

**SIERPINSKI ÜÇGENİ VE
SIERPINSKI TETRAHEDRONU
ÜZERİNDE KAOTİK DİNAMİK
SİSTEMLER**

Doktora Tezi

Nisa ASLAN

Eskişehir, 2019

**SIERPINSKI ÜÇGENİ VE SIERPINSKI TETRAHEDRONU
ÜZERİNDE KAOTİK DİNAMİK SİSTEMLER**

Nisa ASLAN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışmanlar: Prof. Dr. Bünyamin DEMİR

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa SALTAN

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran, 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nisa ASLAN'ın “Sierpinski Üçgeni ve Sierpinski Tetrahedronu Üzerinde Kaotik Dinamik Sistemler” başlıklı tezi 14/06/2019 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği”nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Unvanı-Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Bünyamin DEMİR	
Üye	: Prof. Dr. Süleyman DEMİR	
Üye	: Prof. Dr. Ayşe BAYAR	
Üye	: Doç. Dr. Nezahat ÇETİN	
Üye	: Doç. Dr. Nevin MAHİR	

Enstitü Müdürü

ÖZET

SIERPINSKI ÜÇGENİ VE SIERPINSKI TETRAHEDRONU ÜZERİNDE KAOTİK DİNAMİK SİSTEMLER

Nisa ASLAN

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Haziran, 2019

Danışman: Prof. Dr. Bünyamin DEMİR

İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa SALTAN

Bu tezde klasik fraktallardan Sierpinski üçgeni ve Sierpinski tetrahedronu üzerinde kaotik dinamik sistemlerin inşa edilmesi amaçlanmıştır. Bu çalışmanın ilk kısmında fraktallar ve dinamik sistemlerle ilgili temel tanımlara yer verilmiştir. İkinci bölümde zaman kaçış algoritmasından bahsedilmiş ve Barnsley'in bu konuda yapmış olduğu çalışmalardan örnekler incelenmiştir. Barnsley'in bu örneklerde tanımlamış olduğu fonksiyonlardan farklı dönüşümler kullanılarak klasik ve dik Sierpinski üçgenleri zaman kaçış algoritması metoduyla elde edilmiş ve bu fraktallar Maple programı kullanılarak çizdirilmiştir. Bu çalışmanın diğer aşamasında ise iki ve üç boyutlu Sierpinski üçgeni üzerinde kesikli zamanlı kaotik dinamik sistemler elde edilmiştir. Sierpinski tetrahedronu üzerinde bir içsel metrik tanımlanmış ve bu metriğin bazı geometrik özellikleri incelenmiştir. Daha sonra Sierpinski üçgeni ve Sierpinski tetrahedronu üzerinde tanımlanan bu dinamik sistemlerin kaotikliği ve periyodik noktaları araştırılmıştır. Ayrıca aynı yapılar üzerinde tanımlanan farklı dinamik sistemlerin karşılaştırılması yapılmıştır. Son olarak ise n -boyuttaki Sierpinski üçgeni için genelleştirilmiş bir içsel metrik formülü ve dinamik sistem örneği verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Dinamik Sistemler, Sierpinski Üçgeni ve Tetrahedronu,
Kaos, İçsel Metrik, Periyodik Noktalar

ABSTRACT

CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS ON THE SIERPINSKI GASKET AND THE SIERPINSKI TETRAHEDRON

Nisa ASLAN

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, June, 2019

Supervisor: Prof. Dr. Bünyamin DEMİR

Co-supervisor: Asst. Prof. Dr. Mustafa SALTAN

In this thesis, it is aimed to construct chaotic dynamical systems on the Sierpinski gasket and the Sierpinski tetrahedron from the classical fractals. In the first part of this study, basic definitions about fractals and dynamical systems are given. In the second part, escape time algorithm is mentioned and examples of Barnsley's studies are examined. By using maps which are different from the maps defined by Barnsley, classical and right Sierpinski gaskets are obtained via escape time algorithm and these fractals are drawn by Maple programme. In the other part of this study, discrete chaotic dynamical systems are obtained on two and three dimensional Sierpinski gasket. An intrinsic metric formula is defined on the Sierpinski tetrahedron and a geometrical property of this metric is examined. Moreover, periodic points and the conditions of being chaotic of these dynamical systems, defined on the Sierpinski gasket and Sierpinski tetrahedron, are investigated. In addition, different dynamical systems on the same structures are compared. Finally, a generalized intrinsic metric formula and a dynamical system example on the n -dimensional Sierpinski gasket are given.

Keywords: Dynamical Systems, Sierpinski Gasket and Tetrahedron, Chaos,
Intrinsic Metric, Periodic Points.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan, tecrübe, bilgi ve birikimleriyle her zaman bana yol gösteren çok değerli danışman hocalarım Prof. Dr. Bünyamin DEMİR'e ve Dr. Öğr. Üyesi Mustafa SALTAN'a, yapıcı yorumlarından dolayı çok değerli jüri üyelerine, bugünlere gelmemde büyük emeği olan başta annem ve babam olmak üzere bütün aileme ve bu süreçte bana her zaman destek olup yanımda olan sevgili eşim İsmail ASLAN'a, son olarak doktora sürecim boyunca maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Nisa ASLAN

Haziran 2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Nisa ASLAN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1 Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri ve Kendine Benzerlik	6
2.2 Fraktal ve Fraktal Boyut	8
2.3 Kod Uzayı ve Bir Noktanın Kod Temsili	10
2.4 Dinamik Sistemler ve Kaos	11
3. GENİŞLEME VE KATLAMA DÖNÜŞÜMLERİ KULLANILARAK ZAMAN KAÇIŞ ALGORİTMASI YOLUYLA KLASİK VE DİK SIERPINSKI ÜÇGENLERİNİN ELDE EDİLMESİ	15
3.1 Genişleme ve Katlama Dönüşümleri Kullanılarak Zaman Kaçış Algoritması Yoluyla Klasik Sierpinski Üçgeninin Elde Edilmesi	17
3.2 Genişleme ve Katlama Dönüşümleri Kullanılarak Zaman Kaçış Algoritması Yoluyla Dik Sierpinski Üçgeninin Elde Edilmesi	19

4. SIERPINSKI ÜÇGENİ ÜZERİNDE KAOTİK DİNAMİK SİS- TEMLER.....	23
4.1 Sierpinski Üçgeni Üzerindeki Noktaların Kodlama Süreci ...	23
4.2 Sierpinski Üçgeni Üzerinde $\{S; F\}$ Kaotik Dinamik Sistemi- nin İnşası	26
4.3 Sierpinski Üçgeni Üzerinde $\{S; F\}$ Dinamik Sistemine Denk Olmayan Bir Dinamik Sistem İnşası	36
4.4 Sierpinski Üçgeni Üzerinde $\{S; G\}$ Dinamik Sistemi İle Denk Olan Bir Dinamik Sistem İnşası	43
5. SIERPINSKI TETRAHEDRONU ÜZERİNDE İÇSEL METRİK VE KAOTİK DİNAMİK SİSTEM İNŞASI	52
5.1 Sierpinski Tetrahedronu Üzerindeki Noktaların Kod Gös- terimleri.....	53
5.2 Sierpinski Tetrahedronu Üzerinde İçsel Metrik İnşası	56
5.3 Sierpinski Tetrahedronu Üzerinde $\{ST; F\}$ Kaotik Di- namik Sisteminin İnşası	64
5.4 Sierpinski Tetrahedronu Üzerinde $\{ST; F\}$ ile Denk Olan Bir Kaotik Dinamik Sistem İnşası	71
5.5 Sierpinski Tetrahedronu Üzerinde $\{ST; F\}$ ile Denk Olmayan Bir Kaotik Dinamik Sistem İnşası	76
6. n-BOYUTLU SIERPINSKI ÜÇGENİ ÜZERİNDE İÇSEL METRİK VE KAOTİK DİNAMİK SİSTEM İNŞASI	82
6.1 S_n Üzerinde İçsel Metrik İnşası	82
6.2 S_n Üzerinde $\{S_n; F\}$ Kaotik Dinamik Sisteminin İnşası	83
7. SONUÇ.....	84
KAYNAKÇA.....	85
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1.	Lorenz çekicisi 3
Şekil 2.1.	$c = -0,1 + 0,65i$ değerine karşılık gelen Julia kümesi 9
Şekil 3.1.	Dik Sierpinski üçgeninin inşası 16
Şekil 3.2.	Sierpinski üçgeni üzerindeki genişleme ve katlama dönüşümleri 18
Şekil 3.3.	Zaman kaçış algoritmasıyla Sierpinski üçgeninin inşası 18
Şekil 3.4.	Dik Sierpinski üçgeni üzerinde genişleme, katlama ve afin dönüşümleri 19
Şekil 3.5.	Zaman kaçış algoritması yoluyla renkli olarak dik Sierpinski üçgeninin inşası 21
Şekil 3.6.	Zaman kaçış algoritması yoluyla renksiz olarak dik Sierpinski üçgeninin inşası 22
Şekil 4.1.	Kodlama süreci 24
Şekil 4.2.	S' 'nin S_0 (siyah), S_1 (mavi) ve S_2 (kırmızı) alt üçgenleri 24
Şekil 4.3.	S_0 'ın S_{02} (yeşil), S_{210} 'ın S_{2102} (kırmızı) ve S_{1021} 'in S_{10211} (mavi) alt üçgenleri 25
Şekil 4.4.	f_1, f_2, f_3, f_4 fonksiyonlarının $\blacktriangle$ kümesi üzerindeki etkisi 27
Şekil 4.5.	S_0, S_{0x_2} ve $S_{0x_2x_3}$ kod kümelerinin F fonksiyonu altındaki görüntüsü 30
Şekil 4.6.	S_1, S_{1x_2} ve $S_{1x_2x_3}$ kod kümelerinin F fonksiyonu altındaki görüntüsü 31
Şekil 4.7.	S_2, S_{2x_2} ve $S_{2x_2x_3}$ kod kümelerinin F fonksiyonu altındaki görüntüsü 31
Şekil 4.8.	S_0, S_{0x_2} ve $S_{0x_2x_3}$ kod kümelerinin G fonksiyonu altındaki görüntüsü 38
Şekil 4.9.	$S_{10}, S_{110}, S_{1110}$ kod kümelerinin G fonksiyonu altındaki görüntüsü 38
Şekil 4.10.	$S_{12}, S_{112}, S_{1112}$ kod kümelerinin G fonksiyonu altındaki görüntüsü 39

Şekil 4.11.	S_2, S_{2x_2} ve $S_{2x_2x_3}$ kod kümelerinin G fonksiyonu altındaki görüntüsü	40
Şekil 4.12.	$S_{01}, S_{001}, S_{0001}$ kod kümelerinin T fonksiyonu altındaki görüntüsü	44
Şekil 4.13.	$S_{02}, S_{002}, S_{0002}$ kod kümelerinin T fonksiyonu altındaki görüntüsü	45
Şekil 4.14.	S_1, S_{1x_2} ve $S_{1x_2x_3}$ kod kümelerinin T fonksiyonu altındaki görüntüsü	46
Şekil 4.15.	S_2, S_{2x_2} ve $S_{2x_2x_3}$ kod kümelerinin T fonksiyonu altındaki görüntüsü	46
Şekil 5.1.	Sierpinski tetrahedronunun inşası	52
Şekil 5.2.	Sierpinski tetrahedronu	53
Şekil 5.3.	ST_σ 'nın $ST_{\sigma_0}, ST_{\sigma_1}, ST_{\sigma_2}, ST_{\sigma_3}$ alt Sierpinski tetrahedronları	54
Şekil 5.4.	$a_k = 0$ ve $b_k = 1$ için sırasıyla K_σ noktasından ve $Q_\sigma R_\sigma$ doğru parçasından geçen en kısa yollar	57
Şekil 5.5.	$a_k = 0$ ve $b_k = 1$ için $M_\sigma L_\sigma$ doğru parçasından geçen en kısa yol	58

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$B(x, \varepsilon)$	: x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
S	: Sierpinski Üçgeni
D	: Dik Sierpinski Üçgeni
ST	: Sierpinski Tetrahedronu
S_n	: n -boyutlu Sierpinski Üçgeni
YFS	: Yinelemeli Fonksiyon Sistemi
Bkz.	: Bakınız
d.d.	: Diğer durumlarda

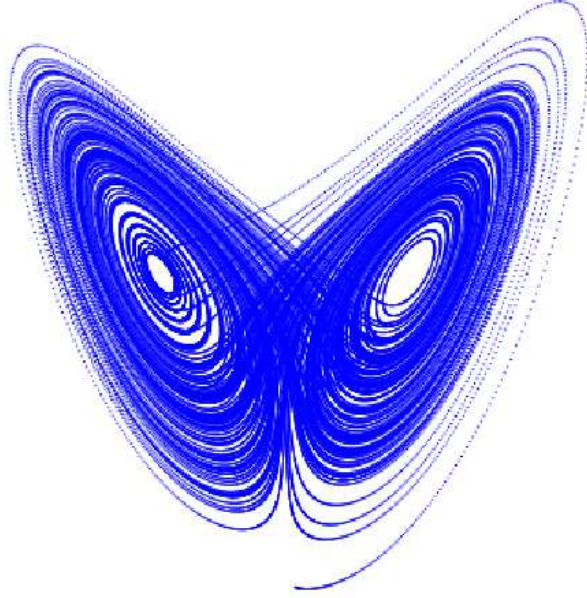
1. GİRİŞ

Latince "kırılmış, parçalanmış" anlamına gelen fractus kelimesinden türetilen fraktal kavramı ilk olarak 1975'li yıllarda ortaya atılmıştır. Benoit Mandelbrot'un "İngiltere'nin kıyı uzunluğu nedir?" sorusunu sormuş olduğu çalışması bu teorinin başlangıcı sayılabilir [20, 21]. Bu çalışmada, Mandelbrot kıyı uzunluğunun, ölçüm aracının hassasiyetine bağlı olduğunu ifade etmiş ve kıyı boyunca yerleştirildiği düşünülen pergelin açıklığı küçüldükçe daha ayrıntılı bir ölçüm yapılacağını yani hassasiyet arttıkça daha büyük sonuçlar elde edilip kıyı uzunluğunun sonsuz olacağını belirtmiştir. Doğadaki şekilleri tanımlamakta Öklid geometrisinin yetersiz kalmasını ise "Neden geometri sıkça soğuk ve kuru olarak tanımlanır? Bir nedeni bir bulutun, bir dağın, bir sahil şeridinin veya bir ağacın şeklini tanımlamadaki yetersizliğindendir. Bulutlar küre değildir, dağlar koni değildir, sahil kıyıları çember değildir ve ışık demeti de zaten düz bir çizgide hareket etmez." cümleleri ile ifade etmiş ve fraktal geometriyi "doğanın geometrisi" olarak tanımlamıştır [20]. Ancak Öklid geometrisinde bütün şekiller tam sayı boyutuna sahip olduğundan burada yeni bir boyut kavramının gerekliliği ortaya çıkmış ve bu kavram Mandelbrot tarafından fraktal boyut olarak isimlendirilmiştir. Buna göre kesin bir tanımla olmamakla birlikte fraktallar, ilk olarak fraktal boyutu tamsayı olmayan ve kendine benzerlik özelliğine sahip olan kümeler olarak ifade edilmiştir. Ancak kendine benzerlik özelliğine sahip olup fraktal boyutu tam sayı olan yapılar da mevcut olduğu için daha sonraları fraktallar, fraktal boyutu topolojik boyutundan büyük olan kendine benzer kümeler olarak tanımlanmıştır [3, 11, 20].

Doğada kendine benzerlik özelliğini taşıyan yapılarla sıkça karşılaşmaktadır. Bu yapılara örnek olarak ağaçlardaki dallanmalar, eğrelti otu ve kar tanesi verilebilir. Ayrıca Cantor'un 1883 yılında tanımlamış olduğu Cantor kümesi, 1904 yılında Helge von Koch tarafından tanımlanan Koch eğrisi, 1915 yılında Vaclav Sierpinski tarafından tanımlanan Sierpinski üçgeni gibi yapılar da kendine benzerlik özelliğini taşıyan kümelerin en klasik örneklerdendir. Fraktal kavramını ilk olarak ortaya atan kişi Mandelbrot olsa da, bu örnekler aslında bu teorinin daha eskilere dayandığını göstermektedir. Ayrıca fraktal denilince ilk akla gelen kümelerden olan Julia kümeleri de fraktal kavramı ortaya atılmadan çok önce tanımlanmış

ancak o zamanın teknolojisiyle bu kümeleri bilgisayarda görüntülemek mümkün olmamıştır. Daha sonraları bilgisayar kullanılarak incelenmeye başlanan ve kaotik bir yapı gösteren bu gizemli kümeler, Mandelbrot'un kendi ismiyle anılan ve kendine benzerlik özelliği taşıyan meşhur Mandelbrot kümesinin de keşfedilmesine yardımcı olmuştur. Julia kümelerinin yanı sıra genel olarak fraktallar ile kaos arasında doğrudan bir ilişki mevcuttur. Hatta kaotik sistemlerle ortak birçok özelliğe sahip olan fraktal geometri "kaosun resmi" olarak da anılmaktadır [5].

Kaos kavramını ilk olarak 1900'lü yıllarda Poincaré, güneş sisteminin kararlı olup olmadığı sorusuna cevap ararken kullanmış ve sistemin çözümünün başlangıç koşullarına bağımlı olduğunu ve bu kadar uzun vadede bir tahmin yapmanın imkansız olduğunu belirtmiştir [18]. 1963 yılında ise Edward Lorenz [19] hava tahmininin neden öngörülemez olduğuna dair fikir edinmek için atmosferdeki bir ısı aktarımı yapısının basitleştirilmiş bir matematiksel modeli üzerinde çalışmıştır. Başlangıçta sıradan bir diferansiyel denklem gibi gözüken bu model bazı özel parametreler için kaotik bir yapı ortaya koymuştur. Lorenz gözlemleri sonucunda bu denklemlerin çözümlerinin hiçbir zaman dengeye veya periyodik bir duruma yerleşmediğini, bunun yerine düzensiz ve periyodik olmayan şekilde salınmaya devam ettiğini farketmiştir. Ayrıca başlangıç şartlarında çok küçük oynamalar yaptığında ise çözümünün davranışlarının tamamen değişmekte olduğunu görmüştür. Bu durum göstermiştir ki, sistem tahmin edilemez olup atmosferdeki mevcut durumu ölçmede yapılan ufak hatalar hızlı bir şekilde artmış ve sonuçta ortaya kötü bir hava tahmini çıkmıştır. Ancak Lorenz, üç boyuttaki çizimle kaosun içinde bir yapı bulunduğunu göstermiş ve denklemlerin çözümlerinin kelebek şeklinde bir nokta kümesinin içine düştüğünü görmüştür. Yani dışarıdan bakıldığında düzensiz olan kaotik sistemlerin bile aslında kendi içinde bir düzene sahip olduğu sonucuna varılmıştır. Lorenz'in yıllar önce bulmuş olduğu Lorenz çekicisi adını alan ve kelebeği andıran bu yapı (Bkz. Şekil 1.1) günümüzde bir fraktal örneği olarak görülmektedir [29]. Yıllar önce Poincaré tarafından da ortaya atılan ancak daha sonra Lorenz tarafından yeniden keşfedilen başlangıç şartlarına hassas bağımlı olma durumu "Brezilya'da bir kelebeğin kanat çırpmasının Texas'da bir kasırgaya neden olması" yani kelebek etkisi olarak adlandırılmıştır.



Şekil 1.1: *Lorenz çekicisi*

Günümüzde kaos kavramı dinamik sistemler teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Dinamik sistemler alanında sıkça karşılaşılan bu teori için Devaney, Li-Yorke, Block ve Copple tarafından farklı kaos tanımları yapılmış olsa da en genel ifadeyle bu teori, dinamik sistemlerin başlangıç şartlarına hassas bağımlılıklarını inceler. Matematik veya fiziğin bir dalı olarak anılan, sistemdeki değişiklikleri çoğunlukla zamana bağlı olarak inceleyen dinamik sistemler, ayrıca birçok farklı disiplinle birlikte de anılmaktadır. Örneğin, bir popülasyondaki nüfus artışı, bir kanser hücresinin büyümesi, bir sarkacın hareketi, hava durumu tahmini, hisse senedindeki artış gibi dinamik sistemleri ilgilendiren konular biyoloji, tıp, fizik, finans gibi farklı disiplinlerin çalışma alanlarından birer örnek olarak gösterilebilir. Ayrıca bu tezde ele alınan fraktallar üzerinde dinamik sistemlerin inşası da yine bu alanlardaki çalışmalara örnek olarak verilebilir.

Barnsley'in dik Sierpinski üçgeni üzerinde yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) ile ilişkilendirerek tanımlamış olduğu fonksiyon, fraktallar üzerindeki dinamik sistem çalışmalarına bir örnek teşkil eder. Ayrıca Barnsley sürekli olmayan bu dönüşümü

kullanarak zaman kaçış algoritması yoluyla dik Sierpinski üçgenini elde etmiştir [3].

Bu çalışmanın ilk kısmında, Barnsley'in yönteminden farklı olarak yinelemeli fonksiyon sistemleri kullanılmadan, genişleme, katlama ve afin dönüşümleri yardımıyla eşitlik (3.2) ve (3.3)'te verilen sürekli dönüşümler tanımlanmış ve zaman kaçış algoritması kullanılarak klasik Sierpinski ve dik Sierpinski üçgeninin inşası yapılmıştır. Sierpinski üçgeni üzerinde elde edilen bu dönüşümler aslında bir dinamik sistem belirtmektedir. Buradan yola çıkılarak, bu tezde klasik fraktallardan olan Sierpinski üçgeni ve Sierpinski tetrahedronu üzerinde farklı kaotik dinamik sistemlerin elde edilmesi amaçlanmıştır. Öte yandan genişleme ve katlama dönüşümleri yardımıyla Sierpinski üçgeni üzerinde çok farklı kaotik dinamik sistemler tanımlamanın mümkün olduğu görülmüştür (Bkz. (4.1), (4.4), (4.5)). Tanımlanmış olan bu dinamik sistemlerin kaotikliğini incelemek ise ayrı bir problem olarak ele alınmıştır. Sierpinski üçgeni üzerinde genişleme ve katlama dönüşümlerinin bileşkesi olarak elde edilen fonksiyonlar oldukça karmaşık olduğundan bu fonksiyonları kullanarak işlem yapmak, yani bu yapıların kaotikliğini incelemek ve periyodik noktalarını hesaplamak epey güçtür. Bu yüzden, tanımlanmış olan dinamik sistemler Önerme 4.2.2, 4.3.1 ve 4.4.1'de Sierpinski üçgeni üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak ifade edilmiştir. Böylece ortaya çok daha iyi formülize edilmiş dönüşümler ortaya çıkmıştır. Teorem 4.2.3 ve 4.3.2'den de görüleceği üzere, [24]'te tanımlanan ve yine Sierpinski üçgeninin üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak elde edilen içsel metrik yardımıyla bu dinamik sistemlerin kaotikliğini göstermek ve periyodik noktalarını hesaplamak oldukça kolaylaşmıştır. Hatta Önerme 4.2.2'de verilen dinamik sistem için periyodik noktaları hesaplamada kullanışlı olan bir algoritma elde edilmiştir. Algoritma sayesinde bu dinamik sistemin herhangi n -periyotlu bir noktası kolaylıkla hesaplanabilmektedir. Ayrıca Sierpinski üçgeni üzerinde elde edilen bu dinamik sistemlerin topolojik olarak denk olup olmadıkları da incelenmiştir (Bkz. Sonuç 4.3.3, 4.4.4).

Sierpinski üçgeninin kod kümesi üzerinde ifade edilen bu dinamik sistemlerden yola çıkılarak Sierpinski tetrahedronunun kod kümesi üzerinde de farklı dinamik sistemler tanımlanmıştır. Tanımlanan bu dinamik sistemlerin kaotikliğinin incelenmesi için bu küme üzerinde bir metriğe ihtiyaç duyulduğundan, öncelikle Sierpinski tetrahedronu üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak Teorem 5.2.1'de yeni

bir içsel metrik verilmiştir. Elde edilen bu metrik yardımıyla dinamik sistemlerin Devaney anlamında kaotikliği incelenip (Bkz. Teorem 5.3.2), periyodik noktaları hesaplanmış ayrıca bu dinamik sistemlerin denklikleri araştırılmıştır (Bkz. Sonuç 5.4.4 ve 5.5.2).

Çalışmanın son kısmında, Sierpinski tetrahedronu üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak elde edilen Teorem 5.2.1'deki içsel metrik, n -boyutlu Sierpinski üçgeni için de genelleştirilmiştir (Bkz. Teorem 6.1.1). Ayrıca Önerme 4.2.2 ve 5.3.1'de tanımlanan dinamik sistemler yardımıyla yine n -boyutlu Sierpinski üçgeni üzerinde genelleştirilmiş bir dinamik sistem örneği verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılan yinelemeli fonksiyon sistemleri, fraktallar, bir noktanın kod temsili, dinamik sistemler ve kaos ile ilgili bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri ve Kendine Benzerlik

Literatürde fraktalları elde etmek için kullanılan farklı yöntemler mevcuttur. En çok kullanılan yöntemlerden birisi olan yinelemeli fonksiyon sistemleri, 1981 yılında Hutchinson tarafından ortaya atılmıştır. Sierpinski üçgeni, Cantor kümesi, Koch eğrisi, Box (Vicsek) fraktalı gibi birçok klasik fraktal bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak elde edilebilir. Yinelemeli fonksiyon sistemleri ile ilgili tanım ve teoremler aşağıda verilmektedir (Ayrıntılar için bkz. [3, 17, 23]).

Tanım 2.1.1. $f : X \rightarrow X$ olmak üzere $f(x_0) = x_0$ olacak şekildeki $x_0 \in X$ noktasına f fonksiyonunun sabit noktası denir.

Tanım 2.1.2. (Büzülme Dönüşümü) (X, d) metrik uzayı verilsin. $\forall x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde $0 \leq k < 1$ sayısı var ise $f : X \rightarrow X$ dönüşümüne büzülme dönüşümü, bu türden k sayısına ise f 'nin büzülme katsayısı denir.

$\forall x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) = kd(x, y)$ olacak şekilde $0 < k < 1$ sayısı var ise $f : X \rightarrow X$ dönüşümüne benzerlik dönüşümü denir.

Teorem 2.1.3. (Sabit Nokta Teoremi) (X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası $x_0 \in X$ vardır ve $\forall x \in X$ için

$$x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$$

dizisi x_0 sabit noktasına yakınsar. Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ olur. f^n burada f fonksiyonunun n . iterasyonu yani f 'nin kendisi ile n defa bileşkesi anlamındadır.

Tanım 2.1.4. (X, d) tam metrik uzay olmak üzere $\mathcal{H}(X)$, X 'in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı, yani

$$\mathcal{H}(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ kompakt ve } A \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir $x \in X$ noktasının $B \in \mathcal{H}(X)$ kümesine uzaklığı,

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) | y \in B\}$$

ve bir A kümesinin B kümesine olan uzaklığı

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) | x \in A\}$$

olmak üzere

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

ifadesine A ile B arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.

Teorem 2.1.5. Yukarıda verilen h fonksiyonu ile birlikte tanımlanan $(\mathcal{H}(X), h)$ ikilisi bir metrik uzaydır. Burada h fonksiyonu Hausdorff metriği olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.6. (X, d) tam metrik uzay ise $(\mathcal{H}(X), h)$ tam metrik uzaydır.

Tanım 2.1.7. (YFS) (X, d) tam metrik uzay ve $f_i : X \rightarrow X, (i = 1, 2, \dots, n)$ büzülme katsayıları sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olan büzülme dönüşümleri olsun.

$\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ büzülme dönüşümlerinin sonlu kümesine yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) adı verilir.

Teorem 2.1.8. (X, d) bir tam metrik uzay ve $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ bir YFS olsun. $\forall S \in \mathcal{H}(X)$ için

$$F(S) = \bigcup_{i=1}^n f_i(S)$$

şeklinde tanımlı $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ fonksiyonu $(\mathcal{H}(X), h)$ üzerinde büzülme katsayısı $\alpha = \max\{\alpha_i : i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ olan bir büzülme dönüşümüdür ve F 'nin $F(A) = A$ olacak şekilde tek bir $A \in \mathcal{H}(X)$ sabit noktası vardır. Ayrıca $\forall S \in \mathcal{H}(X)$ için $(F^k(S))_{k=0}^\infty$ dizisi A 'ya yakınsar ve A kümesine bu YFS'nin atraktörü denir.

Bir yinelemeli fonksiyon sisteminin belirlediği atraktör tek türdür ve bu yapı kendine benzer küme olarak ifade edilir.

2.2. Fraktal ve Fraktal Boyut

Kesin bir tanımı olmamakla birlikte fraktallar genel olarak kendine benzerlik özelliğine sahip kümelerdir. Ancak bu özellik, fraktalları tanımlamak için tek başına yeterli olmadığından fraktal tanımının daha iyi anlaşılması için bu bölümde fraktal boyut kavramından bahsedilecektir (Ayrıntılar için bkz. [3, 9, 11, 13, 23, 30]).

Tanım 2.2.1. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $\forall x \in Y$ için $x \in U$ olacak şekildeki açıklerden oluşan

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{T} | x \in U\}$$

kümesine Y 'nin açık örtüsü denir ve bu durumda $Y \subseteq \bigcup_{x \in Y} U$ olur.

Tanım 2.2.2. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, Y 'nin iki açık örtüsü olmak üzere $\forall A \in \mathcal{A}$ için $A \subset B$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ varsa $\mathcal{A}$ örtüsüne $\mathcal{B}$ 'nin inceltimi denir.

Tanım 2.2.3. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $\mathcal{A}$, Y 'nin açık örtüsü olmak üzere $\mathcal{A}$ 'dan alınan en fazla n tane kümenin kesişimi boştan farklı oluyorsa n sayısına $\mathcal{A}$ 'nın mertebesi denir.

