyonun tersi ile bileşkesi, bileşkenin tersi gibi) uygun açıklamalar yapılmadan kullanılmış, hatta bazen bu aşamalar geçilerek görevler tamamlanmıştır. Bu durumlar görevlerin tamamlanmasında tekniklerin niçin geçerli olduğuyla ilgili öğrenci-öğretmen tartışmalarının yaşanmasına neden olmuş ve öğretmenlerin bunların üstesinden gelme için yeterli ve tutarlı açıklama verememeleriyle sonuçlanmıştır. Dolayısıyla didaktik prakseolojilerde teknolojik açıklamalar informel açıklamalarla sınırlı kalmış ve büyük ölçüde eksik olarak verilmiştir.

5.1.3. Öğretmenlerin didaktik prakseolojilerinde didaktik anlara ilişkin sonuçlar

Çalışmanın bulguları, öğretmenlerin didaktik prakseolojilerinde didaktik anların pek çoğunun ortaya çıkmadığını, ortaya çıkan anların pek çoğunun da eksik veya yetersiz olarak yaşandığını göstermektedir.

Öğretmenlerin öğretim sürecinde ders kitabında bir görev tipiyle ilgili tekniği doğrudan vererek öğretime başladıkları tespit edilmiştir. Bu durum *görev tipiyle ilk karşılaşılması anı* ile *görev tipinin keşfedilmesi* ve buna ilişkin *bir tekniğin geliştirilmesi anı*nı "paypas" etmeleri olarak yorumlanabilir. Bu yaklaşımın, öğretime bir görevle başlayarak diğer görevlerin aşamalı bir şekilde konunun öğretim sürecinde ortaya çıkmasını, görevlerin birbiriyle ilişkili ve birbirini destekleyecek biçimde organize bir şekilde sunulmasını engellediği belirlenmiştir. Ayrıca benzer görevlerin aynı görev tipinde sınıflandırılarak onların tamamlanmasına yönelik bir teknik geliştirmeyi de anlamsız kıldığı tespit edilmiştir. Bunun nedeni program değişikliğinden dolayı öğretmenlerin öğretimlerini ders kitabına aşırı bağlı biçimde gerçekleştimeleridir. Diğer yandan çok az sayıda da olsa bazı görevlerde ilk karşılaşma anı ile didaktik anlara başlandığı durumlar da mevcuttur.

Teknolojik teorik çevreyi oluşturma anı simetri dönüşümlerinde ekolojik sorunlar nedeniyle ve ters fonksiyonlarda cebir alanıyla ilişki kurulmaması nedenleriyle eksik bir şekilde gerçekleşmiştir. Burada sadece Arda öğretmenin yansıma dönüşümlerinde nokta simetrisinden hareketle kabul edilebilir düzeyde teknolojik teorik çevreyi oluşturma anına ilişkin açıklamalar verdiği belirlenmiştir. *Teknikler üzerine çalışma anı* bazı görevlerde gözlenmekle birlikte fonksiyon konusunun öğretimi genel olarak düşünüldüğünde çok az sayıda görevde ortaya çıktığı görülmüştür. Öğretmenlerin simetri alt başlığında geometrik teknikleri ve diğer alt başlıklarda cebirsel teknikleri baskın bir şekilde kullanmaları bu teknikleri kurumsallaştırma eğiliminde olduklarını göstermektedir. Ayrıca bazı görevlerde kullanılan tekniklerin daha önceki yıllarda kurumsallaştırılan teknikler olması *kurumsallaştırma anı*nın farklı bir kullanımına işaret etmektedir.

Tüm bu sorunlar altında öğretmenlerin fonksiyon konusunun öğretim sürecinde didaktik anlar büyük ölçüde eksik bir şekilde gerçekleştidiğinden anlamlı bir öğretim sergilenememiştir.

5.1.4. Öğretmenlerin fonksiyon konusunda gerçekte sahip olduğu didaktik prakseolojilere ilişkin sonuçlar

Çalışmanın bulguları, öğretmenlerin fonksiyon konusunda gerçekte sahip olduğu didaktik prakseolojilerin sınıf uygulamalarında tespit edilenlerden daha kapsamlı olduğunu göstermekle birlikte tam anlamıyla yapılandırılmış olmadıklarını göstermektedir.

Öğretmenlerin gerçekte sahip olduğu prakseolojilerin sınıf uygulamalarının ötesinde olduğu belirlense de didaktik prakseolojilerin farklı bileşenlerinde sınıf uygulamalarında tespit edilen eksikliklerin benzer şekilde ortaya çıktığı belirlenmiştir. Ayrıca bazı teknikleri kullanmakta öğretmenlerin eksiklikleri olduğu ve bazılarını da o an hatırlayamadıklarını ancak bunları bildiklerini belirtmişlerdir.

Bir fonksiyonun bire bir olduğunu bulmaya ilişkin görevi Burak ve Arda öğretmenler hem cebirsel hem de geometrik teknikle tamamlamıştır. Burada sınıf uygulamalarında her iki öğretmen de geometrik tekniği kullandıklarını (yatay doğru testi) belirtmiş, cebirsel tekniği ispat içermesi nedeniyle kullanmadıklarını belirtmişlerdir. Bu görevi Tuna öğretmen iki farklı yoldan tamamlamayı denese de bunların ikisinin de hatalı olduğu tespit edilmiştir. Diğer taraftan öğretmenlerin sınıf gözlemleri incelendiğinde bir fonksiyonun bire bir olduğunun belirlenmesinde bütün öğretmenlerin şema temsiliyle verilen bir fonksiyonda eşleme tekniğiyle fonksiyonun bire bir olduğunu belirledikleri tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu görevde öğretmenlerin gerçekte sahip oldukları didaktik prakseolojiler sınıfta sergiledikleri ile farklılaşmaktadır.

Fonksiyonların simetri dönüşümleri ile ilgili görevi öğretmenler hem cebirsel hem de geometrik tekniklerle tamamlamışlardır. Burada özellikle geometrik tekniğin sınıf uygulamaları ile benzer olarak teknolojik açıdan eksik bir şekilde gerçekleştirildiği görülmektedir. Son olarak bir fonksiyonun ters görüntüsünün bulunmak istendiği görevi öğretmenler 4 farklı teknikle tamamlamıştır. Bunlar incelendiğinde her öğretmen iki farklı cebirsel teknik, bir nümerik ve bir orantısal ya da geometrik teknik kullandığı tespit edilmiştir. Burada cebirsel teknikler öğretmenlerin sınıf uygulamalarıyla benzer şekilde ortaya çıkmıştır. Hatta bu benzerlik ters fonksiyonun kuralının elde edilmesinde değişken değiştirmenin anlamsız biçimde gerçekleştirilmesi ve cebir alanıyla ilişki kurulmaksızın fonksiyonun tersinin belirlenmesi gibi ortak yönlere sahiptir.

5.2. Tartışma

Pek çok araştırmada ortaya konulduğu üzere (Malik, 1980; Denbel, 2015; Markovits vd., 1986) fonksiyon kavramının öğretiminde sıklıkla değişikliğe gidilmektedir. Bu değişikliklerin altında yatan nedenlerden biri, uzun süre etkisini koruyan, fonksiyonun özel bir bağıntı olarak öğretilmesi yaklaşımının öğrenciler için oldukça soyut kalması, açık olmaması ve denklem anlamını yeterince yansıtmamasıdır (Eisenberg, 2002; Markovits vd., 1986; Malik, 1980).

Bu bağlamda ülkemizde 2013 program değişikliğinde fonksiyon kavramının öğretiminde önemli değişiklikler gözlenmiştir. 2013 program değişikliğinde bağıntı konusu programdan kaldırılmış ve fonksiyon kavramını besleyen konular fonksiyonun değişken anlamını besleyecek şekilde düzenlenmeye çalışılmıştır. Böylelikle reel fonksiyon temelli yaklaşıma geçilmiş ve üniversite matematiğinin temellerini oluşturan konularla daha uyumlu bir fonksiyon kavramı öğretimi hedeflenmiştir.

Fonksiyon konusuyla ilgili değişikliğin bir diğer nedeni problem çözümlerinde fonksiyonun bir modelleme aracı olarak kullanılmak istenmesidir. Ancak öğrencilerin fonksiyon kavramıyla ilgili yerleşik düşünceleri bu kullanımı zorlaştırdığı söylenebilir. Öğrencilerin fonksiyonların denklem anlamına sahip olmamaları ve fonksiyonları iki küme arasında eşleme olarak algılamaları nedeniyle problemlerde bir modelleme aracı olarak kullanmakta zorlanmaktadır (Erdogan, 2010). Bu eksikliğin önlenmesine yönelik olarak 2013 program değişikliğinde 10. sınıfta fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusunda günlük yaşam durumlarının fonksiyonlarla ifade edilmesine yönelik kazanımın programa dahil edildiği görülmektedir.

Bu çalışmada öğretmenlerin yukarıdaki değişimleri iyi okuyamadıkları ve fonksiyon kavramıyla ilgili değişiklikleri bir paradigma değişimi olarak görmedikleri ve fonksiyonlar konusunun öğretimlerinde çok az değişiklik yaptıkları belirlenmiştir. Bu durumu destekleyecek şekilde Wilson ve Goldenberg (1998), öğretim program değişikliklerinde öğretmenlerin öğretim durumlarında değişiklik yaptıklarını düşünmelerine rağmen bir uzman perspektifiyle öğretim yaklaşımları incelendiğinde gerçekte çok az değişiklik yapmış olabileceklerini belirtmiştir. Öğretmenlerin fonksiyonları bağıntı temelinde verme eğiliminde olmaları ve konunun ekolojisi büyük ölçüde değişmesine rağmen aynı şekilde konuyu öğretmeye çalışmaları bunun göstergeleridir. Bunun altında yatan nedenlerden biri öğretmenlerin değişiklikle ilgili yüzeysel ve sınırlı bir görüşe sahip olmaları şeklinde açıklanabilir (örneğin yoğunluğun azaltılması). Öğretmenlerin fonksiyon konusunda öğretim yaklaşımlarını değiştirmemelerinin diğer bir nedeni programlarda köklü değişiklikler yapıldığında öğretmenlerin alan uzmanlarından detaylı ve derinlemesine bir eğitim almaması ve programla ilgili gerektiği şekilde bilgilendirilmemesi şeklinde açıklanabilir. Program değişikliklerinde öğretim materyallerinin kullanımında öğretmenlerin uzman yardımına gereksinim duyabilecekleri belirtilmektedir (Remillard & Geist, 2002; Ball, 1997). Bunun sağlanmaması durumunda her öğretmenin programı farklı anlayacağı, farklı uygulayacağı ve bunun sonuncunda elde edilen ürünün programın gerçekleştirmek istediği hedefle örtüşmeyebileceği söylenebilir.

Matematik dersi öğretim programlarında yapılan değişikliklerde konular bir anlam bütünlüğü içerisinde verilmek istenmesine rağmen uygulamada bunun farklı yansımaları olabilmektedir (Güvenç, 2015). Erdoğan (2006), Fransa'da lise birinci sınıf seviyesinde fonksiyon konusunun belli bir anlam bütünlüğünden uzak bir şekilde öğretildiğini tespit ettiği çalışmasında, bu sınıf düzeyinde ortaya konulan koşulların öğretim sürecinde öğretmenlerin, öğrencilerin bireysel çalışmalarını destekleyecek bilişsel mekanizmaları anlamlı bir şekilde sunamamalarına neden olduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde, 2013 program değişikliğiyle fonksiyon kavramının öğretiminde özellikle simetri dönüşümleri alt başlığında tespit edilen ekolojik sorunlar nedeniyle teknolojik açıklamalar olmaksızın didaktik prakseolojilerin inşa edildiği ve bu durumun öğretim için gerekli bilişsel araçların sunulamamasıyla sonuçlandığı söylenebilir.

Yukarıdaki sonuçların belirli oranda öğretmenlerin ders kitaplarını kullanım biçiminden kaynaklandığı düşünülmektedir. Watson ve Harel (2013), İngiltere'de öğretmenlerin çok katı olmayacak şekilde ders kitaplarını kullanma eğiliminde olduklarını belirtmiştir. Bu çalışmada ise öğretmenlerin fonksiyon konusunun öğretimini ders kitabına aşırı bağlı bir şekilde yürüttükleri söylenebilir. Öğretmenlerin deneyimli olmaları ve 10. sınıfta kendi notları olmasına rağmen bunları kullanmadıkları görülmektedir. Öğretmenler, kullandıklarını belirtmelerine rağmen MEB'in öğrencilere ücretsiz dağıttığı kitabını kullanmamışlardır. Öğretmenlerin farklı nedenlerle (programa uygun, sınava uyumlu, öğrenci seviyesine uygun gibi) dönemin başında program çerçevesinde özenle hazırlandığını düşündükleri özel yayınların ders kitaplarını belirledikleri ve bunları öğretim sürecinde ağırlıklı olarak kullanma eğiliminde oldukları görülmektedir. Erdoğan (2006)'nın çalışması, reform dönemlerinde tecrübeli öğretmenlerin dahi programın beklentilerini anlayamadıklarından, bu beklentileri tam olarak yerine getirememe endişesinden dolayı ders kitaplarına aşırı bağlı kaldıklarını göstermektedir. Bu çalışmadaki öğretmenlerin de benzer bir durum içinde oldukları söylenebilir.

