

**DÖŞEMELERDE AÇIKLIK VE MESNET
MOMENTLERİNİN SONLU ELEMANLAR
METODU İLE HESABI**

Seyhan ÖZÇELİKÖRS /

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Eşref ÜNLÜOĞLU

Şubat - 1988

Seyhan Özçelikörs'ün YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Döşemelerde açıklık ve mesnet momentlerinin sonlu elemanlar metodu ile hesabı" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

.25/.3./1988

Üye : Yrd.Doç.Dr.Eşref ÜNLÜOĞLU



Üye : Doç.M.Ruhi AYDIN



Üye : Doç.Dr.Ahmet TOPÇU



Fen Bilimler Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun **11 NISAN 1988**
gün ve **.174/3**..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof.l.c. Rüstem KAYA

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde döşeme hesaplarında kullanılmak üzere mesnet ve açıklık momentlerinin bulunabilmesi için yardımcı katsayılar elde edilmeye çalışılmıştır.

Döşemelerin sürekli olarak değil de tekil olarak ele alındığı bu çalışmada dokuz çeşit mesnetlenme durumu ortaya çıkmaktadır. Burada sonlu elemanlar metoduna göre hazırlanmış olan plak bilgisayar programı kullanılmış ve elde edilen açıklık ve mesnet moment değerlerinden de yararlanılarak değişik döşeme boyutları için kullanılacak c moment katsayıları hesaplanmıştır.

Daha sonra elde edilen bu katsayılar kullanılarak çeşitli örnekler yapılmıştır. Aynı örnekler diğer metotlara göre de çözülmüş ve çıkan değerler birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Ayrıca, sürekli döşemedeki her bir döşeme gözünün tek plak olarak (bu tezde elde edilen c katsayılarının kullanılmasıyla) çözümü sonucunda elde edilen değerlerin, sürekli döşemenin sonlu elemanlar plak bilgisayar programı kullanılarak elde edilen çözüm sonuçlarına oldukça yakın olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: döşeme, plak, döşeme momentleri

SUMMARY

In this thesis, it has been tried to develop the helpful coefficients in order to find support and bending moments of a slab in an easy way.

The plates with nine different boundary conditions are considered as a singular plate instead of continuous plate. A Finite Element Program is used for solving the problems and a moment coefficient which is used for different plates is introduced by using the support and bending moments.

Later on different examples are solved by using this coefficient. Some examples are solved with the other classical methods and the results are compared. A continuous plate over beam supports is divided into its interior slabs, and these slabs are solved separately, on the other hand the continuous plate is solved by the Finite Element Computer Program. It's been seen that the obtained results from both solutions are very close to each other.

Key Words: slab, plate, plate moments

TEŐEKKÜR

Çalıőmalarım süresince bana yol gösteren, bilgi ve yardımlarını esirgemeyen Yrd.Doç.Dr. Eşref Ünlüoğlu'na teőekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca çevirilerim sırasında bana yardımcı olan Öğr.Gör. Nevzat Kıraç ve Araő.Gör. Yunus Özçelikörs'e de teőekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
ŞEKİLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. BETONARME DÖŞEMELER	1
1.1. Bir Doğrultuda Çalışan Döşemeler	3
1.2. Bir Doğrultuda Çalışan Dişli Döşemeler	4
1.2. Çift Doğrultuda Çalışan Döşemeler	4
1.3.1. Tek döşemeler	5
1.3.2. Sürekli döşemeler	5
2. PLAKLAR	6
2.1. Plakların Genel Davranışı	6
2.2. Şekil Değışitirme Eğrilik Bağıntıları	8
2.3. Gerilme ve Kesit Tesirleri	9
2.4. Gerilmelerin Değışimi	13
2.5. Plak Denkleminin Çözüm Metotları	15
2.5.1. Analitik çözümler	15
2.5.1.1. Basit mesnetli dikdörtgen plaklar için Navier çözümü ...	15
2.5.1.2. Basit mesnetle dikdörtgen plaklar için Levy çözümü	16
2.5.2. Varyasyon çözüm metotları	16
2.5.2.1. Ritz metodu	17
2.5.3. Nümerik çözüm metotları	17
2.5.3.1. Sonlu farklar metodu	17
2.5.3.2. Sonlu elemanlar metodu	17

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
3. SONLU ELEMANLAR METODU	18
3.1. Metodun Özellikleri	18
3.2. Plak Elemanındaki Temel Büyüklükler	18
3.3. Toplam Potansiyel Enerji	19
3.4. Toplam Potansiyel Enerjinin Minimum Olma Prensibi	21
3.5. Deplasman Fonksiyonu	21
3.6. Eleman ve Sistem Rijitlik Matrisleri	21
3.7. Sistemin Sınır Şartlarının Dikkate Alınması ..	24
3.8. Denge Denkleminin Çözümü	24
3.9. Eğilmeye Çalışan Bir Plakta Eleman ve Sistem Rijitlik Matrislerinin Elde Edilmesi	25
3.9.1. Eleman rijitlik matrisi	25
3.9.2. Sistem rijitlik matrisi	25
4. BU KONUDA YAPILAN ÇALIŞMALAR	28
4.1. Plak Döşemelerinin Elastik Davranışı	28
4.2. Diğer Kaynaklara Göre Tek Plakların Hesabı ...	31
5. BU ÇALIŞMADA İNCELENEN DÖŞEMELERİN MESNETLENME DURUMLARI VE SEÇİLEN MODELLER	36
5.1. Her İki Yönde Simetri Eksenine Ayrılabilen Modeller	37
5.2. Bir Yönde Simetri Eksenine Ayrılabilen Modeller	39
5.3. Simetriden Yararlanılamayan Model	41
5.4. C Moment Katsayılarının Elde Edilmesi	42
5.5. Döşeme Kenar Oranlarına Göre Açıklık ve Mesnet Momentlerinde Kullanılacak C Katsayıları	44
5.6. C Moment Katsayılarının Grafik Şeklinde Verilmesi	49

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
6. ÖRNEKLER İLE KARŞILAŞTIRMALAR	54
6.1. Üç Kenarı Ankastre Olan Tek Döşemede Moment Hesapları	54
6.2. Kenar Oranları 1.50 Olan Dört Tarafı Ankastre Bir Tek Döşemede S.E. ve Diğer Metotlara Göre Moment Hesapları	55
6.3. Sürekli Bir Döşemenin S.E. Metodu İle Çözülmesi ve Diğer Tek Döşeme Metotları İle Karşılaştırılması	57
7. SONUÇLAR	61
KAYNAKLAR DİZİNİ	62

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1.a. Dolu gövdeli döşeme	2
1.1.b. Dişli döşeme	2
1.2.a. Kirşili döşeme	3
1.2.b. Kirişsiz döşeme	3
1.3.a. Kirişli döşemedeki orta ve kolon şeritler	3
1.3.b. Kirişsiz döşemedeki orta ve kolon şeritler ...	3
2.1.a. Yüksüz durumdaki bir plağın orta düzlemi ile xy düzleminin çakışması	6
2.1.b. Lateral yüklemenden sonra plak orta yüzeyindeki noktada w çökmesi	7
2.2. Plak kesiti üzerindeki gerilme bileşenleri ...	7
2.3.a. Gerilme bileşenleri	10
2.3.b. Gerilme dağılımı	10
2.4. Düşey yüklü plak elemanında momentler ve kesme kuvvetleri	13
3.1. Plak elemanındaki pozitif yönlü deplasmanlar .	18
3.2. Plak elemanında oluşan iç kuvvetler	19
3.3. İki elemanlı plak sistemi	26
4.1. Deforme olmuş plak üzerindeki eş çökme eğrileri	28
4.2. Döşeme plağının x ve y yönünde şeritlere ayrılması	29
4.3.a. $\ell_y/\ell_x \leq 2$ durumunda kenar ve orta şeritler ...	34
4.3.b. $\ell_y/\ell_x > 2$ durumunda kenar ve orta şeritler ...	35
5.1. Mesnetlenme tipleri	36
5.2. Dörtte bir simetrik verilebilen modeller	37
5.3. Dörtte bir simetrik sistemin elemanlara ayrılması	38
5.4. Bir yönde simetrik verilebilen modeller	39
5.5. x eksenine paralel simetri ekseni olması hali	39
5.6. y eksenine paralel simetri ekseni olması hali	40
5.7.a. Simetriden yararlanılamayan model	41
5.7.b. Simetriden yararlanılamayan modelin tüm olarak çözülmesi	41

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.8. Dört kenarı serbest mesnetli döşemede c Katsayıları	49
5.9. Bir uzun kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları	49
5.10. Bir kısa kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları	50
5.11. Bitişik iki kenarı ankastre diğer iki kenarı serbest mesnetli döşemede c katsayıları	50
5.12. Karşılıklı iki uzun kenar ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları	51
5.13. Karşılıklı iki kısa kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları	51
5.14. Bir kısa kenarı serbest, diğer kenarları ankastre mesnetli döşemede c katsayıları	52
5.15. Bir uzun kenarı serbest, diğer kenarları ankastre mesnetli döşemede c katsayıları	52
5.16. Dört kenarı ankastre mesnetli döşemelerde c katsayıları	53
6.1.a. Seçilen sürekli döşeme	58
6.1.b. Sürekli döşemenin her iki yönde simetri eksenine ayrılması	58
6.2. Sürekli döşemedeki değişik mesnetlenme durumlarına sahip elemanlar	58

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. Tek açıklıklı kirişte sehim ve moment için c katsayıları	31
5.1. Dört kenarı serbest mesnetli döşemede c katsayıları	44
5.2. Bir uzun kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları	44
5.3. Bir kısa kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları	45
5.4. Bitişik iki kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları	45
5.5. Karşılıklı iki uzun kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları	46
5.6. Karşılıklı iki kısa kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları	46
5.7. İki uzun bir kısa kenarı ankastre bir kısa kenarı serbest mesnetli döşemelerde c katsayıları	47
5.8. İki kısa bir uzun kenarı ankastre, bir uzun kenarı serbest mesnetli döşemelerde c katsayıları	47
5.9. Dört kenarı ankastre mesnetli döşemelerde c katsayıları	48
6.1. Üç kenarı ankastre tek döşemede açıklık ve mesnet momentlerinin diğer tek döşeme metotlarıyla karşılaştırılması	55
6.2. Dört kenarı ankastre tek döşemede açıklık ve mesnet momentlerinin diğer tek döşeme metotlarıyla karşılaştırılması	56
6.3. Sürekli döşemenin kenar oranlarının 1.00 olması durumunda değişik metotlara göre çözüm sonuçlarının karşılaştırılması	59
6.4. Sürekli döşemenin 1.50 kenar oranlarına göre değişik metotlara göre çözüm sonuçlarının karşılaştırılması	60

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
a, b	Dikdörtgen plak elemanının x ve y eksenlerine paralel boyutları
\underline{a}	$w(x, y)$ deplasman fonksiyonuna ait katsayılar matrisi
a_1, a_2, \dots, a_n	Deplasman fonksiyonundaki katsayılar
A_a	Dış kuvvetlerin işi
A_i	Şekil değiştirmelerin (iç kuvvetlerin) işi
\underline{B}^i	Deplasmanları deformasyonlara bağlayan transformasyon matrisi
c	Moment katsayısı
dx, dy, dz	Plak diferansiyel elemanının x, y ve z eksenlerine paralel boyutları
D	Plağın eğilme rijitliği
E	Elastisite modülü
\underline{E}	Elastisite matrisi
G	Kayma modülü
I	Atalet momenti
k^i	i. elemanın rijitlik matrisi
$\underline{k}_{11}^i, \underline{k}_{12}^i, \dots, \underline{k}_{44}^i$	i. elemanın rijitlik matrisine ait matrisler
ℓ_x, ℓ_y	Plağın (döşemenin) x ve y eksenlerine paralel boyutları
M_x, M_y	Eğilme momentleri
M_{xy}	Burulma momenti
P	Plak orta düzlemine dik olarak etkiyen üniform yük
Q_x, Q_y	Plaktaki kesme kuvvetleri
Q_1, Q_2, Q_3, Q_4	Elemanın düğüm noktalarındaki kesme kuvvetleri
\underline{p}^i	P dış kuvvetlerine eşdeğer alınan ve elemanın düğüm noktalarına etkiyen kuvvetler matrisi

SİMGELELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
t	Plak kalınlığı
u,v,w	Yerdeğiřtirmelerin x,y ve z eksenlerindeki bileşenleri
w ₁	Plak diferansiyel denklemini sağlayan bir seri
w ₁ ,w ₂ ,...w ₁₂	Elemanın düğüm noktalarına ait deplasmanları
z	Plağın orta düzleminden itibaren olan düşey uzaklığı
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	şekil değiştirmelerin bileşenleri
π	Toplam potansiyel enerji
π_b	Gerçek denge konumuna komşu konumların toplam potansiyel enerjisi
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Kayma gerilme bileşenleri
η	Açıklık momenti hesabında kullanılan katsayı
χ	Mesnet momenti hesabında kullanılan katsayı
ν	Poisson oranı
ν'	1'den küçük bir katsayı
<u>Kısaltmalar</u>	
S.E.	Sonlu Elemanlar
TS	Türk Standardları

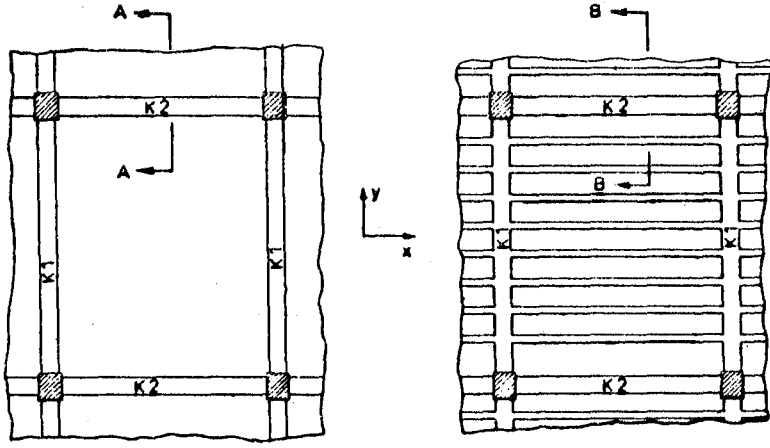
1. BETONARME DÖŞEMELER

Yapılarda kirişler, duvarlar veya doğrudan doğruya kolonlar arasındaki alanı kapatan, genellikle yatay, iki boyutlu düzlemsel yapı elemanları "döşeme" olarak adlandırılır. Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere, döşemeler duvar veya kirişlerle taşınabileceği gibi doğrudan doğruya kolonlara da oturabilirler.

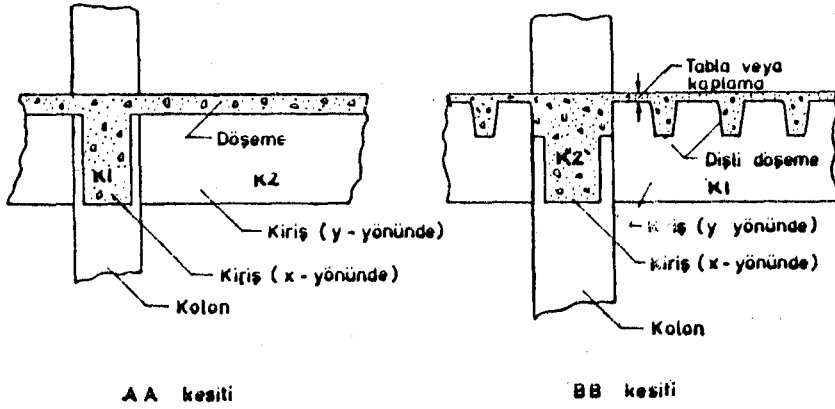
Döşemenin görevi belirli bir alanı kapatmanın yanısıra uygulanan düşey yükleri kirişlere veya doğrudan doğruya kolon, perde, duvar gibi düşey taşıyıcı elemanlara aktarmaktır. Döşeme tarafından aktarılan bu yüklerin kolonlar ile temele, temelden de zemine emniyetle aktarılması gerekir. Döşemeler, düşey yükleri taşımanın yanısıra yatay kuvvetlerden oluşan veya betonarme yapının bir bütün halinde hareket etme özelliklerinden doğan çeşitli zorlamaları bir elemandan diğerine aktarma görevini de yüklenebilirler (Ersoy ve Atımtay, 1975).

Uygun bir yaklaşımla hesaplanabilmeleri bakımından betonarme döşemeler tek doğrultuda ve çift doğrultuda çalışan döşemeler olmak üzere iki biçimde ele alınırlar. Ayrıca döşemenin plak veya sık yerleştirilmiş kiriş olmasına göre de bir sınıflaması yapılabilir. Plaklar, "dolu gövdeli döşeme", sık kirişlerden meydana gelenler ise "dişli döşeme" olarak adlandırılır (Şekil 1.1.a., 1.1.b).

Döşemeler çökmeyen mesnetlere oturduğu varsayımı yapılarak hesap edilirler. Yığma yapılardaki taşıyıcı duvarlar ve betonarme yapılardaki perde duvarlar bu tür mesnet olarak kabul edilir. Yalnız, döşemeler bazen kolonlarla taşınmaktadır. Döşeme yükü ya doğrudan doğruya (kirişsiz döşeme) ya da kirişler aracılığı ile kolonlara aktarılır (Şekil 1.2).



Not : Kirişler, olmayabilir.