Tanım 2.2.4. (Topolojik Boyut) $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Y 'nin her açık örtüsünün mertebesi $n+1$ olan inceltimi var fakat mertebesi n olan inceltimi yok ise n sayısına Y 'nin topolojik boyutu denir.

Tanım 2.2.5. (Fraktal Boyut) (X, d) bir metrik uzay ve $A \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere $\forall \epsilon > 0$ için $N(A, \epsilon) \in \mathbb{N}$, A 'yı örtmek için gerekli olan ϵ uzunluklu kapalı yuvarların minimum sayısı olsun. Eğer

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$$

limiti varsa bu limite A 'nın fraktal boyutu denir.

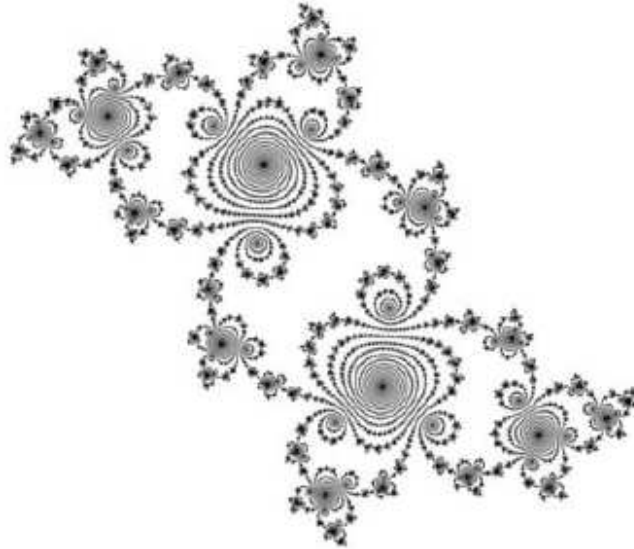
Bir doğru parçasının boyutu 1, karenin boyutu 2'dir. Ancak topolojik boyut kavramı kendine benzer kümelerin büyüklüklerini tam olarak yansıtmamaktadır. Örneğin Koch eğrisinin topolojik boyutu 1'dir ancak Koch eğrisi üzerindeki iki nokta arası uzaklık sonsuz olduğundan bu uzaklığı sıradan bir doğru parçasıyla ölçmek

mümkün olmamaktadır. Bu yapılar üzerinde "fraktal boyut" adı verilen yeni bir boyut kavramına ihtiyaç duyulmuştur. Bu tanım yardımıyla Koch eğrisinin fraktal boyutu 1 ile 2 arasında bir sayı olan $\log 4 / \log 3$ yani yaklaşık olarak 1,26 olarak bulunur. Fraktallar en genel ifadeyle fraktal boyutu tamsayı olmayan ve fraktal boyutu topolojik boyutundan büyük olan kümeler olarak tanımlanmıştır. Örneğin Sierpinski üçgeninin topolojik boyutu 1 iken fraktal boyutu $\log 3 / \log 2$ 'dir. Ancak fraktal boyutu tamsayı olan fraktallar da vardır, buna örnek olarak Sierpinski tetrahedronu verilebilir.

Tanım 2.2.6. (*Julia Kümesi*) $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olsun. f_c 'nin bütün itici periyodik noktalarını içeren en küçük kapalı kümeye *Julia kümesi* denir.

Başka bir ifadeyle $K = \{z \in \mathbb{C} | n \rightarrow \infty \text{ iken } \{f^n(z)\} \text{ sınırlı } \}$ kümesine içi dolu *Julia kümesi* denir. Bu kümenin sınırına ise *Julia kümesi* adı verilir ve J_c ile gösterilir.

Fraktal denilince ilk akla gelen kümelerden olan Julia kümelerine en temel örnek olarak $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_c(z) = z^2 + c$ fonksiyonunun Julia kümesi verilebilir. Şekil 2.1'de $c = -0,1 + 0,65i$ değeri için bu fonksiyonun Julia kümesi verilmiştir.



Şekil 2.1: $c = -0,1 + 0,65i$ değerine karşılık gelen *Julia kümesi*

2.3. Kod Uzaýı ve Bir Noktanın Kod Temsili

Bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan küme üzerindeki herhangi bir nokta, bu yinelemeli fonksiyon sistemine ait büzölme dönüşümleri yardımıyla tanımlanabilir. Bu sayede atraktör üzerindeki bir noktanın kod temsili bulunabilir. Bu konuyla ilgili tanım ve teoremler aşağıda verilmiştir (Ayrıntılar için bkz. [3, 8]).

Tanım 2.3.1. (*Kod Uzaýı*)

$$\Sigma_n = \{s_1 s_2 s_3 \dots | \forall i \in \mathbb{N}, s_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$$

kümesine $\{0, 1, \dots, n-1\}$ kümesi üzerinde dizi uzaýı denir. Bu kümenin elemanları, terimleri $0, 1, \dots, n-1$ 'lerden oluşan sonsuz dizilerdir.

$$d(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{n^i}$$

şeklinde tanımlı $d : \Sigma_n \times \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ metriğiyle birlikte (Σ_n, d) bir metrik uzaýı belirtir.

Ayrıca [3]'te kod uzaýı kavramı yinelemeli fonksiyon sistemi ile ilişkilendirilerek aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.2. $\{X; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin.

$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$ ve $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$ olmak üzere YFS ile ilgili kod uzaýı, (Σ, d) , $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki, $\forall \gamma, \sigma \in \Sigma$ için

$$d(\gamma, \sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\gamma_i - \sigma_i|}{(n+1)^i}$$

metriğiyle verilen kod uzaýı olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.3. (X, d) tam metrik uzaýı ve $A, \{X; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ olarak verilen YFS'nin atraktörü olsun. Ayrıca (Σ, d) yinelemeli fonksiyon sistemi ile ilgili kod uzaýı olmak üzere $\forall \sigma \in \Sigma, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için

$$\phi(\sigma, n, x) = \omega_{\sigma_1} \circ \omega_{\sigma_2} \circ \dots \circ \omega_{\sigma_n}(x)$$

olsun. Bu durumda

$$\phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x) \quad (2.1)$$

vardır ve $\phi(\sigma) \in A$, $x \in X$ 'in seçiminden bağımsızdır. $\phi : \Sigma \rightarrow A$ sürekli ve örten bir dönüşümdür.

Tanım 2.3.4. $\{X; w_1, w_2, \dots, w_n\}$, Σ kod uzayı ile ilişkili yinelemeli fonksiyon sistemi olsun. Ayrıca kod uzayından YFS'nin atraktörüne tanımlı sürekli ve örten bir dönüşüm olan (2.1)'de tanımlanan $\phi : \Sigma \rightarrow A$ fonksiyonu verilsin. Bir $a \in A$ noktasının adresi $\phi^{-1}(A) = \{\sigma \in \Sigma : \phi(\sigma) = a\}$ kümesinin bir elemanıdır. Bu kümeye $a \in A$ noktasının adres kümesi denir.

Tanım 2.3.5. $\{X; w_1, w_1, \dots, w_n\}$ bir yinelemeli fonksiyon sistemi ve A kümesi bu YFS'nin atraktörü olsun. Eğer atraktörün her noktası tek bir adrese sahip ise bu YFS'ye tamamen bağlantısızdır denir.

Eğer YFS tamamen bağlantısız değil ve A kümesi

i) $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $i \neq j$ için $w_i(U) \cap w_j(U) = \emptyset$

ii) $\bigcup_{i=1}^n w_i(U) \subset U$ olacak şekilde boştan farklı açık bir U kümesi içeriyorsa YFS'ye sadece dokunmalı (just-touching) denir.

Bir YFS'nin atraktörü yukarıda verilen i) ve ii) koşullarını sağlıyorsa bu YFS'ye açık küme koşulunu sağlıyor denir. Tamamen bağlantısız veya sadece dokunmalı olmayan YFS'ye üst üste binmeli (overlapping) denir.

Teorem 2.3.6. $w_i : X \rightarrow X$, $i \in \mathbb{N}$, benzerlik katsayıları sırasıyla $r_1, r_2, \dots, r_n$ olan benzerlik dönüşümleri olsun. $\{X; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi açık küme koşulunu sağlıyorsa

$$\sum_{i=1}^n r_i^D = 1$$

eşitliğindeki D sayısı bu YFS'nin belirlediği atraktörün fraktal boyutudur.

2.4. Dinamik Sistemler ve Kaos

En genel ifadeyle, zaman içinde değişiklik gösteren sistemler olarak tanımlan dinamik sistemler zamana göre kesikli (ayrık) ve sürekli olmak üzere ikiye ayrılır. Bu bölümde kesikli dinamik sistemler, periyodik nokta, dinamik sistemlerin denkliği ve kaos kavramlarından bahsedilecektir (Ayrıntılar için bkz. [1–3, 8, 15, 16], (http-1)).

Tanım 2.4.1. (*Kesikli Dinamik Sistem*)

X bir metrik uzay olmak üzere $\varphi : \mathbb{N} \times X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$i) \quad \forall x \in X \text{ için } \varphi(0, x) = x$$

$$ii) \quad \forall s, t \in \mathbb{N} \text{ ve her } x \in X \text{ için } \varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$$

özelliklerini sağlıyorsa φ fonksiyonuna X metrik uzayında kesikli dinamik sistem denir.

Tanım 2.4.2. (X, d) metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow X$ dönüşümü kesikli bir dinamik sistem belirtir.

Bu çalışma boyunca X üzerinde f fonksiyonu ile tanımlı dinamik sistem $\{X; f\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.4.3. (X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ olmak üzere $f^n(x_0) = x_0$ ve $n > 0$ bu eşitliği sağlayan en küçük tam sayısı ise $x_0 \in X$ noktasına f 'nin n -periyotlu noktası denir. Bu durumda x_0 noktasının yörüngesi $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$ olur.

Tanım 2.4.4. $(L/Y$ Kaos) $f : X \rightarrow X$ ve $S \subseteq X$ kümesi en az iki elemanlı olmak üzere, eğer $\forall x, y \in S, x \neq y$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$$

ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$$

şartları sağlanıyorsa S kümesi scrambled küme olarak adlandırılır. Sayılamayan bir scrambled kümeye sahip ise f dönüşümüne Li-Yorke kaotiktir denir.

Tanım 2.4.5. (*Topolojik Geçişkenlik*)

(X, d) metrik uzayının boştan farklı keyfi U, V açık kümeleri için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa $f : X \rightarrow X$ fonksiyonuna topolojik geçişkendir denir.

Ayrıca f fonksiyonu yoğun bir yörüngeye sahip ise f topolojik geçişkenlik özelliğini sağlar. $\mathbb{R}$ 'nin kompakt alt kümeleri için bu durumun tersi de doğrudur.

Tanım 2.4.6. (*Başlangıç Şartlarına Hassas Bağımlılık*)

Eğer en az bir $\epsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall x \in X$ ve x 'in keyfi bir $\delta > 0$ yarıçaplı $B(x, \delta)$ komşuluğu için, $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$ olacak şekilde bir $y \in B(x, \delta)$ ve $n \geq 0$ tam sayısı var ise $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır denir.

Tanım 2.4.7. (*Devaney Anlamında Kaos Tanımı*)

(X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ olmak üzere, f fonksiyonu

i) başlangıç şartlarına hassas bağımlılık

ii) topolojik geçişkenlik

iii) periyodik noktalarının X 'te yoğun olması

şartlarını sağlıyorsa, f fonksiyonu X kümesi üzerinde kaotiktir. Bu durumda $\{X; f\}$ dinamik sistemine kaotik dinamik sistem denir.

Teorem 2.4.8. (X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ sürekli dönüşüm olmak üzere eğer (ii) ve (iii) koşulları sağlanıyorsa (i) koşulu da sağlanır [2].

Tanım 2.4.9. (X, d_1) , (Y, d_2) metrik uzaylar olmak üzere $f : X \rightarrow X$ ve $g : Y \rightarrow Y$ dönüşümleri verilsin. Eğer

$$h \circ f = g \circ h$$

olacak şekilde $h : X \rightarrow Y$ homeomorfizması varsa f ve g 'ye denk (eşlenik) dönüşümlerdir denir.

Tanım 2.4.10. Eğer $g = h \circ f \circ h^{-1}$ (veya her $x \in X$ için $h(f(x)) = g(h(x))$) olacak şekilde bir $h : X \rightarrow Y$ homeomorfizma var ise $\{X; f\}$ ve $\{Y; g\}$ dinamik sistemleri topolojik olarak eşleniktir (denktir) denir.

Önerme 2.4.11. $f : X \rightarrow X$ ve $g : Y \rightarrow Y$ dönüşümleri $h : X \rightarrow Y$ homeomorfizması altında denk olsun yani $h \circ f = g \circ h$ sağlansın. Bu durumda

- $n = 1, 2, 3, \dots$ için $h \circ f^n = g^n \circ h$ olur.
- Eğer x^* , f 'nin n -periyotlu bir noktası ise $h(x^*)$ 'da g 'nin n -periyotlu noktası olur. Yani $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, f için n -periyotlu bir döngüdür ancak ve ancak $\{h(x_1), \dots, h(x_n)\}$, g için n -periyotlu bir döngüdür.

- f topolojik geçişkendir ancak ve ancak g topolojik geçişkendir.
- f periyodik noktalarının yoğun olduğu bir kümeye sahiptir ancak ve ancak g periyodik noktalarının yoğun olduğu bir kümeye sahiptir.
- f kaotiktir ancak ve ancak g kaotiktir.

Teorem 2.4.12. (X, d) kompakt metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere, eğer f Devaney anlamında kaotik ise Li-Yorke anlamında da kaotiktir [16].

Literatürde farklı kaos tanımları olmasına rağmen bu çalışmada tanımlanan dinamik sistemlerin Devaney anlamında kaotikliği incelenmiştir.

Kaotik dönüşümler için öngörülemezlik, ayrışmazlık ve periyodik noktaların yoğun olması şeklinde üç temel yargıya varılabilir. Öngörülemezlik; yani başlangıç şartlarına hassas bağımlılık bu sistemler için tahmin yapmayı zorlaştırır. Başlangıçta birbirine çok yakın iki nokta belirli bir adımdan sonra birbirinden oldukça uzaklaşabilir. Bu tarz sistemler için nümerik hesaplamalar yapmak yanıltıcı olabilir. Örneğin yuvarlamadan kaynaklı küçük hatalar iterasyon altında oldukça farklı sonuçlar verebilir. Ayrışmazlık; topolojik geçişkenlik ise bu sistemlerin iki ayrı alt sisteme (değişmez açık kümeye) ayrılamayacağını gösterir. Periyodik noktaların yoğun olması ise düzensizlik içinde aslında bir düzen olduğunu belirtir [8].

3. GENİŞLEME VE KATLAMA DÖNÜŞÜMLERİ KULLANILARAK ZAMAN KAÇIŞ ALGORİTMASI YOLUYLA KLASİK VE DİK SIERPINSKI ÜÇGENLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Kendine benzer kümeler bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak elde edilebilmektedir. Klasik fraktallardan Cantor kümesi, Sierpinski üçgeni, Koch eğrisi, Sierpinski halısı, Vicsek (Box) fraktalı, Sierpinski tetrahedronu gibi birçok kümenin tanımı büzülme dönüşümleri yardımıyla yapılabilmektedir. Yinelemeli fonksiyon sistemlerinin yanı sıra fraktalları elde etmek için kullanılan farklı metotlar da vardır. Bunlardan birisi olan zaman kaçış algoritması yoluyla da yukarıda bahsedilen klasik fraktalları elde etmek mümkündür.

Bilindiği üzere $(0, 0)$, $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ köşe noktalarından geçen dik Sierpinski üçgeni (D) ,

$$w_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \right), \\ w_2(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right), \\ w_3(x, y) &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$ YFS'nin atraktörüdür, yani

$$D = F(D) = \bigcup_{i=1}^3 w_i(D)$$

olarak ifade edilir.

[3]'te, Barnsley YFS ile ilişkilendirerek

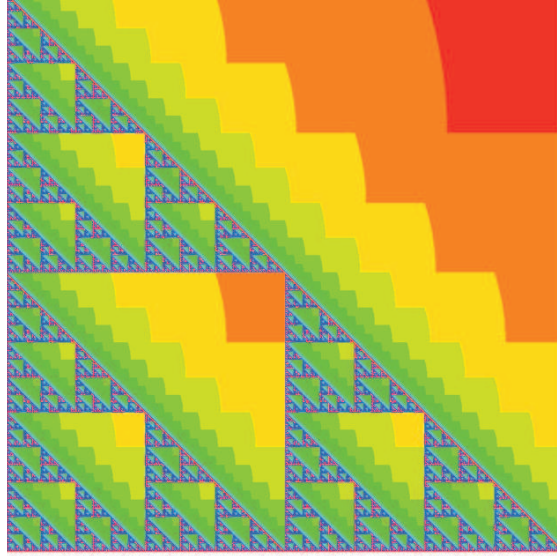
$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, 2y - 1), & \text{eğer } y > 0.5 \\ (2x - 1, 2y), & \text{eğer } x > 0.5, y \leq 0.5 \\ (2x, 2y), & \text{d.d.} \end{cases}$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlamıştır. Bu fonksiyonun dik Sierpinski üçge-

nine kısıtlanmış

$$f(x, y) = \begin{cases} w_1^{-1}(x, y), & \text{eğer } (x, y) \in w_1(D) - \{(0, 0.5), (0.5, 0.5)\} \\ w_2^{-1}(x, y), & \text{eğer } (x, y) \in w_2(D) - \{(0.5, 0)\} \\ w_3^{-1}(x, y), & \text{eğer } (x, y) \in w_3(D) \end{cases}$$

şeklindedir ve f örtendir. Yalnız burada tanımlanan f fonksiyonu sürekli değildir. Barnsley tanımlamış olduğu bu fonksiyon yardımıyla dik Sierpinski üçgeninin zaman kaçış algoritması kullanılarak da elde edilebildiğini göstermektedir. Çünkü $(x, y) \notin D$ için $\{f^n(x, y)\}$ dizisi sonsuza gider ve sonsuza gitmeyen noktalarının kümesi dik Sierpinski üçgenini verir (Bkz. Şekil 3.1).



Şekil 3.1: Dik Sierpinski üçgeninin inşası

Ayrıca Barnsley, tanımlanan f fonksiyonunun dik Sierpinski üçgeni üzerinde kaotik bir dinamik sistem olduğunu farklı teorik metotlarla ifade etmeye çalışmıştır.

Benzer şekilde bu metot, YFS'nin atraktörü olarak ifade edilebilen herhangi bir fraktal için de uygulanabilir. Yani yinelemeli fonksiyon sistemi ile ilişkilendirilerek tanımlanan fonksiyonlar yardımıyla ilgili fraktallar elde edilebilir. Burada merak edilen "Bir klasik fraktal, yinelemeli fonksiyon sisteminden bağımsız nasıl fonksiyonlar tanımlanarak zaman kaçış algoritması yoluyla elde edilebilir?" sorusudur. Aşağıdaki bölümde bu soruya cevap olarak YFS'den bağımsız bir şekilde tanımlanan dönüşümler ile klasik ve dik Sierpinski üçgenlerinin inşası verilmiştir.

3.1. Genişleme ve Katlama Dönüşümleri Kullanılarak Zaman Kaçış Algoritması Yoluyla Klasik Sierpinski Üçgeninin Elde Edilmesi

Bilindiği üzere klasik Sierpinski üçgeni (S)

$$w_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (i = 0, 1, 2)$$

$$\begin{aligned} w_0(x, y) &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) \\ w_1(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right) \\ w_2(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; w_0, w_1, w_2\}$ YFS'nin atraktörü olarak elde edilebilmektedir. Ancak bu bölümde, yukarıda tanımlanan büzülme dönüşümlerinden bağımsız olacak şekilde bir fonksiyon tanımlanmış ve bu fonksiyon kullanılarak zaman kaçış algoritmasıyla Sierpinski üçgeninin elde edilmesi amaçlanmıştır.

Örnek 3.1.1. $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (i = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (2x, 2y) \\ f_2(x, y) &= \left(-\frac{1}{2} \left\lfloor \frac{x-2+y\sqrt{3}}{2} \right\rfloor - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{y-\sqrt{3}(x-2)}{2} \right) + 2, \frac{y-\sqrt{3}(x-2)}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left\lfloor \frac{x-2+y\sqrt{3}}{2} \right\rfloor \right) \\ f_3(x, y) &= (1 - |x - 1|, y) \end{aligned}$$

olmak üzere

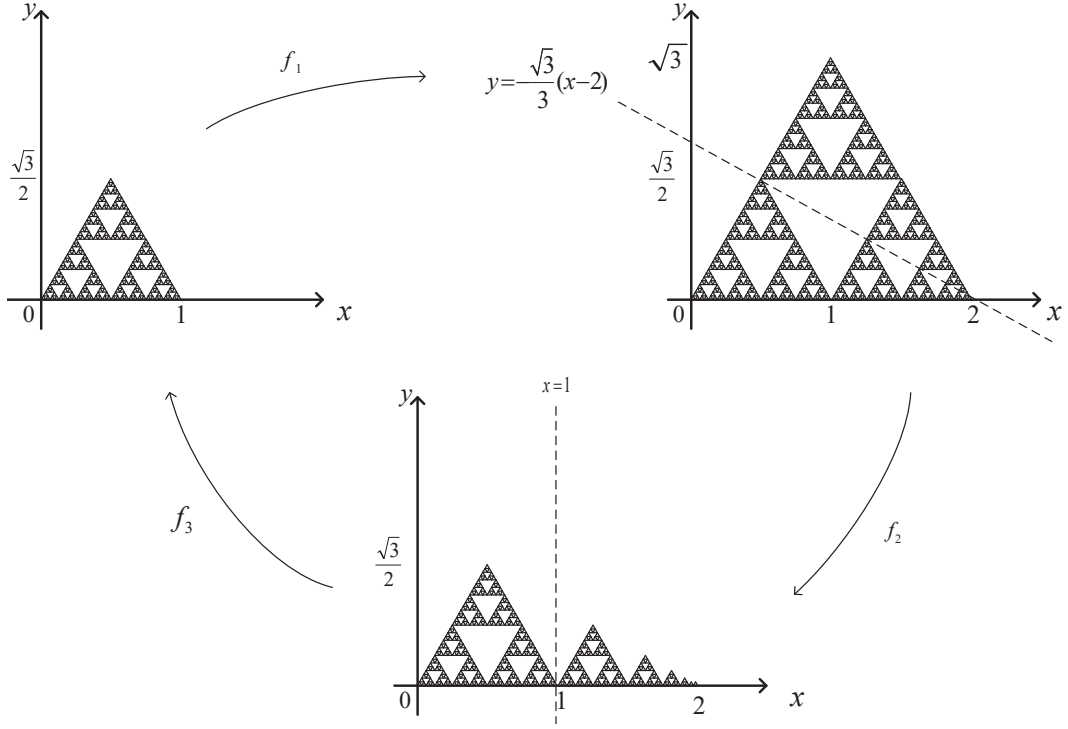
$$F = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \quad (3.2)$$

bileşke fonksiyonu tanımlansın.

F genişleme ve katlama dönüşümlerinin bileşkesi olmak üzere, f_1 fonksiyonu noktayı iki katına götüren bir genişleme dönüşümüdür. f_2 fonksiyonu $y = -\frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ doğrusunun sağındaki bir noktayı doğrunun soluna götüren katlama dönüşümü ve f_3 fonksiyonu ise $x = 1$ doğrusunun sağındaki bir noktayı doğrunun soluna götüren katlama dönüşümüdür.

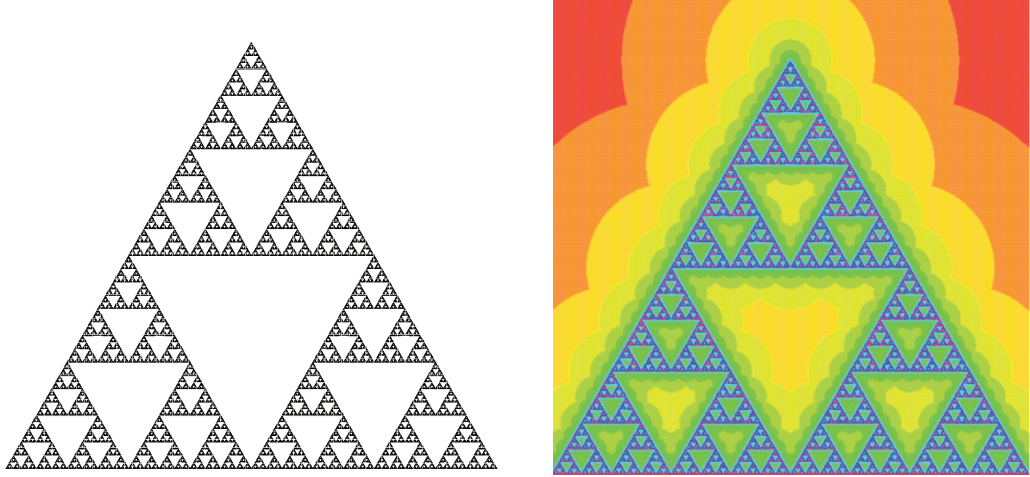
$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bileşke fonksiyonu kullanılarak zaman kaçış algoritması yoluyla elde edilen küme klasik Sierpinski üçgenini verir.

Sierpinski üçgeni üzerine kısıtlanan $F|_S : S \rightarrow S$ fonksiyonu örtendir (Bkz. Şekil 3.2). $\{F^n(x, y)\}$ dizisi $x \notin S$ için sonsuza gider ve sonsuza gitmeyen noktaların oluşturduğu küme Sierpinski üçgeni verir (Bkz. Şekil 3.3).



Şekil 3.2: *Sierpinski üçgeni üzerindeki genişleme ve katlama dönüşümleri*

Burada dikkat edilecek nokta, bu fonksiyonların ilgili fraktalın yapısına uygun olarak tanımlanmasıdır. Aksi takdirde zaman kaçış algoritmasıyla bu fraktalı elde etmek mümkün olmayacaktır.



Şekil 3.3: *Zaman kaçış algoritmasıyla Sierpinski üçgeninin inşası*

3.2. Genişleme ve Katlama Dönüşümleri Kullanılarak Zaman Kaçış Algoritması Yoluyla Dik Sierpinski Üçgeninin Elde Edilmesi

Bu bölümde dik Sierpinski üçgeni zaman kaçış algoritması yoluyla elde edilecektir. Bunun için Sierpinski üçgenini elde ederken kullanılan dönüşümlerden yararlanılacaktır.

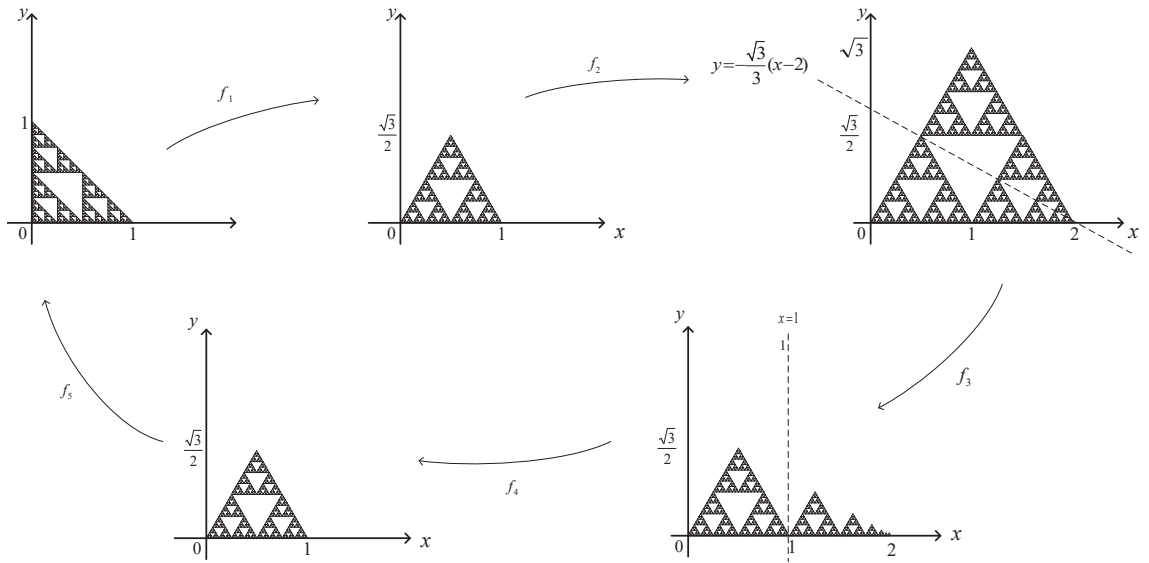
Örnek 3.2.1. $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \left(x + \frac{y}{2}, \frac{y\sqrt{3}}{2} \right), \\ f_2(x, y) &= (2x, 2y), \\ f_3(x, y) &= \left(-\frac{1}{2} \left| \frac{x-2+y\sqrt{3}}{2} \right| - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{y-\sqrt{3}(x-2)}{2} \right) + 2, \frac{y-\sqrt{3}(x-2)}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{x-2+y\sqrt{3}}{2} \right| \right), \\ f_4(x, y) &= (1 - |x - 1|, y), \\ f_5(x, y) &= \left(x - \frac{y\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}y}{3} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$F = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 \quad (3.3)$$

bileşke fonksiyonu tanımlansın. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bileşke fonksiyonu kullanılarak zaman kaçış algoritmasıyla elde edilen küme dik Sierpinski üçgenidir.