Bu çalışmada öğretmenlerin matematiksel eylemleri didaktik prakseolojiler ve bunları oluşturma süreçleri şeklinde iki boyutta incelenmiş ve bunlarla ilgili birçok eksik tespit edilmiştir. İlk olarak görevler amaçlı bir şekilde seçilmemiş ve birbiriyle ilişkilendirme yapılamadan sunulmuştur. Bunun nedeni görevlerin öğretmen tarafından üretilmemesi ve ders kitabında verildiği şekliyle kullanılması olarak açıklanabilir. Bir didaktik prakseolojide ilk görevin seçimi büyük önem taşımaktadır. Bu görev bireyi başka bir göreve ve elde edilen yeni görev de başka yeni göreve ulaştırmalıdır (García vd., 2006). Burada özellikle bazı görevler için hangi amaçla sunulduklarının öğrenci tarafından o an için anlaşılmamasının mümkün olmaması dikkat çekmektedir. Bu anlamda görevlerin, kitapta verilen bilgiler dışında, öğretmen için, bir *var oluş nedeni* (*raison d'être)* olmadığı görülmektedir (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997).

Prakselojinin teknik bileşenine gelince, öğretmenlerin çoğu görev tipinde teknikleri olması gerektiği şekliyle uygulamak yerine bilinçli kısaltmalar yaparak ve bazı aşamaları atladıkları tespit edilmiştir. Bunun nedeni okulun ulusal sınavlarda başarısız olması kaygısıyla öğretmenlerin ilgili tekniği öğretmek yerine bu tekniğin formüle edilmiş şeklini ya da kısaltılmış biçimini vererek sınavlarda öğrencilerin karşılaştıkları görevleri tamamlamak için daha hızlı yollar sunmak olduğu belirtilebilir. Bütün öğretmenlerin fonksiyon öğretimlerinde sınıf uygulamalarında özel yayın evlerinin ders kitaplarını kullanmaları bu çıkarımı güçlendirmektedir. Bu ders kitaplarının özel dershanelerin yayınları olduğu ve öğrencileri arasınıftan itibaren üniversiteye hazırlamak amacıyla hazırlandığı bilinmektedir. Türkiye'de üniversite sınav sisteminin bir sonucu olarak ortaya çıkan dershane gerçeğine dikkat çeken Baştürk (2003), bu kurumlarda matematiksel kavramların özü öğretilmek yerine kavramların özünden koparılmış biçimde araç olarak kullanımlarının öğretildiğini belirtmiştir. Baştürk söz edilen çalışmada, bu problematik durumu rasyonel bir fonksiyonun tersinin bulunması görevi için örnekleyerek, dersane sisteminde ters fonksiyon kavramı ile ilgili öğrenmeler yerine tekniğin formüle edilmiş biçiminin kullanımının ön plana çıktığı belirtilmektedir. Bu tür yaklaşımların öğrencilerin matematiksel kavramlar arasında bağlantılar kurmasını engellediği, matematik yapmalarını ve matematiği anlamlı olarak öğrenmelerini zorlaştırdığı söylenebilir.

Tekniklerle ilgili diğer önemli husus, öğretmenlerin çoğunlukla ele aldıkları görevi tek bir teknikle sonuçlandırdıkları ve bu anlamda cebirsel tekniklerin egemen bir konumda olduğu görülmektedir. Bu yaklaşımın ortaya çıkmasında fonksiyonlar konusunda cebirin ön planda olmasıyla cebirsel tekniklerin rahatlıkla kullanımına olanak sağlaması, öğretmenlerin cebirsel tekniklere daha hakim olmaları ve öğrencilerin cebirsel tekniklerle daha kolay öğrenmeleri etkili olmuş olabilir. Dolayısıyla öğretmenlerin cebirsel teknikleri baskın bir şekilde kullanma eğiliminde oldukları söylenebilir. Bu çıkarımı destekleyecek şekilde birçok araştırmacının farklı konularda ve disiplinlerde cebirsel tekniklerin baskın olduğunu ortaya koydukları görülmektedir (Sağlam, 2004; Arslan, 2005; Selden, vd., 1994; Baştürk, 2006).

Bu çalışmada fonksiyonların simetri dönüşümlerinde öğretmenlerin didaktik prakseolojilerinde teknolojik kayma olarak ifade edilen bir durum tespit edilmiştir. Benzer durum daha önce Barbé vd. (2005) çalışmasında İspanya'da öğretmenlerin limit konusuyla ilgili prakseolojilerinin incelendiği çalışmada da gözlenmiştir. Burada programda limit cebiri ve limit topolojisi olarak tespit edilen iki matematiksel prakseoloji olduğu ancak programda limit cebirinin pratik bloğuna yer verilirken, bilgi bloğunda bununla ilgili teorik blok yerine limitlerin topolojisine ait bilgi bloğunun yer aldığı belirtilmiştir. Bu çalışmada da teknolojik kayma olarak ifade edilen durumun programın ekolojisi ile ilgili olduğu düşünülebilir.

Matematiksel eylemlerin diğer bir boyutunu oluşturan didaktik anların sıralı olmadıkları ve öğretim sürecinde farklı yoğunlukta da olsa her birinin bir şekilde yaşanması beklenmektedir (García vd., 2006). Bu çalışmada öğretmenlerin ders kitaplarında önce tekniğin ifadesine ilişkin bilgileri verdikleri ve sonra bununla ilgili görevleri sıraladıkları görülmektedir. Bu yaklaşım *ilk karşılaşma anı* ve *görev tiplerini keşfederek bunlara ilişkin teknik geliştirme an*ını iptal etmiştir. Bunun öğretmenlerin fonksiyon öğretimlerini ders kitaplarına aşırı bağlı bir şekilde sürdürmeleri nedeniyle ortaya çıktığı düşünülmektedir. Bu yaklaşımın öğretimde önemli bir yere sahip olan öğrencilerin matematiksel nesneler üzerine düşünmelerini engellediği ve matematiksel nesnelerin içselleştirilmeden anlamsız bir şekilde kullanma durumunu doğurduğu söylenebilir.

Ders kitabında tekniğin doğrudan verilmesinin *teknolojik teorik çevrenin oluşturulması an*ının ortaya çıkmasına ilişkin açıklamaları da engelediği söylenebilir. Bu tür açıklamalar öğrenciler için gizli olsa da öğretmenler tarafından ortaya çıkarılabilecek niteliktedir. Tekniklerin uygulanma sürecinde bazı aşamalarda öğrenciler teknikte anlamlandıramadıkları süreçlerle ilgili öğretmenlere sorular yöneltmişlerdir. Bu sorular teknolojik açıklamalar yapılarak giderilebilecek türdendir. Bu anlamda bu anlar teknolojik teorik çevre anının ortaya çıkmak için bulduğu bir açıklık olarak değerlendirilebilir. Ancak öğretmenler bu tür durumları çeşitli nedenlerle (zaman kaybettirmesi, bazen ispat gerektirmesi gibi) değerlendirmemişlerdir. Ball, Bass ve Hill (2004) çalışmalarında, matematiksel bilgiyi açmak için öğretmenlerin sınıf uygulamalarında üstesinden gelmek zorunda oldukları bir görevler listesi oluşturmuşlardır. Bu liste görevlerin farklı tekniklerle çözülmesi, matematiksel kavramların tanımlarının öğrenciler için doğru ve kullanışlı olanının tercih edilmesi gibi durumları içermektedir. Huillet (2009) bunun Chevallard'ın teorisinde teknolojik teorik çevreyi oluşturma ve teknikler üzerine çalışma anına denk geldiğini belirtmiş ve bunun önemine vurgu yapmıştır. Diğer taraftan Chevallard (1999), teknolojik teorik çevreyi kurma anının diğer bütün anlarla ilişkisi olduğunu belirtmiştir. Bunu destekleyecek şekilde, bu çalışmada öğretmenlerin didaktik prakseolojilerini oluşturma sürecinde didaktik anlarla ilgili birçok eksiklerinin bulunmasının teknolojik teorik çevre anının eksik bir şekilde ortaya çıkmasından kaynaklandığı düşünülebilir.

Öğretmenlerin sınırlı sayıda da olsa *kurumsallaştırma anı*nı kullandıkları görülmektedir. Bunların genellikle öğrencilerin daha önce bildikleri bir prakseolojinin (örneğin 9. sınıfta doğrusal fonksiyonun grafik çizimini bilme) kullanılmasında ya da bir görev tipinin belli teknikle tamamlanacak şekilde sınırlandırılmak istendiğinde ortaya çıktığı söylenebilir. Tüm bunlar birlikte düşünüldüğünde öğrencilerin anlamlı öğrenmeler gerçekleştirmelerine yönelik öğretmenlerin didaktik prakseolojilerini oluşturma süreçlerinde öğretim durumlarının organizasyonunu eksik bir şekilde yapılandırdıkları görülmektedir.

Son olarak, öğretmenlerin gerçekte sahip oldukları bazı prakseolojilerin sınıf ortamında ortaya çıkmadığı görülmüştür. Bu prakseolojiler incelendiğinde özellikle ispat içeren durumların öğretmenler tarafından sınıf ortamında kullanılmak istenmediği anlaşılmaktadır. Bu durum öğretmenlerin ispat içeren durumları ortaöğretim düzeyinde öğrencilerin anlamayacağı ve bunların lisans düzeyinde ele alınması gerektiği şeklinde bir algı doğurmuş olabilir. Ancak programda "Programın uygulanmasında matematik öğrenme aktif bir süreç olarak ele alınmalı; öğrencilere araştırma yapma, matematiksel ilişkileri keşfetme ve ispatlama, modelleme ve problem çözme, çözüm ve yaklaşımları sınıf ortamında paylaşma ve tartışma olanakları sunulmalıdır (MEB, 2013)." şeklindeki açıklamada ispat matematiksel beceriler arasında sayılmaktadır. Programda görevlerde ispat kullanılması teşvik edilmesine rağmen öğretmenlerin buna ilişkin olumsuz bir tavır almaları, sınıf uygulamalarında didaktik prakseolojilerinde buna yer vermemeleri yine öğretim programının amaç ve içeriğinin tam anlaşılamaması olarak yorumlanabilir.

5.3. Öneriler

Bu tezde köklü bir değişim yapılan matematik dersi öğretim programında ortaöğretim düzeyinde temel bir konu olan fonksiyon konusu bağlamında öğretmenlerin didaktik prakseolojilerinden elde edilen sonuçlardan yola çıkarak şu önerilerde bulunulabilir.

- Çalışmanın sonuçları, programda önemli yer tutan kavramların öğretimi ile ilgili yapılan değişikliklerin ne kadar hassas ve zor bir iş olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda, program değişikliklerinin daha geniş kapsamlı düşünülmesi ve özellikle ekolojik sorunlara daha büyük bir önem verilmesinin gerektiği anlaşılmaktadır.
- Matematik dersi öğretim programında yapılan değişikliklerde matematiksel kavramlar arasındaki ekolojik ilişkiler alan uzmanları tarafından belirlendikten sonra öğretmenlerle bilgilendirme toplantıları ve çalıştaylar düzenlenerek ekolojik sorunların farkında olmaları ve öğretim içerik ve yaklaşımlarını bu doğrultuda planlamaları sağlanabilir.
- Öğretmenlerin zümre toplantılarında herhangi bir konunun öğretiminde yer verilecek görevler, görevlerin birbiriyle ilişkisi, bu görevlerin çözümünde kullanılan teknikler, alternatif tekniklerin neler olabileceği ve bu doğrultuda sunulabilecek teknolojilerin konuşulması teşvik edilerek zümrelerin daha aktif çalışması sağlanabilir. Ayrıca zümrelerin bu doğrultuda aktif kullanımının sağlanmasına yönelik alan uzmanlarından yardım alınabilir.
- Bu çalışmada elde edilen sonuçlar doğrultusunda fonksiyonların öğretiminde DAT çerçeve olarak kullanıldığı bir eylem araştırması tasarlanabilir. Bu sayede fonksiyonlar konusunun öğretimi bağlamında DAT'ın öğretmenlerin ve öğrencilerin matematiği kavrayışlarına katkısı ortaya çıkarılabilir.
- Türkiye'de matematik programlarının değişim sürecinde (2005 programından 2013 programına geçişte) bu çalışmada fonksiyonlar konusu bağlamında ekolojik sorunlar ve öğretmenlerin prakseolojileri incelenmiştir. Ancak 2018 yılında matematik programının tekrar değiştiği görülmektedir. Bu doğrultuda programdaki bu değişikliğin (2013 programından 2018 programına geçiş) fonksiyon kavramının ekolojisinde ve fonksiyonların öğretiminde ne tür yeni durumlar ortaya çıkardığı (öğretmenler ve öğrenciler açısından) araştırılabilir.

KAYNAKÇA

Adu-Gaymfi, K. (2007). *Connections among representations: The nature of students' coordinations on a linear function task.* Doctoral dissertation. Raleigh: North Carolina State University.

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V. and Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School Science and Mathematics*, 112(3), 159-170.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183-198.

Akkoç, H. (2005). Fonksiyon kavramının anlaşılması: Tanımsal özellikler ve çoğul temsiller. *Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 5(20), 14-24.

Alkan, S., Güven, B. and Yılmaz, Ş. (2017). The types of examples teachers use in teaching function concept. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12 (23), 367-384. Retrieved from http://dergipark.gov.tr/befdergi/issue/30012/304385

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S. and Sriraman, B. (2010). A brief history of mathematics education in Turkey: K-12 mathematics curricula. *ZDM*, 42(5), 429-441.

Arsac G., Chevallard Y., Martinand J. L. and Tiberghien A. (1994) *La transposition didactique à l'épreuve.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Artigue, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lens. *ZDM*, 48(6), 935-939.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a cas environment:The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7,** 245–274.

Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B. and Lenfant, A. (2001). Teaching and learning algebra: Approaching complexity through complementary perspectives. *The future of the teaching and learning of algebra Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, Melbourne: The University of Melbourne, Vol. 1, pp. 21–32. H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, and J. Vincent (Eds.).

Artigue, M. and Houdement, C. (2007). Problem solving in France: Didactic and curricular perspectives. *ZDM*, 39(5-6), 365-382.

Artigue, M. and Winsløw, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en didactiques des mathématiques,* 30(1), 47-82.

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. and Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. *ZDM,* 40(2), 179-188.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. and Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergratduate mathematics education. In A. Schoenfeld, J. Kaput, and E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II, CBMS issues in mathematics education* (pp. 1–32): American Mathematical Society.

Assude, T. (1994). Ecologie de I'object "racine carrée" et analyse du curriculum, *Petit x,* 35, 43-58. http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/35/35x3.pdf

Arslan, S. (2005). *L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S: est-elle viable? Quels sont les enjeux et les conséquences?* Doctoral dissertation. Grenoble I: Université Joseph-Fourier.

Baki, A. (2006). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi* (3 ed.). Trabzon: Derya Kitabevi.

Ball, D. L. (1997). Developing mathematics reform: What don't we know about teacherlearning – but would make good working hypotheses. In S. N. Friel, and G. W. Bright (Eds.), *Reflecting on our Work: NSF Teacher Enhancement in K-6 Mathematics* (pp. 77–111). Lanham: University Press of America.

Ball, D., Bass, H. and Hill, H. (2004). Knowing and using mathematical knowledge in teaching: Learning what matters. *Proceedings of the 12th annual conference of the Southern African Association for Research in Mathematics Sciences and Technology Education,* Cape Town, South Africa: SAARMSTE, pp. 51–65. A. Buffler, and R. Laugksch (eds.).

Barbe´, J., Bosch, M., Espinoza, L. and Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics,* 59, 235–268.

Baştürk, S. (2003). *L'enseignement des mathématiques en Turquie: le cas des fonctions au lycée et au concours d'entrée à l'université* . Doctoral dissertation. Université Paris-Diderot-Paris VII.

Baştürk, S., (2006). Üniversiteye giriş sınavı sorularında fonksiyon kavramı, *Ege Eğitim Dergisi*, 7 (1), 61-83.

Battista, M. T. (1994). Teacher beliefs and the reform movement in mathematics education. *The Phi Delta Kappan,* 75(6), 462-470.

Billington, M. (2009). *Establishing didactical praxeologies: teachers using digital tools in upper secondary mathematics classrooms.* Paper presented at the WG9, Cerme 6 conference, Lyon, France.

Bolea, P., Bosch, M. and Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica,,* 14, 125–133.

Bosch, M. (2012). *Doing Research within the Anthropological Theory of the Didactic: The Case of School Algebra*. Paper presented at the ICMI 12, Seoul.

Bosch, M., Chevallard, Y. and Gascón, J. (2006). *Science of Magic? The use of models and theories in didactics of mathematics.* Paper presented at the Proceedings of the 4th Conference of the European Research in Mathematics Education (February 17 - 21, 2005), Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Bosch, M. and Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin,* 58, 51–63.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. and Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education,* 6(3), 113-133.

Bowman, A.H. (1993). A theoretical framework for research in algebra: Modification of Janvier's "Star" Model of Function Understanding. Paper presented at *The Annual Meeting of The American Educational Research Association*, Atlanta GA, April 12-16.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. and Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics,* 23(3), 247-285.

Bremigan, E. G., Bremigan, R. J. and Lorch, J. D. (2011). *Mathematics for secondary school teachers*. Washington: MAA Inc.

Breslich, E. R. (1932). Measuring the development of functional thinking in algebra. In W. D. Reeve and V. Sanford (Eds.), *The Teaching of Algebra* (pp. 93–118). New York, NY: National Council of Teachers of Mathematics, Teachers College, Columbia University.

Brousseau, G. (2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998). Retrieved from http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf website:

Brumbaugh, D. K. and Rock, D. (2001). *Teaching secondary Mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Burnette, J. M. and Wessler, S. R. (2013). Transposing from the laboratory to the classroom to generate authentic research experiences for undergraduates. *Genetics*, 193(2), 367-375. doi:10.1534/genetics.112.147355.

Cajori, F. (1919). *A history of elementary mathematics*. New York: Macmillan.

Cha, I. S. (1999). Mathematical and pedagogical discussions of the function concept. *Research in Mathematical Education*, 3(1), 35-56.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1988). *On didactic transposition theory: Some introductory notes.* Paper presented at the Paper presented at the International symposium on selected domains of research and development in mathematics education proceedings, Bratislava, Slovakia.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2ème édition). Grenoble: La Pensée Sauvage Ed.

Chevallard, Y. (1992). A theoretical approach to curricula. *Journal fuer Mathematik-didaktik,* 13(2-3), 215-230.

Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algèbre et transposition didactique. *Rendiconti del seminario matematico Università e Politecnico Torino,* 52(2), 175–234.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques,* 17(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie regulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, and R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 41–56). Grenoble: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *3e Université d'été Animath*, 239-263.

Chevallard, Y. (2006). *Steps towards a new epistemology in mathematics education.* Paper presented at the Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Barcelona.

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Retrieved 14/06/2009 from http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. Retrieved 27/11/2009 from http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. and Bosch, M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 170-174). Dordrecht: Springer Netherlands.

Chevallard, Y., Bosch, M. and Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Chevallard, Y. and Sensevy, G. (2014). Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 38-43). Dordrecht: Springer Netherlands.

Clement, J. (1985). *Misconceptions in graphing.* Paper presented at the Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht University Utrecht, The Netherlands.

Cooney, T. J. and Wilson, M. R. (1993). Teachers' thinking about functions: Historical and research perspectives. In T. A. Romberg, E. Fennema, and T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 131-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cresswell, J. (2007). *Qualitative methods and research design: Choosing among five approaches* (2 ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Cunningham, R. F. (2005). Algebra teachers' utilization of problems requiring transfer between algebraic, numeric, and graphic representations. *School Science and Mathematics*, 105(2), 73-81.

Çallıalp, F. (2012). *Soyut matematik.* İstanbul: Birsen Yayınevi.

Delice, A. ve Sevimli, E. (2016). Matematik eğitiminde çoklu temsiller. In E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Eds.)., *Matematik eğitiminde teoriler.* Ankara: Pegem Akademi.

Demirel, Ö. (2015). *Eğitimde program geliştirme kuramdan uygulamaya*. Ankara: Pegem Akademi.

Denbel, D. G. (2015). Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum. *Journal of Education and Practice,* 6(1), 77-81.

Denzin, N. K. and Lincoln, Y. S. (2005). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin and Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research* (3 ed.). Thousand Oaks: Sage.

Dreyfus, T. and Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 13(5), 360-380.

Dubinsky, E. and Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior,* 32(1), 83-101.

Edwards, L. D. (1997). Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 2, 187–215.

Eisenberg, T. (2002). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140–152). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ekiz, D. (2015). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (4 ed.). Ankara: Anı Yayıncılık.

Erdogan, A. (2006). *Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques: analyse didactique des difficultés relative à l'algèbre et aux fonctions en Seconde.* Doctoral dissertation. University Paris 7.

Erdoğan, A. (2014). Conditions épistémologiques de l'étude des fonctions et de l'algèbre par les élèves de seconde, en France. *Recherches en didactique des mathématiques,* 34(2/3), 201-238.

Erdoğan, A., Eşmen, E. ve Fındık, S. (2015). Ortaokul matematik ders kitaplarında matematik tarihinin yeri: ekolojik bir analiz. *Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi,,* 42, 239-259. doi:10.15285/ebd.67242.

Ergün, M., Özmantar, M. F., Bay, E. ve Agaç, G. (2015). Cumhuriyetin ilanından günümüze eğitimde, program geliştirmede ve matematik programlarında yaşanan değişim ve gelişimler. M. F. Özmantar, A. Öztürk, & E. Bay (Eds.), *Reform ve değişim bağlamında ilkokul matematik programları* içinde. Ankara: Pegem Akademi.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics,* 21, 521-544.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(2), 94-116.

Flegg, H. G. (2001). *From geometry to topology*. New York: Dover Publications.

Fraleigh, J. B. (2013). *Soyut cebire giriş* (Çev: M. Terziler ve T. Öner). Ankara: Palme Yayıncılık.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures*: Kluwer Academic Publishers.

Gagatsis, A. and Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology,* 24(5), 645-657.

García, F.J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Doctoral dissertation. Universidad de Jaén.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. and Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM,* 38(3), 226–246.

Glesne, C. (2013). *Nitel araştırmaya giriş* (Çev: A. Ersoy ve P. Yalçınoğlu). Ankara: Anı Yayıncılık.

Grant, S. G., Peterson, P. L. and Shojgreen-Downer, A. (1996). Learning to teach mathematics in the context of systemic reform. *American Educational Research Journal,* 33(2), 502-541.

Gray, E. M. and Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25(2), 116-140. doi:10.2307/749505

Güvenç, H. (2015). Eğitimde reform ve değişim. M. F. Özmantar, A. Öztürk, ve E. Bay (Eds.), *Reform ve değişim bağlamında ilkokul matematik programları* içinde. Ankara: Pegem Akademi.

Hamley, H. R. (1934). *Functional Thinking*. New York, NY: National Council of Teachers of Mathematics, Teachers College, Columbia University.

Hancock, D. R. and Algozzine, R. (2006). *Doing case study research: A practical guide for beginning researchers*. New York: Teachers College Press.

Hedrick, E. R. (1922). Functionality in mathematical instruction in schools and colleges. *The Mathematics Teacher,* 15(4), 191-207.

Hedrick, E. R. (1938). The function concept in elementary teaching and in advanced mathematics. *The American Mathematical Monthly,* 45(7), 448-455.

Herrera, T. A. and Owens, D. T. (2001). The" new new math"?: Two reform movements in mathematics education. *Theory into Practice,* 40(2), 84-92.

Hesapçıoğlu, M. (2009). Türkiye'de cumhuriyet döneminde eğitim politikasi ve felsefesi. *M.Ü. Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 29, 121-138.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A. and Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher,* 25(4), 12-21.

Huillet, D. (2009). Mathematics for teaching: An anthropological approach and its use in teacher training. *For the Learning of Mathematics*, 29(3*), 4-10.*

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67–71). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 79-103.

Johsua, S. and Dupin, J. J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.* Paris: Presses Universitaires de France (PUF).

Jones, M. (2006). Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the Concept of Function. *Rose-Hulman Undergraduate Math Journal,* 7(2), 1-20.

Kaleli Yılmaz, G. (2014). Durum çalışması. M. Metin (Ed.), *Kuramdan uygulamaya eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri* içinde(1 ed.). Ankara: Pegem Akademi.

Karasar, N. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemi* (23 ed.). Ankara: Nobel.

Kilpatrick, J. (2009). The mathematics teacher and curriculum change. *PNA,* 3(3), 107-121.

Kilpatrick, J. and Stanic, G. M. (2004). Mathematics curriculum reform in the United States: A historical perspective. *Educação Matemática Pesquisa,* 6(2), 11-27.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4), 282-300.

Kleiner, I. (1993). Functions: Historical and pedagogical aspects. *Science and Education,* 2(2), 183-209.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times* (Vol. 1). New York: Oxford University Press.

Lauten, A. D., Graham, K. and Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior,* 13(2), 225-237.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. and Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research,* 60(1), 1-64.

Leung, L. (2015). Validity, reliability, and generalizability in qualitative research. *Journal of Family Medicine and Primary Care,* 4(3), 324-327.

Llanos, V. C. and Otero, M. R. (2013). The Research and Study Paths in the secondary school: The case of the polynomial functions of the second degree. *Anthropological Theory,* 52, 61-71.

Lloyd, G. M. and Wilson, M. (1998). Supporting innovation: the impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29(3), 248-274. doi:10.2307/749790.

Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 11, 489–492.

Markovits, Z., Eylon, B. S. and Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics,* 6(2), 18-28.

Mayring, P. (2011). *Nitel sosyal araştırmaya giriş* (Çev: A. Gümüş & M. S. Durgun). Ankara: BilgeSu.

McGowen, M., DeMarois, P. and Tall, D. (2000). *Using the function machine as a cognitive root for building a rich concept image of the function concept.* Paper presented at the Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Haifa, Israel.

MEB. (2005). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12.sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

MEB. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

MEB. (2009). *İlköğretim matematik dersi 6-8.sınıf matematik programı.* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Merriam, S. B. (2013). Nitel vaka çalışması (Çev: E. Karadağ). S. Turan (Ed.), *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber* içinde (3 ed.). Ankara: Nobel.

Merzbach, U. C. and Boyer, C. B. (2011). *A history of mathematics* (3 ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2), 255-286.

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM*, 38(3), 269-280.

Miles, M. B. and Huberman A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications

Modenov, P. S. and Parkhomenko, A. S. (1965). *Geometric Transformations (Volume 1) (M. B. P. Slater, Trans.).* New York: Academic Press.

Monk, G. S. (1994). Students' understanding of functions in calculus courses. *Humanistic Mathematics Network Journal*, 1(9), 21-27.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Østergaard, K. (2013). *Theory and practice in mathematics teacher education.* Paper presented at the IVe congrès international sur la TAD, Toulouse.

