

TEK EKLEMLİ DENEYSEL BİR
ESNEK ROBOT KOLU İÇİN
GÜRBÜZ KONTROLÖR TASARIMI

HAKKI ULAŞ ÜNAL
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği
Anabilim Dalı
Aralık 2002

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Hakkı Ulaş Ünal'ın "Tek Eklemlı Deneysel Bir Esnek Robot Kolu İçin Gürbüz Kontrolör Tasarımı" başlıklı Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Kontrol ve Kumanda Sistemleri Bilim Dalındaki Yüksek Lisans tezi 23/12/2002 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öđretim ve Sınav Yönetmeliđinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı) : Prof. Dr. Altuğ İFTAR	
Üye : Prof. Dr. Hüseyin AKÇAY	
Üye : Prof. Dr. Hitay ÖZBAY	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 08.04.2003 tarih ve 1/5.. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Osman ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TEK EKLEMLİ DENEYSEL BİR ESNEK ROBOT KOLU İÇİN GÜRBÜZ KONTROLÖR TASARIMI

HAKKI ULAŞ ÜNAL

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Altuğ İFTAR
2002, 168 Sayfa

Bu tezde, bir ucu bir DC servo motorun milindeki bir bağlantı elemanına yerleştirilmiş, diğer ucunda ise bir yük bulunan tek eklemlilik çok esnek bir robot kolunun modellenmesi yapılmış ve bu deneysel kol için gürbüz kontrolörler tasarlanmıştır. Tasarlanan kontrolörlerin amacı kolun pozisyonunu kontrol etmek ve aynı zamanda kolda oluşan titreşimi de ele alarak sistemin performansını iyileştirmeye çalışmaktır. Bu amaçla kontrolör tasarımı kolun pozisyon, hız ve orta noktasındaki bükülmeden geribeslemeler alınmaktadır. Böyle bir kontrolör tasarımı için, gürbüz kontrol tasarım yöntemleri kullanılarak, MATLAB paket programı yardımıyla gürbüz kontrolörler tasarlanmış ve tasarlanan kontrolörler C dilinde yazılan programlarla deneysel düzeneğe uygulanmıştır. Tasarlanan kontrolörler için sistemin benzetimi yapılarak elde edilen sonuçlar ile deneysel sonuçlar sunularak kıyaslanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Esnek Yapılar, Sonsuz Boyutlu Sistemler,
Gürbüz Kontrol, Gerçek Zamanlı Sistemler

ABSTRACT

Master of Science Thesis

**ROBUST CONTROLER DESIGN FOR
A SINGLE-LINK EXPERIMENTAL FLEXIBLE ROBOT ARM**

HAKKI ULAŞ ÜNAL

**Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Electrical and Electronics Engineering Program**

**Supervisor: Prof. Altuğ İFTAR
2002, 168 Pages**

In this thesis, a flexible experimental robot arm with one end coupled to a DC servo motor axle and the other end carrying a mass, is modelled and the robust controllers are designed for this arm. The objective of the controllers is to control the position of the arm and to suppress the vibrations due to the movement of the arm in order to improve the system performance. For this objective, the position, the angular speed, and the bending in the middle of the arm are feedback. The controllers are designed using Robust Control design methods. Controller computations and simulations are performed using MATLAB package program and the designed controlles are implemented using C programs. The simulation results and the experimental results are compared.

**Keywords: Flexible Structures, Infinite Dimensional Systems,
Robust Control, Real Time Systems**

TEŞEKKÜR

Asistanı olarak kendisiyle çalışmaktan büyük onur duyduğum hocam Prof. Dr. Altuğ İFTAR'a, beni bu alanda çalışmaya şevk ettiği için ve çalışmalarım sırasında beni yönlendirdiği için kendisine teşekkürü bir borç bilirim. Tezim süresince yardım ve önerilerini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Hitay ÖZBAY'a ve değerli tavsiyelerinden dolayı da sayın Prof. Dr. Hüseyin AKÇAY'a teşekkür ederim.

Ayrıca desteğini hiç bir zaman esirgemeyen kardeşim Hilmi Umut ÜNAL'a ve yardımlarından ötürü Aileme, İsa Küçükyılmaz'a, Kutay Dimitoka'ya, Serhat Aydın'a, sayın Gürol İpek'e ve mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SEMBOLLER DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
1.1 Bugüne Kadar Yapılan Çalışmalar	2
1.2 Bu Tezde Yapılan Çalışmalar	3
2. MATEMATİKSEL TEMELLER	5
2.1 Fonksiyon Uzayları	5
2.2 Hamilton Denklemleri Çözümü	7
2.3 \mathbb{C} ile \mathbb{D} Arasında Uygun Dönüşüm	9
2.4 Operatörler	10
2.5 Sarason Teoremi	14
2.6 Doğrusal Kesirli Dönüşüm	15
3. GÜRBÜZ KONTROL	17
3.1 Geribesleme Ve Sistem Performansı	17
3.2 Gürbüz Kararlılık	21
3.3 Gürbüz Performans	24
4. \mathcal{H}_∞ KONTROL TASARIMI	25
4.1 Skew Toeplitz Yaklaşımı	25
4.1.1 γ_{opt} Değerinin Hesaplanması	28

4.1.2 Optimal Kontrolör	32
4.2 Durum-Uzayı Yaklaşımı	33
5. DENEYSEL DÜZENEGİN MODELLENMESİ	36
5.1 Deneysel Düzenegın Tanıtımı	36
5.2 Esnek Kolun Dinamiğinin Modellenmesi	37
5.3 Bükülmenin Ölçülmesi	46
5.4 Hareketlendirici Motorun ve Servo Yükselticinin Modellenmesi	49
5.5 Tüm Sistemin Durum-Uzay Gösterimi	51
6. DENEYSEL ESNEK ROBOT KOLU İÇİN GÜRBÜZ KONTROLÖR TASARIMI ve DENEYSEL DÜZENEGE UYGULANMASI	57
6.1 Tasarlanan Sonlu Boyutlu Bir Kontrolörün Bilgisayar Ortamında Uygulanması	57
6.2 Skew Toeplitz Operatör Yöntemi ile Gürbüz Kontrolör Tasarımı	59
6.2.1 Kontrolör Tasarımı	59
6.2.2 Tasarlanan Kontrolör için Benzetim Sonuçları	65
6.2.2 Tasarlanan Kontrolör Deneysel Uygulaması ve Sonuçları	74
6.3 Durum-Uzayı Yöntemleri Kullanarak Kontrolör Tasarımı	75
6.3.1 Kontrolör Tasarımı	75
6.3.2 Tek Girdili Tek Çıktılı Durum için Tasarlanan Kontrolörün Benzetim Sonuçları	77
6.3.3 Tek Girdili Tek Çıktılı Durum için Tasarlanan Kontrolörün Deneysel Uygulamaları ve Sonuçları	86
6.3.4 Tek Girdili Çok Çıktılı Durum için Tasarlanan Kontrolörün Benzetim Sonuçları	97
6.3.5 Tek Girdili Çok Çıktılı Durum için Tasarlanan Kontrolörün Deneysel Uygulaması ve Sonuçları	99
7. SONUÇLAR	116
KAYNAKLAR	119
EKLER	122

EK-1 : Esnek kolun n esnek modu için sistemimizin benzetimini yapan program	123
EK-2 : Sistem için ağırlıkları veren program	126
EK-3 : ρ 'nun alt sınır değerini veren program	127
EK-4 : ρ 'nun üst sınır değerini veren program	130
EK-5 : ρ_{opt} değerini bulan program	131
EK-6 : \mathcal{H}_∞ optimal kontrolörü veren program	134
EK-7 : “ Skew Toeplitz” yöntemiyle tasarlanan kontrolörün C programı	140
EK-8 : Durum uzayı yaklaşımı kullanılarak, \mathcal{H}_∞ optimal kontrolörü veren program tek girdili tek çıktılı sistem için.....	147
EK-9 : Durum uzayı yaklaşımı kullanılarak, \mathcal{H}_∞ optimal kontrolörü veren program tek girdili çok çıktılı sistem için	149
EK-10 : Cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile SIMO sistem için tasarlanan kontrolör ile deneysel düzeneği kontrol etmek için yazılan C programı	156

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1 Yerdeğiştirme (Commutant)	11
2.2 Alt (sol) ve Üst (sağ) LFT gösterimleri	16
3.1 Kapalı Döngü Kararlılığı	17
3.2 İç Kararlılık	18
4.1 Standart Problem	33
4.2 \mathcal{H}_∞ Kontrolör Yapısı	35
5.1 Deneysel Esnek Robot Kolunun Görüntüsü	37
5.2 Deneysel Düzenegın Diagramı	38
5.3 Esnek Kolun Geometrisi	39
5.4 Bükülmenin Geometrisi	46
5.5 Bükülme Anında Eğrilik Açısı	47
5.6 Wheatstone Yarım Köprü Bağlantısı	48
5.7 Motor Sisteminin Yapısı	50
5.8 Deneysel Kol İçin Kullanılan Sinyal İşleme Devresi	51
5.9 Sisteme uygulanan I_c akımından sistemin pozisyon çıkıtısına olan frekans yanıtını	54
5.10 Sisteme uygulanan I_c akımından sistemin takometre çıkıtısına olan frekans yanıtını	54
5.11 Sisteme uygulanan I_c akımından sistemin orta noktasındaki bükülmenin frekans yanıtını	55
5.12 Sisteme uygulanan sabit bir I_c akımı sonucu sistemin pozisyon yanıtı	55
5.13 Sisteme uygulanan sabit bir I_c akımı sonucu sistemin takometre yanıtı	56

5.14	Sisteme uygulanan sabit bir I_c akımı sonucu orta noktasındaki bükülmenin yanıtı	56
6.1	Bilgisayar Tabanlı Kontrol Sisteminin Yapısı	58
6.2	Tek blok için hesaplanan optimum $\gamma_{1_{opt}}$ değeri	66
6.3	Optimum Kontrolör K_{opt} 'un frekans tepkisi	67
6.4	Referans açısı 45° için, 3 esnek modlu kolun pozisyonu	67
6.5	Referans açısı 45° için, 3 esnek modlu kolun hızı	68
6.6	Referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı	68
6.7	Referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım	69
6.8	Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu kolun pozisyonu	69
6.9	Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu kolun hızı	70
6.10	Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı	70
6.11	Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım	71
6.12	“ Skew Toeplitz ” yöntemiyle tasarlanan kontrolörün Düşük dereceli formunun frekans tepkisi	71
6.13	Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu (Düşük Dereceli Kontrolör için)	72
6.14	Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı (Düşük Dereceli Kontrolör için)	72
6.15	Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı (Düşük Dereceli Kontrolör için)	73
6.16	Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kola hareket için motora uygulanması gereken akım (Düşük Dereceli Kontrolör için)	73
6.17	Sistem için gürbüz kontrolör tasarım yapısı	76
6.18	Tek girdi tek çıktılı durum için elde edilen K_{alt} kontrolörünün Frekans Tepkisi	79

6.19	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun pozisyonu	79
6.20	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hızı	80
6.21	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı	80
6.22	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım	81
6.23	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu	81
6.24	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı	82
6.25	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı	82
6.26	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım	83
6.27	Tek girdi tek çıktılı durumda elde edilen düşük dereceli K_{att}^d kontrolörünün Frekans Tepkisi	83
6.28	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu (Düşük Dereceli Kontrolör için).....	84
6.29	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı (Düşük Dereceli Kontrolör için)	84
6.30	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı (Düşük Dereceli Kontrolör için)	85
6.31	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım (Düşük Dereceli Kontrolör için)	85
6.32	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun pozisyonu	88
6.33	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun hızı	88

6.34	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı	89
6.35	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor uçlarına uygulanması gereken akım	89
6.36	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için motor sürücü uçlarına uygulanan gerilim	90
6.37	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun pozisyonu (Düşük Dereceli Kontrolör için)	90
6.38	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun hızı (Düşük Dereceli Kontrolör için)	91
6.39	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı (Düşük Dereceli Kontrolör için)	91
6.40	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor uçlarına uygulanması gereken akım (Düşük Dereceli Kontrolör için)	92
6.41	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor sürücü uçlarına uygulanan gerilim (Düşük Dereceli Kontrolör için)	92
6.42	Tek girdili tek çıktılı sistem için tasarlanan kontrolör sonucu elde edilen, benzetim sonucu ile deneysel sonucun 45° için karşılaştırılması	93
6.43	Tek girdili tek çıktılı sistem için tasarlanan kontrolör sonucu elde edilen, benzetim sonucu ile deneysel sonucun 45° için karşılaştırılması	94
6.44	3. Esnek kolun, Referans açısı 45° için Pozisyon Durumu	95
6.45	3. Esnek kol için, Referans açısı 45°'de Motor Sürücüye Uygulanan Gerilim	95
6.46	2. Esnek kolun, Referans açısı 45° için Pozisyon Durumu	96
6.47	2. Esnek kol için, Referans açısı 45°'de Motor Sürücüye Uygulanan Gerilim	96
6.48	Tek girdili tek çıktılı sistem için tasarlanan kontrolörün Tablo 6.1' deki her kola uygulanması sonucu elde edilen sonuçlar	97

6.49	Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu K_{alt_1} kontrolöründeki K_1 kontrolörünün Frekans Yanıtı	100
6.50	Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu K_{alt_1} kontrolöründeki K_2 kontrolörünün Frekans Yanıtı	100
6.51	Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu K_{alt_1} kontrolöründeki K_3 kontrolörünün Frekans Yanıtı	101
6.52	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun pozisyonu	101
6.53	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hızı	102
6.54	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı	102
6.55	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım	103
6.56	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu	103
6.57	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı	104
6.58	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı	104
6.59	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım	105
6.60	Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu 20. dereceden K_{alt_1} kontrolöründeki K_1 kontrolörünün Frekans Yanıtı	105
6.61	Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu 20. dereceden K_{alt_1} kontrolöründeki K_2 kontrolörünün Frekans Yanıtı	106
6.62	Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu 20. dereceden K_{alt_1} kontrolöründeki K_3 kontrolörünün Frekans Yanıtı	106
6.63	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun pozisyonu (Düşük Dereceli Kontrolör)	107

6.64	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hızı (20. Dereceden Kontrolör için).....	107
6.65	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı (20. Dereceden Kontrolör için)	108
6.66	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım (20. Dereceden Kontrolör için)	108
6.67	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu (20. Dereceden Kontrolör için)	110
6.68	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı (20. Dereceden Kontrolör için).....	110
6.69	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı (20. Dereceden Kontrolör için)	111
6.70	Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım (20. Dereceden Kontrolör için)	111
6.71	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun pozisyonu.	112
6.72	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun hızı.	112
6.73	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı.	113
6.74	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor uçlarına uygulanması gereken akım.	113
6.75	Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor sürücü uçlarına uygulanan gerilim.	114
6.76	Tek girdili tek çıktılı sistem için tasarlanan kontrolör sonucu elde edilen benzetim sonucu ile deneysel sonucun 45° için karşılaştırılması	114
6.77	Tek girdili çok çıktılı sistem için tasarlanan kontrolörlerin ve düşük derecelerinin tekil değerleri	115

ÇİZELGELER DİZİNİ

6.1 Özellikleri sıralanan 3 farklı esnek levha	93
--	----

SEMBOLLER DİZİNİ

- \mathbb{R} : Gerçek sayılar Düzlemi.
 \mathbb{R}_+ : Negatif olmayan gerçek sayılar, $\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} = [0, \infty)$.
 \mathbb{C} : Kompleks sayılar Düzlemi.
 $\mathcal{R}e(s)$: s kompleks sayısının gerçek kısmı.
 \mathbb{C}_+ : \mathbb{C} 'de Açık Sağ Yarı Düzlem, $\{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(s) > 0\}$.
 j : Sanal birim.
 $j\mathbb{R}$: Sanal eksen. $\{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(s) = 0\}$.
 $j\mathcal{R}_e$: Genişletilmiş sanal eksen. $\{j\mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$.
 \mathbb{D} : Açık birim disk, $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
 $\bar{\mathbb{D}}$: Kapalı birim disk, $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
 \mathbb{T} : Birim Çember , $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$.
 $\bar{\alpha}$: α elemanının kompleks konjugesi, $\alpha \in \mathbb{C}$.
 $ess \sup$: Lebesgue ölçüsüne göre temel supremum.
 S^\perp : S uzayının diki.
 A^* : A matrisinin kompleks konjugesinin transpozu, eğer A bir operatör ise A^* , A operatörünün eşleği (adjoint) olur.
 $\mathbb{C}^{n \times m}$: Kompleks değerli $n \times m$ boyutlu matrislerin oluşturduğu uzay.
 $\mathbb{R}^{n \times m}$: Gerçek değerli $n \times m$ boyutlu matrislerin oluşturduğu uzay.
 $\|\cdot\|$: $\mathbb{C}^{n \times m}$ uzayında tanımlı endüklenmiş 2-normu. En büyük tekil değer.
 $\|\cdot\|_2$: \mathcal{L}_2 Lebesgue uzayında tanımlı norm.
 $\|\cdot\|_\infty$: \mathcal{L}_∞ Lebesgue uzayında tanımlı norm.