Şekil 3.4: Dik Sierpinski üçgeni üzerinde genişleme, katlama ve afin dönüşümleri

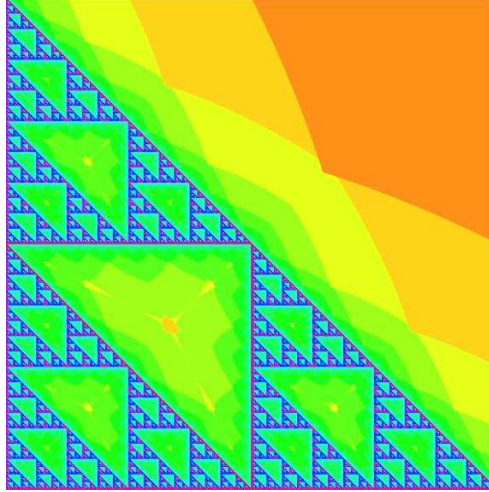
Tanımı $F = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ olarak verilen F fonksiyonu incelendiğinde buradaki f_1 fonksiyonunun $(0, 0)$, $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ köşe noktalarından geçen dik Sierpinski üçgenini köşe noktaları $(0, 0)$, $(1, 0)$ ve $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ olan eşkenar Sierpinski üçgenine dönüştüren bir afin dönüşümü olduğu görülür. f_2 fonksiyonu genişleme dönüşümü, f_3 fonksiyonu $y = -\frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ doğrusunun sağındaki noktaları doğrunun soluna götüren katlama dönüşümü, f_4 fonksiyonu $x = 1$ doğrusunun sağındaki noktaları doğrunun soluna götüren katlama dönüşümü ve f_5 fonksiyonu ise eşkenar Sierpinski üçgenini dik Sierpinski üçgenine dönüştüren afin dönüşümüdür (Bkz. Şekil 3.4).

Dik Sierpinski üçgeni üzerinde kısıtlı olan F fonksiyonu örtendir ve $\{F^n(x, y)\}$ dizisi dik Sierpinski üçgeninin elemanı olmayan (x, y) noktaları için sonsuza gider. Şekil 3.5 ve 3.6'da zaman kaçış algoritması yoluyla dik Sierpinski üçgenini çizdirmek için gerekli olan Maple kodları verilmiştir.

```

>with(plots):
f[1]:=(x,y)->(evalf(x+y/2),evalf(y*sqrt(3)/2)):
f[2]:=(x,y)->(evalf(2*x),evalf(2*y)):
f[3]:=(x,y)->(-1/2*abs((x-2)/2+y*evalf(sqrt(3)/2))+evalf(sqrt(3)/2)
*(evalf(sqrt(3)/2)*(x-2)-y/2)+2,-evalf(sqrt(3)/2)*abs((x-2)/2+y*evalf
(sqrt(3)/2))+1/2*(y/2-evalf(sqrt(3)/2)*(x-2)):
f[4]:=(x,y)->(evalf(1-abs(x-1)),evalf(y)):
f[5]:=(x,y)->(evalf(x-y/sqrt(3)),evalf(2*y/sqrt(3))):
F:=(x,y)->f[5](f[4](f[3](f[2](f[1](x,y))))):
>rightsierpinski := proc(a, b)
  local A,A1,A2, m;
  A[1]:=a:
  A[2]:=b:
  A1:=A[1]:
  A2:=A[2]:
  for m to 50 while A1^2+A2^2 < 2 do
    A := F(A[1], A[2]):
    A1:=A[1]:
    A2:=A[2]:
  end do;
  m;
end proc:
densityplot(rightsierpinski, 0..1, 0..1, colorstyle=HUE, grid=[1000,
1000], style=patchnograd, axes=none);

```

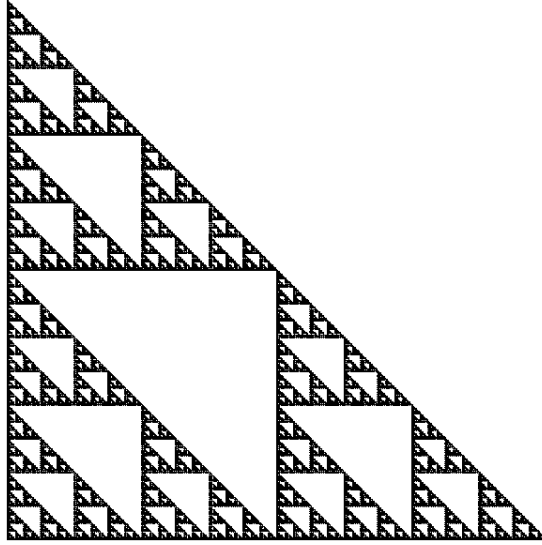


Şekil 3.5: Zaman kaçış algoritması yoluyla renkli olarak dik Sierpinski üçgeninin inşası

```

>with(plots):
f[1]:=(x,y)->(evalf(x+y/2),evalf(y*sqrt(3)/2)):
f[2]:=(x,y)->(evalf(2*x),evalf(2*y)):
f[3]:=(x,y)->(-1/2*abs((x-2)/2+y*evalf(sqrt(3)/2))+
evalf(sqrt(3)/2)*(evalf(sqrt(3)/2)*(x-2)-y/2)+2,-
evalf(sqrt(3)/2)*abs((x-2)/2+y*evalf(sqrt(3)/2))+1/2*(y/2-
evalf(sqrt(3)/2)*(x-2))):
f[4]:=(x,y)->(evalf(1-abs(x-1)),evalf(y)):
f[5]:=(x,y)->(evalf(x-y/sqrt(3)),evalf(2*y/sqrt(3))):
>F:=(x,y)->f[5](f[4](f[3](f[2](f[1](x,y))))):
step:=0.001:
say:=0:
for i from 0 to 1 by step do
for j from 0 to 1 by step do
a:=evalf(F(i,j)):
for k from 1 to 8 do
a:=evalf(F(a[1],a[2])):
od:
if evalf(a[1]^2+evalf(a[2]^2)<=1 then
say:=say+1:
depo[say]:=(i,j);
fi:
od:
od:
pointplot({seq([depo[t][1],depo[t][2]],t=1..say)},axes=none,symbol=point);
say;

```



Şekil 3.6: Zaman kaçış algoritması yoluyla renksiz olarak dik Sierpinski üçgeninin inşası

4. SIERPINSKI ÜÇGENİ ÜZERİNDE KAOTİK DİNAMİK SİSTEMLER

Literatürde, fraktal ve kaos kavramlarının birlikte yer aldığı çalışmalar ile sıkça karşılaşilmektedir. Örneğin, Sierpinski halısının Li-Yorke anlamındaki kaotik davranışı Ercai'nin [10]'daki çalışmasında incelenmiştir. Devaney, Li-Yorke, Block ve Copel gibi farklı kaos tanımları olmakla birlikte bu tezde tanımlanan dinamik sistemlerin kaotikliği gösterilirken Devaney anlamındaki kaos tanımı kullanılacaktır.

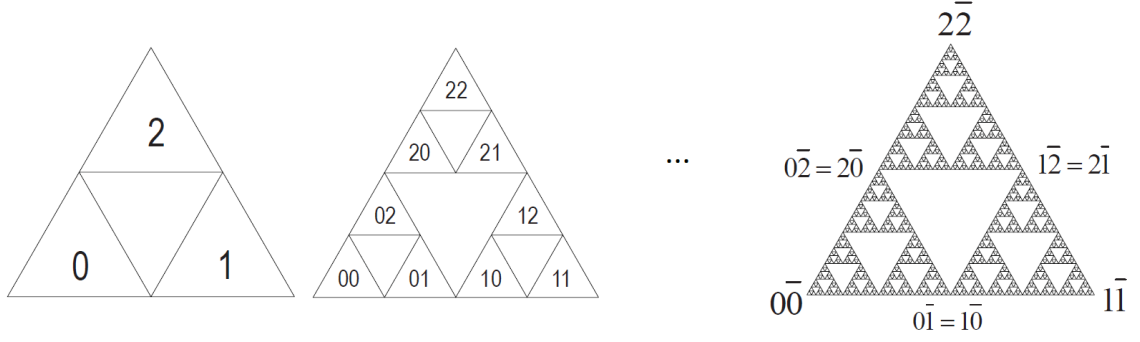
Bu bölümde Sierpinski üçgeni üzerinde genişleme ve katlama dönüşümleri kullanılarak farklı dinamik sistemler tanımlanacaktır. (4.1), (4.4) ve (4.5)'te verilen eşitlikte tanımlanan bileşke fonksiyonları karmaşık olduğundan bu fonksiyonları kullanarak işlemler yapmak oldukça zordur. Elde edilen dinamik sistemlerin kaotikliğini ve periyodik noktalarını daha kolay inceleyebilmek için bu dinamik sistemler, Sierpinski üçgeni üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak kod kümesi üzerinde ifade edilecektir (Bkz. Önerme 4.2.2, 4.3.1, 4.4.1). Öncelikle Sierpinski üçgeni üzerindeki bir noktanın kodlama sürecinden ve kod kümesi kavramlarından bahsedilecektir. Daha sonra noktaların Sierpinski üçgeni üzerinde dinamik sistemler tanımlanacak ve tanımlanan bu dinamik sistemlerin kaotikliği incelenecektir. Bunun için ise Sierpinski üçgeni üzerindeki noktaların kod gösterimleri kullanılarak tanımlanmış olan içsel metrik [24] kullanılacaktır.

4.1. Sierpinski Üçgeni Üzerindeki Noktaların Kodlama Süreci

Önceki bölümde Sierpinski üçgeninin bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak elde edildiğinden bahsedilmişti. Bu YFS (3.1)'de verilen üç adet büzülme dönüşümünden oluşmaktadır; w_0 ile Sierpinski üçgeninin sol alt parçası, w_1 ile sağ alt parçası, w_2 ile ise üst parçası elde edilir. Teorem 2.3.3'ten de görüleceği üzere bu fonksiyonların dizisi ile Sierpinski üçgeni üzerindeki bir noktanın adresi belirlenebilir (Bkz. Şekil 4.1).

Buna göre S 'nin kod kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:
 S 'nin sol alt parçası

$$S_0 = \{0a_2a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2\} \text{ ve } i = 2, 3, 4, \dots\},$$



Şekil 4.1: Kodlama süreci

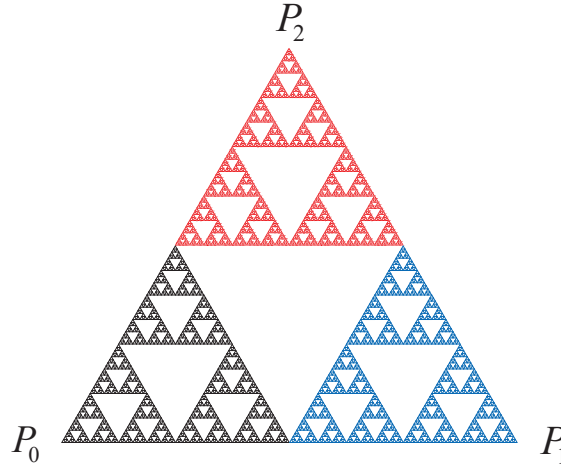
S 'nin sağ alt parçası

$$S_1 = \{1a_2a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2\} \text{ ve } i = 2, 3, 4, \dots\},$$

ve S 'nin üst parçası

$$S_2 = \{2a_2a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2\} \text{ ve } i = 2, 3, 4, \dots\}$$

ile gösterilsin. Şekil 4.2'den de görüleceği üzere S 'nin kod kümesi S_0 , S_1 ve S_2 kod kümelerinin birleşimidir.



Şekil 4.2: S 'nin S_0 (siyah), S_1 (mavi) ve S_2 (kırmızı) alt üçgenleri

Benzer şekilde S_0 'ın sol alt, sağ alt ve üst parçaları sırasıyla

$$S_{00} = \{00a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2\} \text{ ve } i = 3, 4, 5, \dots\},$$

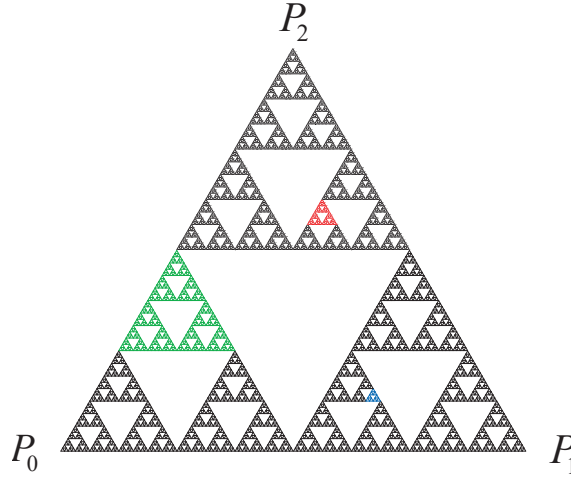
$$S_{01} = \{01a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2\} \text{ ve } i = 3, 4, 5, \dots\},$$

$$S_{02} = \{02a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2\} \text{ ve } i = 3, 4, 5, \dots\}$$

ile gösterilsin. S_0 kümesi S_{00} , S_{01} ve S_{02} kod kümelerinin birleşimi şeklindedir. S_1 ve S_2 'nin alt üçgenleri de benzer şekilde ifade edilebilir. Genel durumda, $i = 1, 2, \dots, n$ için $w_i \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere sabit $w_1, w_2, \dots, w_n$ için $S_{w_1w_2\dots w_n}$ kümesinin sol alt, sağ alt ve üst parçaları sırası ile $S_{w_1w_2\dots w_n0}$, $S_{w_1w_2\dots w_n1}$ ve $S_{w_1w_2\dots w_n2}$ olarak tanımlanır. Yani herhangi bir alt üçgen

$$S_{w_1\dots w_nw} = \{w_1 \dots w_n w a_{n+2} a_{n+3} \dots \mid w, a_i \in \{0, 1, 2\}, \quad i = n+2, n+3, \dots\}$$

şeklinde ifade edilir (Bkz. Şekil 4.3).



Şekil 4.3: S_0 'ın S_{02} (yeşil), S_{210} 'ın S_{2102} (kırmızı) ve S_{1021} 'in S_{10211} (mavi) alt üçgenleri

Kod kümeleri kullanılarak S üzerindeki bir noktanın kod gösterimi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$S_{a_1}, S_{a_1a_2}, S_{a_1a_2a_3}, \dots, S_{a_1a_2\dots a_n}, \dots$$

kod kümeleri olmak üzere yukarıda yapılan tanımlardan yola çıkılarak $S_{a_1} \supset S_{a_1a_2} \supset S_{a_1a_2a_3} \supset \dots \supset S_{a_1a_2\dots a_n} \supset \dots$ olduğu açıktır. Cantor arakesit teoremi gösterir ki

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{a_1a_2\dots a_n}$$

sonsuz kesişimi tek elemanlı bir $\{A\}$ kümesini verir. Bu $A \in S$ noktası $a_n \in$

$\{0, 1, 2\}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ ile gösterilsin. Bu $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ dizisine A noktasının kod gösterimi (temsili) denir.

$S_{a_1 a_2 \dots a_k}$ kümesinin aynı seviyedeki herhangi iki alt üçgeninin kesişimi olan $A \in S$ noktasına S 'nin bağlama (junction) noktası denir. Bu şekildeki noktalar iki farklı kod gösterimine sahiplerdir. Sierpinski üçgeni üzerinde de iki farklı kod gösterimine sahip olan çok fazla sayıda nokta vardır. $A \in S$ bir bağlama noktası ise $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}$ ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere A noktasının kod gösterimleri

$$a_1 a_2 \dots a_k \beta \alpha \alpha \alpha \dots$$

ve

$$a_1 a_2 \dots a_k \alpha \beta \beta \beta \dots$$

şeklindedir. Bu noktaların dışında kalan diğer noktalar yalnız bir kod gösterimine sahiptir.

Örneğin,

$$\overline{01} = 010101\dots, \quad \overline{0} = 000\dots, \quad \overline{012} = 012012012\dots$$

ve elemanları düzenli tekrar etmeyen diziler tek kod gösterimine sahiplerdir.

4.2. Sierpinski Üçgeni Üzerinde $\{S; F\}$ Kaotik Dinamik Sisteminin İnşası

Bu bölümde S üzerinde genişleme ve katlama dönüşümleri kullanılarak bir F fonksiyonu tanımlanmıştır. Daha sonra bu fonksiyon Sierpinski üçgeni üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak ifade edilmiş ve $\{S; F\}$ dinamik sisteminin kaotikliği gösterilip periyodik noktaları hesaplanmıştır.

$$f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (2x, 2y), \\ f_2(x, y) &= \left(x, \frac{\sqrt{3}}{2} - \left| y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \right), \\ f_3(x, y) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{\sqrt{3}(x-1)-y}{2} \right| + \frac{(x-1)+y\sqrt{3}}{4} + 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x-1}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{3}(x-1)-y}{2} \right| \right), \\ f_4(x, y) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{\sqrt{3}(x-1)+y}{2} \right| + \frac{(x-1)-y\sqrt{3}}{4} + 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{y\sqrt{3}}{2} - \frac{(x-1)}{2} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{3}(x-1)+y}{2} \right| \right) \end{aligned}$$

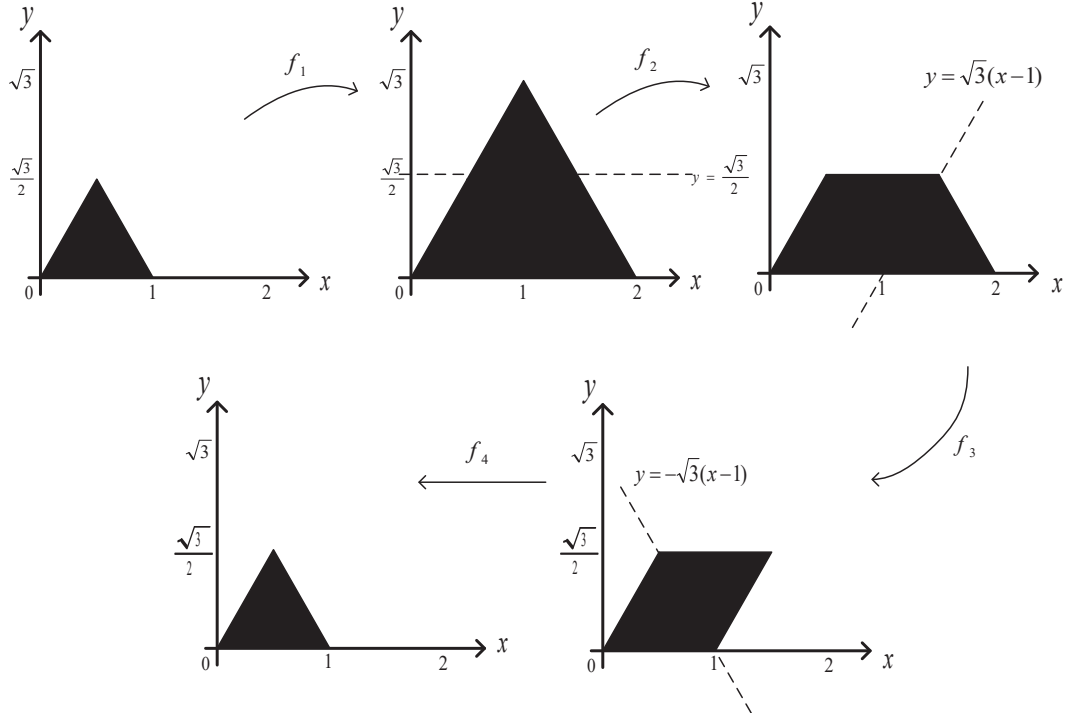
olmak üzere f_1 genişleme ve f_2, f_3 ve f_4 katlama dönüşümlerinin bileşkesi olarak

$$F = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 \quad (4.1)$$

fonksiyonu tanımlansın.

Burada Sierpinski üçgeni, köşe noktaları $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ olan eşkenar Sierpinski üçgeni olarak alınacaktır. $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ noktalarından geçen içi dolu eşkenar üçgen $\blacktriangle$ ile ve $(0,0)$, $(2,0)$, $(1, \sqrt{3})$ noktalarından geçen içi dolu eşkenar üçgen $\blacktriangle'$ ile gösterilsin. Ayrıca $(0,0)$, $(2,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ noktalarından geçen ikizkenar yamuk IT ile ve $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ noktalarından geçen paralelkenar $\blacklozenge$ ile gösterilsin. Yukarıda tanımlanan F fonksiyonu karmaşık gözükse de geometrik olarak bu fonksiyon $\blacktriangle$ üzerinde bir dinamik sistem inşa eder.

f_1 fonksiyonu genişleme dönüşümüdür ve $\blacktriangle$ 'ni iki katına çıkarır yani $f_1(\blacktriangle) = \blacktriangle'$ olur. f_2 fonksiyonu $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ doğrusuna göre bir katlama dönüşümüdür ve $f_2(\blacktriangle') = IT$ gerçekleşir. f_3 fonksiyonu $f_3(IT) = \blacklozenge$ olacak şekilde $y = \sqrt{3}(x-1)$ doğrusuna göre katlama dönüşümüdür ve son olarak f_4 fonksiyonu $y = -\sqrt{3}(x-1)$ doğrusuna göre $f_4(\blacklozenge) = \blacktriangle$ olacak şekildeki katlama dönüşümüdür (Bkz. Şekil 4.4).



Şekil 4.4: f_1, f_2, f_3, f_4 fonksiyonlarının $\blacktriangle$ kümesi üzerindeki etkisi

F fonksiyonunun S üzerindeki kısıtlanmış hali dikkate alınacaktır. Bu dönüşümler sonucunda Sierpinski üçgenini yine kendisine götüren bir $F = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ bileşke fonksiyonu elde edilir. Burada $\{S; F\}$ bir dinamik sistem belirtmektedir ancak F fonksiyonu kullanılarak bu dinamik sistemin kaotik olduğunu göstermek hatta periyodik noktalarını bile hesaplamak oldukça zordur. Bu yüzden bu fonksiyon aşağıda verilen önerme ile Sierpinski üçgeninin kod kümesi üzerinde ifade edilecektir. Ancak önce S 'nin kod kümesi üzerinde tanımlanmış olan içsel metrik verilecektir. [4]'e göre Sierpinski üçgeni üzerindeki içsel metrik

$$d(x, y) = \inf\{\delta \mid \delta, S \text{ üzerinde } x \text{ ve } y\text{'yi birleştiren düzeltilebilir eğrinin uzunluğu}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Noktaların kod temsilleri kullanılarak S üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki içsel uzaklığı veren açık formül aşağıdaki gibi verilmiştir [24]:

Teorem 4.2.1. $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ olmak üzere $A \in S$ ve $B \in S$ gibi iki noktanın kod gösterimi sırasıyla $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olsun.

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases},$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i \neq a_k \text{ ve } a_i \neq b_k \\ 1, & d.d \end{cases}, \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & b_i \neq b_k \text{ ve } b_i \neq a_k \\ 1, & d.d \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(A, B) := \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} \right\} \quad (4.2)$$

fonksiyonu A ile B arasındaki uzaklığı verir.

(4.2)'de verilen d metriği S 'nin kod kümesi üzerinde kesin bir içsel metriktir (Bkz. [24]). Bu metrik S üzerinde herhangi iki nokta arasındaki en kısa uzaklığı vermektedir.

Aşağıdaki önerme ile F fonksiyonu S 'nin kod kümesi üzerinde ifade edilmiştir.

Önerme 4.2.2. *Herhangi bir $X \in S$ noktasının kod gösterimi $x_1x_2x_3 \dots$ ve $Y \in S$ noktasının kod gösterimi $y_1y_2y_3 \dots$ olsun. Bu durumda (4.1)'de tanımlanan $F : S \rightarrow S$ fonksiyonu, $i = 1, 2, 3, \dots$ ve $x_i, y_i \in \{0, 1, 2\}$ için $y_i \equiv x_{i+1} + x_1 \pmod{3}$ olmak üzere $F(X) = Y$ şeklinde ifade edilir.*

Kanıt. F fonksiyonunun S 'nin kod kümesi üzerinde iyi tanımlı olduğu gösterilmektedir. Eğer $x_1x_2x_3 \dots$ yalnız tek bir kod gösterimine sahip ise sonuç aşıkardır. $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}$, $\alpha \neq \beta$ ve X noktası $x_1x_2x_3 \dots x_n\alpha\beta\beta \dots$ ve $x_1x_2x_3 \dots x_n\beta\alpha\alpha \dots$ olacak şekilde iki farklı kod gösterimine sahip olsun. Bu durumda

$$F(x_1x_2x_3 \dots x_n\alpha\beta\beta \dots) = y_1y_2y_3 \dots y_ny_{n+1}y_{n+2} \dots$$

$$F(x_1x_2x_3 \dots x_n\beta\alpha\alpha \dots) = z_1z_2z_3 \dots z_nz_{n+1}z_{n+2} \dots$$

olmak üzere $y_1y_2y_3 \dots y_ny_{n+1}y_{n+2} \dots$ ve $z_1z_2z_3 \dots z_nz_{n+1}z_{n+2} \dots$ noktalarının aynı nokta için birer kod gösterimi olduğu gösterilmelidir.

F 'nin tanımından $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için

$$y_i \equiv z_i \equiv x_1 + x_{i+1} \pmod{3}$$

elde edilir. Ayrıca $i = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$y_n \equiv x_1 + \alpha \pmod{3},$$

$$y_{n+i} \equiv x_1 + \beta \pmod{3},$$

$$z_n \equiv x_1 + \beta \pmod{3},$$

$$z_{n+i} \equiv x_1 + \alpha \pmod{3}$$

olur.

$i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için $x_1 + x_{i+1} \equiv s_i \pmod{3}$ ve $x_1 + \alpha \equiv \gamma \pmod{3}$, $x_1 + \beta \equiv \delta \pmod{3}$ olsun. $\gamma \neq \delta$ olduğundan

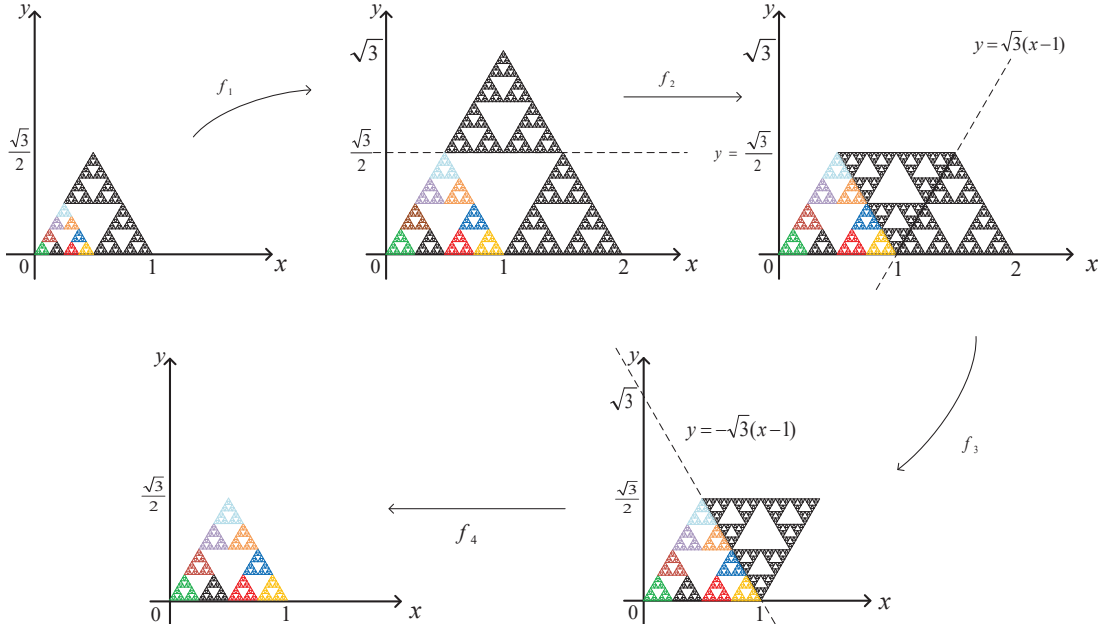
$$y_1y_2y_3 \dots y_ny_{n+1}y_{n+2} \dots = s_1s_2s_3 \dots s_{n-1}\gamma\delta\delta \dots$$

ve

$$z_1 z_2 z_3 \dots z_n z_{n+1} z_{n+2} \dots = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} \delta \gamma \gamma \gamma \dots$$

aynı noktanın farklı kod sunumlarıdır.

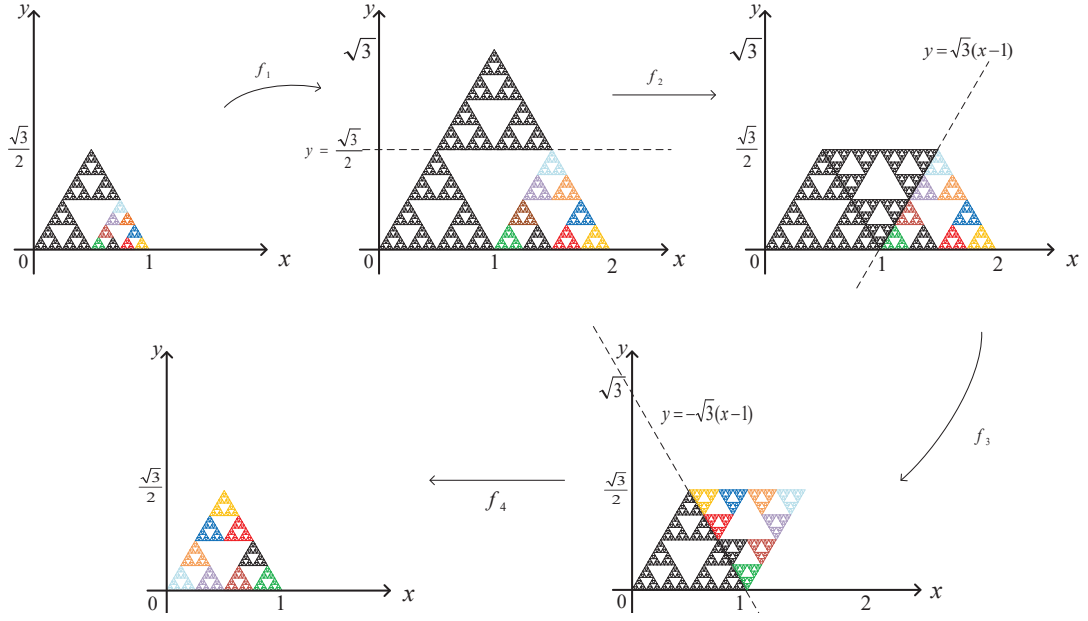
Şimdi aşağıdaki grafikler kullanılarak bu gösterimin geometriksel olarak bir ispatı verilecektir. İspatın daha anlaşılır olması için kod kümeleri farklı bir renkle gösterilmiş ve her bir adımda S_0 , S_1 ve S_2 kod kümelerinin F altındaki görüntüleri elde edilmiştir.



