

PLAKLARIN KARMA SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

VE

DEĞİŞİK UYGULAMALAR

Yunus ÜZCELİKÖRS

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof.Dr. A.Yalçın AKÖZ

Şubat-1990

Yunus Özçelikörs'ün DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı "Plakların Karma Sonlu Eleman Formülasyonu ve Değişik Uygulamalar " başlıklı bu çalışma, jürimizce Lisansüstü Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

28 / 02 / 1990

Üye : Prof. Dr. A.Yalçın AKÖZ

Üye : Prof. Dr. Hasan ENGİN

Üye : Prof. Ruhi AYDIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun *13.1.5.1990*
gün ve ..*246.1.1*..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Rüstem KAYA
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada, ince plaklar için fonksiyonel analiz yolu ile geometrik ve dinamik sınır koşullarını da içeren yeni fonksiyoneller elde edilmiştir. Üç moment ve yerdeğiştirme cinsinden elde edilen bu fonksiyoneller özel halde klasik potansiyel enerji ifadesine dönüşmektedir. Mühendislik açısından önemli olan iç kuvvetlerin bağımsız olarak fonksiyonelde bulunması bu büyüklüklerin elde edilmesindeki doğruluğu arttırmaktadır.

Kiriş plak sistemleri incelenmiş, kirişe gelen burulma momenti ihmal edilerek, kiriş ve plak momentleri ile ortak çökme değerini aynı anda hesaplamaya yönelik karma sonlu eleman formulasyonu yapılmıştır. Bu formulasyon kullanılarak çeşitli örnekler çözülmüştür.

Farklı mesnetlenme durumundaki değişken kalınlıklı (sürekli) ve boşluklu plak problemleri incelenmiş, elde edilen sonuçlar çizelge ve şekiller üzerinde gösterilmiştir.

Çeşitli sınır koşullarına sahip kare plakların serbest titreşim modlarına karşı gelen açısal frekans değerleri hesaplanarak literatürdeki değerlerle karşılaştırıldı. Daha sonra yapılan deneysel çalışmada ayrıntıya girilmeden yalnızca bazı mod şekilleri ile titreşim frekanslarının belirlenmesi ile yetinildi.

SUMMARY

In this study, new functionals which has geometric and dynamic boundary conditions are obtained for Kirchhoff plates using the method of functional analysis. These functionals are written in terms of displacement and three moments components also reduce to the classical potential energy for specific case. Existence of inner forces which are important with in the context of engineering, independently in the functionals increase the accuracies of inner forces.

Omitting the twisting moment of the plate on the beam, beam-plate systems were scrutinized and a mixed FE formulation has been developed aiming to compute both beam and plate moments and common displacement value, together. Several examples have been solved by means of the proposed formulation.

Some different cases were also considered and numerical results given in this study. These cases can be described as plates with different supporting conditions, and plates which have continuously varying thickness and cutout plates.

Natural frequencies of square plates with various boundary conditions have been calculated. Results were compared with the analytical solutions. Later, we have made limited experimental study and sufficed with a few mode shapes and natural frequencies.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında, eşsiz fikir ve yardımları ile beni yönlendiren değerli hocam Prof.Dr. A. Yalçın AKDZ'e sonsuz teşekkür borçluyum.

Bilimsel formasyonumu kazanmamda yardımlarını esirgemenen I.T.Ü. Mekanik kürsüsü hocaları ve asistan arkadaşlarıma, çalışmanın deneysel kısmındaki yardımlarından dolayı teknisyen arkadaşım Fevzi EFE'ye teşekkür ediyorum.

Ve kuşkusuz, değerli eşimin sabrı anılmadan geçilemeyecek önem ve büyüklüktedir.

Ve çalışmam süresince idari kolaylıklar göstermekten kaçınmayan Anadolu Üniversitesi Mühendislik Fakültesi ve İnşaat Bölümü yetkililerine ve çeşitli şekillerde yardımcı olmuş olan bölüm arkadaşlarıma şükranlarımı sunuyorum.

Yunus ÖZÇELİKORS

ESKİŞEHİR, Şubat 1990

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
1.1. Konu	1
1.2. Sonlu Eleman Yönteminin Tarihsel Gelişimi...	2
1.3. Kiriş-Plak Sistemleri ile İlgili Çalışmalar	3
1.4. Değişken Kalınlıklı Plaklarla İlgili Çalışmalar	6
2. FORMÜLASYON	9
2.1. Plak Denklemlerinin Çıkarılması	9
2.1.1. Plaktaki gerilmelerin değişimi	12
2.1.2. Sınır koşulları	13
2.2. Çubuk Denklemleri	14
2.3. İnce Plak Fonksiyonellerinin Elde Edilmesi .	15
2.3.1. Kirchhoff İnce plak fonksiyonelleri .	18
2.4. Kiriş Fonksiyonelleri	22

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
3. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	23
3.1. Rayleigh-Ritz Yöntemi	23
3.2. Varyasyonel Türev Yöntemi	23
3.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi	25
3.3.1. Eleman seçim kriterleri	26
3.4. Plakların Sonlu Eleman Formülasyonu (SE) ...	27
3.4.1. Değişken kalınlıklı plakların SE. formülasyonu	29
3.4.2. Plak-kiriş sistemi için SE formülasyonu	29
3.5. Eleman Tipleri	33
3.5.1. Üçgen plak elemanı	33
3.5.2. Dikdörtgen plak elemanı	35
3.5.3. Altı düğüm noktalı üçgen eleman	37
3.5.4. Dokuz düğüm noktalı dikdörtgen eleman	44
3.5.5. Lineer giriş elemanı	52
3.5.6. Kuadratik giriş elemanı	53
3.6. Sınır Koşullarının Etkileri	54
3.6.1. Lineer, sınır fonksiyonu	55
3.6.2. Kuadratik sınır fonksiyonu	57
3.6.3. Sınır terimleri matrisleri	57
4. UYGULAMALAR	60
4.1. Ritz Yöntemine Ait Uygulamalar	60
4.1.1. Basit mesnetli plak	60
4.1.2. Ankastre plak	61
4.2. Varyasyonel Türev Yöntemine Ait Uygulamalar	62

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
4.3. Klasik Uygulamalar	63
4.3.1. Değişken sınır koşullarına sahip dik- dörtgen plak	63
4.3.2. Basit mesnetli kare plak	69
4.3.3. Ankastre mesnetli kare plak	70
4.4. Statik Uygulamalar	72
4.4.1. Dört kenarından kirişlere oturan plak	72
4.4.2. Ortasından kirişle desteklenen plak .	77
4.4.3. Değişken kalınlıklı plaklar	81
4.4.4. Boşluklu plaklar	87
4.5. Dinamik Uygulamalar	90
5. DENEYSEL ÇALIŞMA	93
5.1. Deney	93
5.2. Deney Aletlerinin Özellikleri	96
6. SONUÇLAR	97
KAYNAKLAR DİZİNİ	100
ÖZGEÇMİŞ	
EK.1. Bilgisayar Programı	
EK.2. Denklem 2.14 e ait Açıklama	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
2.1. a. Koordinat takımı	9
b. Eğilmeden önce ve sonraki durum	9
2.2. a. Elemanter plak elemanı	10
b. Gerilmelerin değişimi	10
2.3. Kesme kuvvetleri ve momentlerin değişimi	12
2.4. Plak sınırındaki denge	20
3.1. Fark ifadeleri	24
3.2. Plak-kiriş sistemi	29
3.3. Plak ve kiriş elemanları	31
3.4. Üçgen plak elemanı	33
3.5. Dikdörtgen plak elemanı, lokal ve global koordinatlar	35
3.6. Kartezyen ve üçgen koordinat takımı	37
3.7. Altı düğüm noktalı üçgen plak elemanı	38
3.8. Dokuz düğüm noktalı dikdörtgen plak elemanı ...	44
3.9. Lineer kiriş elemanı	52
3.10. Kuadratik kiriş elemanı	53
3.11. Eleman sınır doğrultuları	56
4.1. Plak modeli	62
4.2. Dikdörtgen plağın sonlu eleman modeli	
a. Plak geometrisi ve malzeme özellikleri	64
b. Üçgen eleman ağı	64
c. Dikdörtgen eleman ağı	64

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.3. $y=0.5b$ doğrusu üzerinde	
a. W 'nin değişimi, b. M_{xy} 'nin değişimi	65
4.4. $x=0.4$ doğrusu üzerinde	
a. W 'nin değişimi, b. M_{xy} 'nin değişimi	66
4.5. a. $x=0.4$ doğrusu üzerinde M_x 'in değişimi	67
b. $y=0.4$ doğrusu üzerinde M_x 'in değişimi	67
4.6. $x=0.4$ doğrusu üzerinde M_y 'nin değişimi	68
4.7. Eleman ağları	
a. Lineer üçgen, b. İzoparametrik	69
c. Kuadratik üçgen, d. Kuadratik dikdörtgen .	69
4.8. Kenarlarından kirişlere oturan plak	72
4.9. $y=0.5b$ doğrusu üzerinde W 'nin değişimi	76
4.10. Ortasından kirişle desteklenmiş plak	77
4.11. $y=0.5b$ doğrusu üzerinde M_x 'in değişimi	79
4.12. $y=0.5b$ doğrusu üzerinde W 'nin değişimi	80
4.13. Değişken kalınlıklı basit plak	81
4.14. Basit mesnetli kare plakta M_x 'in değişimi ...	82
4.15. Basit mesnetli kare plakta W 'nin değişimi ...	83
4.16. Değişken kalınlıklı ankastre plak	84
4.17. Ankastre plakta M_x 'in değişimi	85
4.18. Ankastre plakta W 'nin değişimi	86
4.19. Ankastre kare plak boşluk ortada	87
4.20. Ankastre kare plak boşluk köşede	88

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.21. Ankastre kare plak ortada dikdörtgen boşluk .	89
4.22. Plak geometrisi ve malzeme özellikleri	91
5.1. a. Deney sistemi, b. Bağlantı şeması	94
5.2. Örnek mod şekilleri	95

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. Basit mesnetli kare plak merkezindeki kesit tesirleri	70
4.2. Dört tarafından ankastre plakta kesit tesirleri	71
4.3. Kenarlarından kirişlere oturan dikdörtgen plak, plak merkezindeki çökmenin rijitlik parametresi ile değişimi	73
4.4. Kenarlarından kirişlere oturan dikdörtgen plak, plak merkezindeki momentlerin rijitlik parametresi ile değişimi	74
4.5. Kenarlarından kirişlere oturan dikdörtgen plak, X ve Y yönü kirişlerindeki enbüyük momentler ..	75
4.6. Ortasından kirişle desteklenmiş plakta en büyük kiriş momentleri	79
4.7. Ankastre plak, ortada kare boşluk olması durumu moment katsayıları	90
4.8. Ankastre plak, köşede kare boşluk olması durumu moment katsayıları	91
4.9. Ankastre plak, ortada dikdörtgen boşluk olması durumu moment katsayıları	92
4.10. Basit mesnetli kare plak sönümsüz serbest titreşim durumu açısal frekans değerleri	95
4.11. Ankastre mesnetli kare plak sönümsüz serbest titreşim durumu teorik frekans parametreleri .	95
4.12. Dört köşesinden mesnetli kare plak sönümsüz serbest titreşim durumu frekans parametreleri	95

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
A	Eleman alanı
E, G	Elastisite ve kayma modülleri
g	Yerçekimi ivmesi
I	Kiriş atalet momenti
h	Plak kalınlığı
ν	Poisson oranı
M_x, M_y	Egilme momentleri
M_{xy}	Burulma momenti
M_{nn}	Eleman sınırına dik doğrultudaki moment
M_{ns}	Eleman sınırına teget doğrultudaki moment
n	Eleman sınırındaki normal vektör
Q_x, Q_y	Kesme kuvvetleri
q, P	Düzgün yayılı ve tekil yük
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	x,y,z düzlemlerindeki normal gerilme
γ_{xy}	xy düzlemindeki kayma şekil değişimi
γ_{yz}	yz düzlemindeki kayma şekil değişimi
γ_{zx}	zx düzlemindeki kayma şekil değişimi
r_x, r_y, r_{xy}	Egrilik yarıçapları
τ_{xy}	x düzleminde y eksenini yönünde kayma g.
τ_{yz}	y düzleminde z eksenini yönünde kayma g.
τ_{zx}	z düzleminde x eksenini yönünde kayma g.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
s_i	Elemandaki sınır doğrultusu
u	x eksenini doğrultusundaki yerdeğiştirme
v	y eksenini doğrultusundaki yerdeğiştirme
w	z eksenini doğrultusundaki yerdeğiştirme
ω	Açısal frekans
∇^2	Laplace operatörü
$(\cdot)_{,s}$	(\cdot) 'in s'e göre kısmi türevi
ρ	Birim plak alanının kütlesi
γ	Özgöl ağırlık

1.

GİRİŞ

1.1.Konu

Bir boyutu diğer iki boyutu yanında küçük olan ve genellikle düzlemine dik yükleri eğilme yolu ile taşıyan düzlemsel yapı elemanlarına plak denir.

Mühendislikte çok kullanılan yapı elemanlarından biri olan plakların, özellikle eğilmesi ile ilgili pek çok araştırmacı tarafından özel plak problemlerinin kesin veya yaklaşık çözümlerini veren sayısız çalışma yapılmıştır (Timoshenko and Krieger, 1959 ; Szilard 1974). Bu çalışmaların büyük bir kısmı düzgün şekilli, sabit kalınlıklı ve homogen olmakla sınırlıdır. Dolayısı ile rastgele şekilli, kalınlığı, yük ve mesnetlenme durumu değişebilen plaklar için genel bir çözüm tekniğinin bulunması önemlidir. Plak denklemlerinin sözü edilen genel durumda kesin çözümlerinin bulunması ya olanaksız ya da son derece karmaşıktır. Böyle durumlarda ise yaklaşık çözüm tekniklerine başvurmak kaçınılmaz hale gelir.

Sonlu eleman (SE) yönteminin her tür sınır ve yükleme koşuluyla, geometri ve malzeme değişikliklerini dikkate alabilecek yapıda olması, bilgisayarların hız ve bellek kapasitelerindeki gelişme, sürekli ortam problemleri ile birlikte pek çok alanda bu yöntemin etkin bir şekilde kullanımını sağlamaktadır.

1.2.Sonlu Eleman Yönteminin Tarihsel Gelişimi

Plak problemlerinde sonlu eleman yönteminin geçirdiği aşamalar, geliştirilen plak eğilme elemanlarına ait ayrıntılı bir katalog ile yönetime ait genel bir sınıflama (Pian and Tong, 1969 ; Hrabok and Hradey, 1984) te bulunabilir. Tarihsel gelişimi içinde yöntem hakkında özetle şunlar söylenebilir.

SE deplasman yöntemi en küçük potansiyel enerji ilkesinden hareketle geliştirilmiştir. Bilinmeyenler düğüm noktalarındaki deplasmanlardır.

Genelleştirilmiş deplasmanlar veya gerilme parametrelerinin bilinmeyen olduğu SE denge yöntemlerinde hareket noktası en küçük tamamlayıcı enerjidir.

Hibrid SE yöntemlerinde genel olarak bilinmeyenler düğüm deplasmanlarıdır. Hibrid gerilme yönteminde değiştirilmiş tamamlayıcı enerji ilkesi kullanılırken hibrid deplasman yöntemlerinde değiştirilmiş potansiyel enerji kullanılır.

Karma SE yöntemi ilk olarak Reissner ilkesinden hareketle geliştirilmiştir (Herrmann, 1965 ; Pian and Tong, 1969). Gerilme ve deplasmanlar aynı anda bilinmeyen olarak alınır. Daha sonra geliştirilen formülasyonlar arasında değiştirilmiş potansiyel enerji ilkesine dayanan, düğüm deplasmanları ile fiziksel anlamı gerilme olan Lagrange çarpanlarını bilinmeyen alan genelleştirilmiş deplasman yöntemi, değiştirilmiş tamamlayıcı enerji ilkesine dayanan

düğüm deplasmanları ile fiziksel anlamı deplasman olan Lagrange çarpanlarını bilinmeyen alan genelleştirilmiş denge yöntemleri bulunmaktadır.

Plak eğilme problemi için geliştirilen karma SE modelleri (Karamanlidis and Atluri, 1984 ; Day and Yang, 1982 ; Fujii, 1981) de bulunabilir.

1.3.Kiriş-Plak Sistemleri ile ilgili Çalışmalar

Mühendislikte kirişlerle plaklar hemen hemen birbirinden ayrılmayan yapı elemanlarıdır. Gerçekte, bu kiriş-plak yapısının birarada hesaplanması gerekirken hesap basitliği amacıyla genelde bu iki eleman ayrı ayrı hesaplanmaktadır.

Kiriş-plak sistemini birarada hesaplamak üzere yapılan çalışmalardan biri Tekinalp'in (1952) çalışmasıdır. Bu çalışmada çubukların sınır koşullarını da kolayca gözönüne alabilmek için çubuk ve plaga ait çökme ve dönmeler integral denklemlerle ifade edilmiştir. Bilinmeyen olarak plak kiriş etkileşiminden oluşan plak düzlemine dik kuvvetle, kirişin burulma momenti alınmıştır. Plak ve kirişin çökme ve dönmelerini eşitleyerek elde ettiği iki denklemde, bilinmeyenlere serilerle yaklaşılmıştır. Her yükleme ve plak geometrisi için yeni bir formülasyon gereklidir. Çalışmada, enlemesine kirişlere oturan sonsuz uzun plak ile kenarlarından kirişlere oturan plak hali formüle edilmiş, çapraz kirişlerle sağlamlaştırılmış kenarlarından basit mesnetli kare plak için nümerik örnek verilmiştir.

Ghosh ve Som, (1978) kenarlarından kirişlere oturan dikdörtgen plaga ait dördüncü mertebe diferansiyel denklemi seri açılımları ile çözmüş ve örnekler vermiştir.

Elastisite teorisindeki yöntem ise kirişsiz plakların incelendiği ortotropik modeldir. Malzeme özellikleri düzenli aralıklarla yerleştirilen kirişlerin varlığını temsil edecek şekilde anizotropik alınarak kiriş-plak sistemi yerine uniform kalınlıklı bir eşdeğer plak hesabı yapılır. İki ortogonal doğrultuda kirişleri bulunan dikdörtgen plakların incelendiği Clifton, et al., (1963) ; Srinivasan and Thiruvengkatachari, (1984) in çalışmaları ortotropik modelleme tekniğine örnek olarak verilebilir. Bu teknik ağır ve az sayıda kirişin bulunduğu sistemlerde doğru sonuç vermemektedir.

Daha sonra bir çok araştırmacının 'Constraint Method' adı verilen kiriş ile plak arasındaki kinematik koşulların kısıt denklemleri ile katsayılar matrisi içine alınması ve katsayılar matrisinin tersinin alınarak kısıtların doğrudan eliminasyonunun yapıldığı sonlu eleman formulasyonları vardır Szabo et al., (1974) ; Rossow and Ibrahimkhalil, (1978).

Serieg ve Al-Shareedah, (1986) ise plak ve kirişlerin potansiyel enerjileri toplamını sistemin enerjisi olarak kabul edip plak ve kirişin çökme fonksiyonlarını Fourier serisine açarak Ritz yöntemi ile çözüm yapmışlardır. Plak kiriş etkileşiminde yalnızca lateral yükler alınmış burulma momentleri ihmal edilmiştir. Geometrik uygunluk koşulu

seçilen sınırlı sayıda noktada sağlanmış ve Lagrange çarpmanı yöntemi ile hesaplara aktarılmıştır. Kenarlarından basit mesnetli tek kirişli plak çözümleri verilmiştir. Kiriş momentleri için ise herhangi bir değer bulunamamıştır.

Sonlu eleman modellerinin çoğu kirişli plakları tanımlamak için plak elemanlarla çubuk elemanları birlikte kullanılır. Çeşitli sonlu eleman modelleri arasındaki fark çubuk-plak bağlantısını ifade eden kinematik koşulların seçimidir. Pek çok sonlu eleman programında bulunan ve yaygın olarak kullanılan yaklaşım plak kiriş ortak hareketinin nodal büyüklükler yolu ile ifadesidir. Çubuğu tanımlayan kiriş elemanın düğüm noktaları, ayrık denge denklemlerinde, plak elemanın söz konusu düğümlerindeki çökmeye zorlanır. Bu hesap tarzı ortotropik modele göre daha tatmin edici sonuç verir. Bununla birlikte bu modelde plak ve kiriş eleman arasındaki kayma kuvvetlerinin hesaba katılması çubuk eleman civarındaki plak elemanı ağıнын yeteri derecede küçültülmesi ile mümkün olmaktadır. Aksi takdirde model oldukça rijit bir karakter göstererek, plakla kiriş eleman arasındaki kayma akımı dikkate alınamamaktadır. Yöntemin çok sayıdaki ara kiriş için çözüm avantajına karşı kayma akımında zorluklarla karşılaşmaktadır.

O'leary ve Harari, (1985) membran-egilme ikileminin Lagrange çarpanları yardımı ile ek bir kısıt olarak katsayılar matrisine eklendiği genelleştirilmiş varyasyon ilkelere dayanan bir sonlu eleman formülasyonu yapmıştır. Çalışmada yalnızca çökmeler için tablo şeklinde değerler bulunmaktadır.

Çalışmaların pek çoğunda serbest değişken yerdeğiştirme için yüksek dereceden interpolasyon fonksiyonları seçilmekte, çökmelerin hesaplanmasından sonra türev ifadeleri ile momentlere geçilmektedir. Bu ise momentlerdeki hassaslığı azaltmaktadır.

1.4. Değişken Kalınlıklı Plaklarla İlgili Çalışmalar

Değişken kalınlıklı plak problemlerinin analitik çözümünde, dördüncü mertebeye plak diferansiyel denklemi değişken katsayılı hale gelmekte bu da çözümü oldukça güçleştirmektedir. Dolayısı ile literatürdeki değişken kalınlıklı plaklar ile ilgili yayınların büyük çoğunluğunda kademeli plaklar incelenmiştir. Literatürde plak eğilme rijitliği D nin herhangi bir bağımsız değişkenin lineer fonksiyonu olması özel durumuna ait basit mesnetli plak çözümleri (Timoshenko and Krieger, 1959 ; Jia-rank, 1982) de bulunabilir. Karma SE yöntemi ile prizmatik ve ikinci dereceden parabolik kalınlık değişimine sahip basit ve ankastre mesnetli plaklar incelenmiş eğilme momenti ve çökmenin değişimi grafik olarak verilmiştir.

Bu çalışmada fonksiyonel analiz yolu ile eğilmeye çalışan plakların her çeşit sınır koşullarını da içeren fonksiyonel bulunmuş ve bu fonksiyonel statik ve dinamik karakterdeki değişik problemler için çözülmüştür. Mühendisler için önemli olan iç kuvvetlerin bağımsız olarak fonksiyonelde bulunması bu büyüklüklerin elde edilmesinde doğruluğu arttırmıştır. Elde edilen fonksiyonele ilk yaklaşım

Ritz ve varyasyonel türev yöntemleri ile yapılmış daha sonra SE yöntemi üzerinde durulmuştur.

Bu çalışmadaki karma SE yönteminin dayandığı değişim ilkesi sınır koşullarını da içerme bakımından "Fonksiyonel analiz yöntemi" olarak yeni bir tekniktir.

Literatürde bulunan çeşitli plak eğilme elemanları için sürekli formdaki kalınlık değişimi de gözönüne alınarak eleman rijitlik matrisleri açık formda elde edilmiştir. Düğüm noktalarında tanımlanan şekil fonksiyonları kalınlık değişimi için de kullanılmıştır. Önce lineer şekil fonksiyonlarının kullanıldığı üçgen eleman ile bilineer şekil fonksiyonlarının kullanıldığı (izoparametrik) dikdörtgen eleman rijitlik matrisleri elde edilmiştir. Bundan sonra kuadratik şekil fonksiyonları kullanılarak altı düğüm noktalı üçgen eleman ile dokuz düğüm noktalı dikdörtgen eleman rijitlik matrisleri bulunmuştur (Bathe, 1982 ; Brebbia and Ferrante, 1979).

Bu çalışmada plak kiriş etkileşiminden kirişe gelen burulma momenti ihmal edilerek, plak ve kirişin çökme ve momentlerini aynı anda hesaplamaya yönelik varyasyonel ilkelere dayalı bir sonlu eleman formülasyonu da yapılmıştır.

Geliştirilen karma SE yöntemi ile çeşitli sınır koşullarına sahip kare plakların fleksibilite matrisleri belirlenerek, serbest titreşim modlarına karşı gelen açısal

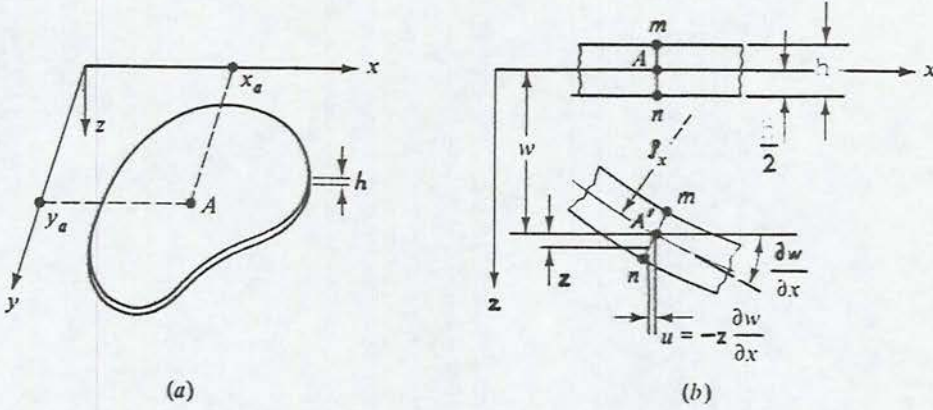
frekans değerleri hesaplandı. Hesaplanan değerler literatürdeki (Leissa, 1969, 1973 ; Jones and Milne, 1976 ; Reed, 1965) çözümlerle karşılaştırıldı. Elde edilen nümerik sonuçların özellikle ilk modlarda seri ve Ritz çözümlerine mükemmel derecede uyum sağladığı görülmüştür.

Daha sonra nümerik çözümlerle elde edilen yaklaşım, dört köşesinden mesnetlenmiş bir kare plak için deneysel olarak incelendi.

2.

FORMÜLASYON

2.1. Plak Denklemlerinin Çıkarılması



Sekil 2.1. a) Koordinat takımı b) Eğilmeden önce ve sonra plâğın durumu (Uğural, 1981)

Sekil 2.1 (a) daki orta düzlemi xy düzlemi ile çakışan plâğın eğilmeden sonraki durumu şekil 2.1 (b) de gösterilmiştir. İnce plaklarla ilgili küçük yerdeğiştirme teorisinde şekil değıştirmenin geometrisini ifade eden temel kabuller şöyle sıralanabilir (Uğural, 1981).

- 1) Plak (orta yüzeyinin) çökmeleri plak kalınlığına oranla küçüktür. ($w \ll h$) Dolayısıyla şekil değıştirmiş yüzeyin eğimi oldukça küçüktür. Eğimin kareleri ise 1'in yanında ihmal edilebilir mertebededir.
- 2) Eğilmeden sonra orta yüzey gerilmesizdir.
- 3) Başlangıçta, orta düzleme dik ve düzlem olan kesitler eğilmeden sonraki yüzeye dik ve düzlem kalırlar. Bu kabul ile düşey kayma şekil değıştirmeleri ihmal edilebilir.
- 4) Orta düzleme dik doğrultudaki normal gerilme, diğer gerilme bileşenleri ile kıyaslandığında ihmal edilebilir.

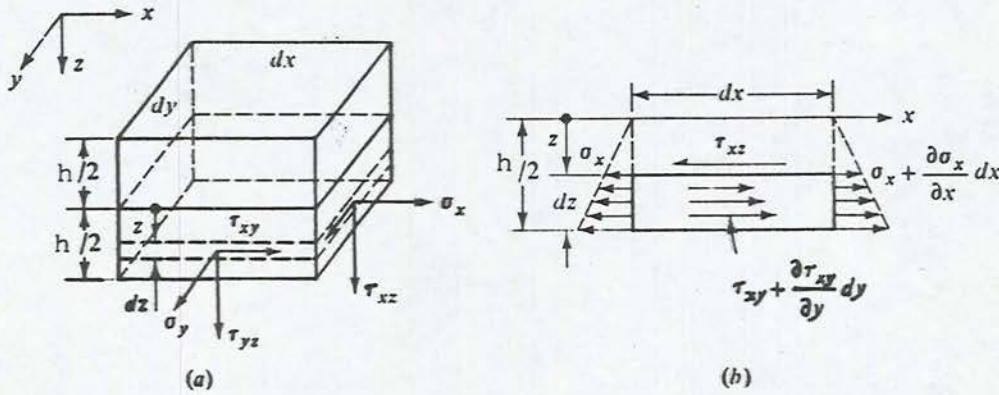
iki ve üçüncü kabul orta yüzeydeki noktaların yalnızca z doğrultusunda yerdeğiştirdiğini, diğer noktaların ise orta yüzeyden olan uzaklıkla orantılı olarak x ve y yönünde yer değiştirdiğini ifade etmektedir.

$$u = -z W_{,x} \quad v = -z W_{,y} \quad (2.1)$$

Bu ifadeler birim şekil değiştirme bağıntılarında yazılırsa

$$\begin{aligned} \epsilon_x = u_{,x} &= -z W_{,xx} & \epsilon_z &= W_{,z} \\ \epsilon_y = v_{,y} &= -z W_{,yy} & \gamma_{xz} &= W_{,x} + u_{,z} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = -2z W_{,xy} & \gamma_{yz} &= W_{,y} + v_{,z} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ifadeleri elde edilir. Şekil 2.2.deki elemaner parça üzerinde kesit tesirleri pozitif yönleri ile gösterilmiştir .



Şekil 2.2. a) Elemaner plak elemanı, b) Gerilmelerin değişimi

Gerilmeleri tanımlamakta kullanılan çift indisli notasyonda birinci indis yüzeyin normal doğrultusunu, ikinci indis ise gerilmenin yönünü tariflemektedir.

Dış normal yönü ile gerilme bileşeninin yönü her ikisinde koordinat eksenlerinin pozitif (veya negatif) yönünde ise gerilme pozitif olarak kabul edilmekte aksi halde ise negatif olarak alınmaktadır. Üç boyutlu gerilme halindeki izotrop, homogen malzemelere ait gerilme-birim şekildeğiştirme bağıntılarında (genelleştirilmiş Hooke yasalarında)

$\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu\epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} (W_{,xx} + \mu W_{,yy}) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu\epsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} (W_{,yy} + \mu W_{,xx})\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} W_{,xy}$$

gerilme ifadeleri bulunur. Kalınlık boyunca yayılı bulunan bu gerilmelerin yine kalınlık boyunca integrasyonu ile eğilme momentleri, burulma momenti ve düşey kesme kuvvetleri elde edilir.

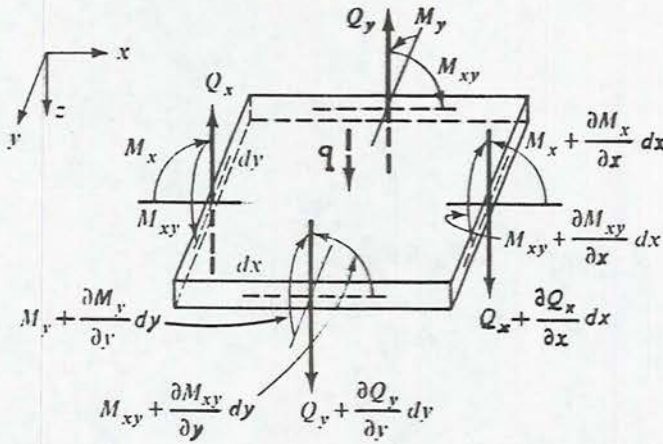
$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z \, dz = \begin{bmatrix} -D(W_{,xx} + \mu W_{,yy}) \\ -D(W_{,yy} + \mu W_{,xx}) \\ -D(1-\mu)W_{,xy} \end{bmatrix}\quad (2.4)$$

Burada,

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}\quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanan plak eğilme rijitliğidir.

2.1.1. Plaktaki gerilmelerin değişimi



şekil 2.3. Kesme kuvvetleri ve momentlerin değişimi

şekil 2.3.teki eleman için $\Sigma M_x=0$, $\Sigma M_y=0$, $\Sigma F_z=0$ denklemleri yazılırsa

$$\begin{aligned}
 M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y &= 0 \\
 M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x &= 0 \\
 Q_{x,x} + Q_{y,y} + q &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

ifadeleri elde edilir. İlk iki denklemden Q_y ve Q_x çekilerek üçüncü denkleme yerine yazılırsa,

$$M_{x,xx} + 2 M_{xy,xy} + M_{y,yy} = -q
 \tag{2.7}$$

şeklinde ince plakların eğilmesine ait diferansiyel denge denklemi, (2.4) ifadesinin (2.7) de yerine yazılması ile de

$$\nabla^4 W = q / D
 \tag{2.8}$$

şeklinde Lagrange denklemi bulunur.

2.1.2.Sınır Kosulları

(2.7) denkleminin çözümü için plak kenarlarındaki sınır koşullarının verilmesi gerekir. Pratikte en çok karşılaşılan üç sınır koşulu şöyle verilebilir.

- a) Basit mesnetlenme (Serbest oturma)
- b) Ankastre mesnetlenme
- c) Boşta kenar

Basit mesnetlenme durumunda kenar serbestçe dönebileceğinden bu tür kenarlarda normal doğrultudaki moment belirli, çökme sıfırdır.

$$W = 0 , \quad M_{nn} = \hat{M}_n$$

Ankastre mesnetlenme durumunda kenarın dönmesi tamamen engellendiğinden bu tür kenarlarda çökme ve normal doğrultudaki dönme sıfırdır.

$$W = 0 , \quad W_{,n} = 0$$

Boşta kenar durumunda normal doğrultudaki moment ile Kirchhoff eşdeğer kesme kuvveti belirlidir. Örneğin $x=a$ sabit kenarı için eşdeğer kesme kuvveti ve momenti,

$$V_x = Q_x + M_{xy,y} = \hat{V}_x, \quad M_{nn} = \hat{M}_n$$

olarak yazabiliriz.

2.2.Çubuk Denklemleri

Çubuğa ait diferansiyel denge denklemi, kinematik bağıntı ve sınır koşulları topluca,

$$-M_{,ss} - q = 0$$

$$EI W_{,ss} + M = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -W = -\hat{W} \\ W = \hat{W} \end{array} \right\} \text{Geometrik s.k.} \quad (2.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} -M = -\hat{M} \\ T = \hat{T} \end{array} \right\} \text{Dinamik s.k.}$$

olarak yazılabilir (Inan, 1967).

Burada, W çubugun elastik egrisini, M çubuk momentini, EI eğilme rijitliğini, q yayılı yükü göstermektedir. Çubugun yatay düzlem içinde herhangi bir (s) doğrultusunda bulunduğu ve doğru eksenli çubukta Bernoulli-Navier hipotezinin geçerli olduğu kabul edilmiştir.