- $\sigma(A)$: A matrisinin spektrumu.
 $\bar{\sigma}(A)$: A matrisinin en büyük tekil değeri.
 $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$: Zaman bölgesindeki Lebesgue uzayı.
 $\underline{\sigma}(A)$: A matrisinin en küçük tekil değeri.
 $Im(A)$: A matrisinin görüntü uzayı.
 $ker(A)$: A matrisinin boşluk uzayı.
 A^T : A matrisinin transpozu.
 $I_{n \times n}$: $n \times n$ birim matris
 $\|A\|_e$: A matrisinin temel normu.
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$: İç Çarpım.
 ℓ^2 : Tamsayılar kümesinde kareleri toplanabilen gerçek değerli diziler kümesi.
 ℓ^2_+ : Pozitif tamsayılar kümesinde kareleri toplanabilen gerçek değerli diziler kümesi.
 $L(K_1, K_2)$: K_1 operatöründen K_2 operatörüne tüm doğrusal dönüşümler kümesi.
 $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$: Zaman bölgesindeki Lebesgue uzayı.
 $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$: $j\mathbb{R}$ kümesinde karesinin integrali alınabilen fonksiyonlardan oluşan Lebesgue uzayı.
 $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$: $j\mathbb{R}$ kümesinde karesinin integrali alınan fonksiyonlardan oluşan Lebesgue uzayı.
 $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$: \mathbb{C}_+ kümesinde sınırlı ve analitik olan $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$ fonksiyonlarının Hardy uzayı.
 $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+)$: \mathbb{C}_+ kümesinde sınırlı ve analitik olan $\mathcal{L}^2(j\mathbb{R})$ fonksiyonlarının Hardy uzayı.
 $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$: \mathbb{D} kümesinde sınırlı ve analitik olan $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{T})$ fonksiyonlarının Hardy uzayı.
 $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$: \mathbb{D} kümesinde sınırlı ve analitik olan $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ fonksiyonlarının Hardy uzayı.
 $\mathcal{RH}_\infty(\mathbb{C}_+)$: $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ kümesinin gerçek rasyonel düzgün fonksiyonlardan oluşan altuzayı.

- $\mathbf{I}_{\mathcal{K}}$: \mathcal{K} uzayında tanımlı birim operatör.
 \mathbf{P}_- : \mathcal{L}^2 uzayından \mathcal{H}^2 uzayına dik dönüşüm operatörü.
 \mathbf{P}_+ := $\mathbf{I} - \mathbf{P}_-$.
 $\mathbf{P}_{\mathcal{H}}$: \mathcal{L}^2 uzayının altuzayı \mathcal{H} üzerine dik dönüşümü (\mathbb{T} veya $j\mathbb{R}$ üzerinde olabilir).
 $\mathbf{V}_{i=0}^n \mathcal{F}_i$: \mathcal{F} uzayının doğrusal bileşkelerinin gerdiği kapalı uzayı.
 $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$: $C(sI - A)^{-1}B + D$ transfer fonksiyonun durum-uzayı gösterimi.

1. GİRİŞ

Genelde robot uygulamalarındaki robot kolları, katı parçalardan oluşturularak imal edilir. Kolların yük taşıırken yükden dolayı esnememesi için, kollar ağır malzemelerden yapılır; dolayısıyla böyle ağır bir yapının kontrolü için de daha büyük hareketlendiriciler (actuator) kullanılır ki bu sistemin ağırlığını, maliyetini, enerji tüketimini oldukça artırır ve aynı zamanda hızını azaltır. Dolayısıyla, robot kolları bazen enerji tüketimi bazen de hız açısından bakıldığında bazı işleri yapmakta verimli olmamaktadırlar. Robot kollarının bu durumdan kaynaklanan verimsizliğini ortadan kaldırmak için kolların ağırlığı azaltılır veya bu ağırlıkların hareketini sağlayan kolların hızları artırılır. Kollarının ağırlıklarının azaltımı, sistem dinamiklerini daha da karmaşık hale getirir. Özellikle enerji tüketiminin sınırlı olduğu uzay uygulamalarında ve endüstriyel uygulamalarda, daha hafif yapılardan yapılan robot kollarına olan ilginin artması bu sebepten kaynaklanmaktadır.

Yüksek hız ve performansda ağır taleplere cevap verebilmek için endüstriyel alanlarda hafif malzemelerden yapılan manipülatörlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Ayrıca, yüksek performans gereksinimlerinin karşılanması için, yani yüksek hızda çalışma, pozisyon doğruluğunun sağlanması, az enerji tüketimi, hafif ağırlık, ve düşük ataletde güvenilirlik için esnek robot kollarının kullanılması tavsiye edilir [1].

Genel olarak esnek yapılar, fiziksel değişkenlerin birer fonksiyonu olan katılık ve kütle parametreleri ile ifade edilirler. Dolayısıyla bu tür yapılar, dağılmış (distributed)-parametre sistemleridir [2]. Bunların durum-uzay gösterimleri ise sonsuz sayıda durum değişkenine sahiptir. Esnek yapının dinamiği kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edildiği için, kısmi diferansiyel denklemleri, esnek yapının uzunluğu boyunca, sınır koşulu denklemleri de esnek yapının uzunluğunu oluşturan bu kümenin sınırlarında sağlanmalıdır. Esnek yapının tepkisi modal analiz ile elde edilir ki bu analiz özdeğer probleminin çözümü ile sağlanır. Dağılmış-parametre sistemler için bu özdeğer problemi, sonsuz sayıda özdeğer ve bunlara karşılık gelen özvektörlerden oluşan bir diferansiyel özdeğer problemidir.

Herhangi bir robot kolu, ucunda bir yük taşıdığı zaman, bu kolu katı bir kol gibi düşünemeyiz. Bu tür durumlarda kolun esnekliğini göz önüne almak gerekir ve kolu dağılmış-parametre sistemi gibi düşünmeliyiz. Çünkü kolun pozisyon kontrolünü yaparken esnemedi kaynaklanacak kolun esnek modlarını da hesaba katmak gerekir. Bu sebepten esnek bir kolun pozisyon kontrolü katı bir kola göre daha zordur. Dolayısıyla kolun pozisyon kontro-

lünde kolun katı modları kontrol edilmeli ve aynı zamanda koldaki esneme de bir yandan sönümlenmelidir.

1.1. Bugüne Kadar Yapılan Çalışmalar

Esnek yapıların sağladıkları avantajlardan dolayı esnek yapılara, esnek robot kollarına ve büyük esnek uzay yapılarına (Large Flexible Space Structures) ilgi artmış ve bu yapıların modellenmesi ve kontrolü üzerine bir çok çalışma yapılmıştır.

Euler-Bernoulli modelini kullanarak ve bazı kabullenmeler yaparak, Cannon ve Schmitz [3], tek eklemlili bir esnek robot kolunu matematiksel olarak modellemişler, ayrıca sistemin modlarını da deneysel yoldan bulmuşlardır. Hızlı bir şekilde uç noktası tepkisi alan ve iyi bir gürültü azaltımını sağlamayı başaran bir LQG (Linear Quadratic Gaussian) kontrol algoritması tasarlamışlar ve bunu deneysel olarak esnek kola uygulamışlardır.

Fukushima, Matsuno, ve Sakawa [4], tek eklemlili bir esnek robot kolunun, Euler-Bernoulli modelini kullanarak modellemesini yapmışlardır. Deneysel düzeneklerinden geribeslemeler alarak, pozisyonun takibini ve kolda oluşan titreşimin kısa sürede sönümlenmesini sağlayacak bir geribeslemeli kontrolör tasarlamışlar ve bu kontrolörü deneysel sistemlerine uygulamışlardır.

Hsu, ve arkadaşları [1], tek eklemlili bir esnek robot kolu için, pozisyon ve esnek kolun sapma eğimini ölçüp geri besleyerek deneysel olarak kolun pozisyonunu kontrol etmeye çalışmışlardır.

Lenz ve Özbay [5], ve Lenz ve arkadaşları [6], farklı yapılarda bulunan tek eklemlili esnek kolları, kökleri bilinen fonksiyonların sonsuz çarpımları şeklinde modellemiş ve bu dağılmış-parametre sistemleri için, "Skew Toeplitz" yöntemini kullanarak, ağırlıklı karma hassasiyet problemi için optimal bir \mathcal{H}_∞ kontrolör tasarlamışlardır.

Luo [7], esnek yapının kontrolü üzerine bundan önce yapılan çalışmalardan farklı olarak, direk gerilme geribesleme kontrol tekniği kullanarak esnek yapının salınımını kontrol edecek bir kontrolör tasarlamış ve bunu deneysel olarak uygulamıştır.

Sutton ve arkadaşları [8],[9], tek eklemlili bir esnek robot kolunun yatay ve dikeydeki hareketini incelemek istemiş, dolayısıyla kolun modellenmesinde yerçekimi etkisini de hesaba katarak bir modelleme gerçekleştirmişlerdir. Yapıtları bu modeli ağırlıklı karma hassasiyet \mathcal{H}_∞ kontrolör tasarımında kullanılarak gürbüz bir kontrolör elde etmişlerdir. Elde ettikleri bu kontrolörü deneysel olarak uygulamışlar ve klasik kontrolörlerden daha iyi sonuç verdiğini görmüşlerdir.

Doğan [10], birincisi katı ikincisi esnek iki eklemlili bir robot kolunun, PD kontrolör ve tekil pertürbasyon metodunu kullanarak, kolun eklem açılarını kontrol edecek ve esnek yapının salınımlarını sönümleyecek bir kontrolör tasarlamıştır.

Özel [11], tek eklemlili ve birincisi katı ikincisi esnek iki eklemlili robot kollarının modellenmesini ve kontrolör tasarımını gerçekleştirmiştir. Özel, kolların eklem açılarının istenilen açıları takip etmesini ve uç sapmasının kısa sürede sönümlemesini sağlayacak PD kontrolör tasarlamıştır.

Ünal [12], esnek bir robot kolu düzeneği hazırlamış ve deneysel olarak esnek yapının pozisyonunu kontrol etmiştir.

Küçükylmaz [13] ise, tek ve çift eklemlili farklı esnek robot kolları için deneysel olarak PID ve doğrusal olmayan PID kontrolörler tasarlamış ve kolların pozisyon ve titreşimini kontrol etmeye çalışmıştır.

1.2. Bu Tezde Yapılan Çalışmalar

Dağılımş-parametre sistemleri olarak ifade edildiğini söylediğimiz esnek yapıların sonsuz boyutlu olması bu tür yapıların kontrol edilmesini zor kılmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemler ile dinamiği modellenen bu sonsuz boyutlu yapıların kontrol edilebilmesi için tasarlanan genel \mathcal{H}_∞ optimal kontrolörlerin boyutu da sonsuz boyutlu olmalıdır. Fiziksel olarak sonsuz boyutlu bir kontrolörün gerçekleşmesi mümkün değildir. Bu sebepten bazı yaklaşımlar kullanılarak, tasarlanan kontrolör sonlu boyuta yaklaştırılır veya sonsuz boyutlu esnek yapı sonlu bir boyuta yaklaştırılarak, bu sonlu boyutlu sistem için sonlu boyutlu bir kontrolör tasarlanır.

Bu tez çalışmasında, ilk önce, sonsuz boyutlu sistemler için gürbüz kontrolör tasarım yöntemlerinden olan “Skew Toeplitz” yöntemi [14] ile sonsuz boyutlu sistemimiz için, kontrolör tasarımı yapılmaya çalışılmıştır. Sistemimiz sonsuz boyutlu olduğu için rasyonel olmayan bir transfer fonksiyonuna sahiptir. Sonsuz boyutlu bir kontrolör için, bu rasyonel olmayan transfer fonksiyonunun iç-dış ayrıştırmasını yapmak gerekmektedir. Fakat rasyonel olmayan transfer fonksiyonumuzun iç ve dış faktörlerini sonsuz boyutlu çarpımlar şeklinde yazamadığımızdan, sistemimiz sonlu boyuta yaklaştırılmıştır. Bu durumda elde ettiğimiz bu sonlu boyut için bir iç-dış ayrıştırması yaparak, elde ettiğimiz iç dış faktörleri ve seçilen uygun ağırlıkları kullanarak karma hasasiyet problemini çözen sonlu boyutlu optimal bir kontrolör bulunmuştur.

Diğer bir kullandığımız yöntem ise, durum-uzay yöntemlerini kullanarak cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile bir kontrolör tasarımıdır. Bu yaklaşım sonlu boyutlu sistemler için olduğundan, sonsuz boyutlu sistemimiz sonlu

bir boyuta yaklaştırılmıştır. Bu yeni sonlu boyutlu sistem için uygun ağırlıklar seçilerek bir altoptimal kontrolör tasarlanmıştır. Bu yöntem kullanılırken diğer yöntemin aksine tek çıktılı bir geribesleme değil daha fazla çıktılı bir geribesleme döngüsü kullanılmıştır. Bu sebepten sistemin performansını inceleyen diğer geribeslemelerin sistem performansını ne kadar etkilediği görülebilmektedir.

Her iki farklı yöntem ile elde edilen kontrolörün deneysel sonuçlarını incelemek için, bir ucu DC servo motor tarafından döndürülen diğer ucunda ise bir yük bulunan esnek bir levha, bu esnek levha ve motor üzerinde bulunan algılayıcılar ile bir deneysel düzenek kurulmuştur. Kontrolörün deneysel düzeneğe uygulanabilmesi için bir bilgisayarın PCI slotuna yerleştirilmiş bir veri toplama kartı (Data Acquisition Card) sayesinde algılayıcılardan gelen bilgiler bilgisayara aktarılıp, yazılan uygun C programları ile DC motoru sürececek olan DC servo yükselticiye uygun gerilimler veri toplama kartı tarafından gönderilmiştir. Elde edilen deneysel sonuçlar ile olması beklenen benzetim sonuçları birbiriyle kıyaslanmıştır.

Her iki gürbüz kontrol tasarımında farklı yöntemler kullanılmaktadır. İlk yöntemde operatör teorisine, ikinci çözüm yönteminde ise durum-uzay teorisine ihtiyacımız olacaktır. Bu iki farklı kontrolör tasarım yönteminin anlaşılabilmesi için gerekli temel teoremler 2. bölümde verilmektedir. 3. bölümde ise, gürbüz analiz üzerinde duracağız; gürbüzlük, gürbüz kararlılık ve gürbüz performans. 2. bölümde ve 3. bölümde verilen teoremler altında, 4. bölümde, "Skew Toeplitz" ve Durum-uzay yöntemleri ile iki farklı \mathcal{H}_∞ kontrolör tasarımının nasıl yapıldığına yer vereceğiz. Deneysel düzenegimizin yapısı ile bu düzenegin dinamiğinin modellenmesi 5. bölümdedir. 6. bölümde, buraya kadar elde ettiğimiz kontrolör tasarım yöntemlerini kullanarak 5. bölümde modellemesini yaptığımız tek eklemlili esnek bir robot kolu için kontrolör tasarlayacağız. Ayrıca tasarladığımız kontrolörlerin frekans yanıtlarını, sisteme uygulandığı zaman ki benzetim sonuçlarını ve deneysel sonuçları ve farklı deneysel kollara uygulanması sonuçlarını inceleyip, benzetim ile deneysel sonuçlar arasındaki ilişkileri tartışacağız.

Son bölümde ise, tasarladığımız farklı kontrolörler hakkında elde ettiğimiz sonuçları kıyaslayıp, kontrolörler üzerinde yorum yapacağız.

2. MATEMATİKSEL TEMELLER

2.1. Fonksiyon Uzayları

Bu bölümde \mathcal{H}_∞ kontrol probleminin çözümünde karşılaşılabilecek olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Kompleks sayılar alanı üzerinde tanımlanmış \mathbf{X} vektör uzayında $\forall x, y \in \mathbf{X}$ için;

- i) $\|x\| \geq 0$
- ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- iii) $\|cx\| = |c| \|x\|, c \in \mathbb{C}$
- iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

koşullarını sağlayan ve gerçek değerler alan $\|\cdot\|: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dönüşümüne **norm** denir. Üzerinde bir norm tanımlanmış olan herhangi bir \mathbf{X} doğrusal uzayına da **normlu uzay** denir.

\mathbf{X} normlu uzayında herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi için $n, m \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir. \mathbf{X} normlu uzayında eğer tüm Cauchy dizileri yakınsak ise, \mathbf{X} normlu uzayına da tam uzay denir. Normlu tam uzaylar **Banach Uzayı** olarak adlandırılır [15].