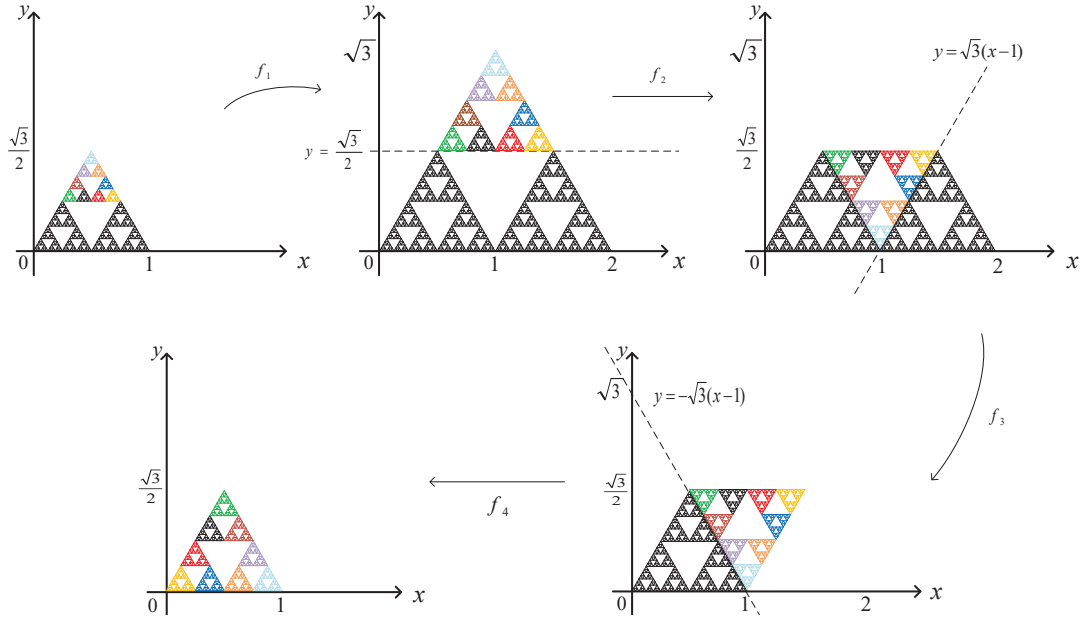
Şekil 4.5: S_0 , S_{0x_2} ve $S_{0x_2x_3}$ kod kümelerinin F fonksiyonu altındaki görüntüsü

Durum 1: $x_1 = 0$ ise $F(S_0) = S$, $F(S_{00}) = S_0$, $F(S_{01}) = S_1$ ve $F(S_{02}) = S_2$ olduğu açıktır. Benzer şekilde, S_{000} , S_{001} , S_{002} , S_{010} , S_{011} , S_{012} , S_{020} , S_{021} , S_{022} kümelerinin F altındaki görüntüleri sırasıyla S_{00} , S_{01} , S_{02} , S_{10} , S_{11} , S_{12} , S_{20} , S_{21} , S_{22} olur (Bkz. Şekil 4.5). Yani $x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$ noktasının ilk terimi sıfır ise, $F(0x_2 x_3 x_4 \dots) = x_2 x_3 x_4 \dots$ olur. Buradan $i = 1, 2, 3, \dots$ için $y_i \equiv x_{i+1} \pmod{3}$ olmak üzere $F(0x_2 x_3 x_4 \dots) = y_1 y_2 y_3 \dots$ elde edilir.

Durum 2: Eğer $x_1 = 1$ ise Şekil 4.6'dan da görülebileceği gibi, $F(S_1) = S$, $F(S_{10}) = S_1$, $F(S_{11}) = S_2$ ve $F(S_{12}) = S_0$ olur. Ayrıca S_{100} , S_{101} , S_{102} , S_{110} , S_{111} , S_{112} , S_{120} , S_{121} , S_{122} kümelerinin F altındaki görüntüleri sırasıyla S_{11} , S_{12} , S_{10} , S_{21} , S_{22} , S_{20} , S_{01} , S_{02} , S_{00} olur. Genel olarak kural $i = 1, 2, 3, \dots$ için $y_i \equiv x_{i+1} + 1 \pmod{3}$ olmak üzere $F(1x_2 x_3 x_4 \dots) = y_1 y_2 y_3 \dots$ şeklinde verilebilir.



Şekil 4.6: S_1 , S_{1x_2} ve $S_{1x_2x_3}$ kod kümelerinin F fonksiyonu altındaki görüntüsü



Şekil 4.7: S_2 , S_{2x_2} ve $S_{2x_2x_3}$ kod kümelerinin F fonksiyonu altındaki görüntüsü

Durum 3: Eğer $x_1 = 2$ ise $F(S_2) = S$, $F(S_{20}) = S_2$, $F(S_{21}) = S_0$ ve $F(S_{22}) = S_1$ olur. Ayrıca S_{200} , S_{201} , S_{202} , S_{210} , S_{211} , S_{212} , S_{220} , S_{221} , S_{222} kümelerinin F altındaki görüntüleri sırasıyla S_{22} , S_{20} , S_{21} , S_{02} , S_{00} , S_{01} , S_{12} , S_{10} , S_{11} şeklindedir (Bkz. Şekil 4.7). Buradan $i = 1, 2, 3, \dots$ için $y_i \equiv x_{i+1} + 2 \pmod{3}$ olmak üzere $F(2x_2x_3x_4 \dots) = y_1y_2y_3 \dots$ elde edilir. $\square$

$\{S; F\}$ dinamik sisteminin kaotik bir dinamik sistem olduğunu göstermek ve periyodik noktalarını daha kolay bir şekilde hesaplayabilmek için F fonksiyonunun Önerme 4.2.2’de verilen tanımı kullanılacaktır.

Teorem 4.2.3. $\{S; F\}$ dinamik sistemi Devaney anlamında kaotiktir.

Kanıt. İlk olarak F ’nin başlangıç noktalarına hassas bağımlı olduğu gösterilecektir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere S ’den kod gösterimi $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ olan keyfi bir A noktası seçilsin. Her δ için $\frac{1}{2^{k-2}} < \delta$ olacak şekilde yeterince büyük bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca $i = k, k+1, k+2, \dots$ için $b_i \neq a_k$ olacak şekilde kod temsili $a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olan $B \in S$ noktası seçilsin. d metriği kullanılarak,

$$d(A, B) < \delta$$

olduğu hesaplanır. Diğer yandan, $t = k, k+1, k+2, \dots$ ve $s = 2^{k-2}a_1 + 2^{k-3}a_2 + \dots + a_{k-1}$ için $c_t \equiv s + a_t \pmod{3}$ ve $d_t \equiv s + b_t \pmod{3}$ olmak üzere

$$F^{k-1}(A) = c_k c_{k+1} c_{k+2} \dots$$

$$F^{k-1}(B) = d_k d_{k+1} d_{k+2} \dots$$

elde edilir. Burada $i = 1, 2, 3, \dots$ için $s + a_k \neq s + b_{k+i}$ olduğundan

$$d(F^{k-1}(A), F^{k-1}(B)) > \frac{1}{4}$$

elde edilerek istenilen sonuca ulaşılır.

F ’nin topolojik geçişkenliğini gösterebilmek için S ’den boştan farklı keyfi U ve V açık alt kümeleri alınsın. O halde $B(A, \frac{1}{2^{k-1}}) \subset U$ olacak şekilde kod gösterimi $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ olan bir $A \in S$ elemanı ve k doğal sayısı vardır.

Kolayca görülebilir ki $B(A, \frac{1}{2^{k-1}})$ kümesi keyfi $x_i \in \{0, 1, 2\}$ ($i = k+2, k+3, \dots$) için

$$U' = \{a_1 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} \dots \mid a_1, \dots, a_k \text{’lar sabit}\}$$

olacak şekilde S ’nin bir U' alt üçgenini içerir.

$i = 1, 2, 3 \dots$ ve $s = 2^{k-1}a_1 + 2^{k-2}a_2 + \dots + a_k$ için F 'nin tanımından,

$$F^k(U') = \{y_1 y_2 y_3 \dots \mid y_i \equiv s + x_{k+i} \pmod{3}\}$$

elde edilir. Burada $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3} \dots$ keyfi olduğundan $F^k(U') = S$ ve $F^k(U) = S$ bulunur. Yani, U ve V , S 'nin boştan farklı alt kümeleri olmak üzere

$$F^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır.

F 'nin periyodik noktalarının S 'de yoğun olduğunu göstermek için S 'deki herhangi bir noktaya istenildiği kadar yakın periyodik noktalar bulunmalıdır. Keyfi bir $A \in S$ noktası ve $U \subseteq S$ açık kümesi alınsın. Yeterince büyük k için $B(A, \frac{1}{2^{k-1}}) \subset U$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. d metriğinin tanımından, $i = 1, 2, \dots, k$ ve $j = k+1, k+2, \dots$ olmak üzere

$$U' = \{a_1 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} \dots \mid a_i \text{'ler sabit ve } x_j \text{'ler keyfi}\} \subset B\left(A, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

elde edilir. Şimdi U' kümesinin bir k -periyotlu nokta içerdiği gösterilsin. $l = 1, 2, 3, \dots$ için $y_{k+l} \equiv s + x_{k+l}$ ve $s = 2^{k-1}a_1 + 2^{k-2}a_2 + \dots + a_k$ olmak üzere

$$F^k(\{a_1 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} \dots\}) = \{y_{k+1} y_{k+2} y_{k+3} \dots\}$$

eşitliğinden

$$s + x_{k+1} \equiv a_1 \pmod{3}$$

$$s + x_{k+2} \equiv a_2 \pmod{3}$$

$$\vdots$$

$$s + x_{2k} \equiv a_k \pmod{3}$$

$$\vdots$$

denklemleri elde edilir.

$j = k + 1, k + 2, k + 3, \dots$ için x_j 'ler keyfi olduğundan bu denklem sisteminin her zaman bir çözümü vardır. Yani S 'deki herhangi bir keyfi noktaya istenildiği kadar yakın bir periyodik nokta bulunabilir.

□

$\{S; F\}$ dinamik sisteminin periyodik noktalarını veren algoritma

Bu bölümde F 'nin periyodik noktalarını veren genel bir formül elde edilmiştir. Kod gösterimi $a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots$ şeklinde olan Sierpinski üçgeni üzerindeki keyfi bir A noktasına F fonksiyonu uygulanırsa, $k = 1, 2, 3 \dots$ için

$$b_k \equiv a_1 + a_{k+1} \pmod{3}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} F(A) &= b_1 b_2 b_3 \dots b_k \dots \\ &= (a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_1 + a_4) \dots (a_1 + a_{k+1}) \dots \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan yola çıkılarak $F(A) = A$ denkleminin çözümü olan F 'nin sabit noktaları

$$\bullet \overline{0} = 000000 \dots, \quad \bullet \overline{201} = 201201201 \dots, \quad \bullet \overline{102} = 102102102 \dots$$

şeklinde bulunur.

Ayrıca A noktasının $F \circ F$ altındaki görüntüsü $k = 1, 2, 3 \dots$ için

$$c_k \equiv 2a_1 + a_2 + a_{k+2} \pmod{3}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} F^2(A) &= c_1 c_2 \dots c_k \dots \\ &= (2a_1 + a_2 + a_3)(2a_1 + a_2 + a_4) \dots (2a_1 + a_2 + a_{k+2}) \dots \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Buradan $F^2(A) = A$ denkleminin çözümü olan F 'nin 2-periyotlu noktaları,

$$\bullet \bar{1} = 11111 \dots, \quad \bullet \bar{2} = 2222 \dots, \quad \bullet \bar{012} = 012012012 \dots,$$

$$\bullet \bar{120} = 120120120 \dots, \quad \bullet \bar{210} = 210210210 \dots, \quad \bullet \bar{021} = 021021021 \dots$$

şeklinde hesaplanır.

Benzer yolla A noktasının F^n altındaki görüntüsü

$k = 1, 2, 3 \dots$ için $d_k \equiv 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}a_2 + \dots + a_n + a_{n+k} \pmod{3}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F^n(A) &= d_1 d_2 \dots d_k \dots \\ &= (2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})(2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}a_2 + \dots + a_n + a_{n+2}) \\ &\quad \dots (2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}a_2 + \dots + a_n + a_{n+k}) \dots \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. F 'nin n -periyotlu noktalarını hesaplamak için $F^n(A) = A$ denklemi çözülerek $n = 1, 2, 3, \dots$ ve $k = 1, 2, 3 \dots$ için

$$2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}a_2 + \dots + a_n + a_{n+k} \equiv a_k \pmod{3} \quad (4.3)$$

elde edilir.

Elde edilen genelleştirilmiş durumda (4.3) denklemi kullanılarak,

3-periyotlu bazı döngüler

$$\{\bar{011}, \bar{110}, \bar{212}\}, \{\bar{022}, \bar{220}, \bar{121}\}, \{\bar{001220112}, \bar{012201120}, \bar{122011200}\},$$

$$\{\bar{010121202}, \bar{101212020}, \bar{120201012}\}, \{\bar{100022211}, \bar{111000222}, \bar{221110002}\},$$

$$\{\bar{200011122}, \bar{222000111}, \bar{112220001}\}$$

4-periyotlu bazı döngüler

$$\{\bar{1100}, \bar{2112}, \bar{0011}, \bar{0110}\}, \{\bar{2200}, \bar{1221}, \bar{0022}, \bar{0220}\}, \{\bar{1122}, \bar{2002}, \bar{2211}, \bar{1001}\}$$

5-periyotlu bazı döngüler

$$\{\bar{00011}, \bar{00110}, \bar{01100}, \bar{11000}, \bar{21112}\}$$

$$\{\overline{100000222221111}, \overline{111110000022222}, \overline{222211111000002}, \overline{111000002222211}, \overline{221111100000222}\}$$

ve 6—periyotlu bazı döngüler

$$\{\overline{20}, \overline{21}, \overline{01}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{02}\}, \{\overline{100}, \overline{112}, \overline{202}, \overline{211}, \overline{001}, \overline{010}\}$$

$$\{\overline{002211}, \overline{022110}, \overline{221100}, \overline{100221}, \overline{110022}, \overline{211002}\}$$

şeklinde bulunur.

4.3. Sierpinski Üçgeni Üzerinde $\{S; F\}$ Dinamik Sistemine Denk Olmayan Bir Dinamik Sistem İnşası

Bu bölümde zaman kaçış algoritması yoluyla Sierpinski üçgenini elde etmek için kullanılan ve (3.2)'de tanımlanan dönüşümün aynı zamanda Sierpinski üçgeni üzerinde bir kaotik dinamik sistem olduğu gösterilecektir.

$$g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= (2x, 2y) \\ g_2(x, y) &= \left(-\frac{1}{2} \left\lfloor \frac{x-2+y\sqrt{3}}{2} \right\rfloor - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{y-\sqrt{3}(x-2)}{2} \right) + 2, \frac{y-\sqrt{3}(x-2)}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left\lfloor \frac{x-2+y\sqrt{3}}{2} \right\rfloor \right) \\ g_3(x, y) &= (1 - |x - 1|, y) \end{aligned}$$

olmak üzere g_1 genişleme ve g_2, g_3 katlama dönüşümlerinin bileşkesi olarak

$$G = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \tag{4.4}$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada g_1 genişleme dönüşümü Sierpinski üçgenini iki katına çıkarır. g_2 fonksiyonu $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ve g_3 fonksiyonu $x = 1$ doğrusuna göre katlama dönüşümüdür. $\{S; G\}$ bir dinamik sistemdir ancak G fonksiyonunu kullanarak bu dinamik sistemin kaotikliğini incelemek oldukça zor olacağından bu fonksiyon aşağıda verilen önerme ile Sierpinski üçgeninin üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak ifade edilmiştir.

Önerme 4.3.1. *Herhangi bir $X \in S$ noktasının kod gösterimi $x_1x_2x_3 \dots$ olsun. Bu durumda (4.4)'te tanımlanan $G : S \rightarrow S$ fonksiyonu, $i = 1, 2, 3, \dots$ için $x_i \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilir:*

Eğer $x_1 = 0$ ise

$$G(x_1x_2x_3\ldots) = x_2x_3x_4\ldots$$

$x_1 = 1$ ise iki durum söz konusudur:

1. Durum:

$$G(111\ldots 10x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\ldots) = y_2y_3\ldots y_ky_{k+1}\ldots = 00\ldots 01y_{k+1}y_{k+2}y_{k+3}\ldots$$

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_i = 1 \\ 1, & x_i = 0 \quad (i \geq k+1) \\ 2, & x_i = 2 \end{cases}$$

2. Durum:

$$G(111\ldots 12x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\ldots) = y_2y_3\ldots y_ky_{k+1}\ldots = 00\ldots 01y_{k+1}y_{k+2}y_{k+3}\ldots$$

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_i = 1 \\ 1, & x_i = 2 \quad (i \geq k+1) \\ 2, & x_i = 0 \end{cases}$$

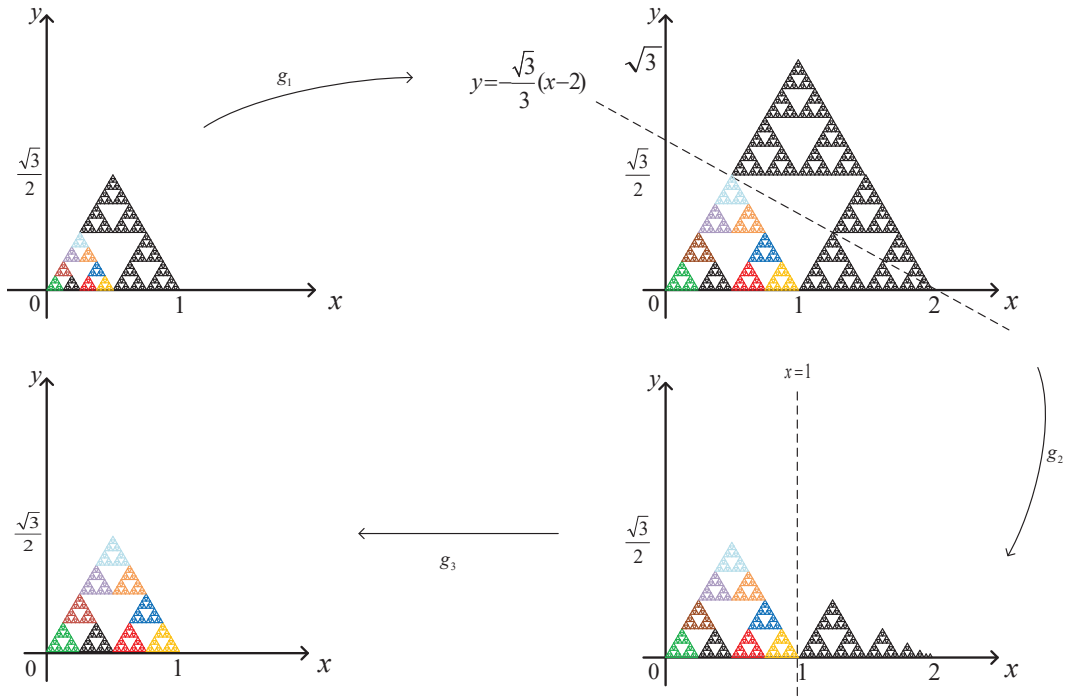
$x_1 = 2$ ise

$$G(x_1x_2x_3\ldots) = y_2y_3y_4\ldots, \quad y_i = \begin{cases} 0, & x_i = 2 \\ 1, & x_i = 1 \quad (i \geq 2) \\ 2, & x_i = 0 \end{cases}$$

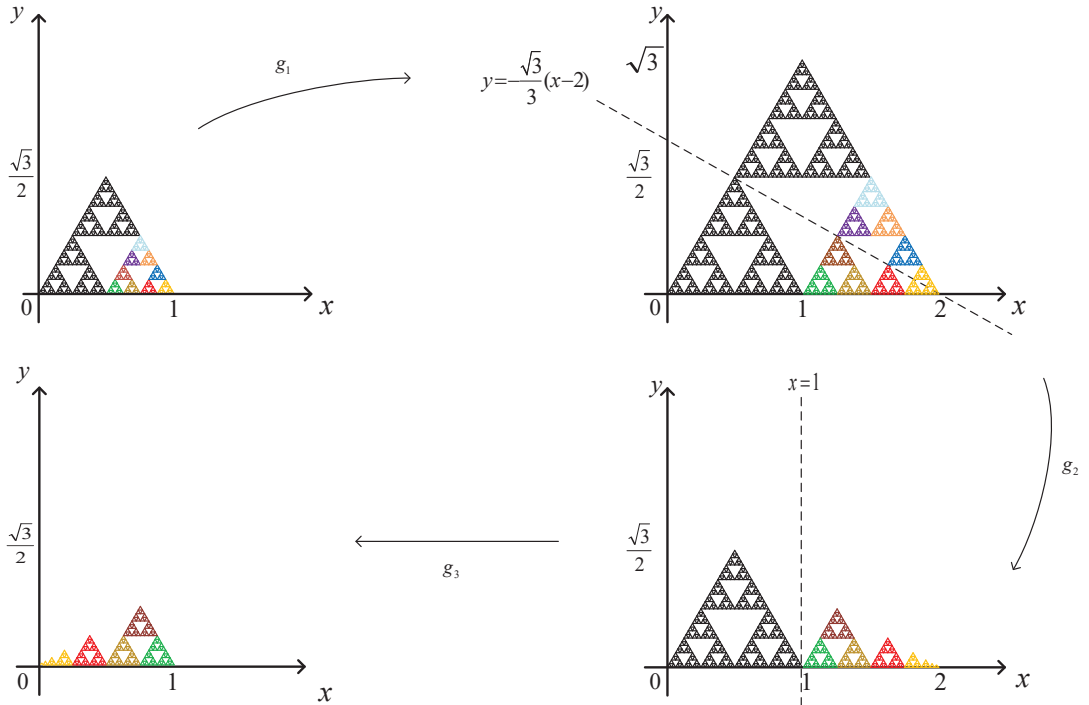
olur.

Kanıt. G fonksiyonunun S 'nin kod kümesi üzerinde iyi tanımlı olduğu gösterilecektir. x_1 'in 0, 1 ve 2 olma durumuna göre yukarıda verilen dört kuraldan birisi uygulanır (Bkz. Şekil 4.8, 4.9, 4.10, 4.11). Eğer X tek bir kod gösterimine sahipse sonuç aşıkardır ve $G(X)$ tek bir kod gösterimine sahiptir.

Eğer X noktası $x_1x_2x_3\ldots x_n\alpha\beta\beta\beta\ldots$ ve $x_1x_2x_3\ldots x_n\beta\alpha\alpha\alpha\ldots$ olacak şekilde iki farklı kod gösterimine sahip ise $0\bar{1}, 1\bar{0}, 0\bar{2}, 2\bar{0}, 1\bar{2}, 2\bar{1}, 00\bar{1}, 01\bar{0}, 01\bar{2}, 02\bar{1}, 00\bar{2}, 02\bar{0}, 11\bar{0}, 10\bar{1}, 12\bar{0}, 10\bar{2}, 11\bar{2}, 12\bar{1}, 20\bar{2}, 22\bar{0}, 21\bar{2}, 22\bar{1}, 20\bar{1}, 21\bar{0}$ noktalarının incelenmesi yeterli olacaktır.



Şekil 4.8: S_0 , S_{0x_2} ve $S_{0x_2x_3}$ kod kümelerinin G fonksiyonu altındaki görüntüsü



Şekil 4.9: S_{10} , S_{110} , S_{1110} kod kümelerinin G fonksiyonu altındaki görüntüsü

Bu noktaların, Önerme 4.3.1’de verilen durumlara göre G fonksiyonu altında görüntüleri

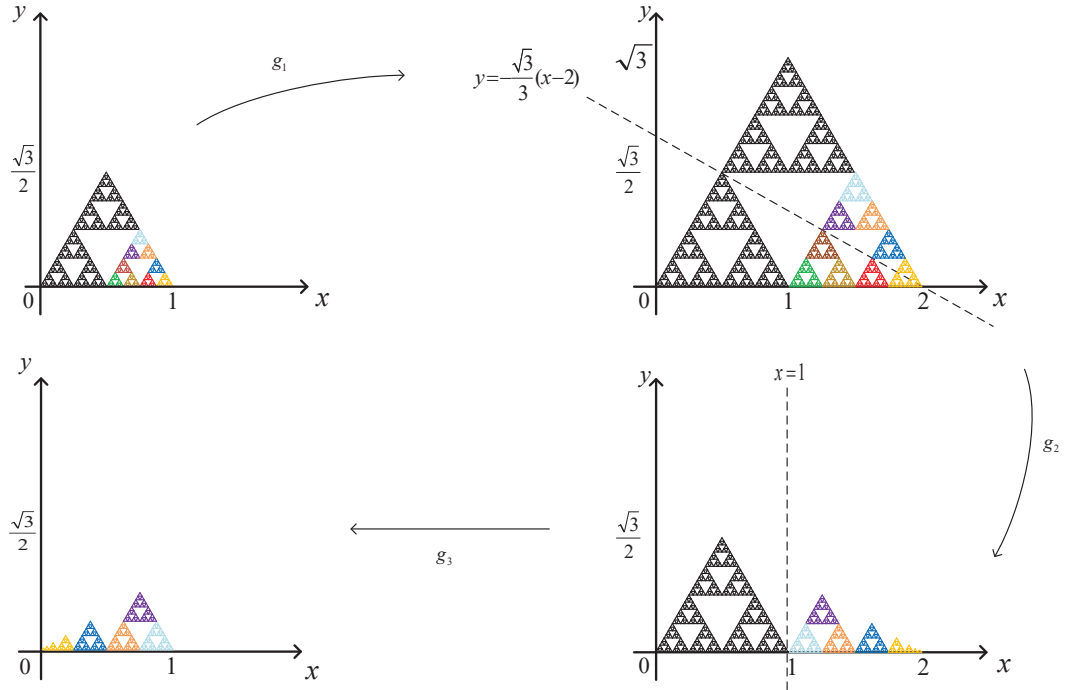
$$\begin{aligned} G(0\bar{1}) &= \bar{1}, & G(0\bar{2}) &= \bar{2}, & G(1\bar{2}) &= \bar{1}, \\ G(1\bar{0}) &= \bar{1}, & G(2\bar{0}) &= \bar{2}, & G(2\bar{1}) &= \bar{1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(01\bar{0}) &= 1\bar{0}, & G(02\bar{0}) &= 2\bar{0}, & G(01\bar{2}) &= 1\bar{2}, \\ G(00\bar{1}) &= 0\bar{1}, & G(00\bar{2}) &= 0\bar{2}, & G(02\bar{1}) &= 2\bar{1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(11\bar{0}) &= 0\bar{1}, & G(11\bar{2}) &= 0\bar{1}, & G(12\bar{0}) &= 1\bar{2}, \\ G(10\bar{1}) &= 1\bar{0}, & G(12\bar{1}) &= 1\bar{0}, & G(10\bar{2}) &= 1\bar{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(20\bar{2}) &= 2\bar{0}, & G(21\bar{2}) &= 1\bar{0}, & G(20\bar{1}) &= 2\bar{1}, \\ G(22\bar{0}) &= 0\bar{2}, & G(22\bar{1}) &= 0\bar{1}, & G(21\bar{0}) &= 1\bar{2}, \end{aligned}$$

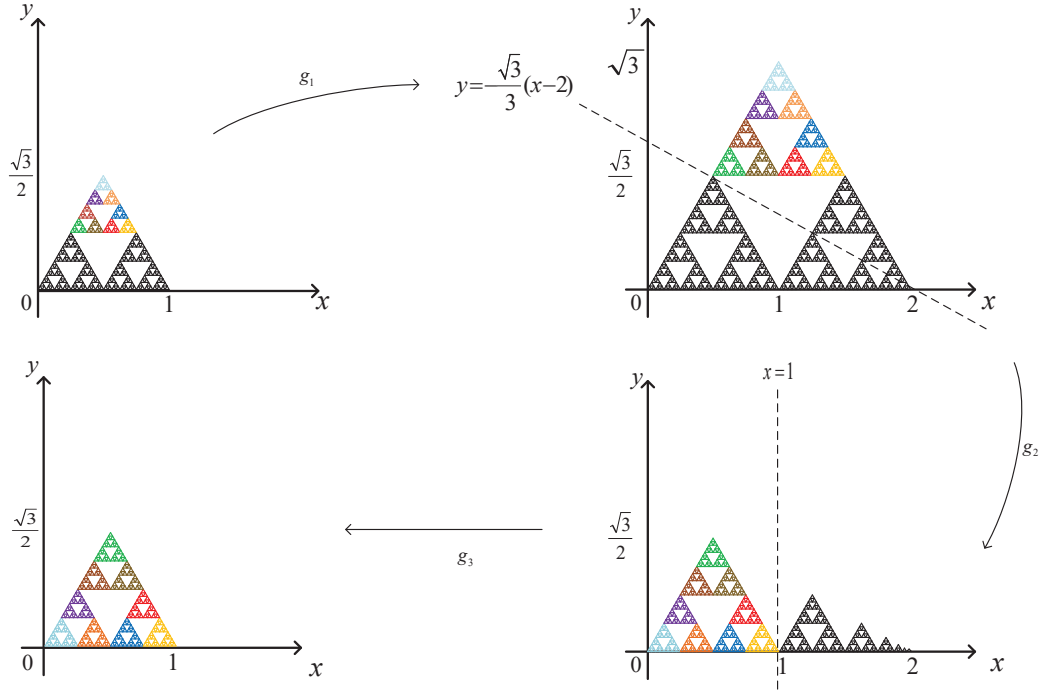
olur.