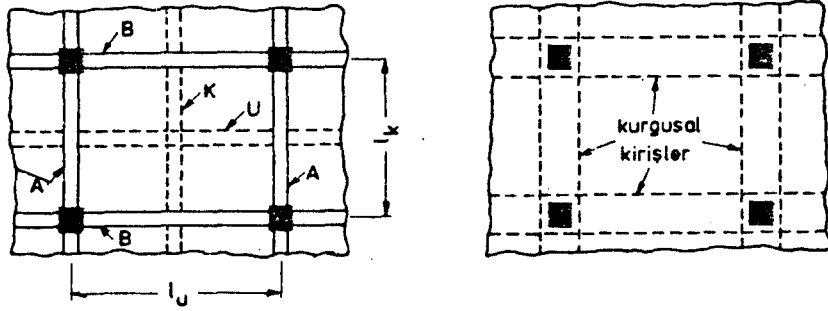
AA kesiti

BB kesiti

Şekil 1.1. a) Dolu gövdeli döşeme, b) Dişli döşeme

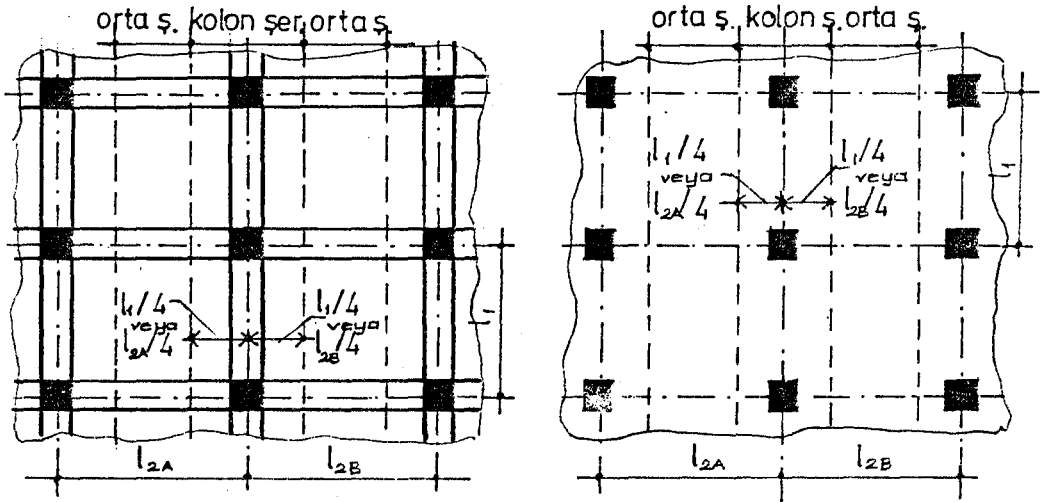
Kirişli bir döşemede, döşeme ortasında Şekil 1.2.a'da görüldüğü gibi, iki yönde birbirine dik iki şerit alınarak yük aktarılması incelenecek olursa, toplam yük kısa ve uzun şeritler tarafından taşınacaktır (q_x , q_y). Uzun şerit tarafından taşınan $q_x l_x$ yükü kısa yönde uzanan kirişlere aktarılmaktadır. Benzer şekilde kısa şerit tarafından taşınan yük uzun yöndeki kirişlere aktarılmaktadır.

Şekil 1.2.b'deki kirişsiz döşeme de benzer biçimde davranır. Aradaki tek fark, döşeme şeritlerinin yüklerini kolonlara aktaracak kirişlerin bulunmayışıdır. Ancak kolon yöresindeki döşeme parçaları birer kiriş gibi davrandığından buralarda fiktif kirişlerin olduğu kabul edilebilir. Bu durumda kirişli döşemeler için anlatılanların kirişsiz döşeme için de geçerli olabileceği belirtilmiştir (Ersoy ve Atımtay, 1975).



Şekil 1.2. a) Kirişli döşeme, b) Kirişsiz döşeme

Hesaplarda kolaylık sağlamak amacıyla döşemeler, kolon şeridi ve orta şerit olarak ikiye ayrılır ve bu şeritlerde momentin sabit kaldığı kabul edilir (Şekil 1.3.a, 1.3.b).



Şekil 1.3. a) Kirişli döşemedeki orta ve kolon şeritler
b) Kirişsiz döşemedeki orta ve kolon şeritler

1.1. Bir Doğrultuda Çalışan Döşemeler

Düzenli yayılı yük altında uzun kenarın kısa kenara oranını 2.00'den büyük olan betonarme döşemelerde yükün tamamının kısa doğrultuda taşındığı varsayılabilir. Bu durumda asal donatı yalnız kısa doğrultuda yerleştirilir; uzun doğrultuda dağıtma donatısı konulur.

Bu tür döşemeler için yapılan hesaplarda genellikle orta ve kenar şeritlerin farklı deformasyon yaptığı kabulüyle şeritler arasında oluşan burulma momentleri ihmal edilir. Ayrıca döşemenin oturduğu kirişlerin burulma rijitlikleri ihmal edilerek, mesnetlerin serbestçe dönebildiği kabul edilir (Ersoy ve Atımtay, 1975).

Bu kabullere göre döşemelerde kısa kenar doğrultusunda alınacak bütün şeritlerin eş davranış göstermeleri gerekir. Bu durumda 1 metre genişliğinde bir şerit alıp, bunu genişliği 1 metre, derinliği d olan bir dikdörtgen kesitli kiriş gibi hesaplamak yeterlidir.

1.2. Bir Doğrultuda Çalışan Dişli Döşemeler

Serbest aralıkları 70 cm'yi geçmeyecek bir biçimde düzenlenmiş kirişlerden oluşan döşemeler "Dişli Döşeme" olarak tanımlanır. Dişler arası boş bırakılabileceği gibi taşıyıcı olmayan hafif boşluklu pişmiş toprak, beton ve benzeri bloklarla doldurulabilir.

Dişli döşemelerin açıklık kesitleri tablalı kesit olarak boyutlandırılır. Sürekli dişli döşemelerin momentleri mesnetlerinde serbestçe dönebilen sürekli kirişler gibi hesaplanabilir (TS 500, 1982).

1.3. Çift Doğrultuda Çalışan Döşemeler

Uzun kenarın kısa kenara oranınının 2.00'den küçük olduğu betonarme döşemelerin çift doğrultuda çalıştığı söylenebilir. Bu tür döşemeler kiriş veya duvarlara oturabileceği gibi, doğrudan kolonlara da oturabilir. Çift doğrultuda çalışan döşemeler, tek döşemeler ve sürekli döşemeler olmak üzere iki bölümde incelenebilir.

1.3.1. Tek döşemeler

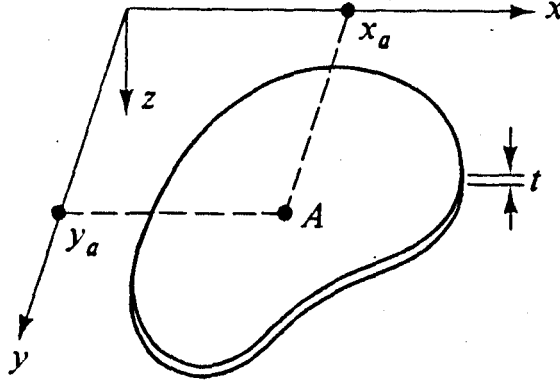
Bu çalışmanın konusu olan tek döşemeler, adından da anlaşılacağı gibi sürekli olmayan tekil döşemelerdir. Kenar mesnetlerinin ankastre ya da basit olmasına göre dokuz çeşit mesnetlenme tipleri vardır.

1.3.2. Sürekli döşemeler

Yapılarda genellikle kirişlere oturan, her iki doğrultuda süreklilik gösteren döşemelerle karşılaşılır. Bu döşemelerin mesnetleri ne serbestçe dönebilen ne de ankastre durumdadırlar. Bu bakımdan mesnetlenme durumları belirli tek bir döşeme olarak ele alınamazlar; sürekliliklerinin gözönüne alınarak hesaplanmaları gerekir. Döşemelerin mesnetlerini oluşturan kirişlerin rijitlikleri plaklara göre çok büyük olduğundan, döşemeye göre küçük olan sehimleri ihmal edilerek, döşeme mesnetlerinde çökme olmadığı ve ayrıca döşemelerin birbirlerine bağlı (sürekli) kalarak gerek kenar, gerekse orta mesnetler üzerinde serbestçe döndükleri kabul edilir.

2. PLAKLAR

2.1. Plakların Genel Davranışı



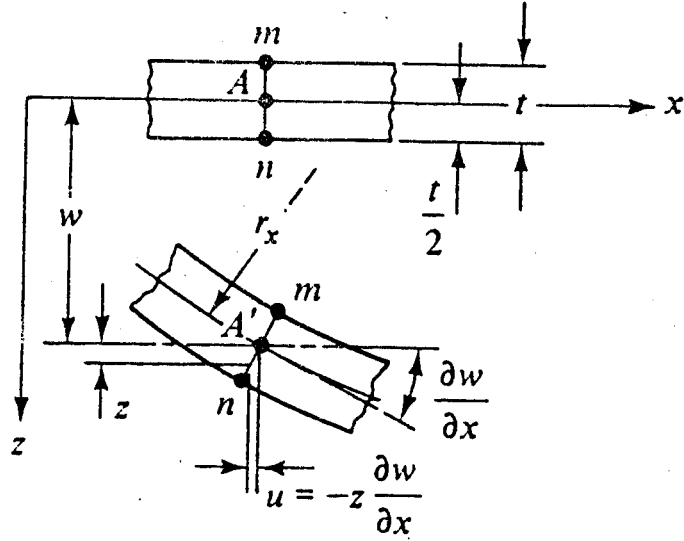
Şekil 2.1. a) Yüksüz durumdaki bir plağın orta düzlemi ile xy düzleminin çakışması

Şekil 2.1.a'da gösterilen eksen takımında xy düzlemi yüksüz durumdaki plağın orta düzlemi ile çakışmaktadır. Herhangi bir noktanın yerdeğıştirmesinin x,y,z eksenleri doğrultusundaki bileşenleri sıra ile u,v,w ile gösterilebilir. Şekil 2.1.b'de lateral yüklemekten sonra plak orta yüzeyindeki (x_a, y_a) noktasının bir w çökmesi yaptığı görülmektedir (Uğural, 1981).

Homojen, izotropik ve elastik ince plaklar için küçük yerdeğıştirme teorisinde yapılan temel kabuller deformasyon şekli ile ilgilidir. Bu kabuller aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

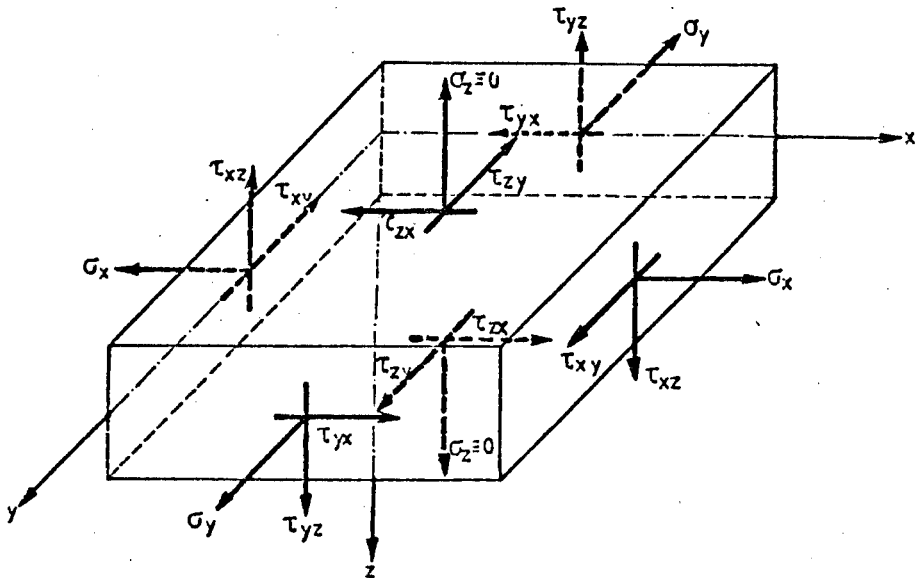
- Plak orta yüzeyinin çökmesi plak kalınlığına göre küçüktür. Şekil değıştirmiş yüzeyin eğimi de dolayısı ile küçük olacaktır.
- Orta düzlem eğilmeden sonra gerilmesizdir.
- Başlangıçta orta yüzeye dik olan düzlem kesitler eğilmeden sonraki yüzeye dik ve düzlem kalırlar. Buradan, düşey kayma şekil değıştirmelerini γ_{xz} ve γ_{yz}

nin ihmal edilebildiği anlaşılır. Dolayısıyla plağın çökmesi temel olarak eğilme şekil değiştirmelerinden olur.



Şekil 1.2. b) Lateral yüklemeye sonra plak orta yüzeyindeki noktada w çökmesi

d) Orta düzleme dik olan σ_z gerilmesi diğer gerilmeler ile kıyaslandığında küçüktür ve ihmal edilebilir.



Şekil 2.2. Plak kesiti üzerindeki gerilme bileşenleri

Mühendislik uygulamalarının büyük bir çoğunluğunda gerilme ve deformasyon durumuyla ilgili bazı basitleştirmeler yapılabilir. Bu basitleştirmelerin amacı üç boyutlu plak problemindeki karmaşıklığı azaltmak suretiyle iki boyutlu probleme çevirmektir. Deformasyonların küçük olmaması halinde plağın eğilmesiyle birlikte orta düzlem de şekil değiştireceğinden (a) ve (b) no'lu varsayımlar geçerliliğini yitirir.

Kalın plaklarda, kısa yüksek kirişlerde olduğu gibi kayma gerilmeleri önemlidir. Bu tür plaklar (c) ve (d) no'lu varsayımların geçerliliğini yitirmesinden dolayı çok daha genel bir teori ile incelenir.

2.2. Şekil Değiştirme Eğrilik Bağlantıları

Plakların eğilme problemine bakıldığında temel düşüncenin deformasyon geometrisi üzerinde olduğu farkedilir. (c) no'lu varsayımdan çıkarılan şekil değiştirme yerdeğiştirme bağlantıları aşağıdaki altı ifade ile verilebilir:

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & (a) \quad \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & (d) \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & (b) \quad \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & (e) \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & (c) \quad \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 & (f)
 \end{aligned} \right\} (2.2.(a-f))$$

Burada $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ ($i, j = x, y, z$) dir. Yukarıdaki ifadelere şekil değiştirme geometrisini verdiği için "kinematik ifadeler" de denilmektedir. 2.2.d. eşitliğinin integrasyonu ile

$$w = w(x, y) \quad (2.2.1)$$

elde edilir. Bu ifade lateral çökmenin plak kalınlığı boyunca değişmediğini göstermektedir. Benzer işlemlerle γ_{xz} ve γ_{yz} 'nin integrasyonu

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \quad (2.2.2)$$

bağıntılarını verir. $u_0(x, y)$ ve $v_0(x, y)$ 'nin orta düzlemdeki u ve v değerleri olduğu açıktır. (b) varsayımına dayanarak $u_0 = v_0 = 0$ sonucu çıkarılabilir. Böylece

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.2.3)$$

olur. Yukarıdaki u ifadesi Şekil 2.1(b)'de keyfi bir $A(X_a, Y_a)$ noktasından geçen mn kesiti için gösterilmiştir. v için benzer gösterimi zy düzleminde uygulamak mümkündür. 2.2.1. eşitliğinin (c) varsayımı ile uyum gösterdiği söylenebilir. 2.2.3. denklemleri 2.2. ifadelerinin ilk üç eşitliğinde yazılarak

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.2.4)$$

elde edilir. Bu formüller plak içindeki herhangi bir noktada birim şekil değiştirmeleri verir.

2.3. Gerilme ve Kesit Tesirleri

Üç boyutlu gerilme halinde genelleştirilmiş Hooke Kanunu ile verilen izotrop ve homojen malzemelere ait gerilme birim şekil değiştirme bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

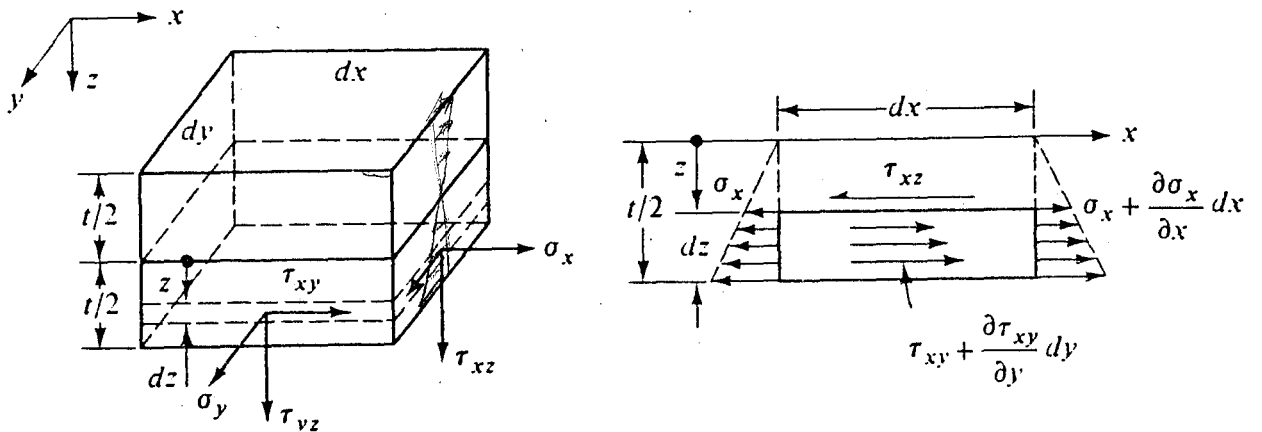
$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

Burada $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ($i, j = x, y, z$) dir. E , ν ve G sabitleri sırasıyla elastisite modülü, poisson oranı ve kayma modülünü gösterir. Aralarında

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.3.2)$$

ile verilen bir bağıntı mevcuttur. Gerilme ifadelerinde geçen çift indisten birincisi gerilme bileşeninin etkidiği düzlemin normal doğrultusunu, ikincisi ise gerilmenin yönünü gösterir.

