MONGE-AMPÈRE DENKLEMİ İÇİN DİRİCHLET PROBLEMİ

Nevin Kargı

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof.Dr. A.Okay Çelebi

Şubat-1987

Nevin Kargı'nın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "Monge-Ampere Denklemi İçin Dirichlet Problemi" başlıklı bir çalışma, jürimizce Lisansüstü Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

27/5/1987

Başkan : Prof. Dr. Okay Çelebi

Üye : Prof. Dr. Rüstem Kaya

Üye : Doç. Dr. Abdullah Altın

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 3.6.1987 gün ve 148:1 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Rüstem KAYA

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada, Monge-Ampére denklemleri için Dirichlet problemi incelenmiş, bir varlık ve teklik teoremi ispatlanmıştır. İspatta maksimum ilkesi kullanılmıştır. Bu amaçla, önce çözümün kendisi ve ilk iki basamaktan türevi için birer alt ve üst sınır bulunmuş, daha sonra bölgenin içinden sınıra yaklaşıldığı zaman, üçüncü türevler için bir üst sınır araştırılmıştır. Altıncı bölümde, bulunan bu değerler yardımıyla, bir varlık ve teklik teoremi elde edilmiştir.

SUMMARY

In this survey, the existence and uniqueness of the Monge-Ampêre equation has been investigated. We have utilized the maximum principle. For the proof we need the estimates of the derivatives of the proposed solution up to and including third order which are obtained in the chapters 2-5. In the last chapter we have made use of the results obtained before to prove the existence and uniqueness theorem.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın yönetimini kabul ederek bana bu tezi hazırlama olanağı sağlayan, tezin hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen, hocam Sayın Prof.Dr. A.Okay Çelebi'ye, öneri ve fikirlerinden yararlandığım hocam Sayın Prof.Dr.Rüstem Kaya'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
R^n	n - boyutlu reel uzay.
$\|x\|$	$x_i \in R$ olmak üzere $x=(x_1 \ldots x_n)$ sıralı n-lisi için $\|x\| = (\Sigma x_i^2)^{1/2}$ sabit.
Ω	R^n de bir bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı.
$\bar{\Omega}$	$\Omega \cup \partial\Omega$
u_i	$\frac{\partial u}{\partial x_i}$, u nun x_i ye göre birinci türevi.
u_{ij}	$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ u nun $x_i x_j$ ye göre ikinci türevi
∇u	$(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) =$ u nun gradiyenti
$d(x)$	x sin $\partial\Omega$ olan uzaklığı.
$\{u_{ij}\}$	Hessian matris.
$\{u^{ij}\}$	Hessian matrisinin tersi.
$A = \{A^{ij}\}$	Hermityen matrisinin kofaktör matrisi.
$0(\|x'\|^3)$	$\|x'\|^3$ ile bölündüğü zaman sınırlı kalan her fonksiyon.

İ Ç İ N D E K İ L E R

Sayfa No

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, lineer olmayan eliptik denklemler için, Dirichlet problemi ele alınacaktır. İncelemede, temel kaynak olarak (Caffarelli, Nirenberg and Spruck, 1984) kullanılacaktır. Ω bölgesi, R^n de, sınırlı bir bölge olsun. u fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da tanımlı, reel ve her basamaktan sürekli türevlere sahip olsun. Ele alınan Dirichlet problemi, $F(x,u,u_i,u_{jk})=0$ Ω da eliptik bir diferensiyel denklem olmak üzere

$$\begin{aligned} &\Omega \text{ da} \quad F(x,u,u_i,u_{jk}) = 0 \qquad (1.1)\\ &\partial\Omega \text{ da} \quad u = \phi \end{aligned}$$

probleminin $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ olan çözümünün bulunmasıdır. Burada $\phi \in C^\infty(\partial\Omega)$ dir. F'nin eliptik olması, $\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}$ matrisinin pozitif tanımlı olması demektir.

Bu çalışmada (1.1) rin özel şekli olan, Ω kesin konveks bölgesinde, $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ve $\bar{\Omega}$ da $\psi > 0$, $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\Omega \text{ da} \quad \det(u_{ij}) = \psi(x) \qquad (1.2)\\ &\partial\Omega \text{ da} \quad u = \phi \end{aligned}$$

Monge-Ampère denklemleri konu edilecektir. Bu denklem için, çözümün varlığını ve tekliğini veren, aşağıdaki teorem ispatlanacaktır.

Teorem 1.1 (1.2)'nin bir tek $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ kesin konveks çözümü vardır.

Monge-Ampère denklemleri ile çeşitli geometri problemlerinde karşılaşılır. Örneğin pekçok araştırmacı Minkowski problemini Monge-Ampère denklemi için incelemiştir. Kısaca Minkowski problemi, R^{n+1} de Gauss eğriliği verilen, kapalı konveks bir hiperyüzeyin varlığının incelenmesidir. 1971'de A.V.Pogorelov (Pogorelov, 1971a, b,c) üç tane çalışmasını yayınlamıştır. Ω da düzgün olan çözümlerin nasıl bulunduğunu, bu çalışmalarında kısaca anlatmıştır. Ω nın herhangi bir kompakt alt cümlesinde, çözümün üçüncü türevlerini hesaplamak için E.Calabinin (Calabi, 1958) fikirlerinden yararlanmıştır. 1974'de Calabi ve Nirenberg, $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ çözümleri bulma problemine çalışmışlardır. Üçüncü basamağa kadar olan türevler için, sınıra kadar kestirimler bulmuşlardır. Sonuçların bazıları (Nirenberg, 1974)'de yayınlanmıştır. Fakat üçüncü basamaktan türevlerin, sınır komşuluğundaki hesaplamaları tam değildi. Calabi ve Nirenberg bazı üçüncü basamaktan türevler için, tek taraflı sınırlar buldular. S.Cheng ve S.T.Yau Dirichlet problemine çalışmışlar ve üçüncü basamaktan türevler için, aynı zorluklarla karşılaşmışlardır. Küre üzerinde Minkowski problemi için ve (1.2) Dirichlet probleminin $u \in Lip(\bar{\Omega}) \cap C^{\infty}(\Omega)$ çözümlerinin varlığı için ispatlarının tamamını (Cheng and Yau, 1976, 1977)'de vermişlerdir. Bu yazarların Dirichlet problemini elealış tarzları, küre üzerinde Minkowski probleminin çözümünü bulmak olmuştur. Son zamanlarda, P.L.Lions (Lions, 1981),(Lions,1983),(Lions,1985) çalışmalarında özel bir metot kullanarak, çözümlerin varlığının ispatını vermiştir. T.Aubin'in de (Aubin, 1981) buna benzer çalışması vardır.

Bu incelemede, sınıra kadar olan düzgün çözümlerin varlığını Calabi ve Nirenberg'in fikirlerine ek olan kestirim bulunarak, gösterilecektir.

Teoremin ispatı için, maksimum ilkesi kullanılarak (1.2)'nin çözümleri için aşağıdaki kestirimler çıkarılacaktır.

$$|u|_2 \leqslant K \tag{1.3}$$

$x, y \in \bar{\Omega}$ için

$$\sum_{i,j} |u_{ij}(x) - u_{ij}(y)| \leqslant \frac{K}{1 + |\log|x-y||} \tag{1.4}$$

$C^2(\bar{\Omega})$ da norm

$$|u|_2 = \max_{\bar{\Omega}} |u| + \sum_i \max_{\bar{\Omega}} |u_i| + \sum_{i,j} \max_{\bar{\Omega}} |u_{ij}|$$

olarak tanımlansın. Benzer olarak C^3 uzayında norm tanımlanır. Buna göre K sabiti bölgeye, C^3 de, ψ'nin $|\psi|_3$ normuna ve $|\phi|_4$ bağlıdır. (1.4) kestirimi çözümün ikinci türevleri için sürekliliğin logaritmik modülünü gösterir.

İkinci bölümde, (1.3)'ün ispatının tamamı verilecektir.

Üçüncü bölümde, çözümün üçüncü türevleri için, iç kestirim verilecektir.

Dördüncü bölümde, (1.4)'ün ispatına yardımcı olacak üçüncü türevler için, yukarıdan bir sınır bulunacaktır.

Beşinci bölümde, bir lemma olarak verilen, ilginç sonuç önceki bölümde v fonksiyonuna uygulandığı zaman, v_α'nın sürekliliğin logaritmik modülünü sağladığı gösterilecektir.

Altıncı bölümde, maksimum ilkesi ve lemma 5.1 kullanılarak, $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$ için,

$$\sum_{i,j} |u_{ij}(x)-u_{ij}(y)| \leqslant \frac{K}{1+|\log|x-y||} \qquad (1.4)'$$

kestirimi çıkarılacaktır. Bu eşitsizlik ile üçüncü türevler için iç kestirim olan

$$\Omega \text{ da} \quad |\partial^3 u(x)| \leqslant \frac{K}{d(x)} \qquad (1.5)$$

birlikte alınarak (1.4) kestirimi çıkarılacaktır.

Böylece (1.2)'nin $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ olan kesin konveks çözümünün varlığı gösterilmiş olacaktır. Ayrıca, çözümün tekliği çıkarılarak, teoremin ispatı tamamlanacaktır.

2. İKİNCİ BASAMAĞA KADAR OLAN TÜREVLER İÇİN KESTİRİMLER

Bu kısımda, sırasıyla u fonksiyonun, birinci türevleri ve ikinci türevleri için sınırlar bulacağız, u^o fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da her basamaktan sürekli türevlere sahip ve $\partial\Omega$ da ϕ'ye eşit olan bir kesin konveks fonksiyon olsun.

Önce, $|u|$ yu hesaplayalım. u konveks fonksiyon olduğundan, maksimum değerini sınırda alır.

$$u \leqslant \max \phi$$

Maksimum ilkesi yardımı ile

$$u^o \leqslant u \tag{2.1}$$

yazabiliriz. Böylece u için,

$$|u| \leqslant K \tag{2.1)'$$

kestirimini buluruz.

İkinci olarak, $|\nabla u|$ yu hesaplayalım. u konveks fonksiyon olduğundan, $|\nabla u|$ maksimum değerini sınırda alır. u_ν sınır üzerinde, u'nun dış normal doğrultusundaki türevini göstersin. Teğetsel türevler bilindiğinden, $\partial\Omega$ da, $|u_\nu|$ yi hesaplamak yeterlidir. (2.1)'den

$$\partial\Omega \text{ da} \quad u_\nu \leqslant u_\nu^o \tag{2.2}$$

yazabiliriz. Çünkü $(u^o-u) \leqslant 0$ dolayısıyla $\partial\Omega$ da $(u^o-u)_\nu \geqslant 0$ dır. u_ν 'nin bir alt sınırını bulmak için, sadece u'nun konveksliğini kullanacağız. Sınırda bir nokta alalım. Bu nokta başlangıç noktası ve x_n-ekseni, sınırın iç normali doğrultusunda olsun. Pozitif x_n-ekseninin bölgeden çıktığı, noktayı da y olarak alalım.

Konveksliği kullanarak

$$-u_\nu(o) = u_n(o) \leqslant u_n(y)$$

(2.2)'yi kullanarak

$$u_n(y) \leqslant u_n^o(y) \leqslant 2\,|\nabla u^o(y)|$$

dir. Böylece

$$-u_\nu(o) = u_n(o) \leqslant u_n(y) \leqslant 2\,|\nabla u^o(y)| \qquad (2.3)$$

elde ederiz. Sınırda ve dolayısıyla $\bar{\Omega}$ da

$$|\nabla u| \leqslant K_2 \qquad (2.4)$$

buluruz. K_2 $|u^o|_1$ e bağlı sabittir.

Üçüncü olarak, uygun engel (barrier) fonksiyonları yardımı ile, $\partial\Omega$ da u'nun ikinci türevleri için, kestirimleri hesaplayalım. $\det(u_{ij}) = \psi(x)$ denkleminin her iki tarafının, logaritmasını aldıktan sonra, x_k'ya göre türevini alalım.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\log\det(u_{ij})) = \frac{1}{\det(u_{ij})}\left(\begin{vmatrix} u_{k11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{k21} & u_{22} & & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{kn1} & & & u_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{k12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{k22} & & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{kn2} & & u_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{k1n} \\ u_{21} & u_{22} & & u_{k2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & & u_{knn} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\det(u_{ij})}\,[(u_{k11}.A_{11} + u_{k21}A_{21} + \ldots + u_{kn1}A_{n1}) + (u_{k12}A_{12} + u_{k22}A_{22} + \ldots$$

$$+ u_{kn2}A_{n2}) + \ldots + (u_{k1n}A_{1n} + u_{k2n}A_{2n} + \ldots + u_{knn}A_{nn})]$$

$A = (\det H).H^{-1}$ olduğundan

$$= u^{11}u_{k11} + u^{21}u_{k21} + \ldots + u^{n1}u_{kn1} + \ldots + u^{1n}u_{k1n} + u^{2n}u_{k2n} + \ldots + u^{nn}u_{knn}$$

$$= \sum_i \sum_j u^{ij}u_{kij}$$

elde ederiz.