Şekil 4.10: S_{12} , S_{112} , S_{1112} kod kümelerinin G fonksiyonu altındaki görüntüsü

Görüleceği üzere aynı noktaların farklı kod temsillerinin görüntüleri tek ve aynı noktaya gider. Genelleştirilmiş durumda $\sigma = x_1x_2x_3 \dots x_n$ olmak üzere $\sigma 0\bar{1}$ ile $\sigma 1\bar{0}$, $\sigma 1\bar{2}$ ile $\sigma 2\bar{1}$, $\sigma 0\bar{2}$ ile $\sigma 2\bar{0}$, ayrıca $\sigma 00\bar{1}$ ile $\sigma 01\bar{0}$, $\sigma 01\bar{2}$ ile $\sigma 02\bar{1}$, $\sigma 00\bar{2}$ ile $\sigma 02\bar{0}$, $\sigma 11\bar{0}$

ile $\sigma 10\bar{1}$, $\sigma 12\bar{0}$ ile $\sigma 10\bar{2}$, $\sigma 11\bar{2}$ ile $\sigma 12\bar{1}$ ve $\sigma 20\bar{2}$ ile $\sigma 22\bar{0}$, $\sigma 21\bar{2}$ ile $\sigma 22\bar{1}$, $\sigma 20\bar{1}$ ile $\sigma 21\bar{0}$ aynı noktaların farklı kod gösterimleridir ve σ 'dan bağımsız olmak üzere bu noktaların görüntüleri de aynı olur.



Şekil 4.11: S_2 , S_{2x_2} ve $S_{2x_2x_3}$ kod kümelerinin G fonksiyonu altındaki görüntüsü

□

Teorem 4.3.2. $\{S; G\}$ dinamik sistemi Devaney anlamında kaotiktir.

Kanıt. İlk olarak G 'nin başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğu gösterilecektir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere kod gösterimi $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ olacak şekilde keyfi bir $A \in S$ noktası alınsın. Her δ için $\frac{1}{2^{k-2}} < \delta$ olacak şekilde yeterince büyük bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca $i = k, k+1, k+2, \dots$ için $b_i \neq a_k$ olacak şekilde kod gösterimi $a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olan $B \in S$ noktası seçilsin. d metriği kullanılarak

$$d(A, B) < \delta$$

olduğu hesaplanır. Diğer taraftan

$$G^{k-1}(A) = c_k c_{k+1} c_{k+2} \dots$$

$$G^{k-1}(B) = d_k d_{k+1} d_{k+2} \dots$$

elde edilir. $d_k \neq c_k$ ve $d_{k+1} \neq c_k$ seçilirse

$$d(G^{k-1}(A), G^{k-1}(B)) \geq \frac{1}{4}$$

sonucuna ulaşılır.

G 'nin topolojik geçişkenliğini gösterebilmek için S 'nin boştan farklı keyfi U ve V açık alt kümeleri alınsın. $B(A, \frac{1}{2^{k-1}}) \subset U$ olacak şekilde kod gösterimi $a_1 a_2 \dots a_k \dots$ olan $A \in S$ elemanı ve k doğal sayısı vardır. $i = k+1, k+2, k+3, \dots$ için $x_i \in \{0, 1, 2\}$ keyfi olmak üzere $B(A, \frac{1}{2^{k-1}})$, Sierpinski üçgeninin

$$U' = \{a_1 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} \dots \mid a_1, \dots, a_k \text{'ler sabit}\}$$

şeklinde bir alt kümesini içerir.

$j = k+1, k+2, k+3, \dots$ için keyfi x_j 'lere karşılık y_j 'ler uygun şekilde seçildiğinde

$$G^k(U') = \{y_{k+1} y_{k+2} y_{k+3} \dots\}$$

elde edilir. Buradan $G^k(U') = S$ ve $G^k(U) = S$ bulunur. Yani U ve V , S 'nin boştan farklı alt kümeleri olmak üzere

$$G^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ bulunur.

G 'nin periyodik noktalarının S 'de yoğun olması için S 'deki herhangi bir noktaya istenildiği kadar yakın periyodik noktalar bulunmalıdır. Keyfi bir $A \in S$ elemanı ve $U \subseteq S$ açık kümesi alınsın. Yeterince büyük k 'lar için $B(A, \frac{1}{2^{k-1}}) \subset U$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. d metriğinin tanımından $i = 1, 2, \dots, k$ ve $j = k+1, k+2, \dots$ için

$$U' = \{a_1 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} \dots \mid a_i \text{'ler sabit ve } x_j \text{'ler keyfi}\}$$

olacak şekilde

$$U' \subset B\left(A, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

elde edilir. Şimdi U' kümesinin k -periyotlu bir nokta içerdiği gösterilecektir.

$$G^k(\{a_1 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} \dots\}) = \{y_{k+1} y_{k+2} y_{k+3} \dots\}$$

eşitliğinde $j = k + 1, k + 2, k + 3, \dots$ için x_j 'ler keyfi olduğundan bunlara karşılık uygun y_j 'ler bulunarak k -periyotlu noktalar elde edilir. Yani yukarıdaki denklem sisteminin her zaman bir çözümü vardır ve S' 'deki herhangi bir noktaya istenildiği kadar yakın periyodik noktalar bulunabilir.

□

$\{S; G\}$ dinamik sisteminin periyodik noktalarının incelenmesi

Yukarıda tanımlanan G dönüşümünden yola çıkılarak bu dinamik sistemin sabit noktaları ve 2-periyotlu noktaları hesaplanmıştır.

G 'nin sabit noktaları

$$\bullet \overline{0} = 000\dots, \quad \bullet \overline{20} = 2020\dots, \quad \bullet \overline{10} = 1010\dots, \quad \bullet \overline{120} = 120120\dots$$

G 'nin 2-periyotlu noktaları

$$\bullet \overline{0220} = 02200220\dots, \quad \bullet \overline{0110} = 01100110\dots$$

$$\bullet \overline{011220} = 011220011220\dots, \quad \bullet \overline{112200} = 112200112200\dots$$

$$\bullet \overline{1100} = 11001100\dots, \quad \bullet \overline{1020} = 10201020\dots$$

$$\bullet \overline{1210} = 12101210\dots, \quad \bullet \overline{2200} = 22002200\dots$$

olarak hesaplanır.

Sonuç 4.3.3. *Sierpinski üçgeni üzerinde Önerme 4.2.2 ve 4.3.1'de tanımlanan dinamik sistemler farklı sayıda sabit noktalara sahiptir. Buna göre Önerme 2.4.11'den yola çıkarak bu iki dinamik sistemin topolojik olarak denk olmayan dinamik sistemler olduğu sonucuna ulaşılır.*

4.4. Sierpinski Üçgeni Üzerinde $\{S; G\}$ Dinamik Sistemi İle Denk Olan Bir Dinamik Sistem İnşası

$$t_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (i = 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} t_1(x, y) &= (2x, 2y) \\ t_2(x, y) &= \left(\frac{1}{2} \left| \frac{x-y\sqrt{3}}{2} \right| + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{y+x\sqrt{3}}{2} \right), \frac{y+x\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{x-y\sqrt{3}}{2} \right| \right) \\ t_3(x, y) &= (1 + |x - 1|, y) \\ t_4(x, y) &= (x - 1, y) \end{aligned}$$

olmak üzere T fonksiyonu

$$T = t_4 \circ t_3 \circ t_2 \circ t_1 \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlansın. Burada t_1 fonksiyonu genişleme dönüşümüdür ve Sierpinski üçgenini iki katına çıkarır. t_2 fonksiyonu $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, t_3 fonksiyonu $x = 1$ doğrusuna göre doğrunun sağındaki bir noktayı doğrunun soluna götüren katlama dönüşümleri ve t_4 fonksiyonu öteleme dönüşümüdür. Burada $\{S; T\}$ bir dinamik sistemdir. Bu dinamik sistem Sierpinski üçgeninin kod kümesi üzerinde aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

Önerme 4.4.1. *Herhangi bir $X \in S$ noktasının kod gösterimi $x_1x_2x_3 \dots$ olsun. Bu durumda (4.5)'te tanımlanan $T : S \rightarrow S$ fonksiyonu, $i = 1, 2, 3, \dots$ için $x_i \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilir:*

Eğer $x_1 = 0$ ise iki durum söz konusudur:

1. Durum:

$$T(000 \dots 01x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3} \dots) = y_2y_3 \dots y_ky_{k+1} \dots = 11 \dots 10y_{k+1}y_{k+2}y_{k+3} \dots$$

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_i = 1 \\ 1, & x_i = 0 \quad (i \geq k+1) \\ 2, & x_i = 2 \end{cases}$$

2. Durum:

$$T(000 \dots 02x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3} \dots) = y_2y_3 \dots y_ky_{k+1} \dots = 11 \dots 10y_{k+1}y_{k+2}y_{k+3} \dots$$

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_i = 2 \\ 1, & x_i = 0 \quad (i \geq k+1). \\ 2, & x_i = 1 \end{cases}$$

$x_1 = 1$ ise

$$T(x_1x_2x_3\dots) = x_2x_3x_4\dots$$

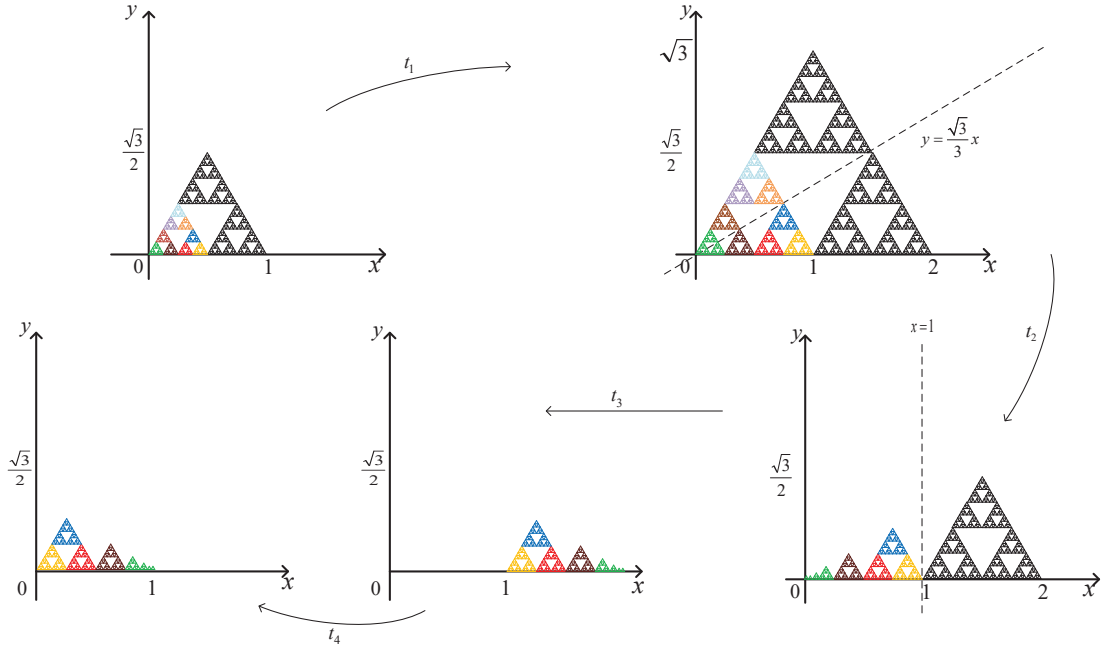
olur.

$x_1 = 2$ ise

$$T(x_1x_2x_3\dots) = y_2y_3y_4\dots, \quad y_i = \begin{cases} 1, & x_i = 2 \\ 2, & x_i = 1 \quad (i \geq 2) \\ 0, & x_i = 0 \end{cases}$$

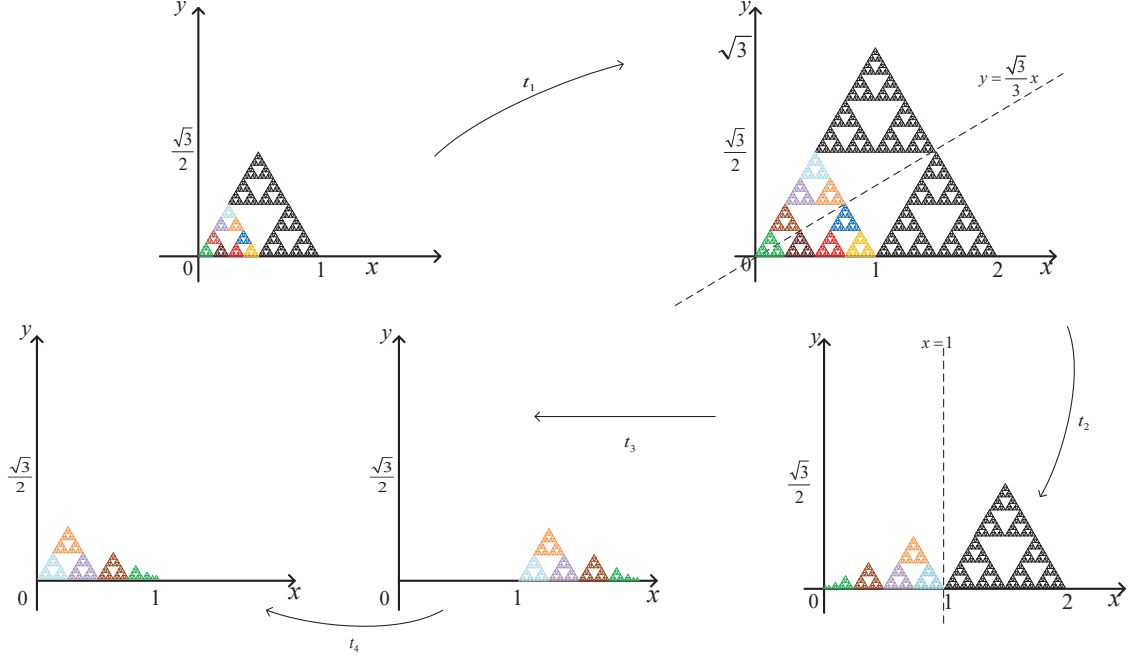
olur.

Kanıt. Kod gösterimi $x_1x_2x_3\dots$ olan $X \in S$ noktası için x_1 'in 0,1 veya 2 olma durumuna göre yukarıda verilen dört kuraldan birisi uygulanır (Bkz. Şekil 4.12, 4.13, 4.14, 4.15).



Şekil 4.12: S_{01} , S_{001} , S_{0001} kod kümelerinin T fonksiyonu altındaki görüntüsü

X noktası tek bir kod gösterimine sahip ise sonuç aşıkardır. Eğer X noktası $x_1x_2x_3\dots x_n\alpha\beta\beta\beta\dots$ ve $x_1x_2x_3\dots x_n\beta\alpha\alpha\alpha\dots$ olacak şekilde iki farklı kod gösterimine sahip ise $0\bar{1}$, $1\bar{0}$, $0\bar{2}$, $2\bar{0}$, $1\bar{2}$, $2\bar{1}$, $00\bar{1}$, $01\bar{0}$, $01\bar{2}$, $02\bar{1}$, $00\bar{2}$, $02\bar{0}$, $11\bar{0}$, $10\bar{1}$, $12\bar{0}$, $10\bar{2}$, $11\bar{2}$, $12\bar{1}$, $20\bar{2}$, $22\bar{0}$, $21\bar{2}$, $22\bar{1}$, $20\bar{1}$, $21\bar{0}$ noktalarının incelenmesi yeterli olacaktır. Bu noktaların Önerme 4.4.1’de verilen durumlara göre T fonksiyonu altında görüntüleri aşağıda verilmiştir:



Şekil 4.13: S_{02} , S_{002} , S_{0002} kod kümelerinin T fonksiyonu altındaki görüntüsü

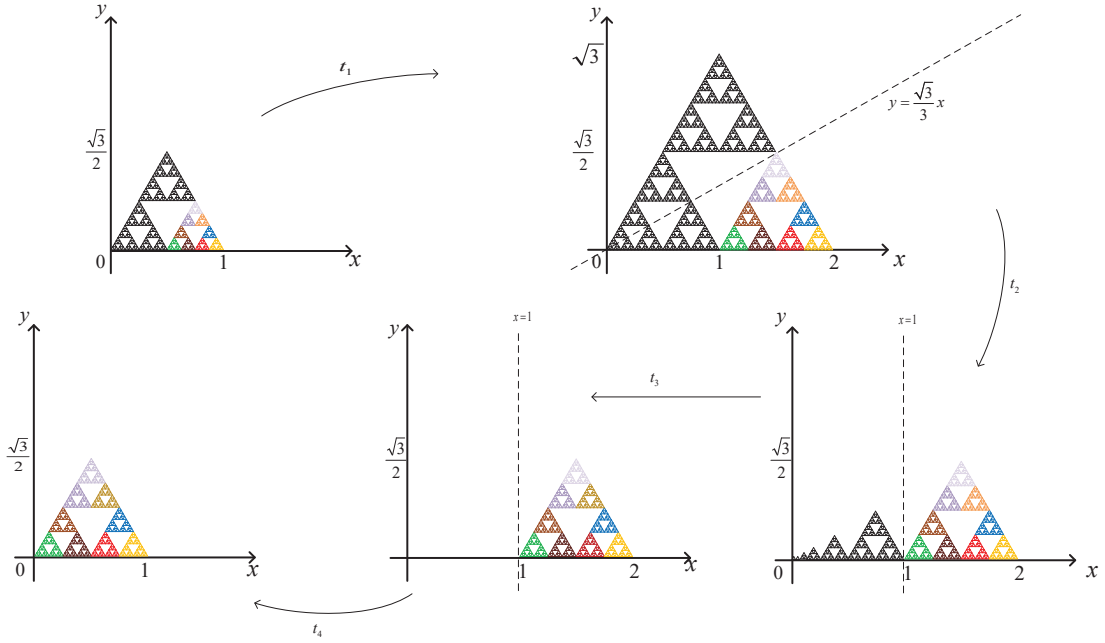
$$\begin{aligned} T(0\bar{1}) &= \bar{0}, & T(0\bar{2}) &= \bar{0}, & T(1\bar{2}) &= \bar{2}, \\ T(1\bar{0}) &= \bar{0}, & T(2\bar{0}) &= \bar{0}, & T(2\bar{1}) &= \bar{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(00\bar{1}) &= 1\bar{0}, & T(00\bar{2}) &= 1\bar{0}, & T(02\bar{1}) &= 0\bar{2}, \\ T(01\bar{0}) &= 0\bar{1}, & T(02\bar{0}) &= 0\bar{1}, & T(01\bar{2}) &= 0\bar{2}, \end{aligned}$$

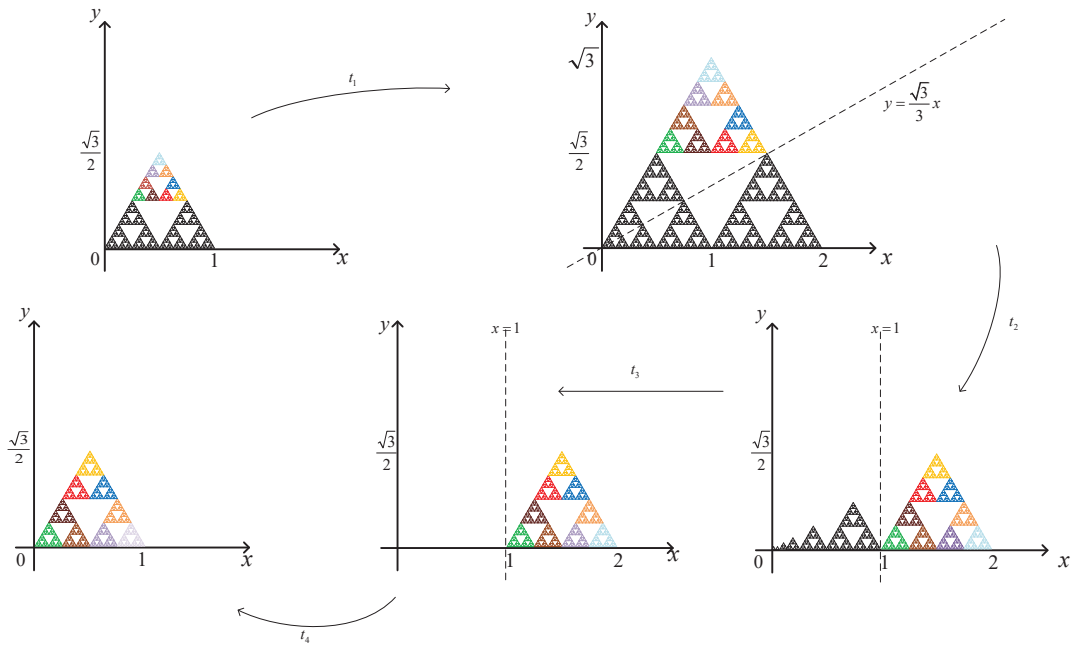
$$\begin{aligned} T(11\bar{0}) &= 1\bar{0}, & T(11\bar{2}) &= 1\bar{2}, & T(12\bar{0}) &= 2\bar{0}, \\ T(10\bar{1}) &= 0\bar{1}, & T(12\bar{1}) &= 2\bar{1}, & T(10\bar{2}) &= 0\bar{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(20\bar{2}) &= 0\bar{1}, & T(21\bar{2}) &= 2\bar{1}, & T(20\bar{1}) &= 0\bar{2} \\ T(22\bar{0}) &= 1\bar{0}, & T(22\bar{1}) &= 1\bar{2}, & T(21\bar{0}) &= 2\bar{0} \end{aligned}.$$

Görüldüğü üzere aynı noktaların farklı kod temsillerinin görüntüleri tek ve aynı noktaya gider.



Şekil 4.14: S_1 , S_{1x_2} ve $S_{1x_2x_3}$ kod kümelerinin T fonksiyonu altındaki görüntüsü



Şekil 4.15: S_2 , S_{2x_2} ve $S_{2x_2x_3}$ kod kümelerinin T fonksiyonu altındaki görüntüsü

Genelleştirilmiş durumda $\sigma = x_1x_2x_3\dots x_n$ olmak üzere; $\sigma 0\bar{1}$ ile $\sigma 1\bar{0}$, $\sigma 1\bar{2}$ ile $\sigma 2\bar{1}$, $\sigma 0\bar{2}$ ile $\sigma 2\bar{0}$ ayrıca $\sigma 00\bar{1}$ ile $\sigma 01\bar{0}$, $\sigma 01\bar{2}$ ile $\sigma 02\bar{1}$, $\sigma 00\bar{2}$ ile $\sigma 02\bar{0}$, $\sigma 11\bar{0}$ ile $\sigma 10\bar{1}$, $\sigma 12\bar{0}$ ile $\sigma 10\bar{2}$, $\sigma 11\bar{2}$ ile $\sigma 12\bar{1}$ ve $\sigma 20\bar{2}$ ile $\sigma 22\bar{0}$, $\sigma 21\bar{2}$ ile $\sigma 22\bar{1}$, $\sigma 20\bar{1}$ ile $\sigma 21\bar{0}$ aynı noktaların farklı kod gösterimleridir ve σ 'dan bağımsız olmak üzere bu noktaların görüntüleri de aynı olur. $\square$

Uyarı 4.4.2. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $x_i, x'_i \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere $X, X' \in S$ noktalarının kod gösterimleri sırasıyla $x_1x_2x_3\dots$ ve $x'_1x'_2x'_3\dots$ olsun. $\forall X \in S$ için $H : S \rightarrow S$, $H(G(X)) = T(H(X))$ olacak şekilde

$$H(X) = X', \quad x'_i = \begin{cases} 1, & x_i = 0 \\ 0, & x_i = 1 \\ 2, & x_i = 2 \end{cases} \quad (4.6)$$

fonksiyonu vardır.

Önerme 4.4.3. $H : S \rightarrow S$, $H(x_1x_2x_3\dots) = x'_1x'_2x'_3\dots$ olmak üzere (4.6)'da tanımlanan

$$x'_i = \begin{cases} 1, & x_i = 0 \\ 0, & x_i = 1 \\ 2, & x_i = 2 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

fonksiyonu bir homeomorfizmadır.

Kanıt. H 'nin iyi tanımlı olduğu aşıkardır. H 'nin bir homeomorfizma olması için birebir, örten, sürekli ve H^{-1} 'in sürekli olması gerekir. Buna denk olarak bu ispatta H 'nin birebir, örten, açık ve sürekli bir fonksiyon olduğu gösterilecektir.

$\forall i = 1, 2, 3, \dots$ için $\forall X, Y \in S$ noktalarının kod gösterimleri sırasıyla $x_1x_2x_3\dots$ ve $y_1y_2y_3\dots$ olsun. H fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} H(X) = H(Y) &\Leftrightarrow H(x_1x_2x_3\dots) = H(y_1y_2y_3\dots) \\ &\Leftrightarrow x'_1x'_2x'_3\dots = y'_1y'_2y'_3\dots \\ &\Leftrightarrow x'_i = y'_i \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i \\ &\Leftrightarrow X = Y \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca X ve Y noktaları iki kod gösterimine sahip ise diğer kod gösterimleri için de bu durum benzer şekilde bulunur ve H 'nin birebir olduğu gösterilmiş olur.

H fonksiyonunun tanımı gereği, $\forall X' \in S$ için $H(X) = X'$ yani $H(x_1x_2x_3\ldots) = x'_1x'_2x'_3\ldots$ olacak şekilde kod gösterimi $x_1x_2x_3\ldots$ olan bir $X \in S$ olduğundan H fonksiyonu örtendir.

H fonksiyonunun açık bir fonksiyon olması, her $U \subseteq S$ açık alt kümesi için $H(U) \subseteq S$ kümesinin açık olması demektir. $\forall X \in U \subseteq S$ için $x \in B(X, \epsilon) \subseteq U$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır. Buradan $H(X) \in H(B(X, \epsilon)) \subseteq H(U)$ olur. $H(Y) = Y'$ olmak üzere $Y' \in H(B(X, \epsilon))$ için $Y \in B(X, \epsilon) \Leftrightarrow d(X, Y) < \epsilon$ elde edilir. H fonksiyonunun tanımından $d(X, Y) < \epsilon \Leftrightarrow d(H(X), H(Y)) < \epsilon$ olduğu açıktır. $d(H(X), H(Y)) < \epsilon \Leftrightarrow H(Y) \in B(H(X), \epsilon)$ yani $Y' \in B(H(X), \epsilon)$ olur. Bu durumda $H(B(X, \epsilon)) = B(H(X), \epsilon)$ bulunur. Yani $\forall H(X) \in H(U)$ için $B(H(X), \epsilon) \subseteq H(U)$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır, $H(U)$ kümesi S 'de açık olduğundan H açık bir fonksiyondur.

$\forall V \subseteq S$ açık kümesi için $U = H^{-1}(V) \subseteq S$ 'de açık ise H dönüşümü süreklidir. V kümesinin açık olduğu bilindiğine göre $\forall X' \in V$ için $X' \in B(X', \epsilon) \subseteq V$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır. Buradan $X = H^{-1}(X') \in H^{-1}(B(X', \epsilon)) \subseteq H^{-1}(V)$ olur. Ayrıca $Y \in B(H^{-1}(X'), \epsilon) \Leftrightarrow d(H^{-1}(X'), Y) < \epsilon$ yani $d(H^{-1}(X'), H^{-1}(Y')) < \epsilon$ olur. H fonksiyonunun tanımından $d(H^{-1}(X'), H^{-1}(Y')) < \epsilon \Leftrightarrow d(X', Y') < \epsilon$ olduğu açıktır. $d(X', Y') < \epsilon \Leftrightarrow Y' = H(Y) \in B(X', \epsilon) \Leftrightarrow Y \in H^{-1}(B(X', \epsilon))$ olur. Bu durumda $H^{-1}(B(X', \epsilon)) = B(H^{-1}(X'), \epsilon)$ bulunur. Yani $\forall H^{-1}(X') \in H^{-1}(V)$ için $B(H^{-1}(X'), \epsilon) \subseteq H^{-1}(V)$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır, $H^{-1}(V)$ kümesi de S 'de açık olduğundan H süreklidir. Bu durumda H dönüşümü bir homeomorfizmadır. $\square$

Sonuç 4.4.4. $\forall X \in S$ için $H(G(X)) = T(H(X))$ olacak şekilde (4.6)'da tanımlanan H fonksiyonunun Önerme 4.4.3'te bir homeomorfizma olduğu gösterilmiştir. Buna göre $\{S; G\}$ ve $\{S; T\}$ dinamik sistemleri topolojik olarak denk dinamik sistemlerdir. Ayrıca Önerme 2.4.11'e göre $\{S; G\}$ kaotik olduğundan $\{S; T\}$ 'de kaotik bir dinamik sistemdir.

$\{S; T\}$ dinamik sisteminin periyodik noktalarının incelenmesi

Önerme 4.4.3'ten $\{S; T\}$ ve $\{S; G\}$ dinamik sistemlerinin topolojik olarak denk dinamik sistemler olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Buna göre bu dinamik sistemlerin periyodik noktalarının sayısı aynıdır. Ayrıca (4.6) ifadesinde tanımlanan H dönüşümü yardımıyla $\{S; G\}$ dinamik sisteminin periyodik noktaları bilindiği takdirde $\{S; T\}$ dinamik sisteminin de periyodik noktaları kolayca bulunur. Buna göre G 'nin sabit noktaları

$$\bullet\bar{0} = 000\dots, \quad \bullet\bar{20} = 2020\dots, \quad \bullet\bar{10} = 1010\dots, \quad \bullet\bar{120} = 120120\dots$$

şeklinde olduğundan T fonksiyonunun sabit noktaları da

$$\bullet H(\bar{0}) = \bar{1}, \quad \bullet H(\bar{20}) = \bar{21}, \quad \bullet H(\bar{10}) = \bar{01}, \quad \bullet H(\bar{120}) = \bar{021}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde T 'nin 2-periyotlu noktaları

$$\bullet H(\overline{0220}) = \overline{1221}, \quad \bullet H(\overline{0110}) = \overline{1001}, \quad \bullet H(\overline{011220}) = \overline{100221}$$

$$\bullet H(\overline{112200}) = \overline{002211}, \quad \bullet H(\overline{1100}) = \overline{0011}, \quad \bullet H(\overline{1020}) = \overline{0121}$$

$$\bullet H(\overline{1210}) = \overline{0201}, \quad \bullet H(\overline{2200}) = \overline{2211}$$

olarak bulunur.