Özdemir Erdoğan, E., Erdoğan, A. ve Yanık, H. B. (2012). İlköğretim matematik öğretmenliği programı birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonlar konusundaki hazır bulunuşlukları. *University of Gaziantep Journal of Social Sciences*, 11(4), 1121-1149.

Paker, T. (2015). Durum çalışması. F. N. Seggie ve Y. Bayyurt (Eds.), *Nitel araştırma yöntem, teknik, analiz ve yaklaşımları* içinde. Ankara: Anı Yayıncılık.

Patton, M. Q. (2014). Nitel analizin kalitesinin ve inanılırlığının arttırılması (Çev: S. Çelik ve F. Ö. Karataş). M. Bütün ve S. B. Demir (Eds.), *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* içinde (3 ed.). Ankara Pegem Akademi.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator,* 3(2), 3-8.

Rajoson, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique: trois études de cas.* Universite d'Aix-Marseille II, Faculte des Sciences de Luminy.

Remillard, J. T. and Geist, P. K. (2002). Supporting teachers' professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education,* **5,** 7–34.

Sağlam, A. (2004), *Les équations différentielles en mathématiques et en physique: étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir*. Thèse de doctorat, Grenoble I: Université Joseph Fourier.

Sağlam Arslan, A. (2016). Didaktiğin antropolojik teorisi. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde. Ankara: Pegem Akademi.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics,* 53, 229-254.

Selden, A. and Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function: Summary and overview. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 1-16.). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Selden, J., Selden, A. and Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In J. J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: preliminary analyses and results.MAA Notes* (Vol. 33, pp. 19–26). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22(1), 1-36.

Sierpinska, A. and Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. Bishop, M.A.K Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick and C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Siu, M. K. (1994). Concept of function – its history and teaching. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, and V. Katz (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 105-121). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Steinbring, H. (2005). Analyzing mathematical teaching-learning situations: The interplay of communicational and epistemological constraints. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1–3), 313–324.

Stenhouse, L. (1988). Case study methods. In J. P. Keeves (Ed.), *Educational Research, Methodology and Measurement: An International Handbook* (1 ed.). Oxford: Pergamon.

Tall, D. and Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 23(1), 39-50.

Tall, D. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12(2), 151-169.

Tavignot, P. (1995). À propos de la transposition didactique en didactique des mathématiques. *Spirale–Revue de Recherches en Éducation,* 15, 31-60.

Thompson, P. W. (2013). Why use f(x) when all we really mean is y? *OnCore, The Online Journal of the Arizona Association of Mathematics Teachers*, 18-26.

Usiskin, Z., Peressini, A., Marchisotto, E. and Stanley, D. (2003). *Mathematics for high school teachers:An advanced perspective.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Umble, R. N. and Han, Z. (2015). *Transformational plane geometry*. New York: CRC Press.

Uygur Kabael, T. (2010). Fonksiyon kavramı: Tarihi gelişimi, öğrenilme süreci, öğrenci yanılgıları ve öğretim stratejileri. *Tübav Bilim Dergisi,* 3(1), 128-136.

Ünal, F. ve Ünal, M. (2010). Türkiye'de ortaöğretim programlarının gelişimi. *Sosyal Bilimler Arastırmaları Dergisi,* 1, 110-125.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 14(3), 293-305.

Vinner, S. and Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

Watson, A. and Harel, G. (2013). The role of teachers' knowledge of functions in their teaching: A conceptual approach with illustrations from two cases. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 154-168.

Wilson, M. and Goldenberg, M. P. (1998). Some conceptions are difficult to change: One middle school mathematics teacher's struggle. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1, 269-293. doi:10.1023/A:1009990018385

Winsløw, C. (2011). Anthropological theory of didactic phenomena: Some examples and principles of its use in the study of mathematics education. In M. Bosch, J. Josep Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, and M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 117-140). Barcelona: Centre de Ricerca Matemàtica.

Yates, R. C. (1961). *Analytic geometry with calculus*. New Jersey: Prentice Hall.

Yıldırım, M. ve Şahin, F. (2009). *Antropolojik didaktik teorisi ve fen öğretimi*. Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED), 3(1), 46-57.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10 ed.). Ankara: Seçkin.

Yin, R. K. (2011). *Qualitative research from start to finish*. New York, NY: Guilford Press.

Yin, R. K. (2017). *Durum çalışması araştırması uygulamaları* (Çev: İ. Günbayı). Ankara: Nobel.

Zazkis, R., Liljedahl, P. and Gadowsky, K. (2003). Conceptions of function translation: Obstacles, intuitions, and rerouting. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 435-448.

Zembat, İ. Ö. (2013). Geometrik dönüşümlerden öteleme ve farklı anlamları. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Eds.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde. Ankara: Pegem Akademi.

Zeybek, S. (2012). *Matematik programlarının gelişimi (1924-2011)*. Gazi Kitabevi: Ankara.

EKLER

EK 1. Araştırma Onay Sayfası

EK 2. Öğretmen Görüşme, Gözlem, Ses ve Video Kaydı Yazılı İzin Formu

Ek 3. Öğrenci Ses ve Video Kaydı Yazılı İzin Formu

Ek 4. Gözlem Formu Örneği

Ek 5. Öğretmen Görüşme Formu

Ek 6. Öğretmen Fonksiyon Sınavı

Ek 7. Didaktik Anların İlk Analizi için Örnek Tablo

Ek 8. Prakseolojik Bileşenler ve Didaktik Anlar

EK 1

ARAŞTIRMA ONAY SAYFASI

TC
İPEKYOLU KAYMAMAKLIĞI
İpekyolu İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü

22/09/2014

Sayı :753126/ 020- 3553
Konu : Fonksiyonlarda
İşlemler ve Uygulamaları

MÜDÜRLÜK MAKAMINA

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümü Ana Bilim Dalı Öğretim elemanı Arş. Gör. Mustafa GÖK'ün doktora tez çalışmasının uygulanması için 2014-2015 eğitim- öğretim yılı güz dönemi lise 2.sınıf düzeyinde ''Fonksiyonlarda İşlemler ve Uygulamaları'' konusuyla ilgili derslerin video ve ses kaydı ile Müdürlüğümüze bağlı aşağıdaki tabloda verilen okullarda çalışma yapma talebi müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde olurlarınıza arz ederim.

Eşref YILDIZ
İlçe Milli Eğitim Şube Müdürü

O LU R
……/09/2014
Şükrullah YAVUZER
İlçe Milli Eğitim Müdürü

S.N.	Veri Toplanacak Okullar
1	Selahaddin Eyyubi Lisesi
2	Özen Adalı Anadolu Lisesi
3	Telia Sonera Anadolu Lisesi
4	Niyazi Türkmenoğlu Anadolu Lisesi
5	İpekyolu IMKB Fen Lisesi

22/09/2014 Memur RAMAZAN

İPEKYOLU İLÇE MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ
– VAN
Telefon : 0(432) 216 64 02-05
Fax : 0(432) 216 64 04
e-posta : ipekyolu65@meb.gov.tr
İnternet : http://ipekyolu65@.meb.gov.tr

Ek 2

ÖĞRETMEN

GÖRÜŞME, GÖZLEM, SES VE VİDEO KAYDI YAZILI İZİN FORMU

Sayın ……………………………….,

Bu mektubun amacı sizi araştırmamızla ilgili haberdar etmek ve buna bağlı olarak katılmanızla ilgili izin almaktır.

Toplanacak veriler, sizinle fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusuyla ilgili ders öncesi ve ders sonrası olacak şekilde yapacağımız görüşmelerden, uygulama sırasında yapacağımız gözlemlerden, öğretmenlerin ders hazırlığı için kullandığı dokümanlardan ve yine konunun sınıfta öğretmen tarafından anlatılması sürecinde derslerin ses ve video kayıtlarından oluşacaktır. Bu ses ve video kayıtları, fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusuyla ilgili öğretmenlerin ne tür problem tipleri bildikleri, bunları çözmek için hangi çözüm teknikleri geliştirdikleri ve bu teknikleri öğrencilere nasıl açıkladıkları gibi soruları daha iyi analiz edebilmek için önem taşımaktadır.

Ders öncesi öğretmenlerin program değişikliğiyle ilgili neler bildiği ve öğretmenin mesleki deneyimiyle ilgili bilgiler elde etmeyi sağlayan bir görüşmeler yapılacaktır. Ders sonrasında ise öğretmenin fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusuyla ilgili problem tipleri, onların çözümünde kullandığı teknikler, alternatif teknikleri bilip-bilmediği ve bu teknikleri sınıfa nasıl açıkladığı bilgilerini içeren görüşmeler yapılacaktır. Bu görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayıt edilecektir. Gözlemlerde araştırmacı ses kaydının yanında yazılı notlar da tutabilecektir.

Toplanan tüm veriler araştırma dışında başka amaçla kullanılmayacaktır. Ayrıca, araştırmanın raporlaştırılması sürecinde kimliğinizle ilgili özel bilgilere kesinlikle yer verilmeyecektir.

Sonuç olarak bu mektubu okuduğunuz ve araştırmaya katılıp katılmama konusunu düşünmek için zaman ayırdığınız için tekrar teşekkür ederiz.

Yard. Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN, Proje yürütücüsü

Adres: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği, Yunus Emre Kampusü, 26470 Eskişehir. Tel: 335 05 80-3410 Fax: 335 0579

Mustafa GÖK

Adres: Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği, Zeve Kampusü Van Tel: 432 225 1024

Aşağıda imzası olan ben, ……………………………………………….. yukarıdaki **açıklamaları** anlamış ve araştırmaya gönüllü olarak katıldığımı bildirmiş bulunmaktayım.

________________________________ ____________________

İmza Tarih

________________________________ ______________________________

İsim Telefon No

________________________________ ______________________________

Adres E-mail Adresi

Ek 3

ÖĞRENCİ
SES VE VİDEO KAYDI YAZILI İZİN FORMU

Sayın Veli,

Bu mektubun amacı sizi araştırmamızla ilgili haberdar etmek ve buna bağlı olarak velisi olduğunuz öğrencinin araştırmaya katılmasıyla ilgili sizden izin almaktır.
Bu proje kapsamında lise 2.sınıfta matematik derslerinde fonksiyonlarla işlemler ve uygulamaları konusuyla ilgili derslerin kamera ile video kaydı ve ses kayıt cihazıyla ses kaydı alınacaktır. Ayrıca öğretmenlerin öğrencilere verdiği ders dışı çalışmalar ve öğrencilerin konuyla ilgili defterlerine yazdıkları notların fotokopisi çekilmek istenmektedir.

Toplanan tüm veriler araştırma ve eğitim dışında başka amaçla kullanılmayacaktır. Ayrıca, araştırmanın raporlaştırılması sürecinde elde edilen bilgiler yazılırken, öğrenci kimliği ile ilgili özel bilgilere kesinlikle yer verilmeyecektir.

Sonuç olarak bu mektubu okuduğunuz ve velisi olduğunuz öğrencinin araştırmaya katılıp katılmama konusunu düşünmek için zaman ayırdığınız için teşekkür ederiz.

Yard. Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN, Proje yürütücüsü

Adres: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği, Yunus Emre Kampusü, 26470 Eskişehir. Tel: 335 05 80-3410 Fax: 335 0579

Mustafa GÖK
Adres: Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği, Zeve Kampusü Van Tel: 432 225 1024

Aşağıda imzası olan ben, …………………………………………….. yukarıdaki **açıklamaları** anlamış ve velisi olduğum öğrenci …………………………….’in araştırmaya gönüllü olarak katıldığını bildirmiş bulunmaktayım.

İmza	Tarih
İsim	Telefon No
Adres	E-mail Adresi

Ek 4

Gözlem Formu Örneği

Okul:	Öğretmen:		Hafta: Ders:	
Görev	Teknik	Teknoloji	Teori	Didaktik Anlar

Ek 5

Öğretmen Görüşme Formu

Bu görüşme formunun amacı, öğretmenlerin yeni matematik programına bakış açılarını fonksiyonlar konusu bağlamında belirlemektir. Bu doğrultuda iki bölümden oluşan görüşme soruları oluşturulmuştur. Birinci bölümdeki sorular, öğretmenin mesleğiyle ilgili kişisel bilgilerini içermektedir. İkinci bölümde, öğretmenin yeni ve eski programlara nasıl baktığı ve yeni programda fonksiyon konusunun öğretimini nasıl gerçekleştirmek istediğine yönelik sorular yer almaktadır.

Bu bilgiler fonksiyonla ilgili bir araştırmada kullanılacak olup, kesinlikle üçüncü kişilerle paylaşılmayacaktır. Görüşmeyi kabul ettiğiniz için teşekkür ederim.

Arş. Gör. Mustafa GÖK

Yüzüncü Yıl Üniversitesi

Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Birinci Bölüm:

S1. Adınız, Soyadınız, Yaşınız ve Görev yaptığınız okulun ismi nedir?

S2. Kaç yıldır matematik öğretmeni olarak görev yapıyorsunuz? Görev yaptığınız okulda kaçıncı yılınız?

S3. Lisans mezuniyetiniz nedir? (Fen fakültesi-eğitim fakültesi) Yüksek lisans yaptınız mı?

İkinci Bölüm:

S1. Yeni ve eski programları öğretim bağlamında genel olarak karşılaştırabilir misiniz?

- Matematik Programında çıkarılan konular, eklenen konular ya da yeri değiştirilen konular var mı?
- Bu neden yapılmış olabilir?

S2. Sizce fonksiyon konusunun matematik öğretimindeki yeri nedir?