\mathbf{V}, \mathbb{C} üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Bir

$$\varphi: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$$

fonksiyoneli, her $v, y, z, \in \mathbf{V}$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

- i) $\langle v, v \rangle \geq 0$ ve $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- ii) $\langle v, y \rangle = \overline{\langle y, v \rangle}$
- iii) $\langle \alpha v, y \rangle = \alpha \langle v, y \rangle$
- iv) $\langle v + y, z \rangle = \langle v, z \rangle + \langle y, z \rangle$

koşullarını sağlıyorsa, bu $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyoneline bir iç çarpım ve $\{\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ikilisine de bir **iç çarpım uzayı** denir. \mathbf{V} iç çarpım uzayında, eğer $\langle v, y \rangle = 0$ ise, bu iki vektör v, y birbirine diktir. \mathbf{V} iç çarpım uzayı

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre tam ise \mathbf{V} uzayına **Hilbert Uzayı** denir [15].

$\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ uzayı zaman bölgesinde sınırlı enerjili sinyallerden veya sinyal vektörlerinden oluşan uzaydır. Zaman bölgesindeki $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ uzayını $t > 0$ için tanımlı $t < 0$ için sıfır olacak şekilde $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ ve $t < 0$ için tanımlı $t > 0$ için sıfır olacak şekilde $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ olan iki uzaya ayrıştırabiliriz. Bu uzay, üzerinde

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* y(t) dt \quad (1)$$

biçiminde bir iç çarpım tanımlanmış olan bir Hilbert uzayıdır ve bu uzayda norm

$$\|x\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

formunda tanımlanmış olup, toplam enerjinin kareköküne eşittir.

$\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$ uzayı ise, benzer şekilde (1) ifadesinde tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır, ve buradaki fonksiyonlar ise zaman bölgesindekilerin Fourier dönüşümüdür. Bu durumda Parseval teoremi ile bu iki uzaydaki aynı fonksiyonların normlarının birbirine eşitliğinden söz edebiliriz.

Gürbüz kontrol tasarımı problemlerinde, Hardy uzayları vazgeçilmez bir öneme sahip uzaylardır. Bu uzaylardan \mathcal{H}_2 Hardy uzayı s kompleks değişkenli, \mathbb{C}_+ sağ yarı düzleminde veya z kompleks değişkenli, \mathbb{D} birim diskin içerisinde analitik ve sınırlı kompleks değerli fonksiyonlar kümesinden oluşan uzaydır. s kompleks değişkenli Hardy uzayında bir $f(s) \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+)$ için 2 normu aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$\|f(s)\|_2 : = \left[\sup_{\xi > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi + j\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

Benzer şekilde z kompleks değişkenli Hardy uzayında bir $g(z) \in \mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ için 2 normu da şu şekilde hesaplanır;

$$\|g(z)\|_2 : = \left[\sup_{r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{j\theta})|^2 d\theta \right]^{\frac{1}{2}}$$

\mathcal{H}_2 uzayından \mathcal{L}_2 uzayına doğrusal ve norm korunumlu bir dönüşüm vardır. Dolayısıyla, frekans bölgesinde tanımlanan \mathcal{L}_2 uzayı, \mathcal{H}_2 ve \mathcal{H}_2^\perp uzaylarına ayrıştırılabilir. \mathcal{H}_2 , $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ uzayındaki sinyallerin, \mathcal{H}_2^\perp ise $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ uzayındaki sinyallerin Fourier dönüşümüdür. \mathbb{C}_+ düzlemindeki \mathcal{H}_2 ve \mathcal{L}_2 uzayları arasındaki ilişki benzer şekilde \mathbb{D} düzleminde de geçerlidir. Fakat bu düzlemde $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ uzayının yerini ℓ^2_+ , sağdan kareleri toplanabilen diziler, ve $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ uzayının yerini ise ℓ^2_- , soldan kareleri toplanabilen diziler alır.

$\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$, sanal eksen üzerinde temel (essential) sınırlı ve norm tanımı

$$\|P\|_{\mathcal{L}_\infty} : = \text{ess sup}_w \|P(j\omega)\|. \quad (2)$$

olan fonksiyonlardan oluşan Lebesgue uzaydır. Bu uzaylarda norm tanımı (2) formunda tanımlandığı için bu uzaylar Banach uzayıdır [16].

Bir başka Hardy uzayı ise, \mathcal{H}_∞ uzayıdır. Bu uzayda s kompleks değişkenli, \mathbb{C}_+ sağ yarı düzleminde veya z kompleks değişkenli, \mathbb{D} birim diskin içerisinde analitik ve sonsuz normu sınırlı kompleks değerli fonksiyonlar kümesinden oluşan bir uzaydır. s kompleks değişkenli Hardy uzayında bir $f(s) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ için ise ∞ normu aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$\|f(s)\|_\infty : = \sup_{s \in \mathbb{C}_+} |f(s)|.$$

Benzer şekilde z kompleks değişkenli Hardy uzayında bir $g(z) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ için de ∞ normu şu şekilde hesaplanır;

$$\|f(z)\|_\infty : = \sup_{|z|<1} |f(z)|.$$

\mathcal{H}_2 uzayından \mathcal{L}_2 uzayına olan dönüşüm benzer biçimde \mathcal{H}_∞ uzayından \mathcal{L}_∞ uzayına da geçerlidir. Bu durumda \mathcal{H}_∞ uzayı \mathcal{L}_∞ uzayının bir alt kümesidir.

Sabit bir A matrisinin sonsuz normunun hesaplanmasında, A matrisinin sonsuz normu, A matrisinin en büyük tekil değerine eşittir, yani A^*A Hermitian matrisinin en büyük özdeğerinin kareköküne eşittir,

$$\|A\|_\infty : = \bar{\sigma}(A)$$

Herhangi bir $n \times n$ kare matris $U \in \mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$,

$$U^*U = UU^* = I_{n \times n}$$

özelliğine sahip ise, bu matris birimsel (unitary) olarak adlandırılır. Birimsel matrisler normu korur, yani, eğer U bir $n \times n$ birimsel bir matris ise ;

$$\|UL\|_\infty = \|U^*L\|_\infty = \|L\|_\infty$$

tüm $L \in \mathcal{L}_\infty$ için. Benzer biçimde

$$\|UL\|_2 = \|U^*L\|_2 = \|L\|_2$$

tüm $L \in \mathcal{L}_2$ için de yazılır.

2.2. Hamilton Denklemleri Çözümü

$G(s)$ transfer matrisinin şu şekilde olduğunu kabul edelim,

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sI - A)^{-1}B + D$$

ve A matrisi kararlı olsun. $G(s)$ transfer matrisinin, $\|G\|_\infty$ değerini daha önceki tanımlamalarla hesaplayabiliriz,

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma} [G(j\omega)].$$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kare bir matris olsun ve $\alpha(s)$, A matrisinin karakteristik polinomu olarak tanımlansın. Bu durumda, $\alpha(s)$ fonksiyonunun ayrıştırmasını şu şekilde yazabiliriz, $\alpha(s) = \alpha_-(s)\alpha_+(s)$, öyle ki $\alpha_-(s)$ fonksiyonunun tüm kökleri sol yarı düzlemde, $\alpha_+(s)$ fonksiyonunun ise tüm kökleri sağ yarı düzlemde olmak üzere. Bu durumda A matrisine göre \mathbb{C}^n üzerindeki modal altuzaylar;

$$X_-(A) = \ker \alpha_-(A)$$

$$X_+(A) = \ker \alpha_+(A)$$

şeklindedir, ve bu iki altuzay birbirinin tamamlayıcıdır. Aslında $X_-(A)$, A matrisinin sol yarı düzlemdeki özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin gerdiği uzay, $X_+(A)$ ise A matrisinin sağ yarı düzleminde bulunan özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin gerdiği uzaydır.

Modal altuzayların tabanları basit cebirsel işlemler ile elde edilebilir. A matrisini, özdeğerlerinin gerçek kısmı artacak şekilde sıralayarak Schur formunda,

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

şeklinde yazalım, öyle ki A_1 tüm özdeğerleri sol yarı düzlemde olan ve A_4 ise tüm özdeğerleri sağ yarı düzlemde olan birer matris olsun. T matrisi ise bir ortogonal dönüşüm matrisi olsun, öyle ki $T^T A T$, (3) ifadesine eşit olsun. T matrisini,

$$T := [T_1 \ T_2] \quad (4)$$

şeklinde boyutları uygun olacak şekilde ayırırsak, bu durumda modal altuzaylardan $X_-(A) = \text{Im } T_1$ olur [16].

$$H := \begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A^T \end{bmatrix}$$

formunda olan, ve A , Q ve R , $n \times n$ matrisler, Q ve R simetrik, ve R pozitif veya negatif yarı tanımlı ise bu matrise Hamilton matrisi denir. Hamilton matrisinin sanal eksen üzerinde kutbu olmadığını ve spektrumunun da sanal eksene göre simetrik olduğunu kabul ediyoruz. Dolayısıyla Hamilton matrisinin n tane özdeğeri sol yarı düzlemde geri kalan n özdeğeri ise sağ yarı düzlemde. Bu durumda Hamilton matrisinin iki tane n boyutlu modal altuzayını $X_-(H)$ ve $X_+(H)$, $X_-(H)$ sol yarı düzlemdeki özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerden oluşan değişmez altuzay ve, $X_+(H)$ ise sağ yarı düzlemdeki özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerden oluşan değişmez altuzay olarak ifade edebiliriz. $X_-(H)$ için bir taban bulmak istersek, taban vektörlerini bir matris şeklinde yazar ve ayırırsak, bunu şu şekilde yazabiliriz,

$$X_-(H) = \text{Im} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

öyle ki, $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Eğer X_1 tekil değilse veya

$$X_-(H), \quad \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (6)$$

altuzayları birbirinin tamlayanı ise, $X := X_2 X_1^{-1}$ diyebiliriz. Bu durumda X sadece doğrudan H matrisinden belirlenmektedir, yani $H \rightarrow X$ olan bir fonksiyon vardır, bu fonksiyonu Ric olarak isimlendirirsek, yani $X = \text{Ric}(H)$, bu fonksiyonun tanım kümesini de $\text{dom}(\text{Ric})$ olarak gösterebiliriz; yani $\text{dom}(\text{Ric})$ Hamilton matrisinin iki özelliği olduğunu, birincisi H matrisinin sanal eksen

üzerinde kutbu olmadığını, diğeri ise (6)'da tanımlanan iki altuzayın birbirinin dike olduğunu anlatır [16].

Dolayısıyla Hamilton matrisinin özdeğerlerinin yarısı sol yarı düzlemde geri kalanı ise sağ yarı düzlemdedir.

Teorem 2.1 [15]: *Hamilton matrisinin sanal ekseninde özdeğeri yoksa ve A, R kararlaştırılabiliriyorsa, bu durumda $X_-(H)$ ve $Im \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ birbirinin tamlayanıdır.*

Yukarıdaki ifadelerden ve [15]'dan yararlanarak aşağıdaki savları yazabiliriz,

Sav 2.1 [16]: $H \in dom(Ric)$ ve $X = Ric(H)$ olsun. Bu durumda,

- X simetriktir,
- X aşağıdaki cebirsel Riccati denklemini sağlar,

$$A^T X + X A + X R X - Q = 0$$
- $A + R X$ kararlıdır.

Sav 2.2 [15]: H matrisinin sanal eksen üzerinde hiçbir özdeğeri olmasın. Bu durumda R matrisi ya pozitif yarı tanımlıdır veya negatif yarı tanımlıdır, ve (A, R) kararlaştırılabilir. Bu durumda $H \in dom(Ric)$ diyebiliriz.

$R=0$ için Hamilton matrisinin çözümü Lyapunov problemi $A^T X + X A + Q = 0$ haline gelir.

Sav 2.3 [15]: $\gamma > 0$ olsun, ve $G(s)$ transfer matrisinin gerçekleşmesi ise şu şekilde olsun, $G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ve Hamilton matrisi ise şu şekilde yazılsın,

$$H := \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}B^* \\ -C^*(I + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C)^* \end{bmatrix}$$

öyle ki $R := \gamma^2 I - D^*D$. Bu durumda aşağıdaki koşullar birbirine eşittir,

- $\|G\|_\infty < \gamma$.
- $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ ve H matrisinin sanal eksen üzerinde özdeğeri yok.
- $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ ve $H \in dom(Ric)$.
- $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ ve $H \in dom(Ric)$ ve $Ric(H) \geq 0$ ($Ric(H) > 0$ eğer (C, A) gözlenebilirse).

2.3. \mathbb{C}_+ ile \mathbb{D} Arasında Uygun Dönüşüm

Sistem transfer fonksiyonları Laplace dönüşüm değişkeni $s \in \mathbb{C}_+$ (sürekli zaman sistemleri) cinsinden veya Z dönüşümü değişkeni $z \in \mathbb{D}$ (kesikli zaman sistemleri) cinsinden ifade edilirler. \mathcal{H}_∞ kontrol problemi çözümü birim disk üzerinde tanımlanan fonksiyonlar (z -düzlemi) kullanılarak da çözülebilir. Bu tür fonksiyonları veya sürekli zamanda bir problemi, kesikli zamanda bir fonksiyona veya bir probleme, \mathbb{C}_+ ile \mathbb{D} arasında bir uygun (conformal) dönüşüm

yaparak gerçekleştirebiliriz. Bu durumda hem fonksiyonun hem de problemin tüm önemli özellikleri korunmuş olur. \mathcal{H}_∞ kontrol tasarım probleminin çözümünde operatör metodunu kullanacağımız zaman aşağıdaki dönüşümü kullanacağız,

$$z = \frac{s-a}{s+a}, \quad s = a \frac{1+z}{1-z}, \quad a > 0$$

$s \in \mathbb{C}_+$ ve $z \in \mathbb{D}$. Bu uygun dönüşüm sağ yarı düzlemdeki her ayrı noktayı birim diskin içinde ayrı bir noktaya taşır.

2.4. Operatörler

\mathcal{H}_∞ kontrol probleminin çözümü için geliştirilen çözüm tekniklerinden "Skew Toeplitz" yöntemini anlamak için operatörler ile ilgili bazı temel tanımlara ihtiyacımız olacak.

Hilbert uzayları kompleks ve ayrılabilen (seperable) uzaylardır. \mathcal{H} ve $\hat{\mathcal{H}}$ ayrılabilen iki Hilbert uzayı olsun. \mathcal{H} ve $\hat{\mathcal{H}}$ arasında tanımlı bir \mathcal{P} operatörü demek; \mathcal{H} Hilbert uzayından $\hat{\mathcal{H}}$ Hilbert uzayının içine sürekli doğrusal bir dönüşüm demektir.

\mathcal{H} Hilbert uzayından $\hat{\mathcal{H}}$ Hilbert uzayına tüm doğrusal operatörler kümesini $L(\mathcal{H}, \hat{\mathcal{H}})$ olarak göstereceğiz. \mathcal{H} Hilbert uzayından kendi içine olan doğrusal operatörler kümesini ise $L(\mathcal{H})$ olarak gösterebiliriz.

Eğer \mathcal{H} Hilbert uzayından $\hat{\mathcal{H}}$ Hilbert uzayına sınırlı bir \mathcal{P} operatörü var ise bu operatörün eşleği (adjoint) \mathcal{P}^* ise $\hat{\mathcal{H}}$ Hilbert uzayından \mathcal{H} Hilbert uzayına sınırlı bir operatördür ve,

$$\langle \mathcal{P}h, \hat{h} \rangle = \langle h, \mathcal{P}^*\hat{h} \rangle \quad (\hat{h} \in \hat{\mathcal{H}}, h \in \mathcal{H})$$

ilişkisiyle tanımlanır ve bu operatörün normu aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\|\mathcal{P}\| = \max\{\|\mathcal{P}\|_e, \bar{\sigma}(\mathcal{P})\}.$$

$\|\mathcal{P}\|_e$, \mathcal{P} operatörünün temel normunu göstermektedir [14].

Bir $\mathcal{F} \in L(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ operatörü olsun, ve \mathcal{D} uzayı \mathcal{G} uzayının bir altuzayı olarak, $\mathcal{D} := \{f \in \mathcal{G}, \mathcal{F}f \in \mathcal{K}\}$ biçiminde tanımlansın. Eğer bir \mathcal{H} Hilbert uzayı, \mathcal{D} uzayının bir altuzayı ise, $\mathcal{F}|_{\mathcal{H}} \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operatörüne, \mathcal{F} operatörünün \mathcal{H} uzayına sınırlandırılması (restriction) denir.

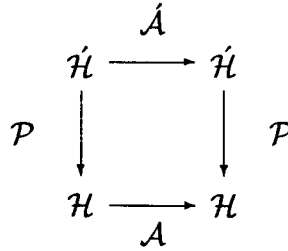
Operatör analizde en önemli teoremlerden birisi de "Commutant Lifting Theorem" dir. Bu teoreme giriş için Şekil 2.1'i inceleyebiliriz. \mathcal{H} ve $\hat{\mathcal{H}}$ uzayları, aralarında $\mathcal{H} \subset \hat{\mathcal{H}}$ biçiminde bir ilişki olan iki Hilbert uzayı olsun. Bu uzaylar arasında ayrıca bir \mathcal{P} operatörü $\hat{\mathcal{H}}$ uzayının, \mathcal{H} uzayına bir ortogonal izdüşümü olarak tanımlansın. Bu durumda, eğer Şekil 2.1'deki ilişkiyi sağlayan $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$ ve $\hat{\mathcal{A}} \in L(\hat{\mathcal{H}})$ operatörleri var ise, $\hat{\mathcal{A}}$ operatörüne, \mathcal{A} operatörünün kaldırması (lifting) denir [17].