Uyarı 4.4.5. Eşitlik (4.4) ile tanımlanan dinamik sistemde g_2 ve g_3 katlama dönüşümlerinin sırası değiştirilerek de bu dinamik sisteme denk bir dinamik sistem elde edilebilir. Bu durumda yeni dinamik sistem

$$G' = g_2 \circ g_3 \circ g_1 \tag{4.7}$$

şeklinde olacaktır. Bu fonksiyon Sierpinski üçgeninin kod kümesi üzerinde aşağıdaki önerme ile ifade edilir.

Önerme 4.4.6. Herhangi bir $X \in S$ noktasının kod gösterimi $x_1x_2x_3\dots$ olsun. Bu durumda (4.7)'de tanımlanan $G' : S \rightarrow S$ fonksiyonu, $i = 1, 2, 3, \dots$ için $x_i \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilir:

Eğer $x_1 = 0$ ise

$$G'(x_1x_2x_3\ldots) = x_2x_3x_4\ldots$$

$x_1 = 1$ ise

$$G'(x_1x_2x_3\ldots) = y_2y_3y_4\ldots, \quad y_i = \begin{cases} 0, & x_i = 1 \\ 1, & x_i = 0 \quad (i \geq 2) \\ 2, & x_i = 2 \end{cases}$$

olur.

Eğer $x_1 = 2$ ise iki durum söz konusudur:

1. Durum:

$$G'(222\ldots 20x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\ldots) = y_2y_3y_4\ldots y_ky_{k+1}\ldots = 00\ldots 02y_{k+1}y_{k+2}y_{k+3}\ldots$$

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_i = 2 \\ 1, & x_i = 1 \quad (i \geq k+1) \\ 2, & x_i = 0 \end{cases}$$

2. Durum:

$$G'(222\ldots 21x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\ldots) = y_2y_3y_4\ldots y_ky_{k+1}\ldots = 00\ldots 02y_{k+1}y_{k+2}y_{k+3}\ldots$$

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_i = 2 \\ 1, & x_i = 0 \quad (i \geq k+1) \\ 2, & x_i = 1 \end{cases}$$

olur.

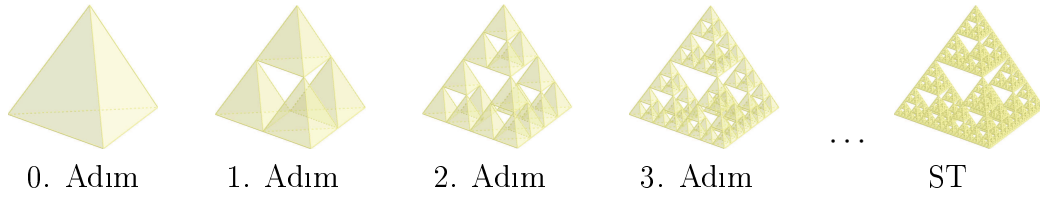
Kanıt. İspat, Önerme 4.3.1 ve 4.4.1'in ispatına benzer yolla yapılır. □

Uyarı 4.4.7. (S, d) kompakt metrik uzay ve F, G, T sürekli fonksiyonlar olduğundan $\{S; F\}, \{S; G\}$ ve $\{S; T\}$ dinamik sistemleri aynı zamanda Li-Yorke anlamında da kaotiktir (Bkz. [16]).

Bu bölümde Sierpinski üçgeni üzerinde farklı katlama dönüşümleri kullanılarak çok sayıda dinamik sistem tanımlanmıştır. Ayrıca Önerme 4.4.6'da görülmüştür ki aynı katlama dönüşümlerinin sadece sıraları değiştirilerek dahi farklı dinamik sistemler elde etmek mümkündür.

5. SIERPINSKI TETRAHEDRONU ÜZERİNDE İÇSEL METRİK VE KAOTİK DİNAMİK SİSTEM İNŞASI

Sierpinski tetrahedronu (ST), $3D$ fraktalların klasik örneklerinden bir tanesidir. Aslında bu fraktal Sierpinski üçgeninin 3 -boyuta taşınmış hali olarak da düşünülebilir. Şekil 5.1'de görüleceği üzere bu kümenin inşası için ilk önce düzgün bir dörtyüzlü ele alınır, daha sonra bu yapıdan dört küçük düzgün dörtyüzlü elde etmek için kenarların tam orta noktasından geçen küçük parça çıkarılır. Aynı adımlar diğer küçük düzgün dörtyüzlüler için tekrar edilir. Bu işlemler sonsuza kadar devam ettirildiğinde Sierpinski tetrahedronu elde edilir.



Şekil 5.1: Sierpinski tetrahedronunun inşası

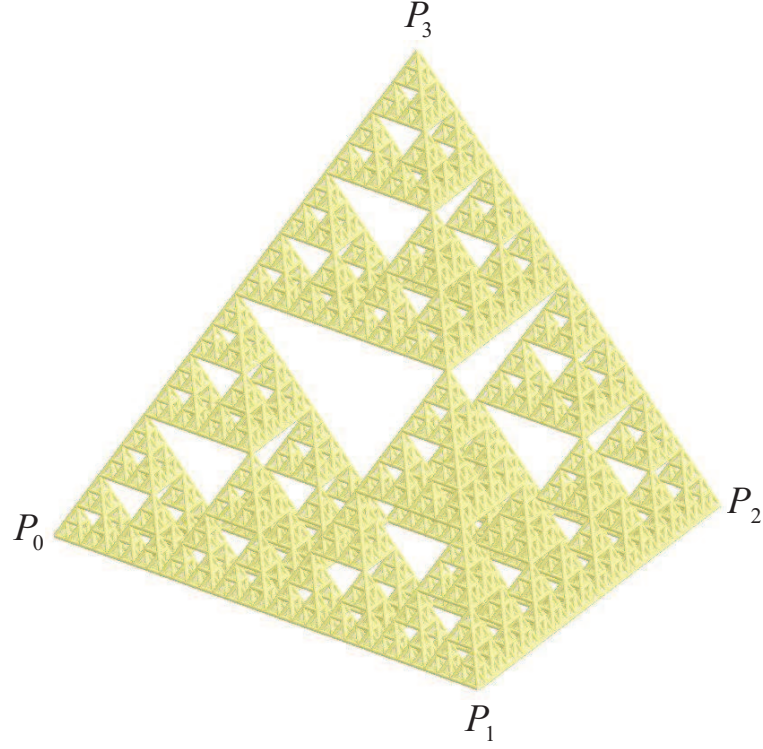
Bu bölümde köşe noktaları $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ve $P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ olan Sierpinski tetrahedronu ele alınmıştır (Bkz. Şekil 5.2).

$$\begin{aligned} f_0(x, y, z) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z \right) \\ f_1(x, y, z) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z \right) \\ f_2(x, y, z) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}z \right) \\ f_3(x, y, z) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere Sierpinski tetrahedronu, $\{\mathbb{R}^3; f_0, f_1, f_2, f_3\}$ YFS'nin atraktörü olarak ifade edilir. Yani

$$ST = \bigcup_{i=0}^3 f_i(ST)$$

olur.



Şekil 5.2: *Sierpinski tetrahedronu*

5.1. Sierpinski Tetrahedronu Üzerindeki Noktaların Kod Gösterimleri

Literatürde, farklı fraktallar üzerinde birçok metriğin tanımlandığı bilinmektedir (Bkz. [6, 7, 12, 14, 22, 24–28]). Bu bölümde Sierpinski tetrahedronunun üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak tanımlanmış olan bir içsel metrik formülü verilecektir. Ancak bunun için önce Sierpinski tetrahedronu üzerindeki noktaların kod temsillerinden ve kod kümesinden bahsedilecektir.

ST_0 , ST_1 , ST_2 ve ST_3 sırasıyla ST 'nin sol alt, sağ alt, arka alt ve üst parçalarını belirtmek üzere;

$$ST_0 = \{0a_2a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } i = 2, 3, 4, \dots\},$$

$$ST_1 = \{1a_2a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } i = 2, 3, 4, \dots\},$$

$$ST_2 = \{2a_2a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } i = 2, 3, 4, \dots\},$$

ve

$$ST_3 = \{3a_2a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } i = 2, 3, 4, \dots\}$$

şeklinde tanımlansın. Açıkça görülür ki ST ; ST_0 , ST_1 , ST_2 ve ST_3 kod kümelerinin birleşimi şeklindedir:

$$ST = ST_0 \cup ST_1 \cup ST_2 \cup ST_3.$$

Benzer şekilde ST_0 'ın sol alt, sağ alt, arka alt ve üst parçaları ise sırasıyla

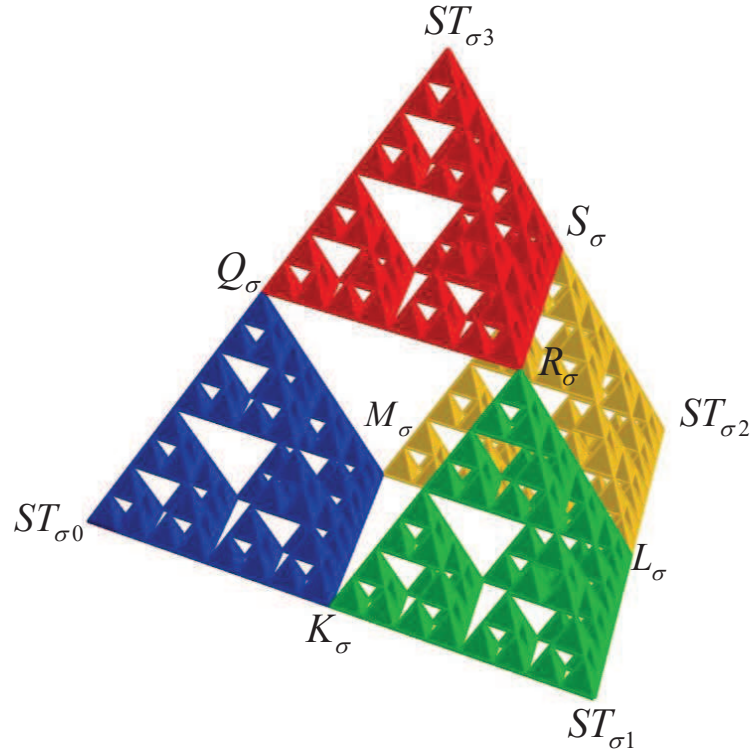
$$ST_{00} = \{00a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } i = 3, 4, 5, \dots\},$$

$$ST_{01} = \{01a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } i = 3, 4, 5, \dots\},$$

$$ST_{02} = \{02a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } i = 3, 4, 5, \dots\},$$

$$ST_{03} = \{03a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } i = 3, 4, 5, \dots\}$$

ile gösterilir. ST_0 kümesi ST_{00} , ST_{01} , ST_{02} ve ST_{03} kod kümelerinin birleşimi şeklindedir. ST_1 , ST_2 ve ST_3 kod kümeleri de benzer şekilde tanımlanır.



Şekil 5.3: ST_{σ} 'nın $ST_{\sigma 0}$, $ST_{\sigma 1}$, $ST_{\sigma 2}$, $ST_{\sigma 3}$ alt Sierpinski tetrahedronları

Genel durumda, $\forall i \in \mathbb{N}$ ve $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere sabit $a_1a_2 \dots a_{k-1}$ için $ST_{a_1a_2 \dots a_{k-1}}$ kümesinin sol alt, sağ alt, alt arka ve üst parçaları sırası ile $ST_{a_1a_2 \dots a_{k-1}0}$,

$ST_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} 1}$, $ST_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} 2}$ ve $ST_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} 3}$ olarak tanımlanır. $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ ile gösterilmek üzere, ST_σ 'nin sol alt, sağ alt, arka alt ve üst parçaları sırasıyla $ST_{\sigma 0}$, $ST_{\sigma 1}$, $ST_{\sigma 2}$ ve $ST_{\sigma 3}$ ile ifade edilir (Şekil 5.3'te bu alt tetrahedronlar sırasıyla mavi, yeşil, sarı ve kırmızı renk ile belirtilmiştir). Açıkça görülür ki, ST_σ , ST 'nin küçük bir alt tetrahedronudur ve

$$ST_{\sigma a_k} = \{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } i = k, k+1, k+2 \dots\}$$

kümelerinin birleşimine eşittir.

ST 'nin aynı seviyedeki herhangi iki alt tetrahedronunun kesişimi tek bir nokta verir. Bu kesişim noktaları

$$ST_0 \cap ST_1 = \{K\}, \quad ST_1 \cap ST_2 = \{L\}, \quad ST_0 \cap ST_2 = \{M\},$$

$$ST_0 \cap ST_3 = \{Q\}, \quad ST_1 \cap ST_3 = \{R\}, \quad ST_2 \cap ST_3 = \{S\}$$

olarak adlandırılın. Genel durum için bakıldığında $ST_{\sigma a_k}$ kümelerinin herhangi iki tanesinin kesişimi de tek bir nokta verecektir:

$$ST_{\sigma 0} \cap ST_{\sigma 1} = \{K_\sigma\}, \quad ST_{\sigma 1} \cap ST_{\sigma 2} = \{L_\sigma\}, \quad ST_{\sigma 0} \cap ST_{\sigma 2} = \{M_\sigma\},$$

$$ST_{\sigma 0} \cap ST_{\sigma 3} = \{Q_\sigma\}, \quad ST_{\sigma 1} \cap ST_{\sigma 3} = \{R_\sigma\}, \quad ST_{\sigma 2} \cap ST_{\sigma 3} = \{S_\sigma\}$$

(Bkz. Şekil 5.3).

Şimdi kod kümeleri yardımıyla ST üzerindeki herhangi bir noktanın kod gösteriminden bahsedilecektir. Yukarıda yapılan tanımlardan yola çıkılarak

$$ST_{a_1}, ST_{a_1 a_2}, ST_{a_1 a_2 a_3}, \dots, ST_{a_1 a_2 \dots a_n}, \dots$$

kümelerinin $ST_{a_1} \supset ST_{a_1 a_2} \supset ST_{a_1 a_2 a_3} \supset \dots \supset ST_{a_1 a_2 \dots a_n} \supset \dots$ yani iç içe geçmiş kod kümeleri olduğu açıktır.

Cantor ara kesit teoreminden

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} ST_{a_1 a_2 \dots a_k} = \{A\}$$

elde edilir. Yani bu sonsuz kesişim ST üzerinde bir $A \in ST$ noktasını verir. $A \in ST$ noktası, $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ ile ifade edilsin. Bu sonsuz $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ dizisine A noktasının kod gösterimi denir. Eğer A noktası ST_σ 'nın aynı seviyedeki herhangi iki alt tetrahedronunun kesişim noktası ise bu nokta $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$ ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $\sigma \beta \alpha \alpha \alpha \dots$ ve $\sigma \alpha \beta \beta \beta \dots$ olacak şekilde iki farklı kod gösterimine sahiptir.

Örneğin Q_σ , $ST_{\sigma 0}$ ve $ST_{\sigma 3}$ kümelerinin kesişim noktasıdır, ayrıca

$$ST_{\sigma 0} \supset ST_{\sigma 03} \supset ST_{\sigma 033} \supset \dots \supset ST_{\sigma 0333\dots 3} \supset \dots,$$

$$ST_{\sigma 3} \supset ST_{\sigma 30} \supset ST_{\sigma 300} \supset \dots \supset ST_{\sigma 3000\dots 0} \supset \dots$$

iç içe geçmiş küme dizileri olduğundan Q_σ noktası $\sigma 03333\dots$ ve $\sigma 3000\dots$ şeklinde iki farklı kod gösterimine sahiptir.

Eğer $A \in ST$ aynı seviyedeki herhangi iki alt tetrahedronun kesişim noktası değilse tek bir kod gösterimine sahiptir. Örneğin; $\overline{0} = 000\dots$, $\overline{02} = 020202\dots$ ve terimleri düzenli tekrar etmeyen noktalar tek bir kod gösterimine sahip iken $0\overline{1} = 0111\dots$ ve $123\overline{0} = 123000\dots$ noktaları iki farklı kod gösterimine sahip olup bu noktaların diğer kod gösterimleri sırasıyla $1\overline{0} = 1000\dots$ ve $120\overline{3} = 120333\dots$ şeklindedir.

5.2. Sierpinski Tetrahedronu Üzerinde İçsel Metrik İnşası

Sierpinski tetrahedronu üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak, ST üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğunu veren içsel metrik aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Teorem 5.2.1. $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ olmak üzere $A \in ST$ ve $B \in ST$ keyfi noktalarının kod gösterimi sırasıyla $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olsun.

$a_k \neq c_k \neq b_k$ ve $a_k \neq d_k \neq b_k$ ve $c_k \neq d_k$ ($a_i, b_i, c_k, d_k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$)
ve

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases},$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \\ 1, & a_i \neq c_k \end{cases}, \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \\ 1, & b_i \neq c_k \end{cases},$$

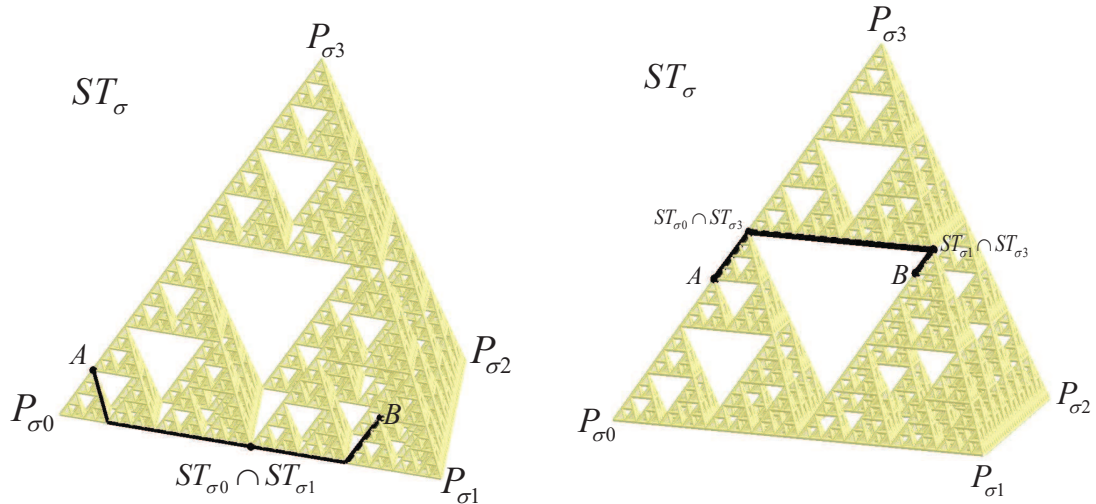
$$\phi_i = \begin{cases} 0, & a_i = d_k \\ 1, & a_i \neq d_k \end{cases}, \quad \varphi_i = \begin{cases} 0, & b_i = d_k \\ 1, & b_i \neq d_k \end{cases}$$

olmak üzere A ile B arasındaki en kısa uzaklığı veren formül

$$d(A, B) = \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\phi_i + \varphi_i}{2^i} \right\} \quad (5.1)$$

olarak tanımlanır.

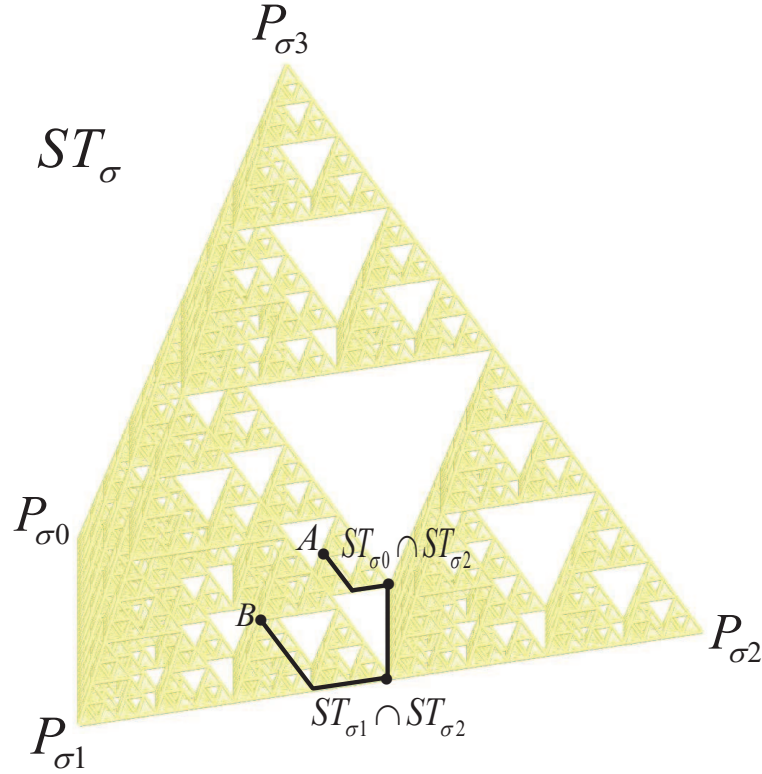
Kanıt. $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olmak üzere A ve B noktalarının kod gösterimleri sırasıyla $\sigma a_k a_{k+1} \dots$ ve $\sigma b_k b_{k+1} \dots$ olarak ifade edileceğinden $A \in ST_{\sigma a_k}$ ve $B \in ST_{\sigma b_k}$ olduğu açıktır. A ile B arasındaki en kısa yollar $ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma b_k}$ noktasından ya da $(ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma c_k})(ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma c_k})$ veya $(ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma d_k})(ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma d_k})$ doğru parçalarından geçer (Bkz. Şekil 5.4, Şekil 5.5).



Şekil 5.4: $a_k = 0$ ve $b_k = 1$ için sırasıyla K_{σ} noktasından ve $Q_{\sigma}R_{\sigma}$ doğru parçasından geçen en kısa yollar

$ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma b_k}$ noktasından ve $(ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma c_k})(ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma c_k})$ doğru parçasından geçen en kısa uzaklığı veren durumların ispatı [24]'te Sierpinski üçgeni üzerinde tanımlanan içsel metriğin inşasında yer alan durumlardakine benzer yolla yapılır.

Bu ispatta sadece $(ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma d_k})(ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma d_k})$ doğru parçasından geçen yol incelenecektir. A ile B noktası arasındaki $(ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma d_k})(ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma d_k})$ doğru parçasından geçen en kısa yolun uzunluğunu hesaplamak için A noktası ile $ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma d_k}$ arasındaki en kısa yolların, B noktası ile $ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma d_k}$ arasındaki en kısa yolların ve $ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma d_k}$ ile $ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma d_k}$ arasındaki doğru parçasının uzunluğu hesaplanacaktır (Bkz. Şekil 5.5). $ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma d_k}$ ve $ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma d_k}$ arasındaki doğru parçasının uzunluğu ST_σ 'nin k . adımıdaki alt tetrahedronunun bir kenarının uzunluğuna eşit olup bu uzunluk $\frac{1}{2^k}$ 'dir.



Şekil 5.5: $a_k = 0$ ve $b_k = 1$ için $M_\sigma L_\sigma$ doğru parçasından geçen en kısa yol

$a_k \neq c_k \neq b_k$ ve $a_k \neq d_k \neq b_k$ ve $c_k \neq d_k$ olduğu bilinmektedir. İlk olarak A noktası ile $ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma d_k}$ arasındaki en kısa yolların uzunluğunu hesaplınsın. Eğer a_{k+1} , a_k , b_k veya c_k 'dan birine eşit ise $\frac{1}{2^{k+1}}$ elde edilir. Bu uzunluğu T_1 olarak tanımlayalım. Bu durumda $T_1 = \frac{1}{2^{k+1}}$ olur. Eğer $a_{k+1} = d_k$ ise $T_1 = 0$ olur. Benzer

şekilde eğer a_{k+2} , a_k , b_k veya c_k 'dan birine eşitse T_1 'e $\frac{1}{2^{k+2}}$ terimi eklenir. Yani $T_2 = T_1 + \frac{1}{2^{k+2}}$ olarak tanımlanır. Aksi durumda ise $T_2 = T_1$ olur.

Genel olarak eğer a_{k+i} , $i = 2, 3, 4, \dots$ için a_k , b_k veya c_k 'dan birisine eşit ise T_{i-1} 'e, $\frac{1}{2^{k+i}}$ eklenir, böylece $T_i = T_{i-1} + \frac{1}{2^{k+i}}$ elde edilir. Eğer $a_{k+i} = d_k$ ise $T_i = T_{i-1}$ olur. Benzer işlemler B ve $ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma d_k}$ arasındaki en kısa yolların uzunluğu hesaplanırken de geçerlidir. $i = 2, 3, 4, \dots$ için eğer b_{k+i} , a_k , b_k veya c_k 'dan birisine eşit ise $\frac{1}{2^{k+i}}$ eklenir, eğer $b_{k+i} = d_k$ ise toplama bir şey eklenmez. Sonuç olarak $i = k+1, k+2, k+3, \dots$ için ϕ_i ve φ_i terimleri ve (5.1) ifadesinde yer alan son toplam bulunmuş olur.

□

Uyarı 5.2.2. (5.1) ifadesinde verilen içsel metriği özetlemek gerekirse buradaki ilk toplam olan $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}$, $ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma b_k}$ noktasından geçen en kısa yolun uzunluğunu verir. İkinci ifade $\frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i}$ ise $ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma c_k}$ ve $ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma c_k}$ noktalarından geçen en kısa yolun uzunluğunu verir ayrıca buradaki $\frac{1}{2^k}$ uzunluğu $(ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma c_k})(ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma c_k})$ doğru parçasının uzunluğuna eşittir. Son olarak (5.1)'deki $\frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\phi_i + \varphi_i}{2^i}$ değeri ise $ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma d_k}$ ve $ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma d_k}$ noktalarından geçen en kısa yolun uzunluğudur ve buradaki $\frac{1}{2^k}$ değeri $(ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma d_k})(ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma d_k})$ doğru parçasının uzunluğuna eşittir.

Uyarı 5.2.3. (5.1)'de tanımlanan metrik noktaların kod temsillerinden bağımsızdır. Bu durumun ispatı, Saltan vd. tarafından [24]'te verilen Önerme 3.2'nin ispatı ile benzer şekilde yapılır.

Aşağıda verilen örnekler ST üzerinde iki farklı nokta arasındaki en kısa uzaklığın nasıl hesaplandığını gösterir:

Örnek 5.2.4. A ve B , ST üzerinde iki nokta olsun. Bu noktaların kod gösterimleri sırasıyla 033000... ve 1333000... ise $d(A, B) = ?$

Verilen noktaların ilk terimleri farklıdır, yani $k = 1$ için $a_1 \neq b_1$ olur. Bu durumda $i = 2, 3, 4, 5, \dots$ için $\alpha_i = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$ ve $i = 5, 6, 7 \dots$ için $\beta_i = 0$ bulunur. Diğer taraftan $c_k = 2$ olarak seçilirse $i = 2, 3, 4 \dots$ için $\gamma_i = 1$ ve $\delta_i = 1$ bulunur. Son olarak $d_k = 3$ olacağından $\phi_2 = \phi_3 = 0$ ve $i = 4, 5, 6 \dots$ için $\phi_i = 1$ olur. Ayrıca $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ ve $i = 5, 6, 7 \dots$ için $\varphi_i = 1$ olacağından

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} = \frac{1+1}{2^2} + \frac{1+1}{2^3} + \frac{1+1}{2^4} + \frac{1+0}{2^5} + \frac{1+0}{2^6} + \dots = \frac{15}{16},$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1+1}{2^2} + \frac{1+1}{2^3} + \dots = \frac{3}{2}$$

ve

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\phi_i + \varphi_i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{0+0}{2^2} + \frac{0+0}{2^3} + \frac{1+0}{2^4} + \frac{1+1}{2^5} + \frac{1+1}{2^6} + \dots = \frac{11}{16}$$

bulunur. A ve B noktaları arasındaki en kısa uzaklık

$$d(A, B) = \min \left\{ \frac{15}{16}, \frac{3}{2}, \frac{11}{16} \right\} = \frac{11}{16}$$

olarak bulunur. Bu durumdaki en kısa yolun $a_k = 0, b_k = 1$ ve $d_k = 3$ olmak üzere $(ST_{\sigma a_k} \cap ST_{\sigma d_k})(ST_{\sigma b_k} \cap ST_{\sigma d_k})$ 'dan geçen yol olduğu görülür (Bkz. Şekil 5.4).

Örnek 5.2.5. A ve B , ST üzerinde iki nokta olsun. Bu noktaların kod temsilleri sırasıyla $032\overline{0}$ ve $321\overline{3}$ ise $d(A, B) = ?$

Verilen noktaların ilk terimleri farklıdır, yani $k = 1$ için $a_1 \neq b_1$ olur. Ayrıca $\alpha_2 = 0$ ve $i = 3, 4, 5, \dots$ için $\alpha_i = 1$ ve $i = 2, 3, 4, \dots$ için ise $\beta_i = 1$ bulunur. Diğer taraftan $c_k = 1$ olarak alınırsa $i = 2, 3, 4, \dots$ için $\gamma_i = 1$ ve $\delta_2 = 1, \delta_3 = 0, i = 4, 5, 6, \dots$ için ise $\delta_i = 1$ bulunur. Son olarak $d_k = 2$ olacağından $i = 2, 4, 6, \dots$ için $\phi_i = 1$ ve $i = 3, 5, 7, \dots$ için $\phi_i = 0$ bulunur. Ayrıca $\varphi_2 = 0$ ve $i = 3, 4, 5, \dots$ için $\varphi_i = 1$ olur. Buradan

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} = \frac{0+1}{2^2} + \frac{1+1}{2^3} + \frac{1+1}{2^4} + \frac{1+1}{2^5} + \dots = \frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1+1}{2^2} + \frac{1+0}{2^3} + \frac{1+1}{2^4} + \frac{1+1}{2^5} + \frac{1+1}{2^6} + \dots = \frac{11}{8}$$

ve

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\phi_i + \varphi_i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1+0}{2^2} + \frac{0+1}{2^3} + \frac{1+1}{2^4} + \frac{0+1}{2^5} + \frac{1+1}{2^6} + \frac{0+1}{2^7} + \dots = \frac{13}{12}$$

olur. A ve B noktaları arasındaki en kısa uzaklık

$$d(A, B) = \min \left\{ \frac{3}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{12} \right\} = \frac{3}{4}$$

olarak bulunur.