$L = u^{ij}\partial_i\partial_j$ lineerleştirilmiş operatörü göstermek üzere,

$$Lu_k = u^{ij}u_{kij} = (\log\psi)_k \qquad (2.5)$$

yazabiliriz. $x_l\partial_k - x_k\partial_l$ bir açısal türev operatörünü göstersin.

$$L(x_l u_k - x_k u_l) = u^{ij}\partial_i\partial_j\,(x_l u_k - x_k u_l)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_l\, u^{ij} u_{kij} + \sum_{j=1}^{n} 2\,u^{lj}\,u_{kj}$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} x_k\, u^{ij}\, u_{lij} - \sum_{j=1}^{n} 2\,u^{kj}\,u_{lj}$$

$$= x_l\,(\log\psi)_k - x_k(\log\psi)_l + \sum_{j=1}^{n} 2(u^{lj}u_{kj} - u^{kj}u_{lj})$$

$$= (x_l\,\partial_k - x_k\,\partial_l)\log\psi + \sum_{j=1}^{n} 2\,(u^{lj}u_{kj} - u^{kj}u_{lj})$$

$\sum_{j=1}^{n} 2(u^{lj}u_{kj} - u^{kj}u_{lj}) = 0$ olduğundan,

$$L(x_l\,u_k - x_k u_l) = (x_l\,\partial_k - x_k\partial_l)\log\psi \qquad (2.6)$$

bulunur.

Sınırın herhangi bir noktasını seçelim. Bu nokta, genellikten bir şey kaybetmeksizin başlangıç noktası olabilir. x_n eksenini iç normal olarak alalım. Başlangıç noktası komşuluğunda sınırı

$$\rho : \mathbb{R}^{n-1} \to R$$

ile gösterelim. ρ fonksiyonunun $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ komşuluğunda, taylor açılımını gözönüne alalım. $x_n = 0$ düzlemi, yüzeyin teğet düzlemi olduğundan, $\forall\, \alpha < n$ için $\rho_\alpha(0,\ldots,0) = 0$ dır.

Buna göre;

$$x_n = \rho(0,\ldots,0) + \sum_{\alpha<n} \frac{\partial\rho}{\partial x_\alpha}(0)x_\alpha + \frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta<n} \frac{\partial^2\rho}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}(0)\, x_\alpha x_\beta + \frac{1}{3!}\sum \frac{\partial^3\rho}{\partial x_\alpha\partial x_\beta x_\ell}\, x_\alpha x_\beta x_\ell + \ldots$$

$$x_n = \rho(x') = \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + 0(|x'|^3)$$

bulunur.

Sınırda $u=\phi$ olduğundan, $u-\phi=0$ dır. Aynı zamanda $\alpha,\beta<n$ için $(u-\phi)_\alpha = 0$ ve $(u-\phi)_{\alpha\beta} = 0$ dır. Bölge içerisinde birinci ve ikinci türevler sıfırdan farklı olur. $(u-\phi)(x_1,\ldots x_{n-1}, \rho(x_1,\ldots x_n-1)) = 0$ kapalı fonksiyon olarak yazalım.

$$\alpha<n \text{ için } \frac{\partial}{\partial\alpha}((u-\phi)(x_1,\ldots x_{n-1}, \rho(x')) = (\partial_\alpha + \rho_\alpha \partial_n)(u-\phi)$$

$$= (u-\phi)_\alpha + \rho_\alpha(x')(x-\phi)_n$$

$$= (u-\phi)_\alpha + B_{\alpha\beta} x_\beta (u-\phi)_n$$

olarak yazıp

$$|(u-\phi)_\alpha + (u-\phi)_n B_{\alpha\beta} x_\beta| \leqslant |(u-\phi)_\alpha| + |(u-\phi)_n| |B_{\alpha\beta}| |x_\beta|$$

$$\leqslant (|u_\alpha| + |\phi_\alpha|) + (|u_n| + |\phi_n|) |B_{\alpha\beta}| |x_\beta|$$

$B_{\alpha\beta} =$ sabit, $|x_\beta| \leqslant |x|^2$ dir. $|\nabla u| \leqslant K$ olduğundan $|u_n| \leqslant K$ $|u_\alpha| \leqslant K$ ve $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ dan $|\phi_n| \leqslant K$ dir.

$$\leqslant (K_1+K_2) + (K_3+K_4) |B_{\alpha\beta}| |x^2|$$

K_1+K_2 ve K_3+K_4 ün uygun seçimi ile

$$\leqslant K_5 |x|^2 + K_6 |x|^2$$

$$\leqslant (K_5+K_6) |x|^2$$

$$\leqslant C |x|^2$$

elde edilir.

$\alpha, \beta < n$ için,

$$(\partial_\beta + \rho_\beta \partial_n)(\partial_\alpha + \rho_\alpha \partial_n)(u-\phi) = (u-\phi)_{\alpha\beta} + \rho_{\alpha\beta}(u-\phi)_n + \rho_\alpha (u-\phi)_{n\beta} + \rho_\beta (u-\phi)_{n\alpha}$$

$$+ \rho_\alpha \rho_\beta (u-\phi)_{nn} = 0$$

$$= (u-\phi)_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}(u-\phi)_n + B_{\alpha\beta} x_\beta (u-\phi)_{n\beta}$$

$$+ B_{\alpha\beta} x_\alpha (u-\phi)_{n\alpha} + B^2_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta (u-\phi)_{nn} = 0$$

Özellikle başlangıç noktasında,

$$(u-\phi)_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} (u-\phi)_n = 0$$

elde ederiz.

$$|(u-\phi)_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} (u-\phi)_n| \geqslant 0$$

$$|(u-\phi)_{\alpha\beta}| + |B_{\alpha\beta} (u-\phi)_n| \geqslant 0$$

$$|\phi_{\alpha\beta}| - |u_{\alpha\beta}| + |B_{\alpha\beta}| (|u_n| - |\phi_n|) \geqslant 0$$

$$|u_{\alpha\beta}| \leqslant |\phi_{\alpha\beta}| + |B_{\alpha\beta}| (|u_n| - |\phi_n|)$$

$$|u_{\alpha\beta}| \leqslant |\phi_{\alpha\beta}| + |B_{\alpha\beta}| (|u_n| + |\phi_n|)$$

$$|u_{\alpha\beta}| \leqslant K_1 + K_2 (K_3 + K_4) \qquad (2.8)$$

$$|u_{\alpha\beta}| \leqslant C$$

bulunur.

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ herhangi bir birim vektör olmak üzere

$$\sum_{\alpha,\beta<n} u_{\alpha\beta}(o)\, \xi_\alpha, \xi_\beta \geqslant c_o > o \qquad (2.9)$$

kestirimini hesaplayalım.

Bunun için genellikten bir şey kaybetmeksizin $\xi_1 = 1$, $\alpha \neq 1$ için $\xi_\alpha = 0$ seçerek

$$u_{11}(o) \geqslant c_o > o \qquad (2.9)'$$

olduğunu göstermek, yeterli olacaktır.

$\alpha < n$ için, $u(o) = u_\alpha(o) = o$ olduğu kabul edilebilir.

(2.9)' nün ispatı için, engel fonksiyonunu ve (2.4)'ün ispatını tekrar edeceğiz. (2.7)'den yararlanarak u'nun sıfır noktası komşuluğunda taylor açılımını yazalım.

$$u(x',\rho(x')) = \phi(x',\rho(x')) = u(o) + \sum_{\alpha<n} (u_\alpha(o) + \rho_\alpha(o)u_n(o))\, x_\alpha$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta<n} (u_{\alpha\beta}(o) + \rho_{\alpha\beta}(o)\, u_n(o) + \rho_\alpha(o) u_{n\beta}(o)$$

$$+ \rho_\beta(o) u_{\alpha n}(o) + \rho_\alpha(o)\rho_\beta(o) u_{nn}(o))\, x_\alpha x_\beta$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{\alpha,\beta,\ell<n} u_{\alpha\beta\ell}(o) + \rho_\ell(o) u_{\alpha\beta n}(o) + \rho_{\alpha\beta\ell}(o) u_n(o)$$

$$+ \rho_{\alpha\beta}(o) u_{n\ell}(o) + \rho_{\alpha\beta}(o)\rho_\ell(o) u_{nn}(o) + \rho_{\alpha\ell}(o) u_{n\beta}(o)$$

$$+ \rho_\alpha(o)\rho_\ell(o) u_{n\beta n}(o) + \rho_\alpha(o) u_{n\beta\ell}(o) + \rho_{\beta\ell}(o) u_{\alpha n}(o)$$

$$+ \rho_\beta(o)\rho_\ell(o) u_{\alpha nn}(o) + \rho_\beta(o) u_{\alpha n\ell}(o) + \rho_{\alpha\ell}(o)\rho_\beta(o) u_{nn}(o)$$

$$+ \rho_\alpha(o)\rho_{\beta\ell}(o) u_{nn}(o) + \rho_\alpha(o)\rho_\beta(o)\rho_\ell(o) u_{nnn}(o)$$

$$+ \rho_\alpha(o)\rho_\beta(o) u_{nn\ell}(o)]\; x_\alpha x_\beta x_\ell + \ldots.$$

$$u = \phi = \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta<n} [u_{\alpha\beta}(o) + \rho_{\alpha\beta}(o) u_n(o)]\; x_\alpha x_\beta$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{\alpha,\beta,\ell<n} [u_{\alpha\beta\ell}(o) + \rho_{\alpha\beta\ell}(o) u_n(o) + \rho_{\alpha\beta}(o) u_{n\ell}(o) + \rho_{\alpha\ell}(o) u_{n\beta}(o)$$

$$+ \rho_{\beta\ell}(o) u_{\alpha n}(o)]\,.\, x_\alpha x_\beta x_\ell + ,\ldots$$

$u = \phi = \frac{1}{2!} \nu_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta +$ üçüncü dereceden terimler $+\, 0(|x|^4)$

elde ederiz. $\lambda = \nu_{11}/B_{11}$ alınırsa;

$$\tilde{u} = u - \lambda\, x_n \qquad (2.10)$$

fonksiyonu (1.2) denklemini sağlar.

$\tilde{u} = u - \lambda x_n = \frac{1}{2}\, \nu_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta\; +$ 3.cü dereceden terimler $+\, 0(|x|^4)$

$$- \nu_{11}/B_{11} \quad [\frac{1}{2} B_{\alpha\beta} + 0(|x'|^3)]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta<n} [u_{\alpha\beta}(o) + \rho_{\alpha\beta}(o) u_n(o)]\; x_\alpha x_\beta + \frac{1}{6} \sum_{\alpha,\beta,\ell<n} [u_{\alpha\beta\ell}(o)$$

$$+ \rho_{\alpha\beta\ell}(o)\,.\, u_n(o) + \rho_{\alpha\beta}(o) u_{n\ell}(o) + \rho_{\alpha\ell}(o) u_{n\beta}(o)$$

$$+ \rho_{\beta\ell}(o)\; u_{\alpha n}(o)]\, x_\alpha x_\beta x_\ell + 0(|x|^4)$$

$$- \frac{u_{11}(o)+\rho_{11}(o)u_n(o)}{\rho_{11}(o)} \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta<n} \rho_{\alpha\beta}(o)x_\alpha x_\beta + \sum_{\alpha,\beta,\ell<n} \rho_{\alpha\beta\ell}(o)x_\alpha x_\beta x_\ell\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\ \beta<n} \{[\rho_{11}(o)u_{\alpha\beta}(o)+\rho_{11}(o)\rho_{\alpha\beta}(o)u_n(o)-u_{11}(o)\rho_{\alpha\beta}(o)-\rho_{11}(o)u_n(o)\rho_{\alpha\beta}(o)]/\rho_{11}\}.x_\alpha x_\beta$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{\alpha,\beta,\ell<n} \{[\rho_{11}(o)u_{\alpha\beta\ell}(o)+\rho_{11}(o)\rho_{\alpha\beta\ell}(o)u_n(o)+\rho_{11}(o)\rho_{\alpha\beta}(o)\ u_{n\ell}(o)$$

$$+ \rho_{11}(o)\rho_{\alpha\ell}(o)u_{n\beta}(o)+\rho_{11}(o)\rho_{\beta\ell}(o)u_{\alpha n}(o)-u_{11}(o)\rho_{\alpha\beta\ell}(o)-\rho_{11}(o)u_n(o)\rho_{\alpha\beta\ell}(o)]$$

$$/\rho_{11}(o)\}x_\alpha x_\beta x_\ell + 0(|x|^4)$$

$$= \frac{1}{2} \sum \{[\rho_{11}(o)u_{\alpha\beta}(o)-u_{11}(o)\rho_{\alpha\beta}(o)]/\rho_{11}(o)\}\ x_\alpha x_\beta$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{\alpha,\beta,\ell<n} \{[\rho_{11}(o)u_{\alpha\beta\ell}(o)+\rho_{11}(o)\rho_{\alpha\beta}(o)u_{n\ell}(o)+\rho_{11}(o)\rho_{\alpha\ell}(o)u_{n\beta}(o)$$

$$+ \rho_{11}(o)\rho_{\alpha\beta}(o)u_{\alpha n}(o)-u_{11}(o)\rho_{\alpha\beta\ell}(o)]/\rho_{11}(o)\}.x_\alpha x_\beta x_\ell+0(|x|^4).$$

$\alpha,\beta=1$ için, x_1^2 nin katsayısı sıfırdır.