Bir düzlem veya yüzey genellikle normal doğrultusu ile tanımlanır. Örneğin x yüzeyi demek x eksenine dik olan yüzey demektir. Gerilmeler için işaret kabulü gerilme bileşeninin doğrultusu ve o yüze ait normalin doğrultusuna bakılarak tayin edilir. Eğer gerilme bileşeni ve normalin her ikisi de koordinat eksenlerine göre pozitif (veya negatif) doğrultuda ise gerilme pozitif işaretli, aksi takdirde negatif işaretli olarak alınır. Bu prensipten hareketle Şekil 2.3.a'da gösterilen gerilme bileşenlerinin hepsi pozitif yönlüdür.



Şekil 2.3. a) Gerilme bileşenleri, b) Gerilme dağılımı

2.3.1. eşitliğinde $\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ yazılarak ince plaklarla ilgili aşağıdaki gerilme bağıntıları elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

2.2.4. ifadeleri yukarıdaki denklemlerde yerine yazılarak,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{E z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{E z}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

elde edilebilir. Bu formüllerden gerilmelerin orta yüzeyde sıfır olduğu ve kalınlık boyunca lineer değiştiği görülmektedir. Plak kalınlığı boyunca yayılı bulunan gerilmeler eğilme momenti, burulma momenti ve düşey kesme kuvvetini oluşturur. Şekil 2.3.a'dan

$$\int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dy dz = dy \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz = M_x dy \quad (2.3.5)$$

yazılabilir. Benzer şekilde diğer kesit tesirleri için

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2.3.6)$$

yazılabilir. Burada $M_{xy} = M_{yx}$ 'dir, ve

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} t/2 \tau_{xz} \\ -t/2 \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (2.3.7)$$

Kesme kuvveti için işaret kabulü kayma gerilmesindeki ile aynıdır. Plağın alt yarısında pozitif gerilme oluşturan moment pozitif işaretli alınır.

İnce plaklar teorisinin birim şekil değiştirme bileşenleri $\gamma_{xz} = \tau_{xz}/G$ ve $\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$ 'nin eğilme üzerindeki etkisini ihmal etmesine rağmen düşey Q_x ve Q_y kuvvetlerinin ihmal edilemez olması önemli bir özelliktir. Gerçekte bu kuvvetler yüzey yükleri ve momentleri ile aynı mertebede ve denge denkleminin çıkarılmasında kullanılmaktadırlar.

2.3.4 eşitiğini 2.3.6 ifadesinde yerine yazmak suretiyle eğilme momentleri ve burulma momenti için eğrilikler ile çökme arasında

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

ifadeleri bulunur. Burada

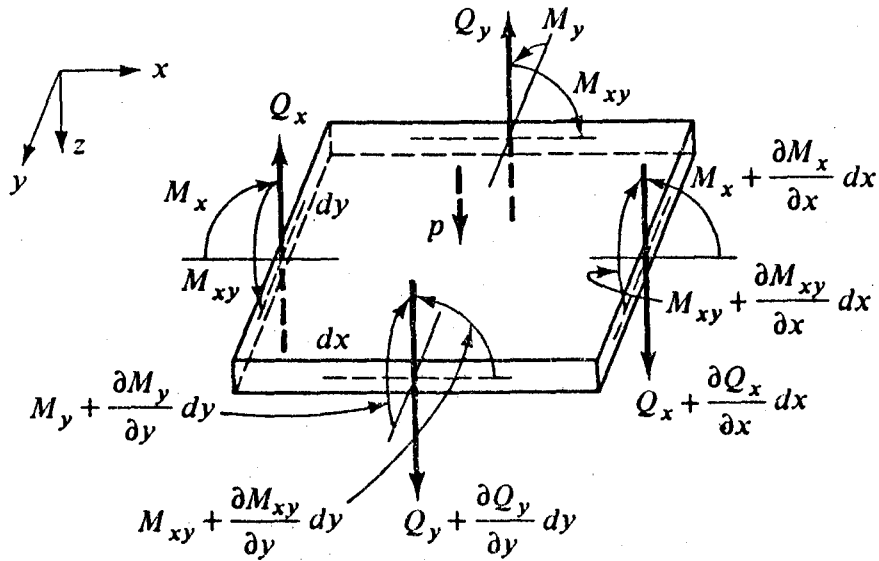
$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.3.9)$$

plağa ait eğilme rijitliğidir. Düşey kesme kuvvetleri Q_x ve Q_y denge denkleminin çıkarılmasında w çökmesiyle bağıntılı olarak geçmektedir.

2.4. Gerilmelerin Değişimi

Yüklü bir plaktaki gerilme ve dolayısıyla kesit tesiri noktadan noktaya değişir. Bu değişim statik denge koşulları ile ifade edilebilir. Bu koşulları denge denklemleri olarak bilinen bağıntılarla ortaya koymak mümkündür. Denklem sistemi momentler cinsinden tek bir bağıntıyla ifade edilebilir. Birim alana üniform yayılı P yükü gelen (Şekil 2.4'deki) $dx dy$ plak elemanının ağırlığının P yüküne göre çok küçük bir değer olduğu ve sonuçların doğruluğuna etki etmeyeceği kabul edilsin. Plak elemanının çok küçük olması nedeni ile basitleştirme açısından moment ve kuvvetlerin her yüzde üniform şekilde yayılı bulunduğu düşünülebilir. Şekilde her yüzün merkezinde etkiyen ve ortalama değerleri gösteren kesit tesirleri tek bir vektörle tanımlanmıştır. Konumun değişmesi ile örneğin M_x , pozitif x yüzüne göre relatif bir değişim gösterecektir. Konumla olan bu değişim kısaltılmış Taylor açılımı ile ifade edilebilir:

$$M_x + dM_x = M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \quad (2.4.1)$$



Şekil 2.4. Düşey yüklü plak elemanında momentler ve kesme kuvvetleri

Burada kısmi türev M_x 'in x ve y nin fonksiyonu olması nedeni ile kullanılmıştır. Bütün bileşenler için benzer işlemler sonucu şekilde gösterilen kesit tesirleri elde edilir. z doğrultusundaki kuvvetlerin toplamı sıfır olacaktır

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + P dx dy = 0 \quad (2.4.2)$$

olur. Bu ifadedeki her terimin dx dy ile bölünmesi sonucu

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = 0 \quad (2.4.3)$$

elde edilir. x eksenine göre momentlerin dengesi

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0$$

veya

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.4.4)$$

dir. Yayılı yük P'den dolayı oluşan moment ile Q_y 'deki değişimden dolayı oluşan moment gibi sonsuz küçük terimlerin çarpımı ihmal edilmiştir. y eksenine göre momentlerin dengesi;

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (2.4.5)$$

dir. Son olarak (2.4.4) ve (2.4.5)'deki Q_x ve Q_y ifadeleri (2.4.3) de yazılmak suretiyle

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -P \quad (2.4.6)$$

elde edilir. Bu, ince plakların eğilmesindeki diferansiyel denge denklemdir. (2.3.8) denklemleri (2.4.6) denkleminde yerine konursa;

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{P}{D} \quad (2.4.7)$$

plak denge denklemi elde edilir.

2.5. Plak Denkleminin Çözüm Metotları

Şekli, sınır şartları ve üzerindeki yükü belli olan bir plak problemini çözmek için plak diferansiyel denkleminin sınır şartlarını gerçekleyen çözümünü, başka bir deyişle $w=w(x,y)$ elastik yüzey ifadesini belirlemek gerekir. Ancak elastik yüzey ifadesini elde etmek her zaman kolay olmaz. Bundan dolayı analitik çözümlerin yanısıra yaklaşık çözümler de ortaya konmuştur (Ünlüoğlu, 1985).

2.5.1. Analitik çözümler

Plak diferansiyel denkleminin, verilen bir plak problemi için bütün sınır şartları dikkate alınarak, integrasyonu yapılabildiğinde problemin analitik çözümü elde edilmiş olur. Bu çözüm metotlarından bazıları şunlardır:

2.5.1.1. Basit mesnetli dikdörtgen plaklar için Navier çözümü

P yükü etki eden bir plağın deformasyonu için Navier, Çift Fourier serisiyle önemli bir çözüm yöntemi vermiştir. Buna göre bir plağın elastik yüzey ifadesi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$w = \frac{16P}{D \cdot \pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x}{l_x} \cdot \sin \frac{n\pi y}{l_y}}{mn \left(\frac{m^2}{l_x^2} + \frac{n^2}{l_y^2} \right)^2} \quad (2.5.1)$$

2.5.1.2. Basit mesnetli dikdörtgen plaklar için Levy çözümü

Levy, karşılıklı iki kenarı basit olarak mesnetlenmiş dikdörtgen plakların çözümünü aşağıdaki şekilde bir seri ile vermiştir:

$$w_i = \sum_m y_m \sin \frac{m\pi x}{l_x} \quad (2.5.2)$$

2.5.2. Varyasyon çözüm metotları

Varyasyon metotları genel olarak aşağıdaki şekilde iki grupta incelenebilir:

Birinci grupta $w(x,y)$ elastik yüzeyine uygun olan

$$w = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n \quad (2.5.3)$$

şeklinde bir ifadeden yararlanılır. Buradaki $f_i(x,y)$ fonksiyonları plak diferansiyel denklemini tam, sınır şartlarını eksik olarak gerçekler. Bu şekilde çözüm için potansiyel enerjinin minimum olma prensibi, Castigliano prensibi gibi başka prensiplerden de yararlanarak a_1, a_2, \dots, a_n sabitleri hesaplanabilir.

İkinci grupta ise yine (2.5.3) ifadesinden yararlanılır. Fakat buradaki $f_i(x,y)$ fonksiyonları sınır şartlarını tam, plak diferansiyel denklemini eksik olarak gerçekler. Bunun için a_1, a_2, \dots, a_n sabitleri plak diferansiyel denklemini en uygun sağlayacak biçimde belirler.

2.5.2.1. Ritz metodu

(2.5.3) ifadesi ile verilen $a_i (i=1,2,\dots,n)$ katsayıları, potansiyel enerjinin minimum olma prensibine dayanan Ritz Metodu yardımıyla belirlenebilir. Aynı ifadedeki $f_i (i=1,2,\dots,n)$ fonksiyonlarının problemin sınır şartlarını tam olarak sağladığı kabul edilir. Burada $a_i (i=1,2,\dots,n)$ katsayılarının plak denge denklemini sağlayacak şekilde tayin edilmesi gerekir. Bunun için de plağın denge konumunda potansiyel enerjisinin minimum olmasından yararlanılır.

Burada ayrıca Varyasyon Çözüm Metotlarından Galerkin Metodundan da bahsedilebilir.

2.5.3. Nümerik çözüm metotları

2.5.3.1. Sonlu farklar metodu

Bu metotta plak denklemleri ve sınır şartları yerine türevleri diferanslarla ifade edilen denklemler kullanılır.

2.5.3.2. Sonlu elemanlar metodu

Bu metotta ise plak sonlu sayıda elemana bölünür ve eleman kenarları üzerinde yayılı olan iç kuvvetler düğüm noktalarına etkiyen fiktif kuvvetler olarak kabul edilir. Süreklilik şartları düğüm noktalarında yazılarak bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden deformasyonlar ve iç kuvvetler hesaplanır (Bu kısım 3. bölümde daha detaylı bir şekilde anlatılacaktır).

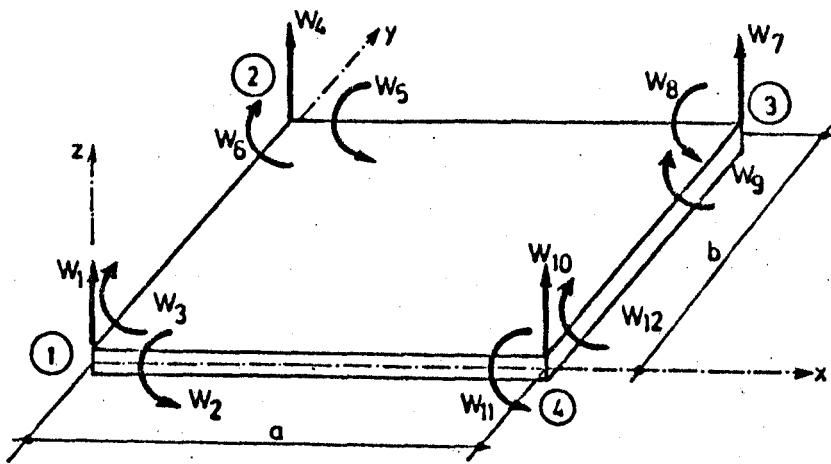
3. SONLU ELEMENLAR METODU

3.1. Metodun Özellikleri

Sonlu elemanlar metodu mühendislik ve fizik problemlerinin statik ve dinamik yükler altında çözümünü için geliştirilmiş yaklaşık bir nümerik hesap metodudur. Bu metod taşıyıcı sistemin sonlu sayıda elemanının düğüm noktası olarak adlandırılan noktalarında birbirleri ile bağlantılı olduğu kabulüne dayanır. Bilinen bu elemanlara ait uygunluk ve denge şartlarından yararlanılarak düğüm noktalarındaki deplasman ve kuvvetler hesaplanabilir (Ünlüoğlu, 1985).

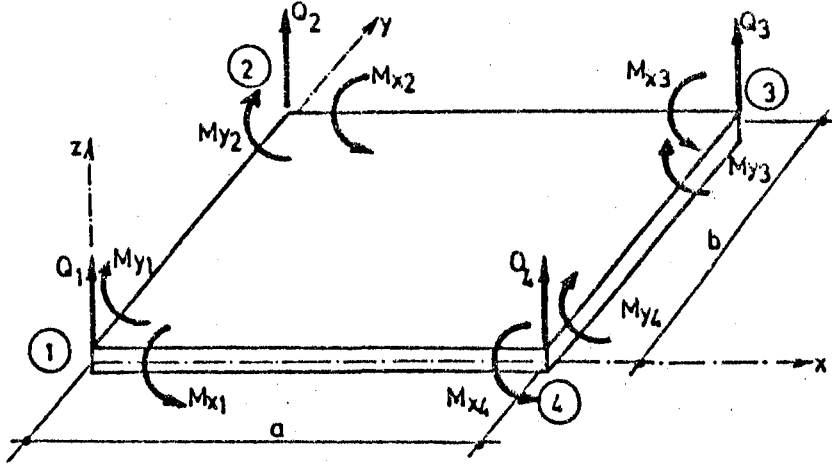
3.2. Plak Elemanındaki Temel Büyüklükler

Plaklar, üçgen ya da dikdörtgen elemanlara ayrılabilirler, ancak bu çalışmada dikdörtgen plak elemanı üzerinde açıklamalar yapılacaktır. Plaktan alınan bir elemanın eksen takımı, düğüm noktalarının numaraları ve deplasmanları aşağıda gösterilmiştir (Przemieniecki, 1968). Bu deplasman-



Şekil 3.1. Plak elemanındaki pozitif yönlü deplasmanlar (çökme ve dönmeler)

lara karşılık düğüm noktalarında iç kuvvetler oluşur (Şekil 3.2). Bu çalışmada deplasmanların bilinmeyenler olarak seçildiği "Sonlu Elemanlar Deplasman Metodu" kullanılmıştır.



Şekil 3.2. Plak elemanında oluşan iç kuvvetler

3.3. Toplam Potansiyel Enerji

Sonlu elemanlar metodunda Ritz metodunda olduğu gibi toplam potansiyel enerjiden yararlanılarak çözüme gidilir. Ritz metodunda tüm sistem için yazılan toplam potansiyel enerji sonlu elemanlar metodunda her eleman için ayrı ayrı yazılarak toplanır.

Bir plağın P yükü altında toplam potansiyel enerjisi

$$\pi = \frac{1}{2} D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy -$$

$$\iint p \cdot w dx dy$$

(3.3.1)

olarak yazıldığında denklemin ilk kısmı olan

$$A_i = \frac{1}{2} D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \quad (3.3.2)$$

plağın iç kuvvetlerinin işini yani plağın şekil değiştirme işini, ikinci kısım

$$A_a = - \iint p \cdot w dx dy \quad (3.3.3)$$

ise plağın dış yükler altında yaptığı işi gösterir.

(3.3.2) şekil değiştirme işinin (2.2.4) ifadelerini kullanmak suretiyle $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ cinsinden ve matris formunda

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

ifadesi yazılırsa

$$A_i = \frac{1}{2} \iint \underline{\epsilon}^T \underline{E} \underline{\epsilon} dx dy \quad (3.3.5)$$

olur. Benzer şekilde dış kuvvetlerin yaptığı işin de matris formunda ifadesi yazılırsa,

$$A_a = - \iint \underline{p}^T \underline{w} dx dy \quad (3.3.6)$$

olur. Burada \underline{E} elastisite matrisi olup plakta düzlem gerilme hali için;

$$\underline{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

ifadesi ile verilmiştir. \underline{w} elemanın düğüm noktalarına ait deplasman matrisi olup (3.6.2) ile ifade edilmiştir. Elemanın düğüm noktalarına etkiyen dış yük matrisi \underline{p}^T ise aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\underline{p}^T = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}) \quad (3.3.8)$$

Bu ifadeler kullanılarak toplam potansiyel enerji aşağıdaki şekilde yazılabilir¹:

$$\pi = A_i + A_a = \frac{1}{2} \int \int \underline{\epsilon}^T \underline{E} \underline{\epsilon} \, dx dy - \int \int \underline{p}^T \underline{w} \, dx dy \quad (3.3.9)$$

3.4. Toplam Potansiyel Enerjinin Minimum Olma Prensibi

Lineer elastik bir cismin kinematik uygunluk ve bütün geometrik sınır koşullarını sağlayan sayısız denge konumları vardır. Gerçek denge konumunda toplam potansiyel enerji minimum olur. Başka bir ifade ile elastik bir sistemde geometrik sınır şartlarını sağlayan bütün komşu denge konumları arasında gerçek denge konumu, toplam potansiyel enerjiyi minimum yapan denge konumudur.