2.3.ince Plak Fonksiyonellerinin Elde Edilmesi

Fiziksel olaylar, diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile ifade edilebildiği gibi, bazı sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlar arasında, bir fonksiyoneli stasyoner yapan fonksiyonun bulunmasına da getirilebilir. Fonksiyonellerin stasyoner özelliklerinin incelendiği matematik dalına değişim yöntemleri veya varyasyonel hesap adı verilmektedir.

Bir fiziksel olaya ait fonksiyonel belli ise bu fonksiyonelden fiziksel olaya ait diferansiyel denklem ve sınır koşulları hesaplanabileceği gibi aynı şekilde diferansiyel denklem ve sınır koşulları belli ise bunlara eşdeğer fonksiyonel de hesaplanabilir. Genellikle fonksiyonelin elde edilmesi daha güçtür. Değişim yöntemlerini kullanmanın yararları kısaca şöyle özetlenebilir.

1. Fonksiyonel, fizik bir anlama sahip olduğundan koordinat dönüşümlerinden etkilenmez.
2. Karmaşık problemlerin diferansiyel denklemleri ile sınır koşullarının elde edilmesinde güvenilir bir yoldur.
3. Probleme ait diferansiyel denklem takımını verilen sınır koşulları altında çözmek güçse; Ritz, Galerkin, Sonlu elemanlar gibi yaklaşık bir çözüm bulunabilir.

Bu bölümde, ince plaklara ait fonksiyonel değişim yöntemleri kullanılarak elde edilecektir.

ince plakların eğilmesine ait (2.7) diferansiyel denge denklemleri, (2.4) kesit tesirleri ve sınır koşulları topluca,

$$\begin{aligned}
 - M_{x,xx} - M_{y,yy} - 2 M_{xy,xy} &= q \\
 - M_x - D (W_{,xx} + \mu W_{,yy}) &= 0 \\
 - M_y - D (W_{,yy} + \mu W_{,xx}) &= 0 \\
 - M_{xy} - D (1-\mu) W_{,xy} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\left. \begin{aligned}
 T &= \hat{T} \\
 -M &= -\hat{M}
 \end{aligned} \right\} \text{Dinamik Sınır Koşulları}$$

$$\left. \begin{aligned}
 W &= \hat{W} \\
 -W &= -\hat{W}
 \end{aligned} \right\} \text{Geometrik Sınır Koşulları}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki T , M ve W çok bileşenli terimlerinin iç çarpımlarına ait açık ifadeleri (2.16) da verilmiştir. Şapkalı terimler, sınırda verilen değerleri göstermektedir. (2.10) ifadesini

$$\underline{Q} = \underline{P} \underline{u} - \underline{f} \tag{2.11}$$

şeklinde operatör formda yazabiliriz. (2.11) ifadesindeki $\underline{P} \underline{u}$ vektörünün terimleri fiziksel açıdan enerji anlamı taşımaktadır. Ürnegün herhangi bir moment ifadesi yine kendisi ile ilgili eğrilik ile çarpılmaktadır. \underline{Q} operatörü açık formda şöyle verilebilir.

$$\begin{bmatrix}
 0 & P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 P_{31} & P_{32} & P_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 P_{41} & 0 & 0 & P_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 W \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 \hline
 W_0 \\
 W'_0 \\
 M \\
 T
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 q \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hline
 \hat{T} \\
 -\hat{M} \\
 \hat{W}' \\
 -\hat{W}
 \end{bmatrix}
 \quad (2.12)$$

Burada,

$$P_{12} = -D [(\cdot)_{,xx} + \nu (\cdot)_{,yy}]$$

$$P_{13} = -D [(\cdot)_{,yy} + \nu (\cdot)_{,xx}]$$

$$P_{14} = -D (1-\nu) (\cdot)_{,xy}$$

$$P_{22} = P_{33} = -D, \quad P_{23} = P_{32} = -\nu D$$

$$P_{44} = -0.5 D (1-\nu) \quad (2.13)$$

$$U_2 = \frac{1}{\mathcal{F}_x} = \frac{M_x - \nu M_y}{D (1-\nu^2)}$$

$$U_3 = \frac{1}{\mathcal{F}_y} = \frac{M_y - \nu M_x}{D (1-\nu^2)}$$

$$U_4 = \frac{2}{\mathcal{F}_{xy}} = \frac{2 M_{xy}}{D (1-\nu^2)}$$

tanımları yapılmıştır.

2.3.1. Kirchhoff ince plak fonksiyonelleri

Plak denklemlerini ve sınır koşullarını topluca gösteren (2.11) deki \underline{Q} 'nun potansiyel operatör olması için

$$\langle d\underline{Q}(\underline{u}, \underline{\bar{u}}), \underline{u}^* \rangle = \langle d\underline{Q}(\underline{u}, \underline{u}^*), \underline{\bar{u}} \rangle \quad (2.14)$$

eşitliği sağlanmalıdır (Oden and Reddy, 1976). Burada $d\underline{Q}(\underline{u}, \underline{\bar{u}})$, \underline{Q} 'nun Gâteaux türevi olup,

$$d\underline{Q}(\underline{u}, \underline{\bar{u}}) = \begin{bmatrix} \bar{M}_{x,xx} - \bar{M}_{y,yy} - 2\bar{M}_{xy,xy} \\ \bar{M}_x - D(\bar{W}_{,xx} + \nu \bar{W}_{,yy}) \\ \bar{M}_y - D(\bar{W}_{,yy} + \nu \bar{W}_{,xx}) \\ \bar{M}_{xy} - D(1-\nu) \bar{W}_{,xy} \\ \bar{T} \\ \bar{M} \\ \bar{W}' \\ \bar{W} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

olarak hesaplanabilir. (2.15) de gösterilen $d\underline{Q}(\underline{u}, \underline{\bar{u}})$ ile (2.12) de verilen \underline{u} vektörünün iç çarpımına ait ilk dört terim, sözü edilen vektörlerin ilk dört elemanlarının karşılıklı çarpımlarının, plak sınırları ile belirlenmiş bölgedeki integralidir. Son dört terim ise sınır koşulları ile ilgili olup,

$$[T, W] = [(M_{x,x} + M_{xy,y})n_x + (M_{y,y} + M_{xy,x})n_y, W] \quad (2.16)$$

$$[M, W] = [M_x, n_x W, x] + [M_y, n_y W, y] + [M_{xy}, (n_x W, y + n_y W, x)]$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada n_x ve n_y eleman sınırındaki normal vektöre ait doğrultu kosinüsleridir. Köşeli parantez iç çarpımı göstermektedir. Sınırdaki tanımlanan iç çarpımlar σ , ϵ ve o alt indisleri ile gösterilmişlerdir. Indislerin anlamları aşağıda verilmiştir.

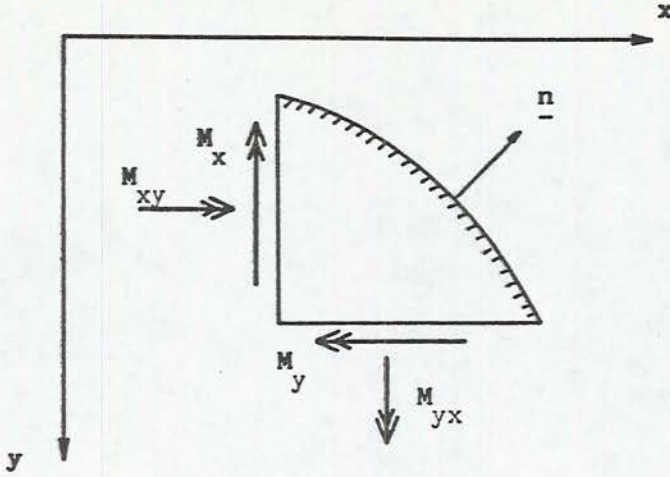
$$\begin{aligned} [,]_{\sigma} &= \text{Dinamik sınır koşulunun tanımlandığı sınırdaki} \\ [,]_{\epsilon} &= \text{Geometrik sınır koşulunun tanımlandığı sınırdaki} \\ [,]_o &= \text{Bütün sınırdaki geçerli} \end{aligned} \quad \dots (2.17)$$

(2.17) deki tanıma göre,

$$[,]_o = [,]_{\sigma} + [,]_{\epsilon} \quad (2.18)$$

yazılabilir.

(2.16) da verilen ifadelerden birincisi Şekil 2.4.te gösterilen plak sınırında kesme kuvvetinin yaptığı işi, ikincisi ise momentlerin yaptığı işi göstermektedir. Bu tanımlamalara göre değişim yöntemiyle ilgili hesaplamalar sonucunda (2.14) eşitliği sağlanmaktadır. Hesaplara ait ayrıntı Ek 2 de verilmiştir.



Şekil 2.4 Plak sınırındaki denge

Dolayısıyla Q operatörü potansiyel bir operatördür.

(2.12) ifadesine karşı gelen $I(\underline{u})$ fonksiyoneli

$$I(\underline{u}) = \int_0^1 \langle Q(s\underline{u}), \underline{u} \rangle ds \quad (2.19)$$

integrali ile bulunabilir (Oden and Reddy 1976).

Burada s , skaler bir büyüklüktür. Yukarıdaki integral alınırsa fonksiyonel için üç ayrı ifade bulunur.

$$\begin{aligned} I_1(u) = & -[W,_{xx}, M_x] - [W,_{yy}, M_y] - 2[W,_{xy}, M_{xy}] \\ & - [q, W] - \frac{6}{E h^3} ([M_x, M_x] + [M_y, M_y] \\ & - 2\nu [M_x, M_y] + 2(1+\nu)[M_{xy}, M_{xy}]) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$- [\hat{T}, W]_{\sigma} + [\hat{M}, W']_{\sigma} - [(\hat{W}-\hat{W}'), M]_{\epsilon} + [(\hat{W}-\hat{W}'), T]_{\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
I_2(u) = & - [(M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2 M_{xy,xy}) , W] \\
& - [q , W] - \frac{6}{E h^3} ([M_x , M_x] + [M_y , M_y] \\
& - 2\mu [M_x , M_y] + 2(1+\mu)[M_{xy} , M_{xy}]) \\
& - [(\hat{T}-\hat{T}) , W]_{\sigma} - [(\hat{M}-\hat{M}) , W]_{\sigma} - [\hat{W}' , M]_{\epsilon} + [\hat{W} , T]_{\epsilon}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
I_3(u) = & [W_{,x} , M_{x,x}] + [W_{,y} , M_{y,y}] + [W_{,x} , M_{xy,y}] \\
& + [W_{,y} , M_{xy,x}] - [q , W] - \frac{6}{E h^3} ([M_x , M_x] \\
& + [M_y , M_y] - 2\mu [M_x , M_y] + 2(1+\mu)[M_{xy} , M_{xy}]) \\
& - [\hat{T} , W]_{\sigma} - [(\hat{M}-\hat{M}) , W]_{\sigma} - [\hat{W}' , M]_{\epsilon} - [(\hat{W}-\hat{W}) , T]_{\epsilon}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

(2.4) teki momentlerin W 'nin türevleri cinsinden ifadeleri (2.20) deki $I_1(u)$ Kirchhoff fonksiyoneliinde yerine konarak, sadeleştirme yapılırsa sınır koşulları sağlanmak üzere literatürde bilinen plak enerji fonksiyonu,

$$\pi = .5 D \iint (\nabla^2 W)^2 + 2(1-\mu)[W_{,xy}^2 - W_{,xx}W_{,yy}] dA - \iint W dA \tag{2.23}$$

elde edilir.

2.4.Kiriş Fonksiyonelleri

2.9 da verilen ifadelere karşı gelen üç ayrı fonksiyonel,

$$\begin{aligned}
 I_1(u) = & - [M,_{ss} , W] - [q , W] \\
 & - [\frac{M}{2EI} , M] + [(\hat{T}-\hat{T}) , W]_{\sigma} \quad (2.24) \\
 & - [(\hat{M}-\hat{M}) , \hat{W}']_{\sigma} - [\hat{W}' , M]_{\epsilon} + [\hat{W} , T]_{\epsilon}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(u) = & - [M , W,_{ss}] - [q , W] \\
 & - [\frac{M}{2EI} , M] + [(\hat{W}'-\hat{W}') , M]_{\epsilon} \quad (2.25) \\
 & - [(\hat{W}-\hat{W}) , T]_{\epsilon} - [\hat{T} , W]_{\sigma} + [\hat{M} , \hat{W}']_{\sigma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(u) = & [M,_{s} , W,_{s}] - [\frac{M}{2EI} , M] - [q , W] - [T , W]_{\sigma} \\
 & - [(\hat{M}-\hat{M}) , \hat{W}']_{\sigma} + [(\hat{W}-\hat{W}) , T]_{\epsilon} \quad (2.26) \\
 & - [\hat{W}' , M]_{\epsilon} - [\hat{W} , \hat{T}]_{\sigma}
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir (Aköz, 1985). σ ve ϵ alt indisleri plakta olduğu gibi dinamik ve geometrik sınır koşullarının belirlendiği kesitlerde hesaplanacak terimleri göstermektedir. Buradaki iç çarpım bölgeleri plaktakinden bir mertebe daha küçüktür.

3.

ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**3.1. Rayleigh-Ritz Yöntemi**

Bu yöntem, gerçek deplasman fonksiyonu (bilinemediği için) yerine sınır koşullarını sağlayan, çeşitli fonksiyonların -belirsiz katsayılarla çarpılmış- toplamını yaklaşık deplasman fonksiyonu olarak alma esasına dayanır. Yöntemde önce belirsiz katsayıları bulunan yaklaşım fonksiyonunun türevleri alınarak sistemin potansiyel enerji ifadesi gibi bir fonksiyonelde yerine yazılır. Bundan sonra fonksiyonelin her bir katsayıya göre türevlerinin alınması ile bulunan cebirsel denklem takımı çözümlenerek katsayılar belirlenir. Fonksiyon sayısının artması ile sonuçlardaki yaklaşım da artar. Sınır koşullarının bulunmasında sistematik bir yol olmayışı ve her problem için yeni fonksiyonların bulunması gereği yöntemin bilgisayara uyarlanmasına engel olur.

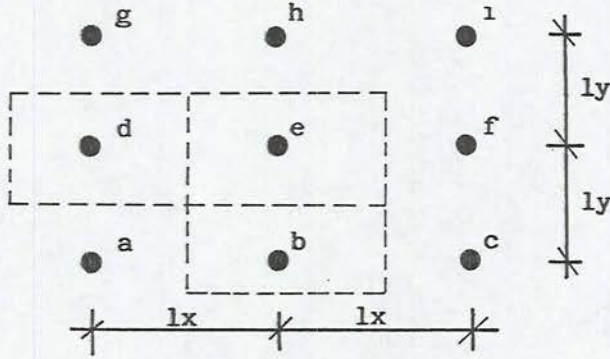
Bu yöntemin uygulanabilmesi için probleme ait fonksiyonelin önceden bilinmesi gereklidir. Pratikteki problemlerin çoğunda diferansiyel bünye denklemi ve sınır koşulları bilinir. Fonksiyonelin elde edilmesi oldukça güç olabilir.

3.2. Varyasyonel Türev Yöntemi

Yöntem, 2.22 fonksiyonelindeki bütün birinci mertebeli türevler yerine şekil 3.1 de görülen biçimde fark ifadeleri yazma esasına dayanır.

Örneğin, $(W_{,x})_e = (W_f - W_e) / l_x$, $(W_{,y})_e = (W_h - W_e) / l_y$

yazılabilir. Yöntemin sonlu farklara benzer yapıda olması nedeni ile uygulamada özellikle sınır koşullarınının sağlatılması güçtür. Program yazılımı zor olup yöntem yeterli esnekliğe sahip değildir.



Sekil 3.1 Fark ifadeleri

(2.22) Fonksiyoneliini ekstremum yapacak şekilde düğüm değişkenlerine göre türev alınarak sifira eşitlendiğinde, her bir düğümde yazılacak karma fark denklemleri bulunur.

$$\begin{aligned} ((W_e - W_d)_d + (W_e - W_f)_e) l_y / l_x \\ - (M_x - \rho M_y)_e l_x l_y / D(1 - \rho^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((W_e - W_b)_b + (W_e - W_h)_e) l_y / l_x \\ - (M_y - \rho M_x)_e l_x l_y / D(1 - \rho^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (W_g - W_d)_d + (W_c - W_b)_b - (W_f + W_h - 2 W_e)_e \\ - 2 l_x l_y M_{xye} / (D(1 - \rho^2)) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} ((M_{xe} - M_{xd})_d + (M_{ye} - M_{yb})_b + (M_{xe} - M_{xf})_e \\ + (M_{ye} - M_{yh})_e) l_y / l_x + (M_{xyg} - M_{xyd})_d \\ + (M_{xyc} - M_{xyb})_b - (M_{xyf} + M_{xyh} - 2 M_{xye})_e = q l_x l_y \end{aligned}$$

Herhengi bir değişkene ait terimler sol, alt ve sözkonusu düğüme göre yazılan türev ifadelerinden gelir. Parantez dışındaki indisler terimlerin hangi düğümden geldiğini göstermektedir. Denklemler yazılırken olmayan düğümlere ait terimler sıfır alınır.

3.3.Sonlu Elemanlar Yöntemi

Günümüzde pek gök mühendislik alanındaki iki veya g boyutlu problemlerde yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar yöntemi (SE) şu aşamalardan oluşmaktadır.

1. Yapı veya sistemin elemanlara ayrılması; elemanlar düğüm noktası adı verilen noktalarla birbirine bağlanırlar.
2. Bilinmeyenlerin eleman üzerindeki değişimlerinin, şekil fonksiyonları yardımı ile düğümlerdeki bilinmeyenler cinsinden ifade edilmesi.
3. Elemana ait potansiyel enerjinin minimum yapılması ile eleman rijitlik matrisinin elde edilmesi.
4. Her bir eleman için elde edilen rijitlik matrislerinin, düğüm noktalarındaki bağlantılar göz önüne alınarak birleştirilmesi ve bu şekilde tüm yapı veya sisteme ait (K) rijitlik matrisinin kurulması.
5. Sınır koşulları dikkate alınarak $Ku=f$ tipindeki denklem takımının gzlmesi

Sonlu Elemanlar Yöntemi, varyasyon prensiplerine dayanan yaklaşık bir gözüm tekniğidir. Ritz yönteminin eleman seviyesinde bilgisayara uyarlanmış bir şekli olarak da

düşünülebilir. Ritz yöntemindeki belirsiz katsayılar yerine düğüm bilinmeyenleri söz konusudur. Bu bilinmeyenleri elde etmek için eleman denklemleri, elemanlar arasındaki süreklilik bozulmayacak şekilde toplanır. Sınır şartları işlendikten sonra denklem takımı çözümlenerek düğüm bilinmeyenleri elde edilir.

3.3.1. Eleman seçim kriterleri

Eleman tipi, geometrik şekli ve davranışı karakterize eden şekil fonksiyonu ile belirlenir. Her elemanda tipine göre değişen sayıda ve konumda düğüm noktası bulunur.

Eleman sayısının artması ile doğru sonuca yakınsama için şu koşulların sağlanması gerekir (Cook, 1974).

1. Temel bilinmeyenler eleman üzerinde sürekli olmalı.
2. Sabit gerilme veya şekil değiştirme durumu ifade edilebilmeli. Bu koşulun sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek üzere patch test (yama testi) adı verilen bir test uygulanır.
3. Rijit cisim hareketinde elemanlar üzerinde şekil değiştirme meydana gelmemeli.
4. Monoton ve hızlı yaklaşım sağlayabilmek için her zaman mümkün olmamakla birlikte elemanlar arasında uygunluk sağlanmalıdır (Compatibility). Bu koşul, bilinmeyenlerin ve türevlerinin eleman sınırlarında sürekli olmasını gerektirir. Bunun amaçla seçilen şekil fonksiyonlarının fonksiyoneldeki en yüksek mertebeden bir aşağı mertebede sürekli olması gerekir.

5. Elemanların sonsuz küçülmesiyle fonksiyoneldeki türev ifadelerinin sabite dönüşmesi durumunda şekil fonksiyonlarının bu sabit türevleri tam olarak vermesi gerekir. Bu koşul, fonksiyonel içindeki en yüksek mertebeli türevin şekil fonksiyonu içinde bulunmasıyla sağlanabilir. Tamlik (Completeness) koşulu olarak da bilinen bu koşul, eleman üzerinde seçilen herhangi bir doğrultu boyunca bilinmeyenlerin değişiminin seçilen doğrultunun sistem koordinatlarına göre durumu ne olursa olsun bir tam polinom olmasını garanti eder.

3.4.Plakların Sonlu Eleman Formulasyonu

$I_3(u)$ plak fonksiyonelinde M_x , M_y , M_{xy} ve W gibi dört tane bilinmeyen görülmektedir. Herhangi bir eleman için bilinmeyenlerle bilinmeyenlerin türevlerini şekil fonksiyonları yardımı ile düğüm noktalarındaki değerler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz. M sıra ile (M_x, M_y, M_{xy}, W) yi gösteren sembolik bir büyüklük olmak üzere,

$$\begin{aligned} M &= N_i M_i & i=1, \dots, n \\ M_{,x} &= N_{i,x} M_i & " \\ M_{,y} &= N_{i,y} M_i & " \end{aligned} \quad (3.2)$$

yazabiliriz. Burada N_i ler elemana ait şekil fonksiyonlarını, M_i ler ise nodal büyüklükleri göstermektedir. (3.2) ifadesindeki i indisi üzerinde düğüm noktası sayısındanca toplama vardır.

Eleman denklemlerini bulmak için bilinmeyenler ve türevlerine ait ifadeler $I_3(u)$ fonksiyonelinde yerine konur, ve bu ifade ekstremum olacak şekilde bilinmeyenlerin düğüm değerleri olan M_{xi} , M_{yi} , M_{xyi} , W_i lere göre türev alınarak sifıra eşitlenirse

$$\begin{aligned}
 A_{ik} W_k - S B_{ik} (M_{xk} - \mu M_{yk}) &= 0 \\
 C_{ik} W_k - S B_{ik} (M_{yk} - \mu M_{xk}) &= 0 \\
 (D_{ik} + D_{ki}) W_k - 2 (1+\mu) S B_{ik} M_{xyk} &= 0 \\
 A_{ik} M_{xk} + C_{ik} M_{yk} + (D_{ik}+D_{ki}) M_{xyk} &= B_{ik} q_k
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

sonlu eleman denklemleri bulunur. Burada, $S=6/(Eh^3)$,

$$\begin{aligned}
 A_{ik} &= [N_{i,x} , N_{k,x}] \\
 B_{ik} &= [N_i , N_k] \\
 C_{ik} &= [N_{i,y} , N_{k,y}] \\
 (D_{ik}+D_{ki}) &= [N_{i,y} , N_{k,x}] + [N_{i,x} , N_{k,y}]
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

tanımlamaları yapılmıştır. Ayrıca i üzerinde düğüm bilinmeyenleri sayısınca, k üzerinde ise düğüm noktası sayısınca toplama vardır. Burada tanımlanan A_{ik} , B_{ik} ve C_{ik} katsayı matrisleri sabit ve değişken kalınlıklı plakların her ikisi için de simetriktir. Dolayısı ile eleman formülasyonlarının yapıldığı bölüm 3.5 de sözü edilen katsayı matrislerinin yalnızca diyagonal üstü terimleri verilmiştir

3.4.1. Değişken kalınlıklı plakların SE formülasyonu

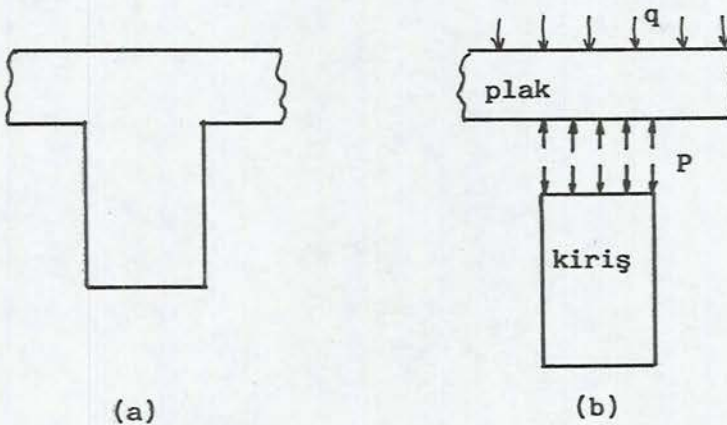
Plakların değişken kalınlıklı olması halinde enerji fonksiyonelindeki rijitlik terimleri iç çarpım dışına çıkartılamayacağından, $(1/Eh^3)$ terimlerinin değişimi için de bir kabul yapmak gerekmektedir. Çubuklar için yapılan bir çalışmadan (Aköz, 1986) yararlanılarak bu rijitlikler, düğüm bilinmeyenlerini tanımlamakta kullanılan şekil fonksiyonları ile denklem 3.5 deki gibi alınmışlardır.

$$\frac{1}{Eh^3} = N_1D_1 + N_2D_2 + \dots = N_i D_i \quad (3.5)$$

Burada D_i ler değişken kalınlıklı plakta nodlardaki rijitlik değerleridir. Dolayısı ile değişken kalınlıklı plakların hesabı için yalnızca B_{ik} katsayılarının yeniden hesaplanması yeterli olmaktadır.

3.4.2. Plak kiriş sistemi için SE formülasyonu

Şekil 3.2 den görüldüğü gibi plak kiriş sisteminin kirişe gelen burulma momentini aktarmadığı, yalnızca lateral yük taşıdığı kabul edilirse,

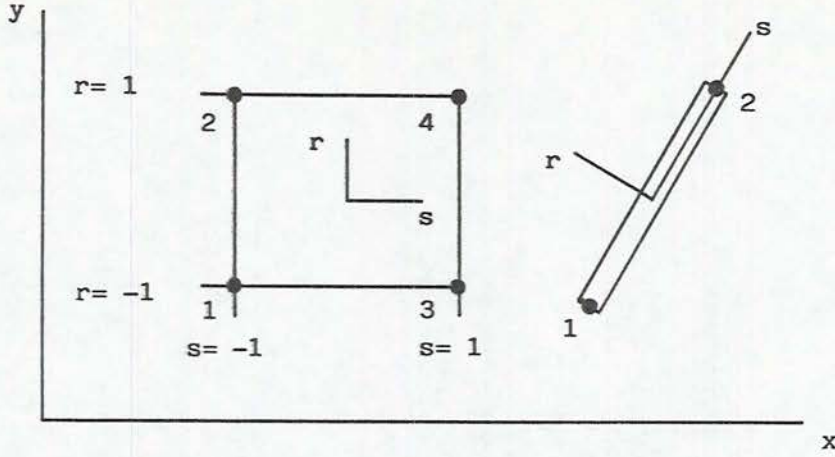


Şekil 3.2. Plak kiriş sistemi

sisteme ait bilinmeyen, plakla kiriş arasındaki P etkileşim kuvvetidir. Sisteme ait fonksiyonel denklem (2.22) ve (2.26) nin cebrik toplamı olarak elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
 I_3(u) = & [W_{,x} , M_{x,x}] + [W_{,y} , M_{y,y}] + [W_{,x} , M_{xy,y}] \\
 & + [W_{,y} , M_{xy,x}] - [q , W] - \frac{6}{E h^3} ([M_x , M_x] \\
 & + [M_y , M_y] - 2\mu [M_x , M_y] + 2(1+\mu)[M_{xy} , M_{xy}]) \\
 & - [\hat{T} , W]_{\sigma} - [(M-\hat{M}) , W']_{\sigma} - [\hat{W}' , M]_{\epsilon} + [(\hat{W}-\hat{W}) , T]_{\epsilon} \\
 & + [M_{,s} , W_{,s}]^k - \left[\frac{M}{2EI} , M \right]^k - [q , W]^k - [T , W]_{\sigma}^k \\
 & - [(M-\hat{M}) , W']_{\sigma}^k + [(\hat{W}-\hat{W}) , T]_{\epsilon}^k \\
 & - [\hat{W}' , M]_{\epsilon}^k - [\hat{W} , T]_{\sigma}^k \quad \dots(3.6)
 \end{aligned}$$

Bu ifadede şekil 3.2. de gösterilen P etkileşim kuvveti, kiriş ve plak için ters yönde etkidüğinden bulunmamaktadır. Ayrıca kirişe ait iç çarpım terimlerinin üzerine k harfi eklenmiştir.



Şekil 3.3. Plak ve kiriş elemanları

Plak kiriş sistemi şekil 3.3. de gösterildiği gibi alt bölgelere ayrılır. Bu bölgelerde M_x , M_y , M_{xy} plak momentleri, M kiriş momenti ve W ortak çökme değerleri bilinmeyen olarak görülmektedir. Plakların sonlu eleman formülasyonunda yapıldığı gibi plak ve kirişe ait bilinmeyenlerin değişimi şekil fonksiyonları yardımı ile düğümlerdeki değerler cinsinden ifade edilir (dk.3.2), daha sonra bu ifadeler (3.6) fonksiyonelinde yerine yazılır ve fonksiyoneli ekstremum yapacak şekilde bilinmeyenlerin düğüm değerlerine göre türev alınarak sıfıra esitlenirse,

$$I_{,M_{xi}} = A_{ik} W_k - S B_{ik} (M_{xk} - \nu M_{yk}) = 0$$

$$I_{,M_{yi}} = C_{ik} W_k - S B_{ik} (M_{yk} - \nu M_{xk}) = 0$$

$$I_{,M_{xyi}} = (D_{ik} + D_{ki}) W_k - 2(1+\nu) S B_{ik} M_{xyk} = 0$$

$$I_{,W_i} = A_{ik} M_{xk} + C_{ik} M_{yk} + (D_{ik} + D_{ki}) M_{xyk}$$

$$+ g_{ik} M_k = B_{ik} q_k$$

$$I_{,M_i} = f_{ik} W_k - \frac{1}{EI} g_{ik} M_k = 0$$

(3.7)

sonlu eleman denklemleri elde edilir. Buradaki A_{ik} , B_{ik} , C_{ik} ve D_{ik} terimlerinin açık ifadeleri dk.3.4 te gösterilmiştir. f_{ik} ve g_{ik} terimleri ise aşağıda tanımlanacağı üzere kirişe ait şekil fonksiyonları ve bu fonksiyonların türevlerinin iç çarpımlarından oluşmaktadır.

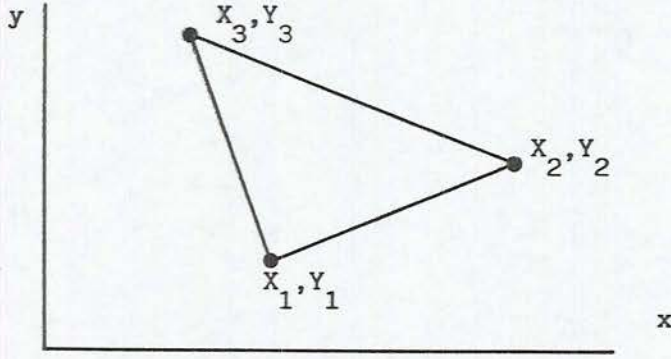
$$f_{ik} = [N_i , N_k] , \quad g_{ik} = [N_{i,s} , N_{k,s}] \quad (3.8)$$

plaklarda olduğu gibi i üzerinde düğüm bilinmeyenleri sayıncı, k üzerinde ise düğüm noktası sayıncı toplama vardır.

3.5. Eleman Tipleri

3.5.1. Üçgen plak elemanı

Şekil 3.4 de görülen üçgen plak elemamda M_x , M_y , M_{xy} ve W değişkenleri için kabul edilen lineer şekil fonksiyonları ve bu fonksiyonlara ait alan integralleri denklem 3.9 ve 3.11 de verilmiştir.



Şekil 3.4 üçgen plak elemanı

$$N_1 = [x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] / (2A)$$

$$N_2 = [x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] / (2A) \quad (3.9)$$

$$N_3 = [x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] / (2A)$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Burada A üçgen alanını göstermektedir. Alan integrallerinin gösterilmesinde,

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

şeklinde kısaltma yapılmıştır.

$$A_{ik} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} y_{23}^2 & y_{23} y_{31} & y_{23} y_{12} \\ \text{Sim.} & y_{31}^2 & y_{31} y_{12} \\ & & y_{12}^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{ik} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} x_{32}^2 & x_{32} x_{13} & x_{32} x_{21} \\ \text{Sim.} & x_{13}^2 & x_{13} x_{21} \\ & & x_{21}^2 \end{bmatrix}$$

(3.11)

$$D_{ik} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} x_{32} y_{23} & x_{32} y_{31} & x_{32} y_{12} \\ x_{13} y_{23} & x_{13} y_{31} & x_{13} y_{12} \\ x_{21} y_{23} & x_{21} y_{31} & x_{21} y_{12} \end{bmatrix}$$

$$B_{ik} = \frac{1}{12A} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \text{Sim.} & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Değişken kesitli plaklara ait B_{ik} alan integralleri

$$B(1,1) = A [6 D_1 + 2 D_2 + 2 D_3] / 60$$

$$B(1,2) = A [2 D_1 + 2 D_2 + D_3] / 60$$

$$B(1,3) = A [2 D_1 + D_2 + 2 D_3] / 60$$

(3.12)

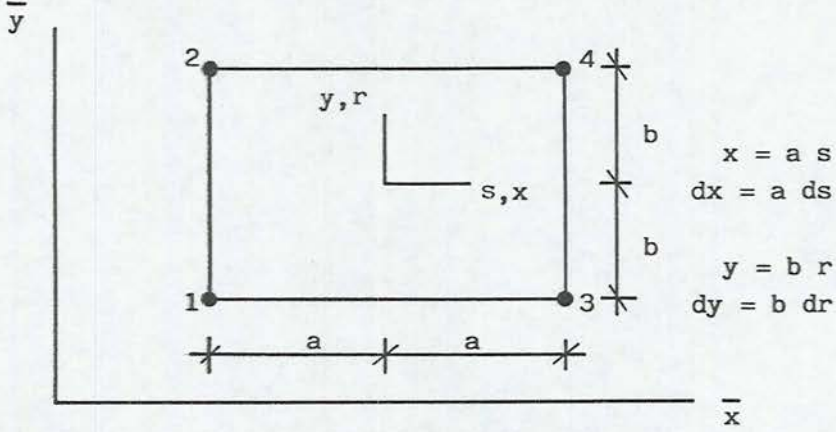
$$B(2,2) = A [2 D_1 + 6 D_2 + 2 D_3] / 60$$

$$B(2,3) = A [D_1 + 2 D_2 + 2 D_3] / 60$$

$$B(3,3) = A [2 D_1 + 2 D_2 + 6 D_3] / 60$$

3.5.2. Dikdörtgen plak elemanı

Şekil 3.5 de görülen dikdörtgen, plak eğilme elemanında değişkenler için kabul edilen bilineer şekil fonksiyonları ile bu fonksiyonlara ait alan integralleri denklem 3.13 ve 3.14 de verilmiştir.