$a_{1j}=(\rho_{11}(o)u_{1j}(o)-u_{11}(o)\rho_{1j})/\rho_{11}(o)$ ve ikinci toplamdaki, fonksiyonların bir üst sınırı alınırsa,

$$u|_{\partial\Omega} \leqslant \sum_{1<j\leqslant n} a_{1j}x_1x_j + C\left(\sum_{1<\beta<n} x_\beta^2 + |x|^4\right) \quad (2.10)'$$

olduğu çıkarılır. Hata son terim ile kontrol edilebilir.

Engel fonksiyonu olarak,

$$h= -\varepsilon x_n + \delta|x|^2 + \frac{1}{2B} \sum_{1<j\leqslant n} (a_{1j}x_1+B_{xj})^2$$

alalım. $B \gg C$, $\delta>0$ küçük sabit ve $\varepsilon \ll \delta$ olarak, sınırda

$$h-\tilde{u}= \varepsilon x_n+\delta|x|^2+\frac{1}{2B}(a_{12}^2x_1^2+2B\,a_{12}x_1x_2+B^2x_2^2+\ldots+a_{1n}^2x_1^2+2B\,a_{1n}x_1x_n+B^2x_n^2)$$

$$-(a_{12}x_1x_2\ \ a_{13}x_1x_3+\ldots+a_{1n}x_1x_n+C(x_2^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2+|x|^4))$$

$$= -\varepsilon x_n + \delta|x|^2 + (\frac{B}{2} - C)x_2^2 + \ldots + (\frac{B}{2} - C)\, x_{n-1}^2 + \frac{B}{2} x_n^2 + \frac{1}{2B}(a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2).x_1^2$$

$$- C\,|x|^4 \geqslant (\delta - C\varepsilon)|x|^2 + (\frac{1}{2}B - C) \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} x_j^2 + \frac{1}{2B} x_n^2 + \frac{1}{2B}(a_{12}^2 + \ldots - a_{1n}^2)x_1^2 - C|x|^4$$

$$\geqslant (\delta - C\varepsilon)|x|^2 + (\frac{1}{2}B - C) \sum_{1 \leqslant j < n} x_j^2 + \frac{1}{2B} x_n^2 + \frac{1}{2B}(a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2)x_1^2 - C\,|x|^4$$

veya

$$h - \tilde{u} \geqslant 0$$

olduğunu görürüz. $\{h_{ij}\}$ matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$\{h_{ij}\} = \begin{vmatrix} 2\delta + \frac{1}{B}\{a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2\} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & 2\delta + B & 0 & \ldots & 0 \\ a_{13} & 0 & 2\delta + B & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & 0 & 0 & \ldots & 2\delta + B \end{vmatrix}$$

$$|\{h_{ij}\} - \lambda I| = ((2\delta + \frac{1}{B}\{a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2\}) - \lambda)(2\delta + B - \lambda)^{n-1} - a_{12}^2(2\delta + B - \lambda)^{n-2}$$

$$\ldots - a_{1n}^2(2\delta + B - \lambda)^{n-2}$$

$$= (2\delta + B - \lambda)^{n-2}\,[(2\delta + \frac{1}{B}\{a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2\}) - \lambda)(2\delta + B - \lambda) - a_{12}^2 \ldots a_{1n}^2]$$

$$= (2\delta + B - \lambda)^{n-2}\,[\lambda^2 - \lambda(4\delta + B + \frac{1}{B}\{a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2\}) + 2\delta$$

$$.(2\delta + B + \frac{1}{B}\{a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2\})]$$

$|\{h_{ij}\} - \lambda I| = o$ dan, $\lambda_1 = 2\delta$, $\lambda_2 = 2\delta + B + \frac{1}{B}\{a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2\}$

ve diğerleride δ ya bağlı olarak bulunur. Buna göre, $\{h_{ij}\}$ nin en küçük özdeğeri 2δ dır. Bütün özdeğerler δ dan bağımsız olarak yukarıdan düzgün olarak sınırlıdırlar. δ nın küçük seçimi ile, bölgede

$$\det(h_{ij}) = \lambda_1 \ldots \lambda_n \leqslant \psi$$

elde edilir.

h fonksiyonu $\tilde{u}$ için bir üst engeldir. Yani, maksimum ilkesiyle,

$$\tilde{u} \leqslant h$$

olur. Bu sebeple,

$$\tilde{u}_n(o) \leqslant h_n(o) = -\varepsilon$$

olur. Başlangıç noktasında,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\tilde{u}(x',\rho(x')) = \tilde{u}_{11}(o) + \rho_{11}(o)\tilde{u}_n(o) + \rho_1(o)\tilde{u}_{n1}(o) + \rho_1(o)\tilde{u}_{1n}(o) + \rho_1^2(o)\tilde{u}_n(o)$$
$$= \tilde{u}_{11}(o) + \rho_{11}(o)\tilde{u}_n(o) = o$$

dır. Böylece,

$$\tilde{u}_{11}(o) = \tilde{u}_{11}(o) = -\tilde{u}_n(o)\ \rho_{11}(o)$$
$$\geqslant \varepsilon\ \rho_{11}(o) \geqslant c_o$$

dir. Burada c_o sabiti, $\max\psi$, $\max\psi^{-1}$, ψ ve $|\phi|_4$ bağlıdır. Böylece (2.9)' ve (2.9) ispatlanmış olur.

Şimdi $u_{\alpha n}(o)$ karışık türevini hesaplayalım. $\alpha < n$ için,

$$T = \partial_\alpha + \sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta\,\partial_n - x_n\,\partial_\beta) \tag{2.11}$$

vektör alanını alalım.

Buna göre,

$$LT(u) = u^{ij}\partial_i\partial_j(u_\alpha + \sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta u_n - x_n u_\beta))$$
$$= u^{ij}u_{\alpha ij} + u^{ij}\partial_i\partial_j \sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta u_n - x_n u_\beta)$$

(2.6) dan

$$= (\log\psi)_\alpha + \sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta\partial_n - x_n\partial_\beta)\ \log\psi$$

$$= (\partial_\alpha + \sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta\partial_n - x_n\partial_\beta)\ \log\psi$$

$$= T \log\psi \tag{2.11'}$$

buluruz.

u^{ij} pozitif tanımlı olmasından, $|u^{ij}| \leqslant \Sigma u^{ii}$ olur. T vektör alanı olarak verildiğinden, lineer ve süreklidir. Sürekli T fonksiyonun, kompakt bir cümle üzerinde maksimumu vardır. O halde $|T| \leqslant C$ alınabilir. $\phi \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ verildiğinden, ϕ nin her basamaktan sürekli türevleri sınırlıdır. Bunları kullanarak,

$$\begin{aligned}
|L(T(u-\phi))| &= |L(T(u)) - L(T(\phi))| \\
&\leqslant |LT(u)| + |LT(\phi)| \\
&\leqslant |T\log\psi| + |u^{ij}[\phi_{\alpha ij} + \sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta \phi_{nij} - x_n \phi_{\beta ij})]| \\
&\leqslant |T|\,|\log\psi| + |u^{ij}|\,[\,|\phi_{\alpha ij}| \\
&\quad + |\sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta \phi_{nij} - x_n \phi_{\beta ij})|\,] \\
&\leqslant C + |u^{ij}|\,|C_1 + C_2(x_\beta C_3 - x_n C_4)| \\
&\leqslant C + \Sigma u^{ii} C \\
&\leqslant C(1 + \Sigma u^{ii})
\end{aligned} \tag{2.12}$$

bulunur. Ayrıca sınırda,

$$\begin{aligned}
|T(u-\phi)| &= |(u-\phi)_\alpha + \sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta(u-\phi)_n - x_n(u-\phi)_\beta)| \\
&= |\sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta(u-\phi)_n)| \\
&\leqslant \sum_{\beta<n} |B_{\alpha\beta}|\,(|x_\beta|\,(|u_n| + |\phi_n|)) \\
&\leqslant C\,|x|^2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

dir. a,b uygun pozitif sabitler olmak üzere

$$w = -a\,|x|^2 + bx_n$$

engel fonksiyonunu kullanacağız. L operatörünü w engel fonksiyonuna uygulayarak

$$Lw = -2a \;\Sigma u^{ii}$$

buluruz.

$$|L(T(u-\phi))| + Lw = C(1+\Sigma u^{ii}) - 2a\,\Sigma u^{ii}$$
$$= C + (C-2a)\,\Sigma u^{ii}$$

$C \leqslant a$ ise $\qquad \leqslant -a\Sigma u^{ii} + C$

olur. Aritmetik ve geometrik ortalama teoremi ile

$$\det(u_{ij}) = \psi(x) \Rightarrow \det(u^{ij}) = \psi^{-1}(x) \text{ den}$$

$$\frac{1}{n}\ \Sigma u^{ii} \geqslant (\det(u^{ij}))^{1/n} = \psi^{-1/n}$$

dir. Ω da a sabitini yeterince büyük seçerek,

$$|L(T(u-\phi))| + Lw \leqslant 0$$

olduğunu kabul edebiliriz.

(2.13) ile Ω kesin konveks bölge olmasından, b'nin büyük seçimi ile sınırda

$$|T(u-\phi)| \leqslant C\,|x|^2 \leqslant -a|x|^2 + bx_n = w$$

elde ederiz. Maksimum ilkesini uygulayarak, bölgede

$$|T(u-\phi)| \leqslant w$$

ve böylece başlangıç noktasında,

$$\partial_n T(u-\phi) = \partial_n((u-\phi)_\alpha + \sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta(u-\phi)_n - x_n(u-\phi)_\beta)$$

$$= (u-\phi)_{\alpha n} + \sum_{\beta<n} B_{\alpha\beta}(x_\beta(u-\phi)_{nn} - (u-\phi)_\beta + x_n(u-\phi)_{\beta n})$$

$$\partial_n T(u-\phi) = (u-\phi)_{\alpha n} \leqslant b$$
$$|\partial_n T(u-\phi)| = |(u-\phi)_{\alpha n}| \leqslant b$$

buluruz. Böylece

$$|(u-\phi)_{\alpha n}| = |u_{\alpha n} - \phi_{\alpha n}| \leqslant |u_{\alpha n} + \phi_{\alpha n}| \leqslant |u_{\alpha n}| + |\phi_{\alpha n}| \leqslant b$$

$$|u_{\alpha n}(o)| \leqslant b - |\phi_{\alpha n}| \leqslant b - C_1 \tag{2.14}$$
$$|u_{\alpha n}(o)| \leqslant K$$

kestirimi bulunur.

Sınırda son olarak, u_{nn} için kestirim bulalım. Bunun için (1.2) denklemini kullanacağız. Başlangıç noktasında determinantı, n.ci kolona göre açarsak

$$\psi(o) = \det(u_{ij}) = \sum_{i=1} A^{in} u_{in}$$

dir. Toplamda (n-1) tane teriminin sınırlı olduğunu gösterdik. O halde bu (n-1) terim toplamı da sınırlıdır. Buna göre, başlangıç noktasında

$$A^{nn} u_{nn} \leqslant C$$

dir. (2.9)'dan $A^{nn}(o)$ için bir alt sınır buluruz. Böylece

$$u_{nn}(o) \leqslant C \qquad (2.14a)$$

olduğu görülür. $H = \{u_{ij}\}$ matrisinin bütün özdeğerlerin bir üst sınırı vardır. ψ bu özdeğerlerin çarpımına eşit olduğundan, bu özdeğerler için bir alt sınır buluruz. c_o uygun bir sabiti göstermek üzere

$$u_{nn}(o) \geqslant c_o > 0 \qquad (2.14b)$$

bulunur.

Şimdi, ikinci türevler için iç kestirimleri bulabiliriz. Bunun için u_{rr}'nin maksimum ilkesini gerçeklediğini göstermek yeterli olacaktır. (1.2) denklemini

$$F(\partial^2 u) = \log \det(u_{ij}) = \log\psi \qquad (2.15)$$

şeklinde yazalım. Buna göre

$$L = F_{u_{ij}} \partial_i \partial_j = u^{ij} \partial_i \partial_j$$

L operatörü lineerleştirilmiş operatördür.

Lemma 2.1 Bileşenleri $H = \{u_{ij}\}$ pozitif tanımlı matrisler olan F konkav fonksiyondur.

İspat : F'nin birinci ve ikinci türevlerini bulalım.

$$\frac{\partial F}{\quad} = \frac{\partial}{\quad} (\log \det(u_{ij})) = \frac{A_{ij}}{\quad} = u^{ij}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{kl}} = \frac{\frac{\partial}{\partial u_{kl}}(A_{ij}).\det(u_{ij}) - \frac{\partial}{\partial u_{kl}}(\det u_{ij}).A_{ij}}{(\det(u_{ij}))^2}$$

$$= \frac{-A_{ik}\ A_{lj}}{(\det(u_{ij}))^2}$$

$$= -u^{ik}\ u^{lj}$$

dir.

$$A = [\frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{kl}}]_{n^2xn^2} = \{-u^{ik}\ u^{lj}\}_{n^2xn^2}$$

şeklinde bir matristir. Şeklinde bir matristir. $M = \{m_{ij}\}$ simetrik matrisler verilsin. $\{m_{ij}\} \in R^n_n$ matrislerin R^{n^2} uzayının noktaları ile eşleyebiliriz. (Hacısalihoğlu, 1980).