Şekil 2.1'den de anlaşılacağı üzere, aşağıdaki ifadeyi yazmak kolaydır,

$$\mathcal{A}\mathcal{P} = \mathcal{P}\hat{\mathcal{A}}. \quad (7)$$

Bu durumda şu ifadeyi de yazabiliriz

$$\mathcal{A}^n \mathcal{P} = \mathcal{P} \hat{\mathcal{A}}^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Şekil 2.1: Yerdeğiştirme (Commutant)

Eğer bir \mathcal{T} operatörü $\mathcal{T} \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ olarak tanımlıysa, $\mathcal{P}\mathcal{T}$ operatörüne ($\in L(\mathcal{H})$) \mathcal{T} operatörünün \mathcal{H} Hilbert uzayına sıkışması (compression) denir [17]. Buradan da şunu yazabiliriz,

$$\langle \mathcal{T}h_1, h_2 \rangle = \langle \mathcal{P}\mathcal{T}h_1, h_2 \rangle = \langle \mathcal{A}h_1, h_2 \rangle \quad h_1, h_2 \in \mathcal{H}$$

ayrıca \mathcal{A} operatörü, \mathcal{A} operatörünün kaldırması ise,

$$\langle \mathcal{A}h_1, h_2 \rangle = \langle \mathcal{A}\mathcal{P}h_1, h_2 \rangle = \langle \mathcal{P}\mathcal{A}h_1, h_2 \rangle = \langle \mathcal{A}'h_1, h_2 \rangle \quad h_1, h_2 \in \mathcal{H}$$

olarak yazılır. Sonuç olarak, \mathcal{H} ve \mathcal{H}' Hilbert uzayları, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$ ise ve \mathcal{A} , \mathcal{A}' operatörleri $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$ ve $\mathcal{A}' \in L(\mathcal{H}')$ olarak tanımlı operatörler ise, \mathcal{A} operatörü \mathcal{A} operatörünün genişlemesidir, eğer ve ancak \mathcal{A} operatörü $\mathcal{A}'|_{\mathcal{H}}$ operatörünün \mathcal{H} üzerinde sınırlanmasının sıkışması ise, ve bunu

$$\langle \mathcal{A}'h_1, h_2 \rangle = \langle \mathcal{A}h_1, h_2 \rangle \quad h_1, h_2 \in \mathcal{H}$$

olarak yazabiliriz [17].

\mathcal{H} Hilbert uzayından \mathcal{H}' Hilbert uzayına tanımlı bir \mathbf{C} operatörü eğer,

$$\langle \mathbf{C}h, \mathbf{C}h_1 \rangle = \langle h, h_1 \rangle \quad \forall h, h_1 \in \mathcal{H}$$

veya benzer şekilde,

$$\mathbf{C}^*\mathbf{C} = \mathbf{I}_{\mathcal{H}}$$

koşullarını sağlıyorsa \mathbf{C} eşmetrel (isometric) bir operatördür.

\mathbf{C} , \mathcal{H} Hilbert uzayında tanımlı bir eşmetrel operatör ve \mathcal{H}_1 Hilbert uzayı da bu uzayın bir altuzayı olsun. Eğer \mathcal{H}_1 altuzayı kendi üzerine \mathbf{C} ile dönüşürse, bu durumda \mathcal{H}_1 altuzayı \mathbf{C} operatörünü indirger (reduce). Aslında bakılırsa, $\mathcal{H}_1 = \mathbf{C}\mathcal{H}_1$ demek $\mathbf{C}^*\mathcal{H}_1 = \mathbf{C}^*\mathbf{C}\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1$ olur, dolayısıyla \mathcal{H}_1 altuzayı hem \mathbf{C} hem de \mathbf{C}^* operatörleri için değişmezdir (invariant), ve dolayısıyla \mathcal{H}_1 , \mathbf{C} operatörünü indirger [18].

\mathbf{C} operatörü \mathcal{H} Hilbert uzayını \mathcal{H}' Hilbert uzayına eğer eşmetrel olarak taşırsa, yani $\mathbf{C}^*\mathbf{C} = \mathbf{I}_{\mathcal{H}}$ ve $\mathbf{C}\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ ise, \mathbf{C} operatörüne birimsel operatör denir. Bu ifadelerden şunu yazabiliriz,

$$(\mathbf{C}\mathbf{C}^*)\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^*\mathbf{C}) = \mathbf{C},$$

ve tüm $\hat{h} = \mathbf{C}h$, ($h_1 \in \mathcal{H}$) formunda yazılabilen \hat{h} elemanları için de $\mathbf{C}\mathbf{C}^*\hat{h} = \hat{h}$ olarak yazılır. $\mathbf{C}\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ olduğu için, $\mathbf{C}\mathbf{C}^* = \mathbf{I}_{\mathcal{H}'}$ olarak yazılabilir. Veya

tersden düşünürsek, $CC^* = I_{\mathcal{H}}$ demek, $C\mathcal{H} = \mathcal{H}$ demektir [18]. Buradan da tüm \mathcal{H} uzayından \mathcal{H} uzayına olan birimsel operatörler şu şekilde ifade edilebilir;

$$C^*C = I_{\mathcal{H}} \quad \text{ve} \quad CC^* = I_{\mathcal{H}} \quad (8)$$

\mathcal{H} Hilbert uzayında C bir operatör \mathcal{H}_1 ise bir altuzay olsun. \mathcal{H}_1 altuzayı, C operatörünün tüm pozitif üsleri altındaki tüm görüntülerine dik ise, bu altuzaya C operatörü için gezen (wandering) denir [19]. Eğer C bir eşmetrel operatör ve \mathcal{H}_1 uzayı da bu operatör için bir gezen ise, $C^m\mathcal{H}_1 \perp C^n\mathcal{H}_1$ diyebiliriz, n, m birbirinden farklı birer pozitif tam sayı ise.

Gezen altuzayların önemi bu uzayların değişmez altuzaylar ile ilişkisinden kaynaklanmaktadır. Eğer C eşmetrel operatörü var ise, bu durumda tüm gezen \mathcal{H}_1 altuzayları ile \mathcal{M} değişmez altuzayı arasında birebir bir karşılık vardır. Bu karşılık $\mathcal{M} = \bigvee_{n=0}^{\infty} C^n\mathcal{H}_1$ şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadeyi ise şu şekilde açabiliriz,

$$C\mathcal{M} = \bigvee_{n=1}^{\infty} C^n\mathcal{H}_1$$

dolayısıyla,

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{M} \ominus C\mathcal{M}$$

yazarak açık olarak ifade edebiliriz [19].

Bir C operatörü (Bir Hilbert uzayından başka bir Hilbert uzayına veya kendi içine) $\forall f$ için, $\|Cf\| = \|f\|$ koşulunu sağlıyorsa, bu durumda C operatörü bir birimsel eşmetrel operatördür. Herhangi bir C operatörünün bir eşmetrel operatör olabilmesi için yeterli ve gerekli koşulu (8) ifadesinde verildiği gibidir [17],[19]. Bazı eşmetrel operatörler birimsel, bazıları ise birimsel olmayabilir. Birimsel operatörlerin direk toplamı (direct sum) ve tek yanlı kaydırma operatörlerinin sonlu veya sonsuz sayıdaki kopyası bir eşmetreldir. Birimsel operatörlerin direk toplamı birimsel eşmetrel fakat tek yanlı kaydırma operatörlerinin sonlu veya sonsuz sayıdaki kopyası ise birimsel olmayan eşmetreldir [19]. Tek yanlı kaydırma operatörünü, $S \in L(\mathcal{H}_2(\mathbb{D}))$ olarak tanımlarsak, bu durumda tek yanlı kaydırma operatörü S 'in $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ uzayındaki etkisini şu şekilde görürüz,

$$(Sf)(z) = zf(z) = f_0z + f_1z^2 + \dots \quad \forall f \in \mathcal{H}_2(\mathbb{D})$$

burada $f(z)$, $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell_+^2$ dizinin kesikli fourier dönüşümüdür. Tek yanlı kaydırma operatörünün eşleği ise, $S^* : \mathcal{H}_2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ olarak tanımlıdır ve eşleğinin etkisi

$$(S^*f)(z) = f_1 + f_2z + \dots \quad \forall f \in \mathcal{H}_2(\mathbb{D}).$$

olarak yazılır.

\mathcal{H}_2 uzayının sıfırdan farklı \mathcal{M} altuzayı S kaydırma operatörü veya birimsel olmayan eşmetreli altında değişmezdir eğer ve ancak \mathcal{H}_{∞} uzayının her yerinde sabit büyüklüğü 1 olan bir m fonksiyonu var ise.

Teorem 2.2 [17]: Bir kaydırma operatörünün, \mathcal{H}_2 üzerindeki değişmeyen altuzayları tam olarak şu kümelerdir;

$$\psi\mathcal{H}_2 = \{\psi f : f \in \mathcal{H}_2\}$$

öyle ki bu durumda ψ fonksiyonları, \mathcal{H}_∞ uzayında iç fonksiyondur.

Aynı teoremi başka bir deyişle şu şekilde de tanımlayabiliriz,

Teorem 2.3 [14]: \mathcal{M} , $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ uzayının \mathbf{S} 'e göre değişmez kapalı bir altuzayı olsun, $\mathbf{S}\mathcal{M} = \{\mathbf{S}f : f \in \mathcal{M}\}$, \mathcal{M} 'in bir altuzayıdır. Bu durumda $m\mathcal{H}(\mathbb{D}) = \mathcal{M}$ denkleğini sağlayan bir $m \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ iç fonksiyonu vardır. Veya, verilen bir m iç fonksiyonu için, $\mathcal{M}_m := m\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ altuzayı $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ içinde kapalı ve \mathbf{S} kaydırma operatörü altında değişmezdir.

Tanım 2.1: $m \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ uzayının bir fonksiyonu olsun, ve $\forall z \in \mathbb{D}$ için eğer $|m(z)| \leq 1$ ve $|m(e^{j\theta})| = 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ ise, $m(z)$ fonksiyonu bir iç fonksiyondur.

Dolayısıyla iç fonksiyonlar \mathbb{T} üzerinde sabit büyüklüğe sahiptir. İç fonksiyonların en önemli özelliği normu değiştirmemeleridir, yani bir iç fonksiyon veya eşleği için $m \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ ve $m^* \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{T})$ birimseldir diyebiliriz.

İç fonksiyonları tanımladıktan sonra, eğer $m \in \mathcal{H}_\infty$ fonksiyonu bir iç fonksiyon ise, $f \in \mathcal{H}_\infty$ olmak üzere,

$$g := f/m$$

fonksiyonu bir dış fonksiyondur.

\mathcal{H} herhangi bir ayrılabilen Hilbert uzayı ve bu uzayda \mathcal{H}_1 Hilbert altuzayı $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ olsun. $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$ ifadesini şu şekilde tanımlayabiliriz;

$$\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1 := \{h \in \mathcal{H} : \langle h, h_1 \rangle = 0, \forall h_1 \in \mathcal{H}_1\}$$

$\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$ ifadesine bu durumda \mathcal{H}_1 uzayının \mathcal{H} uzayında ortogonal tamlayanı denir.

Teorem 2.4 [19]: $h \in \mathcal{H}$ olan bir vektör olsun. Bu durumda $h = h_1 + h_2$ denkleğini sağlayan iki tane tek vektör vardır; $h_1 \in \mathcal{H}_1$ ve $h_2 \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$

$m \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ bir iç fonksiyonu göstermek üzere, $\mathcal{H}(m)$ Hilbert uzayını, $\mathcal{H}(m) := \mathcal{H}_2(\mathbb{D}) \ominus m\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ olarak tanımlayalım ve $\mathbf{P}_{\mathcal{H}(m)}$ operatörünü de $\mathbf{P}_{\mathcal{H}(m)} : \mathcal{H}_2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{H}(m)$ biçiminde tanımlarsak, $\mathbf{P}_{\mathcal{H}(m)}$ operatörüne $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ uzayının $\mathcal{H}_2(\mathbb{D}) \ominus m\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ uzayı üzerinde ortogonal yansımaları (projection) denir. Aynı zamanda, herhangi bir $h \in \mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ elemanını $g \in \mathcal{H}(m)$ ve $f \in \mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ olmak üzere $h = g + mf$ olarak ortogonal ayrıştırmasını yapabiliriz. Bir iç m fonksiyonun $g \in \mathcal{H}(m)$ için, m^*g sonucunu şu şekilde yazabiliriz,

$$(m^*g)(\zeta) = \overline{m(\zeta)}g(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{-i}\zeta^{-i}, \quad \zeta \in \mathbb{T} \quad \phi_{-i} \in \mathbb{C}_+$$

$i \geq 1$ için $\sum_{i=1}^{\infty} |\phi_i|^2 < \infty$ olmak üzere, sağ taraf birim çember üzerine ve diskin dışına doğru yakınsar [14]. Diğer bir deyişle $g_\perp := m^*g$ fonksiyonu $\mathcal{L}_2(\mathbb{T}) \ominus \mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ uzayının bir elemanıdır.

$\mathcal{H}(m)$ uzayı ve $\mathbf{P}_{\mathcal{H}(m)}$ operatörünün özelliğini kullanarak sıkıştırılmış kaydırma (compressed shift) operatörünü, \mathbf{T} , şu şekilde tanımlayabiliriz,

$$\mathbf{T} : \mathcal{H}(m) \rightarrow \mathcal{H}(m),$$

$$\mathbf{T} := \mathbf{P}_{\mathcal{H}(m)} \mathbf{S}|_{\mathcal{H}(m)}.$$

\mathbf{T} operatörünün eşleği ise $\mathbf{T}^* = \mathbf{S}|_{\mathcal{H}(m)}^*$ olarak ifade edilir. Bu durumda \mathbf{S} operatörü \mathbf{T} operatörünün genişlemesidir.

\mathbf{T} operatörünü \mathbf{S} operatörü gibi şu şekilde de yazabiliriz;

$$f(\mathbf{T}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mathbf{T}^k.$$

Buradan $f(\mathbf{T}) = \mathbf{P}_{\mathcal{H}(m)} f(\mathbf{S})|_{\mathcal{H}(m)}$. Dolayısıyla

$$\mathbf{P}_{\mathcal{H}(m)} g = g - m \mathbf{P}_{\mathcal{H}_2} m^* g \quad \forall g \in \mathcal{H}_2(\mathbb{D})$$

ve

$$f(\mathbf{T})x = \mathbf{P}_{\mathcal{H}(m)} f x = f x - m \mathbf{P}_{\mathcal{H}_2} m^* f x \quad \forall x \in \mathcal{H}(m)$$

2.5. Sarason Teoremi

Bu bölümde \mathcal{H}_{∞} problemlerinin çözümünde karşılaşılan interpolasyon problemlerinin çözümü için bazı teoremler verilecektir. İnterpolasyon teoreminin sonsuz boyutlu tek girdi tek çıktılı (SISO) sistemlere uygulanması Sarason teoreminin uygulanması ile mümkündür. “Commutant Lifting Theorem” ile de dağıtılmış çok değişkenli sistemlerin standart \mathcal{H}_{∞} problemlerini bu sayede çözebiliriz.

Sarason teoremi kısaca, \mathcal{H}_{∞} optimal hassasiyet problemini çözmek için gereken

$$\gamma_{opt} := \inf \{ \|L - UV\|_{\infty} : V \in \mathcal{H}_{\infty}(\mathbb{D}) \} \quad (9)$$

problemini çözmek için kullanılır, öyle ki $L, V \in \mathcal{H}_{\infty}(\mathbb{D})$ ve U ise iç matris olmak üzere. (9) ifadesindeki problem \mathcal{H}_{∞} optimal performans kriteri γ_{opt} ve γ_{opt} değerine karşılık gelen V_{opt} fonksiyonunun hesaplanmasıdır. (9) ifadesindeki problemi Sarason dışında Feintuch-Francis ikilisi de çözmüştür [14].

(9) ifadesindeki problemde verilen L fonksiyonları ve U iç fonksiyonları için γ_{opt} ve buna karşılık gelen V_{opt} fonksiyonlarını bulmak gerekiyor. $U\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ uzayı değişmez kaydırmalı bir altuzay ve bu uzayın tümleyeni de $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ olsun. Sıkıştırılmış kaydırma operatörü \mathbf{T} 'yi $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ uzayında tanımlayalım. Bu durumda Sarason teoremini şu şekilde yazarız;

Theorem 2.5 [14]: $\mathbf{A} \in L(\mathcal{H}(\mathcal{U}))$ operatörü sınırlı doğrusal ve $\mathbf{TA} = \mathbf{AT}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{A} = f(\mathbf{T})$ ve $\|\mathbf{A}\| = \|f\|_{\infty}$ koşulunu sağlayan bir $f \in \mathcal{H}_{\infty}(\mathbb{D})$ fonksiyonu vardır.