3.5. Deplasman Fonksiyonu

Sonlu elemanlar metodunda öncelikle elemanın düğüm noktalarında sınır şartlarını sağlayan $w(x,y)$ deplasman fonksiyonu seçilerek hesaba başlanır. Tam bir dördüncü derece polinomdan bazı terimleri ihmal edilen ve $a_i (i=1,2,..12)$ katsayısına sahip olan bu fonksiyon aşağıdaki şekilde seçilir (Zienkiewicz, 1977).

$$\begin{aligned} w(x,y) = & a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + \\ & + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3 \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

3.6. Eleman ve Sistem Rijitlik Matrisleri

Elemanın geometrik şartlarını sağlayan deplasman fonksiyonu seçildikten sonra sistem geometrisinin elemanlara ayrılmasından dolayı problemin çözümü ikiye ayrılmaktadır.

¹ z sabit olduğundan alan üzerinden integre edilmiştir.

Önce elemanlar için seçilen deplasman fonksiyonu yardımıyla her elemanın toplam potansiyel enerjisi hesaplanır. Böylece elemanın düğüm noktası deplasmanları ile bunların doğrultusundaki iç kuvvetleri bağlayan rijitlik matrisleri bulunur.

İkinci bölümde ise, sistem tüm elemanların toplamından oluştuğundan elemanlara ait toplam potansiyel enerjiler toplanarak sistemin toplam potansiyel enerjisi yazılır. Bu ise elemanların birleştiği düğüm noktalarında uygunluk ve denge şartlarını sağlayacak şekilde yapılır. Bu şekilde sistemin rijitlik matrisi elde edilir.

i. plak elemanının toplam potansiyel enerjisi (3.3.9) denkleminde göre aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\pi^i = \frac{1}{2} \int \int (\underline{\varepsilon}^i)^T \underline{E}^i \underline{\varepsilon}^i dx dy - (\underline{w}^i)^T \underline{p}^i \quad (3.6.1)$$

Burada \underline{w}^i i elemanının düğüm noktalarındaki deplasman vektörünü, \underline{p}^i ise i elemanının P yüzey yüklerine eşdeğer alınarak düğüm noktalarına etki ettirilen ve düğüm noktalarındaki w deplasmanlarına karşılık gelen kuvvet vektörünü ifade eder. Buna bağlı olarak $-(\underline{w}^i)^T \underline{p}^i$ ifadesi i elemanına ait \underline{p}^i kuvvetlerinin potansiyel enerjisini gösterir.

$$(\underline{w}^i)^T = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}] \quad (3.6.2)$$

$$(\underline{p}^i)^T = [M_{x_1}, M_{y_1}, Q_1, M_{x_2}, M_{y_2}, Q_2, M_{x_3}, M_{y_3}, Q_3, M_{x_4}, M_{y_4}, Q_4] \quad (3.6.3)$$

(3.3.4) denklemi ile verilen $\underline{\varepsilon}^i$ deformasyon matrisi \underline{w}^i deplasman matrisine bağlı olarak;

$$\underline{\varepsilon}^i = \underline{B}^i \underline{w}^i \quad (3.6.4)$$

ifadesi ile verilebilir. Burada \underline{B}^i deplasmanları deformasyonlara bağlayan differansiyel operatör matrisidir. Buna göre (3.6.1) denklemi yeniden

$$\pi^i = \frac{1}{2} (\underline{w}^i)^T \iint (\underline{B}^i)^T \underline{E}^i \cdot \underline{B}^i \, dx dy \cdot \underline{w}^i + [-(\underline{w}^i)^T \cdot \underline{p}^i] \quad (3.6.5)$$

şekline getirilebilir. Bu toplam potansiyel enerji denkleminin

$$\underline{k}^i = \iint (\underline{B}^i)^T \underline{E}^i \cdot \underline{B}^i \, dx dy \quad (3.6.6)$$

ifadesi ile verilen kısmı i elemanına ait rijitlik matrisini gösterir. Buradan tekrar,

$$\pi^i = \frac{1}{2} (\underline{w}^i)^T \underline{k}^i \cdot \underline{w}^i - (\underline{w}^i)^T \cdot \underline{p}^i \quad (3.6.7)$$

eleman rijitlik matrisine bağlı olarak toplam potansiyel enerji ifadesi elde edilir.

Gerçek denge konumunda toplam potansiyel enerjinin minimum olma prensibinden dolayı;

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial \underline{w}^i} = 0$$

şartının sağlanması gerekir. Bu şarta bağlı olarak i elemanına ait denge denklemi

$$\underline{k}^i \cdot \underline{w}^i = \underline{p}^i \quad (3.6.8)$$

elde edilir. Eleman denge denkleminin elde edilmesinden sonra sistem denge denkleminin kurulmasına geçilebilir. Önce sistemde bulunan elemanlara ait potansiyel enerjiler toplanarak sistemin toplam potansiyel enerjisi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\pi = \sum_{i=1}^n \pi^i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (\underline{w}^i)^T \cdot \underline{k}^i \cdot \underline{w}^i - (\underline{w}^i)^T \cdot \underline{p}^i \right] \quad (3.6.9)$$

Burada n sistemdeki eleman sayısını göstermektedir. Elemanlara ait toplam potansiyel enerjiler toplanırken sürekliliğin yani bir noktada birleşen elemanların o noktadaki deplasmanlarının (dönmeler dahil) eşit olması şartının

sağlanması gerekir. Buna göre sistemin toplam potansiyel enerjisi yazılırsa;

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{W}^T \underline{K} \underline{W} - \underline{W}^T \cdot \underline{P} \quad (3.6.10)$$

ifadesi elde edilir. Burada, \underline{W} sistemin düğüm noktalarına ait deplasman matrisi, \underline{K} sistemin rijitlik matrisi, \underline{P} ise sistemin düğüm noktalarına etkiyen dış kuvvetlere ait yük vektörünü gösterir.

Gerçek denge konumunda toplam potansiyel enerjinin minimum olma prensibinden dolayı;

$$\frac{\partial \pi}{\partial \underline{W}} = 0$$

şartının sağlanması gerekir. Bu şarta bağlı olarak sisteme ait denge denklemi,

$$\underline{K} \cdot \underline{W} = \underline{P} \quad (3.6.11)$$

elde edilir.

3.7. Sistemin Sınır Şartlarının Dikkate Alınması

Sistemin bazı düğüm noktalarının deplasmanları önlenmiş yani mesnetlenmiş veya bazı düğüm noktalarına bilinen deplasmanlar verilmiş olabilir. Bu durumda bilinen sınır şartları \underline{W} deplasman matrisine ve buna bağlı olarak \underline{K} rijitlik matrisine işlenir.

3.8. Denge Denkleminin Çözümü

Gerekli sınır şartları sisteme işlendikten sonra (3.6.11) denklem sisteminin çözümü yapılarak, plağın düğüm noktalarına ait deplasmanları bulunur. Bulunan bu \underline{W} deplasmanlarından elemanların düğüm noktalarında oluşan p^i kuvvetleri (3.6.8) denklemi kullanılarak elde edilir. Bu şekilde sonlu elemanlar metodu ile sistemin çözümü tamam-

lanmış olur.

3.9. Eğilmeye Çalışan Bir Plakta Eleman ve Sistem Rijitlik Matrislerinin Elde Edilmesi

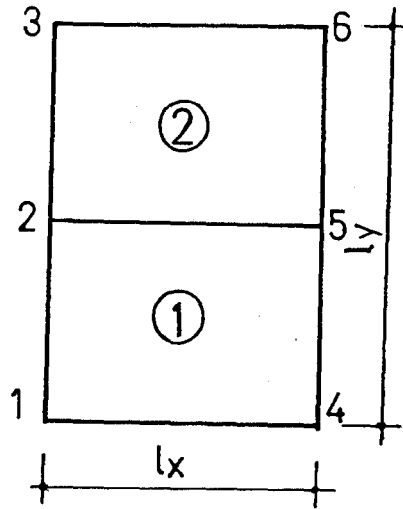
Bu çalışmada eğilmeye çalışan plak probleminin çözümü sonlu elemanlar deplasman metoduna göre hazırlanmış bir bilgisayar programı ile yapılmıştır (Ünlüoğlu, 1985).

3.9.1. Eleman rijitlik matrisi

Daha önce (3.3.7) bağıntısı ile verilen elastisite matrisi ile \underline{B} transformasyon matrislerinin (3.6.6) ifadesinde verilen eleman rijitlik matrisinde yerlerine konur. Gerekli matris çarpımları yapıldıktan sonra, bu ifadenin x ve y 'ye göre integralinin alınmasıyla i elemanına ait \underline{k}^i rijitlik matrisi kurulmuş olur.

3.9.2. Sistem rijitlik matrisi

\underline{K} sistem rijitlik matrisi üzerine, kurulan \underline{k}^i eleman rijitlik matrisleri sistemdeki uygunluk ve denge şartlarını sağlayacak şekilde yerleştirilir. Burada elemanların ortak düğüm noktalarına ait rijitlik katsayıları aynı alt matrislerde toplanır. Bu işlem eleman ve düğüm noktası numaraları verilen iki elemanlı bir plak üzerinde aşağıdaki gibi açıklanabilir:



Şekil 3.3. İki elemanlı plak sistemi

Bu elemanlara ait eleman rijitlik matrisleri (3.9.7) ve (3.9.8) ifadeleri ile verilmiştir.

$$\underline{k}^1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{k}_{11}^1 & \underline{k}_{12}^1 & \underline{k}_{13}^1 & \underline{k}_{14}^1 \\ \underline{k}_{21}^1 & \underline{k}_{22}^1 & \underline{k}_{23}^1 & \underline{k}_{24}^1 \\ \underline{k}_{31}^1 & \underline{k}_{32}^1 & \underline{k}_{33}^1 & \underline{k}_{34}^1 \\ \underline{k}_{41}^1 & \underline{k}_{42}^1 & \underline{k}_{43}^1 & \underline{k}_{44}^1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.9.7)$$

$$\underline{k}^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 6 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{k}_{11}^2 & \underline{k}_{12}^2 & \underline{k}_{13}^2 & \underline{k}_{14}^2 \\ \underline{k}_{21}^2 & \underline{k}_{22}^2 & \underline{k}_{23}^2 & \underline{k}_{24}^2 \\ \underline{k}_{31}^2 & \underline{k}_{32}^2 & \underline{k}_{33}^2 & \underline{k}_{34}^2 \\ \underline{k}_{41}^2 & \underline{k}_{42}^2 & \underline{k}_{43}^2 & \underline{k}_{44}^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.9.8)$$

Burada $\underline{k}_{11}^i, \underline{k}_{12}^i, \dots, \underline{k}_{44}^i$ 3x3 boyutunda alt matrisleri ifade eder. Sistemdeki uygunluk ve denge şartlarını sağlayacak şekilde bu alt matrisler (3.9.9) ifadesinde olduğu gibi yerleştirilir.

$$\underline{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} \underline{k}_{11}^1 & \underline{k}_{12}^1 & 0 & \underline{k}_{14}^1 & \underline{k}_{13}^1 & 0 \\ \underline{k}_{21}^1 & \underline{k}_{22}^1 + \underline{k}_{11}^2 & \underline{k}_{12}^2 & \underline{k}_{24}^1 & \underline{k}_{23}^1 + \underline{k}_{14}^2 & \underline{k}_{13}^2 \\ 0 & \underline{k}_{21}^2 & \underline{k}_{22}^2 & 0 & \underline{k}_{24}^2 & \underline{k}_{23}^2 \\ \underline{k}_{41}^1 & \underline{k}_{42}^1 & 0 & \underline{k}_{44}^1 & \underline{k}_{43}^1 & 0 \\ \underline{k}_{31}^1 & \underline{k}_{32}^1 + \underline{k}_{41}^2 & \underline{k}_{42}^2 & \underline{k}_{34}^1 & \underline{k}_{33}^1 + \underline{k}_{44}^2 & \underline{k}_{43}^2 \\ 0 & \underline{k}_{31}^2 & \underline{k}_{32}^2 & 0 & \underline{k}_{34}^2 & \underline{k}_{33}^2 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (3.9.9)$$

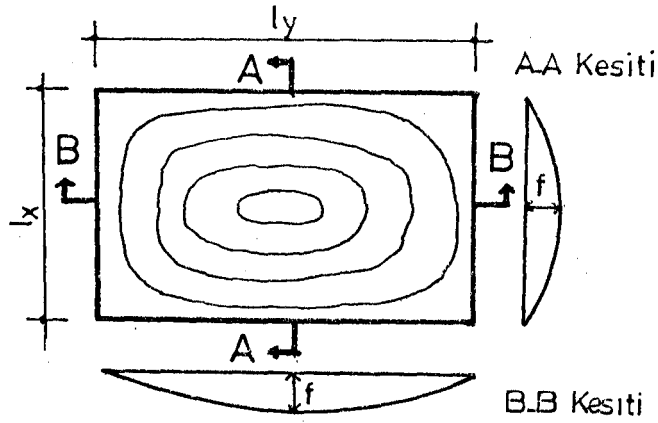
Burada da görüleceği gibi 2 ve 5 düğüm noktaları 1 ve 2 elemanlarının ortak noktaları olduğundan bu noktalarda her iki elemandan da terimler alınarak sistemdeki uygunluk ve denge şartları sağlanmış olur.

4. DÖŞEMELERLE İLGİLİ YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde önce döşemelerin elastik davranışı konu edilecek, daha sonra ise tekil döşemelerin hesap esaslarından gidilerek mesnet ve açıklık momentlerinin hesaplanmalarından bahsedilecektir. Son olarak da TS 500'de sürekli olarak düşünülen döşeme hesaplarına yer verilmiştir.

4.1. Plak Döşemelerinin Elastik Davranışı

Basit mesnetli bir döşeme üzerine yerleştirilen yayılı yük, döşemenin bir çanak şeklinde deforme olmasını sağlar. Bu olay, herbiri belirli bir çökmeyi gösteren eş çökme eğrileri ile gösterilebilir (Ersoy ve Atıncay, 1975).



Şekil 4.1. Deforme olmuş plak üzerindeki eş çökme eğrileri

Şekil 4.1'in incelenmesinden döşeme üzerindeki herhangi bir noktada döşemenin iki asal yönde eğilmeye maruz olduğu görülür. Buradan şu sonuçları çıkarmak mümkündür:

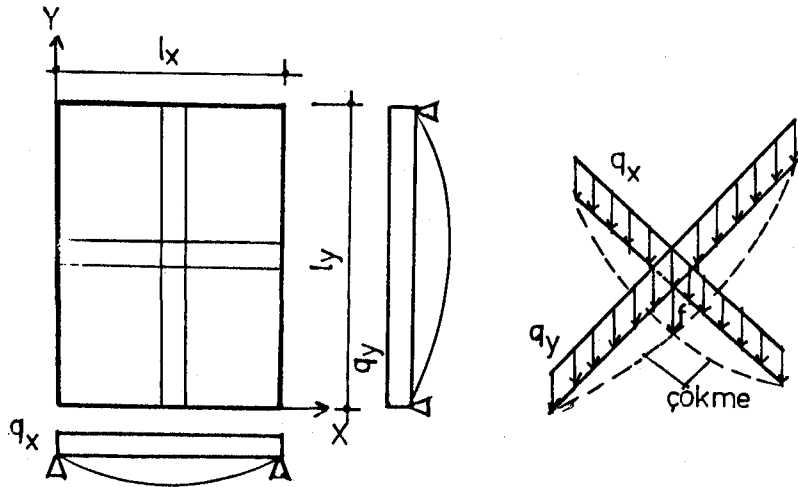
- Uygunluk şartları nedeni ile A-A ve B-B kesitlerinde elde edilen maksimum çökmeler aynı olmalıdır. B-B kesitindeki uzunluk (l_y), A-A kesitindeki uzunluktan (l_x) daha

fazla olduğundan A-A kesitindeki eğrilik (dy^2/dx^2) B-B kesitine kıyasla daha büyüktür. Başka bir deyişle, kısa kenar boyunca, uzun kenara oranla daha büyük eğilme momentleri meydana gelmektedir.

- Şekil üzerinde eş sehim eğrilerinin incelenmesinden kısa ve uzun açıklık boyunca oluşan momentlerin, ortadan mesnetlere doğru azaldığı görülür.