Buna göre,

$$R^n_n \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} R^{n^2}$$

$$M = \{m_{ij}\} \longrightarrow (b_1, b_2 \ldots . b_n, \ldots, b_{n^2})$$

yani,

$$b_{i+(j-1)n} = m_{ij}$$

dir. $H = \{u_{ij}\}$ pozitif tanımlı simetrik matrisi köşegenleştirerek $\{m_{ij}\}$ ler üzerinde;

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{kl}}\ m_{ij}\ m_{kl}$$

karesel formun negatif tanımlı olduğunu görelim. $H = \{u_{ij}\}$ pozitif tanımlı olduğundan, her özdeğeri pozitiftir. Bu özdeğerler $\lambda_i = u_{ii}$ olarak alınırsa

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{kl}} = \begin{bmatrix} -u^{11}u^{11} & & & & & & & & \\ & -u^{21}u^{1w} & & & & & & & \\ & & -u^{n1}u^{1n} & & & & & & \\ & & & -u^{12}u^{21} & & & & & \\ & & & & -u^{12}u^{22} & & & & \\ & & & & & -u^{n2}u^{2n} & & & \\ & & & & & & -u^{1n}u^{n1} & & \\ & & & & & & & -u^{21}u^{n2} & \\ & & & & & & & & -u^{nn}u^{nn} \end{bmatrix}_{n^2 x n^2}$$

matrisini buluruz.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{kl}} m_{ij}\, m_{kl} = [m_{11} \ldots m_{1n}, m_{21} \ldots m_{nn}]_{1xn^2} \begin{bmatrix} -u^{11}u^{11} & & & & & & & & \\ & -u^{21}u^{12} & & & & & & & \\ & & \ddots\, -u^{n1}u^{1n} & & & & & & \\ & & & -u^{12}u^{21} & & & & & \\ & & & & -u^{22}u^{22} & & & & \\ & & & & & \ddots\, u^{n2}u^{2n} & & & \\ & & & & & & \ddots\, -u^{1n}u^{n1} & & \\ & & & & & & & -u^{21}n^{n2} & \\ & & & & & & & & \ddots\, -u^{nn}u^{nn} \end{bmatrix}_{n^2 x n^2} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \\ m_{12} \\ m_{22} \\ \vdots \\ m_{n2} \\ \vdots \\ m_{1n} \\ m_{2n} \\ \vdots \\ m_{nn} \end{bmatrix}_{n^2 x 1}$$

$$= -u^{11}u^{11}m_{11}^{\;2} - u^{21}u^{12}m_{21}^{\;2} \ldots u^{n1}u^{1n}\, m_{n1}^{2}\; -u^{12}u^{21}\, m_{12}^{2}\; -u^{22}u^{22}\, m_{22}^{\;2} \ldots u^{n2}u^{2n}m_{n2}^{\;2}$$

$$- \ldots -u^{1n}u^{n1}\, m_{1n}^{\;2} - u^{21}u^{n2}\, m_{2n}^{\;2} - \ldots -u^{nn}u^{nn}\, m_{nn}^{\;2}$$

$$= -(u^{11})^2 m_{11}^{\;2} - (u^{21})^2 m_{21}^{\;2} - \ldots - (u^{n1})^2 m_{n1}^{\;2} - \ldots - (u^{nn})^2 m_{nn}^{\;2}$$

$$< 0$$

olduğundan karesel form negatif tanımlıdır.

(2.15) nin x_r ye göre iki kez türevini alalım. Birincisinden

$$F_{u_{ij}} u_{rij} = \frac{\psi_r}{\psi}$$

ve ikincisinden

$$F_{u_{ij}} u_{rrij} + F_{u_{ij}u_{kl}} u_{rij} u_{rkl} = \frac{\psi_{rr}}{\psi} - \frac{\psi_r^2}{\psi^2}$$

buluruz. F'nin konkavlığını kullanırsak, C ψ ye bağlı bir sabit olmak üzere

$$L u_{rr} = F_{u_{ij}} u_{rrij} \geqslant (\log\psi)_{rr} \qquad (2.15)'$$

$$\geqslant -nC$$

elde ederiz. Herhangi bir sabit yönlü türev olan

$T = c_j \partial_j \qquad \Sigma c_j^2 = 1$ için

$$L T^2 u = F_{u_{ij}} \partial_i \partial_j (c_1^2 u_{11} + c_1 c_2 u_{12} + \dots + c_1 c_n u_{1n}$$

$$+ c_2 c_1 u_{21} + c_2^2 u_{22} + \dots + c_2 c_n u_{2n}$$

$$\vdots$$

$$+ c_n c_1 u_{n1} + c_n c_2 u_{n2} + \dots + c_n^2 u_{nn})$$

$$\geqslant c_1^2 (\log\psi)_{11} + c_1 c_2 (\log\psi)_{12} + \dots + c_1 c_n (\log\psi)_{1n}$$

$$+ c_2 c_1 (\log\psi)_{21} + c_2^2 (\log\psi)_{22} + \dots + c_2 c_n (\log\psi)_{2n}$$

$$\vdots$$

$$+ c_n c_1 (\log\psi)_{n1} + c_n c_2 (\log\psi)_{n2} + \dots + c_n^2 (\log\psi)_{nn}$$

$$\geqslant c_1^2 (-C) + c_1 c_2 (-C_1) + \dots + c_1 c_n (-C_1)$$

$$+ c_2 c_1 (-C_2) + c_2^2 (-C) + \dots + c_2 c_n (-C_2)$$

$$\vdots$$

$$c_n c_1 (-C_n) + c_n c_2 (-C_n) + \dots + c_n^2 (-C)$$

$$\geqslant (c_1^2 \; c_2^2 + \dots + c_n^2)(-C) + 2 (c_i c_j)(-C_i)$$

$$L\,T^2u \geqslant -C \tag{2.16}$$

olacak şekilde benzer hesap geçerlidir.

(2.15)' denkleminde $Lu = n$ olduğundan

$$L\,(u_{rr} + Cu) \geqslant 0$$

dır ve böylece $u_{rr} + Cu$ maksimum değerini sınırda alır. Bundan dolayı bölgede

$$u_{rr} \leqslant K$$

bulunur. Denklem, koordinatların ortogonal değişimi altında invaryant olduğundan, herhangi bir yöndeki türev olan $T = \Sigma c_i \partial_i$ için, c_i sabit $\Sigma c_i^2 = 1$ için bölgede

$$T^2u \leqslant K \tag{2.17}$$

elde edilir. $T = (1/\sqrt{2})(\partial_i \pm \partial_j)$ alınır ve $u_{ii} > o$ olduğu hatırlanırsa

$$T^2u = \frac{1}{2}\,(u_{11} + 2\,u_{12} + u_{22}) \leqslant K$$

$$\frac{1}{2}\,u_{11} + u_{12} + \frac{1}{2}\,u_{22} \leqslant K$$

$$u_{12} \leqslant K - \frac{1}{2}\,(u_{11} + u_{22})$$

$$u_{12} \leqslant K - \frac{1}{2}\,(C_1 + C_1)$$

$$u_{12} \leqslant K - C_1$$

$$u_{12} \leqslant C$$

$$\frac{1}{2}\,u_{11} - u_{12} + \frac{1}{2}\,u_{22} \leqslant K$$

$$-u_{12} \leqslant K - \frac{1}{2}\,(u_{11} + u_{22})$$

$$-u_{12} \leqslant K - \frac{1}{2}\,(C_1 + C_2)$$

$$u_{12} \geqslant -K + C_1$$

$$u_{12} \geqslant c_o$$

$$|u_{ij}| \leqslant K \qquad (2.17)'$$

elde edilir ve böylece $|u|_2 \leqslant K$ ispatlanır. $|u|_2 \leqslant K$ olması, L lineerleştirilmiş operatörün düzgün eliptik operatör olduğunu gösterir. $L = \Sigma a^{ij}(x)\, \partial_i \partial_j$ her $x \in \Omega$, $\xi \in R^n - \{o\}$ μ_o pozitif sabit olmak üzere

$$(\mu_o \leqslant \mu(x) |\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j$$

eşitliği gerçekliyorsa, L operatörüne düzgün eliptiktir denir. Genel düzgün eliptik operatörde, a^{ij} matrisi simetrik ve pozitif olduğundan

$$\lambda(x) |\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda(x) |\xi|^2$$

eşitliği gerçeklenir. Burada $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$ a^{ij} nin en büyük ve en küçük özdeğeridir. a^{ij} elemanları sınırlıdır. Önceki hesaplara dönerek herhangi bir T için,

$$L\, T^2 u = u^{ik} u^{lj}\, Tu_{ij} - Tu_{ij} - Tu_{kl} + T^2(\log\psi) \qquad (2.18)$$

$$\geqslant c_o\, |Tu_{ij}|^2 - C$$

olduğunu görürüz. c_o ve C hesaplanabilen pozitif sabitlerdir.

3- ÜÇÜNCÜ TÜREVLER İÇİN İÇ KESTİRİMLER

Önce Pogorelov (Pogorelov, 1971a, 1971b, 1971c) tarafından kullanılan Calabi'nin (Calabi, 1958) hesabını tanımlayacağız.

$H=\{u_{ij}\}$ $\quad \{u^{ij}\}=H^{-1}$ olmak üzere

$$\sigma = u^{kl}\, u^{pq}\, u^{rs}\, u_{kpr}\, u_{lqs} \tag{3.1}$$

ifadesi, $ds^2 = u_{ij}\, dx_i dx_j$ Riemann metriği cinsinden üçüncü türevlerin karesinin büyüklüğünü ölçer. Burada c_1, c_2 pozitif sabitleri için

$$L\sigma = u^{ij}\, \sigma_{ij} \geqslant c_1\, \sigma^2 - c_2 \tag{3.2}$$

olduğunu göstereceğiz. Daha sonra L düzgün eliptik olduğundan, maksimum ilkesi yardımıyla

$$\sigma(x) \leqslant \frac{c_3}{d^2(x)} \tag{3.2a}$$

çıkarılacaktır. Böylece, (1.5) bulunmuş olacaktır.

$$u^{ij}u_{kij} = (\log\psi)_k \tag{3.3}$$

$$u^{ij}u_{kpij} = u^{ia}u_{abp}u^{bj}u_{kij} + (\log\psi)_{kp}$$

$$u^{ij}u_{kprij} = u^{ia}u_{abr}u^{bj}u_{kpij} - 2\,u^{ic}u_{cdr}u^{da}u_{abp}u^{bj}u_{kij} + (\log\psi)_{kpr}$$

$$+\, u^{ia}u_{abpr}u^{bj}u_{kij} + u^{ia}u_{abp}u^{bj}u_{krij}$$

$u^{kl}u^{pq}u^{rs}u_{lqs} = u^{kpr}$ olsun, bu ifade k,p,r ye göre simetrik olduğundan

$$u^{kpr}u^{ij}u_{kprij} = u^{kpr}\,[\,(\log\psi)_{kpr} + 3\, u^{ia}u^{bj}u_{abr}u_{kpij} - 2u^{ic}u^{da}u^{bj}u_{cdr}u_{abp}u_{kij}]$$

dir. Sonra

$$u^{ij}\,\sigma_{ij} = 2\, u^{kl}u^{pq}u^{rs}u_{lqs}u^{ij}u_{kprij} + 2\, u^{ij}u^{kl}u^{pq}u^{rs}u_{kpri}u_{lqsj}$$

$$-12\, u^{ij}\, u^{ka}u_{abi}u^{bl}\, u^{pq}u^{rs}u_{kprj}u_{lqs}$$

$$+6u^{ij}u_{kpr}u_{lqs}u^{kq}u_{abi}u^{bl}u^{pc}u_{cdj}u^{dq}u^{rs}$$

$$-3u^{ij}u_{kpr}u_{lqs}u^{ka}u_{abij}\,u^{bl}u^{pq}u^{rs} \qquad (3.4)$$

$$+3u^{ij}u_{kpr}u_{lqs}u^{kg}u_{gmj}u^{ma}u_{abi}u^{bl}u^{pq}u^{rs}$$

$$+3u^{ij}u_{kpr}u_{lqs}u^{ka}u_{abi}u^{bg}u_{gmj}u^{ml}u^{pq}u^{rs}$$

bulunur.