İçsel metriğin geometrik bir özelliğinin incelenmesi

Sierpinski üçgeni üzerindeki keyfi bir noktanın, bu noktanın bulunduğu alt Sierpinski üçgeninin bütün köşe noktalarına olan uzaklıkları toplamı daima sabittir. Bu durum Saltan vd. tarafından [24]'te aşağıda verilen önerme ile ifade edilmiştir:

Önerme 5.2.6. *Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$ ve $a_i \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere S_σ , S 'nin herhangi bir alt Sierpinski üçgeni ve $P_{\sigma 0}$, $P_{\sigma 1}$, $P_{\sigma 2}$ ise S_σ 'nin köşe noktaları olsun. S_σ üzerindeki keyfi bir P_σ noktası için*

$$d(P_\sigma, P_{\sigma 0}) + d(P_\sigma, P_{\sigma 1}) + d(P_\sigma, P_{\sigma 2}) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

elde edilir.

Bu durum Sierpinski tetrahedronu için aşağıdaki önerme ile ifade edilir:

Önerme 5.2.7. *Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$ ve $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere ST_σ , ST 'nin bir alt Sierpinski tetrahedronu ve $P_{\sigma 0}$, $P_{\sigma 1}$, $P_{\sigma 2}$ ve $P_{\sigma 3}$ ise ST_σ 'nin köşe noktaları olsun. ST_σ üzerindeki herhangi bir P_σ noktası için*

$$d(P_\sigma, P_{\sigma 0}) + d(P_\sigma, P_{\sigma 1}) + d(P_\sigma, P_{\sigma 2}) + d(P_\sigma, P_{\sigma 3}) = \frac{3}{2^n} \quad (5.2)$$

olur.

Kanıt. $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$ olmak üzere ST_σ , ST 'nin bir alt Sierpinski tetrahedronu olsun. ST_σ 'nin $P_{\sigma 0}$, $P_{\sigma 1}$, $P_{\sigma 2}$ ve $P_{\sigma 3}$ köşe noktalarının kod gösterimleri sırasıyla

$$P_{\sigma 0} = \sigma 0000 \dots$$

$$P_{\sigma 1} = \sigma 111 \dots$$

$$P_{\sigma 2} = \sigma 222 \dots$$

$$P_{\sigma 3} = \sigma 333 \dots$$

olarak ifade edilir. $x_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere $P_\sigma = \sigma x_{n+1} x_{n+2} \dots$, ST_σ üzerindeki keyfi bir nokta olsun. $x_{n+1} = 3$ ise (diğer durumlar benzer şekilde ispatlanır) $P_{\sigma 0}$, $P_{\sigma 1}$ ve $P_{\sigma 2}$ 'nin $(n+i)$ 'inci ($i = 2, 3, 4, \dots$) terimleri P_σ 'nın x_{n+1} teriminden farklı olduğundan

$$d(P_\sigma, P_{\sigma 0}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad d(P_\sigma, P_{\sigma 1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{ve} \quad d(P_\sigma, P_{\sigma 2}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Eğer $x_{n+2} = 3$ ise P_σ 'nın x_{n+2} terimi $P_{\sigma 0}$, $P_{\sigma 1}$ ve $P_{\sigma 2}$ 'nin $(n+1)$ 'inci terimlerinden farklı olduğundan

$$d(P_\sigma, P_{\sigma 0}) \geq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}, \quad d(P_\sigma, P_{\sigma 1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{ve} \quad d(P_\sigma, P_{\sigma 2}) \geq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Eğer $i = 3, 4, 5, \dots$ için $x_{n+i} = 3$ durumu benzer şekilde incelenirse

$$d(P_\sigma, P_{\sigma 0}) = \frac{1+1}{2^{n+2}} + \frac{1+1}{2^{n+3}} + \frac{1+1}{2^{n+4}} + \dots = \frac{1}{2^n},$$

$$d(P_\sigma, P_{\sigma 1}) = \frac{1+1}{2^{n+2}} + \frac{1+1}{2^{n+3}} + \frac{1+1}{2^{n+4}} + \dots = \frac{1}{2^n},$$

$$d(P_\sigma, P_{\sigma 2}) = \frac{1+1}{2^{n+2}} + \frac{1+1}{2^{n+3}} + \frac{1+1}{2^{n+4}} + \dots = \frac{1}{2^n},$$

$$d(P_\sigma, P_{\sigma 3}) = 0$$

elde edilir ve $x_{n+i} = 3$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) özel durumu için (5.2) denkleminde ulaşılır. Buradaki P_σ noktası olarak $P_{\sigma 3}$ yerine ST_σ 'nin diğer köşe noktaları olan $P_{\sigma 0}$, $P_{\sigma 1}$ veya $P_{\sigma 2}$ 'den birisi seçilirse benzer şekilde (5.2)'de verilen denklem elde edilir.

$s = 1, 2, 3, \dots$ için $x_{n+s} \neq 3$ olacak şekilde en az bir s olduğu kabul edilsin. Genelliği bozmaksızın $x_{n+s} = 0$ olarak alınabilir. Bu durumda P_σ 'nın x_{n+s} terimi $i = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $P_{\sigma 3}$ 'ün $(n+s+i)$ 'inci terimlerinden farklıdır. O halde

$$d(P_\sigma, P_{\sigma 0}) \geq \frac{1+1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1+1}{2^{n+s-1}} + \frac{0+1}{2^{n+s}} + \frac{1}{2^{n+s+1}} + \frac{1}{2^{n+s+2}} + \dots = A,$$

$$\begin{aligned}
d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) &\geq \frac{1+1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1+1}{2^{n+s-1}} + \frac{1+1}{2^{n+s}} + \frac{1}{2^{n+s+1}} + \frac{1}{2^{n+s+2}} + \cdots = B, \\
d(P_\sigma, P_{\sigma_2}) &\geq \frac{1+1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1+1}{2^{n+s-1}} + \frac{1+1}{2^{n+s}} + \frac{1}{2^{n+s+1}} + \frac{1}{2^{n+s+2}} + \cdots = C, \\
d(P_\sigma, P_{\sigma_3}) &\geq \frac{1}{2^{n+s+1}} + \frac{1}{2^{n+s+2}} + \frac{1}{2^{n+s+3}} + \cdots = D
\end{aligned}$$

elde edilir.

Her $i = 1, 2, 3, \dots$ için $P_{\sigma_0}, P_{\sigma_1}, P_{\sigma_2}$ 'nin $(n+1)$ 'inci terimleri ile P_{σ_3} 'ün $(n+s)$ 'inci teriminden tam olarak üç tanesi P_σ 'nin x_{n+s+i} terimlerinden farklıdır. Bundan dolayı

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_0}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_2}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_3})$$

toplamını hesaplayabilmek için A, B, C ve D 'den yalnızca üç tanesine her $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\frac{1}{2^{n+s+i}}$ terimi eklenir.

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_0}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_2}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_3})$$

toplamı A, B, C, D ve

$$\frac{1+1+1}{2^{n+s+1}} + \frac{1+1+1}{2^{n+s+2}} + \frac{1+1+1}{2^{n+s+3}} + \cdots$$

terimlerinin toplamı şeklinde olduğundan

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_0}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_2}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_3}) = \frac{3}{2^n}$$

ifadesine ulaşılır. Benzer yolla diğer durumlarda ispatlanır.

□

Uyarı 5.2.8. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$ ve $a_i, \omega \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere ST_σ , ST 'nin bir alt Sierpinski tetrahedronu ve $P_{\sigma_0}, P_{\sigma_1}, P_{\sigma_2}, P_{\sigma_3}$ ise ST_σ 'nin köşe noktaları olsun. Eğer P_σ , ST_σ 'nin keyfi bir noktası ise

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases},$$

olmak üzere

$$d(P_\sigma, P_{\sigma w}) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}$$

olur. Yani bir noktanın, bu noktanın bulunduğu alt Sierpinski tetrahedronunun köşe noktalarından birisine olan en kısa uzaklığı her zaman (5.1)'deki ilk toplama eşittir.

5.3. Sierpinski Tetrahedronu Üzerinde $\{ST; F\}$ Kaotik Dinamik Sisteminin İnşası

Dördüncü bölümde Sierpinski üçgeni üzerinde genişleme ve katlama dönüşümleri kullanılarak farklı kaotik dinamik sistemler inşa edilmişti. Bu bölümde ise Sierpinski tetrahedronu üzerinde dörtlük taban kullanılarak bir dinamik sistem inşa edilecek ve kod kümesi üzerinde bu dinamik sistemin kaotik olduğu gösterilip periyodik noktalarının hesaplanması için bir algoritma verilecektir.

Önerme 5.3.1. $X, Y \in ST$ noktalarının kod gösterimleri sırasıyla $x_1x_2x_3 \dots$ ve $y_1y_2y_3 \dots$ olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, 3, \dots$ ve $x_i, y_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ için $y_i \equiv x_{i+1} + x_1 \pmod{4}$ olmak üzere $F(X) = Y$ şeklinde tanımlanan $F : ST \rightarrow ST$ fonksiyonu Sierpinski tetrahedronunun kod kümesi üzerinde bir dinamik sistemdir.

Kanıt. F fonksiyonunun ST 'nin kod kümesi üzerinde iyi tanımlı olduğu gösterilecektir. Eğer $X \in ST$ yalnız tek bir kod gösterimine sahip ise $F(X)$ 'te tek bir kod gösterimine sahiptir. $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$ ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere X noktası $x_1x_2x_3 \dots x_n\alpha\beta\beta\beta \dots$ ve $x_1x_2x_3 \dots x_n\beta\alpha\alpha\alpha \dots$ olacak şekilde iki farklı kod gösterimine sahip olsun. Bu durumda

$$F(x_1x_2x_3 \dots x_n\alpha\beta\beta\beta \dots) = y_1y_2y_3 \dots y_ny_{n+1}y_{n+2} \dots$$

$$F(x_1x_2x_3 \dots x_n\beta\alpha\alpha\alpha \dots) = z_1z_2z_3 \dots z_nz_{n+1}z_{n+2} \dots$$

olmak üzere $y_1y_2y_3 \dots y_ny_{n+1}y_{n+2} \dots$ ve $z_1z_2z_3 \dots z_nz_{n+1}z_{n+2} \dots$ noktalarının aynı nokta için birer kod gösterimi olduğu gösterilmelidir.

F 'nin tanımından $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için

$$y_i \equiv z_i \equiv x_1 + x_{i+1} \pmod{4}$$

elde edilir. Ayrıca $i = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$y_n \equiv x_1 + \alpha \pmod{4},$$

$$y_{n+i} \equiv x_1 + \beta \pmod{4},$$

$$z_n \equiv x_1 + \beta \pmod{4},$$

$$z_{n+i} \equiv x_1 + \alpha \pmod{4}$$

olur.

$i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için $x_1 + x_{i+1} \equiv s_i \pmod{4}$ ve $x_1 + \alpha \equiv \gamma \pmod{4}$ ve $x_1 + \beta \equiv \delta \pmod{4}$ olsun. Bu durumda

$$y_1 y_2 y_3 \dots y_n y_{n+1} y_{n+2} \dots = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} \gamma \delta \delta \dots$$

ve

$$z_1 z_2 z_3 \dots z_n z_{n+1} z_{n+2} \dots = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} \delta \gamma \gamma \dots$$

olur. Burada $\gamma \neq \delta$ olduğundan bu noktalar aynı noktanın farklı kod gösterimleridir. □

Önerme 5.3.1'den yola çıkılarak ST üzerindeki kod kümelerinin F altındaki görüntüleri aşağıdaki gibi bulunur:

Durum 1: Eğer $x_1 = 0$ ise $F(ST_0) = ST$, $F(ST_{00}) = ST_0$, $F(ST_{01}) = ST_1$, $F(ST_{02}) = ST_2$ ve $F(ST_{03}) = ST_3$ olur. Benzer şekilde, ST_{000} , ST_{001} , ST_{002} , ST_{003} , ST_{010} , ST_{011} , ST_{012} , ST_{013} , ST_{020} , ST_{021} , ST_{022} , ST_{023} , ST_{030} , ST_{031} , ST_{032} , ST_{033} kümelerinin F altındaki görüntüleri sırasıyla ST_{00} , ST_{01} , ST_{02} , ST_{03} , ST_{10} , ST_{11} , ST_{12} , ST_{13} , ST_{20} , ST_{21} , ST_{22} , ST_{23} , ST_{30} , ST_{31} , ST_{32} , ST_{33} olur.

Durum 2: Eğer $x_1 = 1$ ise $F(ST_1) = ST$, $F(ST_{10}) = ST_1$, $F(ST_{11}) = ST_2$, $F(ST_{12}) = ST_3$ ve $F(ST_{13}) = ST_0$ olur. Ayrıca ST_{100} , ST_{101} , ST_{102} , ST_{103} , ST_{110} , ST_{111} , ST_{112} , ST_{113} , ST_{120} , ST_{121} , ST_{122} , ST_{123} , ST_{130} , ST_{131} , ST_{132} , ST_{133} kümelerinin F altındaki görüntüleri sırasıyla ST_{11} , ST_{12} , ST_{13} , ST_{10} , ST_{21} , ST_{22} , ST_{23} , ST_{20} , ST_{31} , ST_{32} , ST_{33} , ST_{30} , ST_{01} , ST_{02} , ST_{03} ve ST_{00} olur.

Durum 3: Eğer $x_1 = 2$ ise $F(ST_2) = ST$, $F(ST_{20}) = ST_2$, $F(ST_{21}) = ST_3$, $F(ST_{22}) = ST_0$ ve $F(ST_{23}) = ST_1$ olur. Ayrıca $ST_{200}, ST_{201}, ST_{202}, ST_{203}, ST_{210}, ST_{211}, ST_{212}, ST_{213}, ST_{220}, ST_{221}, ST_{222}, ST_{223}, ST_{230}, ST_{231}, ST_{232}, ST_{233}$ kümelerinin F altındaki görüntüleri sırasıyla $ST_{22}, ST_{23}, ST_{20}, ST_{21}, ST_{32}, ST_{33}, ST_{30}, ST_{31}, ST_{02}, ST_{03}, ST_{00}, ST_{01}, ST_{12}, ST_{13}, ST_{10}$ ve ST_{11} şeklindedir.

Durum 4: Eğer $x_1 = 3$ ise $F(ST_3) = ST$, $F(ST_{30}) = ST_3$, $F(ST_{31}) = ST_0$, $F(ST_{32}) = ST_1$ ve $F(ST_{33}) = ST_2$ olur. Ayrıca $ST_{300}, ST_{301}, ST_{302}, ST_{303}, ST_{310}, ST_{311}, ST_{312}, ST_{313}, ST_{320}, ST_{321}, ST_{322}, ST_{323}, ST_{330}, ST_{331}, ST_{332}, ST_{333}$ kümelerinin F altındaki görüntüleri sırasıyla $ST_{33}, ST_{30}, ST_{31}, ST_{32}, ST_{03}, ST_{00}, ST_{01}, ST_{02}, ST_{13}, ST_{10}, ST_{11}, ST_{12}, ST_{23}, ST_{20}, ST_{21}$ ve ST_{22} şeklindedir.

$\{ST; F\}$ dinamik sisteminin periyodik noktalarını veren algoritma

Bu bölümde F 'nin periyodik noktalarını veren genel bir formül elde edilecektir. Sierpinski tetrahedronu üzerinden kod gösterimi $a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots$ şeklinde olan bir A noktası alınsın. Bu noktanın F fonksiyonu altındaki görüntüsü

$$F(a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots) \equiv (a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_1 + a_4) \dots (a_1 + a_{k+1}) \dots \pmod{4}$$

olarak bulunur.

Aynı noktanın bu sefer $F^2 = F \circ F$ fonksiyonu altındaki görüntüsü mod 4'e göre

$$(2a_1 + a_2 + a_3)(2a_1 + a_2 + a_4) \dots (2a_1 + a_2 + a_{k+1}) \dots$$

olur.

Bu durum genelleştirilirse herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) için A noktasının kod gösteriminin F^n altındaki görüntüsü mod 4'e göre

$$(2a_{n-1} + a_n + a_{n+1})(2a_{n-1} + a_n + a_{n+2}) \dots (2a_{n-1} + a_n + a_{n+k}) \dots$$

ifadesine denk olur. O halde F 'nin herhangi bir n -periyotlu ($n \geq 2$) noktasını hesaplamak için $F^n(a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots) = a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots$ yani

$$2a_{n-1} + a_n + a_{n+k} \equiv a_k \pmod{4} \quad (5.3)$$

denkleminin çözümü aranmalıdır.

$F(A) = A$ eşitliğinden F 'nin dört adet sabit noktası olduğu görülür. Bunlar;

$$\bullet \overline{0} = 0000 \dots, \bullet \overline{1032} = 10321032 \dots, \bullet \overline{20} = 202020 \dots, \bullet \overline{3012} = 30123012 \dots$$

olarak bulunur.

(5.3) denklemi kullanılarak F 'nin 2-periyotlu noktaları

$$\bullet \overline{13023120}, \bullet \overline{0220}, \bullet \overline{12}, \bullet \overline{01302312}, \bullet \overline{11223300}, \bullet \overline{2200}, \bullet \overline{21100332},$$

$$\bullet \overline{23300112}, \bullet \overline{03102132}, \bullet \overline{31021320}, \bullet \overline{32}, \bullet \overline{33221100}$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde F 'nin 3-periyotlu bazı döngüleri:

$$\{\overline{312}, \overline{012}, \overline{120}\}, \{\overline{132}, \overline{032}, \overline{320}\}, \{\overline{212}, \overline{300}, \overline{332}\},$$

$$\{\overline{121010303232}, \overline{321210103032}, \overline{101030323212}\},$$

$$\{\overline{031102213320}, \overline{311022133200}, \overline{003110221332}\}$$

4-periyotlu bazı döngüleri:

$$\{\overline{1312}, \overline{0232}, \overline{2320}, \overline{1020}\}, \{\overline{2112}, \overline{3300}, \overline{2332}, \overline{1100}\},$$

$$\{\overline{21020320}, \overline{32021020}, \overline{13103132}, \overline{02102032}\}$$

5-periyotlu bazı döngüleri:

$$\{\overline{11220}, \overline{23312}, \overline{11300}, \overline{20112}, \overline{23300}\}, \{\overline{23012}, \overline{12300}, \overline{30112}, \overline{30012}, \overline{33012}\},$$

$$\{\overline{02120}, \overline{21200}, \overline{30220}, \overline{31132}, \overline{00212}\}$$

ve 6-periyotlu bazı döngüleri:

$$\{\overline{132112}, \overline{032232}, \overline{322320}, \overline{112132}, \overline{232032}, \overline{102100}\},$$

$$\{\overline{320120}, \overline{130132}, \overline{012032}, \overline{120320}, \overline{310312}, \overline{032012}\}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 5.3.2. $\{ST; F\}$ dinamik sistemi Devaney anlamında kaotiktir.

Kanıt. $\{ST; F\}$ dinamik sisteminin kaotikliğini göstermek için Teorem 5.2.1'de ST 'nin kod kümesi üzerinde tanımlanan içsel metrik kullanılacaktır. İlk olarak F 'nin başlangıç noktalarına hassas bağımlı olduğu gösterilsin. Yani en az bir $\epsilon > 0$ vardır öyle ki her $X \in ST$ ve her $\delta > 0$ için $d(F^n(X), F^n(Y)) > \epsilon$ olacak şekilde bir $Y \in B(X, \delta)$ noktası ve $n \geq 0$ tam sayısı bulunmalıdır. ST üzerinden kod gösterimi $x_1x_2 \dots x_{k-1}x_kx_{k+1} \dots$ olan keyfi bir X noktası alınsın. Her δ için $\frac{1}{2^{k-2}} \leq \delta$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ bulunur. $i = k, k+1, k+2, \dots$ için $y_i \neq x_k$ olacak şekilde kod gösterimi $x_1x_2 \dots x_{k-1}y_ky_{k+1} \dots$ olan $Y \in ST$ noktası alınsın. Bu durumda

$$d(X, Y) \leq \frac{1}{2^{k-1}} < \delta$$

olur.

X noktasının F^{k-1} altındaki görüntüsü $k \geq 2$ için mod 4'e göre

$$(2x_{k-2} + x_{k-1} + x_k)(2x_{k-2} + x_{k-1} + x_{k+1}) \dots (2x_{k-2} + x_{k-1} + x_{2k-1}) \dots$$

olur. Aynı şekilde Y noktasının F^{k-1} altındaki görüntüsü ise $k \geq 2$ için mod 4'e göre

$$(2x_{k-2} + x_{k-1} + y_k)(2x_{k-2} + x_{k-1} + y_{k+1}) \dots (2x_{k-2} + x_{k-1} + y_{2k-1}) \dots$$

olur. $x_k \neq y_k$ olduğundan $F^{k-1}(X)$ ve $F^{k-1}(Y)$ noktalarının kod temsillerinin ilk terimleri farklıdır. Ayrıca, $i = k+1, k+2, k+3, \dots$ için $y_i \neq x_k$ olduğundan dolayı $F^{k-1}(Y)$ noktasının kod gösteriminin diğer terimleri de $F^{k-1}(X)$ noktasının kod gösteriminin ilk teriminden farklıdır. Böylece

$$d(F^{k-1}(X), F^{k-1}(Y)) \geq \frac{1}{2}$$

olur ve istenilen sonuca ulaşılır.

Eğer F topolojik geçişken ise U ve V , (ST, d) metrik uzayının boştan farklı açık alt kümeleri olmak üzere

$$U \cap F^n(V) \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ elemanı vardır.

U ve V , (ST, d) metrik uzayının boştan farklı keyfi açık alt kümeleri olsun. ST 'de kod gösterimi $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ olan bir A noktası ve $B(A, \frac{1}{2^{k-1}}) \subset U$ olacak şekilde bir k doğal sayısı vardır. Açıkça görülür ki her $i = k+1, k+2, k+3, \dots$ için $x_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ keyfi olmak üzere $B(A, \frac{1}{2^{k-1}})$ kümesi

$$U' = \{a_1 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} \dots \mid a_1, a_2, a_3, \dots, a_k \text{'ler sabit}\}$$

olacak şekilde ST 'nin bir alt Sierpinski tetrahedronunu içerir. Bu U' kümesindeki noktaların F^k altındaki görüntüleri her $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\{(2a_{k-1} + a_k + x_{k+1})(2a_{k-1} + a_k + x_{k+2}) \dots (2a_{k-1} + a_k + x_{2k}) \dots \mid x_{k+i} \text{'ler keyfi}\}$$

olduğundan $F^k(U') = ST$ ve $F^k(U) = ST$ elde edilir. Yani U ve V , ST 'nin boştan farklı alt kümeleri olmak üzere

$$F^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ bulunur.

F 'nin periyodik noktaları ST 'de yoğun ise, ST 'deki herhangi bir noktaya yeterince yakın periyodik noktalar vardır. Keyfi bir $A \in ST$ noktası ve $A \in U$ olacak şekilde keyfi bir $U \subset ST$ açık kümesi alınsın.

Bu durumda $B(A, \frac{1}{2^{k-1}}) \subset U$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. d metriğinin tanımından, $i = 1, 2, \dots, k$ ve $j = k+1, k+2, \dots$ olmak üzere

$$U' = \{a_1 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} \dots \mid a_i \text{'ler sabit ve } x_j \text{'ler keyfi}\} \subset B\left(A, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

elde edilir. Görülür ki $\{a_1 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} \dots\}$ kümesinin F^k altındaki görüntüsü

$$\{(2a_{k-1} + a_k + x_{k+1})(2a_{k-1} + a_k + x_{k+2}) \dots (2a_{k-1} + a_k + x_{2k}) \dots\}$$

kümesine eşittir. Her $j = k + 1, k + 2, k + 3, \dots$ için x_j 'ler keyfi olduğundan

$$2a_{k-1} + a_k + x_{k+1} \equiv a_1 \pmod{4}$$

$$2a_{k-1} + a_k + x_{k+2} \equiv a_2 \pmod{4}$$

$\vdots$

$$2a_{k-1} + a_k + x_{2k} \equiv a_k \pmod{4}$$

$\vdots$

denklem sisteminin çözümü vardır. Yani ST 'deki herhangi keyfi bir noktaya istenildiği kadar yakın periyodik noktalar bulunabilir.

□

Uyarı 5.3.3. $\{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ kümesinin belirlediği kod uzayı üzerinde birçok dinamik sistem tanımlanabilir. Sierpinski tetrahedronu üzerinde tanımlanan $\{ST; F\}$ dinamik sisteminin $\{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}/\sim$ bölüm uzayı üzerinde ifade edildiğine dikkat edilmelidir. Bu uzay

$$c' \sim c'' \Leftrightarrow c' = c'' \text{ veya } c_i, \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } n \in \mathbb{N} \text{ olmak üzere}$$

$$c' = c_1 c_2 \dots c_n \alpha \beta \beta \beta \dots, \quad c'' = c_1 c_2 \dots c_n \beta \alpha \alpha \alpha \dots$$

şeklinde tanımlanmıştır. Sierpinski tetrahedronu üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak ST üzerinde farklı dinamik sistem örnekleri de verilebilir. Ancak bu dinamik sistemleri tanımlarken ST üzerindeki keyfi bir noktanın farklı kod temsillerinin fonksiyon altındaki görüntülerinin de yine ST üzerindeki aynı noktaya gitmesi gerektiğine dikkat edilmelidir. Bu bölümde Önerme 5.3.1'de tanımlanan örnek üzerinde durulmasının sebebi F fonksiyonunun iyi formülize edilmiş olmasıdır. Aşağıdaki bölümde ST üzerinde tanımlanan ve Önerme 5.3.1'de verilen dinamik sistemle denk olan ve denk olmayan dinamik sistem örnekleri verilecektir.

5.4. Sierpinski Tetrahedronu Üzerinde $\{ST; F\}$ ile Denk Olan Bir Kaotik Dinamik Sistem İnşası

Bu bölümde ST üzerindeki noktaların kod gösterimleri kullanılarak Önerme 5.3.1'de tanımlanan $\{ST; F\}$ dinamik sistemi ile denk olan bir dinamik sistem örneği verilecektir.

Önerme 5.4.1. $X, Y \in ST$ noktalarının kod gösterimleri sırasıyla $x_1x_2x_3 \dots$ ve $y_1y_2y_3 \dots$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, 3, \dots$ için $x_i, y_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere $G : ST \rightarrow ST$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$x_1 = 0$ ise

$$G(0x_2x_3 \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0, & x_{i+1} = 1 \\ 1, & x_{i+1} = 2 \\ 2, & x_{i+1} = 3 \\ 3, & x_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (i \geq 1)$$

$x_1 = 1$ ise

$$G(1x_2x_3 \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0, & x_{i+1} = 0 \\ 1, & x_{i+1} = 1 \\ 2, & x_{i+1} = 2 \\ 3, & x_{i+1} = 3 \end{cases} \quad (i \geq 1)$$

$x_1 = 2$ ise

$$G(2x_2x_3 \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0, & x_{i+1} = 3 \\ 1, & x_{i+1} = 0 \\ 2, & x_{i+1} = 1 \\ 3, & x_{i+1} = 2 \end{cases} \quad (i \geq 1)$$

$x_1 = 3$ ise

$$G(3x_2x_3\ldots) = y_1y_2y_3\ldots, \quad y_i = \begin{cases} 0, & x_{i+1} = 2 \\ 1, & x_{i+1} = 3 \\ 2, & x_{i+1} = 0 \\ 3, & x_{i+1} = 1 \end{cases} \quad (i \geq 1).$$

Bu durumda $\{ST; G\}$ bir dinamik sistem belirtir.

Kanıt. Kod gösterimi $x_1x_2x_3\ldots$ olan keyfi bir $X \in ST$ noktası verilsin. x_1 'in 0, 1, 2 veya 3 olma durumuna göre yukarıda verilen dört kuraldan birisi uygulanır. Eğer X yalnız tek bir kod gösterimine sahip ise $G(X)$ 'te tek bir kod gösterimine sahiptir. $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$ ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere X noktası $x_1x_2x_3\ldots x_n\alpha\beta\beta\beta\ldots$ ve $x_1x_2x_3\ldots x_n\beta\alpha\alpha\alpha\ldots$ olacak şekilde iki farklı kod gösterimine sahip olsun. Bu durumda

$$G(x_1x_2x_3\ldots x_n\alpha\beta\beta\beta\ldots) = y_1y_2y_3\ldots y_ny_{n+1}y_{n+2}\ldots$$

$$G(x_1x_2x_3\ldots x_n\beta\alpha\alpha\alpha\ldots) = z_1z_2z_3\ldots z_nz_{n+1}z_{n+2}\ldots$$

olmak üzere $y_1y_2y_3\ldots y_ny_{n+1}y_{n+2}\ldots$ ve $z_1z_2z_3\ldots z_nz_{n+1}z_{n+2}\ldots$ noktalarının $G(X)$ 'in farklı kod temsilleri olduğu gösterilmelidir.