Bu sonuçlardan sonra mesnetlerin çökmeyen rijit elemanlardan oluştuğu kabulü ile A-A ve B-B kesitlerinde iki şerit ele alınsın. Birbiri ile kesişen bu iki şerit basit mesnetli olsun ve döşeme yükünü (q) paylaşsınlar (q_x ve q_y).

$$q = q_x + q_y \quad (4.1.1)$$



Şekil 4.2. Döşeme plağının x ve y yönünde şeritlere ayrılması

İki doğrultudaki bu şeritler uygunluk şartları nedeni ile açıklık ortasında aynı çökmeyi göstermek zorundadır.

$$f_x = f_y \rightarrow \frac{\alpha_x q_x l_x^4}{384 EI_x} = \frac{\alpha_y q_y l_y^4}{384 EI_y} \quad (4.1.2)$$

Her iki şeridin atalet momentleri aynı olduğundan, denklem

$$\alpha_x q_x \ell_x^4 = \alpha_y q_y \ell_y^4 \quad (4.1.3)$$

biçimini alır. Açıklıkların oranı $\ell_y/\ell_x = \epsilon$ ile gösterilirse,

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \frac{\alpha_y \epsilon^4}{\alpha_x + \alpha_y \epsilon^4} q = \chi_x \cdot q \\ q_y &= \frac{\alpha_x}{\alpha_x + \alpha_y \epsilon^4} q = (1 - \chi_x) q \end{aligned} \right\} \quad (4.1.4)$$

elde edilir (Aka vd., 1977). Denklemlerden de anlaşılacağı gibi ϵ oranı büyüdükçe toplam yükün büyük bir kısmı kısa yönde taşınmaktadır. $\epsilon = 2$ olması durumu incelenecek olursa;

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \frac{\alpha_y \epsilon^4}{\alpha_x + \alpha_y \epsilon^4} q = \frac{\alpha \cdot 2^4}{\alpha(1+2^4)} q = \frac{16}{17} q \\ q_y &= \frac{\alpha_x}{\alpha_x + \alpha_y \epsilon^4} q = \frac{\alpha}{\alpha(1+2^4)} q = \frac{1}{17} q \end{aligned} \right\} \quad (4.1.5)$$



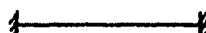
olmaktadır. (Burada plak her iki yönde de basit mesnetli olduğu için $\alpha_x = \alpha_y = 5$ 'dir)

Görüldüğü gibi yükün çoğu küçük açıklık doğrultusunda ki şerit tarafından taşınmaktadır. Bu nedenle ℓ_y/ℓ_x 2'den büyük olduğu zaman uzun açıklık doğrultusunda taşınan yük ihmal edilerek döşemenin tek doğrultuda (kısa yönde) çalıştığı kabul edilmektedir.

4.2. Diğer Kaynaklara Göre Tek Plakların Hesabı

Betonarme kitaplarının çoğunda (Örneğin; Aka vd., 1977) plaklar Şekil 4.2'de olduğu gibi şeritlere ayrılarak ortak olan noktalarının aynı sehimi yapacakları düşünülerek sonuca gidilmiştir. Burada plağın kenarlarının serbestçe dönebilen türde ya da ankastre olmasına göre üç çeşit mesnetlenme durumuyla karşılaşılabılır.

Çizelge 4.1. Tek açıklıklı kirişte sehim ve moment için katsayılar

Mesnetlenme Biçimi	α	m katsayısı	
		mesnette	açıklıkta
	5	∞	8
	2	-8	128/9
	1	-12	24

$$f = \frac{\alpha}{384} \frac{q l^4}{EI} \quad (4.2.1)$$

sehim formülündeki değerleri Çizelge 4.1'den alınabilir. Aynı çizelgede iki doğrultuda çalışan tek plakların açıklık ve mesnet momentlerinin

$$M = \frac{q l^2}{m} \quad X = \frac{q l^2}{m} \quad (4.2.2)$$

bağıntıları yardımıyla elde edilmelerini sağlayan m katsayıları da verilmiştir. Burada (4.1.1) ve (4.1.2) bağıntılarından yararlanılarak (4.1.3) ve (4.1.4) elde edilir. Yükler böylece birbirine dik iki doğrultudaki şeritlere bölündükten sonra momentler Tablo 4.2'deki m katsayıları kullanılarak

$$M_x = \frac{q_x \ell_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q_y \ell_y^2}{m_y} \quad (4.2.3)$$

bulunabilir. Ancak momentlerin bu şekilde hesabı plakta oluşan burulma momentlerinin eğilme momentlerini azaltıcı, etkisini gözönüne almamaktadır. Bu etki 1 'den küçük v' katsayıları ile dikkate alınabilir.

$$\eta_x = \frac{m_x}{v'_x \chi_x} \quad \eta_y = \frac{m_y}{v'_y (1 - \chi_x) \epsilon^2} \quad (4.2.4)$$

olmak üzere açıklık momentleri

$$\max M_x = \frac{q \ell_x^2}{\eta_x} \quad \max M_y = \frac{q \ell_y^2}{\eta_y} \quad (4.2.5)$$

yazılabilir. Mesnet momentleri ise

$$X_m = \frac{\chi_x q \ell_x^2}{m_x} \quad Y_m = \frac{(1 - \chi_x) q \ell_y^2}{m_y} \quad (4.2.6)$$

şeklinde hesaplanabilirler. Dr. Marcus tarafından plağın ℓ_y/ℓ_x oranına bağlı olarak hesaplanan tablolardan η_x , η_y ve χ_x değerlerinin alınmasıyla açıklık ve mesnet momentleri kolayca bulunabilir.

Yine bazı çalışmalarda da (örneğin; Uluğ ve Odabaşı, 1972) aynı esaslar altında çözüme gidilmiştir.

Diğer bir kaynakta ise (Hahn, 1972) eğilme momentlerinin hesabı için kullanılan

$$\begin{aligned} M_x &= c q \ell_x^2 \\ M_y &= c q \ell_y^2 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

formülleri toplam yüke bağlı olarak değiştirilmiştir. Burada açıklık momentleri için m_x , m_y ; mesnet momentleri için de m_{ex} , m_{ey} moment katsayıları tarif edilmiştir. Plak üzerindeki toplam yük

$$K = q \ell_x \ell_y \quad (4.2.8)$$

ile ifade edildiğine göre açıklık ve mesnet momentleri

$$\begin{aligned} M_x &= K/m_x & M_{ex} &= K/m_{ex} \\ M_y &= K/m_y & M_{ey} &= K/m_{ey} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada M_x ve M_{ex} 'ler ℓ_x boyundaki plak şeridindeki, M_y ve M_{ey} 'ler ise ℓ_y boyundaki plak şeridindeki eğilme momentlerini göstermektedir. Dokuz tip mesnetlenme şekline göre hazırlanmış olan ilgil tablolardan m ve m_e sayıları alınarak momentler hesaplanabilir.

Bu çalışmaların yanısıra T S 500'de döşemeler sürekli olarak düşünülmüştür (T S 500, 1982).

Çift doğrultuda çalışan döşemeler gibi son derece karmaşık bir sorunu oldukça basite indiren T S 500, kiriş veya duvarlara oturan döşemeler için geçerli bir metottur. Kirişli döşeme sistemlerinde açıklıkların birbirinden farklı olmadığı veya daha kesin hesabın gerekli olmadığı durumlarda kullanılabilir.

TS 500'ün esas döşemedeki birim genişliğe düşen momenti (4.2.10) denklemiyle ifade etmek, ℓ_y/ℓ_x oranına ve sınır şartlarına bağlı c katsayısının saptanması için bir tablo vermektir.

$$M = c q \ell_x^2 \quad (4.2.10)$$

Burada q , birim alana düşen yüküdür. Denklemin incelenmesinden her iki yöndeki momentlerin kısa kenarın bir fonksi-

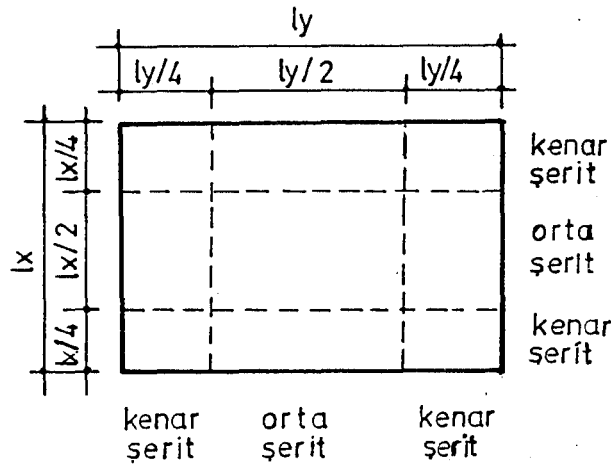
yonu olarak ifade edildiği anlaşılır.

Ilgili çizelgeden alınan katsayılarla hesaplanan momentler orta şerit içindir. Kolon şeritlerinde bu momentlerin 2/3'nün bulunduğu kabul edilir (Şekil 4.3.(a) ve (b)).

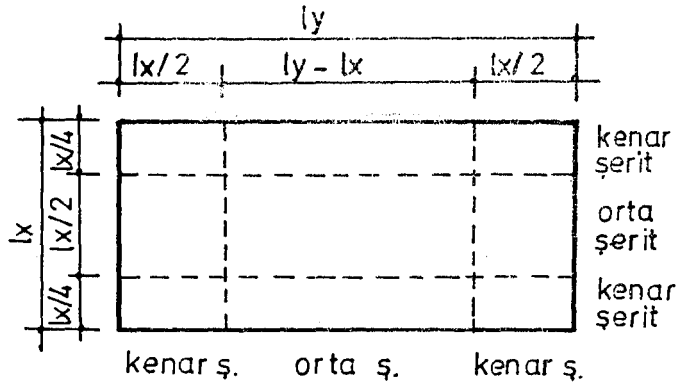
Ara mesnetin bir tarafındaki negatif moment diğer tarafındakinin 0.8 katından az ise aradaki farkın 2/3'ü bitişik plaklara rijitlikleri oranında dağıtılmalıdır. Bu metotta mesnet momentlerinin düzeltilmesine gerek yoktur.

Döşemenin serbestçe oturduğu varsayılan kenarlarında dönmenin herhangi bir yapısal düzenleme nedeni ile engellenmesi durumunda kenarlarda meydana gelecek negatif moment döşeme açıklık ortası için verilen pozitif momentin belirli bir yüzdesi olarak alınmalıdır. Dönmenin tam engellendiği durumlarda % 66, diğer durumlarda % 56 varsayılabilir.

Aşağıda dört kenarından oturan çift doğrultuda donatılı dikdörtgen plaklarda kenar oranlarının 2'den büyük ve küçük olmasına göre kenar ve orta şeritlerin durumu görülmektedir.



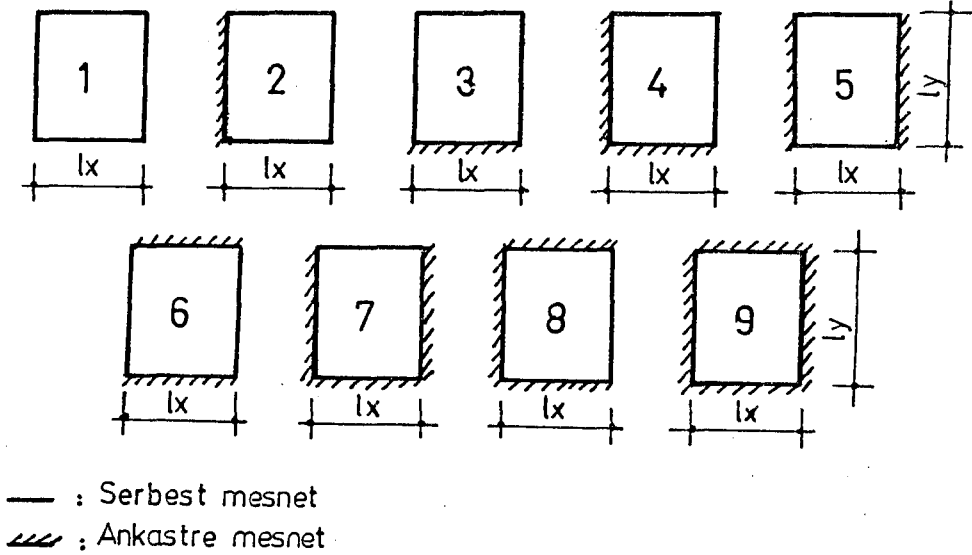
Şekil 4.3.a. $l_y/l_x \leq 2$ durumunda kenar ve orta şeritler



Şekil 4.3.b. $l_y/l_x > 2$ durumunda kenar ve orta şeritler

5. BU ÇALIŞMADA İNCELENEN DÖŞEMELERİN MESNETLENME DURUMLARI VE SEÇİLEN MODELLER

Bu konuda yapılan diğer çalışmalarda olduğu gibi sürekli olmadığı kabul edilen döşemelerde dokuz çeşit mesnetlenme durumu ortaya çıkmaktadır. Bu tezde yapılan çalışmada da dokuz çeşit mesnetlenme durumu incelenmiştir. İlgili mesnetlenme tipleri Şekil 5.1'de gösterilmiştir.



Şekil 5.1. Mesnetlenme tipleri

Şekil 5.1'de gösterilen mesnetlenme tiplerine ait modellerde, l_y döşemenin uzun kenarı, l_x ise kısa kenarı olmak üzere l_y/l_x oranı 1.00 ile 2.00 arasında 0.1 artımla, 2.00 ile 3.00 arasında ise 0.25 ve 0.50 artımlarla mesnet ve açıklık momentleri hesaplanmış¹ ve hesaplanan değerler Tablo 5.2'de verilmiştir.

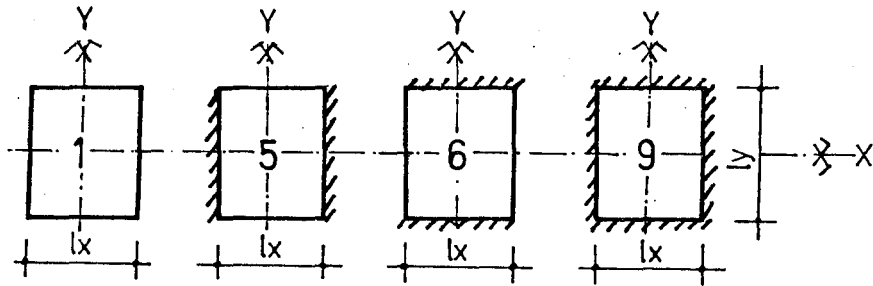
¹Bilgisayar programı, açıklık ve mesnet momentlerini tam orta noktadaki moment olarak değil de, mesnet ve açıklık orta şeritlerindeki momentlerin ortalaması olacak şekilde düzenlenmiştir.

Sonlu elemanlar plak programı ile (Ünlüoğlu, 1985) çözülen bu modellerde $\ell_x=600$ cm., döşeme kalınlığı $t=10$ cm, poisson oranı 0.25 ve elastisite modülü $E=2.1 \times 10^6$ kg/cm² olarak alınmıştır. Bu çözümlerde ℓ_x sabit tutularak ℓ_y kenarı artırılmıştır. Burada $\ell_x=600$ cm yerine başka bir değer de alınabilirdi; çünkü elde edilen mesnet ve açıklık momentleri döşeme boyutlarından bağımsızdır. Burada önemli olan ℓ_x boyutu ne olursa olsun ℓ_y/ℓ_x oranındaki değişmedir.

Plak bilgisayar programı ile çözülen bu döşeme modellerinde mesnetlenme durumlarına bağlı olarak simetriden de yararlanılmıştır. Buna göre döşeme modelleri üç ayrı sistemde incelenmiştir.

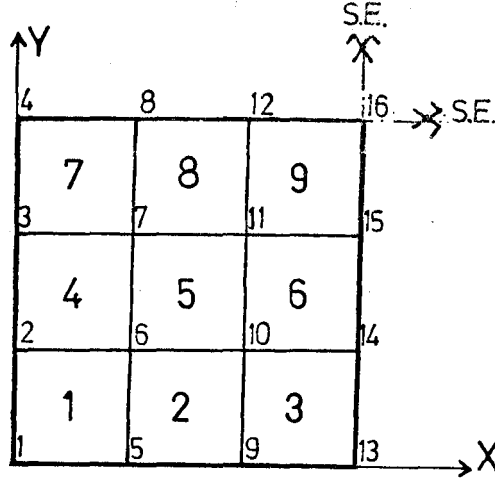
5.1. Her İki Yönde Simetri Eksenlerine Ayrılabilen Modeller

Bu tip modellerde plağın dörtte birinde çözüm yapmak yeterlidir (Şekil 5.2).



Şekil 5.2. Dörtte bir simetrik verilebilen modeller

Burada modeller x ve y simetri eksenlerine göre ayrılabilirdiğinden 1,5,6 ve 9 no'lu mesnetlenme tipleri dörtte bir simetrik olarak Şekil 5.3'de olduğu gibi alınarak hesaplanmıştır.



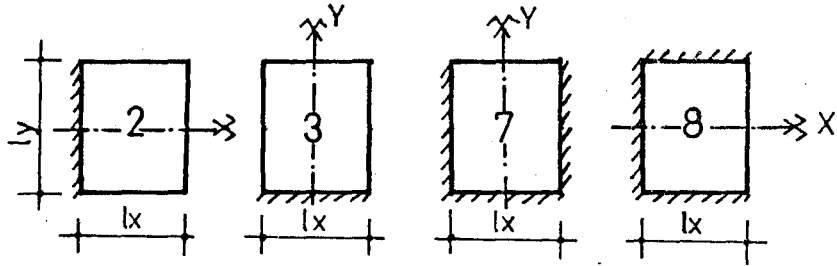
Şekil 5.3. Dörtte bir simetrik sistemin elemanlara ayrılması

Tam bir döşeme 36 elemanlı olarak düşünülmüştür. Burada sistem dörtte bir simetrik olduğundan 9 elemanlı olarak alınmış ve buna göre çözüme gidilmiştir.

Sınır şartları olarak x eksenine paralel simetri eksenini üzerindeki, 8, 12 no'lu düğüm noktalarında x eksenini etrafındaki φ_x dönmesi sıfır, diğer φ_y dönmesi ve w çökmesi serbest bırakılmıştır. Benzer şekilde y eksenine paralel simetri eksenini üzerindeki 14, 15 no'lu düğüm noktalarında y eksenini etrafındaki φ_y dönmesi sıfır, diğer φ_x dönmesi ile w çökmesi serbest bırakılmıştır. Ancak her iki simetri eksenini üzerinde bulunan 16 no'lu düğüm noktasında ise φ_x ve φ_y dönmeleri sıfır, w çökmesi serbest bırakılmıştır. Mesnetlerdeki diğer sınır şartları ise simetri eksenini üzerindeki sınır şartlarına bağlı kalmak şartıyla ankastre mesnetlerdeki düğüm noktalarında φ_x , φ_y dönmesi ile w çökmesi sıfır olarak, serbest mesnetlerdeki düğüm noktalarında w çökmesi sıfır, φ_x ve φ_y dönmeleri serbest verilmiştir.