- Öğretimde fonksiyon konusunun diğer konularla bağlantısı kurulabilmekte midir? Bu soruyu eski ve yeni programlar bağlamında cevaplayabilir misiniz?

S3. Yeni ve eski programlar fonksiyonların öğretimi çerçevesinde düşünüldüğünde ne gibi farklılıklar gözlemlediniz?

- Örneğin programlarda sınıf düzeylerinde fonksiyon konusunun başlıkları nasıl yer almaktadır?
- Eğer değişiklik varsa neden kaynaklanıyor olabilir?

S4. Fonksiyon konusunun öğretiminde hangi kaynaklardan yararlanmayı düşünüyorsunuz?

- Niçin bu kaynakları tercih ettiniz?

S5. Yeni ve eski programlarda fonksiyon kavramı öğrenciye nasıl sunulmaktadır.

- Eğer varsa farklılıkları belirtiniz?
- Siz fonksiyon kavramını öğrencilere nasıl anlattınız?
- Fonksiyon kavramını tanıtırken nelere dikkat ettiniz?

S6. Yeni ve eski programda fonksiyon konusu öğretilirken kullanılan temsiller açısından değerlendirildiğinde bir değişim gözlemlediniz mi? Eğer gözlemlediyseniz bunlar nelerdir?

S7. Yeni programda lise 2.sınıfta fonksiyonlarla ilgili uygulamalar başlığı altında günlük yaşamda karşılaşılabilecek problemlere yer verilmek istendiği görülüyor. Buna neden gerek duyulmuş olabilir?

S8. Fonksiyonların grafikleriyle ilgili sınıf düzeylerinde hangi başlıklara yer verilmiştir.

- Bunları öğrencilere siz nasıl anlatmayı düşünüyorsunuz?
- Burada ne tür zorluklarla karşılaşılabilir?

S9. Fonksiyon konusunun öğretiminde karşılaşılan sorunlar nelerdir? Bu soruyu

- Öğrenci,

- Öğretmen ve
- Programlar bağlamında cevaplandırabilir misiniz?

S10. Fonksiyon konusunun öğretimiyle ilgili öğretim programının sizi sınırlandırdığını düşünüyor musunuz?

- Eğer düşünüyorsanız fonksiyon konunun hangi başlıklarını işlerken bu tür durumlarla karşılaştınız?
- Öğretimde bu tür durumların nasıl üstesinden geldiniz?

Ek 6

Öğretmen Fonksiyon Sınavı

Sayın hocam, bu ankette 10.sınıfta öğretilen fonksiyonlar konusuyla ilgili bazı sorular bulunmaktadır. Bu sorulara verdiğiniz cevaplar araştırma amacıyla kullanılacak olup üçüncü kişilerle paylaşılmayacaktır. Soruları ciddiyetle cevaplandırmanız ve hiç bir soruyu boş bırakmamanız araştırmamız için büyük önem taşımaktadır.

- Her bir soruyu önce dikkatlice okuyunuz
- Çözümünüzü yapınız. Eğer farklı çözüm yolları biliyorsanız onları da ilgili alana yapınız.
- *Bir sorunun cevabı hakkında hiç bir fikriniz yoksa, lütfen boş bırakılan alana belirtiniz.*

Anket sorularını cevaplamayı kabul ettiğiniz için şimdiden teşekkürler.

Öğretmeni Tanılayıcı Sorular

S.1. Öğretmenin;

- Adı:
- Soyadı:
- Görevli olduğu Okul:
- Mesleki Deneyimi(yıl):
- Eğer varsa diğer görevleri(Zümre başkanı, müdür yrd,..vs):

S.2. Lisans mezuniyeti nedir?

a) Fen fakültesi

b) Eğitim fakültesi

c) Diğer

S.3. Yüksek lisans durumu nedir?

a) yapmadı

b) yapıyor

c) yaptı

S.4. 2013 yılında yapılan program değişikliğini genel olarak değerlendirir misiniz?

- Size göre iyi olan tarafları nelerdir?
- Size göre eksik kalan kısımları nelerdir?

S.5. 2013 matematik programında fonksiyon konusuyla ilgili yapılan değişikliklerin öğretime yansımalarını olumlu-olumsuz başlıkları altında belirtiniz?

- Olumlu:
- Olumsuz:

S.6. Sizce bir soruyu birden fazla yolla çözmek önemli midir? Neden?

S.7. Okulda fonksiyon konusunu öğrencilere anlatırken farklı çözüm yollarından yararlanıyor musunuz? Hangi çözüm yollarını kullandığınızı örneklerle açıklayınız?

S.8. Fonksiyon konusunda bir problemle ilgili yaptığınız çözümü anlamayan bir öğrenciye problemi anlamasına yönelik nasıl bir yaklaşım sergilersiniz?

a) Çözümü tekrar anlatırım.

b) Başka bir yolla soruyu çözerim.

c) Diğer …………

S.9. Fonksiyon konusunun öğretiminde bir problemin çözümü için farklı yolların kullanılmasında zaman zaman sınırlamalarla karşılaştınız mı? Örnek vererek açıklayınız. Sizce bu sınırlılıkların kaynağı nedir?(Program, öğrenci seviyesi, ..vs)

TEST SORULARI

S.1. $f\colon [a,b] \rightarrow [-2,7]$ tanımlı olmak üzere, $f(x) = -2x + 3$ olduğuna göre [a,b] aralığını bulunuz?

S.2. $f\colon R - \{\frac{4}{3}\} \rightarrow R$ tanımlı olmak üzere, $f(x) = \frac{2x+a}{3x-4}$ olarak veriliyor. f(x) fonksiyonu sabit fonksiyon ise a kaçtır?

S.3. $f\colon R \rightarrow R$ $f(x)$ doğrusal bir fonksiyondur. f(1)=5 ve f(2)=8 olarak veriliyor. Buna göre f(7) değeri kaçtır?

S.4. Reel sayılarda tanımlı f fonksiyonunun kuralı, $f(x) = x^3 + 8$ şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre f fonksiyonunun bire birliği ile ilgili ne söylenebilir?

S.5. $f\colon Z \rightarrow Z$ tanımlı olmak üzere, $f(x) = 5x - 10$ olduğuna göre, f fonksiyonunun örtenliği hakkında ne söylenebilir?

S.6. $f: R \rightarrow R$ $f(x) = x^2 + 1$ ve $g: R \rightarrow R$ $g(x) = 6x - 8$ şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları için, $(f - g)(3 - x)$ değeri nedir?

S.7. $h: R \rightarrow R$ $h(x) = x \cdot |x|$ olarak tanımlanmıştır. Buna göre h(x) fonksiyonunun tek ya da çift fonksiyon olduğuyla ilgili ne söylenebilir?

S.8. Uygun koşullarda tanımlı f fonksiyonu birebir ve örtendir.

$$f(x^2 + 2x) = 5x^2 + 10x - 7$$

olduğuna göre, $f^{-1}(-12)$ değeri nedir?

S.9. Uygun koşullarda tanımlı f fonksiyonu birebir ve örtendir.

$$f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) = \frac{2x}{x + 1}$$

olduğuna göre, $f^{-1}(10)$ değeri kaçtır?

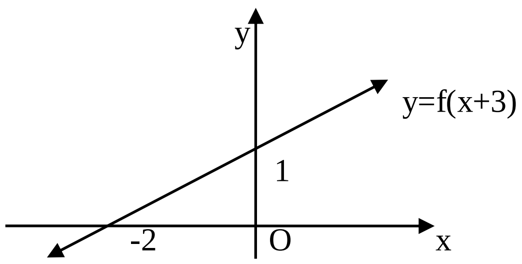
S.10. Reel sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$fog(x) = x^2 - 1$$

$$f(x) = 2x + 1$$

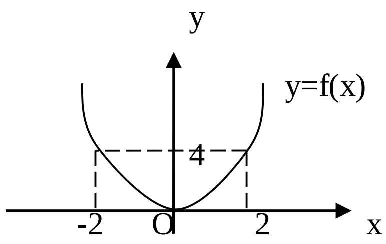
olduğuna göre, $g^{-1}(-1)$ değeri nedir?

S.11.



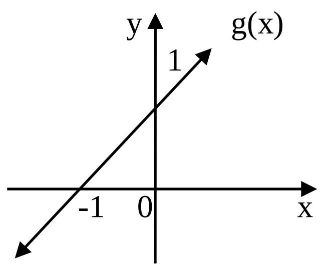
Şekilde f(x+3) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, h(x-2)=f(x) olduğuna göre, $h^{-1}(2)$ değeri kaçtır?

S.12. a bir reel sayı olmak üzere,



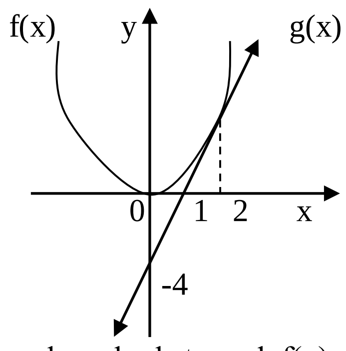
Şekilde ikinci dereceden y=f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. g(x)=f(x-2), h(x)=g(x)-a ve h(x) fonksiyonunun grafiğinin orijinden geçtiği biliniyorsa, a değeri kaç olmalıdır?

S.13. f ve g fonksiyonları reel sayılarda tanımlı olmak üzere,



Yukarıda g fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun kuralı $f(x)=x^2$ şeklindedir. Buna göre, f(x)=g(x) eşitliğini sağlayan kaç farklı $x \in R$değeri vardır?

S.14.



Şekilde reel sayılarda tanımlı $f(x)=x^2$ ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre, (f-g)(x) fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?

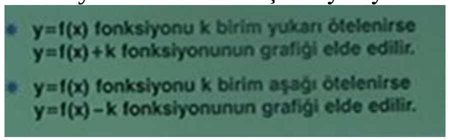
S.15. Bir ticari taksi kat ettiği her 100 km'de 4 litre benzin tüketmektedir. Taksi metrenin açılışı 3 TL olan bu takside, gidilen her km 2 TL olarak ücretlendirilmektedir. Deposunda 40 litre benzin bulunan bu taksiyle seyahate çıkan bir kişinin, taksinin harcayacağı benzin miktarına karşılık taksiciye ne kadar ödemesi gerektiğini ifade eden fonksiyonu bulunuz?

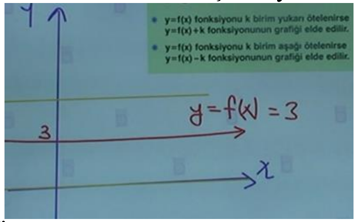
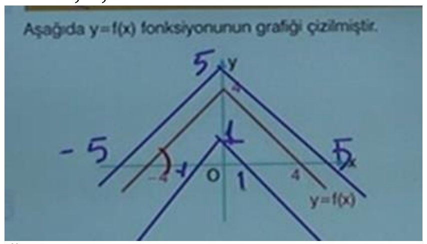
S.16. Bir kenarı x br olan bir küpün hacmini veren fonksiyon f ile tanımlanmıştır. Bir kenarı y br olan bir küpün tüm alanı ise g fonksiyonu ile tanımlanmıştır. Buna göre, $(gof^{-1})(8)$ değeri kaçtır?

S.17. $f: R \rightarrow R$ ve $f(x) = 2x + 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f^{-1}(-3)$ değeri kaçtır?

EK 7

Tablo I. *Didaktik anların ilk analizi için örnek tablo*

Kayıt Yeri Alt Başlık	**Görevler ve Didaktik Anlar**	**Etkin Aktör**	**Sunulan Matematiksel Nesneler (Yeni=Y)**	**Gözlenen Didaktik Aktivite**
Fen Lisesi Burak Öğretmen 20 Ekim 2014 Ders 1 Fonksiyonların Simetri Dönüşümleri y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x)+k fonksiyonunun grafiğini elde etme	 τ_1 tekniğin ifadesi (geliştirme yok) T_1 ile ilk karşılaşma τ_1 teknolojik teorik çevre oluşturma (eksik) $t_{1,1}$ görevi $t_{1,2}$ görevi τ_1 teknolojik	Ö Ö→Ös Ö1→Ö Ö→Ö1 Ö→Ös Ö Ö1→Ö Ö Ös→Ö Ö Ö1→Ö Ö2→Ö Ö→Ö1 Ö2→Ö1 Ö	Fonksiyon Simetri (Y) Öteleme (Y) y=f(x)±k Sabit fonksiyon y ekseninde öteleme(Y) y=3, y=5 ve y=0 Grafik x ekseni	Öğretmen (Ö) öğrencilere şunları söyleyerek derse başladı: Ö: Fonksiyonlar konusuna geçiş yapıyoruz arkadaşlar. Gençler fonksiyonlarda simetri diye başlık atıyorsunuz. Evet artık konuşmayı bırakıyorsunuz. (akıllı tahtadan konuyu açtı) Fonksiyonlarda simetri. Şunu yazıyorsunuz. (Biraz bekledi)  y=f(x) fonksiyonu k birim yukarı ötelenirse y=f(x)+k fonksiyonunun grafiği elde edilir. Oraya çok dikkat etmenizi istiyorum. İkisini de yazın. k birim aşağı ötelenirse y=f(x)-k. Sadece öteleme diyoruz. Şekli falan bozmuyoruz. Fonksiyon neyse olduğu gibi ya yukarı ya aşağı. Ö1: Başlık nasıldı? Ö: Fonksiyonlarda simetri. (biraz bekledi) Biraz pratik olun arkadaşlar. (Öğretmen daha sonra koordinat ekseninde sabit fonksiyon çiziyor) Ö: Kırmızı ile çizdiğim doğrunun ismini bilen var mı? Öğrenciler: Hocam y=3, y=x+3, x=3,.. Ö: y=3, arkadaşlar y=3, arkadaşlar y=f(x)=3. Sebebi şu: ne kadar sağa gidersem gideyim ya da ne kadar sola gidersem gideyim f aynı hizada ve 3 tedir. x değiştikçe sonuç değişmiyor. x yerine ne yazarsanız yazın hep sonuç 3 çıkıyor. Ö1: Sabit mi? Ö: Evet. Bu fonksiyonu k kadar yukarı, yani ee atıyorum 2 br yukarı taşıdığımız zaman ne elde edilir? Öğrenciler: y, 5. y=5. Ö: De mi? y=5 doğrusu, şöyle bir şey. (grafiğini çizdi) Gibi öteye alındığını varsayıyorum. (y=3 doğrusunun üzerine grafiği çizdi) Ya da adam demiş ki, k br aşağı, atıyorum 3 br aşağı alırsak neyi elde ederiz? Ö1: Sıfır. Ö2: Hocam x doğrusu yine. Ö: Ne sıfır. Ö2: Özel bir adı var. Ö: y=0 doğrusu arkadaşlar. Burada nereye gidersek gidelim, y hep sıfırdır. Çünkü ne yukarıda