$x_1 = 0$ ise G 'nin tanımından $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ için

$$y_i \equiv z_i \equiv x_{i+1} + 3 \pmod{4}$$

elde edilir. Ayrıca $i = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$y_n \equiv \alpha + 3 \pmod{4},$$

$$y_{n+i} \equiv \beta + 3 \pmod{4},$$

$$z_n \equiv \beta + 3 \pmod{4},$$

$$z_{n+i} \equiv \alpha + 3 \pmod{4}$$

olur. $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ için $s_i \equiv x_{i+1} + 3 \pmod{4}$ ve $\alpha + 3 \equiv \gamma \pmod{4}$, $\beta + 3 \equiv$

$\delta \pmod{4}$ olsun. Bu durumda $\gamma \neq \delta$ olmak üzere

$$y_1 y_2 y_3 \dots y_n y_{n+1} y_{n+2} \dots = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} \gamma \delta \delta \dots$$

ve

$$z_1 z_2 z_3 \dots z_n z_{n+1} z_{n+2} \dots = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} \delta \gamma \gamma \dots$$

olur.

$x_1 = 1$ ise $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için

$$y_i = z_i = x_{i+1}$$

elde edilir. Ayrıca $i = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$y_n = \alpha,$$

$$y_{n+i} = \beta,$$

$$z_n = \beta,$$

$$z_{n+i} = \alpha$$

olur.

$$y_1 y_2 y_3 \dots y_n y_{n+1} y_{n+2} \dots = x_2 x_3 x_4 \dots x_{n-1} \alpha \beta \beta \dots$$

ve

$$z_1 z_2 z_3 \dots z_n z_{n+1} z_{n+2} \dots = x_2 x_3 x_4 \dots x_{n-1} \beta \alpha \alpha \dots$$

elde edilir.

$x_1 = 2$ ise $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için

$$y_i \equiv z_i \equiv x_{i+1} + 1 \pmod{4}$$

elde edilir. Ayrıca $i = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$y_n \equiv \alpha + 1 \pmod{4},$$

$$y_{n+i} \equiv \beta + 1 \pmod{4},$$

$$z_n \equiv \beta + 1 \pmod{4},$$

$$z_{n+i} \equiv \alpha + 1 \pmod{4}$$

olur. $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için $s_i \equiv x_{i+1} + 1 \pmod{4}$ ve $\alpha + 1 \equiv \gamma \pmod{4}$, $\beta + 1 \equiv \delta \pmod{4}$ olsun. Bu durumda $\gamma \neq \delta$ olmak üzere

$$y_1 y_2 y_3 \dots y_n y_{n+1} y_{n+2} \dots = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} \gamma \delta \delta \dots$$

ve

$$z_1 z_2 z_3 \dots z_n z_{n+1} z_{n+2} \dots = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} \delta \gamma \gamma \dots$$

elde edilir.

$x_1 = 3$ ise $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için

$$y_i \equiv z_i \equiv x_{i+1} + 2 \pmod{4}$$

elde edilir. Ayrıca $i = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$y_n \equiv \alpha + 2 \pmod{4},$$

$$y_{n+i} \equiv \beta + 2 \pmod{4},$$

$$z_n \equiv \beta + 2 \pmod{4},$$

$$z_{n+i} \equiv \alpha + 2 \pmod{4}$$

olur. $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için $s_i \equiv x_{i+1} + 2 \pmod{4}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ve $\alpha + 2 \equiv \gamma \pmod{4}$ ve $\beta + 2 \equiv \delta \pmod{4}$ olsun.

$$y_1 y_2 y_3 \dots y_n y_{n+1} y_{n+2} \dots = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} \gamma \delta \delta \dots$$

ve

$$z_1 z_2 z_3 \dots z_n z_{n+1} z_{n+2} \dots = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} \delta \gamma \gamma \dots$$

elde edilir. Burada da $\gamma \neq \delta$ olduğundan bu noktaların aynı noktanın farklı kod temsilleri olduğu gösterilmiş olur.

□

Uyarı 5.4.2. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $x_i, x'_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere $X, X' \in ST$ noktalarının kod gösterimleri sırasıyla $x_1x_2x_3 \dots$ ve $x'_1x'_2x'_3 \dots$ olsun.

$\forall X \in ST$ için $H : ST \rightarrow ST, H(F(X)) = G(H(X))$ olacak şekilde

$$H(X) = X', x'_i = \begin{cases} 0, & x_i = 3 \\ 1, & x_i = 0 \\ 2, & x_i = 1 \\ 3, & x_i = 2 \end{cases} \quad (5.4)$$

fonksiyonu vardır.

Önerme 5.4.3. $H : ST \rightarrow ST, H(x_1x_2x_3 \dots) = x'_1x'_2x'_3 \dots$ olmak üzere (5.4)'te tanımlanan

$$x'_i = \begin{cases} 0, & x_i = 3 \\ 1, & x_i = 0 \\ 2, & x_i = 1 \\ 3, & x_i = 2 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

fonksiyonu bir homeomorfizmadır.

Kanıt. İspatı Önerme 4.4.3'tekine benzer şekilde yapılır.

□

Sonuç 5.4.4. (5.4) ifadesinde tanımlanan $H : ST \rightarrow ST$ fonksiyonu $\forall X \in ST$ için $H(F(X)) = G(H(X))$ olacak şekilde bir homeomorfizma belirttiğinden $\{ST; F\}$ ve $\{ST; G\}$ dinamik sistemlerinin topolojik olarak denk dinamik sistemler olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca Önerme 2.4.11'e göre $\{ST; G\}$ dinamik sistemi de kaotiktir.

$\{ST; G\}$ dinamik sisteminin periyodik noktalarının incelenmesi

Sonuç 5.4.4'ten $\{ST; F\}$ ve $\{ST; G\}$ dinamik sistemlerinin topolojik olarak denk dinamik sistemler olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Buna göre bu dinamik sistemlerin periyodik noktalarının sayısı aynıdır. Ayrıca (5.4)'te tanımlanan H dönüşümü yardımıyla F 'nin periyodik noktaları bilindiği takdirde G 'nin de periyodik noktaları

kolaylıkla bulunur. Buna göre F 'nin sabit noktaları

$$\bullet \bar{0} = 000 \dots, \bullet \overline{1032} = 10321032 \dots, \bullet \bar{20} = 202020 \dots, \bullet \overline{3012} = 30123012 \dots$$

şeklinde olduğundan G 'nin sabit noktaları

$$\bullet H(\bar{0}) = \bar{1}, \bullet H(\overline{1032}) = \overline{2103}, \bullet H(\bar{20}) = \bar{31}, \bullet H(\overline{3012}) = \overline{0123}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde G 'nin 2-periyotlu noktaları

$$\bullet H(\overline{13023120}) = \overline{20130231}, \bullet H(\overline{0220}) = \overline{1331}, \bullet H(\overline{01302312}) = \overline{12013023}$$

$$\bullet H(\overline{03102132}) = \overline{10213203}, \bullet H(\bar{12}) = \bar{23}, \bullet H(\overline{11223300}) = \overline{22330011}$$

$$\bullet H(\overline{2200}) = \overline{3311}, \bullet H(\overline{21100332}) = \overline{32211003}, \bullet H(\overline{23300112}) = \overline{30011223}$$

$$\bullet H(\overline{31021320}) = \overline{02132031}, \bullet H(\bar{32}) = \bar{03}, \bullet H(\overline{33221100}) = \overline{00332211}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde G 'nin diğer periyodik noktaları da hesaplanabilir.

5.5. Sierpinski Tetrahedronu Üzerinde $\{ST; F\}$ ile Denk Olmayan Bir Kaotik Dinamik Sistem İnşası

Bu bölümde Sierpinski tetrahedronunun kod kümesi üzerinde Önerme 5.3.1'de tanımlanan $\{ST; F\}$ dinamik sistemi ile denk olmayan bir dinamik sistem örneği verilecektir.

Önerme 5.5.1. $X, Y \in ST$ noktalarının kod gösterimleri sırasıyla $x_1x_2x_3 \dots$ ve $y_1y_2y_3 \dots$ olsun. Bu durumda $\forall i = 1, 2, 3, \dots$ için $x_i, y_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere $T : ST \rightarrow ST$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$x_1 = 0$ ise

$$T(0x_2x_3 \dots) = x_2x_3x_4 \dots$$

$x_1 = 1$ ise

$$T(1x_2x_3\ldots) = y_1y_2y_3\ldots, \quad y_i = \begin{cases} 0, & x_{i+1} = 3 \\ 1, & x_{i+1} = 0 \\ 2, & x_{i+1} = 2 \\ 3, & x_{i+1} = 1 \end{cases} \quad (i \geq 1)$$

olur.

$x_1 = 2$ ise dört farklı durum söz konusudur:

1. Durum:

$$T(222\ldots 20x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\ldots) = y_1y_2y_3\ldots, \quad y_i = \begin{cases} 0, & x_{i+1} = 2 \\ 1, & x_{i+1} = 3 \\ 2, & x_{i+1} = 0 \\ 3, & x_{i+1} = 1 \end{cases} \quad (i \geq 1)$$

2. Durum:

$$T(222\ldots 21x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\ldots) = y_1y_2y_3\ldots, \quad y_i = \begin{cases} 0, & x_{i+1} = 2 \\ 1, & x_{i+1} = 3 \\ 2, & x_{i+1} = 1 \\ 3, & x_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (i \geq 1)$$

3. Durum:

$$T(22\ldots 23x_s\ldots 0x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\ldots) = y_1y_2y_3\ldots,$$

$s < k$ için $x_s \in \{2, 3\}$ olmak üzere

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_{i+1} = 2 \\ 1, & x_{i+1} = 0 \\ 2, & x_{i+1} = 3 \\ 3, & x_{i+1} = 1 \end{cases} \quad (i \geq 1)$$

4.Durum:

$$T(22 \dots 23x_s \dots 1x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3} \dots) = y_1y_2y_3 \dots,$$

$s < k$ için $x_s \in \{2, 3\}$ olmak üzere

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_{i+1} = 2 \\ 1, & x_{i+1} = 1 \\ 2, & x_{i+1} = 3 \\ 3, & x_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (i \geq 1).$$

Ayrıca bu kurallara göre $T(\bar{2}) = \bar{0}$, $T(2\bar{3}) =$ ve $T(23\bar{2}) = 2\bar{0}$ elde edilir.

$x_1 = 3$ ise

$$T(3x_2x_3 \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0, & x_{i+1} = 1 \\ 1, & x_{i+1} = 3 \\ 2, & x_{i+1} = 2 \\ 3, & x_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (i \geq 1)$$

olur. Bu durumda $\{ST; T\}$ bir dinamik sistem belirtir.

Kanıt. Kod gösterimi $x_1x_2x_3 \dots$ olan keyfi bir $X \in ST$ noktası için x_1 'in 0, 1, 2 veya 3 olma durumuna göre Önerme 5.5.1'deki yedi kuraldan birisi uygulanır. Eğer X noktası yalnız tek bir kod gösterimine sahip ise $T(X)$ 'te tek bir kod gösterimine sahiptir. $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$ ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere X noktası $x_1x_2x_3 \dots x_n\alpha\beta\beta \dots$ ve $x_1x_2x_3 \dots x_n\beta\alpha\alpha \dots$ olacak şekilde iki farklı kod gösterimine sahip olsun. Bu durumda

$$0\bar{1}, 0\bar{2}, 0\bar{3}, 1\bar{0}, 1\bar{2}, 1\bar{3}, 2\bar{0}, 2\bar{1}, 2\bar{3}, 3\bar{0}, 3\bar{1}, 3\bar{2}$$

$$00\bar{1}, 01\bar{0}, 00\bar{2}, 02\bar{0}, 00\bar{3}, 03\bar{0}, 01\bar{2}, 02\bar{1}, 01\bar{3}, 03\bar{1}, 02\bar{3}, 03\bar{2}$$

$$11\bar{0}, 10\bar{1}, 10\bar{2}, 12\bar{0}, 10\bar{3}, 13\bar{0}, 12\bar{1}, 11\bar{2}, 11\bar{3}, 13\bar{1}, 12\bar{3}, 13\bar{2}$$

$$20\bar{1}, 21\bar{0}, 20\bar{2}, 22\bar{0}, 20\bar{3}, 23\bar{0}, 21\bar{2}, 22\bar{1}, 21\bar{3}, 23\bar{1}, 23\bar{2}, 22\bar{3}$$

ve

$$30\bar{1}, 31\bar{0}, 30\bar{2}, 32\bar{0}, 30\bar{3}, 33\bar{0}, 31\bar{2}, 32\bar{1}, 31\bar{3}, 33\bar{1}, 32\bar{3}, 33\bar{2}$$

noktalarının incelenmesi yeterli olacaktır. Bu noktaların, yukarıda verilen durumlara göre T fonksiyonu altında görüntüleri

$$T(0\bar{1}) = \bar{1}, \quad T(0\bar{2}) = \bar{2}, \quad T(0\bar{3}) = \bar{3},$$

$$T(1\bar{0}) = \bar{1}, \quad T(2\bar{0}) = \bar{2}, \quad T(3\bar{0}) = \bar{3},$$

$$T(1\bar{2}) = \bar{2}, \quad T(1\bar{3}) = \bar{0}, \quad T(2\bar{3}) = \bar{2},$$

$$T(2\bar{1}) = \bar{2}, \quad T(3\bar{1}) = \bar{0}, \quad T(3\bar{2}) = \bar{2},$$

olur. Ayrıca

$$T(00\bar{1}) = 0\bar{1}, \quad T(00\bar{2}) = 0\bar{2}, \quad T(00\bar{3}) = 0\bar{3},$$

$$T(01\bar{0}) = 1\bar{0}, \quad T(02\bar{0}) = 2\bar{0}, \quad T(03\bar{0}) = 3\bar{0},$$

$$T(01\bar{2}) = 1\bar{2}, \quad T(01\bar{3}) = 1\bar{3}, \quad T(02\bar{3}) = 2\bar{3},$$

$$T(02\bar{1}) = 2\bar{1}, \quad T(03\bar{1}) = 3\bar{1}, \quad T(03\bar{2}) = 3\bar{2},$$

$$T(10\bar{1}) = 1\bar{3}, \quad T(10\bar{2}) = 1\bar{2}, \quad T(10\bar{3}) = 1\bar{0},$$

$$T(11\bar{0}) = 3\bar{1}, \quad T(12\bar{0}) = 2\bar{1}, \quad T(13\bar{0}) = 0\bar{1},$$

$$T(11\bar{2}) = 3\bar{2}, \quad T(11\bar{3}) = 3\bar{0}, \quad T(12\bar{3}) = 2\bar{0},$$

$$T(12\bar{1}) = 2\bar{3}, \quad T(13\bar{1}) = 0\bar{3}, \quad T(13\bar{2}) = 0\bar{2},$$

$$T(20\bar{1}) = 2\bar{3}, \quad T(20\bar{2}) = 2\bar{0}, \quad T(20\bar{3}) = 2\bar{1},$$

$$T(21\bar{0}) = 2\bar{3}, \quad T(22\bar{0}) = 0\bar{2}, \quad T(23\bar{0}) = 2\bar{1},$$

$$T(21\bar{2}) = 2\bar{0}, \quad T(21\bar{3}) = 2\bar{1}, \quad T(22\bar{3}) = 0\bar{2},$$

$$T(22\bar{1}) = 0\bar{2}, \quad T(23\bar{1}) = 2\bar{1}, \quad T(23\bar{2}) = 2\bar{0},$$

$$T(30\bar{1}) = 3\bar{0}, \quad T(30\bar{2}) = 3\bar{2}, \quad T(30\bar{3}) = 3\bar{1},$$

$$T(31\bar{0}) = 0\bar{3}, \quad T(32\bar{0}) = 2\bar{3}, \quad T(33\bar{0}) = 1\bar{3},$$

$$\begin{aligned} T(31\bar{2}) &= 0\bar{2}, & T(31\bar{3}) &= 0\bar{1}, & T(32\bar{3}) &= 2\bar{1}, \\ T(32\bar{1}) &= 2\bar{0}, & T(33\bar{1}) &= 1\bar{0}, & T(33\bar{2}) &= 1\bar{2}, \end{aligned}$$

olur. Görüldüğü üzere aynı noktaların farklı kod temsillerinin görüntüleri tek ve aynı noktaya gider.

$\sigma = x_1x_2x_3 \dots x_n$ olmak üzere $\sigma 0\bar{1}$ ile $\sigma 1\bar{0}$, $\sigma 1\bar{2}$ ile $\sigma 2\bar{1}$, $\sigma 0\bar{2}$ ile $\sigma 2\bar{0}$, $\sigma 0\bar{3}$ ile $\sigma 3\bar{0}$, $\sigma 1\bar{3}$ ile $\sigma 3\bar{1}$, $\sigma 3\bar{2}$ ile $\sigma 2\bar{3}$, $\sigma 00\bar{1}$ ile $\sigma 01\bar{0}$, $\sigma 00\bar{2}$ ile $\sigma 02\bar{0}$, $\sigma 00\bar{3}$ ile $\sigma 03\bar{0}$, $\sigma 01\bar{2}$ ile $\sigma 02\bar{1}$, $\sigma 01\bar{3}$ ile $\sigma 03\bar{1}$, $\sigma 02\bar{3}$ ile $\sigma 03\bar{2}$, $\sigma 11\bar{0}$ ile $\sigma 10\bar{1}$, $\sigma 10\bar{2}$ ile $\sigma 12\bar{0}$, $\sigma 10\bar{3}$ ile $\sigma 13\bar{0}$, $\sigma 12\bar{1}$ ile $\sigma 11\bar{2}$, $\sigma 11\bar{3}$ ile $\sigma 13\bar{1}$, $\sigma 12\bar{3}$ ile $\sigma 13\bar{2}$, $\sigma 20\bar{1}$ ile $\sigma 21\bar{0}$, $\sigma 20\bar{2}$ ile $\sigma 22\bar{0}$, $\sigma 20\bar{3}$ ile $\sigma 23\bar{0}$, $\sigma 21\bar{2}$ ile $\sigma 22\bar{1}$, $\sigma 21\bar{3}$ ile $\sigma 23\bar{1}$, $\sigma 22\bar{3}$ ile $\sigma 23\bar{2}$, $\sigma 30\bar{1}$ ile $\sigma 31\bar{0}$, $\sigma 30\bar{2}$ ile $\sigma 32\bar{0}$, $\sigma 30\bar{3}$ ile $\sigma 33\bar{0}$, $\sigma 31\bar{2}$ ile $\sigma 32\bar{1}$, $\sigma 31\bar{3}$ ile $\sigma 33\bar{1}$, $\sigma 32\bar{3}$ ile $\sigma 33\bar{2}$ aynı noktaların farklı kod gösterimleridir ve σ 'dan bağımsız olmak üzere bu kod gösterimlerinin görüntüleri de aynı noktaya gider. $\square$

$\{ST; T\}$ dinamik sisteminin periyodik noktalarının incelenmesi

T 'nin sabit noktaları

$$\bullet \bar{0} = 000\dots, \quad \bullet \overline{103} = 103103\dots, \quad \bullet \overline{301} = 301301\dots,$$

$$\bullet \bar{20} = 2020\dots, \quad \bullet \overline{2130} = 21302130\dots$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde T 'nin 2-periyotlu noktaları

$$\bullet \overline{013} = 013013\dots, \quad \bullet \overline{031} = 031031\dots, \quad \bullet \overline{0220} = 02200220\dots$$

$$\bullet \overline{02211330} = 0221133002211330\dots, \quad \bullet \bar{1} = 111\dots, \quad \bullet \overline{130} = 130130\dots$$

$$\bullet \overline{2010} = 20102010\dots, \quad \bullet \overline{201030} = 201030201030\dots$$

$$\bullet \overline{2200} = 22002200\dots, \quad \bullet \overline{22113300} = 2211330022113300\dots, \quad \bullet \overline{2320} = 23202320\dots$$

$$\bullet\overline{232120} = 232120232120 \dots, \quad \bullet\overline{2120} = 21202120 \dots, \quad \bullet\overline{2030} = 20302030 \dots$$

$$\bullet\overline{210} = 210210 \dots, \quad \bullet\overline{230} = 230230 \dots, \quad \bullet\overline{21031230} = 2103123021031230 \dots$$

$$\bullet\overline{23120130} = 2312013023120130 \dots, \quad \bullet\overline{310} = 310310 \dots$$

olarak bulunur.

Sonuç 5.5.2. $\{ST; F\}$ ve $\{ST; T\}$ dinamik sistemlerinin sabit noktalarının sayıları farklı olduğundan bu dinamik sistemler topolojik olarak denk olmayan dinamik sistemlerdir (Bkz. Önerme 2.4.11).

Teorem 5.5.3. $\{ST; T\}$ dinamik sistemi Devaney anlamında kaotiktir.

Kanıt. İspatı Teorem 4.3.2'nin ispatına benzer yolla yapılır. □

Uyarı 5.5.4. (ST, d) kompakt metrik uzay ve F, G, T sürekli fonksiyonlar olduğundan $\{ST; F\}$, $\{ST; G\}$ ve $\{ST; T\}$ dinamik sistemleri aynı zamanda Li-Yorke anlamında kaotiktir (Bkz. [16]).

6. n-BOYUTLU SIERPINSKI ÜÇGENİ ÜZERİNDE İÇSEL METRİK VE KAOTİK DİNAMİK SİSTEM İNŞASI

Önceki bölümlerde Sierpinski üçgeni ve Sierpinski tetrahedronunun kod kümeleri üzerinde farklı dinamik sistemler inşa edilmiş ve bu dinamik sistemlerin kaotikliği incelenmiştir. Dikkat edilirse Önerme 5.3.1’de Sierpinski tetrahedronu üzerinde tanımlanan dinamik sistem, Sierpinski üçgeni üzerinde Önerme 4.2.2’de tanımlanmış olan dinamik sistemin dörtlük tabanda genelleştirilmiş bir halidir. Tanımlanan bu dinamik sistemlerden yola çıkılarak n -boyutlu Sierpinski üçgeni (S_n) üzerinde bir kaotik dinamik sistem örneği verilecektir. Ancak bunun için öncelikle S_n üzerinde bir içsel metrik tanımlanacaktır.

6.1. S_n Üzerinde İçsel Metrik İnşası

Noktaların kod gösterimleri kullanılarak S_n üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğunu veren içsel metrik aşağıdaki gibi tanımlanır:

Teorem 6.1.1. $j = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_j^{(1)} = a_j^{(2)}$ ve $a_k^{(1)} \neq a_k^{(2)}$ olmak üzere $A, B \in S_n$ keyfi noktalarının kod gösterimleri sırasıyla $a_1^{(1)} a_2^{(1)} \dots a_{k-1}^{(1)} a_k^{(1)} a_{k+1}^{(1)} \dots$ ve $a_1^{(2)} a_2^{(2)} \dots a_{k-1}^{(2)} a_k^{(2)} a_{k+1}^{(2)} \dots$ olsun. Her $j = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_j^{(1)} = a_j^{(2)}$ ve $a_k^{(1)} \neq a_k^{(2)}$ olmak üzere

$$d(A, B) = \min \left\{ \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_j^{(1)} + \beta_j^{(1)}}{2^j}, \frac{1}{2^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_j^{(2)} + \beta_j^{(2)}}{2^j}, \dots, \frac{1}{2^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_j^{(n)} + \beta_j^{(n)}}{2^j} \right\}$$

formülü A ile B arasındaki en kısa uzaklığı verir. Burada $a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(n+1)} \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ birbirlerinden farklı terimler olmak üzere

$$\alpha_j^{(1)} = \begin{cases} 0, & a_j^{(1)} = a_k^{(2)} \\ 1, & a_j^{(1)} \neq a_k^{(2)} \end{cases}, \quad \beta_j^{(1)} = \begin{cases} 0, & a_j^{(2)} = a_k^{(1)} \\ 1, & a_j^{(2)} \neq a_k^{(1)} \end{cases},$$

$$\alpha_j^{(2)} = \begin{cases} 0, & a_j^{(1)} = a_k^{(3)} \\ 1, & a_j^{(1)} \neq a_k^{(3)} \end{cases}, \quad \beta_j^{(2)} = \begin{cases} 0, & a_j^{(2)} = a_k^{(3)} \\ 1, & a_j^{(2)} \neq a_k^{(3)} \end{cases},$$

⋮

$$\alpha_j^{(n)} = \begin{cases} 0, & a_j^{(1)} = a_k^{(n+1)} \\ 1, & a_j^{(1)} \neq a_k^{(n+1)} \end{cases}, \quad \beta_j^{(n)} = \begin{cases} 0, & a_j^{(2)} = a_k^{(n+1)} \\ 1, & a_j^{(2)} \neq a_k^{(n+1)} \end{cases},$$

şeklindedir.

6.2. S_n Üzerinde $\{S_n; F\}$ Kaotik Dinamik Sisteminin İnşası

Önerme 6.2.1. $X, Y \in S_n$ noktalarının kod gösterimleri sırasıyla $x_1x_2x_3 \dots$ ve $y_1y_2y_3 \dots$ olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, 3, \dots$ ve $x_i, y_i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için $y_i \equiv x_{i+1} + x_1 \pmod{(n+1)}$ olmak üzere $F : S_n \rightarrow S_n$ fonksiyonu $F(X) = Y$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 6.2.2. $\{S_n; F\}$ dinamik sistemi Devaney anlamında kaotiktir.

7. SONUÇ

Bu çalışmada Sierpinski üçgeni üzerinde denk olan ve denk olmayan ayrıca Sierpinski tetrahedronu üzerinde denk olan ve denk olmayan kaotik dinamik sistem örnekleri verilmiştir. Daha sonra bu yapılar üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak tanımlanan bir dinamik sistem, n —boyuttaki Sierpinski üçgeni üzerinde genelleştirilmiştir.

Sierpinski üçgeni üzerinde yapılan bu çalışmalar farklı fraktallar için de benzer çalışmaların yapılmasında yol gösterici olacaktır. Bu tezde kullanılan yöntemlerden yola çıkılarak başka fraktallar üzerinde de dinamik sistemler tanımlamak mümkündür. Ayrıca gelecekte bu yapılar üzerinde uygun metrikler tanımlanarak dinamik sistemlerin kaotikliği incelenebilir ve farklı kaos tanımları için bu dinamik sistemlerin kaotikliği karşılaştırılabilir.

KAYNAKÇA

- [1] Alligood, K.T., Sauer, T.D. and Yorke, J.A. (1996). *CHAOS: An introduction to dynamical systems*. New York: Springer-Verlag.
- [2] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., Stacey, P. (1992). On Devaney's Definition of Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 99(4), 332-334.
- [3] Barnsley, M. (1988). *Fractals everywhere*. San Diego: Academic Press.
- [4] Burago, D., Burago, Y. and Ivanov, S. (2001) *A course in metric geometry*. USA: AMS.
- [5] Cınbarcı, A. (2016) Fraktal Geometri ve Evrim. *Deneyisel Tıp Araştırma Enstitüsü Dergisi* 6(11), 101-108.
- [6] Cristea, L.L and Steinsky, B. (2013). Distances in Sierpinski Graphs and on the Sierpinski gasket. *Aequationes Mathematicae* , 85(3), 201-219.
- [7] Denker, M. and Sato, H. (1999). Sierpinski gasket as a Martin boundary II (the intrinsic metric). *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 35(5), 769-794.
- [8] Devaney, R.L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [9] Edgar, G. (2008). *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics.
- [10] Ercai, C. (1997). Chaos for the Sierpinski carpet. *J. Stat. Phys.*, 88(3-4), 979-984.
- [11] Falconer, K.J. (2014). *Fractal geometry: Mathematical foundations and application*. UK: John Wiley.
- [12] Grabner, P. and Tichy, R.F. (1998). Equidistribution and Brownian motion on the Sierpinski gasket. *Monatshefte für Mathematik*, 125(2), 147-164.

- [13] Gulick, D. (1988). *Encounters with chaos and fractals*. Boston: Academic Press.
- [14] Hinz, A.M. and Schief, A. (1990). The average distance on the Sierpinski gasket. *Prob. Theory Rel. Fields* , 87(1), 129-138.
- [15] Hirsch, M.W., Smale, S. and Devaney, R.L. (2013). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier Academic Press.
- [16] Huang, W. and Ye, X. (2002). Devaney's chaos or 2-scattering implies Li-Yorke's chaos. *Topology. Appl.*, 117(3), 259-272.
- [17] Hutchinson, J.E. (1981). Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30, 713-747.
- [18] Karaçay, T. (2004) Determinizm ve Kaos. Mantık, Matematik ve Felsefe II. Ulusal Sempozyumu, İstanbul: İKÜ yayınları, 389-400.
- [19] Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 130-148.
- [20] Mandelbrot, B.B. (1982). *The Fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman and Company.
- [21] Mandelbrot, B.B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156, 636-638.
- [22] Özdemir, Y., Saltan, M. and Demir, B. (2018). The Intrinsic Metric on the Box Fractal. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, DOI: 10.1007/s41980-018-00197-w.
- [23] Peitgen, H.O., Jürgens, H. and Saupe, D. (2004). *Chaos and fractals: new frontiers of science*. Springer.
- [24] Saltan, M., Özdemir, Y. and Demir, B. (2018). An explicit formula of the intrinsic metric on the Sierpinski gasket via code representation. *Turk. J. Math.*, 42, 716-725.
- [25] Saltan, M., Özdemir, Y. and Demir, B.(2018). Geodesics of the Sierpinski Gasket. *Fractals*, 26(3), 1850024.

- [26] Saltan, M. (2018). Some interesting code sets of the Sierpinski triangle equipped with the intrinsic metric. *IJAMAS* , 57(4), 152–160.
 - [27] Saltan, M. (2018). Intrinsic metrics on Sierpinski-like triangles and their geometric properties. *Symmetry*, 10(6), 204.
 - [28] Strichartz, R.S. (1999). Isoperimetric estimates on Sierpinski gasket type fractals. *Trans. Amer.Math. Soc.* 351(5), 1705–1752.
 - [29] Strogatz, S.H. (1994). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. New York: Perseus Books Publishing.
 - [30] Yamaguti, M., Hata, M. and Kigami, J. (1997). *Mathematics of fractals*. American Mathematical Society, Providence.
- http-1:** http://www.issp.ac.ru/ebooks/books/open/Chaos_Fractal_Geometry.pdf
(Erişim tarihi: 01.06.2019)