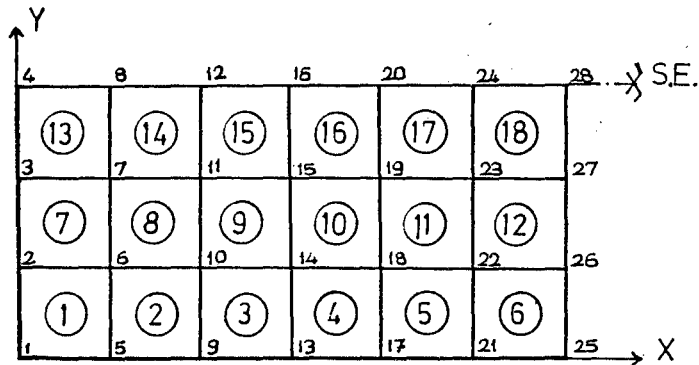
5.2. Bir Yönde Simetri Eksenine Ayrılabilen Modeller

Bu tip modellerde plağın yarısında çözüm yapmak yeterlidir. Bu modeller Şekil 5.4'de verilmiştir. Bu sistem-

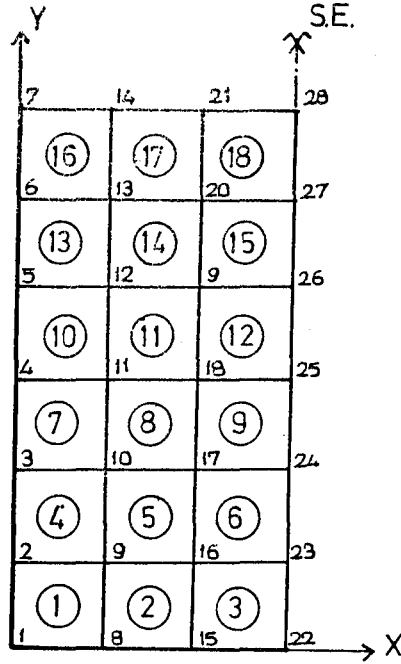


Şekil 5.4. Bir yönde simetrik verilebilen modeller

lerdeki modeller x ve y eksenlerinden birine göre simetrik olduğundan plağın yarısı alınarak plak problemi çözülebilir. Buna ait modeller Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'da gösterilmiştir.



Şekil 5.5. x eksenine paralel simetri eksenini olması hali



Şekil 5.6. y eksenine paralel simetri ekseni olması hali

Şekil 5.5'de gösterildiği gibi simetri ekseninin x eksenine paralel olması halinde bu simetri ekseni üzerindeki 8,12,16,20 ve 24 no'lu düğüm noktalarında x eksenindeki φ_x dönmeleri sıfır, diğer φ_y dönmeleri ile w çökmesi serbest bırakılmıştır. Şekil 5.6'da gösterildiği gibi simetri ekseninin y eksenine paralel olması halinde, bu simetri ekseni üzerindeki 23,24,25,26 ve 27 no'lu düğüm noktalarında y eksenini etrafındaki φ_y dönmeleri sıfır, diğer φ_x dönmeleri ve w çökmesi serbest bırakılmıştır.

Mesnetlerdeki diğer sınır şartları ise simetri ekseni üzerindeki sınır şartlarına bağlı kalmak şartıyla ankastre mesnetlerdeki düğüm noktalarında φ_x , φ_y dönmeleri ile w çökmesi sıfır olarak, serbest mesnetlerdeki düğüm noktalarında ise w çökmesi sıfır, φ_x ve φ_y dönmeleri serbest olarak verilmiştir.

5.4. C Moment Katsayılarının Elde Edilmesi

Burada; sonlu elemanlar metodu ile döşeme açıklık ve mesnet momentlerini bulmaya yarayan c moment katsayılarının elde edilmesinden bahsedilecektir. Daha sonra ise kenar oranlarına ve mesnetlenme şekillerine göre bu katsayılar tablolastırılmıştır. Ayrıca c moment katsayılarının değişik kenar oranlarına göre değişimi grafikler halinde de verilmiştir.

T S 500'de olduğu gibi sonlu elemanlar metodunda da q birim alana düşen yük (kg/cm² veya t/m²) ve ℓ_x kısa kenar uzunluğu (cm. veya m.) olmak üzere ℓ_y/ℓ_x oranına ve mesnet şartlarına bağlı olan c katsayıları, aşağıdaki açıklık ve mesnet momentleri hesabı için verilen denklemlerden elde edilebilir:

$$\begin{aligned} M_x, M_y &= c q \ell_x^2 \\ X_m, Y_m &= -c q \ell_x^2 \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Örnek olarak, $\ell_y = \ell_x = 6.00$ m. olan dört kenarı ankastre bir plakta kenar oranlarının 1.00 olması ve $q = 1$ t/m²'lik yük etki etmesi halinde sonlu elemanlar metoduna göre plak bilgisayar programından elde edilen açıklık ve mesnet momentleri

$$\begin{aligned} M_x = M_y &= 0.837 \text{ tm/m} \\ X_m = Y_m &= -1.572 \text{ tm/m} \end{aligned}$$

olarak hesap edilmiştir. (5.4.1) denklemlerinden C katsayısı çekilecek olursa

$$c = \frac{M}{q \ell_x^2} \quad (5.4.2)$$

elde edilir. Burada bilinen moment, yük ve kısa kenar değerleri yerlerine konursa açıklık momentleri hesabı için C katsayıları

$$c = \frac{0.837}{1 \times 36} = 0.0232$$

ve mesnet momentleri için ise

$$c = \frac{1.572}{1 \times 36} = 0.0437$$

olarak bulunur. Bu c katsayıları boyutsuz olup, mesnet ve açıklık momentleri her zaman döşemenin kısa kenarı olan l_x 'e bağlı olarak hesaplanmaktadır.

5.5. Döşeme Kenar Oranlarına Göre Açıklık ve Mesnet Momentlerinde Kullanılacak C Katsayıları

Çizelge 5.1 Dört kenarı serbest mesnetli döşemede c katsayıları

1	$\frac{l_y}{l_x}$	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.25	2.50	3.00
	M_x		.0457	.0531	.0602	.0669	.0731	.0787	.0839	.0886	.0928	.0966	.1000	.1070	.1123
M_y		.0457	.0469	.0475	.0476	.0473	.0468	.0461	.0452	.0444	.0434	.0425	.0403	.0382	.0350
X_m		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Y_m		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Çizelge 5.2 Bir uzun kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları

2	$\frac{l_y}{l_x}$	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.25	2.50	3.00
	M_x		.0346	.0382	.0412	.0438	.0460	.0478	.0493	.0506	.0516	.0524	.0532	.0544	.551
M_y		.0286	.0278	.0266	.0254	.0241	.0228	.0216	.0205	.0194	.0184	.0175	.0157	.0144	.0128
X_m		.0747	.0820	.0882	.0936	.0981	.1019	.1052	.1079	.1102	.1122	.1138	.1169	.1190	.1212
Y_m		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

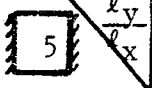
Çizelge 5.3. Bir kısa kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları

3	$\frac{l_y}{l_x}$	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.25	2.50	3.00
	M_x		.0286	.0351	.0417	.0482	.0545	.0605	.0661	.0714	.0762	.0807	.0848	.0935	.1004
M_y		.0346	.0374	.0397	.0414	.0426	.0436	.0440	.0443	.0443	.0442	.0439	.0429	.0417	.0391
X_m		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Y_m		.0747	.0812	.0865	.0907	.0940	.0965	.0982	.0993	.0999	.1002	.1001	.0990	.0969	.0915

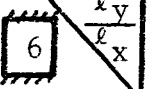
Çizelge 5.4. Bitişik iki kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları

4	$\frac{l_y}{l_x}$	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.25	2.25	3.00
	M_x		.0244	.0283	.0318	.0349	.0377	.0401	.0423	.0441	.0457	.0470	.0482	.0505	.0520
M_y		.0244	.0251	.0253	.0251	.0247	.0242	.0236	.0229	.0222	.0215	.0208	.0191	.0177	.0156
X_m		.0574	.0656	.0731	.0797	.0856	.0907	.0951	.0989	.1022	.1051	.1075	.1123	.1155	.1194
Y_m		.0574	.0598	.0613	.0621	.0624	.0623	.0619	.0613	.0606	.0598	.0590	.0568	.0545	.0499

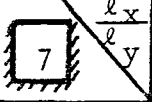
Çizelge 5.5. Karşılıklı iki uzun kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları

 5 $\frac{l_y}{l_x}$	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.25	2.50	3.00
M_x	.0313	.0367	.0388	.0404	.0417	.0427	.0434	.0440	.0444	.0447	.0449	.0451	.0451	0.447
M_y	.0231	.0216	.0200	.0185	.0171	.0159	.0147	.0137	.0128	.0121	.0114	.0102	.0095	.0089
X_m	.0628	.0670	.0704	.0730	.0751	.0767	.0780	.0790	.0798	.0804	.0809	.0817	.0820	.0822
X_m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

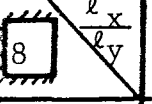
Çizelge 5.6. Karşılıklı iki kısa kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede c katsayıları

 6 $\frac{l_y}{l_x}$	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.25	2.50	3.00
M_x	.0231	.0294	.0362	.0431	.0500	.0568	.0634	.0695	.0753	.0807	.0856	.0961	.1042	.1148
M_y	.0341	.0376	.0406	.0429	.0446	.0457	.0464	.0466	.0465	.0462	.0456	.0437	.0415	.0373
X_m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Y_m	.0628	.0703	.0768	.0824	.0870	.0907	.0935	.0956	.0971	.0980	.0984	.0981	.0965	.0915


Çizelge 5.7. İki uzun bir kısa kenarı ankastre, bir kısa kenarı serbest mesnetli döşemelerde c katsayıları

 7	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2,00	2.25	2.50	3.00
M_x	.0254	.0287	.0315	.0338	.0357	.0373	.0386	.0397	.0406	.0413	.0419	.0430	.0437	.0444
M_y	.0215	.0213	.0208	.0200	.0193	.0184	.0176	.0169	.0162	.0154	.0148	.0134	.0128	.0108
X_m	.0514	.0569	.0615	.0654	.0685	.0711	.0731	.0749	.0762	.0774	.0783	.0800	.0810	.0819
Y_m	.0463	.0467	.0466	.0461	.0454	.0447	.0439	.0431	.0423	.0415	.0407	.0387	.0368	.0330

Çizelge 5.8. İki kısa bir uzun kenarı ankastre, bir uzun kenarı serbest mesnetli döşemelerde c katsayıları

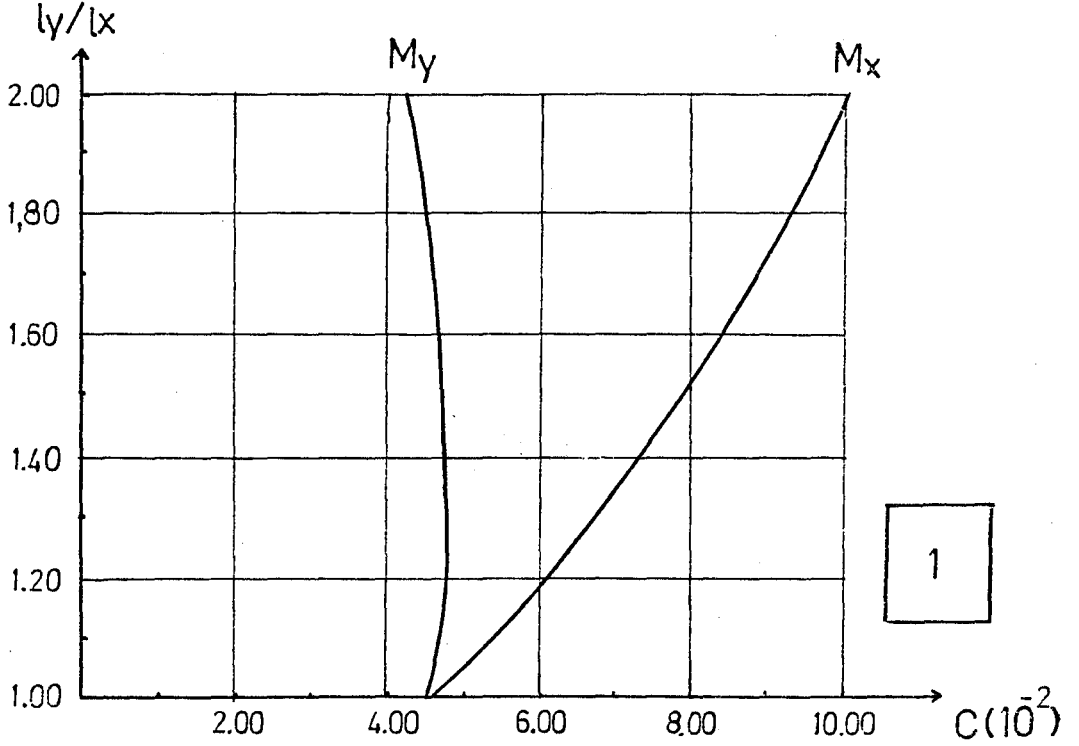
 8	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.25	2.50	3.00
M_x	.0215	.0258	.0299	.0337	.0371	.0402	.0428	.0452	.0471	.0487	.0501	.0526	.0540	.0555
M_y	.0254	.0266	.0271	.0271	.0267	.0259	.0250	.0239	.0228	.0217	.0206	.0181	.0161	.0135
X_m	.0463	.0548	.0630	.0706	.0775	.0837	.0892	.0940	.0982	.1020	.1050	.1108	.1148	.1192
Y_m	.0514	.0551	.0578	.0596	.0607	.0612	.0612	.0609	.0604	.0598	.0590	.0568	.0545	.0499

Çizelge 5.9. Dört kenarı ankastre mesnetli döşemelerde c katsayıları

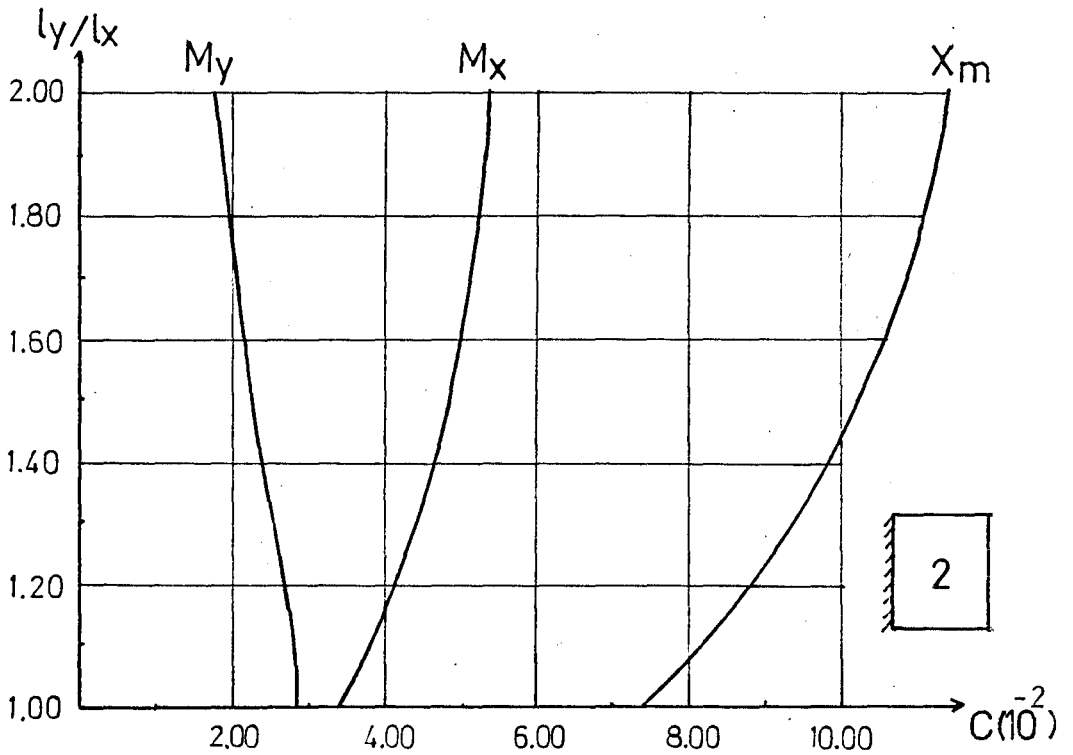
 $\frac{l_y}{l_x}$	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.25	2.50	3.00
M_x	.0232	.0273	.0309	.0339	.0364	.0385	.0401	.0414	.0425	.0433	.0439	.0447	.0451	.0450
M_y	.0232	.0233	.0227	.0218	.0206	.0193	.0180	.0168	.0156	.0145	.0135	.0116	.0102	.0090
X_m	.0437	.0501	.0558	.0607	.0648	.0681	.0709	.0732	.0750	.0765	.0777	.0797	.0809	.0818
Y_m	.0437	.0451	.0457	.0457	.0453	.0448	.0440	.0432	.0424	.0416	.0408	.0387	.0368	.0330