	teorik çevre oluşturma (eksik)	Ö5→Ö Ö→Ös Ö		ne aşağıdadır, de mi? y=0 doğrusunu elde edersiniz. Ö5: Çizelim mi? Ö: Çizmeyelim hayır. Şunu yazdıktan sonra arkadaşlar (akıllı tahtada diğer sayfaya geçti), şunu çizin. Hatta bunu da çizmeyin bir dakka bekleyin arkadaşlar. Arkadaşlar sadece takip edin. 
	$t_{1,3}$ görevi τ1 teknolojik-teorik çevreyi oluşturma (eksik)	Ö→Ös Ö1→Ö Ö Ö1→Ö Ö6→? Ö→Ö1 Ö2→? Ö1→? Ö2→Ö6 Ö6→Ö2	Açı Grafik değişmez (Y) Nokta	Ö: (Bir grafik üzerinde iki göreve yer verilmiş a ve b şeklinde, öğretmen a göreviyle derse başladı) Arkadaşlar y=f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiş, f(x)+1 fonksiyonunun grafiğini çiziniz? Grafiği çizilmiş fonksiyonun 1 br yukarı taşınmasından bahsediliyor. Arkadaşlar unutmayalım fonksiyonun kendisine dokunmuyoruz. Yani bakın buraya şu açının kaç olduğunu sorsam bana ne diyeceksiniz? Şu açı. ((-4,0) noktasının olduğu yer) Ö1: 45 Ö: 45 değil mi? Ö1: Evet, hocam. Ö6: Evet, 4, 4, -2. Ö: Şurası 45. Ö2: 4, 5, 5 Ö1: Nee? Ö2: (Değiştirdi) -5, 5, 5 Ö6: -5, 5, 5 
	τ1 teknolojik-teorik çevreyi oluşturma (eksik)	Ö Ö →Ös	Parçalı fonksiyon grafiği y ekseninde öteleme y=f(x) grafiğinden y=f(x)+1 grafiğini elde etme Açı	Ö: Ee arkadaşlar kendi aranızda konuşmayın. Şimdi 45, 45. Çünkü 4, 4 uzunluk olarak. O zaman şimdi 1 br yukarı taşıdığınız zaman şekli bozulmayacak ki, kırkbeşlik yine 45 olarak kalacak. Yani şu şekil bir şey elde edeceğiz. Mavi ile alsam arkadaşlar. Buna paralel çizeceğim. Sadece 1 br yukarı yani 5 ten geçecek. Gençler bu beşten geçecekse burası 5 br olacaksa burası da 5 olmak zorunda ki, demin 45 ten bahsettik ya, o korunsun. Aynı şey burası içinde söz konusu arkadaşlar. Bu da öyle (Koordinat ekseninin sağı). Tamam mı gençler, 1 br yukarıya

				taşındı. Yeni fonksiyon budur.
		Ö1→Ö		Ö1: Hocam yazak.
		Ö7→Ö	Grafik değişmez	Ö7: Bunu yazalım mı?
		Ö →Ös	Paralel Nokta	Ö: Hayır, hayır. Bunu yazmayın. Az sonraki örneği yazarsınız. Şimdilik bunu yazalım (grafiğin eksenleri kestiği noktaları yazmaya başladı). Bura 5, şura 5, şurası -5. 1 birim yukarı taşınmasını bulduk.
	$t_{1,4}$ görevi	Ö →Ös	y=f(x) grafiğinden y=f(x)-3 grafiğini elde etme	Ö: (a görevi tamamlandıktan sonra b görevine başladı) Arkadaşlar y=f(x)-3 fonksiyonu 3 birim olduğu gibi şekli alın kopyalayın 3 br aşağıya, sağa-sola kaydırmayın. Sadece 3 br aşağıya kaydırın. Yani, şeklin kendisini koruyoruz arkadaşlar. Sadece aşağıya taşıyoruz. Şu şekil.
		Ö2→Ö		Ö2: Gene 45, 45.
	τ_1 teknolojik-teorik çevreyi oluşturma (eksik)	Ö		Ö: Korunacak evet, aynen. Şurası 1, çünkü 3 birim aşağıya taşıyorum. Buraya 1 kalır. Bir kalır buraya. -1 bakın o korunuyor ya açı. şurası da 1 br. Şu ikinci.
		Ö →Ös	Eğim Nokta	Ö:(Soruyu okuyor) Arkadaşlar soruyu okuyorum. Buna göre y=f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiş. y ekseni üzerinde 2 birim aşağıya ötelenmesiyle…(tamamlamadı) Ne olacak? Ö8?
		Ö8→Ö		Ö8: Hocam y ekseni üzerinde 2 birim aşağıya gidecek.
	$t_{1,5}$ görevi	Ö→Ös		Ö: Yani şu kısım 2 birim aşağıya gelirse (grafiğin 2<x<4 aralığındaki parçası).
		Ö2→Ö	Öteleme	Ö2: Sıfıra gelecek, 2'den 0'a gelecek.
	τ_1 teknolojik-teorik çevreyi oluşturma (eksik)	Ö→Ös	Nokta Eğim Paralel	Ö: Evet. Kalibrasyon olmayınca böyle biraz. (Grafik çiziminde akıllı tahta ile ilgili sorun olduğu kastedildi) Bura böyle. Eğim aynen korunuyor. Bakın dikkat edin, paralel olması lazım. Şu ikisinin paralel olması lazım. Siz daha iyi görüyorsunuz, tamam değil mi? (grafiğin 4<x kısmı)
		Ö6→Ö		Ö6: Hı hı
		Ö6→Ös		Ö: Şunu da paralel çizeceğim. Oldu mu?
		Ö5→Ö		Ö5: Biraz yukarı.
		Ö2→Ö		Ö2. Hafif aşağı.
		Ö		Ö6: Oldu oldu.
		Ö→Ös		Ö: Şimdi gençler çizdikten sonra acaba ha bu nokta nedir? (Grafiğin y eksenini kestiği nokta kastediliyor)
		Ö1→Ö	Nokta	Ö1: 1 dir.
		Ö→Ös	Öteleme Eğim	Ö: 2 br aşağıya ötelemişiz. 3 ten geçiyordu, 1 den geçecek. Doğrudur, doğru çizmişiz o zaman arkadaşlar. Şurası 1 olacak. 5 in hizasındayken bakın buraya bakın 5 in hizasında fonksiyon 4 e denk geliyordu.
		Ö4→Ö		Ö4: Öyleyse 2 olur.
		Ö Ö→Ös		Ö: Şimdi 5 in hizasında 2 ye denk gelecek değil mi? Şurası da 2 olur, arkadaşlar. 2 birim aşağı ötelenmesiyle elde ettiğimiz fonksiyon. Bunu buna gerek yok arkadaşlar geçiyorum. (Diğer seçeneğe gerek yok diyerek çözmüyor.)

<table>
<tr>
<td>y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x-k) fonksiyonunun grafiğini elde etme</td>
<td>τ_2 tekniğin ifadesi (geliştirme yok)

T_2 ile ilk karşılaşma

$t_{2,1}$ görevi

Tekniksel çalışma (kısa)

τ_2 teknolojik-teorik çevreyi oluşturma (eksik)</td>
<td>Ö→Ös

Ö→Ös
Ö

Ös→Ö
Ö→Ös

Ö2→Ö
Ö→Ös
Ö
Ös→Ö
Ö

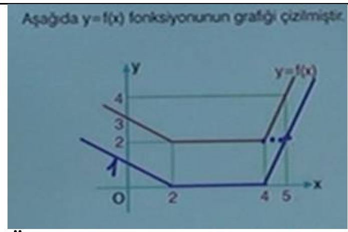
Ös→Ö
Ö→Ös
Ö→Ös
Ös→Ö</td>
<td>Parçalı fonksiyon

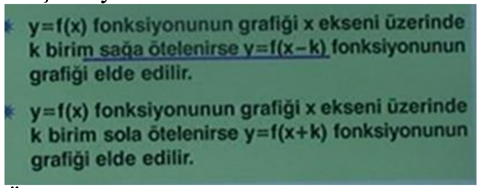
y=f(x) grafiğinden y=f(x+k) grafiğini elde etme
öteleme

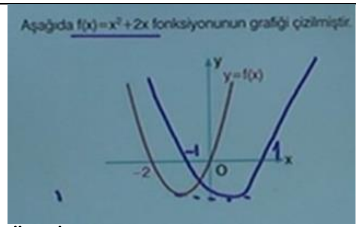
x ekseninde öteleme

Parabol (Y)
İkinci dereceden denklemler

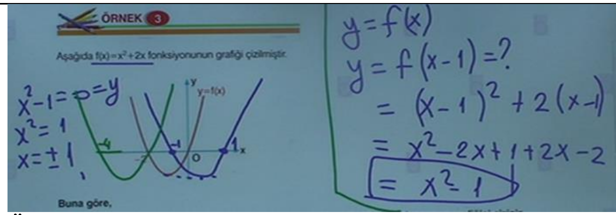
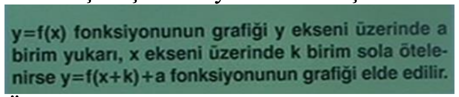
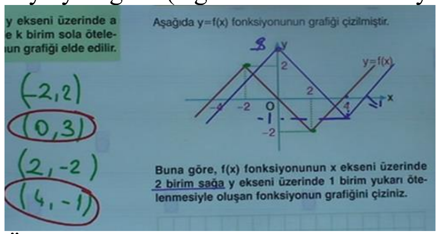
Nokta

Tepe noktası (Y)
Grafik değişmez
Nokta</td>
<td>

Ö: Şunu yazın.

* y=f(x) fonksiyonunun grafiği x ekseni üzerinde k birim sağa ötelenirse y=f(x−k) fonksiyonunun grafiği elde edilir.
* y=f(x) fonksiyonunun grafiği x ekseni üzerinde k birim sola ötelenirse y=f(x+k) fonksiyonunun grafiği elde edilir.
Ö: Bakın şimdiye kadar yukarı-aşağı ile ilgiliydi. Şimdi sağ-sol alakalı ama bir terslik var. Sağa ötelediğimiz zaman f(x-k) ve parantez içinde olduğuna dikkat edin arkadaşlar, sağa ötelediğimiz zaman k birim sağa ötelenirse y=f(x-k), sola ötelediğimiz zaman k birim sola ötelenirse y=f(x+k). Not aldık mı gençler. (biraz bekledi) Hazırız herhalde.
Öğrenciler: Evet.
Ö: Şimdi arkadaşlar, y=f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiş. Burada ismini yazmış $f(x) = x^2 + 2x$, bir işlemle yapabiliriz. Bir de direk grafik üzerinde yapabiliriz. Bir birim sağa ötelenmesiyle oluşacak şekil.
Ö2: -1 ile 1 arası.
Ö: 1 birim sağa öteleyeceğiz arkadaşlar. Direk (Öğretmen ötelemeyi yaptı) Şuna benzeyen bir grafik olmaz mı arkadaşlar.
Öğrenciler: Evet
Ö: Ama dikkat edin buna tepe noktası diyoruz. Tepe noktası yukarı aşağı kaymayacak. Aynı hizada olacak çünkü sadece sağa öteliyoruz. Şekli adeta kopyalayıp, şuraya yapıştırıyoruz. 1 br sağa öteledik. Şimdi şu noktayı merak ederseniz nedir orası?
Öğrenciler: -1 (-1,0) kastediliyor.
Ö: Burası
Öğrenciler: 1
Ö: 1 çünkü önce 0 dan geçiyordu. Şimdi de 1 den geçecek. Tepe noktası ne ise yine hizası aynıdır. Sorun?
Öğrenciler: Yok.</td>
</tr>
</table>