Şekil 3.5 Dikdörtgen plak elemanı
Lokal ve global koordinatlar.

$$N_1 = (1 - s)(1 - r) / 4$$

$$N_2 = (1 - s)(1 + r) / 4$$

(3.13)

$$N_3 = (1 + s)(1 - r) / 4$$

$$N_4 = (1 + s)(1 + r) / 4$$

$$A_{ik} = \frac{b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{ik} = \frac{a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(3.14)

$$\begin{aligned}
 D_{ik} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 B_{ik} &= \frac{A}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Değişken kesitli plaklara ait B_{ik} alan integralleri

$$B(1,1) = A [9 D_1 + 3 D_2 + 3 D_3 + D_4] / 144$$

$$B(1,2) = A [3 D_1 + 3 D_2 + D_3 + D_4] / 144$$

$$B(1,3) = A [3 D_1 + D_2 + 3 D_3 + D_4] / 144$$

$$B(1,4) = A [D_1 + D_2 + D_3 + D_4] / 144$$

$$B(2,2) = A [3 D_1 + 9 D_2 + D_3 + 3 D_4] / 144$$

(3.15)

$$B(2,3) = A [D_1 + D_2 + D_3 + D_4] / 144$$

$$B(2,4) = A [D_1 + 3 D_2 + D_3 + 3 D_4] / 144$$

$$B(3,3) = A [3 D_1 + D_2 + 9 D_3 + 3 D_4] / 144$$

$$B(3,4) = A [D_1 + D_2 + 3 D_3 + 3 D_4] / 144$$

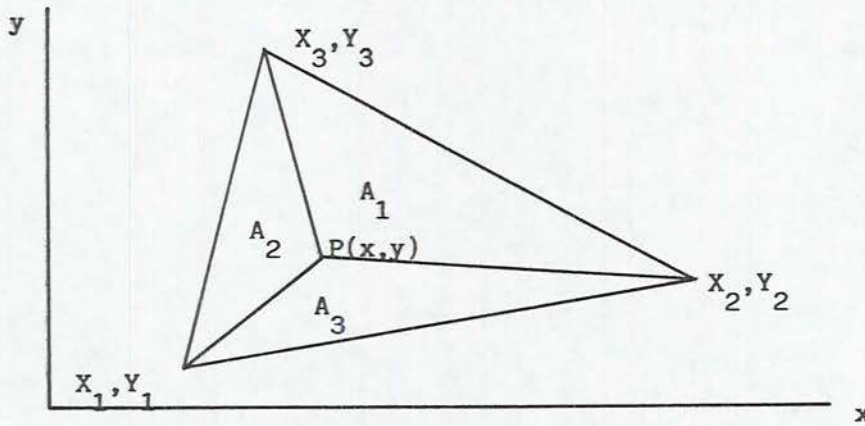
$$B(4,4) = A [D_1 + 3 D_2 + 3 D_3 + 9 D_4] / 144$$

3.5.3. Altı düğüm noktalı üçgen eleman

Üçgen elemanlara ait eleman rijitlik matrisinin hesaplanmasında üçgen (alan koordinatları) koordinat takımını kullanmak, hem şekil fonksiyonlarının daha basit bir formda ifade edilmesi ve hemde alan integrallerininin 3.16 formülü

$$\iint r_1^i r_2^j r_3^k dA = \frac{i! j! k!}{(i+j+k+2)!} 2 A \quad (3.16)$$

ile kolayca hesaplanmasına imkan sağlar (Brebbia and Ferrante, 1979). Aşağıda üçgen koordinatların tanımı ile üçgen ve kartezyen koordinatlar arasındaki bağıntılar topluca gösterilmiştir.

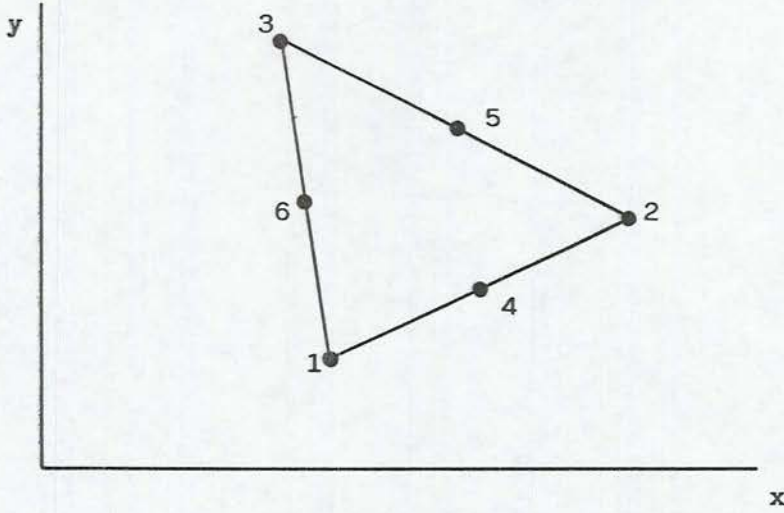


Şekil 3.6 Kartezyen ve üçgen koordinat takımı

$$r_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$r_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.17)$$

$$r_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \quad (3.17)$$



Şekil 3.7 Altı düğüm noktalı plak elemanı

$$\begin{aligned} N_1 &= r_1 (2r_1 - 1) & N_4 &= 4r_1 r_2 \\ N_2 &= r_2 (2r_2 - 1) & N_5 &= 4r_2 r_3 \\ N_3 &= r_3 (2r_3 - 1) & N_6 &= 4r_3 r_1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada, A_{ik} , C_{ik} ve D_{ik} katsayı matrisleri için ortak çarpan, $[1 / (12A)]$ dir.

$$\begin{aligned} A(1,1) &= 3y_{23}^2 & A(1,2) &= -y_{23}y_{31} \\ A(1,3) &= -y_{23}y_{12} & A(1,4) &= 4y_{23}y_{31} \\ A(1,5) &= 0 & A(1,6) &= 4y_{23}y_{12} \\ A(2,2) &= 3y_{31}^2 & A(2,3) &= -y_{31}y_{12} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
 A(2,4) &= 4 y_{31} y_{23} & A(2,5) &= 4 y_{31} y_{12} \\
 A(2,6) &= 0 & A(3,3) &= 3 y_{12}^2 \\
 A(3,4) &= 0 & A(3,5) &= 4 y_{12} y_{31} \\
 A(3,6) &= 4 y_{12} y_{23} & & (3.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(4,4) &= 8 (y_{23}^2 + y_{23} y_{31} + y_{31}^2) \\
 A(4,5) &= 4 (y_{23} y_{31} + 2 y_{23} y_{12} + y_{31}^2 + y_{31} y_{12}) \\
 A(4,6) &= 4 (y_{23}^2 + y_{23} y_{12} + y_{31} y_{23} + 2 y_{31} y_{12}) \\
 A(5,5) &= 8 (y_{31}^2 + y_{31} y_{12} + y_{12}^2) \\
 A(5,6) &= 4 (2 y_{31} y_{23} + y_{31} y_{12} + y_{12} y_{23} + y_{12}^2) \\
 A(6,6) &= 8 (y_{23}^2 + y_{23} y_{12} + y_{12}^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(1,1) &= 3 x_{32}^2 & C(1,2) &= - x_{32} x_{13} \\
 C(1,3) &= - x_{32} x_{21} & C(1,4) &= 4 x_{32} x_{13} \\
 C(1,5) &= 0 & C(1,6) &= 4 x_{32} x_{21} \\
 C(2,2) &= 3 x_{13}^2 & C(2,3) &= - x_{13} x_{21} \\
 C(2,4) &= 4 x_{13} x_{32} & C(2,5) &= 4 x_{13} x_{21} \\
 C(2,6) &= 0 & C(3,3) &= 3 x_{21}^2 \\
 C(3,4) &= 0 & C(3,5) &= 4 x_{21} x_{13}
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

$$C(3,6) = 4 x_{21} x_{32}$$

$$C(4,4) = 8 (x_{32}^2 + x_{32} x_{13} + x_{13}^2)$$

$$C(4,5) = 4 (x_{32} x_{13} + 2 x_{32} x_{21} + x_{13}^2 + x_{13} x_{21})$$

$$C(4,6) = 4 (x_{32}^2 + x_{32} x_{21} + x_{13} x_{32} + 2 x_{13} x_{21})$$

$$C(5,5) = 8 (x_{13}^2 + x_{13} x_{21} + x_{21}^2) \quad (3.20)$$

$$C(5,6) = 4 (2 x_{13} x_{32} + x_{13} x_{21} + x_{21} x_{32} + x_{21}^2)$$

$$C(6,6) = 8 (x_{32}^2 + x_{32} x_{21} + x_{21}^2)$$

$$D(1,1) = 3 x_{32} y_{23} \quad D(1,2) = - y_{23} x_{13} \quad D(1,3) = - y_{23} x_{21}$$

$$D(1,4) = 4 y_{23} x_{13} \quad D(1,5) = 0 \quad D(1,6) = 4 y_{23} x_{21}$$

$$D(2,1) = - y_{31} x_{32} \quad D(2,2) = 3 y_{31} x_{13} \quad D(2,3) = - y_{31} x_{21}$$

$$D(2,4) = 4 y_{31} x_{32} \quad D(2,5) = 4 y_{31} x_{21} \quad D(2,6) = 0$$

$$D(3,1) = - y_{12} x_{32} \quad D(3,2) = - y_{12} x_{13} \quad D(3,3) = 3 y_{12} x_{21}$$

$$D(3,4) = 0 \quad D(3,5) = 4 y_{12} x_{13} \quad D(3,6) = 4 y_{12} x_{32}$$

$$D(4,1) = 4 y_{31} x_{32} \quad D(4,2) = 4 y_{23} x_{13} \quad D(4,3) = 0 \quad (3.21)$$

$$D(4,4) = 4 (2 y_{23} x_{32} + y_{23} x_{13} + y_{31} x_{32} + 2 y_{31} x_{13})$$

$$D(4,5) = 4 (y_{23} x_{31} + 2 y_{23} x_{21} + y_{31} x_{13} + y_{31} x_{21})$$

$$D(4,6) = 4 (y_{23} x_{32} + y_{23} x_{21} + y_{31} x_{32} + 2 y_{31} x_{21})$$

$$D(5,1) = 0 \quad D(5,2) = 4 y_{12} x_{13} \quad D(5,3) = 4 y_{31} x_{21}$$

$$D(5,4) = 4 (y_{31} x_{32} + y_{31} x_{13} + 2 y_{12} x_{32} + y_{12} x_{13})$$

$$D(5,5) = 4 (2 y_{31} x_{13} + y_{31} x_{21} + y_{12} x_{13} + 2 y_{12} x_{21})$$

$$D(5,6) = 4 (2 y_{31} x_{32} + y_{31} x_{21} + y_{12} x_{32} + y_{12} x_{21})$$

$$D(6,1) = 4 y_{12} x_{32} \quad D(6,2) = 0 \quad D(6,3) = 4 y_{23} x_{21}$$

$$D(6,4) = 4 (y_{23} x_{32} + y_{23} x_{13} + y_{12} x_{32} + 2 y_{12} x_{13})$$

$$D(6,5) = 4 (2 y_{23} x_{13} + y_{23} x_{21} + y_{12} x_{13} + y_{12} x_{21})$$

$$D(6,6) = 4 (2 y_{23} x_{32} + y_{23} x_{21} + y_{12} x_{32} + 2 y_{12} x_{21})$$

... (3.21)

$$B_{ik} = \frac{A}{180} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ & & 6 & -4 & 0 & 0 \\ & & & 32 & 16 & 16 \\ & \text{Simetrik} & & & 32 & 16 \\ & & & & & 32 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Değişken kesitli plaklar için B_{ik} katsayı matrisi

$$B(1,1) = A \left[\frac{D_1}{70} - \frac{D_2}{630} - \frac{D_3}{630} + \frac{D_4}{105} + \frac{D_5}{315} + \frac{D_6}{105} \right]$$

$$B(1,2) = A \left[-\frac{D_1}{630} - \frac{D_2}{630} + \frac{105 D_3}{132300} - \frac{D_4}{315} \right] \quad (3.23)$$

$$B(1,3) = A \left[-\frac{D_1}{630} + \frac{105 D_2}{132300} - \frac{D_3}{630} - \frac{D_6}{315} \right]$$

$$B(1,4) = A \left[\frac{D_1}{105} - \frac{D_2}{315} - \frac{2 D_5}{315} \right]$$

$$B(1,5) = A \left[\frac{D_1}{315} - \frac{2 D_2}{315} - \frac{4 D_5}{315} - \frac{2 D_6}{315} \right]$$

$$B(1,6) = A \left[\frac{D_1}{105} - \frac{D_3}{315} - \frac{2 D_5}{315} \right]$$

$$B(2,2) = A \left[-\frac{D_1}{630} + \frac{D_2}{70} - \frac{D_3}{630} + \frac{D_4}{105} + \frac{D_5}{105} + \frac{D_6}{315} \right]$$

$$B(2,3) = A \left[\frac{105 D_1}{132300} - \frac{D_2}{630} - \frac{D_3}{630} - \frac{D_5}{315} \right]$$

$$B(2,4) = A \left[-\frac{D_1}{315} + \frac{D_2}{105} - \frac{2 D_6}{315} \right] \quad (3.23)$$

$$B(2,5) = A \left[\frac{D_2}{105} - \frac{D_3}{315} - \frac{2 D_6}{315} \right]$$

$$B(2,6) = A \left[\frac{D_2}{315} - \frac{2 D_4}{315} - \frac{2 D_5}{315} - \frac{4 D_6}{315} \right]$$

$$B(3,3) = A \left[-\frac{D_1}{630} - \frac{D_2}{630} + \frac{D_3}{70} + \frac{D_4}{315} + \frac{D_5}{105} + \frac{D_6}{105} \right]$$

$$B(3,4) = A \left[\frac{D_3}{315} - \frac{4 D_4}{315} - \frac{2 D_5}{315} - \frac{2 D_6}{315} \right]$$

$$B(3,5) = A \left[-\frac{D_2}{315} + \frac{D_3}{105} - \frac{2 D_4}{315} \right]$$

$$B(3,6) = A \left[-\frac{D_1}{315} + \frac{D_3}{105} - \frac{2 D_4}{315} \right]$$

$$B(4,4) = A \left[-\frac{4 D_3}{315} + \frac{8 D_4}{70} + \frac{8 D_5}{210} + \frac{8 D_6}{210} \right]$$

$$B(4,5) = A \left[-\frac{2}{315} (D_1 + D_3) + \frac{8}{210} (D_4 + D_5) + \frac{8}{315} D_6 \right]$$

$$B(4,6) = A \left[-\frac{2}{315} (D_2 + D_3) + \frac{8}{210} D_4 + \frac{8}{315} D_5 + \frac{8}{210} D_6 \right]$$

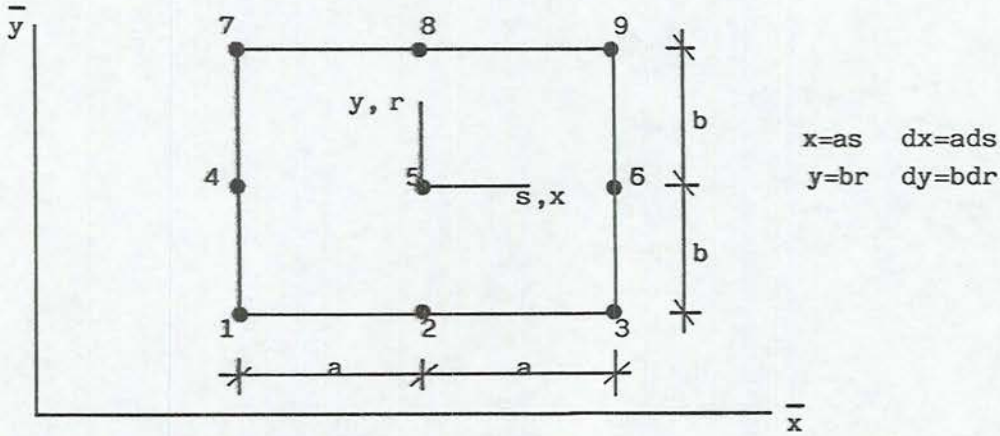
$$B(5,5) = A \left[-\frac{4 D_1}{315} + \frac{8 D_4}{210} + \frac{8 D_5}{70} + \frac{8 D_6}{210} \right] \quad (3.23)$$

$$B(5,6) = A \left[-\frac{2 D_1}{315} - \frac{2 D_2}{315} + \frac{8 D_4}{315} + \frac{8 D_5}{210} + \frac{8 D_6}{210} \right]$$

$$B(6,6) = A \left[-\frac{4 D_2}{315} + \frac{8}{210} (D_4 + D_5) + \frac{8 D_6}{70} \right]$$

3.5.4. Dokuz düğüm noktalı dikdörtgen, plak eğilme elemanı

Şekil 3.8 de görülen dokuz düğüm noktalı plak eğilme elemanında değişkenler için kabul edilen kuadratik şekil fonksiyonları ile bu fonksiyonlara ait alan integralleri aşağıda verilmiştir (Bathe, 1982).



Şekil 3.8 Dokuz düğüm noktalı dikdörtgen plak elemanı

$$N_1 = (s - s^2)(r - r^2) / 4$$

$$N_2 = (s^2 - 1)(r - r^2) / 2$$

$$N_3 = (s + s^2)(r^2 - r) / 4$$

$$N_4 = (s^2 - s)(1 - r^2) / 2$$

$$N_5 = (1 - s^2)(1 - r^2)$$

(3.24)

$$N_6 = (s^2 + s)(1 - r^2) / 2$$

$$N_7 = (s^2 - s)(r^2 + r) / 4$$

$$N_8 = (1 - s^2)(r^2 + r) / 2$$

$$N_9 = (s^2 + s)(r^2 + r) / 4$$

$$A_{ik} = \begin{bmatrix} 28 & -32 & 4 & 14 & -16 & 2 & -7 & 8 & -1 \\ & 64 & -32 & -16 & 32 & -16 & 8 & -16 & 8 \\ & & 28 & 2 & -16 & 14 & -1 & 8 & -7 \\ & & & 112 & -128 & 16 & 14 & -16 & 2 \\ & & & & 256 & -128 & -16 & 32 & -16 \\ & & & & & 112 & 2 & -16 & 14 \\ \text{Simetrik} & & & & & & 28 & -32 & 4 \\ & & & & & & & 64 & -32 \\ \text{Çarpan, } A/(360 a^2) & & & & & & & & 28 \end{bmatrix}$$

... (3.25)

$$C_{ik} = \begin{bmatrix} 28 & 14 & -7 & -32 & -16 & 8 & 4 & 2 & -1 \\ & 112 & 14 & -16 & -128 & -16 & 2 & 16 & 2 \\ & & 28 & 8 & -16 & -32 & -1 & 2 & 4 \\ & & & 64 & 32 & -16 & -32 & -16 & 8 \\ & & & & 256 & 32 & -16 & -128 & -16 \\ & & & & & 64 & 8 & -16 & -32 \\ \text{Simetrik} & & & & & & 28 & 14 & -7 \\ & & & & & & & 112 & 14 \\ \text{Çarpan, } A/(360 b^2) & & & & & & & & 28 \end{bmatrix}$$

... (3.26)

$$D_{ik} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 9 & -12 & 3 & 12 & -16 & 4 & -3 & 4 & -1 \\ 12 & 0 & -12 & 16 & 0 & -16 & -4 & 0 & 4 \\ -3 & 12 & -9 & -4 & 16 & -12 & 1 & -4 & 3 \\ -12 & 16 & -4 & 0 & 0 & 0 & 12 & -16 & 4 \\ -16 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -16 \\ 4 & -16 & 12 & 0 & 0 & 0 & -4 & 16 & -12 \\ 3 & -4 & 1 & -12 & 16 & -4 & -9 & 12 & -3 \\ 4 & 0 & -4 & -16 & 0 & 16 & -12 & 0 & 12 \\ -1 & 4 & -3 & 4 & -16 & 12 & 3 & -12 & 9 \end{bmatrix} \dots (3.27)$$

$$B_{ik} = \begin{bmatrix} 16 & 8 & -4 & 8 & 4 & -2 & -4 & -2 & 1 \\ & 64 & 8 & 4 & 32 & 4 & -2 & -16 & -2 \\ & & 16 & -2 & 4 & 8 & 1 & -2 & -4 \\ & & & 64 & 32 & -16 & 8 & 4 & -2 \\ & & & & 256 & 32 & 4 & 32 & 4 \\ & & & & & 64 & -2 & 4 & 8 \\ & & & & & & 16 & 8 & -4 \\ & & & & & & & 64 & 8 \\ & & & & & & & & 16 \end{bmatrix} \dots (3.28)$$

Simetrik

Çarpan, [A/900]

Değişken kesitli plaklara ait B_{ik} katsayıları

Yazılım kolaylığı açısından şu vektör tanımları yapılmıştır.

$$[D1] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad [D2] = \begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} \quad [D3] = \begin{bmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$[I1] \begin{matrix} T \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{52}{35} & \frac{16}{21} & \frac{-4}{35} \end{bmatrix} \quad [I2] \begin{matrix} T \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{105} & \frac{64}{35} & \frac{16}{105} \end{bmatrix}$$

$$[I3] \begin{matrix} T \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{35} & \frac{16}{21} & \frac{52}{35} \end{bmatrix} \quad [J1] \begin{matrix} T \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{21} & \frac{32}{105} & \frac{-16}{105} \end{bmatrix}$$

$$[J2] \begin{matrix} T \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{-16}{105} & \frac{32}{105} & \frac{8}{21} \end{bmatrix} \quad [J3] \begin{matrix} T \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{35} & \frac{32}{105} & \frac{4}{35} \end{bmatrix}$$

$$[K1] \begin{matrix} T \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{35} & \frac{32}{105} & \frac{4}{35} \end{bmatrix} \quad [K2] \begin{matrix} T \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{21} & \frac{32}{105} & \frac{-16}{105} \end{bmatrix}$$

$$[K3] \begin{matrix} T \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{105} & \frac{-32}{105} & \frac{-8}{21} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$B(1,1) = \frac{A}{256} \left(\frac{52}{35} [I1] [D1] + \frac{16}{21} [I1] [D2] - \frac{4}{35} [I1] [D3] \right)$$

$$B(1,2) = \frac{A}{128} \left(\frac{52}{35} [J1] [D1] + \frac{16}{21} [J1] [D2] - \frac{4}{35} [J1] [D3] \right)$$

$$B(1,3) = \frac{-A}{256} \left(\frac{52}{35} [K1] [D1] + \frac{16}{21} [K1] [D2] - \frac{4}{35} [K1] [D3] \right)$$

$$B(1,4) = \frac{A}{128} \left(\frac{8}{21} [I1] [D1] + \frac{32}{105} [I1] [D2] - \frac{16}{105} [I1] [D3] \right)$$

$$B(1,5) = \frac{A}{64} \left(\frac{8}{21} [J1] [D1] + \frac{32}{105} [J1] [D2] - \frac{16}{105} [J1] [D3] \right)$$

$$B(1,6) = \frac{-A}{128} \left(\frac{8}{21} [K1] [D1] + \frac{32}{105} [K1] [D2] - \frac{16}{105} [K1] [D3] \right)$$

(3.30)

$$B(1,7) = \frac{-A}{256} \left(\frac{4}{35} [I1] [D1] + \frac{32}{105} [I1] [D2] + \frac{4}{35} [I1] [D3] \right)$$

$$B(1,8) = \frac{-A}{128} \left(\frac{4}{35} [J1] [D1] + \frac{32}{105} [J1] [D2] + \frac{4}{35} [J1] [D3] \right)$$

$$B(1,9) = \frac{A}{256} \left(\frac{4}{35} [K1] [D1] + \frac{32}{105} [K1] [D2] + \frac{4}{35} [K1] [D3] \right)$$

$$B(2,2) = \frac{A}{64} \left(\frac{52}{35} [I2] [D1] + \frac{16}{21} [I2] [D2] - \frac{4}{35} [I2] [D3] \right)$$

$$B(2,3) = \frac{A}{128} \left(\frac{52}{35} [J2] [D1] + \frac{16}{21} [J2] [D2] - \frac{4}{35} [J2] [D3] \right)$$

$$B(2,4) = \frac{A}{64} \left(\frac{8}{21} [K2] [D1] + \frac{32}{105} [K2] [D2] - \frac{16}{105} [K2] [D3] \right)$$

$$B(2,5) = \frac{A}{32} \left(\frac{8}{21} [I2] [D1] + \frac{32}{105} [I2] [D2] - \frac{16}{105} [I2] [D3] \right)$$

$$B(2,6) = \frac{A}{64} \left(\frac{8}{21} [J2] [D1] + \frac{32}{105} [J2] [D2] - \frac{16}{105} [J2] [D3] \right)$$

$$B(2,7) = \frac{-A}{128} \left(\frac{4}{35} [K2] [D1] + \frac{32}{105} [K2] [D2] + \frac{4}{35} [K2] [D3] \right)$$

$$B(2,8) = \frac{-A}{64} \left(\frac{4}{35} [I2] [D1] + \frac{32}{105} [I2] [D2] + \frac{4}{35} [I2] [D3] \right)$$

$$B(2,9) = \frac{-A}{128} \left(\frac{4}{35} [J2] [D1] + \frac{32}{105} [J2] [D2] + \frac{4}{35} [J2] [D3] \right)$$

$$B(3,3) = \frac{A}{256} \left(\frac{52}{35} [I3] [D1] + \frac{16}{21} [I3] [D2] - \frac{4}{35} [I3] [D3] \right)$$

$$B(3,4) = \frac{-A}{128} \left(\frac{8}{21} [J3] [D1] + \frac{32}{105} [J3] [D2] - \frac{16}{105} [J3] [D3] \right)$$

$$B(3,5) = \frac{-A}{64} \left(\frac{8}{21} [K3] [D1] + \frac{32}{105} [K3] [D2] - \frac{16}{105} [K3] [D3] \right)$$

$$B(3,6) = \frac{A}{128} \left(\frac{8}{21} [I3] [D1] + \frac{32}{105} [I3] [D2] - \frac{16}{105} [I3] [D3] \right)$$

$$B(3,7) = \frac{A}{256} \left(\frac{4}{35} [J3] [D1] + \frac{32}{105} [J3] [D2] + \frac{4}{35} [J3] [D3] \right)$$

$$B(3,8) = \frac{A}{128} \left(\frac{4}{35} [K3] [D1] + \frac{32}{105} [K3] [D2] + \frac{4}{35} [K3] [D3] \right)$$

$$B(3,9) = \frac{-A}{256} \left(\frac{4}{35} [I3] [D1] + \frac{32}{105} [I3] [D2] + \frac{4}{35} [I3] [D3] \right)$$

$$B(4,4) = \frac{A}{64} \left(\frac{16}{105} [I1] [D1] + \frac{64}{35} [I1] [D2] + \frac{16}{105} [I1] [D3] \right)$$

$$B(4,5) = \frac{A}{32} \left(\frac{16}{105} [J1] [D1] + \frac{64}{35} [J1] [D2] + \frac{16}{105} [J1] [D3] \right)$$

$$B(4,6) = \frac{-A}{64} \left(\frac{16}{105} [K1] [D1] + \frac{64}{35} [K1] [D2] + \frac{16}{105} [K1] [D3] \right)$$

$$B(4,7) = \frac{A}{128} \left(\frac{-16}{105} [I1] [D1] + \frac{32}{105} [I1] [D2] + \frac{8}{21} [I1] [D3] \right)$$

$$B(4,8) = \frac{A}{64} \left(\frac{-16}{105} [J1] [D1] + \frac{32}{105} [J1] [D2] + \frac{8}{21} [J1] [D3] \right)$$

$$B(4,9) = \frac{-A}{128} \left(\frac{-16}{105} [K1] [D1] + \frac{32}{105} [K1] [D2] + \frac{8}{21} [K1] [D3] \right)$$

$$B(5,5) = \frac{A}{16} \left(\frac{16}{105} [I2] [D1] + \frac{64}{35} [I2] [D2] + \frac{16}{105} [I2] [D3] \right)$$

$$B(5,6) = \frac{A}{32} \left(\frac{16}{105} [J2] [D1] + \frac{64}{35} [J2] [D2] + \frac{16}{105} [J2] [D3] \right)$$

$$B(5,7) = \frac{A}{64} \left(\frac{-16}{105} [K2] [D1] + \frac{32}{105} [K2] [D2] + \frac{8}{21} [K2] [D3] \right)$$

$$B(5,8) = \frac{A}{32} \left(\frac{-16}{105} [I2] [D1] + \frac{32}{105} [I2] [D2] + \frac{8}{21} [I2] [D3] \right)$$

$$B(5,9) = \frac{A}{64} \left(\frac{-16}{105} [J2] [D1] + \frac{32}{105} [J2] [D2] + \frac{8}{21} [J2] [D3] \right)$$

$$B(6,6) = \frac{A}{64} \left(\frac{16}{105} [I3] [D1] + \frac{64}{35} [I3] [D2] + \frac{16}{105} [I3] [D3] \right)$$

$$B(6,7) = \frac{A}{128} \left(\frac{16}{105} [J3] [D1] - \frac{32}{105} [J3] [D2] - \frac{8}{21} [J3] [D3] \right)$$

$$B(6,8) = \frac{A}{64} \left(\frac{16}{105} [K3] [D1] - \frac{32}{105} [K3] [D2] - \frac{8}{21} [K3] [D3] \right)$$

$$B(6,9) = \frac{-A}{128} \left(\frac{16}{105} [I3] [D1] - \frac{32}{105} [I3] [D2] - \frac{8}{21} [I3] [D3] \right)$$

$$B(7,7) = \frac{A}{256} \left(\frac{-4}{35} [I1] [D1] + \frac{16}{21} [I1] [D2] + \frac{52}{35} [I1] [D3] \right)$$

$$B(7,8) = \frac{A}{128} \left(\frac{-4}{35} [J1] [D1] + \frac{16}{21} [J1] [D2] + \frac{52}{35} [J1] [D3] \right)$$

$$B(7,9) = \frac{-A}{256} \left(\frac{-4}{35} [K1] [D1] + \frac{16}{21} [K1] [D2] + \frac{52}{35} [K1] [D3] \right)$$

$$B(8,8) = \frac{A}{64} \left(\frac{-4}{35} [I2] [D1] + \frac{16}{21} [I2] [D2] + \frac{52}{35} [I2] [D3] \right)$$

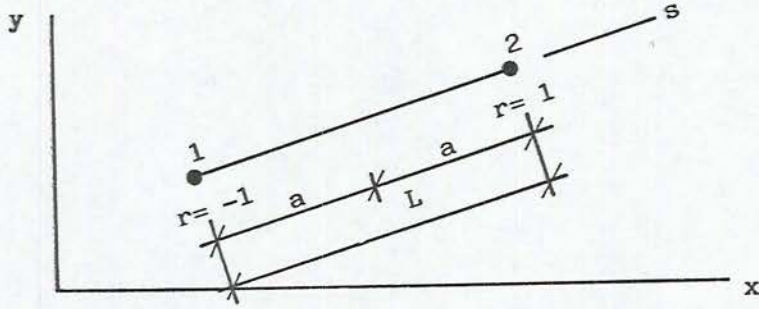
$$B(8,9) = \frac{A}{128} \left(\frac{-4}{35} [J2] [D1] + \frac{16}{21} [J2] [D2] + \frac{52}{35} [J2] [D3] \right)$$

$$B(9,9) = \frac{A}{256} \left(\frac{-4}{35} [I3] [D1] + \frac{16}{21} [I3] [D2] + \frac{52}{35} [I3] [D3] \right)$$

... (3.30)

3.5.5. Lineer kiriş elemanı

Şekil 3.9. da görülen iki düğüm noktalı kiriş elemanında kullanılan şekil fonksiyonları ile bu fonksiyonlara ait çizgisel integraller denklem 3.31 ve 3.32 de verilmiştir.



Şekil 3.9. Lineer kiriş elemanı

$$N_1 = 0.5(1-r), \quad N_2 = 0.5(1+r) \quad (3.31)$$

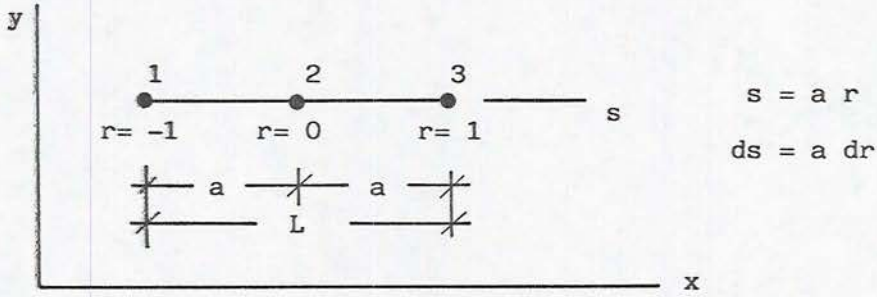
$$[N_i, N_j] = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(3.32)

$$[N_{i,s}, N_{j,s}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5.6. Kuadratik kiriş elemanı

Şekil 3.10. da görülen üç düğüm noktalı kiriş elemanında kullanılan şekil fonksiyonları ile bu fonksiyonlara ait çizgisel integraller aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.10. Kuadratik kiriş elemanı

$$N_1 = 0.5(r^2 - r), \quad N_2 = (1 - r^2), \quad N_3 = 0.5(r^2 + r) \quad (3.33)$$

$$[N_i, N_j] = \frac{L}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$[N_{i,s}, N_{j,s}] = \frac{1}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

3.6.Sınır Koşullarının Etkileri

Denklem 2.22 ile verilen fonksiyonelde sınır koşulları ile ilgili terimler,

$$\begin{aligned} & - [\hat{T} , W]_{\sigma} - [(M-M) , W]_{\sigma} \\ & - [\hat{W} , M]_{\epsilon} - [(W-W) , T]_{\epsilon} \end{aligned} \quad (3.36)$$

dir. σ ve ϵ indisleri sıra ile dinamik ve geometrik sınır koşullarının tanımlandığı yerlerde geçerlidir. Şapka işareti, değerleri bilinen büyüklükleri göstermektedir. Bilinen değerler sıfır ise rijitlik matrisine yalnızca iki ve dördüncü terimden katkı olur. Homogen sınır koşulları halinde ise (önmesnet çökmesiz),

$$- [M_{ns} , W_{,s}]_{\sigma} \quad (3.37)$$

teriminin eleman sınırları boyunca çizgisel olarak hesaplanarak eleman rijitlik matrisine eklenmesi yeterlidir. Eleman sınırındaki burulma momenti açık olarak,

$$M_{ns} = \frac{1}{2} (My-Mx) \sin(2\alpha) + Mxy \cos(2\alpha) \quad (3.38)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda sınır terimleri,

$$- \left(\frac{1}{2} \sin(2\alpha) [(My-Mx) , W_{,s}] + \cos(2\alpha) [Mxy , W_{,s}] \right)$$

haline gelir. $0.5\sin(2\alpha)$ ve $\cos(2\alpha)$ terimlerini basitlik amacı ile SSI ve CSI olarak gösterelim. I'nın aldığı 1,2,3

ve 4 degerlerinden elemanın hangi kenarına ait sınır terimlerinin hesaplandığı anlaşılır. Örneğin, $SS3=0.5\sin(2\alpha_3)$ olarak yazılabilir. Burada α_3 elemanın üçüncü kenarına ait normalin x eksenine ile yaptığı açiyı ifade eder. Sınır koşullarından gelen ek terimlerin hesabında M, herhangi bir büyüklüğü gösterebilir. Bu durumda M'nin kendisi ile sınır doğrultusundaki türevini sınır üzerinde tanımlanan şekil fonksiyonları yardımı ile, $M=n_i M_i$ ve $M_{,s}=n_{i,s} M_i$ şeklinde yazabiliriz. Burada i, elemanın bir kenarı üzerindeki düğüm sayısı olup tekrarlanan indis üzerinde toplama vardır. Hesaplanması gereken herhangi bir terim, $SSI[n_i M_i, n_{j,s} W_j]$ şeklinde yazılabilir. M_i ye göre türev alındığında ise,

$$SSI [n_i , n_{j,s} W_j]$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntının elemanın her bir kenarı için ayrı ayrı hesaplanarak süperpoze edilmesi gerekir (Şekil 3.11).