5.6 C Moment Katsayılarının Grafik Şeklinde Verilmesi

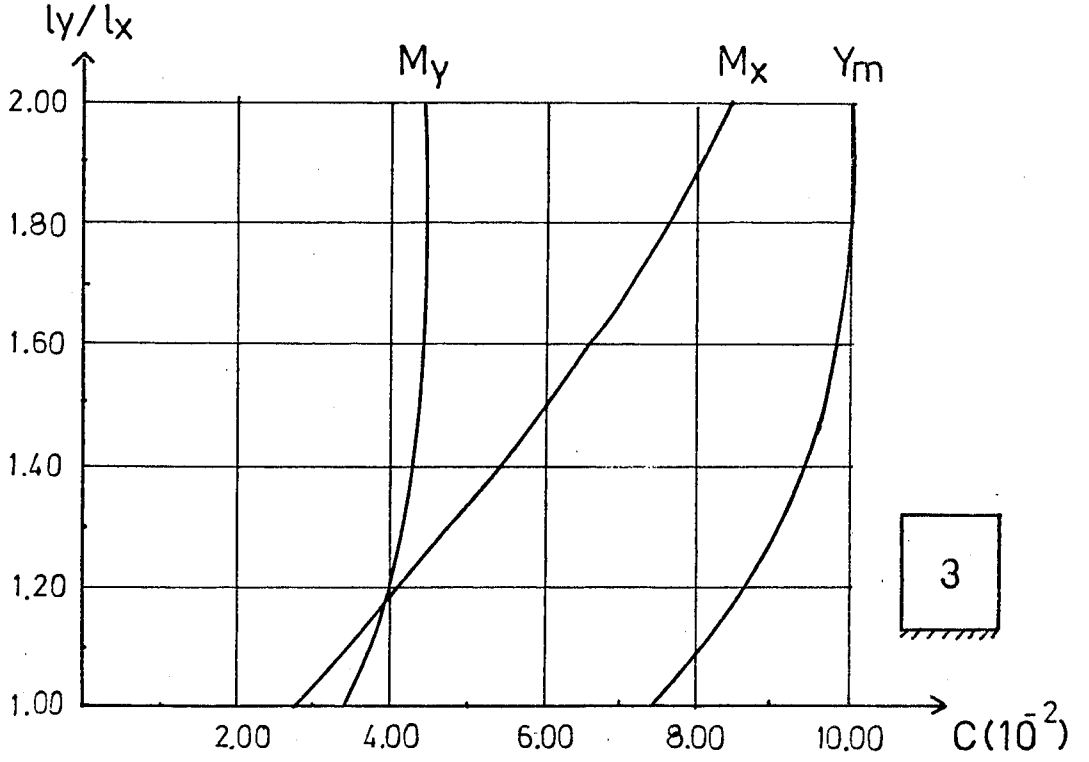
Şekil 5.8. Dört kenarı serbest mesnetli dösemelerde C katsayıları



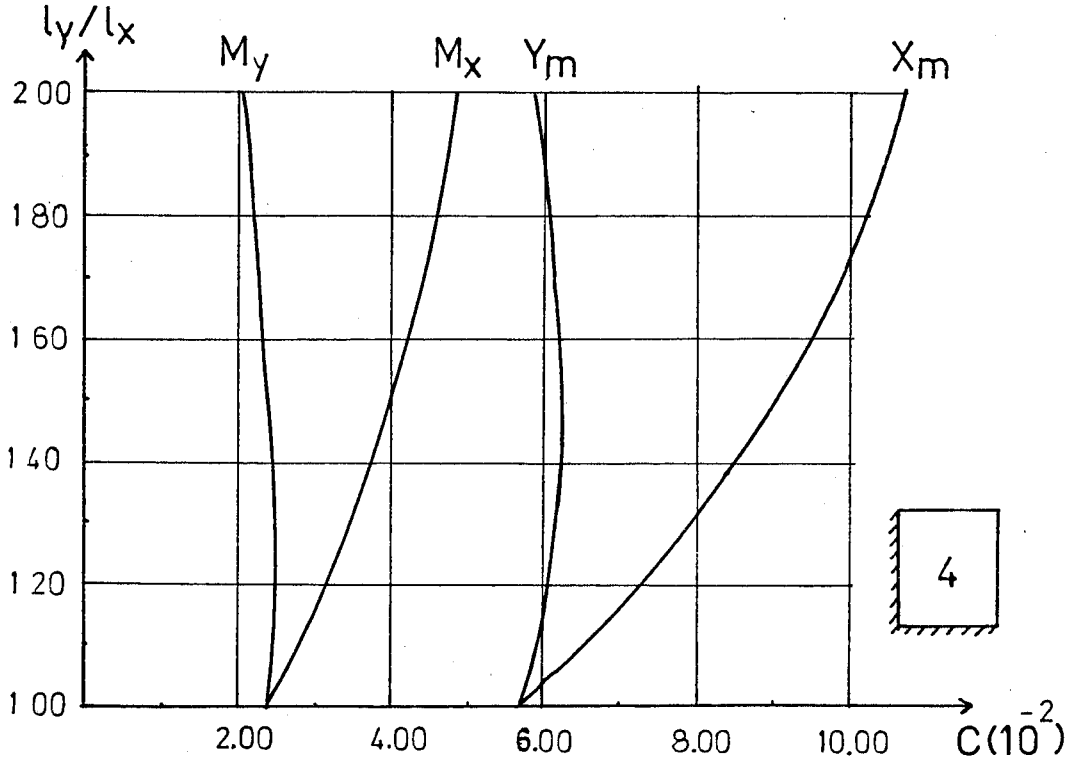
Şekil 5.9. Bir uzun kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli dösemelerde C katsayıları



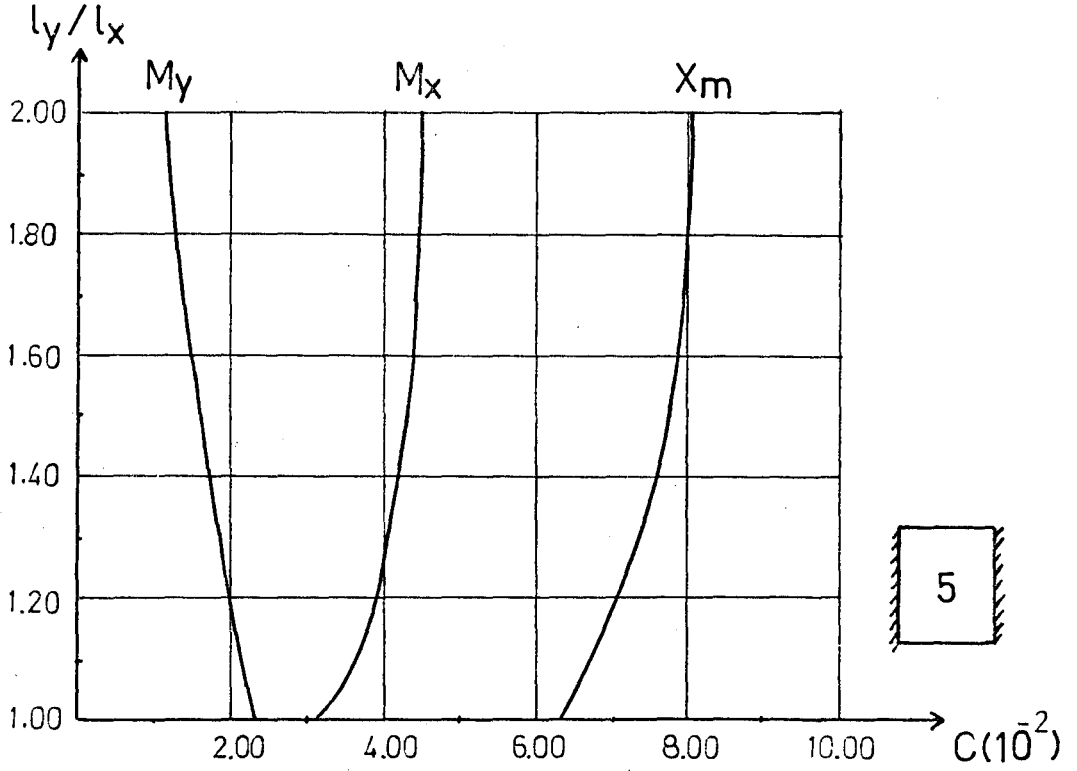
Şekil 5.10. Bir kısa kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede C katsayıları



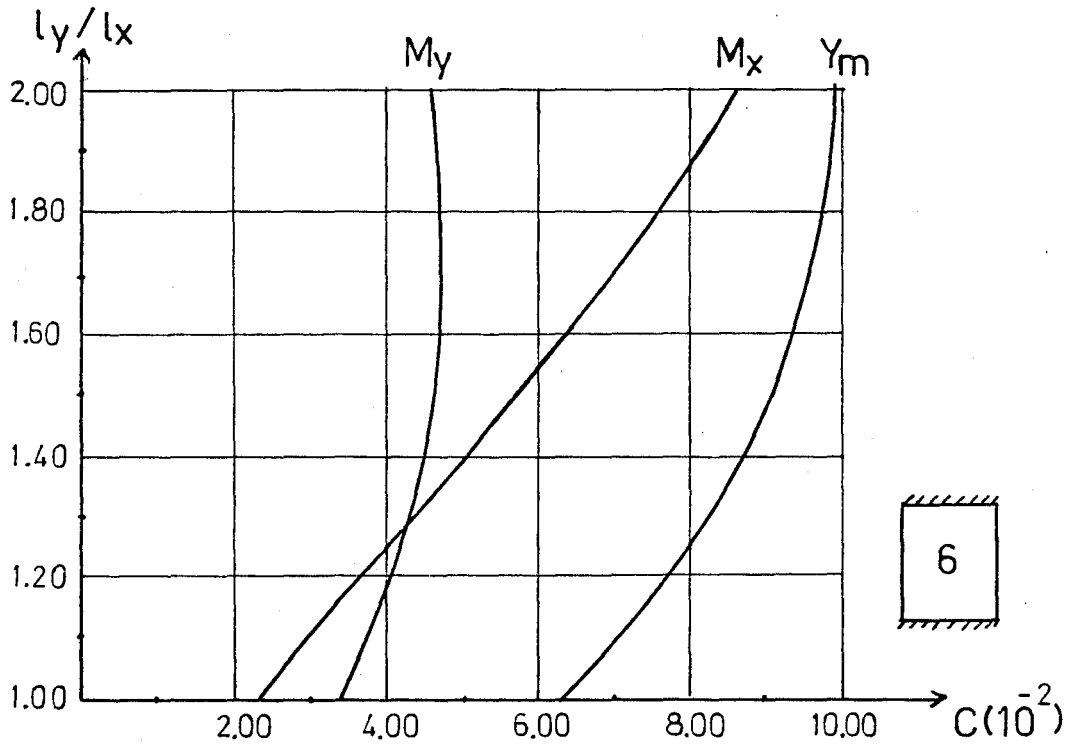
Şekil 5.11. Bitişik iki kenarı ankastre, diğer iki kenarı serbest mesnetli döşemede C katsayıları



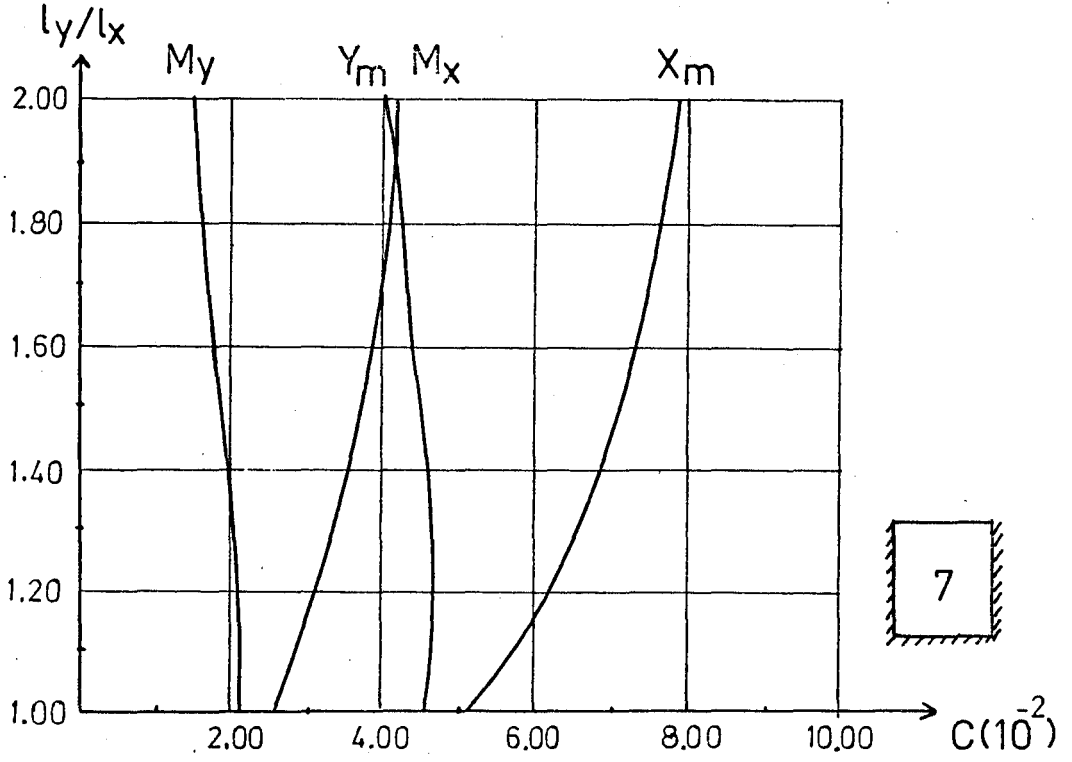
Şekil 5.12. Karşılıklı iki uzun kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede C katsayıları



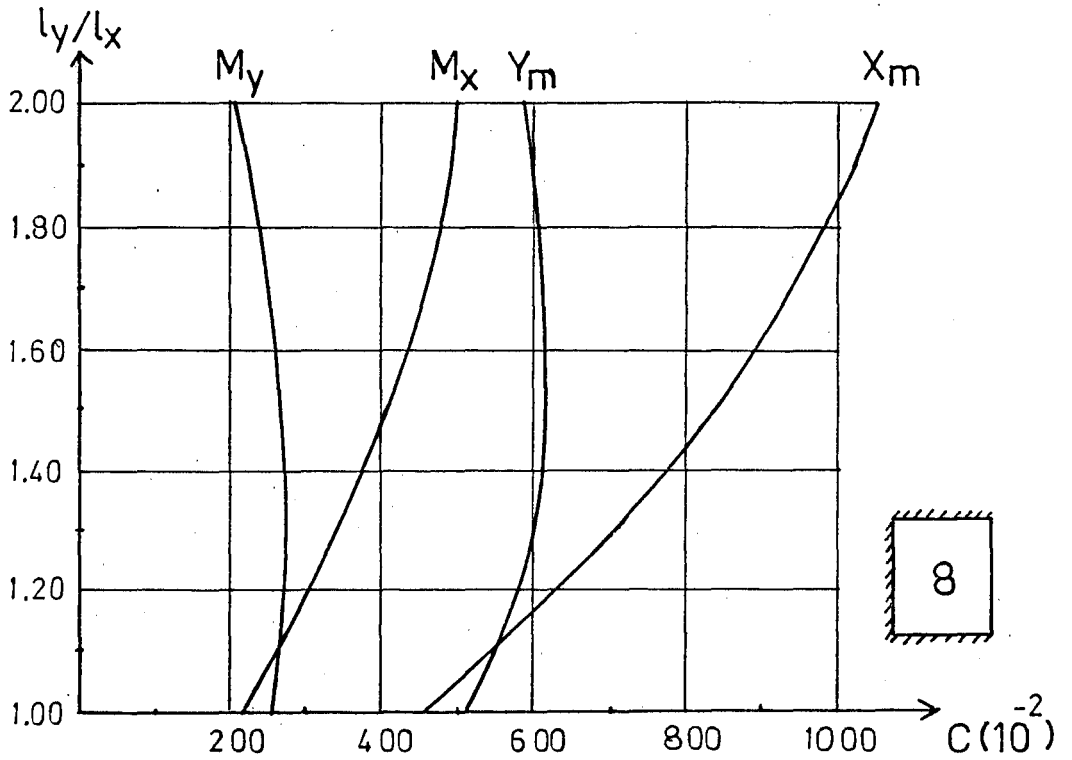
Şekil 5.13. Karşılıklı iki kısa kenarı ankastre, diğer kenarları serbest mesnetli döşemede C katsayıları



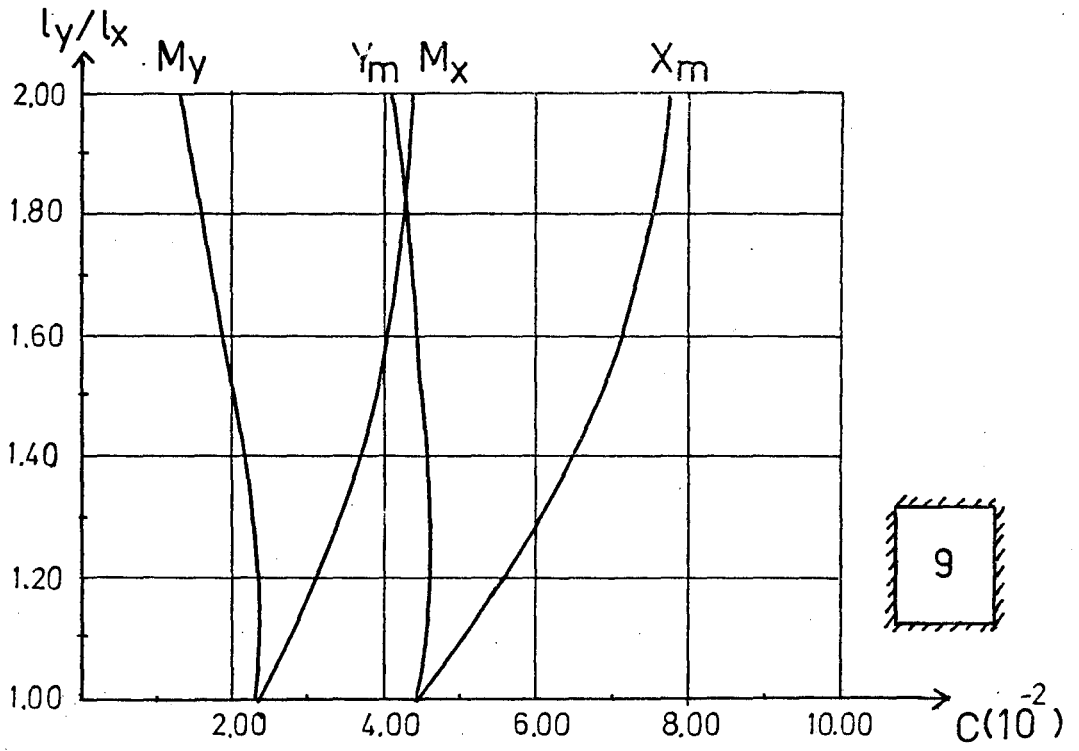
Şekil 5.14. Bir kısa kenarı serbest, diğer kenarları ankastre mesnetli döşemede C katsayıları