	Tekniksel çalışma (tamamlanamadı) τ_2 teknolojik-teorik çevreyi oluşturma (eksik) Kurumsallaştırma (değişken değiştirme ya da bileşke)	Ö7→Ö Ö2→Ö Ö→Ö1 Ö Ö2→Ö Ö→Ös Ö3→Ö Ö→Ös Ö1→Ö Ö2 →Ö Ö3→Ö Ö Ös→Ö Ö3→Ö Ö Ö7→Ö Ö1→Ö Ö→Ö1 Ö1→Ö Ö→Ös Ö5→Ö Ö2→Ö Ö→Ö2 Ö3→Ö Ö2→Ö Ö→Ös	Öteleme Değişken değiştirme Bileşke y= x^2-1 y=f(x) grafiğinden y=f(x-1) grafiğini elde etme Orijinden geçmeyen ikinci dereceden fonksiyon grafiği (Y)	 Ö7: İşlemle yapalım. Ö2: Hocam bir işlemle yapalım. Ö: İşlemle de yapacağız. Arkadaşlar b şıkkını yapmıyorum. Sadece a şıkkına bakıyoruz. Peki hocam işlemle yapacak olursak nasıl olur? Ö2: Ha bende onu soruyorum. Ö: Bana neyi soruyor? Ö3: Koordinatları. Ö: Yani hangi fonksiyonun grafiğini soruyor? Ö1: Haa. 2 br sola iteleyeceğiz. Yok. Ö2: y=f(x+1) Ö3: y=f(x-1) Ö: Bana bunu y=f(x) vermişti. Sağa ötelenmesi neydi, eksi demekti yani, y=f(x-1) i bana bunun grafiğini soruyor. Sağa dediği için x-1, şimdi bu şu demektir, x yerine x-1 gelmiştir. O zaman devam ediyorum. f(x-1)'i yazıyorum. (x-1)'in karesi artı 2 tane (x-1). x gördüğüm yere x-1 yazdım arkadaşlar. Bir devam edelim bakalım ne çıkıyor? (Aşağıdaki işlemi yaptı.) x^2-2x+1+2x-2, 2x ler gider değil mi arkadaşlar? Öğrenciler: Evet. Ö3: x^2-1 $y=f(x-1)= (x-1)^2+2(x-1)=x^2-2x+1+2x-2=x^2-1$ Ö7: Evet hocam aynen öyle. Ö1: Hocam niye kare aldık? Ö: Kare burada da var. x^2 idi $(x-1)^2$ oldu, 2x idi 2 tane (x-1) oldu. x gördüğüm yere x-1 yazdık sadece. Ö1: Haa. Ö: Arkadaşlar, x gördüğünüz yere x-1 yazarsanız, $(x-1)^2$ gelir..(tamamlayamadı) Ö5: Hocam bunu yazalım. Ö2: Ee, hocam x^2 nin grafiği nasıl olur? Yani x^2-1'in grafiği nasıl olur? Ö: (Tahtayı işaret ediyor) Aynen böyle olur. Ö3: Tamam da çizer misiniz? Ö2: Ama nereden anlayacağız böyle olduğunu? Ö: Güzel güzel arkadaşlar, bir bakabilir misiniz? Ö1 kör noktadasın ama…Şimdi arkadaşlar 1 br sağa öteleyin diyor. Biz işlem olarak eğer önümüzde grafik olmasaydı sadece şu ($f(x) = x^2 +$

	Tekniksel çalışma (Eksik) Kurumsallaştırma (İkinci dereceden fonksiyonlar) τ_2 teknolojik- teorik çevreyi oluşturma (önceki bilgi) $t_{2,2}$ görevi	Ös→Ö Ö→Ös Ö4→Ö Ö→Ös Ö1→Ö Ö2→Ö Ö3→Ö Ö8→Ö Ö→Ös Ö Ö2→Ö Ö→Ös Ö1→Ö Ö→Ö1 Ö1→Ö Ö Ö1→Ö Ö→Ös Ö2→Ö Ö3→Ö Ö→Ös Ö Ö5→Ö Ö→Ös Ö4→Ö	Öteleme Parabol Parabolün eksenleri kestiği noktalar(Y) İkinci dereceden denklemler Tepe noktası Nokta Parabol X ekseninde öteleme Nokta	$2x$) olsaydı işlem olarak yapıp bunu bulacaktık.(x^2-1 kastediliyor) Bunun da grafiğini çizecektik. Zaten grafik çizimleri şeyde var ileride var. Parabol konusunda. Ama sadece doğru yapıp yapmadığımızı anlamak istersek, x^2-1=0 eşitlersek, x^2=1 böyle olmaz mı? Öğrenciler: Evet Ö: Yani x= ± 1. Çünkü 1 in karesi de 1, -1 in karesi de 1 dir. Bakın x=1 ve -1, gördünüz. Tepe noktası değişmedi. Tamam mı arkadaşlar. Ö4: Hocam onu niye sıfır yaptık hocam? Onu niye sıfıra eşitledik? Ö: Güzel niye sıfıra eşitledik, söyleyebilecek olan var mı? Şunu niye sıfıra eşitledik? Ö1: Çünkü hocam x=0 için y yi, y=0 için x i buluyorduk. Ö2: Değişmiyor hocam. Ö3: Çünkü orijinden geçecek. Ö8: Hocam 2 birim ötelenirse… Ö: Ben bu noktaları merak ediyorum ya.((-1,0) ve (1,0) kastediliyor.) O noktalarda y sıfırdır. O noktalarda y sıfırdır. Ne yukarıda ne aşağıdadır. Yani şu y (y= x^2-1 işaret etti) değil mi? Ö2: Evet, y=x^2-1 dir. Ö: y nerede 0 dır, x kaç iken y 0 dır. Soru bu, o yüzden sıfıra eşitledik oradan -1,+1 bulduk. Ö1: Peki şey tepe değerleri yukarıda verildi ya onu? Ö: Onla çok uğraşmayalım. -1 dir ama x yerine 0 yazarsak şurayı buluruz. Ö1: y= -1 Ö: Ha, burası -1, tepe noktası bunlar ilerde parabol konusunda verilecek onun için şimdi geçelim. Ö1: Hocam yarıyıla kadar parabola geçemeyeceğiz muhtemelen. Hocam şey grafik üzerinde tepe noktasını bulsanız, Ö: Sonra cevaplayalım. Şimdi b şıkkına bakabilir miyiz? B şıkkı neyi ifade ediyor gençler. Ö2: 2 br sola Ö3: 2 br sağa Ö: 2 br sola kaydırılmış hali nedir, o kadar. 2 br sola kaydırırsak gençler Bunu alıp 2 birim sola kaydırdığımız zaman, 0 dan geçiyordu -2 den geçecek. Onu kırmızıyla yazarsam burası çok karmaşık oldu ama. Kırmızıyla yazalım. (Vaz geçti) Yeşille yazalım. Şuna benzer bir şey olacak gençler. Şöyle bir şey olacak gençler. Tepe noktası değişmiyor.(x ekseninde -2 ve -4 den geçen bir parabol çiziyor) 0 idi 2 br sola kaydırdığımız zaman -2, şurası da -4 denk gelecek. Böyle bir şey arkadaşlar. Soru var mı? Ö5: Hayır Ö: Bu işlem kısmı detay arkadaşlar, bunu ben kendim verdim. Sonra bunu göreceğiz. Sadece adam ne kadar sağa kayar ne kadar sola kayar bunları merak ediyor onun cevabını bulduk. Geçiyorum. Ö4: Yazalım. Ö: Bence yazmaya gerek yok. (Bazı öğrencilerin farklı bir konudaki sorularıyla ilgileniyor.)

		Ö→Ö4		 Ö: Gençler şu notu yazın arkadaşlar. 
y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x-a)+b fonksiyonunun grafiğini elde etme	τ_3 tekniğin ifadesi (geliştirme yok) τ_3 teknolojik-teorik çevreyi oluşturma (eksik)	Ö→Ös Ö→Ös Ö2→Ö Ö→Ö2 Ö Ö→Ös Ö1→Ö Ö→Ö1	x ve y ekseninde öteleme fonksiyon grafiği Bileşke Öteleme	Ö: y=f(x) fonksiyonunun grafiği y ekseni üzerinde a birim yukarı, x ekseni üzerinde de k birim sola, sola dediği için şurayı artı yazmış, a da direk y ile alakalı. Ö2: Önce yukarı çıkaramaz mıydık. Ö: Fark etmez. Ha önce yukarı kaydırıp sonra sola kaydırmışsın, ha önce sola kaydırıp sonra yukarı kaydırmışsın. Bunun bileşkesi aynıdır. Sonuç aynıdır. x in yanına parantez içine yazılan kısım sağ-sol ile alakalı, onun dışına yazılan yani y nin yanına yazılmış gibi duran kısımda aşağı-yukarıyla alakalıdır. Notu yazdınız mı? Ö1: Soruyu yazalım mı? Ö: Soruyu yazmayın arkadaşlar, beraber çözeceğiz. Yazmanız gereken soru olduğunda söyleyeceğim. (Öğretmen örnek 4 okuyor)
	T$_3$ ilk karşılaşma $t_{3,1}$ görevi τ_3 teknolojik teorik çerçeve oluşturma (eksik)	Ö→Ös Ö Ö3→Ö Ö2→Ö	Nokta Parçalı fonksiyon grafiği x ekseninde öteleme y ekseninde öteleme kritik nokta	 Ö: y=f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Soruyu yazmıyorsunuz arkadaşlar. x ekseni üzerinde 2 birim sağa y ekseni üzerinde 1 birim yukarı ötelenirse oluşan şeklin grafiği nedir? Şimdi gençler düşeceğimiz hatalar var. Önce şu noktaları düşünelim. Şu nokta ve şu nokta. Şu iki nokta. ((-2,2) ve (2,-2)) Gençler zorda kaldığınızda bakın şu (-2,2) bu noktayı 2 br sağa, yani şuna (x'i işaret etti) 2 ekleyeceğim. Sağa dediği zaman x e eklenir, değil mi? Ha, sağa doğru kaydıracaksam buraya 2 ekleyeceğim. Burası 0 olacak. y ekseni üzerinde 1 br yukarı o zaman buraya 1 eklersem 3, şu noktanın yeni yeri (0,3) yani y ekseni üzerinde 3 birim yukarıda öyle kalsın. Diğer noktaya bakalım. Şu kritik nokta var ya, Ö3: 2 ye -2 Ö2: Yine -2 ye 2. Ö4: Hocam 2 ye -2.

		Ö4→Ö		Ö: (2,-2) önce x söylenir. 2 ye -2 noktası acaba nereye taşınır, 2 br sağa taşı demiş 4 e gelir, -1
		Ö→Ös		olur.((2,-2) noktası (4,-1) olur.) Diğer noktalar arkadaşlar sıfıra üç, bu nokta olur. ((4,-1) işaret
		Ö	X ekseninde öteleme	etti) Maviyle çizeceğim. Ama eğimlere de dikkat etmemiz gerekiyor arkadaşlar. Eğimleri
	τ_3 teknolojik-		eğim değişmez	korumazsam yanlış olur. (Belirlenen noktaları işaretliyor, eğimlere dikkat ederek yeni grafiği
	teorik çerçeve		paralel	çiziyor. Daha sonra x eksenini kestiği noktalar arasında tartışma çıkıyor) Maviyle çizmeye
	oluşturma (eksik)			çalışalım. ((0,3) işaretledi.) Diğeri x'i 4, y si -1. Şöyle bir şey. Birleştireceğiz paralelliği
				koruyacağız.
				Ö7: Hocam.
		Ö7→Ö		Ö: Bir dakka arkadaşlar. Bir sabırlı olun. Ne? Bir dakka arkadaşlar.
		Ö→ Ös		Ö2: Önce yukarı çıktık değil mi hocam?
		Ö2→Ö		Ö: Fark etmiyor. Ha önce yukarı çıkmışız sonra devam etmişiz. Önemli değil ki o. Sonuçta
		Ö→Ö2		ikisini de uygulayacağız. Bu kaçtan geçecek?
			Nokta	Ö2: 0
		Ö2→Ö		Ö: Paralel olacak.
		Ö→Ös	Y ekseninde öteleme	Ö2: Hocam siz nereye gidiyorsunuz 0 dan geçecek.
		Ö2→Ö		Ö: Bilmiyorum kaçtan geçeceğini bilmiyorum. Bir dakka. -2 den geçeceğini düşünüyorsunuz
		Ö→Ö2		ama acaba yanılıyor olmayasınız.
			Nokta	Ö2: Hocam zaten yanılıyoruz.
		Ö2→Ö		Ö8: Hocam yukarı çıktığınızda o yukarı çıkmaz mı? Mavi yukarı çıkacak hocam.
		Ö8→Ö		Ö2: Hocam siz çok geniş açı aldınız.
		Ö2→Ö		Ö4: Evet hocam. 2 olacak hocam 2 olacak.
		Ö4→Ö		Ö: Şimdi arkadaşlar bir sabredin, bir sabredin.
		Ö→Ös		Ö2: 0 dan geçmesi gerekiyor.
		Ö2→Ö		Ö4: 2 den geçmeliydi.
		Ö4→Ö		Ö: Gençler şu noktalarda mutabık mıyız? ((0,3) ve (4,-1) noktaları)
		Ö→Ös		Ö4: Hayır.
		Ö4→Ö		Ö5: evet.
		Ö5→Ö		Ö: Niye?
		Ö→Ö4		Ö2: 0'ın 3'ü hocam, 0'ın 3'ü 3'ün hizasında olacak.
		Ö2→Ö		Ö: 0'a 3. ((0,3) işaret etti) Tamam 3.
		Ö→Ö2		Ö4: O nokta 4 olmayacak hocam.
		Ö4→Ö		Ö2: Hocam o sıfırdan 3 e geçecek.
		Ö2→Ö		Ö: Gençler, artık konuşmayın, artık kimse konuşmasın. Şurda 2 br sağa kaydırın demiş, 2 br
		Ö→Ös		sağa demek x e 2 ekleyeceğiz demektir. 2 eklersem burası 0 yapar. (-2,2) idi (-2,2) noktası (0,3).
	τ_3 teknolojik-	Ö	X ekseninde öteleme	Üç üçü nereden bulduk, y yede 1 br yukarı alalım, (0,3) noktası, şurası 3. (Diğer noktanın
	teorik çerçeve		Nokta	bulunuşunu anlatıyor) 2 br sağa yani 2 ekledik 4 oldu, 1 br yukarı buna (-2 ye) 1 ekledik -1
	oluşturma (eksik)			oldu. Bu noktalarda hiçbir sorun yok. Biraz sağa kaymış olabilir. Şurası -1 e denk geliyor.
				Şimdi merak ettiklerimiz şura kaç olur. Ha bura. (Fonksiyonun x eksenini kestiği noktalardan en
				sağda olan yer kastediliyor)