Theorem 2.5 yardımıyla optimal performans kriteri γ_{opt} ve buna karşılık gelen V_{opt} hesaplanabilir. γ_{opt} değerinin hesabı için (9) problemini ele alarak; bir $L(\mathbf{T}) = \mathbf{P}_{\mathcal{H}(\mathcal{U})} \mathbf{M}_{L_{\mathcal{H}(\mathcal{U})}}$ operatörümüz olsun. $L(\mathbf{T})$ operatörü açıktır ki \mathbf{T} operatörü ile yerdeğiştirebilir. Bu durumda Sarason teoremi yardımıyla $L_{opt}(\mathbf{T}) = L(\mathbf{T})$ ve $\|L(\mathbf{T})\| = \|L_{opt}\|_{\infty}$ koşulunu sağlayan bir $L_{opt} \in \mathcal{H}_{\infty}(\mathbb{D})$

fonksiyonunun var olduğunu söyleyebiliriz. Öyle ki $v \in \mathcal{H}(U)$ en büyük tekil değere sahip $(L(\mathbf{T})^*L(\mathbf{T}))$ 'ye karşılık gelen özvektör olsun. Bu durumda; **Teorem 2.6 [14]**: $L_{opt} = L - UV_{opt} = (L(\mathbf{T})v)/v$. Ayrıca L_{opt} , $\|L(\mathbf{T})\|$ ile bir iç fonksiyonun çarpımı formundadır.

Yukarıda kullanılan teoremler ile Sarason teoremini tamamlamış oluyoruz. Burada anlatılan problemi tanımlarken yalnızca kesikli zaman için birim disk ele aldık, aynı teoremleri sürekli zamanda sağ yarı düzlem için de uygulamak mümkündür.

2.6. Doğrusal Kesirli Dönüşüm

Standart \mathcal{H}_∞ probleminin çözümünde sistemin blok yapısını Doğrusal Kesirli Dönüşüm (LFT) formunda yazmak problem çözümünde kolaylık getirmektedir.

Tanım 2.2 [20]: M aşağıdaki şekilde ayrıştırılmış bir kompleks matris olsun

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$$

ve $\Delta_l \in \mathbb{C}^{q_2 \times p_2}$ ve $\Delta_u \in \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$ iki kompleks değerli matris olsun. Bu durumda Δ_ℓ kompleks matrisine göre alt LFT şu şekilde tanımlanabilir,

$$\mathcal{F}_\ell(M, \cdot) : \mathbb{C}^{q_2 \times p_2} \rightarrow \mathbb{C}^{p_1 \times q_1}$$

öyle ki,

$$\mathcal{F}_\ell(M, \Delta_\ell) = M_{11} + M_{12}\Delta_\ell(I - M_{22}\Delta_\ell)^{-1}M_{21} \quad (10)$$

$(I - M_{22}\Delta_\ell)$ ifadesinin tersi sağlanmak üzere. Benzer olarak, Δ_u kompleks matrisine göre üst LFT şu şekilde tanımlanabilir,

$$\mathcal{F}_u(M, \cdot) : \mathbb{C}^{q_1 \times p_1} \rightarrow \mathbb{C}^{p_2 \times q_2}$$

öyle ki,

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta_u) = M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12} \quad (11)$$

$(I - M_{11}\Delta_u)$ ifadesinin tersi sağlanmak üzere.

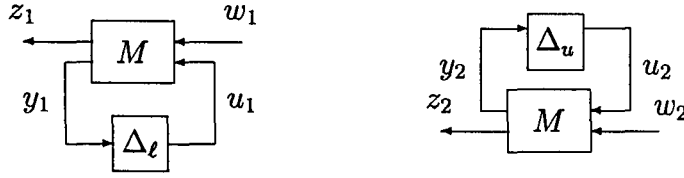
Alt LFT ve üst LFT Şekil 2.2'deki yapıların gösterimidir.

Şekil 2.2'deki şekillerden sol taraftaki şekil aşağıdaki denklemler ile gösterilir,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$u_1 = \Delta_\ell y_1 \quad (13)$$

Sağ taraftaki şekil ise,



Şekil 2.2: Alt (solda) ve Üst (sağda) LFT gösterimleri

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$u_2 = \Delta_u y_2 \quad (15)$$

LFT nin fiziksel anlamı eğer M transfer matrisini düzgün (proper) alırsak daha açık olur. Bu durumda LFT'ler w_1 'den z_1 'e ve w_2 'den z_2 'ye olan kapalı döngü transfer matrislerdir. Eğer w_1 'den z_1 'e ve w_2 'den z_2 'ye olan kapalı döngü transfer matrisleri T_{zw1} , ve T_{zw2} olarak gösterirsek, bu durumda karşılık gelen LFT gösterimleri şöyle olur,

$$T_{zw1} = \mathcal{F}_\ell(M, \Delta_\ell) \quad T_{zw2} = \mathcal{F}_u(M, \Delta_u)$$

öyle ki buradaki M kontrol edilecek plant, Δ ise pertürbasyon veya kontrolör olabilir. (10) ve (11) ifadelerinden bir LFT'nin iyi tanımlanabilmesi için şu notu çıkarabiliriz,

Not 2.1 [20]: Bir LFT'nin, $\mathcal{F}_\ell(M, \Delta)$, iyi tanımlanabilmesi için $(I - M_{22}\Delta)$ ifadesinin tersi alınabilmelidir.

(12), (13), (14) ve (15) ifadelerinden yararlanarak aşağıdaki savda bulunabiliriz,

Sav 2.4 [20] Bir P matrisi, $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ formunda olsun ve K rasyonel bir transfer fonksiyonu matrisi ve $G = \mathcal{F}_\ell(P, K)$ olsun. Bu durumda

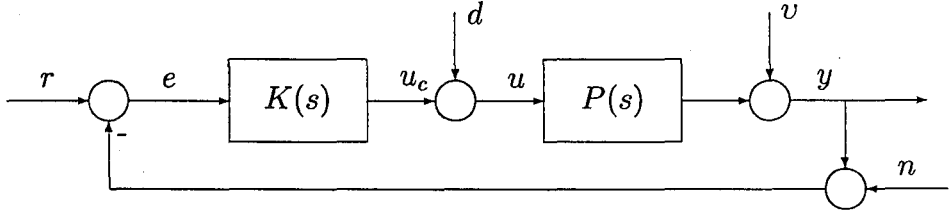
- Eğer P ve K düzgün ve $\det(I - P_{22}K)(\infty) \neq 0$ ise G düzgündür.
- $\mathcal{F}_\ell(P, K_1) = \mathcal{F}_\ell(P, K_2)$ demek $K_1 = K_2$ demektir, eğer P_{21} ve P_{12} tam sütun ve satır ranklı ise.
- Eğer P ve G düzgün, $\det P(\infty) \neq 0$, $\det \left(P - \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)(\infty) \neq 0$ ve P_{12} ile P_{21} tüm s değerleri için tersi alınabiliyorsa, o zaman K düzgündür.

3. GÜRBÜZ KONTROL

Gürbüz kontrol problemlerinin çözümü için standart \mathcal{H}_∞ problemi ortaya atılmıştır. Bu problemin çözümü için de çok çeşitli çözüm teknikleri geliştirilmiştir. Bunlardan en çok kullanılanı durum-uzayı yaklaşımıdır [21]. Çünkü bu yaklaşımda, problem cebirsel Riccati denklemleri ile çözülmektedir. Bir diğer çözüm yöntemi ise, Skew Toeplitz operatör yöntemi kullanılarak yapılan çözüm tekniğidir [14],[22],[23],[24].

3.1. Geribesleme ve Sistem Performansı

Kontrol teoride temel soru verilen bir sistemin nasıl kontrol edileceğidir. Şüphesiz ki kontrol sistemlerinde en başarılı ve en güçlü teknik geribeslemedir. Bir geribeslemeli kontrolör tasarlanacağı zaman, sistemin kararlılığını ve performansını etkileyebilecek olası değişiklikler, modellenemeyen veya modellenemeyen dinamikler veya belirsizlikler hesaba katılmalıdır. Aksi takdirde tasarlanan kontrolör sistem performansını kötüleştirebilir, hassasiyetini yoğunlaştırabilir, hatta bu tür pertürbasyonlar sistemi kararsız dahi kılabilir. Geribesleme kullanmanın en temel amacı sistemdeki belirsizlikleri ve modellenemeyen dinamikleri hesaba katmaktır. Aslında geribesleme bir anlamda, gözlenen çıktı sinyalinin temel olarak girdi sinyalini düzeltmektir.

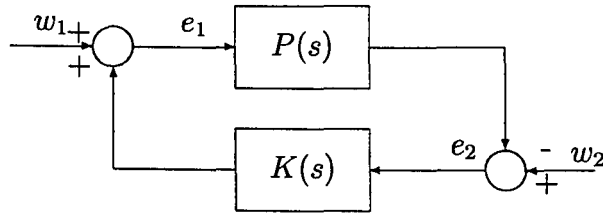


Şekil 3.1: Kapalı Döngü Kararlılığı

Şekil 3.1 dikkate alınır, $P(s)$ kontrol edilecek planti, $K(s)$ ise tasarlanacak kontrolörü göstermektedir. Sistemdeki dış sinyaller olarak referans sinyali r , çıktı bozucu sinyali v , ölçüm gürültü sinyali n ve hareketlendirici bozucu sinyali d sayılır. İç sinyaller olarak da, ölçülen hata e , emir girdisi u , kontrolör çıktısı u_c ve plant çıktısı y sayılabilir.

Dış sinyallerin enerji içeriklerini sınırlı, yani bu sinyalleri $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+)$ uzayında kabul edeceğiz. Plantin transfer fonksiyonu $P(s)$ 'in ve kontrolörün transfer fonksiyonu $K(s)$ 'in, doğrusal ve zamanla değişmediğini kabul edeceğiz. Şekil 3.1 sistemindeki kapalı döngüyü bundan sonra $[K,P]$ ile göstereceğiz.

Şekil 3.1'deki geribesleme döngüsüne giren dış sinyalleri w_1 ve w_2 olarak, plant ve kontrolöre giren girdi sinyallerini de e_1 ve e_2 olarak grublandırırsak, bu durumda Şekil 3.1'deki geribeslemeli sistemini Şekil 3.2'deki gibi göstererek sistemin iç kararlılığını daha iyi ifade edebiliriz.



Şekil 3.2: İç Kararlılık

Şekil 3.2'deki sistemin iyi tanımlanmış olabilmesi için $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ 'den $\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ 'ye olan transfer matrisinin düzgün bir transfer matrisi olması gerekmektedir. w_1 ve w_2 girdilerinden e_1 ve e_2 girdilerine olan denklemleri şu şekilde yazarsak,

$$e_2 = w_2 - Pe_1$$

$$e_1 = w_1 + Ke_2$$

$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ 'den e_1 'e olan transfer fonksiyonu $e_1 = (I + KP)^{-1} \begin{bmatrix} I & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ olarak ifade edilir. Bu durumda sistemin iyi tanımlanabilmesi için, $(I + KP)$ 'nin tersi olmalıdır. Sistemin iç kararlılığı için ise, w_1 ve w_2 girdilerinden plant ve kontrolöre giren e_1 ve e_2 girdilere olan transfer matrisi;

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K \\ P & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

yani, $\begin{bmatrix} I & -K \\ P & I \end{bmatrix}^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ olmalıdır.

Geribesleme sistemin faydaları ve sistem performansı üzerindeki etkisini incelemek için, Şekil 3.1 ile ilgili olarak,

$$L_i := KP \text{ ve } L_o := PK,$$

tanımlamalarını yapalım. Bu durumda, d sinyalinden u girdisine olan girdi hassasiyet matrisi,

$$S_i = (I + L_i)^{-1}, \quad u = S_i d$$

şeklinde, v sinyalinden y sinyaline olan çıktı hassasiyet matrisi ise,

$$S_o = (I + L_o)^{-1}, \quad y = S_o v$$

şeklinde yazılır. Hassasiyet matrisleri, S_i ve S_o yukarıdaki gibi yazılırsa, bu durumda girdi ve çıktı tamamlayıcı hassasiyet matrisleri ise,

$$T_i = I - S_i = L_i(I + L_i)^{-1}, \quad T_o = I - S_o = L_o(I + L_o)^{-1}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda kapalı döngü sistemdeki iç kararlılık için iç girdilerden, dış girdilere olan,

$$y = T_o(r - n) + S_o P d + S_o v \quad (16)$$

$$r - y = S_o(r - d) + T_o n - S_o P v \quad (17)$$

$$u_c = K S_o(r - n) - K S_o d - T_i v \quad (18)$$

$$u = K S_o(r - n) - K S_o d + S_i v \quad (19)$$

tüm transfer matrislerin kararlı olması gerekmektedir.

Yukarıdaki transfer matrislere bakarak, sistemdeki geribesleme yapısının sistem performansı üzerindeki faydalarını daha açık olarak görebiliriz. Sistem performansını iyileştirmek için, sistemdeki bozucu sinyallerin etkisini azaltmak gerekmektedir. Örneğin, (16) ifadesindeki denkleme bakarak, v bozucu sinyalinin plant çıktısı üzerindeki etkisini, S_o transfer matrisini belli bir frekans aralığında frekansa bağlı tekil değerler kullanarak, $\bar{\sigma}(S_o) < 1$ yaparak azaltabiliriz.

Dolayısıyla, iyi bir performans için plant çıktısı y üzerindeki, sırasıyla çıktıdaki v sinyalinin ve girdideki d sinyalinin etkisinin azaltımı için,

$$\bar{\sigma}(S_o) = \bar{\sigma}((I + PK)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + PK)} \quad (20)$$

ve

$$\bar{\sigma}(S_o P) = \bar{\sigma}((I + PK)^{-1} P) = \bar{\sigma}(P S_i) \quad (21)$$

değerleri küçük yapılmalıdır. Benzer şekilde plant girdisindeki u sinyali için de, sırasıyla girdideki d sinyalinin ve çıktıdaki v sinyalinin etkisinin azaltımı için,

$$\bar{\sigma}(S_i) = \bar{\sigma}((I + KP)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + KP)} \quad (22)$$

ve

$$\bar{\sigma}(S_i K) = \bar{\sigma}(K(I + PK)^{-1}) = \bar{\sigma}(K S_o) \quad (23)$$

değerleri küçük yapılmalıdır. Dikkat edilirse,

$$\underline{\sigma}(PK) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + PK) \leq \underline{\sigma}(PK) + 1 \quad (24)$$

ve

$$\underline{\sigma}(KP) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + KP) \leq \underline{\sigma}(KP) + 1 \quad (25)$$

olarak yazabiliriz.

Bu durumda, eğer $\underline{\sigma}(PK) > 1$ ve $\underline{\sigma}(KP) > 1$ ise, (24) ve (25) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(PK) + 1} \leq \bar{\sigma}(S_o) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(PK) - 1} \quad (26)$$

ve

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(KP) + 1} \leq \bar{\sigma}(S_i) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(KP) - 1} \quad (27)$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. (26) ve (27) ifadelerinden yararlanarak (22) ve (20) ifadeleri için,

$$\bar{\sigma}(S_o) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(PK) \gg 1 \quad (28)$$

ve

$$\bar{\sigma}(S_i) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(KP) \gg 1 \quad (29)$$

yazılır. Bu durumda sistemin girdi ve çıktı hassasiyet fonksiyonlarının belli bir frekans aralığında değerlerinin küçük olabilmesi, iç ve dış açık döngü transfer matrislerin büyük olması anlamına gelir.

Yukarıda iyi bir performans için plant çıktısındaki v ve plant girdisindeki d bozucu sinyallerinin etkilerinin azaltımını incelemiştik. İyi bir performans için, tüm bozucu sinyallerden iç sinyallere olan etkilerinin azaltılması gerekmektedir. Bunun için, P ve K transfer matrislerinin tersinin alınabildiğini düşünelim; bu durumda iç ve dış açık döngü transfer matrisleri ile S_oP ve KS_o arasındaki ilişkiyi,

$$\underline{\sigma}(PK) \gg 1 \quad \text{veya} \quad \underline{\sigma}(KP) \gg 1 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(S_oP) \approx \bar{\sigma}(K^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(K)} \quad (30)$$

ve

$$\underline{\sigma}(PK) \gg 1 \quad \text{veya} \quad \underline{\sigma}(KP) \gg 1 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(KS_o) \approx \bar{\sigma}(P^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(P)} \quad (31)$$

şeklinde yazabiliriz [20].