Şekil 5.15. Bir uzun kenarı serbest, diğer kenarları ankastre mesnetli döşemede C katsayıları



Şekil 5.16. Dört kenarı ankastre mesnetli döşemelerde C katsayıları



6. ÖRNEKLER İLE KARŞILAŞTIRMALAR

6.1. Üç Kenarı Ankastre Olan Tek Döşemede Moment Hesapları

Bu bölümde ilk olarak kenar oranları 1.00 olan iki uzun bir kısa kenarı ankastre bir tekil döşemenin önce sonlu elemanlar daha sonra da diğer metotlara göre açıklık ve mesnet momentleri hesap edilerek sonuçlar Çizelge 6.1'de karşılaştırılmıştır. Kenar uzunlukları $\ell_y = \ell_x = 6.00$ m olarak alınmıştır.

a) Sonlu Elemanlar Metoduna göre çözüm:

$$M_x = c q \ell_x^2 = 0.0254 \times 1 \times 6.00^2 = 0.914 \text{ tm/m}$$

$$M_y = c q \ell_x^2 = 0.0215 \times 1 \times 6.00^2 = 0.774 \text{ tm/m}$$

$$X_m = -c q \ell_x^2 = -0.0514 \times 1 \times 6.00^2 = -1.850 \text{ tm/m}$$

$$Y_m = -c q \ell_x^2 = -0.0463 \times 1 \times 6.00^2 = -1.667 \text{ tm/m}$$

b) T S 500'e göre çözüm:

$$M_x = M_y = c q \ell_x^2 = 0.031 \times 1 \times 36 = 1.116 \text{ tm/m}$$

$$X_m = c q \ell_x^2 = -0.042 \times 1 \times 36 = -1.512 \text{ tm/m}$$

$$Y_m = c q \ell_x^2 = -0.041 \times 1 \times 36 = -1.476 \text{ tm/m}$$

c) Marcus'a göre çözüm:

$$\eta_x = 44.2, \eta_y = 50.6, \chi_x = 0.667$$

değerleri ilgili çizelgeden alındıktan sonra,

$$M_x = \frac{q \ell_x^2}{\eta_x} = \frac{1 \times 36}{44.2} = 0.814 \text{ tm/m}$$

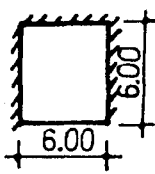
$$M_y = \frac{q \ell_x^2}{\eta_y} = \frac{1 \times 36}{50.6} = 0.711 \text{ tm/m}$$

$$X_m = \frac{\chi_x q \ell_x^2}{m_x} = \frac{0.667 \times 1 \times 36}{-12} = -2.001 \text{ tm/m}$$

$$Y_m = \frac{(1-\alpha_x) q \ell_y^2}{m_y} = \frac{0.333 \times 1 \times 36}{-8} = -1.449 \text{ tm/m}$$

elde edilir.

Çizelge 6.1. Üç kenarı ankastre tek döşemde açıklık ve mesnet momentlerinin diğer tek döşeme metotlarıyla karşılaştırılması

$\ell_y/\ell_x=1.00$	Son.El.Met.	T S 500	Marcus	
	M_x	0.914	1.116	0.814
	M_y	0.774	1.116	0.711
	X_m	-1.850	-1.512	-2.001
	Y_m	-1.667	-1.476	-1.499

6.2. Kenar Oranları 1.50 Olan Dört Tarafı Ankastre Bir Tekil Döşemde Sonlu Elemanlar ve Diğer Metotlara Göre Moment Hesapları

a) Sonlu Elemanlar Metoduna göre çözüm

$$M_x = c q \ell_x^2 = 0.0385 \times 1 \times 36 = 1.386 \text{ tm/m}$$

$$M_y = c q \ell_x^2 = 0.0193 \times 1 \times 36 = 0.695 \text{ tm/m}$$

$$X_m = -c q \ell_x^2 = -0.0681 \times 1 \times 36 = -2.452 \text{ tm/m}$$

$$Y_m = -c q \ell_x^2 = -0.0448 \times 1 \times 36 = -1.613 \text{ tm/m}$$

b) T S 500'e göre çözüm

$$M_x = c q \ell_x^2 = 0.045 \times 1 \times 36 = 1.620 \text{ tm/m}$$

$$M_y = c q \ell_x^2 = 0.025 \times 1 \times 36 = 0.900 \text{ tm/m}$$

$$X_m = c q \ell_x^2 = -0.059 \times 1 \times 36 = -2.124 \text{ tm/m}$$

$$Y_m = c q \ell_x^2 = -0.033 \times 1 \times 36 = -1.188 \text{ tm/m}$$

c) Marcus'a göre çözüm

$$\eta_x = 32.0, \quad \eta_y = 72.1, \quad \eta_x = 0.835$$

$$M_x = \frac{q \ell_x^2}{\eta_x} = \frac{1 \times 36}{32.0} = 1.125 \text{ tm/m}$$

$$M_y = \frac{q \ell_x^2}{\eta_y} = \frac{1 \times 36}{72.1} = 0.499 \text{ tm/m}$$

$$X_m = \frac{\chi_x q \ell_x^2}{m_x} = \frac{0.835 \times 1 \times 36}{-12} = -2.505 \text{ tm/m}$$

$$Y_m = \frac{(1-\chi_x) q \ell_y^2}{m_y} = \frac{0.165 \times 1 \times 81}{-12} = -1.114 \text{ tm/m}$$

d) Analitik Metotlara Göre Çözüm:

$$M_x = c q \ell_x^2 = 0.036 \times 1 \times 36 = 1.296 \text{ tm/m}$$

$$M_y = c q \ell_x^2 = 0.022 \times 1 \times 36 = 0.792 \text{ tm/m}$$

$$X_m = c q \ell_x^2 = -0.075 \times 1 \times 36 = -2.700 \text{ tm/m}$$

$$Y_m = c q \ell_x^2 = -0.057 \times 1 \times 36 = -2.052 \text{ tm/m}$$

Çizelge 6.2. Dört kenarı ankastre tek döşemde açıklık ve mesnet momentlerinin diğer tek döşeme metotlarıyla karşılaştırılması

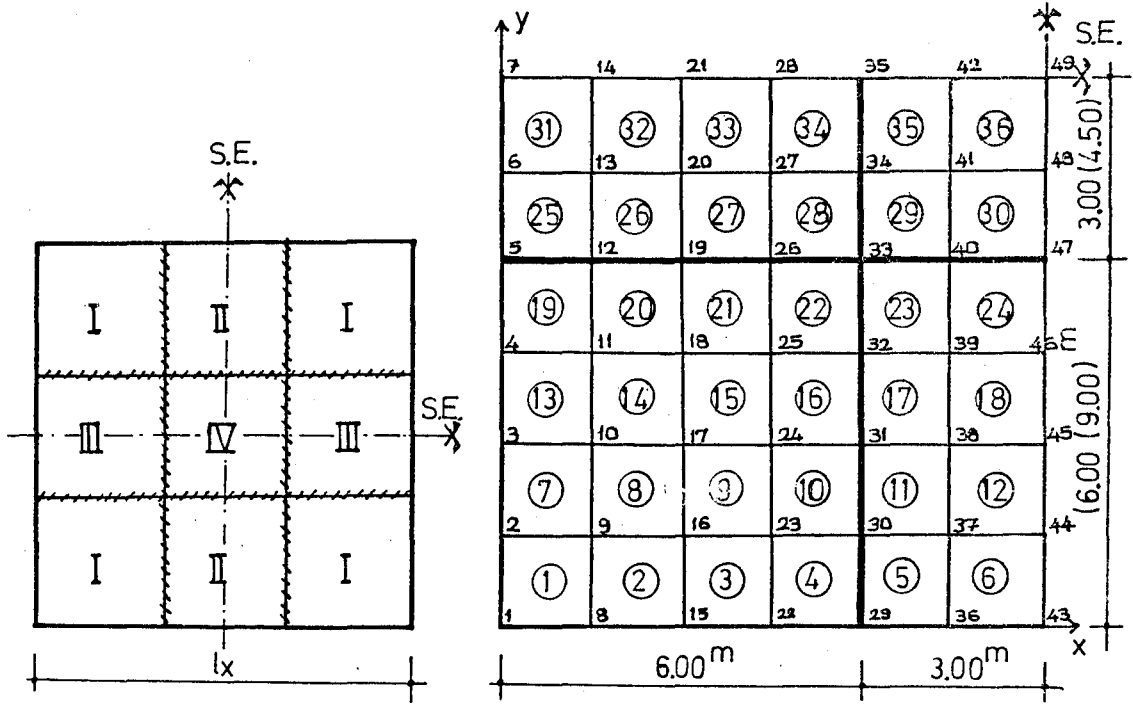
$\ell_y/\ell_x=1.50$	Son.El.Met.	T S 500	Marcus	Analitik	
	M_x	1.386	1.620	1.125	1.296
	M_y	0.695	0.900	0.499	0.792
	X_m	-2.452	-2.124	-2.505	-2.700
	Y_m	-1.613	-1.188	-1.114	-2.052

Tabloda görüldüğü gibi sonlu elemanlar metoduna göre tek döşemeler için bulunan c moment katsayılarının kullanılması sonucu elde edilen değerler, T S 500 ve Marcus metoduna göre bulunan değerlerin arasında kalmaktadır. Yalnızca Y_m mesnet momenti bu metotlara göre bir miktar fazla ise de analitik çözümlerden elde edilen gerçek değerlere daha yakındır.

6.3. Sürekli Bir Döşemenin S.E. Metodu İle Çözülmesi ve Diğer Tek Döşeme Metotlarıyla Karşılaştırılması

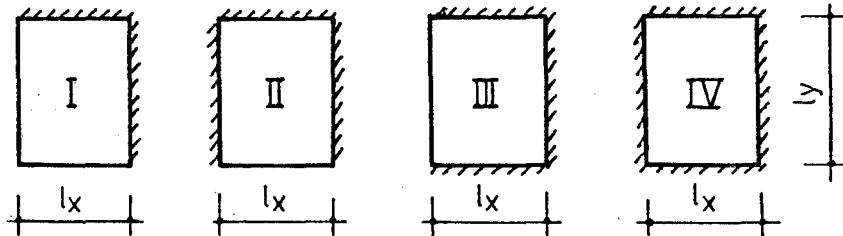
Bu bölümde önce, dokuz gözlü sürekli bir döşeme, (Şekil 6.1) problemin sınır şartlarının sonlu elemanlar plak programına işlenmesi (mesnetlerde çökmelerin sıfır olması gibi) sonucunda, kenar oranlarının 1.00 ve 1.50 olması durumlarına göre çözülmüştür.

Daha sonra sürekli döşemenin içindeki dört değişik döşeme gözleri (Şekil 6.2) tek plaklar için bulduğumuz c moment katsayıları kullanılmak suretiyle, 1.00 ve 1.50 kenar oranlarına göre tekrar çözülmüştür. Her iki çözümden elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında, bu değerlerin birbirlerine yakın oldukları görülmüştür.



Şekil 6.1. a) Seçilen sürekli döşeme
b) Sürekli döşemenin her iki yönde simetri eksenine ayrılması

Aşağıda sürekli döşemedeki değişik mesnetlenme durumlarına sahip elemanlar görülmektedir.



Şekil 6.2. Sürekli döşemedeki değişik mesnetlenme durumlarına sahip elemanlar

Çizelge 6.3. Sürekli döşemenin kenar oranlarının 1.00 olması durumunda değişik metotlara göre çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

$l_y/l_x=1.00$		Sonlu El.Met.	T S 500	Marcus	S.E.Plak Programı ile
I	M_x	0.878	1.332	0.968	1.135
	M_y	0.878	1.332	0.968	1.135
	X_m	-2.066	-1.764	-2.250	-1.983
	Y_m	-2.066	-1.764	-2.250	-1.983
II	M_x	0.914	1.116	0.814	1.068
	M_y	0.774	1.116	0.711	0.828
	X_m	-1.850	-1.512	-2.001	-1.983
	Y_m	-1.667	-1.476	-1.499	-1.573
III	M_x	0.774	1.116	0.711	0.828
	M_y	0.914	1.116	0.814	-1.068
	X_m	-1.667	-1.476	-1.499	-1.573
	Y_m	-1.850	-1.512	-2.001	-1.983
IV	M_x	0.835	0.900	0.646	0.879
	M_y	0.835	0.900	0.646	0.879
	X_m	-1.573	-1.188	-1.500	-1.573
	Y_m	-1.573	-1.188	-1.500	-1.573

Çizelge 6.4. Sürekli döşemenin 1.50 kenar oranlarına göre değişik metotlara göre çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

$l_y/l_x=1.50$		Son.El.Met.	T S 500	Marcus	S.E.Plak Programı ile
I	M_x	1.444	1.980	1.747	1.916
	M_y	0.871	1.332	0.776	1.127
	X_m	-3.265	-2.628	-3.758	-2.928
	Y_m	-2.243	-1.764	-1.671	-2.239
II	M_x	1.343	1.764	0.907	1.443
	M_y	0.662	1.116	0.463	0.531
	X_m	-2.560	-2.340	-2.730	-2.928
	Y_m	-1.609	-1.476	-0.911	-1.310
III	M_x	1.147	1.764	1.545	1.709
	M_y	0.932	1.116	0.786	1.183
	X_m	-3.013	-2.340	-3.227	-2.733
	Y_m	-2.203	-1.476	-1.910	-2.239
IV	M_x	1.386	1.620	1.125	1.414
	M_y	0.695	0.900	0.499	0.632
	X_m	-2.452	-2.124	-2.505	-2.733
	Y_m	-1.613	-1.188	-1.114	-1.310

7. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, tek plakların çeşitli mesnetlenme durumlarına göre açıklık ve mesnet momentlerinin bulunmasına yardımcı olmak üzere c moment katsayıları belirlenmiştir. Yapılan çalışmalar sonucunda bu katsayılar hesap edilerek tablo ve grafikler halinde verilmiştir. Bulunan c moment katsayıları kullanılarak, yapılan çözüm sonuçları, diğer kaynaklardaki metotlarla yapılan çözüm sonuçları ile karşılaştırıldığında yakın değerler elde edildiği görülmektedir. Yalnızca Y_m mesnet momenti bir miktar fazla çıkıyor olmasına karşı analitik çözümlerden elde edilen sonuçlara daha yakın kalmaktadır (Bkz. Çizelge 6.2).

Sürekli döşeme çözümü için geliştirilmiş olan TS 500' de c katsayılarının deneyler sonucu elde edilmesi ve uzun açıklık doğrultusundaki momentlerin değişen kenar oranlarına göre değişmemesi sebebiyle yaklaşık sonuç alınmaktadır. Halbuki plak bilgisayar programının sürekli döşeme çözümleri için gerekli sınır şartları¹ verilerek çözülmesi halinde elde edilen sonuçlar bu çalışmada sonlu elemanlar metodu ile elde edilen tekil döşeme çözümleri ile oldukça yakın bulunmaktadır (Bkz. Çizelge 6.3 ve 6.4).

Dolayısıyla bu çalışmada tek döşeme hesapları için elde edilen c moment katsayıları, sürekli döşeme çözümlerine de uygun sonuçlar verdiği ve burada elde edilen tek döşeme çözümünün (diğer tek döşeme çözümlerine göre) daha gerçekçi sonuçlar verdiği görülmüştür.

1

Sürekli döşeme çözümlerinde mesnetlerde çökmelerin sıfır olduğu ve simetriden yararlanılıyorsa gerekli yerlerde φ_x veya φ_y dönmelerinin sıfır olduğuna göre sınır şartları verilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aka, İ., Keskinel, F. ve Arda, T.S., 1977, Betonarme yapı elemanları, Arpaz Matbaacılık, 320 s.
- Ersoy, U. ve Atımtay, E., 1975, Betonarme (Temel ilkeler ve hesap yöntemleri), Güven Kitabevi Yayınları, 623 s.
- Hahn, J., 1972, Mütemudi kirişler, çerçeveler ve palklar, (Çev. E. Çetmeli), Çağlayan Basımevi, 339 s.
- Przemieniecki, J.S., 1968, Theory of matrix structural analysis, Mc Graw-Hill Book Company, 468 p.
- Szilard, R., 1975, Theory and analysis of plates classical and numerical methods, New Jersey, 425 p.
- Timoshenko, S., 1964, Plak ve kabuklar teorisi, (Çev. M. İnan ve F. Sönmez), İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi Matbaası, 563 s.
- Türk Standardları (TS 500), 1982, Betonarme yapıların hesap ve yapım kuralları, Türk Standardları Enstitüsü, 75 s.
- Uğural, A.C., 1981, Stresses in plates and shells, Library of Congress Cataloging in Publication Data, 312 p.
- Uluğ, T.N. ve Odabaşı, Y., 1972, Betonarme inşaat hesapları, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, 365 s.
- Ünlüoğlu, E., 1985, Kirişsiz döşemeli sistemlerde yatay kuvvetler etkisi altında rijitlik değerlerinin araştırılması, Doktora tezi, Anadolu Üniversitesi, 136 s.