(3.4) de $u^{ij}u_{kprij}$ nin (3.3) deki eşitini yazalım.

$$u^{ij}\sigma_{ij} = 2\,u^{kl}u^{pq}u^{rs}u_{lqs}[\,(\log\psi)_{kpr} + 3\,u^{ia}u^{bj}u_{abr}u_{kpij} - 2\,u^{ic}u^{da}u^{bj}\,u_{cdr}u_{abp}u_{kij}]$$
$$+ 2\,u^{ij}u^{kl}u^{pq}u^{rs}u_{kpri}u_{lqsj} - 12\,u^{ij}u^{ka}u_{abi}u^{bl}u^{pq}u^{rs}u_{kprj}u_{lqs}$$
$$+ 6\,u^{ij}u_{kpr}u_{lqs}u^{ka}u_{abi}u^{bl}u^{pc}u_{cdj}u^{dq}u^{rs}$$
$$-3\,u^{ij}u_{kpr}u_{lqs}u^{ka}u_{abij}u^{bl}u^{pq}u^{rs}$$
$$+3\,u^{ij}u_{kpr}u_{lqs}u^{kg}u_{qmj}u^{ma}u_{abi}u^{bl}u^{pq}u^{rs}$$
$$+3\,u^{ij}u_{kpr}u_{lqs}u^{ka}u_{abi}u^{bg}u_{qmj}u^{ml}u^{pq}u^{rs}$$

işlemi yaptığımz x noktasında (uygun bir dönmeden sonra) u_{ij} nin köşegensel olduğunu kabul edebiliriz. Buna göre

$$u^{ij}\sigma_{ij} = 6\,\frac{u_{kpr}u_{ijr}u_{kpij}}{u_{kk}\,u_{pp}u_{rr}u_{ii}u_{ij}} - 4\,\frac{u_{kpr}u_{iar}u_{ajp}u_{kij}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}u_{ii}u_{aa}u_{rr}}$$

$$+ 2\,\frac{u_{kpr}(\log\psi)_{kpr}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}} + 2\,\Sigma\,\frac{u^2_{kpri}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}u_{ii}}$$

$$-12\,\frac{u_{kli}u_{lr}u_{kpri}}{u_{kk}u_{ll}u_{pp}u_{rr}u_{ii}} + 6\,\frac{u_{kpr}u_{lqr}u_{kli}u_{pqi}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}u_{ll}u_{qq}u_{ii}}$$

$$-3\,\frac{u_{kpr}u_{lpr}u_{klii}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}u_{ll}u_{ii}} + 6\,\frac{u_{kpr}u_{lpr}u_{kai}u_{ali}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}u_{ll}u_{ii}u_{aa}}$$

buluruz. (3.3) den

$$\frac{u_{kpr}u_{lpr}u_{klii}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}u_{ll}u_{ii}} = \frac{u_{kpr}u_{lpr}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}u_{ll}} \left(\frac{u_{kab}u_{lab}}{u_{aa}u_{bb}} \quad (\log\psi)_{kl}\right)$$

yazabiliriz. Bunu yerine koyup, kareye tamamlarsak

$$u^{ij}\sigma_{ij} = 2\,\Sigma \frac{1}{u_{ii}u_{kk}u_{pp}u_{rr}}\left(u_{kpri} - \frac{1}{2u_{ll}}(u_{kli}u_{plr} + u_{pli}u_{klr} + u_{rli}u_{kpl})\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{u_{ii}u_{kk}u_{pp}u_{rr}}\left|\sum_{l}\frac{1}{u_{ll}}(u_{kli}u_{plr} + u_{pli}u_{klr} + u_{rli}u_{kpl})\right|^2$$

$$-4A + 6A + \frac{2\,u_{kpr}(\log\psi)_{kpr}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}} - \frac{3\,u_{kpr}\,u_{lpr}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}u_{ll}} \times \left(\frac{u_{kab}u_{lab}}{u_{aa}u_{bb}} + (\log\psi)_{kl}\right)$$

$$+ 6\,B \qquad (3.5)$$

elde edilir. Burada

$$A = \frac{u_{kpr}u_{lqr}u_{kli}u_{pqi}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}u_{ll}u_{ii}u_{qq}}\,, \quad B = \frac{u_{kpr}u_{lpr}u_{kai}u_{lai}}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}u_{ll}u_{aa}u_{ii}}$$

dir. Böylece

$$u^{ij}\sigma_{ij} \geqslant -C - C\sigma - \frac{1}{2}\,\frac{1}{u_{ii}u_{kk}u_{pp}u_{rr}} \times \left|\sum_{l}\frac{1}{u_{ll}}(u_{kli}u_{plr} + u_{pli}u_{klr} + u_{rli}u_{kpl})\right|$$

$$+3B + 2A$$

$$= - C - C\sigma - \frac{3}{2}B - 3A + 3B + 2A$$

ve karenin açılması ile

$$= \frac{1}{2}B - C - C\sigma + \frac{1}{2}(B-A) \qquad (3.6)$$

bulunur.

Lemma 3.1 $B \geqslant A$.

İspat: Uygunluk için,

$$u_{kpr}(u_{kk}u_{pp}u_{rr})^{-1/2} = \nu_{kpr}$$

alalım. ν bütün indislere göre simetrik olmak üzere

$$\sum_{jikl} \Big| \sum_{r} (\nu_{jri}\,\nu_{rkl} + \nu_{jrk}\,\nu_{ril} - 2\,\nu_{jrl}\,\nu_{rik}) \Big|^2 = 6B - 6A$$

dan

$$B = \nu_{kpr}\,\nu_{lpr}\,\nu_{kai}\,\nu_{lai} \geqslant \nu_{kpr}\,\nu_{lqr}\,\nu_{kli}\,\nu_{pqi} = A$$

bularak lemma 3.1 ri ispatlamış oluruz.

Bu değeri (3.5) de yerine koyarak uygun C sabiti ile

$$u^{ij}\,\sigma_{ij} \geqslant \frac{1}{2}\,B - C\sigma - C \tag{3.7}$$

buluruz. Son olarak

$$B = \sum_{k,l} \Big| \sum_{p,r} \nu_{kpr}\,\nu_{lpr} \Big|^2$$

$$\geqslant \sum_{k} \Big| \sum_{p,r} \nu^2_{kpr} \Big|^2$$

Scchwarz eşitsizliği ile

$$\geqq \frac{1}{n}\Big(\sum_{k,p,r} \nu^2_{kpr} \Big)^2$$

$$= \frac{1}{n}\Big(\sum_{k,p,r} \frac{1}{u_{kk}u_{pp}u_{rr}}\, u^2_{kpr} \Big)^2$$

$$= \frac{1}{n}\,\sigma^2$$

olduğunu görürüz. Bulunan bu değeri (3.6) da yerine koyarak, uygun C sabiti için

$$u^{ij}\,\sigma_{ij} \geqslant \frac{1}{4n}\,\sigma^2 - C$$

buluruz. Böylece (3.2) ispatlanır.

lemma 3.2 Ω bölgesinde, σ

$$A\sigma = a^{ij}(x)\sigma_{ij} + a^{i}(x)\,\sigma_i \geqslant c_1\sigma^2 - c_2$$

eliptik eşitsizliği sağlasın. Burada A katsayıları sınırlı olan düzgün eliptik operatör ve $c_1 > o$, c_2 sabitlerdir. c_3 sabiti sadece düzgün eliptikliğe, A nın katsayıları üzerindeki sınıra, c_1 re, c_2 ye ve Ω bağlı olmak üzere

$$\sigma(x) \leqslant \frac{C_3}{d^2(x)} \qquad (3.2b)$$

elde ederiz.

İspat: σ yı hesaplamak için, sınıra 2R uzaklığında başlangıç noktası olan, bir $y \in \Omega$ noktasını alalım.

$|x| < R$ de , $\zeta = R^2 - |x|^2$

$|x| \geqslant R$ için $\zeta = o$

fonksiyonlarını kullanacağız. Burada

$$\tau = \zeta^2\,\sigma$$

konumunu yapalım. $|x| \leqslant R$ için, L düzgün eliptik operatörü göstermek üzere

$$L\,\sigma \geqslant c_1\sigma^2 - c_2$$

$$c_1\sigma^2 \leqslant c_2 + L\sigma$$

olduğunu biliyoruz ve $\sigma = \tau\,\zeta^{-2}$ değerini yerine yazarsak

$$c_1(\tau\zeta^{-2})^2 \leqslant c_2 + L\,(\tau\zeta^{-2})$$

$$= c_2 + \tau_{ij}\times\zeta^{-2} - 2\tau_i\,\zeta^{-3}\zeta_j - 2\,\tau_j\,\zeta^{-3}\zeta_i + 6\,2\,\zeta^{-4}\zeta_j\,\zeta_i - 2\,\zeta^{-3}\tau\zeta_{i}$$

$$= c_2 + \zeta^{-2}\,L\,\tau - 2\,\zeta^{-3}a^{ij}\,\zeta_i\,\tau_j + \tau L(\zeta^{-2}) \qquad (3.8)$$

buluruz.

τ $|x| \leqslant R$ de $\bar{x}$ noktasında maksimum değerini alsın. Buna göre, $\tau_j = o$ ve $L\tau \leqslant o$ dır. (3.8) de bu değerleri yazarsak $\bar{x}$ noktasında, uygun C için

$$c_1 \tau^2 \leqslant c_2 \zeta^4 + \tau \zeta^4 L(\zeta^{-2})$$

$$= c_2\zeta^4 - 2\tau\zeta a^{ij} \zeta_{ij} + 6\tau a^{ij} \zeta_i\zeta_j - 2\tau.\zeta a^i \zeta_i$$

$$\leqslant C (R^8 + R^2\tau + R^3\tau)$$

elde ederiz.

$R \leqslant$ çap(Ω) olduğundan, farklı bir C için

$$\tau(\bar{x}) \leqslant CR^4$$

çıkar. Aynı sınır $\tau(o)$ içinde geçerli olmalıdır. Böylece

$$R^4 \sigma(o) \leqslant CR^2$$

$$\sigma(o) \leqslant \frac{C}{R^2}$$

bularak (3.2b) yi elde etmiş oluruz.

4. BAZI ÜÇÜNCÜ TÜREVLER İÇİN TEK TARAFLI SINIR KESTİRİMLERİ

Bu bölümde, sınır üzerinde bir nokta komşuluğunda yerel inceleme yapacağız. Bu noktayı başlangıç noktası ve $\Omega : \{x_n > \rho(x')\}$ bölgesini de başlangıç noktası komşuluğunda alalım. $\alpha < n$ $T = \partial_\alpha + \rho_\alpha \partial_n$ bir diferensiyel operatörü göstermek üzere sınırda teğet rolü oynasın.

Önce sınırda yukarıdan

$$-\partial_\nu T^2 u \leqslant K \tag{4.1}$$

kestirimini bulmak için LT^2u yu hesaplayacağız ve uygun bir engel fonksiyonu oluşturacağız. ν birim dış normaldir. Başlangıç noktasındaki kestirimi çıkaracağız. Ancak, başlangıç noktası komşuluğundaki herhangi bir nokta için de benzer hesaplar geçerlidir. Şimdi

$$(\partial_n T^2 u)(o) \leqslant K \tag{4.1a}$$

kestirimini bulacağız.

$\log\det(u_{ij}) = \log\psi$ denklemine T'yi uygulayalım.

$$T(\log\det(u_{ij})) = \frac{T(\det(u_{ij}))}{\det(u_{ij})}$$

$$= \frac{1}{\det(u_{ij})}\left(\begin{vmatrix} T\,u_{11} & u_{12} \cdots & u_{1n} \\ T\,u_{21} & u_{22} & u_{2n} \\ T\,u_{n1} & u_{n2} & u_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \cdots & T\,u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} \cdots & T\,u_{2n} \\ \vdots & & \\ u_{n1} & u_{n2} \cdots & T\,u_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\det(u_{ij})} [(T u_{11} A_{11} + T u_{21} A_{21} + \ldots + T u_{n1} A_{n1}) + \ldots$$

$$+ (T u_{1n} A_{1n} + T u_{2n} A_{2n} + \ldots + T u_{nn} A_{nn})]$$

$A = (\det H).H^{-1}$ olduğundan,

$$= u^{11} T u_{11} + u^{21} T u_{21} + \ldots + u^{n1} T u_{n1} + \ldots + u^{1n} T u_{1n} + u^{2n} T u_{2n} + \ldots$$

$$+ u^{nn} T u_{nn} = \sum_i \sum_j u^{ij} T u_{ij}$$

bularak,

$$u^{ij} T u_{ij} = T (\log \psi)$$

elde ederiz.

$$[\partial_i \partial_j, T] = (\partial_i \partial_j T - T \partial_i \partial_j)$$

$$= \partial_\alpha \partial_i \partial_j + \rho_{\alpha ij} \partial_n + \rho_{\alpha j} \partial_n \partial_i + \rho_{\alpha i} \partial_n \partial_j + \rho_\alpha \partial_i \partial_j \partial_n$$

$$- \partial_\alpha \partial_i \partial_j - \rho_\alpha \partial_n \partial_i \partial_j \tag{4.2}$$

$$= \rho_{\alpha i} \partial_n \partial_j + \rho_{\alpha j} \partial_n \partial_i + \rho_{\alpha ij} \partial_n$$

kommütatörü göstersin. Buna göre

$$u^{ij} \partial_i \partial_j (T u) = u^{ij} T u_{ij} + u^{ij} \rho_{\alpha i} u_{nj} + u^{ij} \rho_{\alpha j} u_{ni} + u^{ij} \rho_{\alpha ij} u_n$$

dir.