(28) ve (30) ifadelerini kullanarak, plantin çıktısında iyi bir performans için şunu söyleyebiliriz; çıktı döngü kazancının, çıktıda v bozucu sinyalinin etkisinin en az olduğu frekans aralığında büyük olması, $\underline{\sigma}(L_o) = \underline{\sigma}(PK) \gg 1$ ve benzer şekilde kontrolör kazancının da girdiye müdahale eden d bozucu sinyalinin en az etkisi olduğu frekans aralığında da yeteri kadar büyük olması gerekir $\underline{\sigma}(K) \gg 1$. Benzer şekilde (29) ve (31) ifadelerinden de yararlanarak plantin girdisinde iyi bir performans için; girdi döngü kazancının, girdiye müdahale eden d bozucu sinyalinin en az etkisi olduğu frekans aralığında yeteri kadar büyük, $\underline{\sigma}(L_i) = \underline{\sigma}(KP) \gg 1$ ve plant kazancının da çıktıda v bozucu sinyalin etkisinin en az olduğu frekans aralığında büyük olması gerekmektedir, $\underline{\sigma}(P) \gg 1$.

Geribesleme sistemin, sistem performansındaki etkisini yukarıda belirttik, fakat sadece sistem performansının sağlanması geribesleme sistem tasarımında yeterli değildir, aynı zamanda sistem performansı sağlanırken, sistemin belirsizlikler karşısında gösterdiği etki de önemlidir. Çünkü bu belirsizlikler sistemi kararsız kılabilir. Dolayısıyla sistemin performansı sağlanırken aynı zamanda model belirsizliği altında sistemin kararlılığı da ele alınmalıdır. Bu durumu incelemek için, P plantinin, $(I + \Delta)P$ modeline pertürbe edildiğini kabul edelim, öyle ki Δ ve nominal plant kararlı olsun; bu durumda kapalı döngü $\Delta = 0$ için kararlıdır. Pertürbe edilmiş kapalı döngü sistemin de kararlı olabilmesi için

$$\det(I + (I + \Delta)PK) = \det(I + PK) \det(I + \Delta T_o)$$

ifadesinin sağ yarı düzlemde sıfırı olmaması gerekmektedir, bu da $\bar{\sigma}(T_o)$ transfer matrisi, yüksek frekanslarda küçük olmalı, yani döngü kazancı $\bar{\sigma}(L_o)$ bu frekanslarda küçük olmalıdır. Benzer şekilde, kontrolör kazancı $\bar{\sigma}(K)$, döngü kazancının küçük olduğu frekans aralığında, hareketlendiricinin doyumuna ulaşmaması için büyük olmamalıdır [20].

Tüm bunları özetlemek gerekirse, belli bir frekans aralığında iyi bir performans için, ki genelde düşük frekans aralığı için, $(0, \omega_d)$:

$$\underline{\sigma}(PK) \gg 1, \underline{\sigma}(KP) \gg 1, \underline{\sigma}(K) \gg 1$$

olmalıdır, ve iyi gürbüzlük ve iyi algılayıcı (sensör) gürültü azaltımı için belli bir frekans aralığında, ki genelde yüksek frekans aralığı için ise (ω_y, ∞)

$$\bar{\sigma}(PK) \ll 1, \bar{\sigma}(KP) \ll 1, \bar{\sigma}(K) \leq M$$

M çok büyük olmamak koşuluyla.

Kapalı döngüde, nominal plant için, performans ölçütünü, takibin netliği olarak ele alabiliriz. Takibin netliği iki duruma bağlıdır, referans r hakkında ne bildiğimiz ve hata ölçütü olarak neyi alacağımızdır. Bazı durumlarda r sinyali bilinen bir sinyal olmayabilir.

Şekil 3.1'deki sistemi tek girdi tek çıktı olarak ele alalım ve r referans sinyalini sinüzoidal bir girdi ve büyüklüğü ise ≤ 1 olsun. Ayrıca kapalı döngü sistemindeki (Şekil 3.1) hatanın (e) büyüklüğü de $< \epsilon$ olsun. Bu durumda performans ölçütü,

$$\|S\|_{\infty} < \epsilon$$

şeklinde olur. Eğer W_1 ağırlığı için rastgele bir $W_1(s) = 1/\epsilon$ olarak seçersek bu durumda performans ölçütü olarak

$$\|W_1 S\|_{\infty} < 1$$

alabiliriz. $\|W_1 S\|_{\infty} < 1$ norm sınırını grafiksel olarak da görebiliriz, öyle ki

$$\|W_1 S\| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{W_1(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| < 1 \Leftrightarrow |W_1(j\omega)| < |1+L(j\omega)| \quad \forall \omega$$

En son eşitsizlikten, her ω frekans değeri için, Nyquist grafiğindeki $L(j\omega)$ noktası, yani açık döngü, merkezi -1 , yarıçapı $|W_1(j\omega)|$ olan bir diskin dışında yer alır.

3.2. Gürbüz Kararlılık

Bundan önce varsaydığımız $P(s)$ verilen plantin transfer fonksiyonunu göstermektaydı ve tasarlanan kontrolörler kümesi de bu sabit planti kararlaştıran kontrolörlerdi. Gerçek planti $P_{\Delta}(s)$ olarak gösterirsek, $P(s)$ bu gerçek plantin nominal gösterimidir. Gerçek plantin, $P_{\Delta}(s)$, nominal plantte gözükmeyen veya ele alınmayan kısmına modellenmeyen dinamikler diyoruz. Bu modellenmeyen dinamikleri nominal plantin çarpım pertürbasyonu,

$$P_{\Delta}(s) = P_m(s) = P(s)(1 + \Delta_m(s))$$

veya toplama pertürbasyonu olarak

$$P_{\Delta}(s) = P_a(s) = P(s) + \Delta_a(s)$$

gösterebiliriz.

Burada $P(s)$ nominal planti $\Delta(s)$ ise modellenmeyen dinamikleri göstermektedir. Genel olarak $\Delta(s)$ bilinmediği için, frekansa bağlı bir üst sınır fonksiyonu $W(s)$ tanımlayarak, belirsizliği şu şekilde sınırlandırabiliriz;

$$\| \Delta(j\omega) \| < | W(j\omega) | \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Buradan,

$$1 < \inf_{\omega} \left| \frac{W_m(j\omega)}{\Delta_m(j\omega)} \right| \quad (32)$$

ve

$$1 < \inf_{\omega} \left| \frac{W_a(j\omega)}{\Delta_a(j\omega)} \right| \quad (33)$$

yazabiliriz.

Gürbüz kararlılığı daha net açıklamak ve gereken ispatları yapmak için, sistemdeki plantimiz ve ağırlıklar üzerine bir dizi kabullenme yapabiliriz.

Kabullenme 3.1 Sistem transfer fonksiyonu olarak, sürekli zaman sistemleri için

$$P(s) = \frac{M_n(s)N_1(s)N_2(s)}{M_d(s)}, \quad s \in \mathbb{C}_+.$$

veya, kesikli zaman sistemleri için

$$p(z) = \frac{m_n(z)n_1(z)n_2(z)}{m_d(z)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

olan tek girdi tek çıktı, doğrusal ve zamanla değişmeyen, ve olası sonsuz boyutlu sistemleri ele alacağız. Burada $m_n(z)$ kesikli zamanda, $M_n(s)$ ise sürekli zamanda herhangi bir olası sonsuz boyutlu bir iç fonksiyonu, $m_d(z)$ kesikli zamanda, $M_d(s)$ ise sürekli zamanda rasyonel bir iç fonksiyonu, $n_1(z)$ kesikli zamanda, $N_1(s)$ sürekli zamanda olası sonsuz boyutlu bir dış fonksiyonu ki $n_1(z)^{-1} \in \mathcal{H}_{\infty}(\mathbb{D})$, veya $N_1(s)^{-1} \in \mathcal{H}_{\infty}(\mathbb{C}_+)$ ve $n_2(z)$ kesikli zamanda ve $N_2(s)$ ise sürekli zamanda rasyonel bir dış fonksiyonu göstermektedir. Ayrıca $P(j\omega)$, $j\mathbb{R}$ ekseninde birçok nokta hariç sürekli ve $m_n(0) \neq 0 \neq m_d(0)$ olduğunu kabul edeceğiz.

Eğer $P_a = P_m$ olursa, W_m ve W_a aşağıdaki koşulları sağlamalıdır;

$$| W_m(j\omega)P(j\omega) | > | \Delta_a(j\omega) | \quad (34)$$

ve

$$\left| \frac{W_a(j\omega)}{P(j\omega)} \right| > | \Delta_m(j\omega) |.$$

Kabullenme 3.2 $(W_m N_2)$ ve $(W_m N_2)^{-1}$ ağırlık fonksiyonlarının \mathcal{H}_{∞} uzayının elemanları olduğunu ve, aşağıdaki durumu sağladığını varsayıyoruz

$$W_a = W_m N_1 N_2. \quad (35)$$

Daha ileri bir kabullenme olarak,

$$|W_m(j\omega)| > 2 \quad \forall \omega \geq \omega_o \quad (36)$$

koşulunu sağlayan bir ω_o olduğunu kabul edelim.

Aslında bu kabullenme N_2 kesin düzgün (strictly proper) olduğunda, W_m direk olarak düzgün olmama (improper) şartını sağlar.

\tilde{P} kümesi, P_a , P_m plantlerini kapsayan bir plant kümesi olsun. Bir $P \in \tilde{P}$ transfer fonksiyonu ve bir geribeslemeli yapıda, bir K kontrolörü bu plantin iç kararlılığını sağlasın. Bu durumda gürbüzlüğü şu şekilde ifade edebiliriz, yukarıdaki iç kararlılığı sağlayan K kontrolörü her $P \in \tilde{P}$ için iç kararlılığı sağlıyorsa, bu kontrolör gürbüz kararlılığı sağlar deriz.

Tek girdi tek çıktı bir sistemin kararlılığı için yeterli bilgiyi Nyquist grafiğinden elde edebiliriz. Şekil 3.1 tek girdi tek çıktı bir yapı olarak ele alındığında, referans girdisinden hataya olan transfer fonksiyonu yani hassasiyet fonksiyonu, $S = 1/(1+L)$ olarak yazılır, burada L açık döngü transfer fonksiyonunu göstermektedir, $L := PK$. Bu durumda sistemin kararlılığı için, kritik nokta -1 ile L fonksiyonunun, Nyquist grafiğindeki -1 'e en yakın noktası arasındaki mesafe $1/\|S\|_\infty$ değerine eşittir:

$$\begin{aligned} \text{Nyquist grafiğindeki } -1\text{'e en yakın nokta} &= \inf_{\omega} |-1 - L(j\omega)| \\ &= \inf_{\omega} |1 + L(j\omega)| = \left[\sup_{\omega} \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \right]^{-1} = \|S\|_\infty^{-1} \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\|S\|_\infty \gg 1$ ise, bu durumda Nyquist grafiği kritik noktaya yaklaşmakta ve geribeslemeli sistem kararsızlaşmaktadır.

Teorem 3.1 [14]: P_m ve P_a plantlerini içeren bir \tilde{P} plantler kümesinde, nominal P plantini, N ve D asal faktörler olmak üzere $P = N/D$ olarak ele alalım. P_m ve P_a plantlerinin sağ yarı düzlemde eşit sayıda kutbu olduğunu varsayalım. Belirsizlik sınırları, verilen W_m ve W_a ağırlıkları ile, (32) ve (33) ifadelerindeki gibi olsun. Plantin Kabullenme 3.1'i ağırlıkların ise Kabullenme 3.2'yi sağladığını varsayalım. İki \mathcal{H}_∞ fonksiyonun oranı olan $K(j\omega)$ kontrolörünün birkaç nokta hariç $j\mathbb{R}_e$ kümesinde sürekli olduğunu ve nominal planti kararlı kıldığını varsayalım. P_a ve P_m plantleri ile ilgilendiğimizde K kontrolörünün de kapalı sağ yarı düzlemde kararsız bir kaç kutbu olduğu kabul edelim. Bu durumda, K kontrolörü eğer ve ancak;

$$\|W_m PK(1 + PK)^{-1}\|_\infty \leq 1 \quad (37)$$

ve

$$\|W_a K(1 + PK)^{-1}\|_\infty \leq 1 \quad (38)$$

şartlarını sağlıyorsa, plantleri gürbüz kararlı kılar.

Aslında(35) ilişkisinden,

$$\|W_m PK(1 + PK)^{-1}\|_\infty = \|W_a K(1 + PK)^{-1}\|_\infty$$

olarak yazabiliriz. P ve K 'nın kapalı sağ yarı düzlemde kutbu olduğundan ve (36) ile $\omega \rightarrow \infty$ iken $P(j\omega)K(j\omega)$ birim çemberin içindedir. Bunu şu şekilde

açıklayabiliriz; PK transfer fonksiyonunu,

$$PK = \frac{PK(1 + PK)^{-1}}{1 - PK(1 + PK)^{-1}}$$

olarak yazalım. Eğer $|PK(1 + PK)^{-1}| < \frac{1}{2}$ ise bu durumda, $|PK| < 1$ olur. Bu da aslında, eğer $|W_m PK(1 + PK)^{-1}| < \frac{W_m}{2}$ ise, $|PK| < 1$ olur. Bundan önce yaptığımız kabullenmelere dayanarak, $|W_m(j\omega)| > 2$ ve $P(j\omega)K(j\omega)$ 'nin $\omega \geq \omega_o$ için sürekli olduğunu diyebiliyoruz. Dolayısıyla,

$$\|W_m PK(1 + PK)^{-1}\|_\infty < 1$$

demek tüm $\omega \geq \omega_o$ 'lar için $|P(j\omega)K(j\omega)| < 1$ demektir. Dolayısıyla gürbüz kararlılık için eğer ve ancak, $\|W_m T\|_\infty < 1$ ise K kontrolörü plantler kümesini gürbüz kararlı kılar.

Eğer $\|W_m T\|_\infty < 1$ ise bu ifadeyi şu şekilde açabiliriz,

$$\|W_m T\| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{W_m(j\omega)L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| < 1 \Leftrightarrow |W_m(j\omega)L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad \forall \omega$$

yani her ω frekans değeri için merkezi $L(j\omega)$ ve çapı $|W_m(j\omega)L(j\omega)|$ olan bir disk, kritik nokta olan -1 'in diskin dışında yer alır dolayısıyla K kontrolörü gürbüz kararlılığı sağlar.

3.3. Gürbüz Performans

Gürbüz performansın en genel ifadesi, bir $P \in \tilde{P}$ transfer fonksiyonunun iç kararlılığını ve performans kriterini sağlayan K kontrolörün $\forall P \in \tilde{P}$ için, iç kararlılığı ve performans kriterini sağlamasıdır.

Eğer nominal geribeslemeli sistem kararlı ise, sistem için nominal performans koşulu $\|W_1 S\|_\infty < 1$ olarak ifade edilmişti ve kararlılık koşulu için ise $\|W_m T\|_\infty < 1$ olarak ifade edilmişti. Eğer P planti $(1 + \Delta W_m)P$ transfer fonksiyonuna pertürbe edilmiş ise, bu durumda S fonksiyonu da

$$\frac{1}{1 + (1 + \Delta W_m)L} = \frac{S}{1 + \Delta W_m T}$$

fonksiyonuna pertürbe edilmiştir. Bu durumda gürbüz performans koşulu şu olmalıdır,

$$\|W_m T\|_\infty < 1 \text{ ve } \left\| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_m T} \right\|_\infty < 1 \quad \forall \Delta$$

Teorem 3.2 [25]: *Gürbüz performans için yeterli ve gerekli koşul aşağıdaki gibidir;*

$$\| |W_1 S| + |W_m T| \|_\infty < 1 \quad (39)$$

(39) ifadesini eğer ve ancak her ω frekansı için, birisinin merkezi -1 noktasında olan yarıçapı $|W_1|$ ve diğerinin merkezi $L(j\omega)$ yarıçapı $|W_m(j\omega)L(j\omega)|$ olan iki disk birbirinden ayrı ise gürbüz performans için yeterli ve gerekli koşul sağlanmıştır diyebiliriz. Ayrıca kontrolör bu gerekliliği sağlıyorsa, bu durumda K kontrolörü P plantini de gürbüz olarak kontrol eder.

4. \mathcal{H}_∞ KONTROL TASARIMI

\mathcal{H}_∞ optimizasyon problemi, kapalı döngü sistemlerin bazı fonksiyonlarının frekans tepkilerindeki en yüksek tepe değerlerinin alçaltılmasıyla ilgilenir. Bundan önceki bölümlerde sistemin gürbüz performans ve kararlılığının üzerinde durmuştuk. Bu bölümde ise iki farklı \mathcal{H}_∞ kontrolör tasarımı yöntemi üzerinde durarak \mathcal{H}_∞ optimizasyon problemimizin çözümü üzerinde duracağız.

İlk üzerinde duracağımız \mathcal{H}_∞ kontrolör tasarımı yöntemi olası sonsuz boyutlu, doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemler için kontrol tasarımı yöntemidir. Bu tasarımı yönteminde operatör teknikleri kullanılarak çözüme gidilecektir.

Diğer kontrolör tasarımı yöntemi ise, sonlu boyutlu, doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemler için kontrolör tasarımı yöntemidir. Bu kontrolör tasarımı yönteminde ise durum-uzay teknikleri kullanılacaktır.