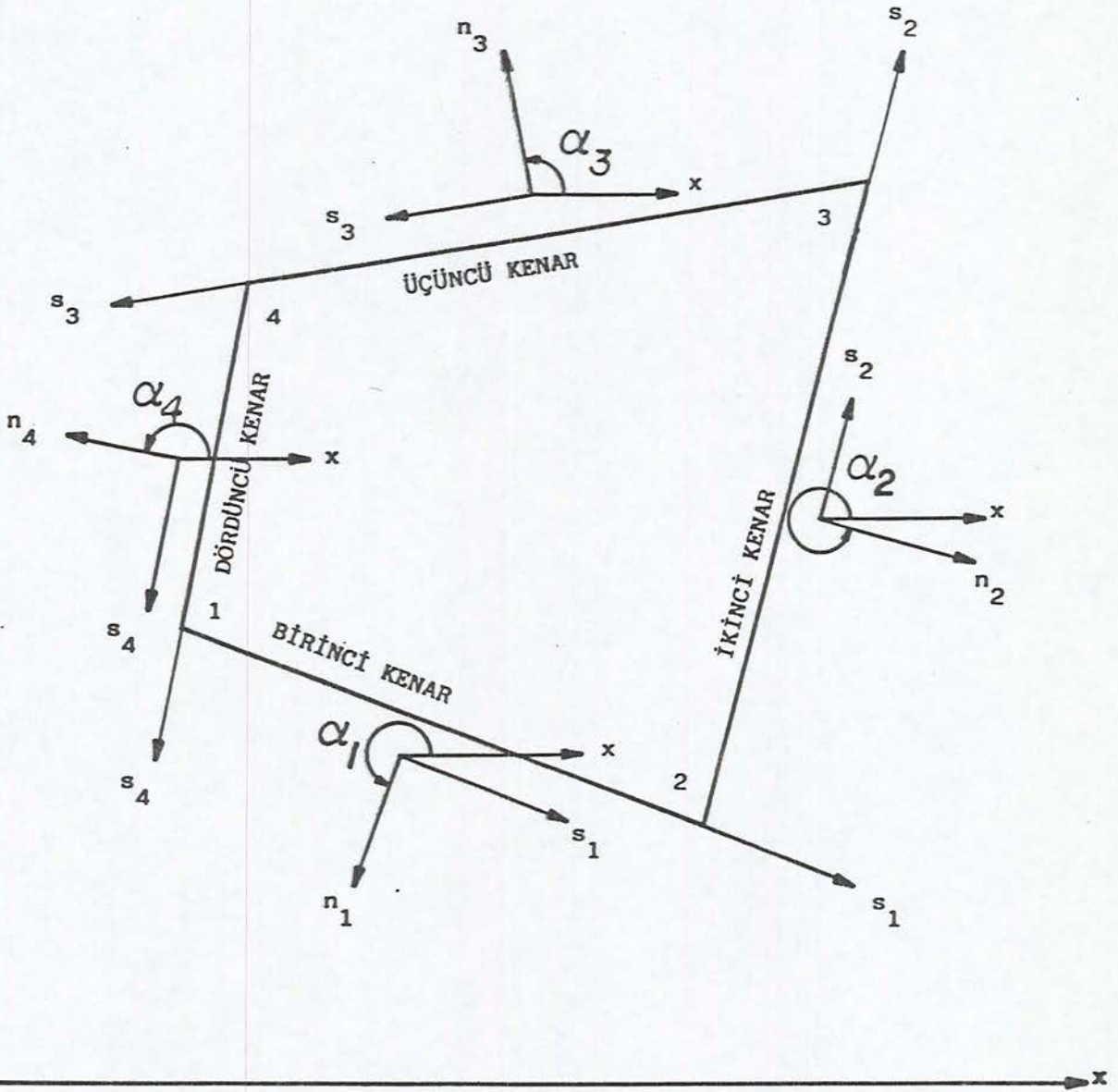
3.6.1. Lineer sınır fonksiyonu

Şekil 3.9. da kirişler için verilen lineer şekil fonksiyonu ile bu fonksiyonun sınır doğrultusundaki türevleri aşağıdadır.

$$n_1=0.5(1-r), \quad n_2=0.5(1+r) \quad (3.39)$$

$$n_{1,s}=-1/L, \quad n_{2,s}=1/L$$

Elemanın i. kenarı için yukarıdaki iç çarpım sonucu



Şekil 3.11. Eleman sınır doğrultuları

$$SSI [n_i, n_{j,s} w_j] = SSI \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

olarak elde edilir.

3.6.2. Kuadratik sınır fonksiyonu

Kuadratik elemanların kenarlarında tanımlanan şekil fonksiyonları ile bunların sınır doğrultusundaki türevleri aşağıda verilmiştir (şekil 3.10).

$$\begin{aligned} n_1 &= 0.5 (r^2 - r), & n_{1,s} &= (2r - 1)/(2a) \\ n_2 &= (1 - r^2), & n_{2,s} &= -2r/a \\ n_3 &= 0.5 (r^2 + r), & n_{3,s} &= (2r + 1)/(2a) \end{aligned} \quad (3.41)$$

I kenarı için yukarıda tanımlanan iç çarpım sonucu,

$$SSI [n_i, n_{j,s} w_j] = SSI \begin{bmatrix} -0.5 & 2/3 & -1/6 \\ -2/3 & 0 & 2/3 \\ 1/6 & -2/3 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

elde edilir.

3.6.3. Sınır terimleri matrisleri

3.6.3.1. Üçgen eleman

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} SS3 - SS1 & SS1 & -SS3 \\ -SS1 & SS1 - SS2 & SS2 \\ SS3 & -SS2 & SS2 - SS3 \end{bmatrix}$$

3.6.3.2. İzoparametrik eleman

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} SS4-SS1 & -SS4 & SS1 & 0 \\ SS4 & SS3-SS4 & 0 & -SS3 \\ -SS1 & 0 & SS1-SS2 & SS2 \\ 0 & SS3 & -SS2 & SS2-SS3 \end{bmatrix}$$

3.6.3.3. Altı düğüm noktalı üçgen eleman

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3(SS3-SS1) & -SS1 & SS3 & 4SS1 & 0 & -4SS3 \\ SS1 & 3(SS1-SS2) & -SS2 & -4SS1 & 4SS2 & 0 \\ -SS3 & SS2 & 3(SS2-SS3) & 0 & -4SS2 & 4SS3 \\ -4SS1 & 4SS1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4SS2 & 4SS2 & 0 & 0 & 0 \\ 4SS3 & 0 & 4SS3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.6.3.4. Dokuz düğüm noktalı dikdörtgen eleman

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3(SS4-SS1) & 4SS1 & -SS1 & -4SS4 & 0 & 0 & SS4 & 0 & 0 \\ -4SS1 & 0 & 4SS1 & 4SS1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ SS1 & -4SS1 & 3(SS1-SS2) & 0 & 0 & 4SS2 & 0 & 0 & -SS2 \\ 4SS4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4SS4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4SS2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4SS2 \\ -SS4 & 0 & 0 & 4SS4 & 0 & 0 & 3(SS3-SS4) & -4SS3 & SS3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4SS3 & 0 & -4SS3 \\ 0 & 0 & SS2 & 0 & 0 & -4SS2 & -SS3 & 4SS3 & 3(SS2-SS3) \end{bmatrix}$$

... (3.43)

Verilen sınır terimleri matrisleri;

M_x 'e göre türev denklemlerinde W terimlerine +1 katı ile
 M_y 'ye göre türev denklemlerinde W terimlerine -1 katı ile
 M_{xy} 'ye göre türev denklemlerinde W terimlerine -2 katı ile
ve bütün SSI'lar yerine CSI'lar yazılarak eklenir.

W 'ye göre türev denklemlerinde, verilen matrislerin trans-
pozları; +1 katı ile M_x terimlerine, -1 katı ile M_y terim-
lerine, -2 katı ile ve bütün SSI lar yerine CSI yazılarak
 M_{xy} terimlerine eklenir.

4. UYGULAMALAR

4.1 Ritz Yöntemine ait Uygulamalar

4.1.1 Basit mesnetli plak

Kenar uzunluğu a olan kare plak, düzgün yayılı yük ve merkezi tekil yük halleri için çözülmüştür. Koordinat eksenlerinin plakin merkezinden geçmesi durumunda, sınır koşullarını sağlayan yaklaşım fonksiyonları;

$$N_1 = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2), \quad S_1 = xy, \quad (4.1)$$

$$N_2 = (x^2 - a^2)^2(y^2 - a^2)^2, \quad S_2 = x^3y^3$$

olarak seçilebilir. Bu fonksiyonlar kullanılarak tüm plak bölgesinde tanımlanan değişkenler aşağıdaki gibi alınabilir

$$W = A_1N_1 + A_2N_2, \quad M_x = B_1N_1 + B_2N_2, \quad (4.2)$$

$$M_y = C_1N_1 + C_2N_2, \quad M_{xy} = D_1S_1 + D_2S_2$$

Düzgün yayılı yük (q) hali için, bir terimli çözümde eğilme momenti ve çökme değişkenlerinin katsayıları sırası ile

$$B_1 = 0.2031 q/a^2 \text{ ve } A_1 = 0.0625 q/D$$

bulunmuştur. Plak merkezindeki hata miktarları; eğilme momentinde %6, çökmede %3.8 dir. İki terimli çözümde ise moment katsayıları

$$B_1 = 0.245688 q/a^2, \quad B_2 = -0.059796 q/a^6$$

çökme katsayıları

$$A_1=0.055139 \text{ q/D}, \quad A_2=0.010121 \text{ q/(Da}^4)$$

bulunur. Bu katsayılarla karşılık hata miktarları momentte % 0.46, çökmede ise %3.0 tür.

Merkezi tekil yük hali (P) için, benzer şekilde bir terimli çözümde eğilme momenti ve çökme değişkenlerinin katsayıları sırası ile

$$B_1=45(1+\nu)P/(512a^4) \text{ ve } A_1=9P/(256 \text{ Da}^2)$$

bulunmuştur. Plak merkezindeki çökmede yapılan hata miktarı %24.2 dir. İki terimli çözümde ise moment katsayıları

$$B_1=-0.03945 \text{ P/a}^4, \quad B_2=0.220156P/a^8$$

çökme katsayıları

$$A_1=0.023690 \text{ P/Da}^2, \quad A_2=0.020325 \text{ P/(a}^6)$$

bulunur. Plak merkezindeki çökmede yapılan hata miktarı % 5 dir.

4.1.2 Ankastre Plak

Aynı geometri özelliklerine sahip olan ankastre plak için tüm plak bölgesinde geçerli değişkenler,

$$M_x=B_1+B_2x^2+B_3y^2+B_4x^2y^2$$

$$M_y=C_1+C_2x^2+C_3y^2+C_4x^2y^2 \quad (4.3)$$

$$M_{xy}=D_1xyN_1, \quad W=A_1N_2$$

olarak seçilmiştir. Düzgün yayılı yük (q) için, plak merkezindeki eğilme momenti ve çökmeyi belirleyen katsayılar

sırası ile

$$B_1=0.11008 qa^2 \text{ ve } A_1=0.19842 q/(Eh^3a^4)$$

bulunmuştur. Hata miktarı eğilme momentinde %16, çökmede ise %12.8 dir.

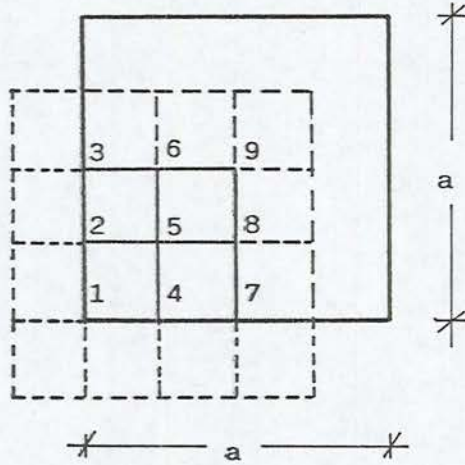
Merkezi tekil yük (P) için benzer katsayılar sırası ile

$$B_1=0.09675 P \text{ ve } A_1=0.169314 P/(Eh^3)$$

bulunur. Plak merkezindeki çökmede yapılan hata %30.7 dir.

4.2 Varyasyonel Türev Yöntemine ait uygulamalar

Şekil 4.1 de görülen plak, düzgün yayılı yük altında bir kere basit mesnetli, bir kere de ankastre olarak ele alınmıştır. Simetri nedeni ile plakin dörtte biri dokuz düğüm noktasına ayrılarak incelenmiştir.



Şekil 4.1 İncelenen Plak Modeli

Plak merkezindeki eğilme momenti ve çökmede yapılan hatalar; basit mesnetli plakta sırası ile % -3.73 ve % -3.26 ankastre mesnetli plakta ise % -5.8 ve % 7.1 dir.

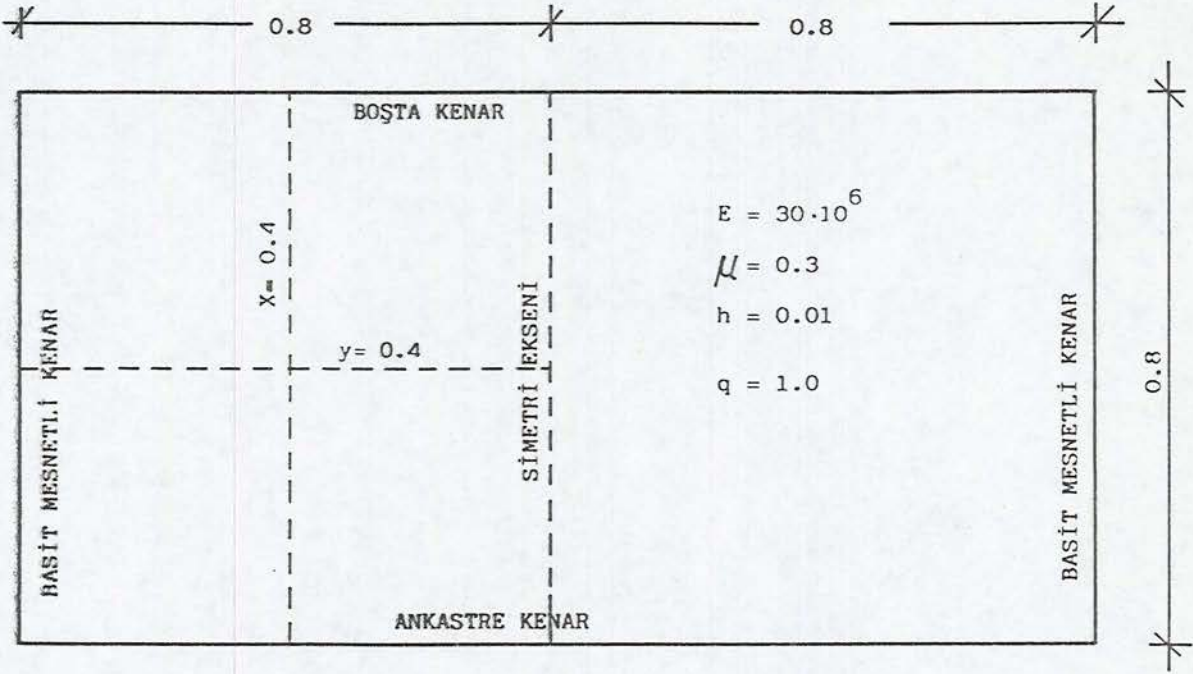
4.3.Klasik Uygulamalar

4.3.1.Uygulama 1.Degışken sınır koşullarına sahip

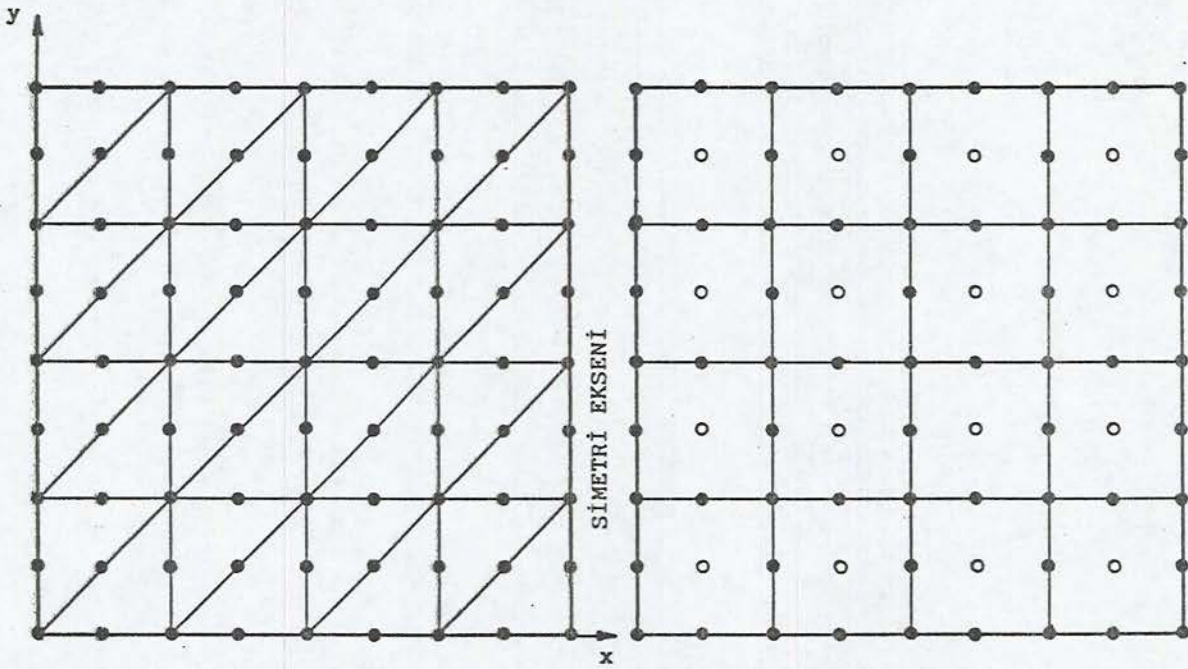
dikdörtgen plak

Düzgün yayılı yükle yüklenmiş, karşılıklı iki kenarı basit mesnetli üçüncü kenarı ankastre ve dördüncü kenarı boşta olan dikdörtgen plaga ait geometri ve malzeme özellikleri Şekil 4.2.a da görülmektedir. Bu problem daha önce lineer üçgen elemanlar için Herrmann (1965), ve genel dörtgen elemanlar için Sarıoğlu (1978), tarafından çözülmüştür. Burada kuadratik şekil fonksiyonlarının kullanıldığı üçgen ve dikdörtgen elemanlar için Şekil 4.2.b,c deki biçimde elemanlara ayrılıp çözüldü.

Elde edilen sonuçlar ince plak teorisine ait kesin çözümlerle karşılaştırıldı. $x=.4$ ve $y=.4$ doğruları üzerindeki plak momentleri ve çökmenin değişimi şekil 4.3-4.6 de verilmiştir. Sonlu eleman sonuçlarının kesin çözüme mükemmel derecede uyum sağladığı gözlenmektedir. Özellikle üçgen elemanlarda boşta kenara ait M_x ve M_{xy} momentlerinde önemli hatalar meydana gelmektedir.



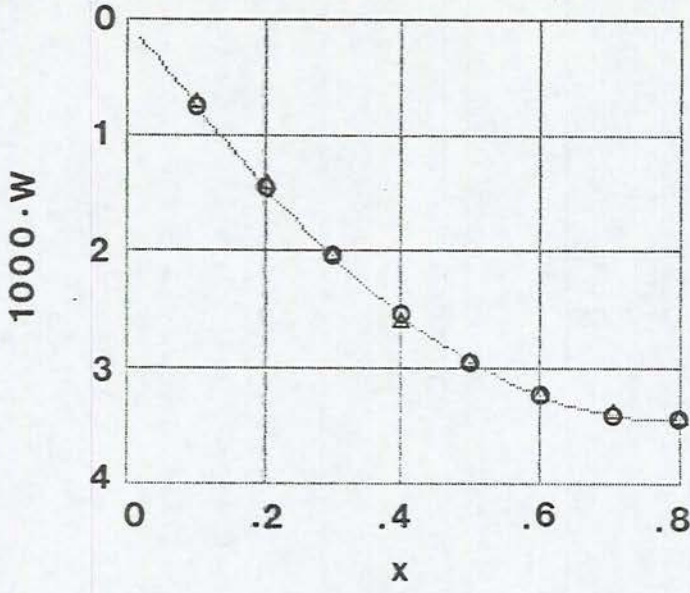
(a)



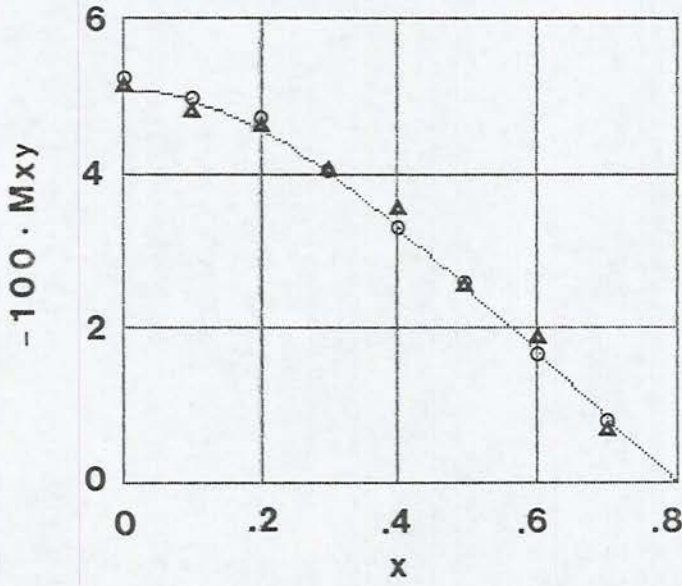
(b)

(c)

Şekil 4.2. Dikdörtgen plağın sonlu eleman modeli
 a) Plak geometrisi ve malzeme özellikleri
 b) Üçgen eleman ağı c) Dikdörtgen eleman ağı

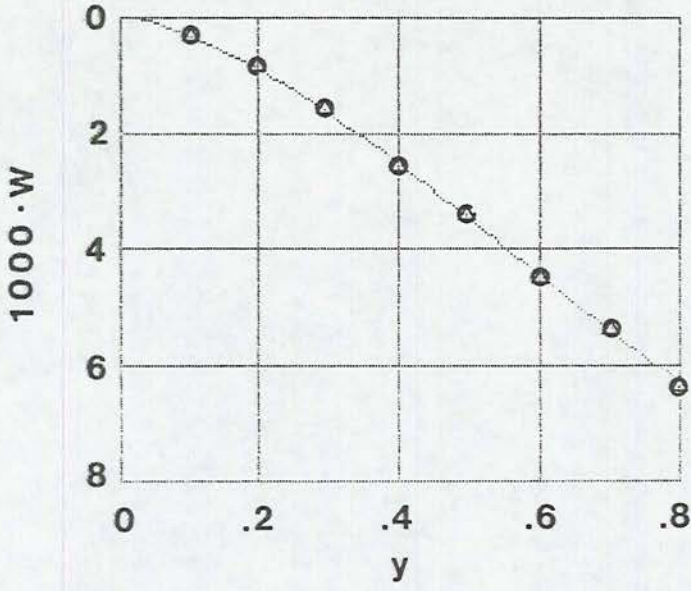


(a)

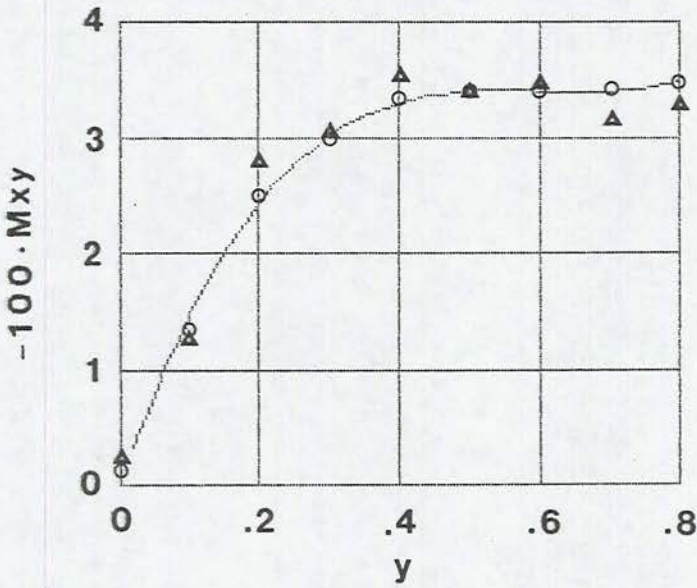


(b)

Sekil 4.3. $y=0.4$ dogrusu üzerinde: a) W nin değişimi
 b) M_{xy} nin değişimi
 (Δ) üçgen eleman, (o) dikdörtgen eleman

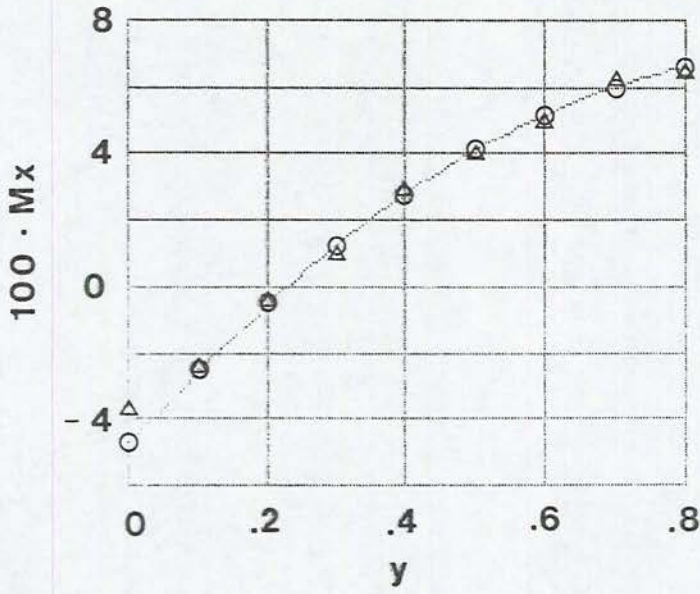


(a)

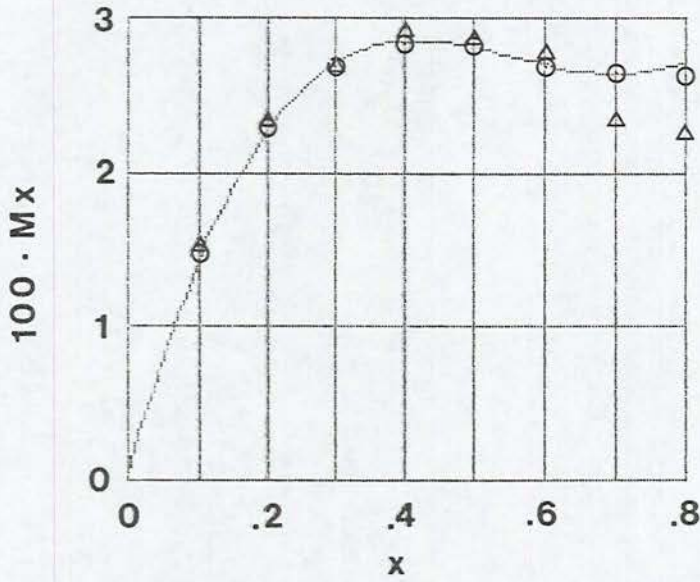


(b)

Sekil 4.4. $x=0.4$ doğrusu üzerinde: a) W nin değişimi
b) M_{xy} nin değişimi

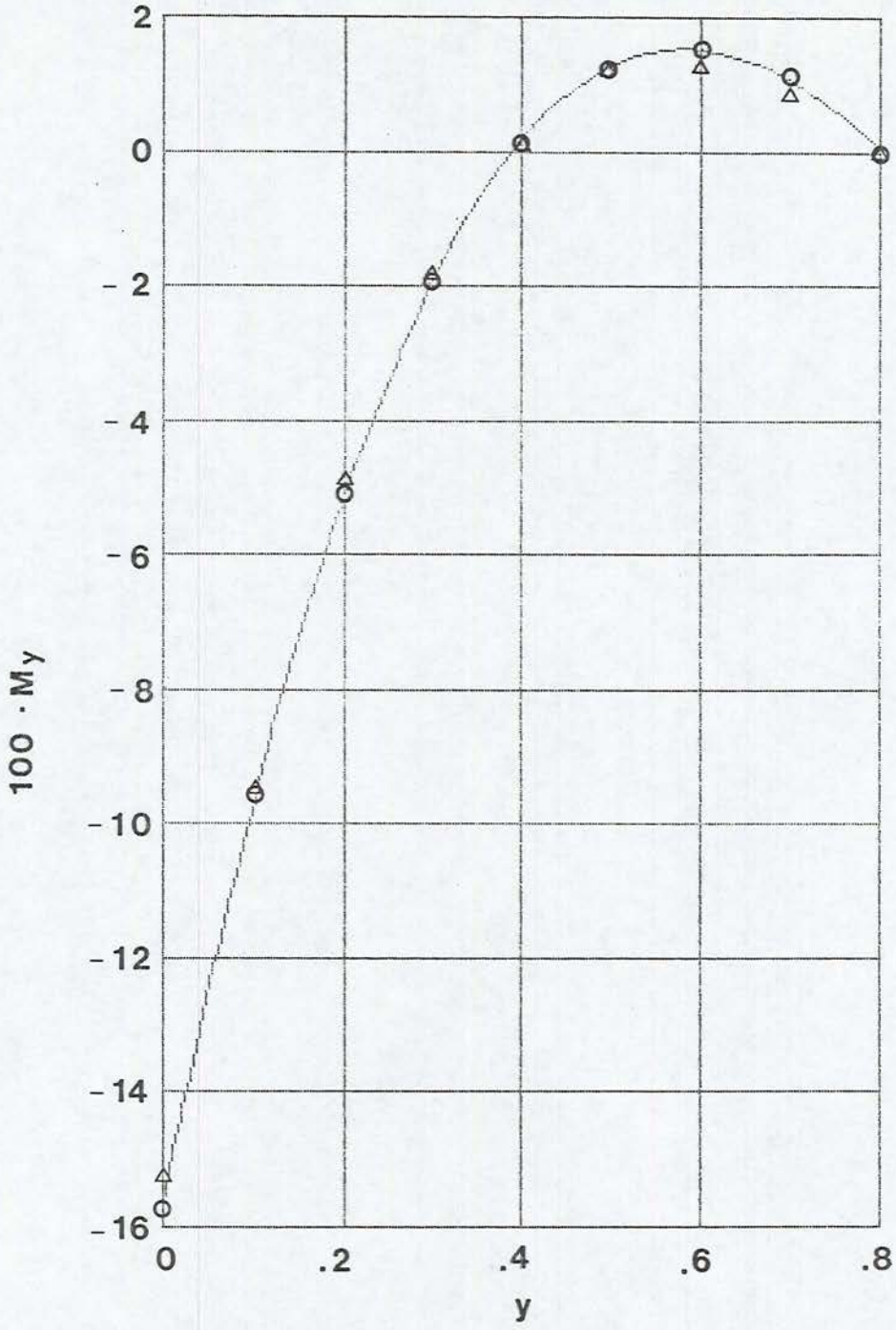


(a)



(b)

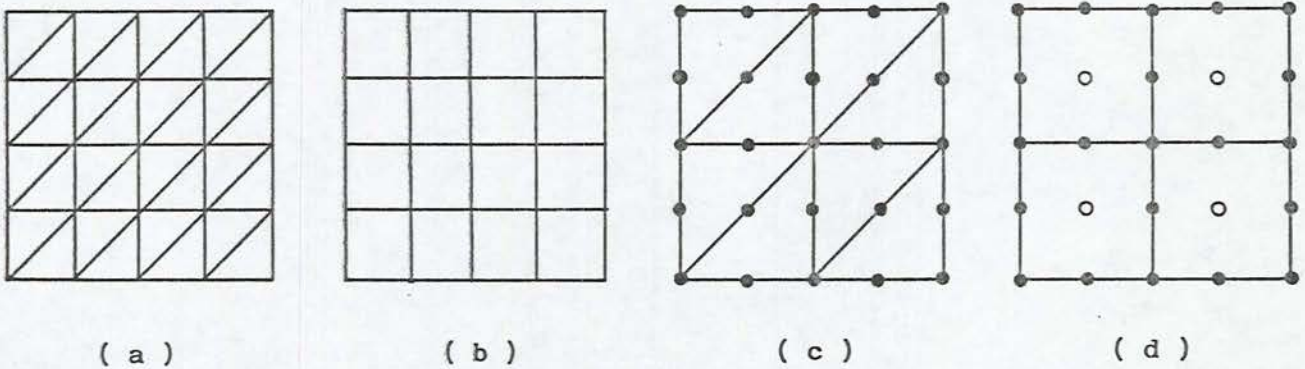
Şekil 4.5. a) $x=0.4$ doğrusu üzerinde Mx in değişimi
 b) $y=0.4$ doğrusu üzerinde Mx in değişimi



Şekil 4.6. $x=0.4$ doğrusu üzerinde My in değişimi

4.3.2. Uygulama 2. Basit mesnetli kare plak

Düzgün yayılı yük ile merkezi tekil yük etkisindeki kenarlarından basit mesnetli kare plak şekil 4.7. de görülen biçimde elemanlara ayrılarak incelenmiştir. Plak merkezindeki eğilme momenti (M_x) ve çökme (W) değerleri çizelge 4.1. de verilmiştir. Simetri nedeni ile plağın $1/4$ ü ele alınmıştır. Çizelgenin incelenmesi sonucu üçgen elemanlardaki M_x momentlerinde önemli hataların bulunduğu görülmektedir. Literatürde üçgen elemanların eleman doğrultularına karşı çok hassas olduğu belirtilmektedir. Bu durum Sarıoğlu (1978), tarafından ayrıntılı olarak incelenmiş, eleman ağının simetrik olduğu problemlerde bile değerlerin simetrik olmadığı, simetrik olmayan eleman ağlarında ise iki simetrik noktadaki M_y momentinde yüzde 30-40 a kadar varabilen sapmaların olduğu kaydedilmiştir. Kuadratik şekil fonksiyonlarının kullanılması halinde de bu hassasiyetin varlığı açıkça görülmektedir.