T yi bir kez daha uygulayalım.

$$T (u^{ij}) \partial_i \partial_j T u + u^{ij} T \partial_i \partial_j T u = T (u^{ij}) T u_{ij} + u^{ij} T^2 u_{ij}$$

$$+ T(u^{ij}) [\rho_{\alpha i} u_{nj} + \rho_{\alpha j} u_{ni} + \rho_{\alpha ij} u_n]$$

$$+ u^{ij} [\rho_{\alpha i} T u_{nj} + \rho_{\alpha j} T u_{ni} + \rho_{\alpha ij} T u_n]$$

$$+ u^{ij} [T \rho_{\alpha i} u_{nj} + T \rho_{\alpha j} u_{ni} + T \rho_{\alpha ij} u_n]$$

$$u^{ij}T\partial_i\partial_j\, T\, u = -T(u^{ij})\ \partial_i\partial_j\, T\, u + T(u^{ij})\ T\, u_{ij} + u^{ij}\, T^2\, u_{ij}$$
$$+\ T(u^{ij})\ (\rho_{\alpha i}\, u_{nj} + \rho_{\alpha j} u_{ni} + \rho_{\alpha ij}\, u_n)$$
$$+\ u^{ij}\ \rho_{\alpha i}\, T\, u_{nj} + u^{ij}\ \rho_{\alpha j}\, T\, u_{ni} + f$$

$|u|_2 \leqslant K$ olduğundan f bir sınırlı fonksiyondur.

$$= -T(u^{ij})\ [\partial_i\partial_j\, T\, u - T\, u_{ij}] + u^{ij}\, T^2 u_{ij}$$
$$+\ T(u^{ij})\ [\rho_{\alpha i}\, u_{nj} + \rho_{\alpha j}\, u_{ni} + \rho_{\alpha ij}\, u_n]$$
$$+\ u^{ij}\ \rho_{\alpha i}\, T\, u_{nj} + u^{ij}\ \rho_{\alpha j}\, T\, u_{ni} + f$$

$$= -T(u^{ij})\ [\rho_{\alpha i}\, u_{nj} + \rho_{\alpha j}\, u_{ni} + \rho_{\alpha ij}\ u_n] + u^{ij}\, T^2 u_{ij}$$
$$+\ T(u^{ij})\ [\rho_{\alpha i}\, u_{nj} + \rho_{\alpha j}\, u_{ni} + \rho_{\alpha ij}\, u_n]$$
$$+\ u^{ij}\ \rho_{\alpha i}\, T\, u_{nj} + u^{ij}\ \rho_{\alpha j}\, T\, u_{ni} + f$$
$$= u^{ij}\, T^2 u_{ij} + u^{ij}\ \rho_{\alpha i}\, T\, u_{nj} + u^{ij}\ \rho_{\alpha j}\, T\, u_{ni} + f$$

Komütatörü kullanarak,

$$u^{ij}\, T\, \partial_i\partial_j\, T\, u = u^{ij}\, [\partial_i\partial_j\, T - (\rho_{\alpha i}\partial_n\partial_j + \rho_{\alpha j}\partial_n\partial_i + \rho_{\alpha ij}\, \partial_n)]\, T\, u$$
$$= u^{ij}\, \partial_i\partial_j\, T^2\, u - u^{ij}\rho_{\alpha i}(T\, u)_{nj} - u^{ij}\rho_{\alpha j}(T\, u)_{ni} - u^{ij}\rho_{\alpha ij}(Tu)_n$$

$$u^{ij}\, \partial_i\partial_j\, T^2\, u = u^{ij}\, T\partial_i\partial_j\, T\, u + u^{ij}\ \rho_{\alpha i}(T\, u)_{nj} + u^{ij}\rho_{\alpha j}(Tu)_{ni} + u^{ij}\rho_{\alpha ij}\ (Tu)_n$$

$$L\, T^2 u = u^{ij}\, T^2 u_{ij} + u^{ij}\rho_{\alpha i} T\, u_{nj} + u^{ij}\ \rho_{\alpha j}\, T\, u_{ni} + f + u^{ij}\ \rho_{\alpha i}(Tu)_{nj}$$
$$+\ u^{ij}\ \rho_{\alpha j}(T\, u)_{ni} + u^{ij}\rho_{\alpha ij}(Tu)_n$$

$$L\, T^2\, u \geqslant -C$$

bulunur.

ε küçük pozitif sabit olmak üzere;

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{x_n < \varepsilon\}$$

bölgesinde

$$w = T^2\phi + ax_n - b\,(u - u(o)) - \Sigma x_j\, u_j(o)$$

fonksiyonunu engel fonksiyonu olarak alacağız.

Sınırda $T^2u = T^2\phi$ olduğu için, b'yi yeterince büyük bir sabit olarak seçerek, Ω_ε da

$$Lw = L\,T^2\,\phi - nb \leqslant -C \leqslant L\,T^2u$$

elde ederiz. Demek ki, b nin bir seçimi için $\partial\Omega_\varepsilon$da

$$w \geqslant T^2u$$

olacak şekilde a yı seçebiliriz. Böylece w bir üst engel fonksiyondur. Eşitlik başlangıç noktasında geçerli olmak üzere. $\bar{\Omega}_\varepsilon$ da

$$T^2u \leqslant w$$

buluruz. Buna göre

$$\begin{aligned} \partial_n\, T^2(o) &\leqslant \partial_n\, w(o) \\ &\leqslant a + \partial_n\, T^2\phi(o) \\ &\leqslant K \end{aligned}$$

dan (4.1a) bulunur.

Gelecek bölümde (4.1) rin nasıl kullanıldığını göreceğiz. Önce bunu tekrar formüle edeceğiz. Sınırda sıfır noktası komşuluğunda $\partial_n\, T^2u = T^2u_n$ olduğundan

$$T^2\, u_n \leqslant K$$

dır ve $w = u_n$

$$L\, u_n = (\log\psi)_n$$

lineer denklemini sağlar.

Gelecek bölümün önemli lemmasının doğrudan uygulaması için, sıfır noktası komşuluğunda sınırı daraltmak uygundur. Buna göre $\alpha < n$ için

$$y:\quad y_\alpha = x_\alpha \qquad \text{ve} \quad y_n = x_n - \rho(x')$$

olarak yeni değişkenleri tanımlayalım. Sonra,

$$\nu = K \sum_1^{n-1} y_\alpha^2 - w \tag{4.4}$$

$$w = u_n$$

konumunu yapalım. $|x| \leqslant \delta$, $x_n \geqslant 0$ yarı yuvarında $L = a^{ij}(x)\partial_i\partial_j$ düzgün eliptik operatör olsun. Büyük K sabiti için,

$$L\nu = a^{ij}\,\nu_{ij} = a^{ij}(2K - (\partial_i\partial_j\, T^2\phi - bu_{ij}))$$

$$= a^{ij}(2K - \partial_i\partial_j\, T^2\phi + bu_{ij})$$

$$|L\nu| = |a^{ij}|\,(2K - K_1 + bK_2)$$

$$\leqslant C_1 . K$$

$$|L\nu| \leqslant C \tag{4.5}$$

Aynı zamanda

$$|\nu| + |\nabla\nu| \leqslant K \tag{4.6}$$

olduğunu gösterebiliriz.

$$|\nu| = |K\, \Sigma y_\alpha^2 - u_n|$$

$$\leqslant |K\, \Sigma\, y_\alpha^2| + |u_n|$$

$$\leqslant C_1 + C_2 \leqslant K_1$$

dir. $\nu(y',o)$ konveks fonksiyon olduğundan $|\nabla\nu|$ hesaplamak için, $|\nu_\nu|$ yi hesaplamak yeterli olacaktır.

$$-\nu_{\nu} = \nu_n(o) = -w_n(o) = -u_{nn}(o)$$

$$|-\nu_{\nu}| = |\nu_n(o)| = |-u_{nn}(o)| = |u_{nn}(o)| \leqslant c_3$$

olduğundan $|\nabla\nu| \leqslant K_2$ dir.

Buradan

$$|\nu| + |\nabla\nu| \leqslant K_1 + K_2 \leqslant K$$

bulunur.

Her (y',o) için

$$\nu_{ij}(y',o) \geqslant 0$$

olduğundan

$$\nu(y',o) \text{ konveks bir fonksiyondur.} \tag{4.7}$$

5. BİR LEMMA

Bu bölümde, önemli sonuç çıkaracağız. Önceki bölümde (4.5)-(4.7) formüllerini sağlayan (4.4) ile verilen ν fonksiyonunu alacağız. Bu sonuç ν ye uygulandığı zaman $\alpha < n$ için $x_n = o$ üzerinde ν_α nın sürekliliğin logaritmik modülünü verecektir.

Lemmayı $\mathbb{R}^n = \{|x| < R\ ,\ x_n > o\}$ de bulunan B_R^+ yarıyuvarın da $a \leq o\ ,\ |a^i|\ ,\ |a| \leq M$ olmak üzere,

$$L = a^{ij}(x)\partial_i\partial_j + a^i(x)\partial_i + a(x)$$

$$M^{-1}|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leq M|\xi|^2 \tag{5.1}$$

genel düzgün eliptik operatör için formüle edeceğiz.

Lemma 5.1 $\nu \in C^2(B_R^+) \cap C^1(\overline{B_R^+})$ fonksiyonu

(i) $L\nu \leq C.$

(ii) B_R^+ da, $|\nu| \leq C$

(iii) $|\nabla_{x'}\nu(x'.o)| \leq C,$

(iv) $\nu_n(x'.o) \leq C,$

(v) $\nu(x'.o)$ konveks

koşullarını sağlasın. O zaman $\bar{C}$ sabiti, sadece n,M,R,C lere bağlı olmak üzere $|x'|\ ,\ |\bar{x}'| \leq \frac{1}{2} R$ için

$$|\nabla_{x'}\nu(x'.o) - \nabla_{x'}\nu(\bar{x}'.o)| \leq \frac{\bar{C}}{1 + |\log|x' - \bar{x}'||} \tag{5.2}$$

dir.

İspat: $R < 1$ kabul edebiliriz. $x' = o$ ve $|\bar{x}'|$ yü, $|\bar{x}'| \leq \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{R}$ olacak şekilde küçük sabit için, (5.2) yi ispatlamak yeterlidir. Bir afin fonksiyonu çıkardıktan sonra

$\nu(o) = |\nabla_{x'}\nu(o)| = 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Üstelik koordinatları döndürdükten sonra, $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\nabla_{x'}\nu\ (\bar{x}',o) = (\alpha,\ o,\ \ldots,\ o)$$

kabul edebiliriz. (iii) den $\alpha \leqslant C$ elde ederiz. $\alpha = 0$ hali aşikârdır. Varsayımlar (5.2) de yerine konularak,

$$\alpha \leqslant \frac{\bar{C}}{|\log|\bar{x}'||} \qquad (5.2)'$$

eşitsizliğini ispatlayalım.

$\nu\ (x',o)$ konveks fonksiyonun $((\bar{x}',o),\ \nu(\bar{x}',o))$ noktasındaki teğeti

$$y=\nu(\bar{x}',o)+\nabla_{x'}\nu(\bar{x}',o)(x'-\bar{x}')$$

olmak üzere konvekslikten dolayı $\nu(x',o)-y \geqslant o$ ve $\nu(x',o)\geqslant o$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned}\nu\ (x',o) &\geqslant \nu(\bar{x}',o) +(\alpha,o,\ldots,o)(x_1-\bar{x}_1,\ x_2-\bar{x}_2,\ldots,x_{n-1}-\bar{x}_{n-1})\\ &= \nu(\bar{x}',o) + \alpha(x_1-\bar{x}_1) = \alpha(x_1-\beta) \qquad (5.3)\end{aligned}$$

dir. β burada belirlidir. $x = o$ ve $x = \bar{x}$ alarak (5.3) de yerine koyalım. Birincisinden $\nu(o) = o$ ve $\nu(\bar{x}',o)\geqslant o$ olduğundan

$$o \geqslant \alpha\ (-\beta)$$
$$o \leqslant \alpha\beta \quad \Rightarrow \quad o \leqslant \beta$$

ikincisinden $\quad \nu(\bar{x}',o)-\nu(\bar{x}',o) \geqslant \alpha(\bar{x}_1-\beta)$

$$(\bar{x}-\beta)\geqslant o$$

$$\bar{x}_1-\beta\geqslant o \Rightarrow \bar{x}_1\geqslant \beta$$

Böylece

$$o \leqslant \beta \leqslant \bar{x}_1 \qquad (5.3)'$$

buluruz.

$$h(x',x_n)=\frac{1}{2}\,\alpha[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{1/2}+\frac{1}{2}\,\alpha(x_1-\beta)$$

$$-\frac{1}{2}\,\alpha\varepsilon x_n\,\log[(x_1-\beta)^2+x_n^2]-D(x_n+|x'|^2-Ex_n^2$$

engel fonksiyonunu düşünelim. (i) den

$$Lh \geqslant C \qquad (5.5)$$

ve $\partial(B_\delta^+)$ da

$$h \leqslant \nu \qquad (5.6)$$

olacak şekilde $o < \varepsilon$, $\delta < 1 \leqslant D$ ve E sabitleri, sadece n,M,R,C'ye bağlı olarak seçebiliriz.