4.1. Skew Toeplitz Yaklaşımı

Gürbüz kararlılık, gürbüz performans ve bozucu azaltımı problemlerini karma hassasiyet problemi olarak şu şekilde gösterebiliriz [14],

$$\gamma_{opt} := \inf_{[K,P] \text{ kararlı}} \left\| \begin{bmatrix} W_1(1 + PK)^{-1} \\ W_2PK(1 + PK)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty. \quad (40)$$

Yukarıdaki iki blok \mathcal{H}_∞ probleminde amaç bir \mathcal{H}_∞ optimal K_{opt} kontrolörünün bulunmasıdır. Bulunan K_{opt} kontrolörü nominal planti kararlı kılar ve \mathcal{H}_∞ optimal performans değeri γ_{opt} değerini verir,

$$\gamma_{opt} := \left\| \begin{bmatrix} W_1(1 + PK_{opt})^{-1} \\ W_2PK_{opt}(1 + PK_{opt})^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty.$$

W_1 ve W_2 kontrol problemi ile ilişik uygun ağırlıklardır. Karma hassasiyet probleminin çözümü için plant ve ağırlıklar üzerinde bazı kabullenmelerde bulunacağız.

Plantimizin bundan önce yaptığımız Kabullenme 3.1'i sağladığını varsayıyoruz.

Kabullenme 4.1 W_1 ağırlığını gerçek rasyonel ve $W_1, W_1^{-1} \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$, W_2 ağırlığını ise, $W_2 = W_m$, yani $(W_2N_2), (W_2N_2)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ olarak kabul edeceğiz.

P transfer fonksiyonunun, iki $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ fonksiyonun oranı olarak $P(s) = N(s)/D(s)$ ayrıştırabildiğimizi farzedelim. Bu durumda, Bezout eşitliğini sağlayan

$$N(s)X(s) + D(s)Y(s) = 1 \quad (41)$$

$X(s), Y(s) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ fonksiyonları vardır. Eğer bu tür bir ayrıştırma varsa $N(s), D(s)$ fonksiyonları $P(s)$ transfer fonksiyonunun asal ayrıştırması olur ve

sistemi kararlaştıran bir kontrolörün varlığı için bu tür bir ayrıştırma gereklidir [31].

Teorem 4.1 [14],[26]: İki $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ fonksiyonun oranı olan K kontrolörü, eğer ve ancak kontrolör

$$K(s) = \frac{X(s) + D(s)Q(s)}{Y(s) - N(s)Q(s)} \quad (42)$$

ise P plantini kararlı kılar. Burada $Q(s) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ parametresi kontrolör tasarımına göre seçilen bir parametredir.

Sürekli zamanda, \mathbb{C}_+ düzleminde ağırlıklar üzerinde yaptığımız kabulleme, Bezout eşitliği ve kontrolör parametrizasyonu, kesikli zamanda \mathbb{D} düzlemi için de geçerlidir.

Tek girdi tek çıktı \mathcal{H}_∞ problemin en genel amacı,

$$\inf_{q \in \mathcal{H}_\infty} \|\varphi - q\|_\infty \quad (43)$$

ifadesini sağlayan $q \in \mathcal{H}_\infty$ fonksiyonunun bulunmasıdır. Burada $\varphi \in \mathcal{L}_\infty$ bilinen bir fonksiyon ve m bir iç fonksiyon olmak üzere, φ genellikle $\varphi = m^*w$ formundadır. Bu problemin çözümü için kullanacağımız operatör yöntemi, *skew toeplitz* olarak adlandırılır. Bu yöntemin rahat anlaşılabilmesi için ilk olarak tek blok bir sistemi ele alabiliriz. Ağırlıklı hassasiyet minimizasyonu problemini kesikli zamanda \mathbb{D} düzleminde ele almaya başlarsak, verilen bir $w_1 \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ ağırlık fonksiyonu ile amaç, optimal hassasiyet kriteri

$$\gamma_{opt} = \inf_{[k,p]} \inf_{\text{kararlı}} \|w_1(1 + pk)^{-1}\|_\infty \quad (44)$$

ve γ_{opt} değerini sağlayan bir $k_{opt} \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{T})$ optimal kontrolörün bulunmasıdır. Sistemimizin kararlı olduğunu varsayarsak, Bezout denklemini (41) sağlayacak şekilde $d(z) = 1$, $n(z) = p$, $y(z) = 1$, ve $x(z) = 0$ olarak seçilirse planti kararlı kılan tüm kontrolörler aşağıdaki formda olurlar;

$$k(z) = \frac{q(z)}{1 - p(z)q(z)}, \quad q \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}) \quad (45)$$

(45), (44) ifadesinde yerine yerleştirilirse,

$$\gamma_{opt} = \inf_{q \in \mathcal{H}_\infty} \|w_1(1 - pq)\|_\infty$$

olur. Plant ve ağırlıklar üzerinde yaptığımız kabullenmelerden dolayı n_1 ve w_1 tersi alınabilen fonksiyonlardır. $q_1 := w_1 n_1 q$ olarak tanımlarsak, buradan γ_{opt} ifadesi son olarak şu şekilde yazılır;

$$\gamma_{opt} = \inf_{q_1 \in \mathcal{H}_\infty} \|w_1 - m_n q_1\|_\infty \quad (46)$$

Aslında (46), ifadesi (43) ifadesindeki tek blok \mathcal{H}_∞ kontrol probleminin bir benzeridir. Yukarıda bahsi geçen tek girdi tek çıktı problemine (43), (46) dikkat edilirse, aslında bu problem herhangi bir \mathcal{L}_∞ fonksiyonundan herhangi

bir \mathcal{H}_∞ fonksiyonuna olan en kısa uzunluk demek olan Nehari probleminin kendisidir, ve bu problemin çözümü ise Hankel operatörünün, Γ_{m^*w} , normu cinsinden ifade edilebilir .

Teorem 4.2 [14]: Herhangi bir $\varphi \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{T})$ için,

$$\inf_{q \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})} \|\varphi - q\|_\infty = \|\Gamma_\varphi\|.$$

Yukarıdaki teorem ile (46) probleminin çözümü için,

$$\gamma_{opt} = \|\Gamma_{m^*w_1}\|$$

olarak yazabiliriz. \mathbf{T} , $\mathcal{H}(m)$ uzayı üzerine sıkışmış kaydırma operatörü olmak üzere $\Gamma_{m^*w_1}$ ile Sarason operatörü $w_1(\mathbf{T})$ arasında aşağıdaki şekilde bir ilişki vardır,

Teorem 4.3 [14]: $\gamma_{opt} = \|\Gamma_{m^*w_1}\| = \|w_1(\mathbf{T})\|$.

Yukarıdaki teoremlerden de anlaşılacağı üzere, optimal performans seviyesi γ_{opt} değerinin hesaplanabilmesi için, $\|w_1(\mathbf{T})\|$ sonsuz ranklı operatörün normunun hesaplanması gerekmektedir. Bu operatörün normu, temel normunun ve en büyük tekil değerinin en büyük olanına eşittir. Bu değerlerden $\|w_1(\mathbf{T})\|$ operatörünün temel normu,

$$\|w_1(\mathbf{T})\|_e = \max_{\theta} \{ |w_1(e^{j\theta})| \} \quad (47)$$

şeklinde hesaplanır. Bu ifadedeki $e^{j\theta}$, $m(z)$ iç fonksiyonunu birim çember üzerinde tanımsız yapan temel tekilliklerdir (essential singularity). Yukarıdaki ifadeden hesaplanan değer, γ_{opt} için en küçük sınır değerini vermektedir. Eğer (46) ifadesinden $q_1 = 0$ seçilirse, bu durumda bulunan $\|w_1\|_\infty$ değeri γ_{opt} için en üst sınır değeri olur. Eğer $\|w_1(\mathbf{T})\| > \|w_1(\mathbf{T})\|_e$ olduğunu varsayarsak, optimal performans seviyesi γ_{opt} değerinin bulunabilmesi için $w_1(\mathbf{T})$ operatörünün $\|w_1(\mathbf{T})\|_e$ ve $\|w_1\|_\infty$ arasındaki en büyük tekil değerini bulmak gerekmektedir. $\rho \in (\|w_1(\mathbf{T})\|_e, \|w_1\|_\infty)$ olan bir tekil değer olmak üzere, $w_1(\mathbf{T})$ için tekil değer tekil vektör denklemi,

$$(\rho^2 \mathbf{I} - w_1(\mathbf{T})^* w_1(\mathbf{T}))y = 0. \quad (48)$$

şeklinde yazılır. w_1 ağırlığını gerçek rasyonel ve $w_1, w_1^{-1} \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ olarak kabul ettiğimizden $w_1(z) = b(z)/k(z)$ olarak yazabiliriz, burada $b(z)$ ve $k(z)$ birer polinom ve $1/k \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ olur. Dolayısıyla $w_1(\mathbf{T}) = b(\mathbf{T})k(\mathbf{T})^{-1}$ olarak yazabiliriz, öyle ki $k(\mathbf{T})^{-1} = \frac{1}{k}(\mathbf{T})$. b ve k polinomlarını en büyük derecesi n olmak üzere,

$$b(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n.$$

$$k(z) = k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \dots + k_n z^n$$

şekilde yazarsak, b_n veya $k_n \neq 0$ olmak zorundadır.

$u := k(\mathbf{T})^{-1}y$ olarak tanımlarsak, $u \in \mathcal{H}(m)$ olur eğer ve ancak $y \in \mathcal{H}(m)$ ise. $w_1(\mathbf{T})$ üzerinde yaptığımız notasyonu ve tanımladığımız $u \in \mathcal{H}(m)$ tekil vektörünü kullanarak ve $\gamma_{opt} > \|w_1(\mathbf{T})\|_e$ olarak varsayarak, (48) ifadesini,

$$(b(\mathbf{T})^*b(\mathbf{T}) - \rho^2k(\mathbf{T})^*k(\mathbf{T}))u(z) = 0. \quad (49)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliğin sağlanabilmesi, eğer ve ancak $y \in \mathcal{H}(m)$ ise mümkündür. Bu eşitlik sağlanır ise γ_{opt} değeri de ρ 'nun en büyük değeridir.

$\mathbf{A}_\rho := b(\mathbf{T})^*b(\mathbf{T}) - \rho^2k(\mathbf{T})^*k(\mathbf{T})$ olarak tanımlanırsa, (49) ifadesi $\mathbf{A}_\rho u(z) = 0$ formundadır. \mathbf{A}_ρ formunda olan operatörlere *skew toeplitz* operatörleri denmektedir. Bu skew toeplitz operatörün \mathcal{H}_∞ uzayında tersi alınabilme koşulları optimal performans seviyesi γ_{opt} değerini verir [14].

Teorem 4.4 [14]: m herhangi bir iç fonksiyon olmak üzere, $\mathbf{A} : \mathcal{H}(m) \rightarrow \mathcal{H}(m)$ olarak tanımlı sınırlı bir doğrusal operatör olsun ve \mathbf{A} operatörü $\mathcal{H}(m)$ uzayında tanımlı bir sıkışmış kaydırma operatörü \mathbf{T} ile yerdeğiştirebilme özelliğine sahip olsun, $\mathbf{TA} = \mathbf{AT}$. Bu durumda, $\mathbf{A} = f(\mathbf{T})$ ve $\|\mathbf{A}\| = \|f\|_\infty$ olan, $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ uzayında bir $f \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ fonksiyonu vardır.

Optimum kontrolör q_1^{opt} ise Sarason teoremi ile elde edilebilir. $w_1(\mathbf{T})$ operatörü sıkışmış kaydırma operatörü \mathbf{T} ile yerdeğiştirme özelliğinden, $w_1(\mathbf{T})\mathbf{T} = \mathbf{T}w_1(\mathbf{T})$ olarak yazılır. Sarason teoreminden dolayı $s_{opt}(\mathbf{T}) = w_1(\mathbf{T})$ ve $\|s_{opt}\|_\infty = \|w_1(\mathbf{T})\| = \gamma_{opt}$ koşulunu sağlayan bir $s_{opt} \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ fonksiyonu vardır. $s_{opt}(\mathbf{T}) = w_1(\mathbf{T})$ olmak üzere, $s_{opt}(z) = w_1(z) - m(z)q_1^{opt}(z)$ bazı $q_1^{opt}(z) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ için.

Teorem 4.5 [14]: $s_{opt}(z) = w_1(z) - m(z)q_1^{opt}(z) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ şu şekilde elde edilir,

$$s_{opt}(z) = \frac{w_1(\mathbf{T})y_{opt}(z)}{y_{opt}(z)} = \frac{b(\mathbf{T})u_{opt}(z)}{k(\mathbf{T})u_{opt}(z)}. \quad (50)$$

Burada $y_{opt}(z) = k(\mathbf{T})u_{opt}(z)$, γ_{opt} seviyesini sağlayan tekil vektör ve $u_{opt}(z)$ ise, $(b(\mathbf{T})^*b(\mathbf{T}) - \gamma_{opt}^2k(\mathbf{T})^*k(\mathbf{T}))u_{opt}(z) = 0$ ifadesi tekil değer tekil vektör denkleminde çıkartılır.

4.1.1 γ_{opt} Değerinin Hesaplanması

Optimal performans seviyesi γ_{opt} değerinin hesaplanması için (49) eşitliğinin sol tarafını açık bir şekilde yazabiliriz. Dolayısıyla sıfırdan farklı bir $u \in \mathcal{H}(m)$ tekil vektörünü verecek ρ için yeterli ve gerekli koşullar daha açık olarak bulunur ve bu koşullar sayesinde γ_{opt} değerini hesaplayacağız. $u \in \mathcal{H}(m)$ tekil vektörü,

$$u(z) = \phi_0 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \dots$$

olarak yazılırsa, bu durumda $(m^*u)(z)$ ifadesi

$$(m^*u)(z) = \phi_{-1}z^{-1} + \phi_{-2}z^{-2} + \dots \quad (51)$$

olur. \mathbf{A}_ρ operatörün açılımını yaparak $u(z) \in \mathcal{H}(m)$ vektörü üzerindeki etkisini şu şekilde yazarız,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\rho u(z) &= (b(z^{-1})b(z) - \rho^2k(z^{-1})k(z))u(z) \\ &\quad - [r_1(z) \dots r_{2n}(z)]\phi \end{aligned} \quad (52)$$

yukarıdaki ifade, $u(z)$ tekil vektörünün bir çarpanı olan bir polinomdan, $\phi = [\phi_{-n}^* \dots \phi_{-1}^* \phi_0^* \dots \phi_{n-1}^*]^*$ olan sabit bir vektörden ve ρ 'ya bağlı açıkça hesaplanabilen $r_j(z)$, $j = 1 \dots 2n$ olan fonksiyonlardan oluşur. ρ bir tekil değer olmak üzere, $\mathbf{A}_\rho u(z) = 0$ ifadesini sağlayan sıfırdan farklı bir $u(z) \in \mathcal{H}(m)$ tekil vektörünü,

$$u(z) = \frac{R_\rho(z)\phi}{b(z^{-1})b(z) - \rho^2 k(z^{-1})k(z)} \quad (53)$$

formunda yazabilmemiz gerekmektedir. Burada $R_\rho(z)$, $1 \times 2n$ fonksiyonlar vektörü ve ϕ ise $2n \times 1$ sabit bir vektördür. Fakat (53) ifadesi, paydanın $2n$ tane kökü, z_j , $j = 1, 2, 3, \dots, 2n$, için tanımsız olur. Dolayısıyla, sıfırdan farklı $u(z) \in \mathcal{H}(m)$ için $\phi \in \mathbb{C}^{2n}$ sıfırdan farklı olmak üzere

$$R_\rho(z_j)\phi = 0 \quad \forall j = 1 \dots 2n.$$

olmalıdır. Buradan $2n$ tane denklem ve $2n$ tane bilinmeyen vardır, dolayısıyla eğer ve ancak

$$\begin{bmatrix} R_\rho(z_1) \\ \vdots \\ R_\rho(z_{2n}) \end{bmatrix} \quad (54)$$

tekil ise sıfırdan farklı bir çözüm vardır. Sıfırdan farklı bir $u(z) \in \mathcal{H}(m)$ tekil vektörünü bulmak için R_ρ fonksiyonlar vektörünü oluşturmak zorundayız. Bunun için (49) ve (52) denklemlerini açık olarak yazıp, $u(z)$ tekil vektörünü önündeki polinom ile çekersek, R_ρ fonksiyonlar vektörünü elde etmiş oluruz. (49) ve (52) denklemlerini açık olarak yazmak için her bir operatörün etkisini ayrı ayrı incelememiz gerekecektir.

Sıkışmış kaydırma operatörün tanımından $b(\mathbf{T})$ operatörünün $u(z) \in \mathcal{H}(m)$ tekil vektörüne etkisini,

$$b(\mathbf{T})u(z) = b(\mathbf{S})u(z) - m(\mathbf{S})\mathbf{P}_+(m^*bu)(z) \quad (55)$$

şeklinde açıklayabiliriz.