Şekil 4.7. Eleman ağları a) lineer üçgen b) izoparametrik c) kuadratik üçgen d) kuadratik dikdörtgen

Cizelge 4.1. Basit mesnetli kare plak merkezindeki kesit tesirleri

ELEMEN TiPi	YAYILI YUK (q)				TEKİL YUK (P)		
	Mx	%HATA	W	%HATA	Mx	W	%HATA
Lineer ucgen	.04168	-12.98	.04376	-1.23	.3139	.01190	2.55
Izoparametrik	.04892	2.12	.04484	1.21	.41168	.01216	4.80
Kuad. ucgen	.04155	-13.26	.0440	.78	.34183	.01193	2.88
Kuad. dikdort	.04796	.10	.0444	.24	.45225	.01179	1.64
Carpan	$\frac{q a^2}{a}$	—	$\frac{q a^4}{E h^3}$		P	$\frac{q a^2}{D}$	—

4.3.3. Uygulama 3. Ankastre mesnetli kare plak

Uygulama 2 deki model, platin kenarlarından ankastre mesnetli olması durumu için çözümlere sonuçlar çizelge 4.2 de verilmiştir. Çizelgede, kenar ortasına ait değerlerin üzerine a indisi konulmuştur.

Çizelge 4.2. Dört tarafından ankastre kare plakta kesit tesirleri

ELEMEN TİPİ	DÜZGÜN YAYILI YÜK (q)					
	Mx	%HATA	a Mx	%HATA	W	%HATA
Lineer üçgen	.02171	-5.63	-.06837	33.27	.01383	.18
İzoparametrik	.02478	7.75	-.05067	-1.24	.01463	5.98
Kuad. üçgen	.02005	-12.84	-.04853	-5.39	.01382	.12
Kuad. dikdört	.02310	.43	-.05132	.03	.01396	1.15
Çarpan	$\frac{q a^2}{3}$	—	$\frac{q a^2}{3}$	—	$\frac{q a^4}{E h^3}$	—

Çizelge 4.2. (devam)

ELEMEN TİPİ	MERKEZİ TEKİL YÜK				
	Mx	a Mx	%HATA	W	%HATA
Lineer üçgen	.27384	-.18431	46.63	.005746	2.61
İzoparametrik	.35858	-.12271	-2.38	.00607	8.41
Kuad. üçgen	.29500	-.11179	-11.06	.00600	7.18
Kuad. dikdört.	.39891	-.11814	-6.01	.00583	4.06
Çarpan	P	P	—	$\frac{q a^2}{D}$	—

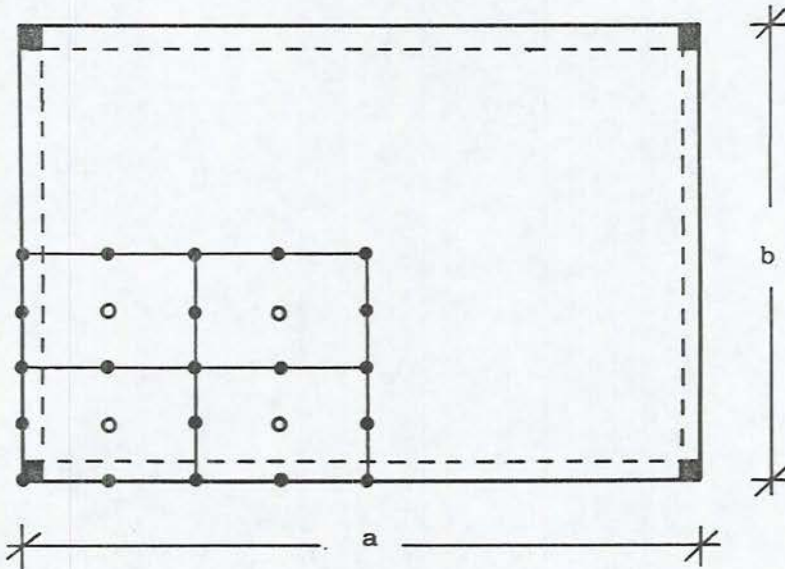
4.4. Statik Uygulamalar

4.4.1. Uygulama 1. Dört kenarından kirişlere oturan plak

Şekil 4.8 de görülen kenarlarında eğilme rijitliği EI olan kirişlere ve dört köşede kolonlara oturan dikdörtgen plak değişik parametreler için çözüldü. Değişik rijitlik ve plak boyutları için en büyük çökmeler çizelge 4.3 te gösterilmiştir. Bu tablo incelendiğinde kiriş rijitliklerinin büyümesi halinde sonuçların kenarlarından basit mesnetlenmiş plak çökmelerine, kiriş rijitliklerinin azalması halinde ise dört köşesinden kolonlara oturan plak çökmelelerine yaklaştığı görülmektedir. Plak eğilme rijitliğinin kirişin eğilme rijitliğine oranını gösteren r rijitlik parametresi,

$$r = (D h / E I) 10^{-2}$$

olarak tanımlanmıştır.



Şekil 4.8. Kenarlarından kirişlere oturan plak.

Plak merkezindeki M_x ve M_y momentleri çizelge 4.4 te boyutsuz olarak verilmiştir. Kiriş rijitliğinin artma ve eksilerek sifıra yaklaşımında, çökmedeki gibi literatürde verilen sonuçlara yaklaşım sağlandığı gözlenmektedir. Plak kenar oranlarının çeşitli değerleri için en büyük kiriş momentleri çizelge 4.5 de verilmiştir. Değişik rijitlik değerleri için $y=0.5b$ doğrusu üzerindeki çökmeler şekil 4.9 da görülmektedir.

Çizelge 4.3. Kenarlarından kirişlere oturan dikdörtgen plak Plak merkezindeki çökmenin rijitlik parametresi ile değişimi.

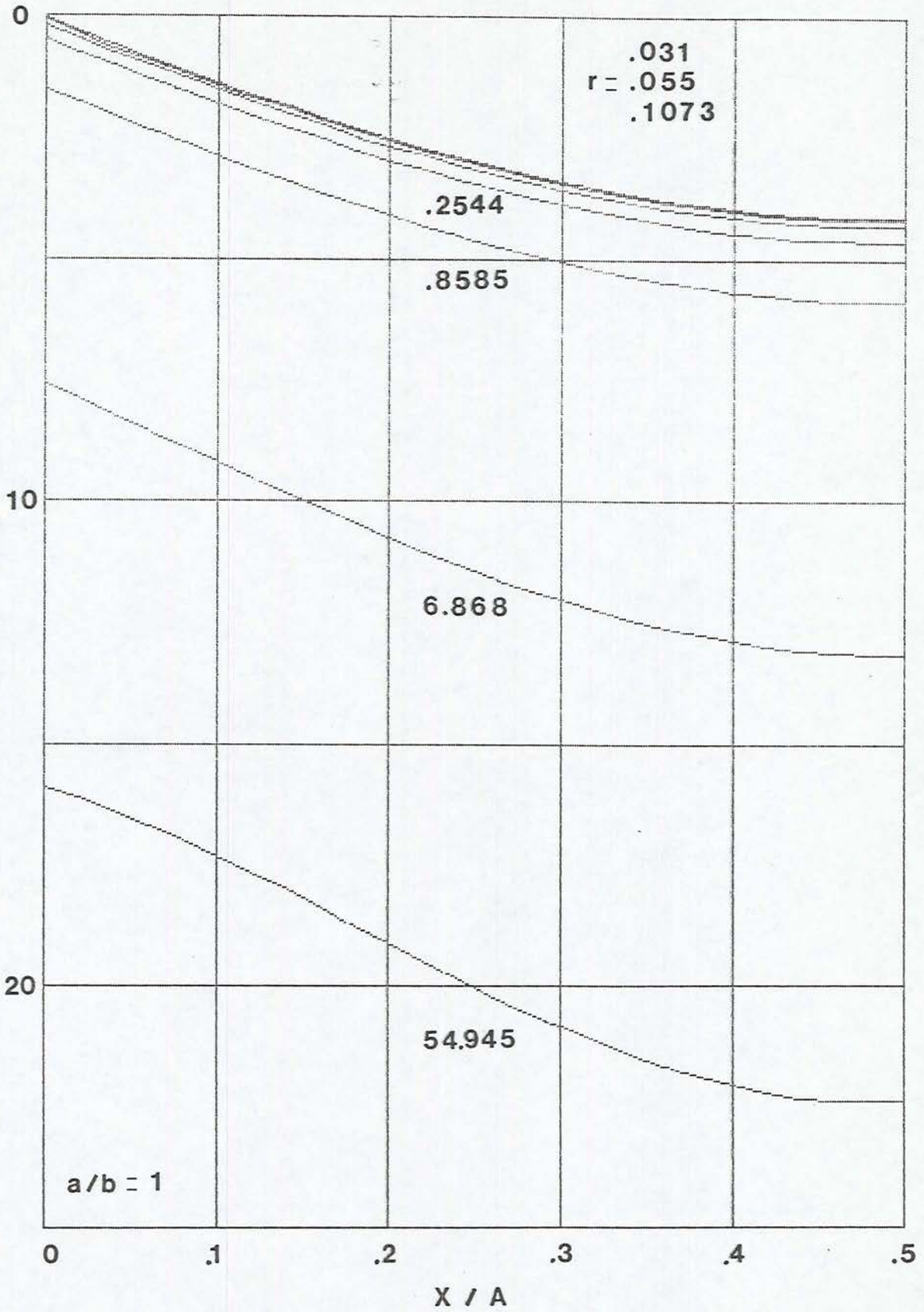
$\frac{-2}{10} \frac{Dh}{EI}$	a / b			
	1.00	1.25	1.50	2.00
Kesin çözüm	2.57			
sonsuz	2.55063	4.43983	7.98227	23.11599
54.94505	2.23836	3.94028	7.13184	20.80153
6.86813	1.31453	2.35382	4.26916	12.47145
.85852	.58706	.96898	1.53726	3.64994
.25438	.46348	.71951	1.01803	1.86703
.10731	.43100	.65321	.87846	1.38161
.05495	.41919	.62901	.82737	1.20328
.03180	.41393	.61822	.80461	1.12350
0	.40666	.60328	.77299	1.01300
Kesin çözüm	.40567	.60119	.77197	1.01282
Çarpan , $\left(\frac{4}{qb} / D \right) \frac{-2}{10}$				

Çizelge 4.4. Kenarlarından kirişlere oturan dikdörtgen plak
Plak merkezindeki momentlerin rijitlik parametresi ile değişimi.

-2 10 Dh	a / b						
	1.00 Mx=My	1.25		1.50		2.00	
E I	Mx	My	Mx	My	Mx	My	
Kesin	1.10900						
sonsuz	1.11631	1.82331	1.04775	2.69031	.97938	4.89350	.85631
54.94505	1.02419	1.66388	.98538	2.44963	.94013	4.45138	.85163
6.86813	.74981	1.13225	.80950	1.60294	.84600	2.81100	.87944
.85852	.53332	.63869	.68813	1.19631	.81188	1.01031	.97594
.25438	.49652	.54644	.67000	.57822	.81181	.64013	1.00294
.10731	.48684	.52173	.66538	.53274	.81213	.53897	1.01069
.05495	.48333	.51269	.66375	.51606	.81225	.50179	1.01356
.03180	.48176	.50865	.66300	.50860	.81238	.48516	1.01488
0	.47960	.50306	.66200	.49828	.81244	.46209	1.01669
Kesin	.47900	.50250	.66000	.49900	.81200	.46400	1.01700
Çarpan , $\left(\frac{q b^2}{10} \right)$							

Çizelge 4.5. Kenarlarından kirişlere oturan dikdörtgen plak
X ve Y yönü kirişlerindeki enbüyük momentler.

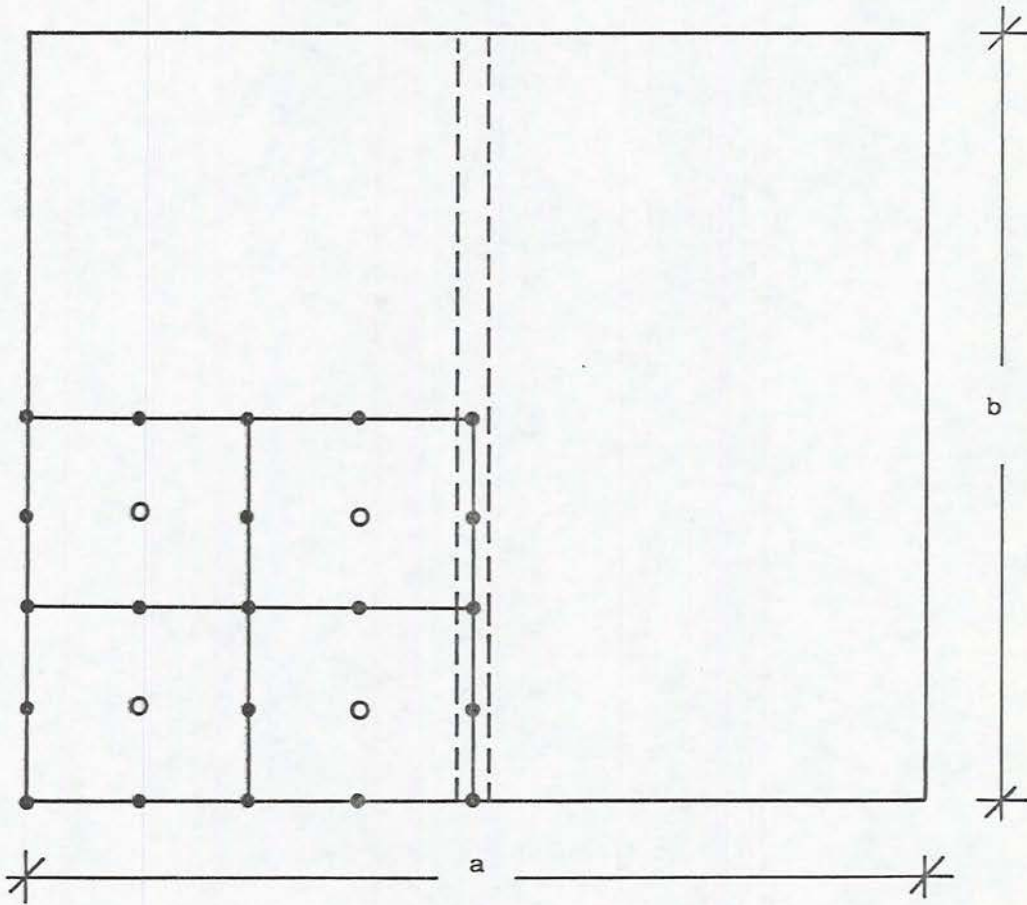
-2 10 Dh E I	a / b							
	1.00 X=Y	1.25		1.50		2.00		
	X	Y	X	Y	X	Y		
54.94505	.26039	.38736	.28673	.54148	.31509	.93338	.37590	
6.86813	1.05981	1.69238	1.16819	2.46225	1.26688	4.41275	1.45406	
.85852	1.70444	2.90950	1.85681	4.40688	1.95650	8.22938	2.08333	
.25438	1.81469	3.13638	1.96956	4.78750	2.05925	9.01313	2.14675	
.10731	1.84363	3.19713	1.99894	4.89038	2.08525	9.22750	2.16038	
.54950	1.85419	3.21931	2.00956	4.92806	2.09456	9.30625	2.16500	
.03180	1.85888	3.22925	2.01425	4.94494	2.09869	9.34125	2.16700	
Çarpan , $(q b^2 / 10)$								



Şekil 4.9. $y=0.5b$ doğrusu üzerinde W nin değişimi

4.4.2.Uygulama 2.Ortasından kirişle desteklenen basit plak

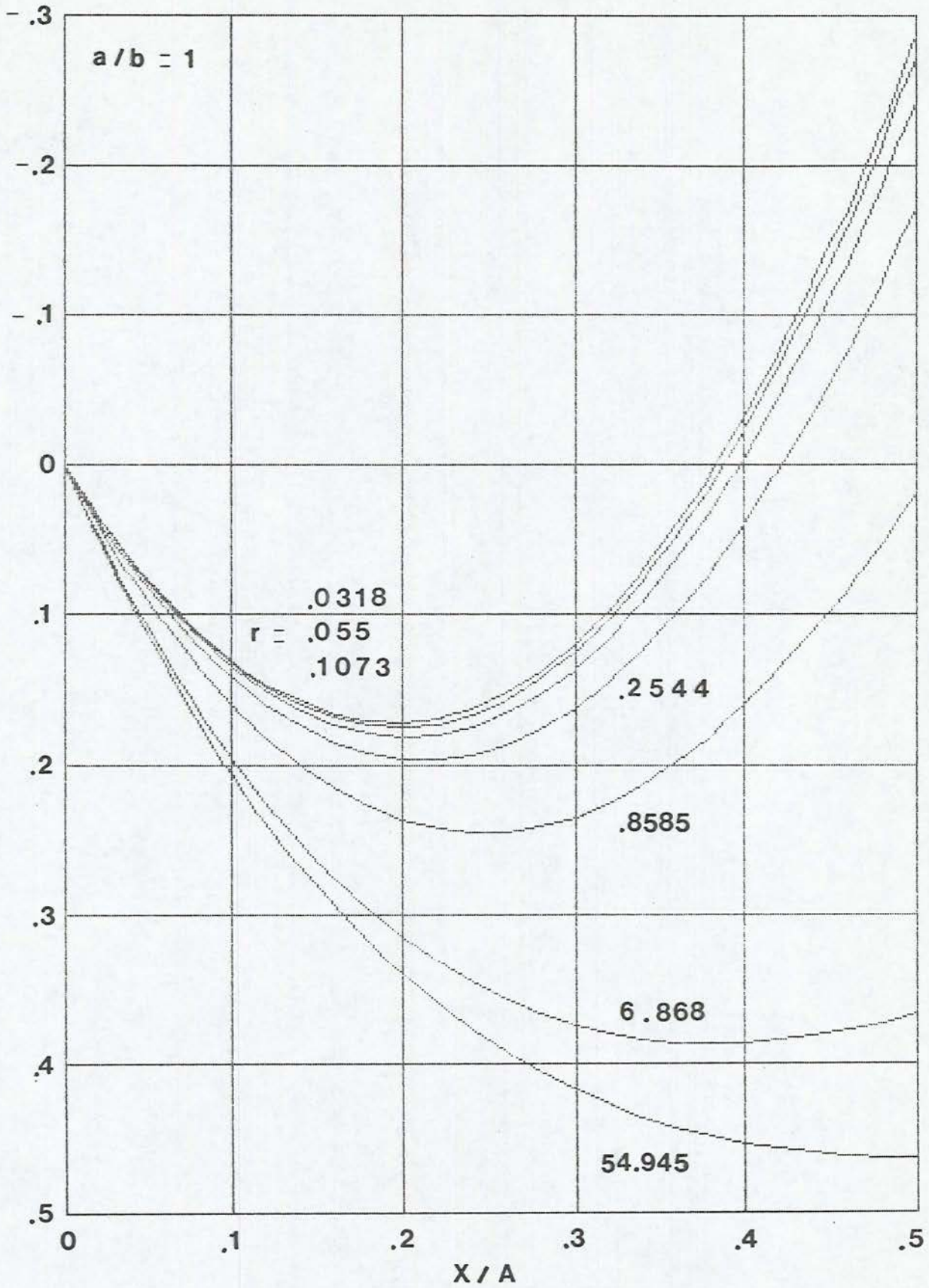
Şekil 4.10 da görülen plak modeli incelenerek değişik plak boyutları ve rijitlik oranları için en büyük kiriş momentleri çizelge 4.6 da gösterilmiştir. $y=0.5b$ doğrusu üzerindeki plak momenti (M_x) ile çökmenin değişimi şekil 4.11 ve 4.12 de verilmiştir.



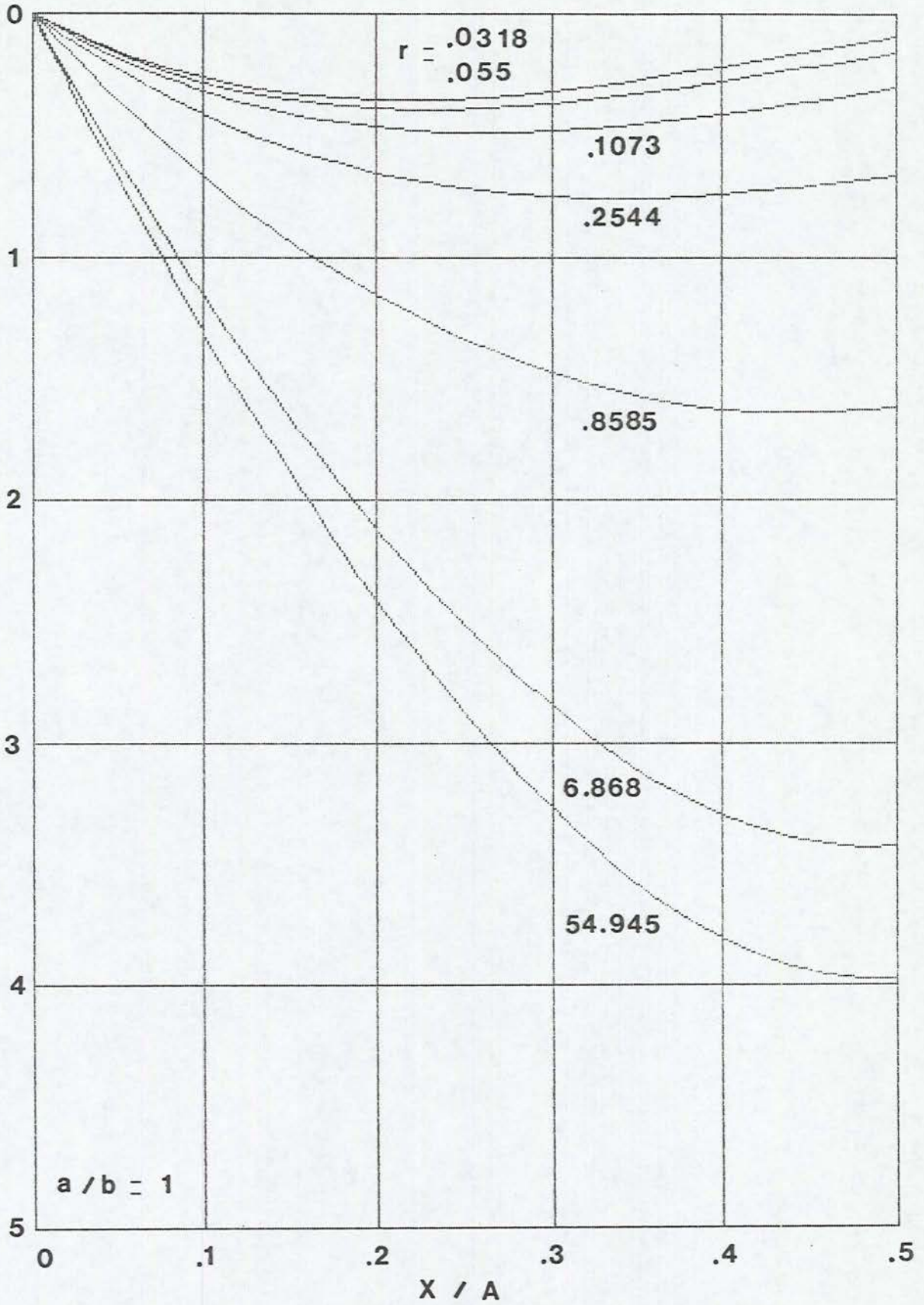
Şekil 4.10. Ortasından kirişle desteklenmiş plak.

Çizelge 4.6. Ortasından kirişle desteklenmiş plakta en büyük kiriş momentleri.

$\frac{-2}{10} \frac{Dh}{EI}$	a / b			
	1.00	1.25	1.50	2.00
54.94505	.06601	.09976	.12890	.17014
6.86813	.46624	.67804	.85778	1.11149
.85852	1.81238	2.38363	2.85975	3.54288
.25438	2.52700	3.17325	3.72288	4.53025
.10731	2.79350	3.45038	4.01713	4.85925
.54950	2.90225	3.56100	4.13338	4.98825
.03180	2.95300	3.61225	4.18700	5.04738
Çarpan , $\left(\frac{q b^2}{10} \right)$				



Şekil 4.11. $y=0.5b$ doğrusu üzerinde M_x in değişimi

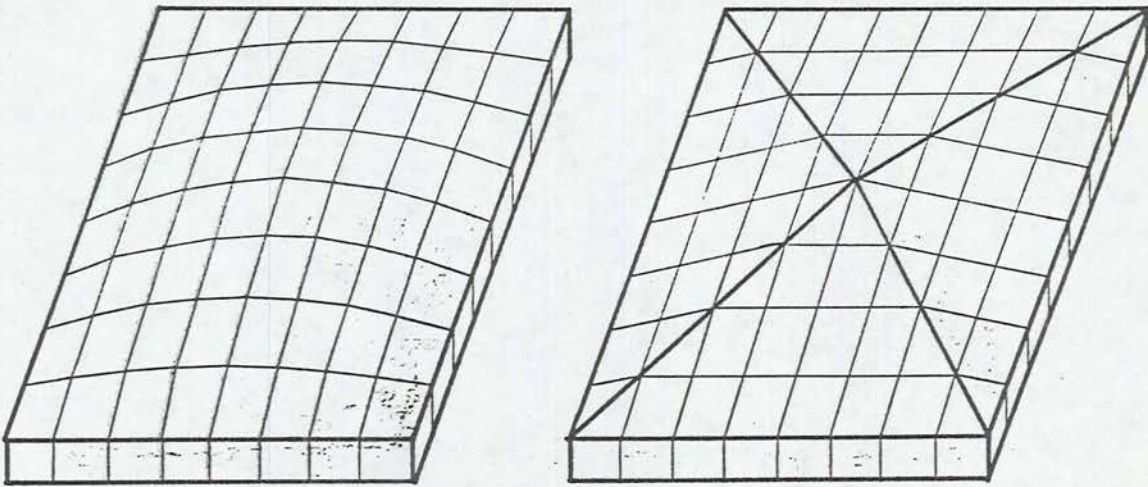


Sekil 4.12. $y=0.5b$ doğrusu üzerinde W nin değişimi

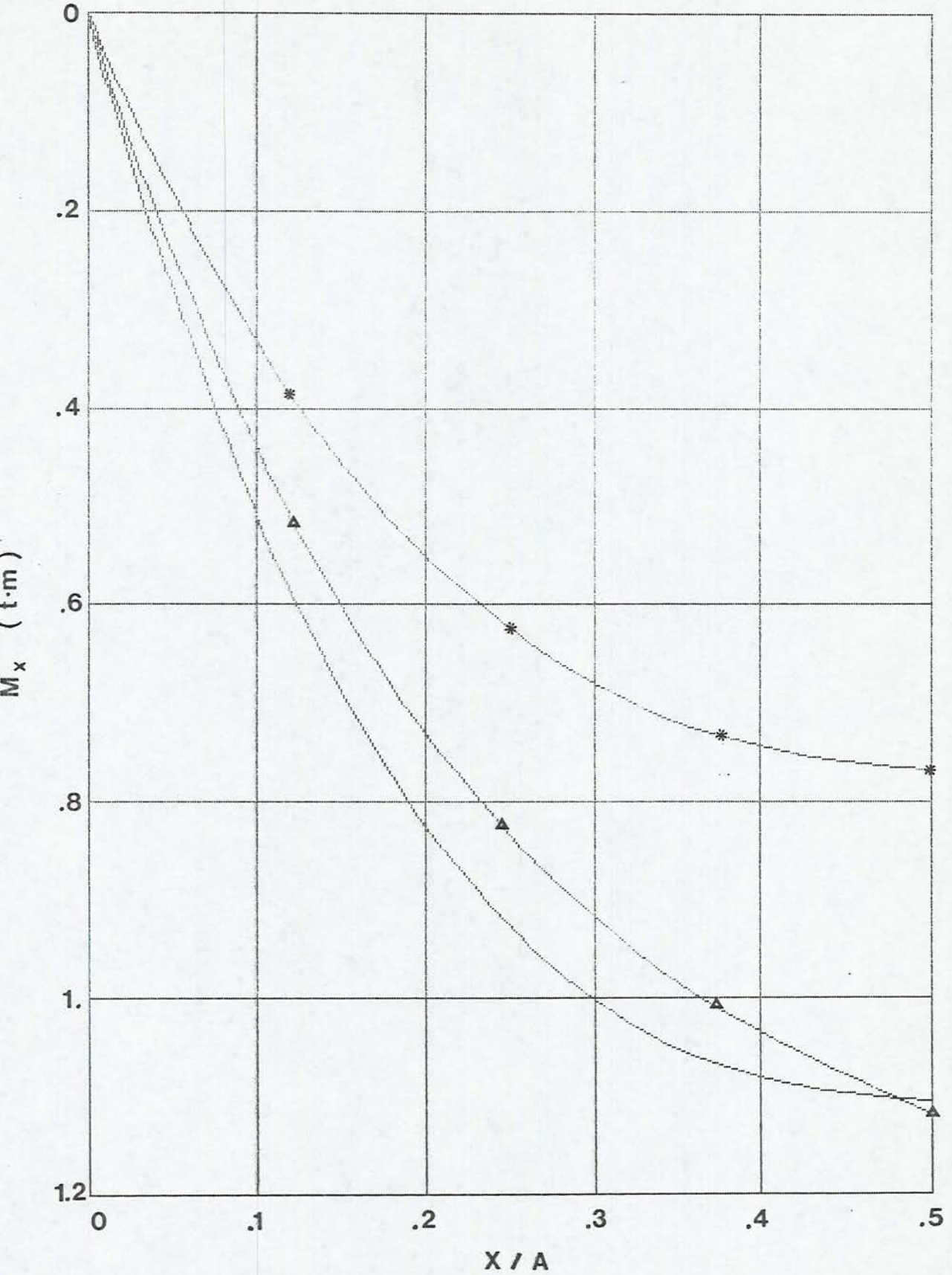
4.4.3. Değişken kalınlıklı plaklar

4.4.3.1 Uygulama 3. Değişken kalınlıklı basit plak

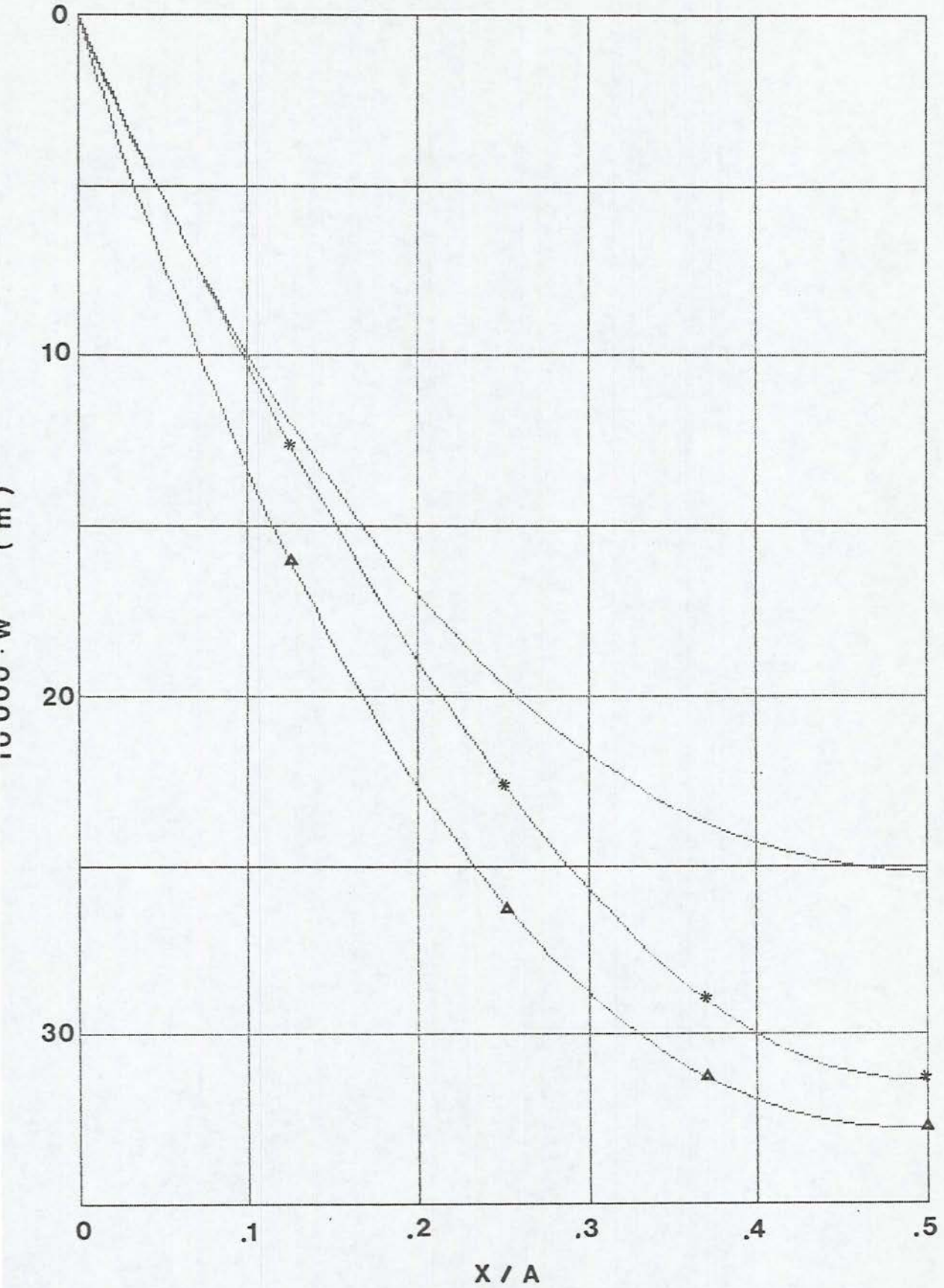
Şekil 4.13. de görülen 1 t/m² lik düzgün yayılı yüke maruz 4x4 m. lik kare plak malzemesi için $E=2100000$ t/m², $\mu=0.3$ alınmıştır. Plak kenarlarındaki kalınlık 0.08 m., plak merkezindeki kalınlık 0.16 m. olarak seçilmiştir. Kalınlık değişimi için öncelikle 0.08 m. lik sabit kalınlıklı plaga 0.08 m. yükseklikteki kare tabanlı piramitin eklenmesi ile oluşan bir model düşünülmüştür. İkinci modelde ise kalınlık değişiminin ikinci dereceden bir parabol olduğu kabul edilmiştir. Sabit 0.12 m kalınlıklı plak ile kalınlığı 0.08-0.16 m arasında prizmatik ve parabolik olarak değişen iki ayrı plaga ait M_x ve W değerleri verilmiştir (Şekil 4.14-4.15). Simetri nedeniyle plagin 1/4 ü dört kuadratik elemanla incelenmiştir.