<table>
<tr>
<td></td>
<td>τ_3 teknolojik-teorik çerçeve oluşturma (eksik)

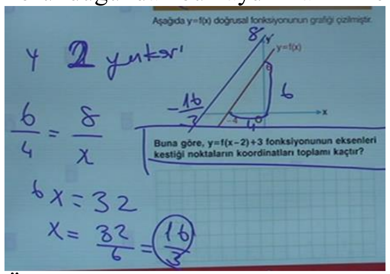
$t_{1,6}$ görevi</td>
<td>Ö→Ös
Ö5→Ö
Ö2→Ö
Ö4→Ö
Ö→Ös

Ö3→Ö
Ö→Ös

Ö3→Ö
Ö→Ös
Ö1→Ö
Ö→Ös
Ö2→Ö
Ö→Ös
Ö

Ö6→Ö
Ö→Ö6
Ö6→Ö
Ö
Ö5→Ö6
Ö→Ös
Ö

Ö→Ös</td>
<td>Eğim değişmez
Nokta

X ekseninde öteleme
Y ekseninde öteleme
Eğim
Nokta</td>
<td>Ö5: 6
Ö2:7
Ö4: 5 olur hocam.
Ö: İşte 6 değil. Bir tahminde daha bulunun. Şekli sadece 2 br sağa kaydırırsak 6 olur. Haklısınız. Ama yukarıya doğru kaydırdığımız zaman o beşe çıkar, niye?
Ö3: Eğim aynı değil mi hocam o zaman 1 eksilir.
Ö: Eğim değişmiyor. Eğimi koruyoruz. Şimdi gençler şekli alıp yukarı taşıdığınız zaman bu korunmaz ki,(grafiğin x eksenini kestiği noktadan bahsediyoruz) 6 daydı daha önce şunu aşağıda düşünsenize. Şöyle bir şeydi. 6 dan geçiyor ama yukarı doğru kaydırdığınız için bu tarafa doğru gelecek.
Ö3: O zaman bu da -1 olur.(x eksenini kesen diğer bir noktadan bahsediyor)
Ö: Evet, şunun cevabına bakalım.(Kontrol yapıyor) Bir dakika arkadaşlar. Bakın -3 ten geçiyor.
Ö1: Ama siz demiştiniz 4 ten geçer.(-4 kastediyor)
Ö: Gençler arkadaşlar 3 ten geçiyor işte (-3 kastediliyor)
Ö2: Hocam sağ taraftakiler niçin geçmiyor? (Bu grafiğe bazı öğrenciler itiraz ediyor)
Ö: Arkadaşlar bir konuşmayı bırakalım. Şimdi yorumu tekrar yapalım. Sadece 2 br sağa kaydırdığımızı düşünürsek haklısınız, şu 0 dan geçiyordu 2 den geçmesi gerekirdi ama yukarı doğru kaydırdığımız zaman şekil bu da bu tarafa doğru geliyor.
Ö6: Ama y ekseni üzerinde kaydırmıyor muyuz?
Ö: y ekseni üzerinde 1 br kaydırıyoruz.
Ö6: Ama o zaman niye x değişiyor.
Ö: Güzel
Ö5: Eğim var eğim!
Ö: Peki bu soru burada dursun bi arkadaşlar. (Diğer soruya geçiyor) Şimdi buna bakın. Şu soruyu görmeyin.
(Öğretmen daha basit bir soruda doğrusal bir fonksiyonda yukarı kaydırma yapıldığında şekil korunduğundan bu kaydırmanın x eksenini kesen noktayı nasıl etkileneceğini anlatıyor)


Ö: Bunu (yukarıdaki şekli) y ekseni üzerinde 1 br yukarı taşıyalım. Herkes buraya dikkat etsin. 1 br yukarı taşıdığımız zaman bu 7 den geçecek değil mi? (Öğretmen soruda değişiklik yapıyor) Hatta 1 demeyelim şuna 2 diyelim. 8 den geçecek değil mi? Eğim korunacak arkadaşlar bakın.</td>
</tr>
</table>

	τ_1 teknolojik-teorik çerçeve oluşturma Tekniksel çalışma (kısmen)	Ö Ö1→Ö Ö2→Ö Ö→Ös Ö4→Ö Ö→Ös Ö2→Ö Ö4→Ö Ö→Ös Ö2→Ö Ö→Ö2 Ö1→Ö Ö→Ö1	Doğrusal fonksiyon grafiği y ekseninde öteleme Nokta Eğim Eğim değişmez Eğim=y/x Orantı Bir bilinmeyenli denklemler	Deminden beri bunu anlatmaya çalışıyorum. Yine paralel olacak yani şurası 8 e denk geliyorsa acaba buraya ne denk gelir? Şöyle düşünelim arkadaşlar bunun y si 6 bunun x i 4, 6/4 yani 1,5 kat korunacak. Yani ona göre düşüneceğiz. Ne olur? Ö1: -6 Ö2: 8 e -6 Ö: 6/4=8/x diye düşünelim. Ö4: -4 hocam o? Ö: Önemli değil x i bulduktan sonra rahat yerine yazarız. Ö2: 8 Ö4: Hocam eşitlik çıkmıyor tam. Ö: Olsun ya. 6x=32 ise x=16/3 yani 5 ten biraz fazla. Ö2: Hocam tam çıkmaz mı? Ö: Hayır. Ö1: -6 olmaz mı hocam? Ö: Yok (Ders zili çalıyor ve ders tamamlanıyor)
Ö: Öğretmen, Ö1: Öğrenci 1, Ö2: Öğrenci 2,…Ös: Öğrenciler				

EK 8

Tablo II. *Prakseolojik bileşenler ve didaktik anlar*

Seans	Görev Tipi	Teknik	Teknolojik ve Teorik Açıklamalar	Baskın An ya da Alt An	Didaktik Tekniğin Elemanları
1	T_1 : y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x)+k fonksiyonunun grafiğini elde etme $t_{1,1}$: y=3 grafiğinin 2 br yukarıya ötelenmesiyle oluşan grafiği bulma $t_{1,2}$: y=3 grafiğinin 3 br aşağıya ötelenmesiyle oluşan grafiği bulma $t_{1,3}$:y=f(x) parçalı doğrusal fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x)+1 fonksiyonunun grafiğini bulma $t_{1,4}$: y=f(x) parçalı doğrusal fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x)-3 fonksiyonunun grafiğini bulma $t_{1,5}$: y=f(x) parçalı doğrusal fonksiyonunun grafiğini y ekseni üzerinde 2 br aşağı ötelendiğinde oluşan grafiğini bulma $t_{1,6}$: y=f(x) doğrusal fonksiyonunun grafiğinin y ekseni üzerinde 2 br yukarı ötelendiğinde oluşan grafiği bulma	τ_1 Geometrik teknik: y=f(x) fonksiyonu üzerindeki her bir noktanın ordinatı y ekseni boyunca k br öteleme $\tau_{2,1}$ Geometrik teknik: y=f(x) fonksiyonu üzerindeki her bir noktanın apsisi x ekseni boyunca k br öteleme $\tau_{2,2}$ Cebirsel teknik (tamamlanamadı) τ_3 Geometrik teknik y=f(x) fonksiyonu üzerindeki her bir noktanın apsisini x ekseni boyunca a br ve ordinatını y ekseni boyunca b br öteleme	(Öteleme tanımı verilmeden fonksiyonlarda ötelemeye geçiliyor) θ_1: fonksiyonların grafiklerinin ötelenmesi informal olarak veriliyor. θ_2: Sabit fonksiyon tanımı θ_3: Eğim, açı, uzaklık,..gibi kavramları koruyan dönüşüm Θ: İzometri θ_4: Eğim=$\frac{y}{x}$ formülüyle hesaplanmaktadır. θ_5: y=f(x) grafiğinden y=f(x)+k grafiğini elde edilirken y ekseni boyunca k br öteleme θ_6: İki paralel doğrunun eğimi sabittir. Bu doğruların eğimleri bir orantı oluşturmaktadır. θ_7: y=f(x) grafiğinden y=f(x-k) grafiğini elde edilirken x ekseni boyunca k br öteleme θ_8: Parabolün tepe noktasının	τ_1 tekniğin ifadesi T_1 ile ilk karşılaşma τ_1 teknolojik teorik çevreyi oluşturma Tekniksel çalışma ($t_{1,6}$ görevi için) τ_2 tekniğin ifadesi T_2 ile ilk karşılaşma τ_2 teknolojik teorik çevreyi oluşturma Tekniksel çalışma Kurumsallaştırma τ_3 tekniğin ifadesi T_3 ile ilk karşılaşma τ_3 teknolojik teorik çevreyi oluşturma	• Ötelemenin temellerinin nasıl olduğu ve temelleri verilmeden fonksiyonlarda ötelemenin verildiği gözlenmektedir. Bu anlamda teknolojik açıklamalar temelsiz bir şekilde informel biçimde yapılandırılmaktadır. • Öğretimde ilk gerçekleşecek anın özel bir problem durumunu içeren ilk karşılaşma anı olarak beklenmekteydi. Ancak görüleceği üzere öğretmenin fonksiyonların simetri dönüşümlerine ilişkin öğretiminde öncelikle tekniğin ifadesinin verilerek ilk karşılaşma anı ile görev tiplerinin keşfedilmesi ve bir teknik geliştirme anı paypas edilmiştir. Bunun nedeni takip edilen ders kitabındaki aynen sınıfta uygulanması olarak ifade edilebilir. • Öğretmenin alternatif tekniklere yer vermediği ya da yer vermek istediğinde bunun gerçekleştiremediği görülmektedir. $t_{2,1}$ görevinde öğretmen çözümü geometrik tekniklerle gerçekleştirdikten sonra bir de cebirsel teknikle yapmak istemiştir. Ancak bu tekniğin ilerleyen aşamalarında öğrencilerin henüz tanışmadıkları orijinden geçmeyen parabol grafiklerini çizme bilgisi içerdiğinden yarıda keserek tamamlayamamıştır. Diğer taraftan bazı görevlerin veriliş biçimleri cebirsel tekniklerin uygulanmasını zorlaştırdığı ifade

	T_2: y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x-k) fonksiyonunun grafiğini elde etme $t_{2,1}$: $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseninde 1 br sağa ötelenmesiyle oluşan grafiği bulma $t_{2,2}$: $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseninde 2 br sola ötelenmesiyle oluşan grafiği bulma T_3 :y=f(x) fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak y=f(x-a)+b fonksiyonunun grafiğini elde etme $t_{2,2}$: y=f(x) parçalı doğrusal fonksiyonun x ekseninde 2 br sağa ve y ekseninde 1 br yukarı ötelenmesiyle oluşan grafiği bulma		informel tanımı θ_9: Parabolün informel tanımı θ_{10}: y=f(x) grafiğinden y=f(x-a)+b grafiğini elde edilirken x ekseni boyunca a br ve y ekseni boyunca b br öteleme θ_{11}: (2,-2) noktası x ekseninde 2 br sağa ve y ekseninde 1 br yukarı taşınırsa (4,-1) denk geleceği bilgisi, yani informel olarak öteleme.		edilebilir. $t_{1,4}$ görevinde parçalı doğrusal fonksiyonun kuralının bulunduktan sonra istenen ötelemenin cebirsel olarak gerçekleştirilmesiyle elde edilecek fonksiyonun grafiğinin çizilmesi yapılabilir olmakla birlikte içerisinde çok zor süreçler barındırmaktadır. Dolayısıyla alternatif teknikler verilen görevlerde yeterince kullanılmamıştır. • Prakseolojilerde didaktik anlardan çok azı gözlenmiş, bazı didaktik anlar hiç gözlenmemiştir. Diğer taraftan gözlenen didaktik anlar büyük ölçüde eksik bir şekilde ortaya çıkmıştır. • Alternatif tekniklerin kullanılmamasında bir diğer gerekçe kullanılan tekniklerin geometrik tekniklerle sınırlandırılması da olabilir. $t_{2,1}$ görevinde cebirsel teknikler parabol konusunu bilmeyi gerektirdiği için kullanılamamıştır. Dolayısıyla burada kullanılan teknikler bağlamında didaktik prakseolojide bir sınırlandırma yapıldığını göstermektedir. Bu durum burada teknikler bağlamında geometrik tekniklerin kullanılmasına yönelik bir sınırlamaya gidildiği şeklinde yorumlanabilir. • Son olarak programın öğretmene sunduğu teknolojik açıklamaların terk edilerek henüz öğretilmeyen dönüşümlerle ilgili teknolojik açıklamaların verilmeye çalışıldığı gözlenmiştir. Bu da teknolojik kaymalara işaret etmektedir.