Maksimum ilkesi kullanılırsa B_δ^+ da $h \leqslant \nu$ dir. h fonksiyonun da $x'=o$ alalım sonra x_n ne bölerek $x_n \to o$ götürelim. Buna göre, $\beta > o$ için

$$h_n(o)= -D-\alpha\varepsilon\log\beta$$

elde ederiz. (IV) den

$$h_n(o) \leqslant \nu_n(o) \leqslant C$$

böylece

$$-D-\alpha\varepsilon\log\beta \leqslant C$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\alpha \leqslant \frac{C+D}{-\varepsilon\log\beta}$$

$o < \beta < 1$ alınırsa, $\log\beta$ negatiftir. (5.3)' kullanarak

$$\alpha \leqslant \frac{C+D}{\varepsilon|\log\beta|} \leqslant \frac{C+D}{\varepsilon|\log|\overline{x}'||}$$

bulunur. Böylece (5.2)' nün ispatını tamamlarız.

(5.5), (5.6) yı direkt hesaplayarak görebiliriz. L düzgün eliptik operatörün, Lineer olduğu gözönüne alınarak, (5.5) $L([(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{1/2})$ ve $L(x_n(\log[(x_1-\beta)^2+x_n^2])$ nın toplamı olarak hesaplayabiliriz.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{1/2} = [(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{-1/2}.(x_1-\beta)+[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{-1/2}.x_n$$

$$= [(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{-1/2}.(x_1-\beta+x_n)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[(x_1-\beta)^2+x_n]^{1/2} = -\frac{1}{2}[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{-3/2}.2(x_1-\beta)[x_1-\beta+x_n]$$

$$-\frac{1}{2}[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{-3/2}.x_n[x_1-\beta+x_n]$$

$$+2[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{-1/2}$$

$$= \frac{2}{[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{1/2}}\left[1-\frac{[x_1-\beta+x_n]^2}{[(x_1-\beta)^2+x_n^2]}\right]$$

$$L([(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{1/2}) = a^{ij}(x)\frac{2}{[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{1/2}}\left[1-\frac{[x_1-\beta+x_n]^2}{[(x_1-\beta)^2+x_n^2]}\right]$$

$$+a^i(x)\frac{[x_1-\beta+x_n]}{[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{1/2}}+a(x)$$

$$\geqslant c_1\left[\frac{2}{[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{1/2}}\left(1-\frac{[x_1-\beta+x_n]^2}{[(x_1-\beta)^2+x_n^2]}\right.\right.$$

$$\left.\left.+[x_1-\beta+x_n]+1\right)\right]$$

$$\geqslant \frac{c_0}{[(x_1-\beta)^2+x_n^2]^{1/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\ [x_n \log(x_1-\beta)^2 + x_n^2\ ] = \log\ [\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2] + \frac{2x_n^2}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2]} + \frac{2(x_1-\beta)\ x_n}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2]}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}\ [x_n \log(x_1-\beta)^2 + x_n^2] = \frac{2x_n}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2]} + \frac{2(x_1-\beta)}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2]}$$

$$+ \frac{(4x_n + 2x_1 - 2\beta)[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2\ ] - 2x_n . 2x_n\ [x_n + x_1 - \beta\ ]}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2\ ]^2}$$

$$+ \frac{2\ x_n\ [\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2]\ - 2(x_1-\beta) . 2\ x_n\ [x_n + x_1 - \beta]}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2\ ]^2}$$

$$= \frac{2[\ x_1 - \beta + x_n]}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2]} + \frac{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2\ ]}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2\ ]^2}(6\ x_n + 2x_1 - 2\beta)$$

$$- \frac{4\ x_n [\ x_n + x_1 - \beta]\ (x_n + x_1 - \beta)}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2\ ]^2}$$

$$|\ L(x_n \log\ [\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2\ ])| = |a^{ij}(x)\ (\frac{2(x_1-\beta+x_n)}{[(x_1-\beta)^2 + x_n^2]} + \frac{6x_n + 2x_1 - 2\beta}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2]} - 4x_n \frac{(x_n - x_1 - \beta)^2}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2]}$$

$$+ a^i(x)\ (\log\ [\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2] + \frac{2x_n\ [x_n + x_1 - \beta]}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2]}) + a(x)\ |$$

$$\leqslant C_1\ \ |\frac{2(x_1-\beta+x_n)}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2\ ]} + \frac{6x_n + 2x_1 - 2_\beta}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2]} - 4x_n \frac{(x_n - x_1 - \beta)^2}{[\ (x_1-\beta)^2 + x_n^2\ ]^2}$$

$$+ \log [(x_1-\beta)^2 + x_n^2] + \frac{2x_n [x_n + x_1 - \beta]}{[(x_1-\beta)^2 + x_n^2]} + 1 |$$

$$\leqslant \frac{c_1}{[(x_1-\beta)^2 + x_n^2]}$$

Önce, $\varepsilon > o$ sabitini

$$L([(x_1-\beta)^2 + x_n^2]^{1/2} - \varepsilon x_n \log [(x_1-\beta)^2 + x_n^2]) \geqslant 0$$

sağlayacak şekilde alınabilir. Sonra D sabiti 1 eşit ya da ondan daha büyük olarak seçilebildiğinden, (5.5) geçerli olacak şekilde E sabiti seçilebilir.

$x_n = o$, $|x'| \leqslant \delta$ üzerinde (5.6) nın geçerli olduğunu görelim.

$x_n = o$ üzerinde, $h = \alpha(x_1-\beta) - D|x'|^2$ elde ederiz. Burada iki durum vardır.

1. Durum $x_1 - \beta > o$.

$$h \leqslant \alpha(x_1-\beta)$$

(5.3) ile

$$\leqslant \nu(x',o)$$

dir.

2. Durum $x_1 - \beta \leqslant o$.

$$h(x',o) \leqslant o \leqslant \nu(x',o)$$

dir.

D ve δ nın uygun seçimi ile sadece ∂B_δ^+ nın eğrisel kısmı olan S üzerinde (5.6) nın geçerli olduğunu görürüz. Önce S üzerinde δ yı,

$$x_n + |x'|^2 - E x_n^2 > \frac{1}{2}\delta^2 .$$

sağlayacak şekilde alalım. S üzerinde

$$h \leq -C \leq \nu$$

olacak şekilde D yi büyük seçebiliriz.

Lemma 5.2. $w \in C^2(R^n_+)$ fonksiyonu

$$L\,w = a^{ij}(x)\,w_{ij} \leq o$$

sağlasın. Burada L düzgün eliptik operatör yani $m > o$ için

$$\frac{1}{m}|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq m\,|\xi|^2$$

dir. w R^n_+ da Lipshitz sürekli ve ν bir konveks fonksiyonu göstermek üzere

$$w(x',o) \geq \nu(x')$$

olsun. Bu takdirde ν bir afin fonksiyondur.

İspat: ν nin bir afin fonksiyon olmadığını kabul edelim. ν konveks fonksiyon olduğundan, ν ve w ya uygun bir afin fonksiyon ekleyip, koordinatları döndürerek, $\alpha > o$ için

$$w(x',o) \geq \nu \geq \max\{\alpha x_1, o\}$$

bulunur.

$s = (x_1^2 + x_n^2)^{1/2}$ olmak üzere

$$h_M(x) = \frac{1}{2}\alpha s + \frac{1}{2}\alpha x_1 - \alpha\varepsilon x_n \log|x| + Mx_n$$

tanımını yapalım. Önce $\varepsilon > o$ i M den bağımsız olarak yeterince küçük seçerek,

$$L\,h_M \geq o$$

olduğunu görebiliriz.

$|x| = R, \quad x_n > o$ üzerinde

$$h_M = \frac{1}{2}\alpha(s + x_1) + x_n(M - \alpha\varepsilon\log\lceil x|)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha(s + x_1) + x_n(M - \alpha\varepsilon \log R)$$

dir.

$$\frac{1}{2}\alpha(s + x_1) \leqslant \max\{\alpha x_1, o\} + \alpha x_n$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu görebiliriz.

$$\frac{1}{2}\alpha(\sqrt{x_1^2 + x_n^2} + x_1) \leqslant \max\{\alpha x_1, o\} + \alpha x_n$$

Burada incelenecek iki durum vardır.

1- $x_1 < o$ olması halinde

$-x_1 = x$ diyelim.

$$\frac{1}{2}\alpha(\sqrt{x^2 + x_n^2} - x) \leqslant \alpha x_n$$

$$\sqrt{x^2 + x_n^2} - x \leqslant 2x_n$$

$$\sqrt{x^2 + x_n^2} \leqslant 2x_n + x$$

$$x^2 + x_n^2 \leqslant x^2 + 4xx_n + 4x_n^2$$

2- $x_1 > o$ olması halinde

$$\frac{1}{2}\alpha(\sqrt{x_1^2 + x_n^2} + x_1) \leqslant \alpha x_1 + \alpha x_n$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_n^2} + x_1 \leqslant 2x_1 + 2x_n$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_n^2} \leqslant x_1 + 2x_n$$

dir. Bundan dolayı

$h_M \leqslant \max\{\alpha x_1, o\} + x_n(M - \alpha\varepsilon \log R + \alpha)$

w Lipschitz sürekli olarak verildiğinden, $\bar{L}$ w için Lipchitz sabiti olmak üzere

$$|w(x',o) - w(x',x_n)| \leqslant \bar{L}\,|x_n|$$

dir.

$$\max\{\alpha x_1, o\} \leqslant w(x',o)$$

idi.

$$-\bar{L}\,x_n \leqslant w(x',o) - w(x',x_n) \leqslant \bar{L}\,x_n$$

$$w(x',o) \leqslant w(x',x_n) + \bar{L}\,x_n$$

Buna göre

$$h_M \leqslant \max\{\alpha x_1, o\} + x_n(M - \alpha\varepsilon \log R) + \alpha x_n$$

$$\leqslant w(x',o) + x_n(M - \varepsilon\alpha \log R) + \alpha x_n$$

$$\leqslant w(x',x_n) + x_n(M - \varepsilon\alpha \log R + \alpha + \bar{L})$$

elde edilir. Böylece yeterince büyük R için, $|x| = R$, $x_n > o$ üzerinde

$$h_M \leqslant w$$

dir. Maksimum ilkesi ile, bütün M ler için R^n_+ da

$$h_M \leqslant w$$

dir. Oysa M yi sonsuza götürürsek, h_M büyür. $h_M \leqslant w$ ile çelişir.

6. KESİN KONVEKS BİR ÇÖZÜM İÇİN VARLIK VE TEKLİK

(4.5)-(4.7) sağlayan (4.4) ile tanımlı ν fonksiyonunu düşünelim. Beşinci bölüme dönerek lemma 5.1 in uygulanabilir olduğunu ve bu lemmaya göre, $|y'|$, $|\bar{y}'| \leqslant c$ için,

$$|\nabla_{y'}\nu(y',o) - \nabla_{y'}\nu(\bar{y}',o)| \leqslant \frac{\bar{c}}{|\log|y'-\bar{y}'||}$$

$$|\nabla_{y'}\nu(y',o) - \nabla_{y'}\nu(\bar{y}',o)|^2 = \sum_{\alpha<n} \left(\frac{\partial\nu}{\partial y_\alpha}(y',o) - \frac{\partial\nu}{\partial y_\alpha}(\bar{y}',o)\right)^2$$

$$\geqslant \left(\frac{\partial\nu}{\partial y_\alpha}(y',o) - \frac{\partial\nu}{\partial y_\alpha}(\bar{y}',o)\right)^2$$

$$|\nabla_{y'}\nu(y',o) - \nabla_{y'}\nu(\bar{y}',o)| \geqslant \left(\frac{\partial\nu}{\partial y_\alpha}(y',o) - \frac{\partial\nu}{\partial y_\alpha}(\bar{y}',o)\right)$$

$$\left|\frac{\partial\nu}{\partial y_\alpha}(y',o) - \frac{\partial\nu}{\partial y_\alpha}(\bar{y}',o)\right| \leqslant \frac{\bar{c}}{|\log|y'-\bar{y}'||} \tag{6.1}$$

olduğunu görürüz.

Yeni koordinatlarda u nun ikinci türevlerini hesaplayalım. $\alpha < n$ için $x_\alpha = y_\alpha$ ve $y_n = x_n - \rho(x')$ olduğunu biliyoruz.

$$u(x_1,\ldots,x_{n-1},\rho(x')) = u(y_1,\ldots,y_{n-1}, x_n-\rho(y'))$$

$x_n = o$ ise $y_n = -\rho(y')$ dır.