Şekil 4.13. Değişken kalınlıklı basit plak



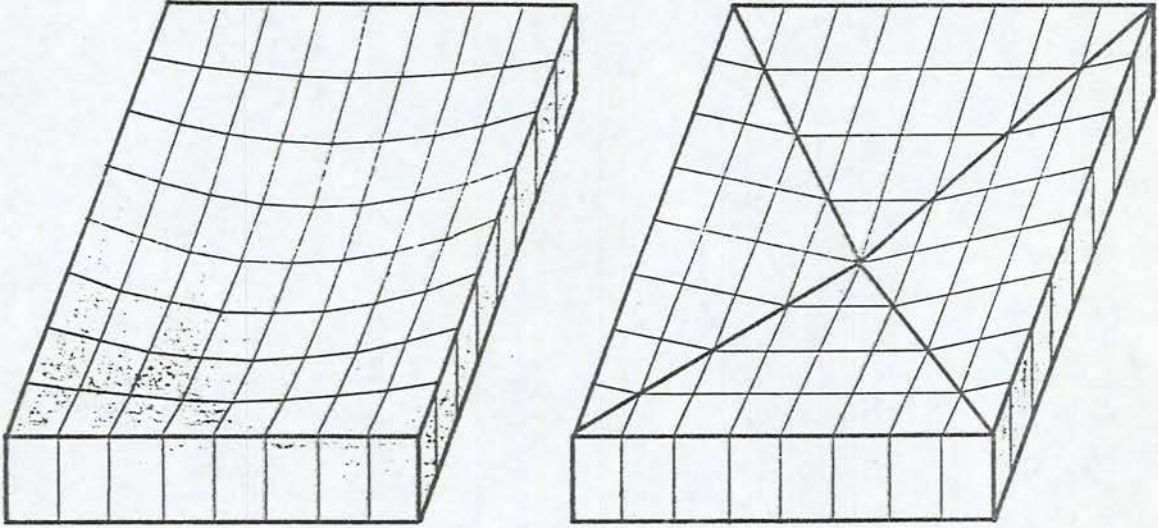
Şekil 4.14 Basit mesnetli değişken kalınlıklı kare plak Kenar orta noktası ile plak merkezini birleştiren doğru üzerinde M_x 'in değişimi. (Δ) prizmatik, (*) sabit, (-) parabolik kalınlık değişimi.



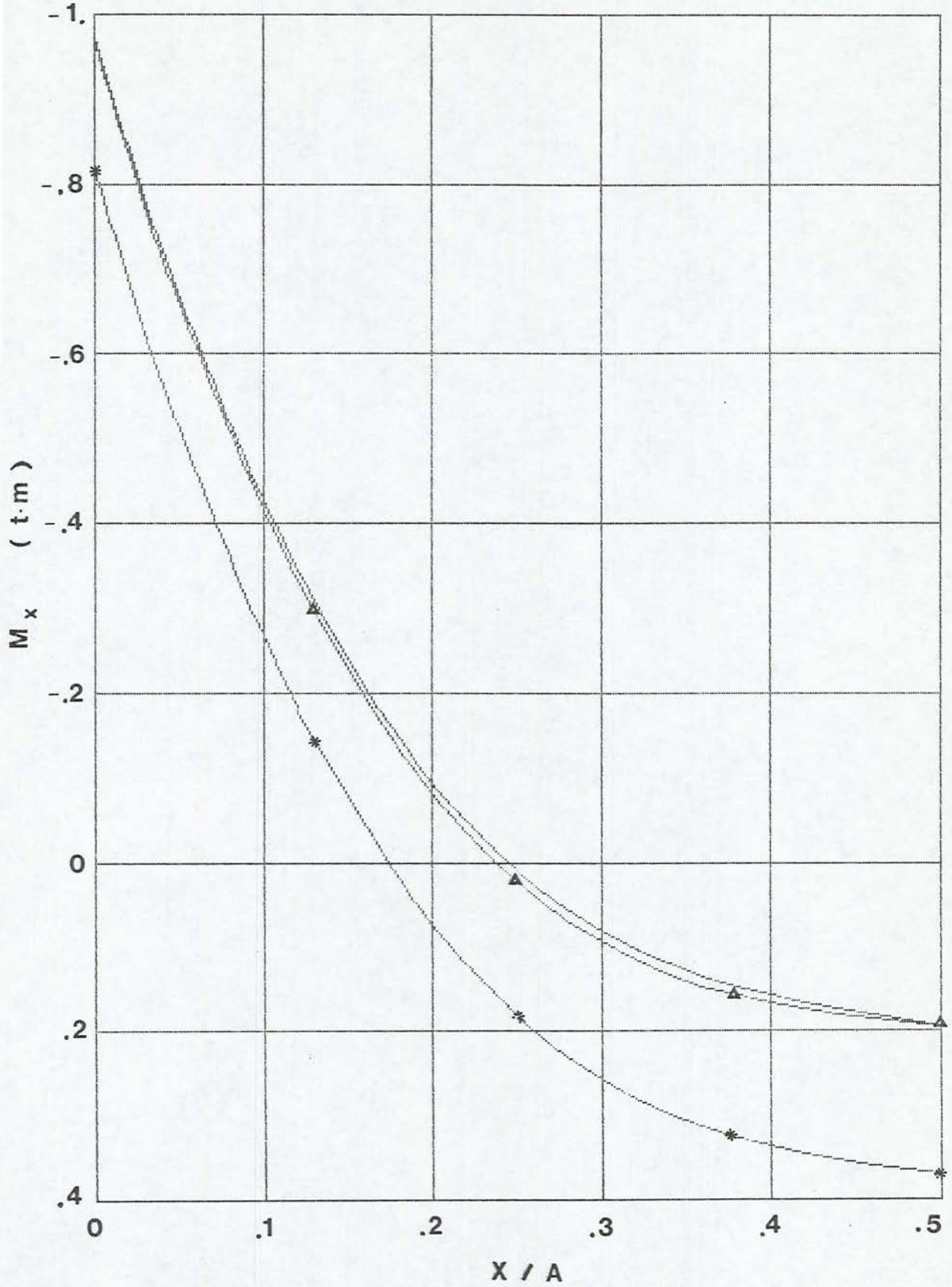
Şekil 4.15 Basit mesnetli değişken kalınlıklı kare plak Kenar orta noktası ile plak merkezini birleştiren doğru üzerinde W 'nin değişimi. (Δ) prizmatik, (*) sabit, (-) parabolik kalınlık değişimi.

4.4.3.2 Uygulama 4. Değişken kalınlıklı ankastre plak

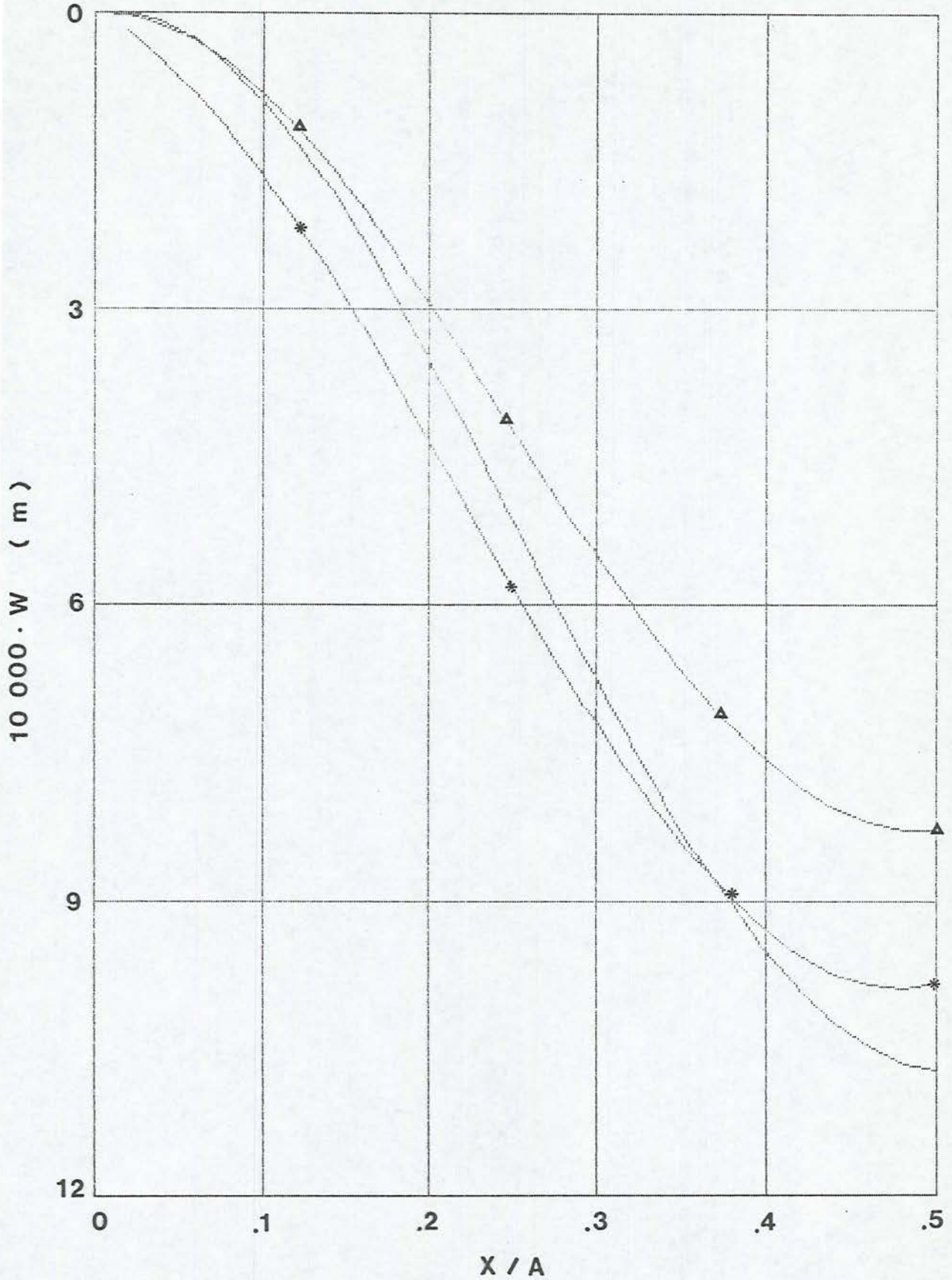
Uygulama 3 deki plak bu defa kenarlarındaki kalınlık 0.16 m., plak merkezindeki kalınlık 0.08 m. alınarak çözülmüştür. Kalınlık değişimi için önce 0.16 m. sabit kalınlıklı plaktan kare tabanlı 0.08 m. yüksekliğindeki piramitin çıkarılması ile oluşan prizmatik yapı modeli incelenmiştir. İkinci modelde ise kalınlık değişiminin ikinci derece parabol olduğu kabul edilmiştir. Plak modelleri şekil 4.16 da görülmektedir. $y=0.5b$ doğrusu üzerindeki eğilme momenti ile çökmenin değişimi sabit kalınlıklı örnek de katılarak şekil 4.17-4.18 te verilmiştir.



Şekil 4.16. Değişken kalınlıklı ankastre plak



Sekil 4.17 .Ankastre mesnetli değişken kalınlıklı kare plak Kenar orta noktası ile plak merkezini birleştiren doğru üzerinde M_x 'in değişimi. (Δ) prizmatik, (*) sabit, (-) parabolik kalınlık değişimi.

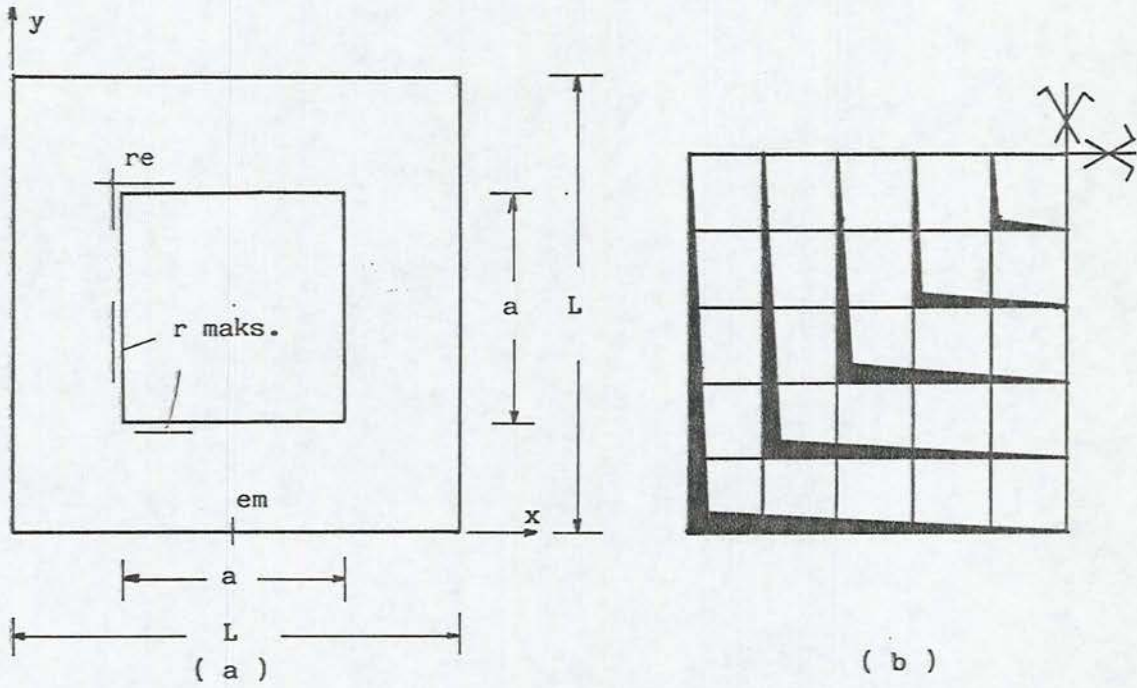


Şekil 4.18 .Ankastre mesnetli değişken kalınlıklı kare plak Kenar orta noktası ile plak merkezini birleştiren doğru üzerinde W 'nin değişimi. (Δ) prizmatik, (*) sabit, (-) parabolik kalınlık değişimi.

4.4.4.Boşluklu plaklar

4.4.4.1. Uygulama 5.Ankastre kare plak boşluk ortada

Ortasında boşluk bulunan plaga ait geometri özellikleri ile sonlu eleman ağı şekil 4.19.a,b de görülmektedir. Boşluklu ankastre plakların boyutlandırılmasında kullanılacak moment katsayıları çizelge 4.7 de verilmiştir.



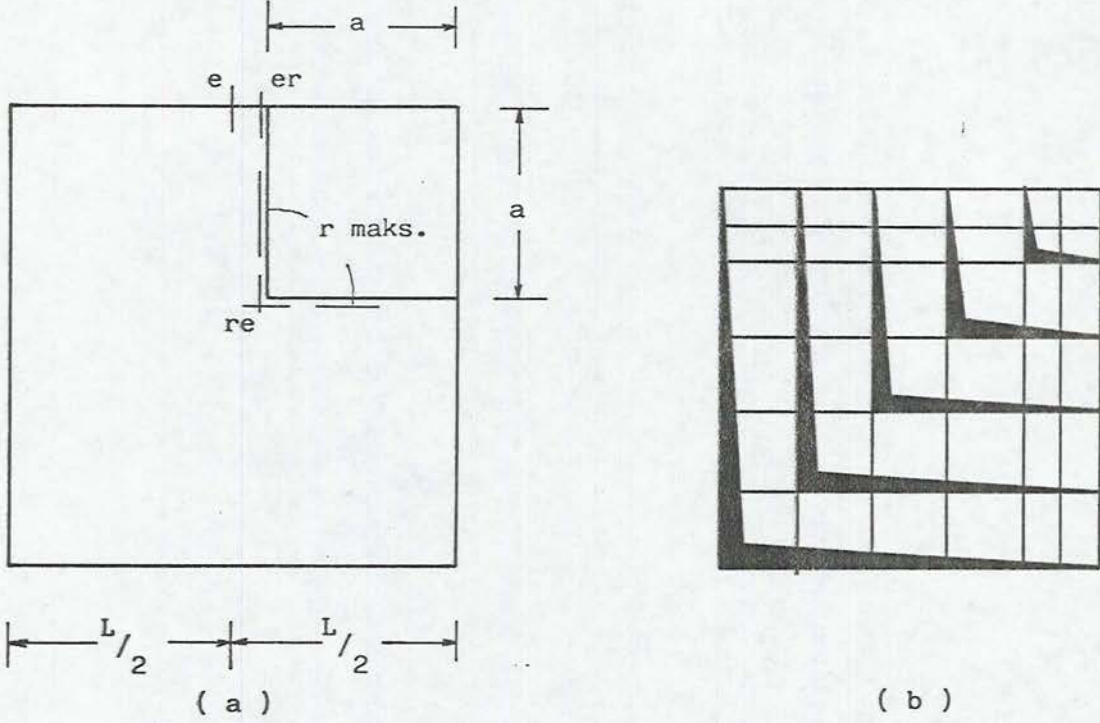
Şekil 4.19. Ankastre kare plak boşluk ortada

Çizelge 4.7. Ankastre plak, ortada kare boşluk olması durumu moment katsayıları k_i , $m_i = k_i q L^2$

a/L	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
m_{em}	-0.051	-0.046	-0.035	-0.019	-0.005	0
m_r	0.024	0.028	0.013	0.004	0.001	0
m_{re}	0.024	0.029	0.021	0.009	0.003	0

4.4.4.2 Uygulama 6. Ankastre kare plak boşluk köşede

Plaga ait sonlu eleman ağı ile moment katsayılarının alındığı kesitler şekil 4.20.a,b de görülmektedir. Moment katsayıları çizelge 4.8 de verilmiştir.



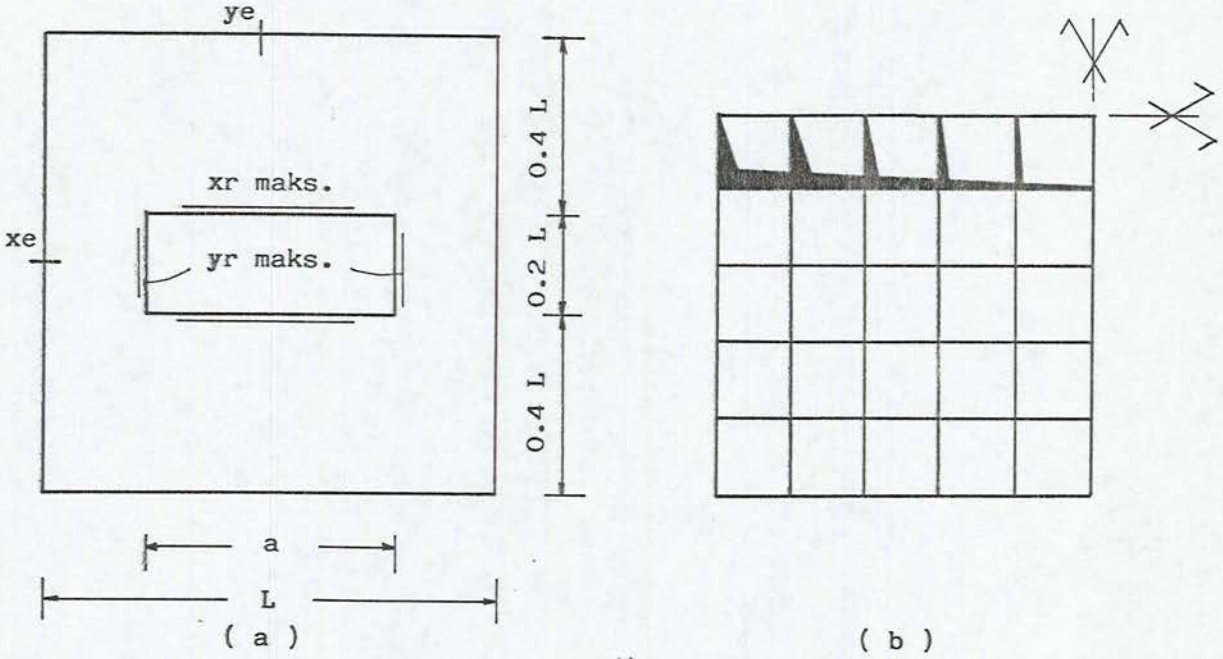
Şekil 4.20. Ankastre kare plak, boşluk köşede

Çizelge 4.8. Ankastre plak, köşede kare boşluk olması durumu moment katsayıları k_i , $m_i = k_i q L^2$

a/L	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
m_e	-0.050	-0.051	-0.056	---	---	---
m_{er}	0.000	-0.030	-0.059	-0.056	-0.017	0
m_{em}	-0.046	-0.046	-0.046	-0.041	-0.018	0
m_{re}	0.000	0.004	0.026	0.030	0.011	0

4.4.4.3.Uygulama 7. Ankastre plak ortada dikdörtgen boşluk

Şekil 4.21.a,b de özellikleri verilen plagin moment katsayıları çizelge 4.9 da verilmiştir.



Şekil 4.21. Ankastre kare plak ortada dikdörtgen boşluk

Çizelge 4.9. Ankastre plak, ortada dikdörtgen boşluk olması durumu moment katsayıları k_i , $m_i = k_i q L^2$

a/L	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
m_{ye}	-0.051	-0.046	-0.043	-0.043	-0.046	-0.047
m_{xe}	-0.051	-0.046	-0.044	-0.039	-0.023	0
m_{xr}	0.024	0.029	0.028	0.021	0.018	0.018
m_{yr}	0.024	0.029	0.024	0.015	0.007	0

4.3.5. Dinamik uygulamalar

Sürekli yayılı kütleye sahip olan plakları, kütlelerin belirli noktalarda toplandığı kabulü ile çok serbestlik dereceli (ÇSD) sistem olarak incelemek mümkündür. Serbest titreşim yapan sönümsüz ÇSD sistemin hareket denklemi,

$$[m] \{ \ddot{X} \} + [k] \{ X \} = 0 \quad (4.4)$$

ile verilebilir Erdik ve Yüzügüllü, 1980.

Burada $[m]$ kütle matrisini, $[k]$ rijitlik matrisini ve $\{ X \}$ deplasman vektörünü göstermektedir. Denklemin çözümü için

$$X_i = A_i f(t), \quad f(t) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t) \quad (4.5)$$

önermesi yapıldığında ,

$$[[k] - \omega^2 [m]] \{ A \} = 0 \quad (4.6)$$

karakteristik değer denklemi elde edilir. Bu ifadeyi,

$$[k] \{ A \} = \omega^2 [m] \{ A \} \quad (4.7)$$

şeklinde yazıp denklemin her iki tarafını $[k]$ ile çarpıp, ω^2 ye bölersek

$$1/\omega^2 \{ A \} = [k]^{-1} [m] \{ A \} \quad (4.8)$$

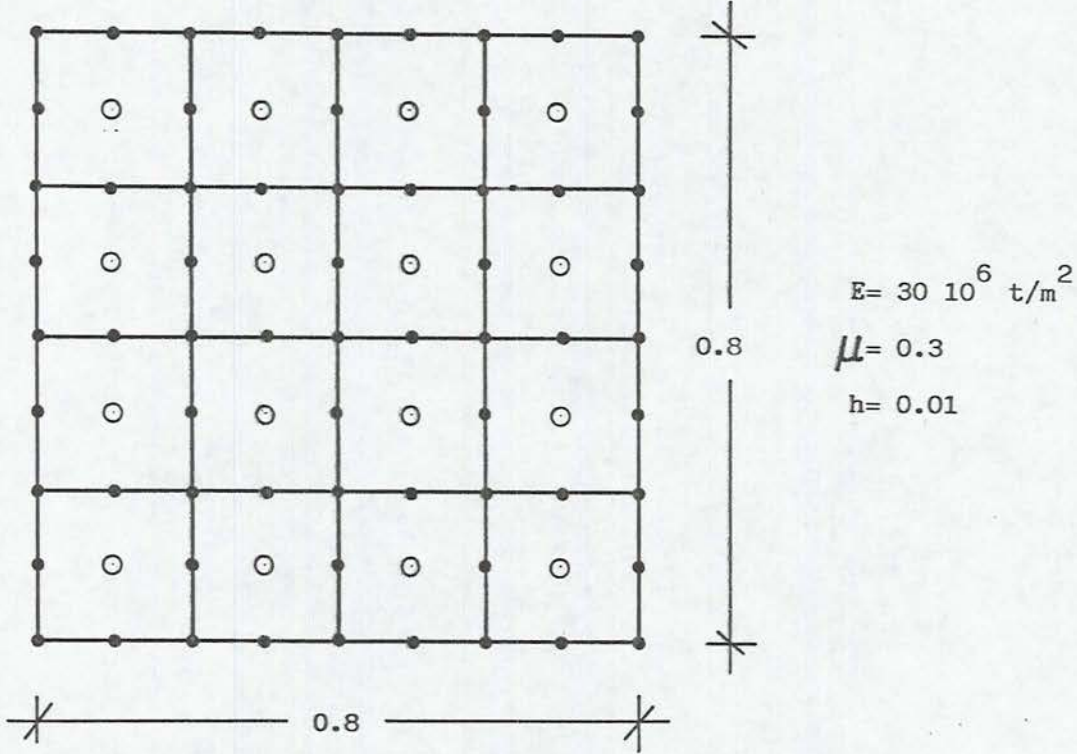
bağıntısı bulunur. $[k]^{-1} = [d]$ fleksibilite matrisi olduğu düşünülerek,

$$[a] = [d] [m]$$

dinamik matris tanımı yapılırsa

$$[a] \{A\} = 1/w^2 \{A\} \quad (4.9)$$

biçiminde bir özdeğer problemi elde edilir. Burada w açısal frekansı tanımlamaktadır. Bu özdeğer probleminin çözümünde bütün özdeğerleri aynı anda verebilen Jacobi yöntemi kullanılabilir gibi matris iterasyonuna dayanan ve temel titreşim moduna karşı gelen en küçük özdeğeri -açısal frekansı- veren Vianello-Stodola yöntemi de kullanılabilir. İterasyonla çözüm yapılması durumunda ikinci ve daha sonraki özdeğerlerin bulunabilmesi için önceki modların etkisinden arıtılmış yeni dinamik matrisin kullanılması gerekir. Plak fleksibilite matrisleri çeşitli noktalara birim yükleme yapılarak belirlenmiştir (şekil 4.22).



Sekil 4.22. Plakın geometri ve malzeme özellikleri

Çizelge 4.7 Basit mesnetli kare plak açısai frekanslar (w)

MOD		Kesin çözüm	Kullanılan yöntem	HATA %
m	n			
1	1	1012.659	1011.648	-0.1
1	2	2531.650	2512.759	-0.746
2	2	4050.639	3943.218	-2.65
1	3	5063.300	4783.465	-5.52
2	3	6582.288	5961.295	-9.43

Çizelge 4.8 Ankastre kare plağın teorik frekans parametresi
 $w a^2 \sqrt{F / D}$

MOD		Leissa, (1973)	Jones and Milne, (1976)	Kullanılan yöntem
m	n			
1	1	35.992	35.999	35.916
1	2	73.413	73.405	73.506
2	2	108.270	108.240	106.268
1	3	131.940	131.900	147.523
2	3	---	165.020	168.700
1	4	---	210.530	211.185

Çizelge 4.9 Dört köşesinden mesnetli kare plak frekans parametresi

$$\left(w \frac{a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\gamma h}{Dg}} \right)$$

MOD	Cox & Boxer 1960	Ritz çözümü	Seri çözümü	Kullanılan yöntem
1	0.721	0.756	0.721	0.713
2	1.594	1.702	1.598	1.606
3	1.594	1.702	1.598	1.606
4	1.938	1.986	1.986	2.192
5	3.896	4.200	3.895	3.807
6	---	5.230	5.100	---
7	4.411	4.890	4.500	4.720

m ve n, Analitik çözümlerdeki Fourier serilerinden gelen nümerik tamsayı çarpanlardır.

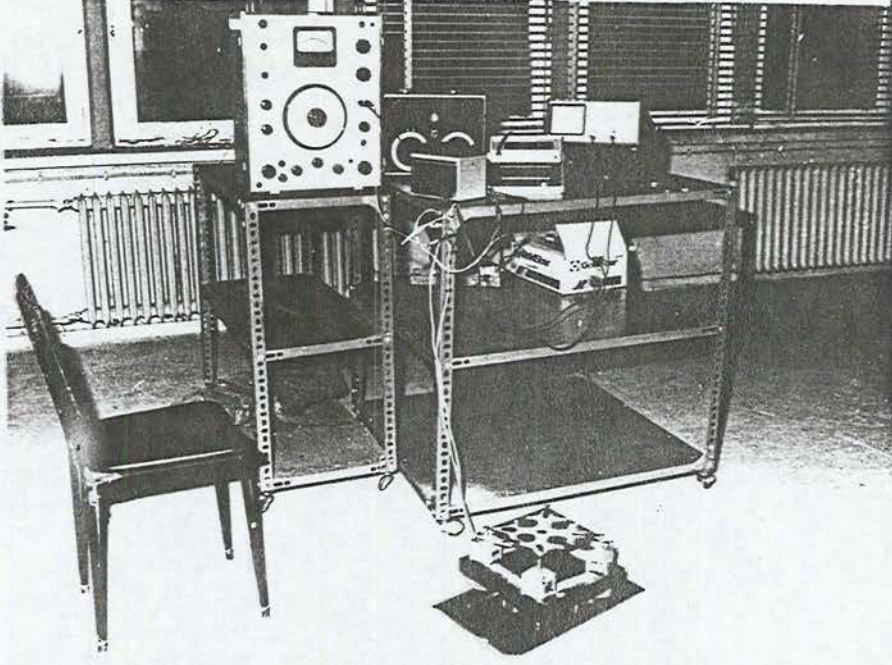
5.

DENEYSSEL ÇALIŞMA

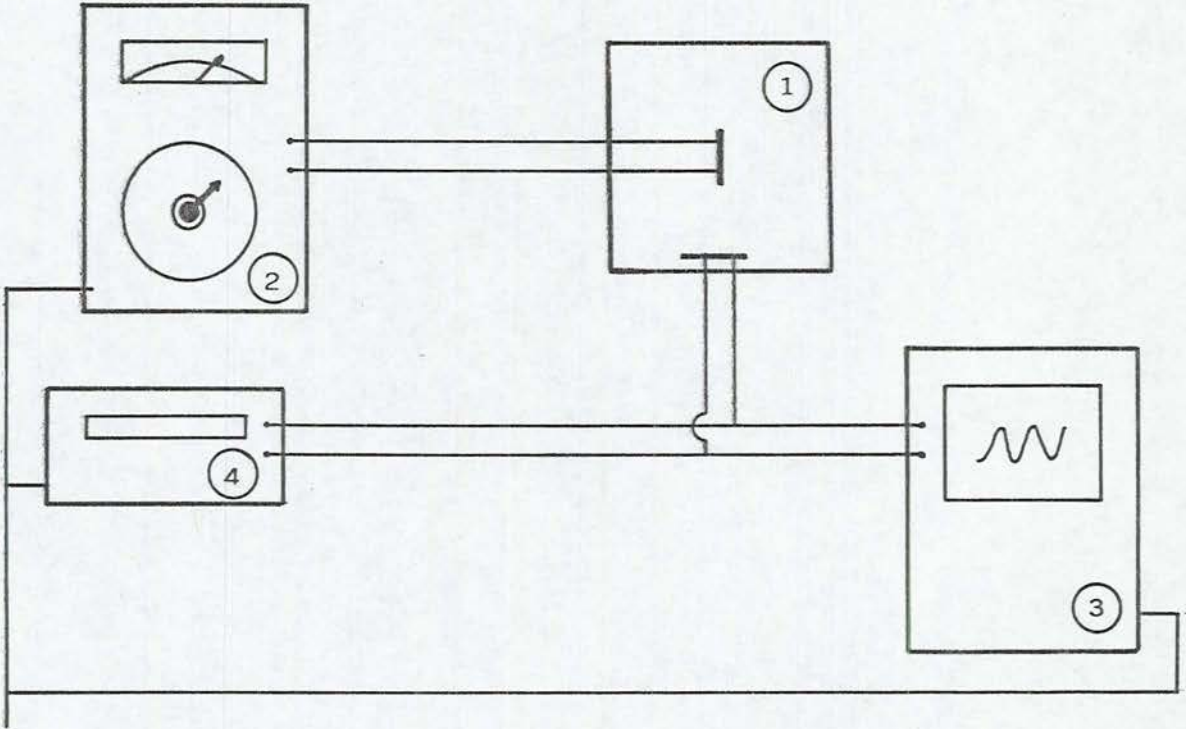
5.1. Deney

Dört köşesinden mesnetlenmiş kare plağın serbest titreşim mod ve frekans değerleri araştırılmıştır. Deney sistemi ve bağlantı şeması şekil 5.1.a,b de görülmektedir. Dalga üreticide üretilerek plak ortasındaki piezoelektrik uyarıcıya gönderilen titreşimler, plak kenarında bulunan diğer bir piezoelektrik alıcı ile toplanmaktadır. Toplanan titreşim değerleri çift girişli bir osiloskop ve bir frekans sayıcı yardımı ile değerlendirilmiştir. Oluşan mod şekilleri plak modeli üzerinde bulunan çok ince taneli kumun plağın hareketsiz bölgelerine toplanması ile açığa çıkmaktadır. Örnek mod şekilleri şekil 5.2.a,b de verilmiştir. Bu modlara karşı gelen frekans değerleri sırası ile 1300 ve 1640 Hz. olarak tesbit edilmiştir.

Model olarak 20x20x0.25 cm. lik alüminyum plak kullanıldı. Plak malzemesine ait elastisite modülü, aynı malzemedен yapılmış bir konsol kiriş üzerindeki basit çökme deneyi ile 300 000 kg/cm² olarak tesbit edildi. Alüminyumun özgül ağırlığı ise 2500 kg/m³ olarak belirlendi. Deneyde, bir kaç mod şekli ve titreşim frekansının belirlenmesi ile yetinilmiştir.

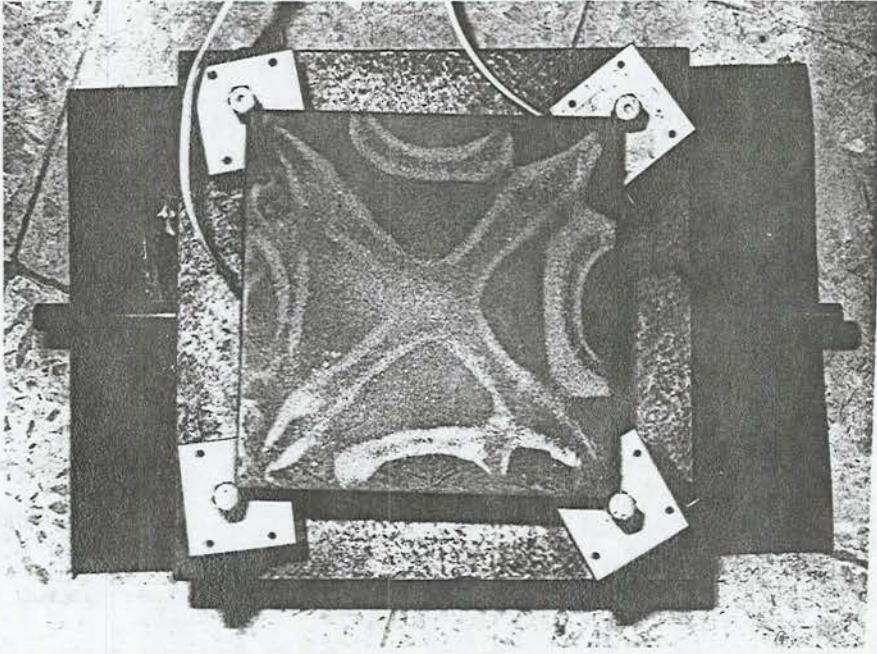


(a)

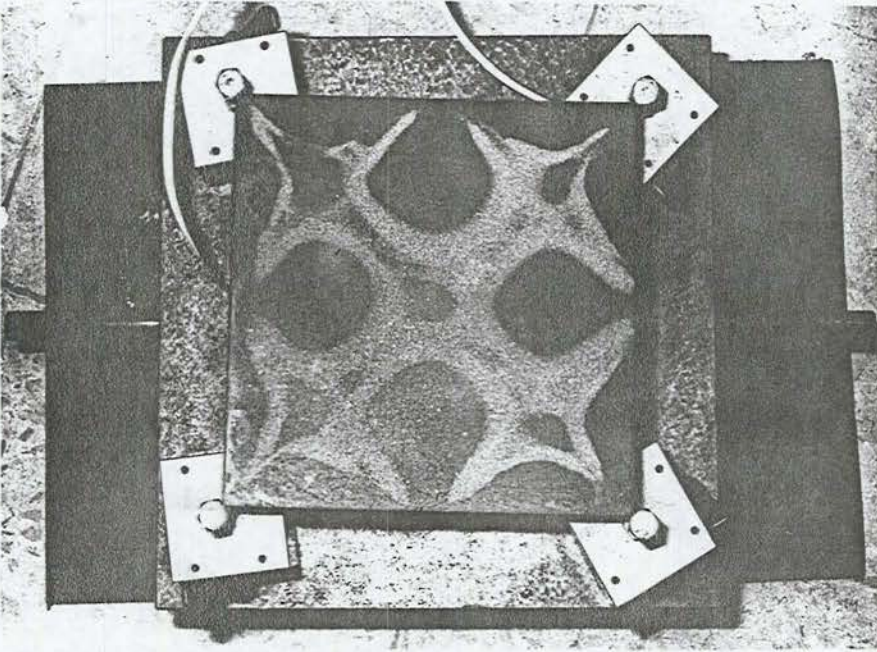


(b)

Şekil 5.1. a) Deney sistemi b) Bağlantı şeması
 1. Plak, 2. Dalga üretici,
 3. Osiloskop, 4. Frekans ölçer.



(a)



(b)

Şekil 5.2. Örnek mod şekilleri

5.2. Deney Aletlerinin Özellikleri

1. Beat Frequency Oscillator'un Özellikleri

- Tipi : 1014
 - Markası : Brüel and Kjaer
 - Frekans kademesi : 20-20000 Hz. arasında logaritmik tarama
 - Frekans duyarlılığı : $\% 01 \pm 1$ Hz.
 - Çıkış empedansı : 6,60 veya 600 le 6000 Ω 'a ayarlanabilir.
 - Çıkıştan alınabilecek en büyük güç 2.5 watt.
 - Çıkış geriliminin duyarlılığı : 50-10 kHz arasında ± 0.2 desibel, 20-20000 Hz arasında ± 1 desibel
 - Çıkıştaki distorsiyon miktarı:
- | Fr. | 20 | 200 | 2000 | 10000 Hz. |
|---------------------|-----|------|------|-----------|
| Yüklenmemiş halde % | 1 | 0.1 | 0.1 | 0.7 |
| 1 watt'la yüklü % | 0.2 | 0.25 | 0.25 | 1.2 |
- Çıkış zayıflatıcısı : 10 desibellik adımlarla değişken 125 V'tan 12.5 V'a kadar.

2. Kullanılan piezoelektrik gage'lerin özellikleri

- Cinsi : BEG/1-5
- Uzunluk : 2.54 cm.
- Genişlik : 0.3175 cm.
- Kalınlık : 0.0508 cm.
- Kapasitesi : 3.2 pF
- Çalışma sıcaklığı -270°C den + 250°C
- Enbüyük şekil değişim miktarı : $2.5 \cdot 10^{-4}$
- Enbüyük çalışma frekansı : 50 kHz.

3. Goldstar Frequency counter 100 MHz. FC-7011

- Frekans bölgesi : 1 Hz - 100 MHz.
 - Hassaslık : \pm (1 Hz+1 digit+zaman bazı hatası)
 - Giriş özellikleri:
- | | | |
|---------------------|-----------------------|---------|
| duyarlık (RMS) | 10 Hz - 60 MHz | : 10 mV |
| | 60 MHz - 100 MHz | : 25 mV |
| giriş empedansı | 1 M Ω / 100 pF | |
| maks. giriş voltajı | 150 V RMS | |
- Referans osilatörü:
- | | |
|-----------|----------------------|
| frekans | 10 MHz, Kristal |
| stabilite | 5 PPM (0°C - 50°C) |

6.

SONUÇLAR

1- Bu çalışmada Kirchoff plakları için fonksiyonel analiz yolu ile geometrik ve dinamik sınır koşullarını da kapsayan fonksiyoneller elde edilmiştir. Fonksiyoneller, kinematik ve dinamik bilinmeyenleri bağımsız değişken olarak içerir. Fonksiyonellerin özel hallerde en küçük potansiyel enerji (en küçük tamamlayıcı enerji) ifadesine dönüşebildiği gösterilmiştir.

2- Fonksiyonellerde birinci mertebeden büyük türevler bulunmadığı için bilineer şekil fonksiyonları kullanılsa dahi gerek ve yeter koşullar tam olarak sağlanmaktadır. Fonksiyonellerin bu yapısı dolayısıyla eleman rijitlik matrisleri çok sade bir biçimde elde edilebilmekte bu da bilgisayar zamanında büyük tasarruf sağlamaktadır.

3- Fonksiyonellerin bir başka üstünlüğü de mühendislik problemlerinde asıl gerekli olan moment değerlerinin büyük bir hassasiyetle denklem takımının çözümü sonucunda doğrudan elde ediliyor olmasıdır. Halbuki deplasman yönteminde, momentlerin bulunması için deplasmanların bulunmasından sonra ek bilgisayar zamanına ihtiyaç olmaktadır.

4- Bu fonksiyoneller Ritz ve Varyasyonel türev yöntemi ile düzgün yayılı ve merkezi tekil yük etkisindeki kenarlarından basit ve ankastre mesnetli kare plaklar için ayrı ayrı hesaplanmıştır.

5- Elde edilen fonksiyonel kullanılarak plakların karma sonlu eleman formulasyonu yapılmıştır. Sürekli kalınlık değişimi dikkate alınarak;

a) lineer şekil fonksiyonları kullanılarak üç düğüm noktalı üçgen eleman,

b) Bilineer şekil fonksiyonları kullanılarak dört düğüm noktalı dikdörtgen eleman,

c) Kuadratik şekil fonksiyonları kullanılarak altı düğüm noktalı üçgen eleman,

d) Kuadratik şekil fonksiyonları kullanılarak dokuz düğüm noktalı dikdörtgen eleman,

rijitlik matrisleri açık formda elde edilmiştir.

Plaktaki kalınlık değişimi için sözkonusu elemanın şekil fonksiyonları aynen kullanılmıştır.

6- Kiriş-plak sistemleri için, kiriş ile plak arasındaki burulma momenti ihmal edilerek kiriş ile plakin enerjileri toplamından hareketle karma sonlu eleman formulasyonu yapılmıştır. Bu formulasyonda plak momentleri, kiriş momenti ve ortak çökme değerleri bilinmeyen olarak bulunmaktadır. Nümerik uygulamalardan elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmüştür.

7- Literatürde pek fazla rastlanılmayan sürekli kalınlık değişimine sahip (sabit, prizmatik ve 2. derece parabol) çeşitli plak problemleri çözülmüş, basit ve ankastre mesnetli plaklara ait eğilme momenti ve çökme değerleri grafik olarak verilmiştir.

8- Literatürdeki boşluklu plak örnekleri çözümlenerek boyutlandırılmada kullanılan moment katsayıları çizelgeler halinde verilmiştir. Plak kenarına ait moment katsayıları Beton kalender değerleri ile hemen hemen üst üste düşerken boşluk kenarlarına ait katsayılar % 30 a kadar varabilen mertebede daha büyüktür.

9- Plakların serbest titreşimlerine ait özdeğer problemi, çesitli sınır koşullarına sahip plaklar için incelenmiştir. Özellikle ilk modlara karşı gelen açısal frekans değerlerinin çok hassas olduğu, bundan sonra sonuçlardaki hassasiyetin azaldığı belirlenmiştir. Dinamik deneyler yapılarak bu yöntemle bulunan frekansların uygun oldukları sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aköz, Y.A., 1985, Çubuklar için yeni enerji fonksiyonelleri ve uygulamaları, IV. Ulusal Mekanik Kongresi Bildirileri, Bayramoğlu Kocaeli, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi matbaası, 1986, 100-112.
- Aköz, Y.A. ve Kazancıoğlu, S., 1986, Değişken kesitli çubukların hesabı, Bitirme ödevi, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, (yayınlanmamış)
- Bathe, K.J., 1982, Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 735 p.
- Beton Kalender, 1983, Verlag Von Wilhelm Ernst & Sohn, II.
- Brebbia, C.A., and Ferrante, A.J., 1979, Computational methods for the solution of engineering problems, Pentech Press Limited London:Plymouth, 354 p.
- Clifton, R.J., Chang, J.C.L., and Tung, Au., 1963, Analysis of orthotropic plate bridges, Proceedings Of The American Society Of Civil Engineers, Journal Of The Structural Division, 39, Oct., pp. 133-171.
- Cook, R.D., 1974, Concepts and applications of finite element analysis, John Wiley and Sons Inc, 402 p.
- Cox, H.L., and Boxer, J., 1960, Vibrations of rectangular plates point supported at the corners, The Aeronautical Quarterly, 11, 1, pp. 41-50.
- Day, M.L., and Yang, T.Y., 1982, A mixed variational principle for finite element analysis, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 18, pp.1213-1230.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Erdik, M., ve Yüzügüllü, Ü., 1980, Deprem mühendisliği açısından yapı dinamiğine giriş, Deprem Araştırma Enstitüsü Başkanlığı, 204 s.
- Fujii, F., 1981, Discrete and non-discrete mixed methods for plate bending analysis, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 17, pp. 1843-1859.
- Ghosh, K.K., and Som, P.K., 1978, Automated system analysis of plates with edge beam interactions, Computers and Structures, 9, pp. 101-111.
- Herrmann, L.R., 1965, A bending analysis for plates, Proc. 1st Conf. On Matrix Methods In Structural Mechanics, Ohio, pp. 577-602.
- Hrabok, M.M., and Hrudey, T.M., 1984, A review and catalogue of plate bending finite elements, Computers and Structures, 19, 3, pp. 479-495.
- Inan, M., 1973, Cisimlerin mukavemeti, Ofset Matbaacılık Ltd. Şti., 560 s.
- Jia-rank, F., 1982, Plates of varying thickness with four simply supported edges, Journal Of The Engineering Mechanics Division: Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 108, EM1, pp. 167-173.
- Jones, R., and Milne, B.J., 1976, Application of the extended Kantorovich method to the vibration of clamped rectangular plates, Journal of Sound and Vibration, 45, 3, pp. 309-316.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Karamanlidis, D., and Atluri, S.N., 1984, Mixed finite element models for the plate bending problems, Computers and Structures, 19, 3, pp. 431-445.
- Leissa, A.W., 1969, Vibrations of plates, NASA SP-160.
- Leissa, A.W., 1973, The free vibration of rectangular plates Journal Of Sound and Vibration, 31, 3, pp. 257-293.
- Oden, J.T., and Reddy, J.N., 1976, Variational method in theoretical mechanics, Springer Verlag.
- O'Leary, J.R., and Harari, I., 1985, Finite element analysis of stiffened plates, Computers and Structures 21, 5, pp. 973-985.
- Pian, T.H.H., and Tong, P., 1969, Basis of the finite element methods for solid continua, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1, 1, pp. 3-28.
- Reed, R.E., 1965, Comparison of methods in calculating frequencies of corner supported rectangular plate, NASA-TN-D3030.
- Rossow, M.P., and Ibrahimkhalil, A.K., 1978, Constraint method analysis of stiffened plates, Computers and Structures, 8, pp. 51-60.
- Sarıoğlu, M.T., 1978, A four-node mixed quadrilateral element for plate bending, MS Thesis, Middle East Technical University, 130 p. (Unpublished)

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Serieg, A.A., and Al-Shareedah, E.M., 1986, Use of undetermined multipliers in the design of stiffened plates, Computers In Mechanical Engineering, March, pp. 57-64.

Srinivasan, R.S., and Thiruvengkatachari, V., 1984, Static analysis of stiffened plates, AIAA Journal, 22, 9, pp. 1342-1344.

Szabo, B.A., and Kassos, T., 1975, Linear equality constraints in finite element approximation, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 9, pp. 563-580.

Szilard, R., 1974, Theory and analysis of plates: classical and numerical methods, Prentice Hall Inc, USA, 724 p.

Tekinalp, B., 1952, Elastik çubuklara oturan plakların çözümleri, Doktora Tezi, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, 91 s. (yayınlanmamış)

Timoshenko, S.P., and Krieger, S.W., 1959, Theory of plates and shells, McGraw Hill Book Company Inc, New York.

Ugural, A.C., 1981, Stresses in plates and shells, McGraw Hill Inc, USA, 317 p.

Ek 1.

BİLGİSAYAR PROGRAMI

Çalışmada BASIC dilinde yazılmış bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Program, AMSTRAD 2086S tipi kişisel bilgisayarda geliştirilmiştir. Klasik plak problemleri, giriş-plak sistemleri ve değişken kalınlıklı plakları çözebilecek yapıda olan program, bir ana program ve buna bağlı dört alt programdan oluşmaktadır. Programlar sıra ile şunlardır.

ANA : Alt programları sıra ile icra ettirir.

DUGUM : Düğüm noktası bilgileri ile serbestlikler tanımlanır. Koordinatlar COR, serbestlikler ise JDEG% adlı tek boyutlu dizilere düğüm numarası sırasına bağlı olarak yerleştirilir.

ELEMAN: Plak ve çubuk elemanlar tanımlanır.

SISTEM: Sistem matrisi ve yük vektörü kurulur. Elemanlara ait rijitlik matrislerinin yarısı (simetri özelliği) K tek boyutlu dizisine, daha sonra bu diziler SISTEM adlı random dosyaya -sistem rijitlik matrisine- yazılır.

COZUM : Denklem takımı GAUSS indirgeme yöntemi ile çözümlenerek sonuçlar basılır.

Ana programda giriş yüksekliği (K5), plaga uygulanacak değişik yükleme sayısı (NYUK%), düzgün yayılı yük değeri (Q), tekil yüklerin bulunup bulunmadığına (TK%) ait bilgiler INPUT la verilmektedir. ELEMAN ve SISTEM alt programlarının çalışması sırasında elemanların kod numaralarını oluşturan ikinci dereceden bir alt programdan yararlanılır.

maktadır. Bu alt programda her elemanın düğüm noktası serbestlikleri JDEG% den çekilip NCODE% tek boyutlu dizisine yerleştirilmektedir.

Programa bilgi girişi aşağıdaki şekilde yapılır.

1. Elastisite modülü, poisson oranı, plak kalınlığı
2. Düğüm numarası, x koordinatı, y koordinatı, $1/(Eh^3)$ değeri (sabit kalınlıklı plak için 0), M_x M_y M_{xy} ve W değişkenleri için sıra ile serbestlikler:
 - 1, belirsiz -değişkenin değeri hesapla bulunacak-
 - 0, belirli -değişkenin değeri hesaba alınmayacak-
 - , BIT\$ (son düğüm ise "S" yoksa bir boşluk) verilir.
3. Eleman no, düğüm numaraları, eleman tipi (dikdörtgen için 9, üçgen için 6, çubuk için 3), BIT\$
4. Tekil yük varsa; tekil yükün bulunduğu düğüm numarası, yükün değeri, BIT\$.
5. Kiriş-plak sistemlerini çözmek için ana programdaki KP% değişkeni 2 yapılmalıdır.

Örnek olarak y yönündeki rijitliği lineer olarak değişen dört kenarından basit mesnetli plak düzgün yayılı ve trapez yayılı yükleme halleri için çözülmüştür.

REM ELASTISITE MOD, POISSON ORANI, KALINLIK
 DATA 210,.16,.1

REM DUGUM NO, X KOORD, Y KOORDINATI, 1/(EH^3) DEGERI,
 REM Mx, My, Mxy, W DEGİSKENLERINE AIT KODLAMA,
 REM 1, 0 DEGİSKENIN BILINMEYEN OLARAK ALINDIGINI GOSTERIR.
 REM SON DUGUM NO'DAN SONRA -S- VERINIZ

DATA 1,0,0,7.14,0,0,1,0,
 DATA 2,0,1,9.14,0,0,1,0,
 DATA 3,0,2,12.7,0,0,1,0,
 DATA 4,0,3,20.78,0,0,1,0,
 DATA 5,0,4,57.10,0,0,1,0,
 DATA 6,1,0,7.14,0,0,1,0,
 DATA 7,1,1,9.14,1,1,1,1,
 DATA 8,1,2,12.7,1,1,1,1,
 DATA 9,1,3,20.78,1,1,1,1,
 DATA 10,1,4,57.10,0,0,1,0,
 DATA 11,2,0,7.14,0,0,1,0,
 DATA 12,2,1,9.14,1,1,1,1,
 DATA 13,2,2,12.7,1,1,1,1,
 DATA 14,2,3,20.78,1,1,1,1,
 DATA 15,2,4,57.10,0,0,1,0,
 DATA 16,3,0,7.14,0,0,1,0,
 DATA 17,3,1,9.14,1,1,1,1,
 DATA 18,3,2,12.7,1,1,1,1,
 DATA 19,3,3,20.78,1,1,1,1,
 DATA 20,3,4,57.10,0,0,1,0,
 DATA 21,4,0,7.14,0,0,1,0,
 DATA 22,4,1,9.14,0,0,1,0,
 DATA 23,4,2,12.7,0,0,1,0,
 DATA 24,4,3,20.78,0,0,1,0,
 DATA 25,4,4,57.10,0,0,1,0,S

REM ELEMAN NO, DUGUM NOLARI, ELEMAN TIPI, SON ELEMENDAN
 REM SONRA -S- VERINIZ

DATA 1,1,6,11,2,7,12,3,8,13,9,
 DATA 2,3,8,13,4,9,14,5,10,15,9,
 DATA 3,11,16,21,12,17,22,13,18,23,9,
 DATA 4,13,18,23,14,19,24,15,20,25,9,S

REM TEKIL YUK BULUNAN DUGUM NO, YUKUN DEGERI,
 REM SON YUK DEGERINDEN SONRA -S- VERINIZ

DATA 7,11.11,
 DATA 8,4,
 DATA 9,4.88,
 DATA 12,5.56,
 DATA 13,2,
 DATA 14,2.44,
 DATA 17,11.11,
 DATA 18,4,
 DATA 19,4.88,S

OPEN "SCRN:" FOR APPEND AS #1 LEN=8
 PRINT #1,CHR\$(15)
 REM PROGRAM 81 DUGUM NOKTASI ICIN BOYUTLANMISTIR
 REM SONLU ELEMAN PLAK PROGRAMI 1990
 REM NYUK% = YUKLEME SAYISI
 REM MST% = BIR NODDAKI DEGISKEN SAYISI
 REM NJT% = ELEMENDAKI NOD SAYISI
 REM KP% = (0, KIRISSIZ PLAK 2, KIRISLI PLAK)
 DIM CDR(162),JDEG%(324),D(81),DEG%(9),D1%(9),NCODE%(36),D2(9)
 DIM K(666),W(9),CU(9,9),CV(9,9)
 MST%=4 : NJT%=9 : KP%=0 : KK%=0 : PI=ATN(1)*4
 DIM B(NJT%,NJT%),A(NJT%,NJT%),C(NJT%,NJT%),D3(NJT%,NJT%)
 INPUT "KIRIS YUKSEKLIGI=";K5
 INPUT "NYUK% , Q , TK% ";NYUK%,Q,TK%
 DIM R(300,NYUK%)
 GOSUB 10 : REM DUGUM
 GOSUB 20 : REM ELEMAN
 GOSUB 30 : REM SISTEM
 15 GOSUB 600 : REM COZUM
 END

```

10 REM DUGUM
PRINT #1,"SONLU ELEMANLAR YONTEMI ILE PLAK COZUMU"
PRINT #1,
READ E,P,H
PRINT #1,"ELASTISITE MODULU=";E,
PRINT #1,"POISON ORANI   =" ;P,
PRINT #1,"KALINLIK       =" ;H,
PRINT #1,"YUKLEME SAYISI  =" ;NYUK%,
PRINT #1,"YAYILI YUK(t/m^2)=";Q
IF KP%<>2 GOTO 1
PRINT #1,"KIRIS YUKSEKLIGI =" ;K5,
PRINT #1,"KIRIS GENISLIGI  =" ;.2
1 PRINT #1,
PRINT #1,"DUGUM NOKTALARI BILGILERI"
PRINT #1," DU   X   Y   Mx   My   Mxy   W   Kx   Ky   Lag.c   1/D "
PRINT #1,STRING$(68,"=")
MST1%=MST%+KP%+KK%
2 READ J%,X,Y,DB
FOR I%=1 TO MST1%
READ DEG%(I%)
NEXT I%
READ BIT$
ND%=ND%+1
K%=(J%-1)*2+1
COR(K%)=X
COR(K%+1)=Y
IF DB=0 THEN DB=12/(E*H*H*H)
D(ND%)=DB
FOR I%=1 TO MST1%
L%=L%+1
IF DEG%(I%)=0 GOTO 3
N%=N%+1
JDEG%(L%)=N%
GOTO 4
3 JDEG%(L%)=0
4 NEXT I%
LL%=L%-(MST%-1)-KK%-KP%
PRINT #1,USING "###";J%;
PRINT #1,USING " ###.### ";COR(K%);COR(K%+1);
FOR I%=LL% TO L%
PRINT #1,USING " ### ";JDEG%(I%);
NEXT I%
IF KP%=0 THEN PRINT #1," ";
IF KK%=0 THEN PRINT #1," ";
PRINT #1,USING "###.### ";DB;
PRINT #1,BIT$
IF BIT$<>"S" GOTO 2
PRINT #1,
PRINT #1,"TOPLAM DUGUM SAYISI=";ND% ,
PRINT #1,"BILINMEYEN SAYISI =" ;N%
RETURN

```

```

20 REM ===== ELEMEN =====
   OPEN "0",2,"ELEM DAT.SEQ"
   PRINT #1,: PRINT #1,"ELEMEN BILGILERI"
   PRINT #1,"ELEMEN D1      D2      D3      D4      D5      D6      D7      D8      D9      TIP      H      SON"
   PRINT #1,STRING$(65,"=")
25 READ J1%
   FOR I%=1 TO NJT%
     READ D1%(I%)
     NEXT I%
     READ TIP%,BIT$
     WRITE #2,J1%
     FOR I%=1 TO NJT%
       WRITE #2,D1%(I%)
     NEXT I%
     WRITE #2,TIP%,BIT$
     PRINT #1,USING "###";J1%;
     FOR I%=1 TO NJT%
       PRINT #1,USING " ### ";D1%(I%);
     NEXT I%
     EL%=EL%+1
     GOSUB 1860
     MSM%=MSM%-1
     FOR J%=1 TO MSM%
       JPP%=J%+1
       IJ%=NCODE%(J%)
       IF IJ%<0 THEN IJ%=-IJ%
       IF IJ%=0 GOTO 21
       FOR K%=JPP% TO MS%
         IK%=NCODE%(K%)
         IF IK%<0 THEN IK%=-IK%
         IF IK%=0 GOTO 22
         KE%=ABS(IK%-IJ%)+1
         IF (JBAND%-KE%)>=0 GOTO 22 ELSE JBAND%=KE%
       JBM%=J1%
22  NEXT K%
21  NEXT J%
     H1=(12/E)^.3333
     D2(1)=D1 : D2(2)=D2 : D2(3)=D3 : D2(4)=D4 : D2(5)=D5
     D2(6)=D6 : D2(7)=D7 : D2(8)=D8 : D2(9)=D9 : H2=0
     FOR J%=1 TO TIP%
       H2=H2+(1/D2(J%))^.3333
     NEXT J%
     H=H1*H2/TIP%
     PRINT #1,USING " ###";TIP%;
     PRINT #1,USING " ##.## ";H;
     PRINT #1,BIT$
     IF BIT$<>"S" GOTO 25
     IF TK%=0 GOTO 24
     IF Q<>0 THEN J%=2 ELSE J%=1
     FOR L%=J% TO NYUK%
23  READ J1%,TY,BIT$
     WRITE #2,J1%,TY,BIT$
     IF BIT$<>"S" GOTO 23
     NEXT L%
24  CLOSE 2
     PRINT #1,
     PRINT #1,"YARIM BAND GENISLIGI=";JBAND%,
     PRINT #1,"JBAND daki ELEMEN NO=";JBM%
     PRINT #1,"TOPLAM ELEMEN SAYISI=";EL%,
     RETURN

```

```

30  REM ===== SISTEM RIJITLIK MATRISI =====
    OPEN "R",3,"SISTEM",4
    FIELD 3,4 AS I$
    TX=N*JBAND$
    PRINT #1,"TOPLAM TERIM SAYISI";TX
    FOR I%=1 TO TX
    LSET I$=MKS$(0)
    PUT 3,I$
    NEXT I%
    OPEN "I",2,"ELEMEN.DAT.SEQ"
31  INPUT #2,J1%
    FOR I%=1 TO NJT%
    INPUT #2,D1%(I%)
    NEXT I%
    INPUT #2,TIP%,BIT$
    GOSUB 1860 : REM ===KOD NUMARALARI===
    FOR I%=1 TO MSS%
    K(I%)=0
    NEXT I%
    ON (10-TIP%) GOSUB 210,1340,1340,800,1340,1340,900,1340
    GOTO 1350
1340 PRINT "ELEMEN RIJITLIK MATRISI TIP HATASI"
    STOP
1350 GOSUB 350
    TIP1%=TIP%
    DEF FNLK%(I%,J%)=I%*MS%-I%*(I%-1)/2-(MS%-J%)
    DEF FNLS%(I%,J%)=(I%-1)*JBAND%+J%
    FOR LX=1 TO MS%
    I%=NCODE%(LX)
    IF I%=0 GOTO 41
    FOR MX=1 TO MS%
    J%=NCODE%(MX)
    IF J%=0 GOTO 33
    REM J>I ARANIYOR
    IF J<I% GOTO 33
    ID%=LX
    JD%=MX
    IF LX<=MX GOTO 34
    ID%=MX
    JD%=LX
34  LO%=FNLK%(ID%,JD%)
    LS%=(I%-1)*JBAND%+J%-I%+1
    GET 3,LS%
    W=CVS(I$)
    S=W+K(LO%)
    LSET I$=MKS$(S)
    PUT 3,LS%
33  NEXT MX
41  NEXT LX
    IF Q=0 OR TIP%=2 GOTO 35
    NJT2%=4

```

```

FOR J%=1 TO NJT1%
I%=NCODE%(J%*NJT2%)
IF I%<=0 GOTO 36
R(I%,1)=R(I%,1)+W(J%)*A*Q
36 NEXT J%
35 IF BIT$(I%)="S" GOTO 31
PRINT #1,
IF TK%=0 GOTO 39
IF Q(I%)>0 THEN J%=2 ELSE J%=1
FOR L%=J% TO NYUK%
PRINT #1,"NYUK=";L%
PRINT #1,"YUKLEME DURUMU"
PRINT #1,"DUGUM YUK SON"
PRINT #1,STRING$(23,"=")
37 INPUT #2,J1%,TY,BIT$
PRINT #1,USING "###";J1%;
PRINT #1,USING "###.## ";TY,
PRINT #1," ";BIT$
J2%=JDEG%((J1%-1)*(MST%+KP%+KK%)+MST%)
R(J2%,L%)=R(J2%,L%)+TY
IF BIT$(I%)="S" GOTO 37
NEXT L%
39 CLOSE #2
KILL "ELENDAT.SEQ"
GOTO 15

1860 REM ===== KOD NOLARININ HESABI =====
IF TIP%<>2 GOTO 51
MST1%=MST%-1
IF D1%(3)>0 THEN NJT1%=TIP%+1 ELSE NJT1%=TIP%
GOTO 52
51 MST1%=MST% : NJT1%=TIP%
52 MS%=MST1%*NJT1%
MSS%=MS%*(MS%+1)/2
FOR J%=1 TO NJT1%
JX%=(D1%(J%)-1)*MST1%
FOR L%=1 TO MST1%
JZ%=(J%-1)*MST1%+L%
ON (10-TIP%) GOTO 55,53,53,55,53,55,55,54
53 PRINT #1,"HATA" : STOP
54 IN%=JX%+MST1%+L%+(D1%(J%)-1)*(KK%+KP%+1)
GOTO 56
55 IN%=JX%+L%+(D1%(J%)-1)*(KK%+KP%)
56 NCODE%(JZ%)=JDEG%(IN%)
NEXT L%
NEXT J%
D1=D(D1%(1)) : D2=D(D1%(2)) : D3=D(D1%(3))
D4=D(D1%(4)) : D5=D(D1%(5))
D6=D(D1%(6)) : D7=D(D1%(7)) : D8=D(D1%(8)) : D9=D(D1%(9))
RETURN

```

210 REM 9 NODLU DORTGEN RIJITLIK MATRISI

```

IX=(D1%(1)-1)*2+1 : J%=(D1%(3)-1)*2+1
K%=(D1%(7)-1)*2+1 : L%=(D1%(9)-1)*2+1
XI=COR(I%) : YI=COR(I%+1) : XJ=COR(J%) : YJ=COR(J%+1)
KK=COR(K%) : YK=COR(K%+1) : XL=COR(L%) : YL=COR(L%+1)
A1=(XL-XI)/2 : B1=(YK-YI)/2 : A=ABS(4*A1*B1)
REM CIZGISEL INTEGRALLE ILGILI TERIMLERIN HESABI
L=XK : L1=YK : XK=XJ : YK=YJ : XJ=L : YJ=L1
L=SQR((XK-XI)*(XK-XI)+(YK-YI)*(YK-YI))
SA1=(X1-XK)/L : CA1=(YK-YI)/L : SS1=SA1*CA1 : CS1=(CA1*CA1-SA1*SA1)/2
L=SQR((XL-XK)*(XL-XK)+(YL-YK)*(YL-YK))
SA2=(XK-XL)/L : CA2=(YL-YK)/L : SS2=SA2*CA2 : CS2=(CA2*CA2-SA2*SA2)/2
L=SQR((XL-XJ)*(XL-XJ)+(YL-YJ)*(YL-YJ))
SA3=(XL-XJ)/L : CA3=(YJ-YL)/L : SS3=SA3*CA3 : CS3=(CA3*CA3-SA3*SA3)/2
L=SQR((X1-XJ)*(X1-XJ)+(YJ-YI)*(YJ-YI))
SA4=(XJ-XI)/L : CA4=(YI-YJ)/L : SS4=SA4*CA4 : CS4=(CA4*CA4-SA4*SA4)/2
CU(1,1)=(SS4-SS1)/2 : CU(1,2)=2*SS1/3 : CU(1,3)=-SS1/6 : CU(1,4)=-2*SS4/3
CU(1,7)=SS4/6 : CU(2,3)=2*SS1/3 : CU(3,3)=(SS1-SS2)/2
CU(3,6)=2*SS2/3 : CU(3,9)=-SS2/6 : CU(4,7)=-2*SS4/3
CU(6,9)=2*SS2/3 : CU(7,7)=(SS3-SS4)/2 : CU(7,8)=-2*SS3/3
CU(7,9)=SS3/6 : CU(8,9)=-2*SS3/3 : CU(9,9)=(SS2-SS3)/2
CV(1,1)=(CS4-CS1)/2 : CV(1,2)=2*CS1/3 : CV(1,3)=-CS1/6 : CV(1,4)=-2*CS4/3
CV(1,7)=CS4/6 : CV(2,3)=2*CS1/3 : CV(3,3)=(CS1-CS2)/2
CV(3,6)=2*CS2/3 : CV(3,9)=-CS2/6 : CV(4,7)=-2*CS4/3
CV(6,9)=2*CS2/3 : CV(7,7)=(CS3-CS4)/2 : CV(7,8)=-2*CS3/3
CV(7,9)=CS3/6 : CV(8,9)=-2*CS3/3 : CV(9,9)=(CS2-CS3)/2
FOR I=1 TO 9 : FOR J=1 TO I-1
CU(I,J)=-CU(J,I) : CV(I,J)=-CV(J,I)
NEXT J : NEXT I
I1=(52*D1-4*D3)/35+16*D2/21 : I2=(52*D4-4*D6)/35+16*D5/21
I3=(52*D7-4*D9)/35+16*D8/21 : J1=8*D1/21+(32*D2-16*D3)/105
J2=8*D4/21+(32*D5-16*D6)/105 : J3=8*D7/21+(32*D8-16*D9)/105
K1=4*(D1+D3)/35+32*D2/105 : K2=4*(D4+D6)/35+32*D5/105
K3=4*(D7+D9)/35+32*D8/105
B(1,1)=A/256*(52*I1/35+16*J2/21-4*K3/35)
B(1,2)=A/128*(52*J1/35+16*J2/21-4*J3/35)
B(1,3)=-A/256*(52*K1/35+16*K2/21-4*K3/35)
B(1,4)=A/128*(8*I1/21+(32*J2-16*J3)/105)
B(1,5)=A/64*(8*J1/21+(32*J2-16*J3)/105)
B(1,6)=-A/128*(8*K1/21+(32*K2-16*K3)/105)
B(1,7)=-A/256*(4*(I1+I3)/35+32*J2/105)
B(1,8)=-A/128*(4*(J1+J3)/35+32*J2/105)
B(1,9)=A/256*(4*(K1+K3)/35+32*K2/105)
B(4,4)=A/64*(16*(I1+I3)/105+64*J2/35)
B(4,5)=A/32*(16*(J1+J3)/105+64*J2/35)
B(4,6)=-A/64*(16*(K1+K3)/105+64*K2/35)
B(4,7)=A/128*((32*J2-16*J1)/105+8*J3/21)
B(4,8)=A/64*((32*J2-16*J1)/105+8*J3/21)
B(4,9)=-A/128*((32*K2-16*K1)/105+8*K3/21)
B(7,7)=A/256*((52*I3-4*I1)/35+16*J2/21)
B(7,8)=A/128*((52*J3-4*J1)/35+16*J2/21)
B(7,9)=-A/256*((52*K3-4*K1)/35+16*K2/21)