Buna göre

$$u_\alpha = u_\alpha - \rho_\alpha u_n$$

ve

$$u_{x_\alpha x_\beta} = u_{y_\alpha y_\beta} - u_{y_\alpha y_n}\rho_\beta - u_{y_\beta y_n}\rho_\alpha + u_{y_n y_n}\rho_\alpha\rho_\beta - u_{y_n}\rho_{\alpha\beta}$$

$$u_{x_\alpha x_n} = u_{\bar{y}_\alpha y_n} - u_{y_n y_n}\, \rho_\alpha,$$

$$u_{x_n x_n} = u_{y_n y_n}$$

dir.

Sınırda yani $y_n = 0$ üzerinde, $u = \phi$ ve $\alpha, \beta < n$ için $u_{y_\alpha y_\beta} = \phi_{y_\alpha y_\beta}$ olduğunu biliyoruz. $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ olduğundan $u_{y_\alpha y_\beta}$ Lipshitz süreklidir.

(6.1) den $u_{y_\alpha y_n}$ nın bir sürekliliğin logaritmik modülünü sağladığını görebiliriz.

$$\nu = K \Sigma y_\alpha^2 - u_n$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial y_\alpha}(y',o) = 2K\, y_\alpha(y',o) - u_{n\alpha}(y',o)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial y_\alpha}(\bar{y}',o) = 2K\, y_\alpha(\bar{y}',o) - u_{n\alpha}(\bar{y}',o)$$

$$|\, 2K(y_\alpha(y',o) - y_\alpha\ (\bar{y}',o)) - (u_{n\alpha}(y',o) - u_{n\alpha}(\bar{y}',o))\, | \leqslant \frac{\bar{c}}{|\log|y'-\bar{y}'||}$$

$$2K(y_\alpha(y',o) - y_\alpha(\bar{y}',o)) - (u_{n\alpha}(y',o) - u_{n\alpha}(\bar{y}',o)) \leqslant \frac{\bar{c}}{|\log|y'-\bar{y}'||}$$

$$u_{n\alpha}(y',o) - u_{n\alpha}(\bar{y}',o) \geqslant -\frac{\bar{c}}{|\log|y'-\bar{y}'||} + 2K(y_\alpha - \bar{y}_\alpha) \qquad \text{(a)}$$

$$2K(y_\alpha - \bar{y}_\alpha) - (u_{n\alpha}(y',o) - u_{n\alpha}(\bar{y}',o)) \geqslant -\frac{\bar{c}}{|\log|y'-\bar{y}'||}$$

$$u_{n\alpha}(y',o) - u_{n\alpha}(\bar{y}',o) \leqslant \frac{\bar{c}}{|\log|y'-\bar{y}'||} + 2K(y_\alpha - \bar{y}_\alpha) \qquad \text{(b)}$$

$\bar{c}$, $|y'|$ $|\bar{y}'| \leqslant c$ ye bağlı olduğundan

(a) ve (b) de bulunan $2K(y_\alpha - \bar{y}_\alpha)$ sabiti

$$2K\,(y_\alpha - \bar{y}_\alpha) \leqslant \frac{c_1}{|\log|y'-\bar{y}'||}$$ alınabilir. O halde,

$$|u_{n\alpha}(y',o)-u_{n\alpha}(\bar{y},o)| \leqslant \frac{c}{|\log|y'-\bar{y}'||}$$

dir. Başlangıç noktası komşuluğunda, det $(u_{x_i x_j}) = \psi$ denklemini yeni koordinatlarla ifade edebiliriz. Bu denklemden yararlanarak, $u_{y_n y_n}$ bulabiliriz ve $u_{y_n y_n}$ nin sürekliliğin logaritmik modülünü sağladığın görebiliriz.

Böylece ilk Ω bölgesine dönerek, sınırda ikinci türevler, sabit bir sürekliliğin logaritmik modülüne sahiptirler. Başka bir ifadeyle, $\forall x,y \in \partial\Omega$ için (1.4) yi ispatlamış oluruz.

Lemma 6.1 $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$ için

$$\sum_{i,j} |u_{ij}(x)-u_{ij}(y)| \leqslant \frac{K}{1+|\log|x-y||}$$

dir.

İspat: $x=o$ ve $|y|$ nin küçük olduğunu kabul edebiliriz. Üstelik

$$u_{ij}(o) = \delta_{ij}$$

olacak şekilde kontrol altındaki değişkenin lineer dönüşümünü yapabiliriz. Daha önceden $|u_{ij}| \leqslant K$ ve sadece T^2u ikinci türevi için

$$L\,T^2u \geqslant -C$$

olduğunu biliyoruz.

ν sınırda sıfır noktasında birim dış normal, y sabit ve $\delta = |y|^{1/3}$ olacak şekilde küçük seçilsin.

g $\bar{\Omega}$ da sabit düzgün konveks fonksiyonu, $\partial\Omega$ da sıfıra eşit ve $Lg \geqslant 1$ sağlayan bir fonksiyonu göstersin.

Buna göre

$$h(x) = T^2u(o) + \frac{M}{|\log\delta|} - \frac{M}{\delta^2}\, x.\gamma - Cg$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. $x \in \partial\Omega$, $|x| < \delta$ için, (1.4) ile sınır noktaları için,

$$|T^2u(x) - T^2u(o)| \leqslant \frac{C}{|\log|x||} \leqslant \frac{C}{|\log\delta|}$$

yazabiliriz.

Bu sebeple $\Omega \cap \{|x| < \delta\}$ bölgesinde h fonksiyonu, T^2u için bir üst engel olduğunu aşağıdaki şekilde görebiliriz.

$$T^2u(y) \leqslant h(y) = T^2u(o) + \frac{M}{|\log\delta|} - \frac{M}{\delta^2}\, y.\gamma - Cg$$

$$T^2u(y) - T^2u(o) \leqslant \frac{M}{|\log\delta|} - \frac{M}{\delta^2}\, |y|\ .|\gamma|\ \cos\theta\ - Cg$$

$$= M\left(\frac{1}{|\log\delta|} + \frac{1}{\delta^2}.\delta^3\right) - Cg$$

M nin büyük seçimi ile ikinci kısım pozitif bulunduğundan, h bir üst engeldir. Özellikle

$$T^2u(y) - T^2u(o) \leqslant M\left(\frac{1}{|\log\delta|} + \delta\right) - Cg$$

$$\leqslant \frac{3M + M\ \frac{1}{3}\ |\log|y||\ |y|^{1/3}}{|\log|y||}$$

$$T^2u(y) - T^2u(o) \leqslant \frac{C}{|\log|y||} \qquad (6.2)$$

çıkar.

Bir alt sınır bulmak için denklemi kullanalım. Koordinatların değişiminden sonra $\psi(o) = 1$ ve ψ Lipschitz sürekli olduğundan

$$|\psi(y) - \psi(o)| \leqslant C\,|y| \quad \text{den} \quad \psi(y) \geqslant 1 - C\,|y|$$

elde ederiz.

H nın özdeğerleri $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ ler olmak üzere $\psi(y)=\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ dir. (6.2) ile her i için $\lambda_i(y)$ nin alt ve üst sınırını bulalım

$$T^2u(y) \leqslant T^2u(o) + \frac{C}{|\log|y||}$$

$$T^2u(o) = c_1^2 u_{11}(o) +,\ldots,+ c_n^2 u_{nn}(o)$$

$$\geqslant c_o(c_1^2 +,\ldots,+ c_n^2)$$

$$T^2u(y) \leqslant 1+\frac{C}{|\log|y|} = K \text{ diyelim.}$$

$T^2u(y)$ ve H nın bütün özdeğerleri yukarıdan aynı sabit olan K ile sınırlıdırlar. Buna göre,
$\forall i$ için

$$\lambda_i(y) \leqslant 1+\frac{C}{|\log|y||}$$

üst sınırı buluruz. Aynı zamanda, $\forall i$ için,

$$\lambda_i(y) \geqslant 1 - \frac{C}{|\log|y||}$$

alt sınırı vardır. Böylece her T için

$$T^2u(y) \geqslant 1 - \frac{C}{|\log|y||}$$

özellikle $u_{jj}(y)$ için geçerlidir. $i\neq j$ için $T=(1/\sqrt{2})(\partial_i\pm\partial_j)$ alalım.

$$T^2u=\frac{1}{2}(u_{ii}+u_{jj})\pm\frac{1}{2}u_{ij}$$

$$T^2u(y) \geqslant 1 - \frac{C}{|\log|y||}$$

$$\frac{1}{2}(u_{ii}(y)+u_{jj}(y)) + u_{ij}(y) \geqslant 1-\frac{C}{|\log|y||}$$

$$u_{ij}(y) \geqslant 1-\frac{C}{|\log|y||} - \frac{1}{2}(u_{ii}(y) + u_{jj}(y))$$

$$u_{ij}(y) \geqslant - \frac{C}{|\log|y||} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (a)$$

$$T^2u(y) \leqslant 1+ \frac{C}{|\log|y||}$$

$$\frac{1}{2}(u_{ii}(y)+ u_{jj}(y))+ u_{ij}(y) \leqslant 1+ \frac{C}{|\log|y||}$$

$$u_{ij}(y) \leqslant 1+ \frac{C}{|\log|y||} - \frac{1}{2}(u_{ii}(y) + u_{jj}(y))$$

$$u_{ij}(y) \leqslant \frac{C}{|\log|y||} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (b)$$

(a) ve (b) den

$$|u_{ij}(y)| \leqslant \frac{C}{|\log|y||}$$

bulunur. (1.4)' nün ispatını tamamlamış oluruz.

(1.4) eşitsizliğinin ispatı ;

$d,\bar{d},\delta$ hepsini küçük kabul edebileceğimiz, $d=d(x)\leqslant d(y)=\bar{d}$ ve $\delta=|x-y|$ ile $x,y\in\bar{\Omega}$ noktalarını düşünelim. Burada iki farklı durum vardır.

1. Durum $d\geqslant \delta^{1/2}$

Bu durumda, Ortalama değer teoremi ile (1.5) den

$$|u_{ij}(x)-u_{ij}(y)| \leqslant \frac{2C}{d}\delta$$

$$\leqslant 2C.\delta^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{K}{|\log\delta|}$$

elde ederiz.

2. Durum $d < \delta^{1/2}$

Bu durumda $d + \delta \leqslant 2\delta^{1/2}$, (1.4)' kullanarak

$$|u_{ij}(x)-u_{ij}(y)| \leqslant \frac{C}{|\log(\delta+d)|}$$

$$\leqslant \frac{C}{|\log(2\delta^{1/2})|}$$

$$\leqslant \frac{K}{|\log\delta|}$$

olduğunu görürüz

(1.2) denkleminin çözümlerinin varlık ispatı tamamlandıktan sonra, çözümün tekliğinin ispatını verelim.

u ve υ (1.2) yi sağlayan kesin konveks iki çözüm olsun. $w = u-\upsilon$ den

$$Lw = a^{ij}w_{ij} = o$$

sınırda

$$w = o$$

dır. w maksimum değerini sınırda alır. Buna göre bölge içinde de $w = o$ dır. O halde $u = \upsilon$ elde edilerek çözümün tekliği gösterilmiş olur.

Burada

matris $a^{ij} = \int_o^1 [\{t\, u_{ij} + (1-t)\upsilon_{ij}\}$ matrisinin kofaktör matrisi$]\,dt$

dir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aubin, T., 1981, Equations de Monge-Ampére réelles, Journal Of Functional Analysis, 41, 354-377.

Caffarelli,L.,Nirenberg,L.,and Spruck,J.,1984, The Dirichlet Problem For Nonlinear Second-Order Elliptic Equations I.Monge-Ampére Equation, Communications on Pure and Applied Mathematics. 37, 369-402.

Calabi,E.,1958, Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K.Jörgens,Michigan Math.J.,5, 105-126.

Cheng,S.Y.and Yau,S.T., 1976, On the regularity of the solution of the n-dimensional Minkowski problem, Comm.Pure Appl.Math., 19, 495-516.

Cheng,S.Y.and Yau,S.T.,1977, On the regularity of the Monge-Ampére equation det $(\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j)=F(x,u)$, Comm.Pure Appl. Math., 30, 41-68.

Hacısalihoğlu,H.,H,1980, Yüksek diferensiyel geometriye giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 439 s.

Lions,P.L.,1981, Une methode nouvelle pour l'existence de solu tions regulieres de l'equation de Monge-Ampére, C.R.Paris, 293, 589-592.

Lions,P.L.,1983, Sur les équations de Monge-Ampére I, Manuscripta Math.,41, 1-43.

Lions,P.L.,1985, Sur les equations de Monge-Ampére II, Arch. Rat.Mech.Anal., 89, 93-121.

Nirenberg,L.,1974, Monge-Ampére equations and some associated problem in Geometry, Proc.Int.Congress of Mathematicians, Vancouver, 275-279.

Pogorelov,A.V.,1971 a,On a regular solution of the n-dimensional Minkowski problem, Soviet Math.Dokl.,12,1192-1196.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam ediyor)

Pogorelov,A.V.,1971,b,On the regularity of generalized solutions of the equation $\det(\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j)=\phi(x_1 \ldots, x_n)>0$, Soviet Math.Dokl.,12, 1436-1440.

Pogorelov,A.V.,1971 c,The dirichlet problem for the n-dimensional analogue of the Monge-Ampére equation, Soviet Math.Dokl,12, 1727-1731.