```

$$\begin{aligned}
I1 &= 16*(D1+D3)/105+64*D2/35 & I2 &= 16*(D4+D6)/105+64*D5/35 \\
I3 &= 16*(D7+D9)/105+64*D8/35 & J1 &= (32*D2-16*D1)/105+8*D3/21 \\
J2 &= (32*D5-16*D4)/105+8*D6/21 & J3 &= (32*D8-16*D7)/105+8*D9/21 \\
K1 &= 8*D1/21+(32*D2-16*D3)/105 & K2 &= 8*D4/21+(32*D5-16*D6)/105 \\
K3 &= 8*D7/21+(32*D8-16*D9)/105 \\
B(2,2) &= A/64*((52*I1-4*I3)/35+16*I2/21) \\
B(2,3) &= A/128*((52*J1-4*J3)/35+16*J2/21) \\
B(2,4) &= A/64*(8*K1/21+(32*K2-16*K3)/105) \\
B(2,5) &= A/32*(8*I1/21+(32*I2-16*I3)/105) \\
B(2,6) &= A/64*(8*J1/21+(32*J2-16*J3)/105) \\
B(2,7) &= -A/128*(4*(K1+K3)/35+32*K2/105) \\
B(2,8) &= -A/64*(4*(I1+I3)/35+32*I2/105) \\
B(2,9) &= -A/128*(4*(J1+J3)/35+32*J2/105) \\
B(5,5) &= A/16*(16*(I1+I3)/105+64*I2/35) \\
B(5,6) &= A/32*(16*(J1+J3)/105+64*J2/35) \\
B(5,7) &= A/64*((32*K2-16*K1)/105+8*K3/21) \\
B(5,8) &= A/32*((32*I2-16*I1)/105+8*I3/21) \\
B(5,9) &= A/64*((32*J2-16*J1)/105+8*J3/21) \\
B(8,8) &= A/64*((52*I3-4*I1)/35+16*I2/21) \\
B(8,9) &= A/128*((52*J3-4*J1)/35+16*J2/21) \\
I1 &= (52*D3-4*D1)/35+16*D2/21 & I2 &= (52*D6-4*D4)/35+16*D5/21 \\
I3 &= (52*D9-4*D7)/35+16*D8/21 & J1 &= 4*(D1+D3)/35+32*D2/105 \\
J2 &= 4*(D4+D6)/35+32*D5/105 & J3 &= 4*(D7+D9)/35+32*D8/105 \\
K1 &= -8*D3/21-(32*D2-16*D1)/105 & K2 &= -8*D6/21-(32*D5-16*D4)/105 \\
K3 &= -8*D9/21-(32*D8-16*D7)/105 \\
B(3,3) &= A/256*((52*I1-4*I3)/35+16*I2/21) \\
B(3,4) &= -A/128*(8*J1/21+(32*J2-16*J3)/105) \\
B(3,5) &= -A/64*(8*K1/21+(32*K2-16*K3)/105) \\
B(3,6) &= A/128*(8*I1/21+(32*I2-16*I3)/105) \\
B(3,7) &= A/256*(4*(J1+J3)/35+32*J2/105) \\
B(3,8) &= A/128*(4*(K1+K3)/35+32*K2/105) \\
B(3,9) &= -A/256*(4*(I1+I3)/35+32*I2/105) \\
B(6,6) &= A/64*(16*(I1+I3)/105+64*I2/35) \\
B(6,7) &= A/128*((16*J1-32*J2)/105-8*J3/21) \\
B(6,8) &= A/64*((16*K1-32*K2)/105-8*K3/21) \\
B(6,9) &= -A/128*((16*I1-32*I2)/105-8*I3/21) \\
B(9,9) &= A/256*((52*I3-4*I1)/35+16*I2/21) \\
A5 &= A/(360*A1*A1) \\
A(1,1) &= 28*A5 & A(1,2) &= -32*A5 & A(1,3) &= 4*A5 & A(1,4) &= 14*A5 \\
A(1,5) &= -16*A5 & A(1,6) &= 2*A5 & A(1,7) &= -7*A5 & A(1,8) &= 8*A5 \\
A(1,9) &= -A5 & A(2,2) &= 64*A5 & A(2,3) &= -32*A5 & A(2,4) &= -16*A5 \\
A(2,5) &= 32*A5 & A(2,6) &= -16*A5 & A(2,7) &= 8*A5 & A(2,8) &= -16*A5 \\
A(2,9) &= 8*A5 & A(3,3) &= 28*A5 & A(3,4) &= 2*A5 & A(3,5) &= -16*A5 \\
A(3,6) &= 14*A5 & A(3,7) &= -A5 & A(3,8) &= 8*A5 & A(3,9) &= -7*A5 \\
A(4,4) &= 112*A5 & A(4,5) &= -128*A5 & A(4,6) &= 16*A5 & A(4,7) &= 14*A5 \\
A(4,8) &= -16*A5 & A(4,9) &= 2*A5 & A(5,5) &= 256*A5 & A(5,6) &= -128*A5 \\
A(5,7) &= -16*A5 & A(5,8) &= 32*A5 & A(5,9) &= -16*A5 & A(6,6) &= 112*A5
\end{aligned}$$

```

A(6,7)=2*A5 : A(6,8)=-16*A5 : A(6,9)=14*A5 : A(7,7)=28*A5
A(7,8)=-32*A5 : A(7,9)=4*A5 : A(8,8)=64*A5 : A(8,9)=-32*A5
A(9,9)=28*A5 : A5=A/(360*B1*B1)
C(1,1)=28*A5 : C(1,2)=14*A5 : C(1,3)=-7*A5 : C(1,4)=-32*A5
C(1,5)=-16*A5 : C(1,6)=8*A5 : C(1,7)=4*A5 : C(1,8)=2*A5
C(1,9)=-A5 : C(2,2)=112*A5 : C(2,3)=14*A5 : C(2,4)=-16*A5
C(2,5)=-128*A5 : C(2,6)=-16*A5 : C(2,7)=2*A5 : C(2,8)=16*A5
C(2,9)=2*A5 : C(3,3)=28*A5 : C(3,4)=8*A5 : C(3,5)=-16*A5
C(3,6)=-32*A5 : C(3,7)=-A5 : C(3,8)=2*A5 : C(3,9)=4*A5
C(4,4)=64*A5 : C(4,5)=32*A5 : C(4,6)=-16*A5 : C(4,7)=-32*A5
C(4,8)=-16*A5 : C(4,9)=8*A5 : C(5,5)=256*A5 : C(5,6)=32*A5
C(5,7)=-16*A5 : C(5,8)=-128*A5 : C(5,9)=-16*A5 : C(6,6)=64*A5
C(6,7)=8*A5 : C(6,8)=-16*A5 : C(6,9)=-32*A5 : C(7,7)=28*A5
C(7,8)=14*A5 : C(7,9)=-7*A5 : C(8,8)=112*A5 : C(8,9)=14*A5

```

```

C(9,9)=28*A5
D3(1,1)=.5 : D3(1,5)=-8/9 : D3(1,6)=2/9 : D3(1,8)=2/9
D3(1,9)=-1/18 : D3(2,4)=8/9 : D3(2,6)=-8/9 : D3(2,7)=-2/9
D3(2,9)=2/9 : D3(3,3)=-.5 : D3(3,4)=-2/9 : D3(3,5)=8/9
D3(3,7)=1/18 : D3(3,8)=-2/9 : D3(4,8)=-8/9 : D3(4,9)=2/9
D3(5,7)=8/9 : D3(5,9)=-8/9 : D3(6,7)=-2/9 : D3(6,8)=8/9
D3(7,7)=-.5 : D3(9,9)=.5
FOR I=1 TO NJT% : FOR J=1 TO I
B(I,J)=B(J,I) : A(I,J)=A(J,I) : C(I,J)=C(J,I) : D3(I,J)=D3(J,I)
NEXT J : NEXT I
W(1)=.25/9 : W(2)=1/9 : W(3)=W(1) : W(4)=W(2) : W(5)=4/9
W(6)=W(2) : W(7)=W(1) : W(8)=W(2) : W(9)=W(1)
RETURN

```

800 REM UCGEN RIJITLIK MATRISI

```

I%=(D1%(1)-1)*2+1 : J%=(D1%(2)-1)*2+1
K%=(D1%(3)-1)*2+1
XI=COR(I%) : YI=COR(I%+1) : XJ=COR(J%) : YJ=COR(J%+1)
XK=COR(K%) : YK=COR(K%+1)
A=ABS((XI*(YJ-YK)+XJ*(YK-YI)+XK*(YI-YJ))/2)
REM CIZGISEL INTEGRALLE ILGILI TERIMLERIN HESABI
L=SQR((XI-XJ)*(XI-XJ)+(YJ-YI)*(YJ-YI))
SA1=(XI-XJ)/L : CA1=(YJ-YI)/L : SS1=SA1*CA1 : CS1=(CA1*CA1-SA1*SA1)/2
L=SQR((XK-XJ)*(XK-XJ)+(YK-YJ)*(YK-YJ))
SA2=(XJ-XK)/L : CA2=(YK-YJ)/L : SS2=SA2*CA2 : CS2=(CA2*CA2-SA2*SA2)/2
L=SQR((XK-XI)*(XK-XI)+(YK-YI)*(YK-YI))
SA3=(XK-XI)/L : CA3=(YI-YK)/L : SS3=SA3*CA3 : CS3=(CA3*CA3-SA3*SA3)/2
CU(1,1)=(SS3-SS1)/2 : CU(1,2)=-SS1/6 : CU(1,3)=SS3/6
CU(1,4)=2*SS1/3 : CU(1,6)=-2*SS3/3 : CU(2,2)=(SS1-SS2)/2
CU(2,3)=-SS2/6 : CU(2,4)=-2*SS1/3 : CU(2,5)=2*SS2/3
CU(3,3)=(SS2-SS3)/2 : CU(3,5)=-2*SS2/3 : CU(3,6)=2*SS3/3
CV(1,1)=(CS3-CS1)/2 : CV(1,2)=-CS1/6 : CV(1,3)=CS3/6
CV(1,4)=2*CS1/3 : CV(1,6)=-2*CS3/3 : CV(2,2)=(CS1-CS2)/2
CV(2,3)=-CS2/6 : CV(2,4)=-2*CS1/3 : CV(2,5)=2*CS2/3
CV(3,3)=(CS2-CS3)/2 : CV(3,5)=-2*CS2/3 : CV(3,6)=2*CS3/3
FOR I=1 TO TIP% : FOR J=1 TO I-1
CU(I,J)=-CU(J,I) : CV(I,J)=-CV(J,I)
NEXT J : NEXT I

```

$$\begin{aligned}
B(1,1) &= A*(D1/70 - (D2+D3)/630 + (D4+D6)/105 + D5/315) \\
B(1,2) &= A*(-(D1+D2)/630 + 7.9365E-04*D3 - D4/315) \\
B(1,3) &= A*(-(D1+D3)/630 + 7.9365E-04*D2 - D6/315) \\
B(1,4) &= A*(D1/105 - D2/315 - 2*D5/315) \\
B(1,5) &= A*(D1 - 2*D4 - 4*D5 - 2*D6)/315 \\
B(1,6) &= A*(D1/105 - D3/315 - 2*D5/315) \\
B(2,2) &= A*(-(D1+D3)/630 + D2/70 + (D4+D5)/105 + D6/315) \\
B(2,3) &= A*(7.9365E-04*D1 - (D2+D3)/630 - D5/315) \\
B(2,4) &= A*(-(D1+2*D6)/315 + D2/105) \\
B(2,5) &= A*(D2/105 - (D3+2*D6)/315) \\
B(2,6) &= A*(D2 - 2*D4 - 2*D5 - 4*D6)/315 \\
B(3,3) &= A*(-(D1+D2)/630 + D3/70 + D4/315 + (D5+D6)/105) \\
B(3,4) &= A*(D3 - 4*D4 - 2*D5 - 2*D6)/315 \\
B(3,5) &= A*(D3/105 - (D2+2*D4)/315) \\
B(3,6) &= A*(D3/105 - (D1+2*D4)/315) \\
B(4,4) &= A*(-4*D3/315 + 8*D4/70 + 8*(D5+D6)/210) \\
B(4,5) &= A*((8*D6 - 2*(D1+D3))/315 + 8*(D4+D5)/210) \\
B(4,6) &= A*((8*D5 - 2*(D2+D3))/315 + 8*(D4+D6)/210) \\
B(5,5) &= A*(-4*D1/315 + 8*(D4+D6)/210 + 8*D5/70) \\
B(5,6) &= A*(-2*(D1+D2 - 4*D4)/315 + 8*(D5+D6)/210) \\
B(6,6) &= A*(-4*D2/315 + 8*(D4+D5)/210 + 8*D6/70) \\
Y23 &= YJ - YK : Y31 = YK - YI : Y12 = YI - YJ \\
X32 &= XK - XJ : X13 = XI - XK : X21 = XJ - XI \\
B &= 12*A \\
A(1,1) &= 3*Y23*Y23/B : A(1,2) = -Y23*Y31/B : A(1,3) = -Y23*Y12/B \\
A(1,4) &= 4*Y23*Y31/B : A(1,6) = 4*Y23*Y12/B \\
A(2,2) &= 3*Y31*Y31/B : A(2,3) = -Y31*Y12/B : A(2,4) = A(1,4) \\
A(2,5) &= 4*Y31*Y12/B : A(3,3) = 3*Y12*Y12/B : A(3,5) = 4*Y12*Y31/B \\
A(3,6) &= 4*Y12*Y23/B : A(4,4) = 8*(Y23*Y23 + Y23*Y31 + Y31*Y31)/B \\
A(4,5) &= 4*(Y23*(Y31+2*Y12) + Y31*(Y31+Y12))/B \\
A(4,6) &= 4*(Y23*(Y23+Y12) + Y31*(Y23+2*Y12))/B \\
A(5,5) &= 8*(Y31*Y31 + Y31*Y12 + Y12*Y12)/B \\
A(5,6) &= 4*(Y31*(2*Y23+Y12) + Y12*(Y23+Y12))/B \\
A(6,6) &= 8*(Y23*(Y23+Y12) + Y12*Y12)/B \\
C(1,1) &= 3*X32*X32/B : C(1,2) = -X32*X13/B : C(1,3) = -X32*X21/B \\
C(1,4) &= 4*X32*X13/B : C(1,6) = 4*X32*X21/B : C(2,2) = 3*X13*X13/B \\
C(2,3) &= -X13*X21/B : C(2,4) = 4*X32*X13/B : C(2,5) = 4*X13*X21/B \\
C(3,3) &= 3*X21*X21/B : C(3,5) = 4*X13*X21/B : C(3,6) = 4*X21*X32/B \\
C(4,4) &= 8*(X32*(X32+X13) + X13*X13)/B \\
C(4,5) &= 4*(X32*(X13+2*X21) + X13*(X13+X21))/B \\
C(4,6) &= 4*(X32*(X32+X21) + X13*(X32+2*X21))/B \\
C(5,5) &= 8*(X13*(X13+X21) + X21*X21)/B \\
C(5,6) &= 4*(X13*(2*X32+X21) + X21*(X32+X21))/B \\
C(6,6) &= 8*(X32*(X32+X21) + X21*X21)/B
\end{aligned}$$

```

D3(1,1)=6*X32*Y23/B      : D3(1,2)=- (X32*Y31+X13*Y23)/B
D3(1,3)=- (X32*Y12+X21*Y23)/B : D3(1,4)=4*(Y23*X13+Y31*X32)/B
D3(1,6)=4*(Y23*X21+Y12*X32)/B : D3(2,2)=6*Y31*X13/B
D3(2,3)=- (Y31*X21+Y12*X13)/B : D3(2,4)=4*(Y31*X32+Y23*X13)/B
D3(2,5)=4*(Y31*X21+Y12*X13)/B : D3(3,3)=6*Y12*X21/B
D3(3,5)=4*(Y12*X13+Y31*X21)/B : D3(3,6)=4*(Y12*X32+Y23*X21)/B
D3(4,4)=8*(Y23*(2*X32+X13)+Y31*(X32+2*X13))/B
D3(4,5)=4*(Y23*(X13+2*X21)+Y31*(X13+X21)+Y31*(X32+X13)+Y12*(2*X32+X13))/B
D3(4,6)=4*(Y23*(X32+X21)+Y31*(X32+2*X21)+Y23*(X32+X13)+Y12*(X32+2*X13))/B
D3(5,5)=8*(Y31*(2*X13+X21)+Y12*(X13+2*X21))/B
D3(5,6)=4*(Y31*(2*X32+X21)+Y12*(X32+X21)+Y23*(2*X13+X21)+Y12*(X13+X21))/B
D3(6,6)=8*(Y23*(2*X32+X21)+Y12*(X32+2*X21))/B
FOR I=1 TO TIP% : FOR J=1 TO I-1 : B(I,J)=B(J,I) : A(I,J)=A(J,I)
C(I,J)=C(J,I) : D3(I,J)=D3(J,I) : NEXT J : NEXT I
W(1)=0 : W(2)=0 : W(3)=0 : W(4)=1/3 : W(5)=1/3 : W(6)=1/3
RETURN

```

900 REM CUBUK RIJITLIK MATRISI

```

IX=(D1%(1)-1)*2+1      : J%=(D1%(2)-1)*2+1      : K%=(D1%(3)-1)*2+1
XI=COR(IX)              : YI=COR(IX+1)          : XK=COR(K%)
XJ=COR(J%)              : YJ=COR(J%+1)        : YK=COR(K%+1)
A=SQR((YK-YI)*(YK-YI)+(XK-XI)*(XK-XI))
REM PRINT D1%(1);D1%(2);D1%(3),"ELEMANI";
C=.1
ATM=C*K5*K5*K5/12      : K(2)=7/3/A          : K(3)=K(2)
K(5)=-B/(3*A)          : K(6)=K(5)           : K(8)=1/(3*A)
K(9)=K(8)              : K(10)=-2*A/(15*E*ATM) : K(12)=K(5)
K(13)=K(10)/2          : K(15)=K(8)          : K(16)=-K(10)/4
K(18)=K(10)            : K(19)=K(5)          : K(21)=K(13)
K(22)=K(8)             : K(24)=K(16)         : K(26)=16/(3*A)
K(27)=K(26)            : K(29)=K(5)          : K(30)=K(5)
K(31)=K(10)*4          : K(33)=K(5)          : K(34)=K(13)
K(36)=K(31)            : K(37)=K(5)          : K(39)=K(13)
K(41)=K(2)             : K(42)=K(2)          : K(43)=K(10)
K(45)=K(10)            : RETURN
RETURN

```

350 REM E.R.M OTOMATIK OLARAK KURULMASI

```

SX=TIP%*MST% : S1%=0 : S2%=S% : S3%=2*S%-1 : S4%=3*S%-3 : SN%=0
FOR I%=1 TO TIP% : REM Mx My Mxy W 'YE AIT TERIMLER
K(S1%+1)=-B(I%,I%) : K(S1%+2)=P*B(I%,I%)
K(S1%+4)=A(I%,I%)+CU(I%,I%) : S1%=S1%+4
K(S2%+1)=-B(I%,I%) : K(S2%+3)=C(I%,I%)-CU(I%,I%)
S2%=S2%+3 : K(S3%+1)=-2*(1+P)*B(I%,I%)
K(S3%+2)=D3(I%,I%)-2*CV(I%,I%) : S3%=S3%+2
S4%=S4%+1 : I9%=0
FOR J%=I%+1 TO TIP% : I9%=I9%+1 : TX%=MST%*I9%
K(S1%+TX%-3)=-B(I%,J%) : K(S1%+TX%-2)=P*B(I%,J%)
K(S1%+TX%-1)=0 : K(S1%+TX%)=A(I%,J%)+CU(I%,J%)
K(S2%+TX%-3)=P*B(I%,J%) : K(S2%+TX%-2)=-B(I%,J%)
K(S2%+TX%-1)=0 : K(S2%+TX%)=C(I%,J%)-CU(I%,J%)
K(S3%+TX%-3)=0 : K(S3%+TX%-2)=0
K(S3%+TX%-1)=-2*(1+P)*B(I%,J%) : K(S3%+TX%)=D3(I%,J%)-2*CV(I%,J%)
K(S4%+TX%-3)=A(I%,J%)+CU(J%,I%) : K(S4%+TX%-2)=C(I%,J%)-CU(J%,I%)
K(S4%+TX%-1)=D3(I%,J%)-2*CV(J%,I%) : K(S4%+TX%)=0
NEXT J%
FOR J%=1 TO MST% : SN%=SN%+S% : S%=S%-1 : NEXT J%
S1%=SN% : S2%=SN%+S% : S3%=SN%+2*S%-1 : S4%=SN%+3*S%-3
NEXT I%
RETURN

```

```

600  REM === COZUM ===
      IF N%*JBAND%<14500 GOTO 71
      PRINT "===== COZUM DISKETTE YAPILIYOR ====="
      FOR N1%=1 TO N%
      FOR L%=2 TO JBAND%
      L1%=FN LS%(N1%,L%)
      GET 3,L1% : S=CVS(I%)
      IF S=0 GOTO 61
      I%=N1%+L%-1
      L2%=FN LS%(N1%,1)
      GET 3,L2% : S2=CVS(I%)
      C=S/S2
      J%=0
      FOR K%=L% TO JBAND%
      J%=J%+1
      L3%=FN LS%(I%,J%) : L4%=FN LS%(N1%,K%)
      GET 3,L3% : S3=CVS(I%)
      GET 3,L4% : S4=CVS(I%)
      S3=S3-C*S4
      LSET I%=MKS+(S3) : PUT 3,L3%
      NEXT K%
      LSET I%=MKS+(C) : PUT 3,L1%
      61  NEXT L%
      NEXT N1%
      REM SABITLERIN ON INDIRGENMESI
      FOR N1%=1 TO N%
      FOR L%=2 TO JBAND%
      L1%=FN LS%(N1%,L%)
      GET 3,L1% : S=CVS(I%)
      IF S=0 GOTO 62
      I%=N1%+L%-1
62  FOR J%=1 TO NYUK%
      R(I%,J%)=R(I%,J%)-S*R(N1%,J%)
      NEXT J%
      NEXT L%
      L2%=FN LS%(N1%,1) : GET 3,L2%
      S2=CVS(I%)
      FOR J%=1 TO NYUK%
      R(N1%,J%)=R(N1%,J%)/S2
      NEXT J%
      NEXT N1%
      REM bilinmeyenlerin geri yerlestirilmesi
      FOR M%=2 TO N%
      N2%=N%+1-M%
      FOR L%=2 TO JBAND%
      L1%=FN LS%(N2%,L%) : GET 3,L1% : S=CVS(I%)
      IF S=0 GOTO 64
      K%=N2%+L%-1
      FOR J%=1 TO NYUK%
      R(N2%,J%)=R(N2%,J%)-S*R(K%,J%)
      NEXT J%
64  NEXT L%
      NEXT M%
      GOTO 70

```

71

```

DIM S(N%,JBAND%)
FOR I%=1 TO N% : FOR J%=1 TO JBAND%
18%=18%+1 : GET 3,18% : S(I%,J%)=CVS(18%)
NEXT J% : NEXT I%
PRINT "===== COZUM HAFIZADA YAPILYOR ====="
FOR N1%=1 TO N%
FOR L%=2 TO JBAND%
IF S(N1%,L%)=0 GOTO 67
I%=N1%+L%-1
C=S(N1%,L%)/S(N1%,1)
J%=0
FOR K%=L% TO JBAND%
J%=J%+1
S(I%,J%)=S(I%,J%)-C*S(N1%,K%)
NEXT K%
S(N1%,L%)=C

```

118

67

```

NEXT L%
NEXT N1%
REM SABITLERIN ON INDIRGENMESI
FOR N1%=1 TO N%
FOR L%=2 TO JBAND%
IF S(N1%,L%)=0 GOTO 68
I%=N1%+L%-1
FOR J%=1 TO NYUK%
R(I%,J%)=R(I%,J%)-S(N1%,L%)*R(N1%,J%)
NEXT J%

```

68

```

NEXT L%
FOR J%=1 TO NYUK%
R(N1%,J%)=R(N1%,J%)/S(N1%,1)
NEXT J%
NEXT N1%
REM BILINMEYENLERIN GERI YERLESTIRILMESI
FOR M%=2 TO N%
N2%=N%+1-M%
FOR L%=2 TO JBAND%
IF S(N2%,L%)=0 GOTO 69
K%=N2%+L%-1
FOR J%=1 TO NYUK%
R(N2%,J%)=R(N2%,J%)-S(N2%,L%)*R(K%,J%)
NEXT J%

```

69

```

NEXT L%
NEXT M%

```

70

```

CLOSE 3
KILL "SISTEM"
REM CIKIS
PRINT #1,
MST1%=MST%+KP%+KK%
FOR L%=1 TO NYUK% : PRINT #1, : PRINT #1,"NYUK=";L%
PRINT #1,"DUGUM   Mx   My   Mxy   W"
PRINT #1,STRING$(56,"=")
FOR I%=1 TO ND%
PRINT #1,USING "###";I%;
FOR J%=1 TO MST1%
I5%=I5%+1
IF JDEG%(I5%)<>0 GOTO 65
PRINT #1,USING " +.#####^" ;0;
GOTO 66
J3%=J3%+1 : PRINT #1,USING " +.#####^" ;R(J3%,L%);
NEXT J% : PRINT #1, : NEXT I%
I5%=0 : J3%=0 : NEXT L%
RETURN

```

65

66

RETURN

SONLU ELEMANLAR YONTEMI ILE PLAK COZUMU

ELASTISITE MODULU= 210 POISON ORANI = .1599999964237213
 KALINLIK = .1000000014901161 YUKLEME SAYISI = 2
 YAYILI YUK(t/m²)= 1

DUGUM NOKTALARI BILGILERI

DU 1/D	X	Y	Mx	My	Mxy	W	Kx	Ky	Lag.c
1	0.00	0.00	0	0	1	0			7.14
2	0.00	1.00	0	0	2	0			9.14
3	0.00	2.00	0	0	3	0			12.70
4	0.00	3.00	0	0	4	0			20.78
5	0.00	4.00	0	0	5	0			57.10
6	1.00	0.00	0	0	6	0			7.14
7	1.00	1.00	7	8	9	10			9.14
8	1.00	2.00	11	12	13	14			12.70
9	1.00	3.00	15	16	17	18			20.78
10	1.00	4.00	0	0	19	0			57.10
11	2.00	0.00	0	0	20	0			7.14
12	2.00	1.00	21	22	23	24			9.14
13	2.00	2.00	25	26	27	28			12.70
14	2.00	3.00	29	30	31	32			20.78
15	2.00	4.00	0	0	33	0			57.10
16	3.00	0.00	0	0	34	0			7.14
17	3.00	1.00	35	36	37	38			9.14
18	3.00	2.00	39	40	41	42			12.70
19	3.00	3.00	43	44	45	46			20.78
20	3.00	4.00	0	0	47	0			57.10
21	4.00	0.00	0	0	48	0			7.14
22	4.00	1.00	0	0	49	0			9.14
23	4.00	2.00	0	0	50	0			12.70
24	4.00	3.00	0	0	51	0			20.78
25	4.00	4.00	0	0	52	0			57.10 S

TOPLAM DUGUM SAYISI= 25

BILINMEYEN SAYISI = 52

ELEMEN BILGILERI

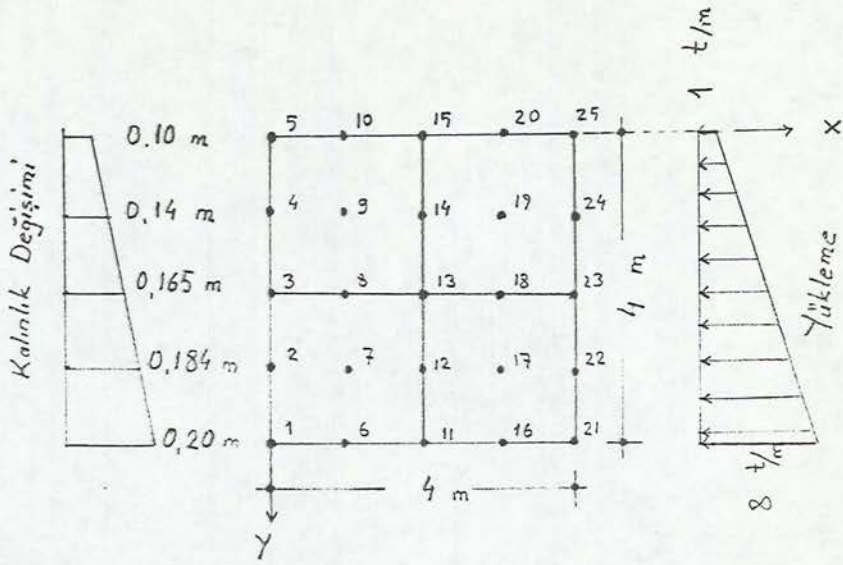
ELEMEN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	TIP	
H	SON										
1	1	6	11	2	7	12	3	8	13	9 0.18	
2	3	8	13	4	9	14	5	10	15	9 0.14	
3	11	16	21	12	17	22	13	18	23	9 0.18	
4	13	18	23	14	19	24	15	20	25	9 0.14 S	

YARIM BAND GENISLIGI= 31

JBAND daki ELEMEN NO= 2

TOPLAM ELEMEN SAYISI= 4

TOPLAM TERIM SAYISI 1612



NYUK= 2
YUKLEME DURUMU
DUGUM YUK SON

DUGUM	YUK	SON
7	11.11	
8	4.00	
9	4.88	
12	5.56	
13	2.00	
14	2.44	
17	11.11	
18	4.00	
19	4.88	S

Rijitlik değişimi y yönünde lineer. $D = D_0 + D_1 y$

$$D_1 b = 7D_0, \quad \gamma = 0.16 \text{ alınmıştır.}$$

NYUK= 1

DUGUM	Mx	My	Mxy	W
1	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-1.1514E+01	+0.00000E+01
2	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-5.8972E+00	+0.00000E+01
3	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-2.4174E+00	+0.00000E+01
4	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+2.4425E+00	+0.00000E+01
5	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+2.2212E+00	+0.00000E+01
6	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-6.3974E+00	+0.00000E+01
7	+4.48039E+00	+3.34133E+00	-3.3869E+00	+6.1807E+01
8	+6.66072E+00	+4.6131E+00	-1.2443E+00	+9.9683E+01
9	+3.6346E+00	+4.8604E+00	+1.4049E+00	+8.9683E+01
10	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+1.1888E+00	+0.00000E+01
11	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+3.4736E-06	+0.00000E+01
12	+5.59169E+00	+4.5291E+00	-5.4260E-07	+8.6443E+01
13	+8.3049E+00	+6.6858E+00	+1.9006E-07	+1.3981E+02
14	+4.1818E+00	+6.5105E+00	+3.7568E-07	+1.2441E+02
15	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-6.8627E-07	+0.00000E+01
16	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+6.3974E+00	+0.00000E+01
17	+4.48039E+00	+3.34133E+00	+3.3869E+00	+6.1807E+01
18	+6.66072E+00	+4.6131E+00	+1.2443E+00	+9.9683E+01
19	+3.6346E+00	+4.8604E+00	-1.4049E+00	+8.9683E+01
20	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-1.1888E+00	+0.00000E+01
21	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+1.1514E+01	+0.00000E+01
22	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+5.8972E+00	+0.00000E+01
23	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+2.4174E+00	+0.00000E+01
24	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-2.4425E+00	+0.00000E+01
25	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-2.2212E+00	+0.00000E+01

NYUK= 2

DUGUM	Mx	My	Mxy	W
1	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-5.6358E+01	+0.00000E+01
2	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-2.5955E+01	+0.00000E+01
3	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-4.4755E+00	+0.00000E+01
4	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+1.0871E+01	+0.00000E+01
5	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+7.9794E+00	+0.00000E+01
6	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-3.1040E+01	+0.00000E+01
7	+2.3820E+01	+2.21075E+01	-1.4809E+01	+2.29015E+02
8	+2.8339E+01	+2.21777E+01	-2.4937E+00	+4.3140E+02
9	+1.3702E+01	+1.6591E+01	+6.2012E+00	+3.5100E+02
10	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+4.3843E+00	+0.00000E+01
11	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-1.5450E-05	+0.00000E+01
12	+2.8031E+01	+2.27870E+01	-3.6768E-06	+4.40427E+02
13	+3.5768E+01	+3.0987E+01	+8.4943E-06	+6.0450E+02
14	+1.6670E+01	+2.2586E+01	+3.1343E-06	+4.8974E+02
15	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-4.7721E-06	+0.00000E+01
16	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+3.1040E+01	+0.00000E+01
17	+2.3820E+01	+2.21075E+01	+1.4809E+01	+2.29015E+02
18	+2.8339E+01	+2.21777E+01	+2.4937E+00	+4.3140E+02
19	+1.3702E+01	+1.6591E+01	-6.2012E+00	+3.5100E+02
20	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-4.3843E+00	+0.00000E+01
21	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+5.6358E+01	+0.00000E+01
22	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+2.5955E+01	+0.00000E+01
23	+0.00000E+01	+0.00000E+01	+4.4755E+00	+0.00000E+01
24	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-1.0871E+01	+0.00000E+01
25	+0.00000E+01	+0.00000E+01	-7.9794E+00	+0.00000E+01

EK 2. 2.14 Eşitliğine ait açık ifade

$$[(-\bar{M}_{x,xx} - \bar{M}_{y,yy} - 2\bar{M}_{xy,xy}), \bar{W}] +$$

$$[(-\bar{M}_x - D(\bar{W},_{xx} + \mu\bar{W},_{yy})) , (\frac{M_x^* - \mu M_y^*}{D(1-\mu^2)})] +$$

$$[(-\bar{M}_y - D(\bar{W},_{yy} + \mu\bar{W},_{xx})) , (\frac{M_y^* - \mu M_x^*}{D(1-\mu^2)})] +$$

$$[(-\bar{M}_{xy} - D(1-\mu)\bar{W},_{xy}) , (\frac{2}{D(1-\mu)} M_{xy}^*)] +$$

$$[(\bar{T} - \hat{T}), \bar{W}]_{\sigma} - [(\bar{M} - \hat{M}), \bar{W}]_{\sigma} - [(\bar{W} - \hat{W}), \bar{M}]_{\epsilon} - [(\bar{W} - \hat{W}), \bar{T}]_{\epsilon}$$

$$= [(-M_{x,xx}^* - M_{y,yy}^* - 2M_{xy,xy}^*), \bar{W}] +$$

$$[(-M_x^* - D(W^*,_{xx} + \mu W^*,_{yy})) , (\frac{\bar{M}_x - \mu \bar{M}_y}{D(1-\mu^2)})] +$$

$$[(-M_y^* - D(W^*,_{yy} + \mu W^*,_{xx})) , (\frac{\bar{M}_y - \mu \bar{M}_x}{D(1-\mu^2)})] +$$

$$[(-M_{xy}^* - D(1-\mu)W^*,_{xy}) , (\frac{2}{D(1-\mu)} \bar{M}_{xy})] +$$

$$[(\bar{T} - \hat{T}), \bar{W}]_{\sigma} - [(\bar{M} - \hat{M}), \bar{W}]_{\sigma} - [(\bar{W} - \hat{W}), \bar{M}]_{\epsilon} - [(\bar{W} - \hat{W}), \bar{T}]_{\epsilon}$$

 Green teoremi kullanılarak sadeleştirme yapıldığında 2.14 eşitliği sağlanmaktadır. Ürnegin, $-[M_{y,yy}, W]$ ifadesi $-[M_y, W,_{yy}] - [M_y,_{yny}, W]_0 + [M_y, W,_{yny}]_0$ şeklinde yazılabilir.