$b(z)$ bir polinom olduğu için $m^*(z)$ ile yerdeğiştirebilir, bu durumda $(m^*u)(z)$ ifadesi (51) gibi olur. Dolayısıyla, $\mathbf{P}_+(m^*bu)(z)$ dönüşümü,

$$\mathbf{P}_+(m^*bu)(z) = V_+(z)\mathcal{B}\phi_-$$

olur, öyle ki,

$$V_+(z) := [1 \quad z \quad \dots \quad z^{n-1}], \quad \mathcal{B} := \begin{bmatrix} b_n & \dots & b_1 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_n \end{bmatrix}, \quad \phi_- := \begin{bmatrix} \phi_{-n} \\ \vdots \\ \phi_{-1} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa. Benzer şekilde, $k(\mathbf{T})$ operatörünün $u(z) \in \mathcal{H}(m)$ tekil vektörüne etkisini şu şekilde açıklayabiliriz,

$$k(\mathbf{T})u(z) = k(\mathbf{S})u(z) - m(\mathbf{S})\mathbf{P}_+(m^*ku)(z) \quad (56)$$

$\mathbf{P}_+(m^*ku)(z)$ için,

$$\mathbf{P}_+(m^*ku)(z) = V_+(z)\mathcal{K}\phi_-$$

öyle ki

$$\mathcal{K} : = \begin{bmatrix} k_n & \dots & k_1 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

olarak tanımlarsa. Bu durumda (49) aşağıdaki biçimde sadeleşebilir,

$$(b(\mathbf{S})^*b(\mathbf{S}) - \rho^2k(\mathbf{S})^*k(\mathbf{S}))u(z) - b(\mathbf{S})^*m(\mathbf{S})V_+(z)\mathcal{B}\phi_- + \rho^2k(\mathbf{S})^*m(\mathbf{S})V_+(z)\mathcal{K}\phi_- = 0. \quad (57)$$

$m(z)$ iç fonksiyonunu bir polinom olarak, $m(z) = m_0 + m_1z + m_2z^2 + \dots$ yazalım ve bu polinomun katsayılarından da aşağıdaki şekilde bir \mathcal{M} matrisi tanımlayalım,

$$\mathcal{M} : = \begin{bmatrix} m_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ m_{n-1} & \dots & m_0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Sıkışmış kaydırma operatörü \mathbf{T} 'nin eşleği için $\mathbf{T}^* = \mathbf{S}_{|n}^*$ olarak ifade etmiş-tik. Bu durumda \mathbf{S}^* operatörünün etkisini daha açık olarak yazmak mümkün olur, şöyle ki,

$$b(\mathbf{S})^*(m(\mathbf{S})V_+(z)) = V_+(z)m(z)b(z^{-1}) - V_-(z)\mathcal{B}^*\mathcal{M}$$

öyle ki \mathcal{B}^* , \mathcal{B} matrisinin transpozu, $V_-(z)$ ise aşağıdaki biçimde tanımlandığı gibidir,

$$V_-(z) : = [z^{-n} \quad \dots \quad z^{-1}].$$

Benzer biçimde,

$$k(\mathbf{S})^*(m(\mathbf{S})V_+(z)) = V_+(z)m(z)k(z^{-1}) - V_-(z)\mathcal{K}^*\mathcal{M}$$

öyle ki \mathcal{K}^* , \mathcal{K} matrisinin transpozu olmak üzere.

Aşağıdaki biçimde $2n$ derecesinde bir polinom tanımlayalım;

$$\chi_\rho(z) : = z^{-n}(b(z^{-1})b(z) - \rho^2k(z^{-1})k(z)) \quad (59)$$

Buradan, $\chi_\rho(z) = z^n(\chi_{-n}z^{-n} + \dots + \chi_0 + \dots + \chi_n z^n)$ olarak açarsak, $\chi_i = \chi_{-i}$ olur ve bu polinomun katsayılarından aşağıdaki şekilde bir X matrisi ve (52) ifadesindeki $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ için ϕ_+ vektörü tanımlayalım,

$$X = \begin{bmatrix} \chi_n & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \chi_{-1} & \dots & \chi_n \end{bmatrix}, \quad \phi_+ = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}.$$

Buradan (57) şu şekilde yazılabilir,

$$(b(\mathbf{S})^*b(\mathbf{S}) - \rho^2k(\mathbf{S})^*k(\mathbf{S}))u(z) = (b(z^{-1})b(z) - \rho^2k(z^{-1})k(z))u(z) - \mathbf{P}_-(b(z^{-1})b(z) - \rho^2k(z^{-1})k(z)) = z^n\chi_\rho(z) - V_-(z)X\phi_+$$

Tanımladığımız $2n$ dereceli polinomu kullanarak buradan, u tekil vektörünü ve önündeki polinomu çekerek fonksiyonlar vektörünü yalnız bırakabiliriz,

$$\chi_\rho(z)u(z) = R_-(z)\phi_- + R_+(z)\phi_+ \quad (60)$$

öyle ki

$$R_-(z) = V_+(z)(m(z)(z^{-n}b(z^{-1})\mathcal{B} - \rho^2z^{-n}k(z^{-1})\mathcal{K}) - (\mathcal{B}^*\mathcal{M}\mathcal{B} - \mathcal{K}^*\mathcal{M}\mathcal{K}))\phi_-$$

$$R_+(z) : = V_+(z)X\phi_+$$

Kabullenme 4.2 $\chi_\rho(z)$ polinomunun kökleri sıfırdan ve birbirinden farklıdır.

Kabullenme 4.3 Eğer ζ , $\chi_\rho(z)$ polinomunun kökü ise, o zaman $m(\zeta) \neq 0$.

$\chi_\rho(z)$ polinomunun köklerini z_1, z_2, \dots, z_{2n} olarak sıralarsak, ki r tanesi kapalı birim disk $\overline{\mathbb{D}}$ içinde, ve geri kalanı dışında olsun. Simetriden dolayı eğer ζ , χ_ρ polinomunun bir kökü ise, o zaman $1/\zeta$ aynı zamanda kökü olur. Dolayısıyla, kökleri şu şekilde sıralayabiliriz, $z_{n+i} = 1/z_i$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorem 4.6 [14]: ρ üzerindeki $\|w_1(\mathbf{T})\|_e < \rho < \|w_1\|_\infty$ kabullenmeye ve yukarıdaki kabullenmelere dayanarak, ρ , $w_1(\mathbf{T})$ operatörünün tekil değeridir, eğer ve ancak

$$\begin{bmatrix} R_-(z_1) & R_+(z_1) \\ \vdots & \vdots \\ R_-(z_{2n}) & R_+(z_{2n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_- \\ \phi_+ \end{bmatrix} = 0 \quad (61)$$

denklemini sağlayan sıfırdan farklı bir $\begin{bmatrix} \phi_- \\ \phi_+ \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$ varsa.

(61) denkleminde $2n$ boyutlu matrisi bazı sadeleştirmeler ile n boyuta düşürülebilir. Bunun için,

$$\mathcal{L} : = \mathcal{B}^*\mathcal{M}\mathcal{B} - \mathcal{K}^*\mathcal{M}\mathcal{K} \quad (62)$$

ve

$$F(z) : = m(z)(z^{-n}b(z^{-1})\mathcal{B} - \rho^2z^{-n}k(z^{-1})\mathcal{K}) \quad (63)$$

tanımlamaları yaparsak (61) ifadesi

$$\begin{bmatrix} V_+(z_1)(F(z_1) - \mathcal{L}) & V_+(z_1)X \\ \vdots & \vdots \\ V_+(z_{2n})(F(z_{2n}) - \mathcal{L}) & V_+(z_{2n})X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_- \\ \phi_+ \end{bmatrix} = 0 \quad (64)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\mathcal{V}_+ := \begin{bmatrix} V_+(z_1) \\ \vdots \\ V_+(z_n) \end{bmatrix}, \mathcal{V}_- := \begin{bmatrix} V_+(z_1^{-1}) \\ \vdots \\ V_+(z_n^{-n}) \end{bmatrix}$$

ve,

$$\mathcal{F}_+ := \begin{bmatrix} V_+(z_1)F(z_1) \\ \vdots \\ V_+(z_n)F(z_n) \end{bmatrix}, \mathcal{F}_- := \begin{bmatrix} V_+(z_1^{-1})F(z_1^{-1}) \\ \vdots \\ V_+(z_n^{-1})F(z_n^{-1}) \end{bmatrix}$$

tanımlarını yaparsak ve $\phi'_+ := \mathcal{V}_+ X \phi_+$ olarak tanımlarsak, (64) ifadesi

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_+ - \mathcal{V}_+ \mathcal{L} & I \\ \mathcal{F}_- - \mathcal{V}_- \mathcal{L} & \mathcal{V}_- \mathcal{V}_+^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_- \\ \phi'_+ \end{bmatrix} = 0 \quad (65)$$

şeklinde yazılır ve buradan da ϕ'_+ ile ϕ_- arasında, $\phi'_+ = -(\mathcal{F}_+ - \mathcal{V}_+ \mathcal{L})\phi_-$, biçiminde bir ilişki sağlayarak (61) ifadesi en son, $(\mathcal{V}_-^{-1} \mathcal{F}_- - \mathcal{V}_+^{-1} \mathcal{F}_+)\phi_- = 0$ formunda yazılabilir.

Teorem 4.7, [14]: $R_\rho := \mathcal{V}_-^{-1} \mathcal{F}_- - \mathcal{V}_+^{-1} \mathcal{F}_+$ olarak tanımlanırsa, Teorem 4.5'deki varsayımları kullanarak, γ_{opt} değeri, sıfırdan farklı bir $\phi_- \in \mathbb{C}^n$ için,

$$R_\rho \phi_- = 0 \quad (66)$$

durumunu sağlayan en büyük ρ değerine eşittir.

$w_1(\mathbf{T})$ operatörünün tüm tekil değerleri R_ρ matrisini tekil yapan ρ değerleri ile bulunur. R_ρ matrisi oluşturulduktan sonra, ρ değerini, en büyük üst sınır olan $\|w_1\|_\infty$ değerinden azaltarak R_ρ matrisinin tekil değerleri araştırılır ve en küçük tekil değeri veren ρ 'lardan en büyüğü γ_{opt} değerini verir [14].

4.1.2 Optimal Kontrolör

γ_{opt} bulunduktan sonra, optimal kontrolör $R_{\gamma_{opt}} \phi_-^{opt} = 0$ ifadesini sağlayan, sıfırdan farklı ϕ_-^{opt} ile bulunur. $\phi'_+ := \mathcal{V}_+ X \phi_+$ ve $\phi'_+ = -(\mathcal{F}_+ - \mathcal{V}_+ \mathcal{L})\phi_-$ ilişkilerinden, ϕ'_+ ,

$$X \phi'_+ = -(\mathcal{V}_+^{-1} \mathcal{F}_+ - \mathcal{L})\phi_-^{opt}. \quad (67)$$

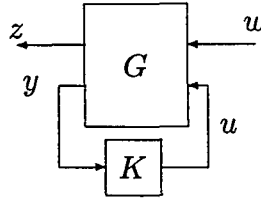
ifadesinden bulunur. Bulunan optimal ϕ_+^{opt} ve ϕ_-^{opt} ifadelerinden yararlanılarak, (60) ifadesi ile optimal tekil vektör

$$u_{opt}(z) = \frac{V_+(z)((F(z) - \mathcal{L})\phi_-^{opt} + X \phi_+^{opt})}{\chi_{\gamma_{opt}}(z)}$$

$$u_{opt}(z) = \frac{V_+(z)(F(z) - \mathcal{V}_+^{-1} \mathcal{F}_+)\phi_-^{opt}}{\chi_{\gamma_{opt}}(z)} \quad (68)$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.5 ile $s_{opt}(z) = w_1(z) - m(z)q_1^{opt}(z)$ olduğundan,

$$s_{opt}(z) = \frac{(b(\mathbf{T})u_{opt})(z)}{(k(\mathbf{T})u_{opt})(z)} = \frac{b(z)u_{opt}(z) - m(z)V_+(z)\mathcal{B}\phi_-^{opt}}{k(z)u_{opt}(z) - m(z)V_+(z)\mathcal{K}\phi_-^{opt}}$$



Şekil 4.1: Standart Problem

olarak bulunur. $s_{opt}(z) = w_1(z) - m(z)q_1^{opt}(z)$ ifadesinden $q_1^{opt}(z)$ çekilirse, $q_1^{opt}(z) = (w_1(z) - s_{opt}(z))/m(z)$ olarak bulunur. Bulunan $q_1^{opt}(z)$ ifadesinde daha önce tanımlanan $z = \frac{s-1}{s+1}$ uygun dönüşüm ile $Q^{opt}(s)$ bulunulur. (42) ifadesinde bulunan $Q^{opt}(s)$ yerine konulursa, $K_{opt}(s)$ fonksiyonu elde edilir.

4.2. Durum-Uzayı Yaklaşımı

\mathcal{H}_∞ kontrol tasarlanacak sistemin blok diagramı Şekil 4.1'de verildiği gibi olsun. Blok diagramda G ve K gerçek rasyonel ve düzgün, plant ve kontrolörü ifade etmektedir. Şekil 4.1'den sistemdeki G plantini,

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (69)$$

olarak yazarsak, sistemdeki girdilerden çıktılara olan ilişkiyi şu şekilde yazabiliriz;

$$z = G_{11}w + G_{12}u, \quad (70)$$

$$y = G_{21}w + G_{22}u, \quad (71)$$

$$u = Ky. \quad (72)$$

Yukarıdaki ifadelerle birlikte, w 'den z 'ye kapalı döngü transfer matrisi T_{zw} şu şekilde yazılır,

$$T_{zw} = G_{11} + G_{12}K(1 - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (73)$$

Ayrıca yukarıdaki G ve K transfer fonksiyon matrislerinin durum-uzay modellerinin ve gerçeklemelerinin mevcut olduğunu, ayrıca sistemin kararlaştırılabilir (stabilizable) ve sezinlenebilir (detectable) olduğunu kabul edelim. Eğer K kontrolörü sistemin iç kararlılığını sağlıyorsa, bu kontrolörü uygun (admissible) sayabiliriz. Optimal \mathcal{H}_∞ kontrolde amaç, $\|T_{zw}\|_\infty$ ifadesini minimize edecek uygun kontrolörleri bulmaktır. \mathcal{H}_∞ kontrolde pratik olarak çoğu zaman optimal bir kontrol tasarlanmak istenmez, bunun yerine altoptimal kontrolörler tercih edilir. Altoptimal kontrol tasarımında ise amaç, verilen bir $\gamma > 0$ için $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ koşulunu sağlayan kontrolörleri bulmaktır.

K kontrolörü eğer G sistemini kararlı kılan bir kontrolör ise bu durumda iç kararlılık $T_{zw} = \mathcal{F}_\ell(G, K) \in \mathcal{RH}_\infty(\mathbb{C}_+)$ olduğunu garantiler. Biraz sonra vereceğimiz sav, kapalı döngünün içten kararlı olduğunu ve

$T_{zw} = \mathcal{F}_\ell(G, K) \in \mathcal{RH}_\infty(\mathbb{C}_+)$ olduğunu sağlayacaktır. Sav için G ve K transfer fonksiyon matrislerin kararlaştırılabilir ve sezinlenebilir gerçeklemelerinin aşağıdaki gibi olduğunu kabul edelim,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} &= G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \\ G(s) &= \left[\begin{array}{cc|cc} G_{11} & G_{12} & & \\ G(s) & G_{22} & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right], \\ K(s) &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Sav 4.1 [15]: G ve K 'nin gerçeklemelerinin kararlaştırılabilir ve sezinlenebilir olduğunu kabul edelim,

- (a) Eğer $\left[\begin{array}{cc|c} A - \lambda I & B_2 & \\ \hline C_1 & D_{12} & \end{array} \right]$, tüm $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ için, tam sütun ranklı ise, transfer fonksiyonu $T_{zw} = \mathcal{F}_\ell(G, K)$ olan kapalı döngü sistem sezinlenebilirdir.
- (b) Eğer $\left[\begin{array}{cc|c} A - \lambda I & B_1 & \\ \hline C_2 & D_{21} & \end{array} \right]$ tüm $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ için, tam satır ranklı ise, transfer fonksiyonu $T_{zw} = \mathcal{F}_\ell(G, K)$ olan kapalı döngü sistem kararlaştırılabilir-dir.

Ek olarak, (a) ve (b) sağlanırsa, eğer ve ancak $T_{zw} \in \mathcal{RH}_\infty$ ise K iç kararlılığı sağlar.

\mathcal{H}_∞ kontrol problemini biraz sadeleştirmek için sistemdeki G transfer matrisi üzerinde bazı kabullenmeler yapacağız.

G transfer matrisinin gerçeklemesi aşağıdaki gibi olsun,

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

Ve aşağıdaki kabullenmeleri yapalım,

- (i) (A, B_1) kontrol edilebilir ve (C_1, A) ise gözlenebilir
- (ii) (A, B_2) kararlaştırılabilir ve (C_2, A) ise sezinlenebilir
- (iii) $D_{12}^* \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$
- (iv) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

Yukarıdaki kabullenmelerden açıkça görülmektedir ki, $D_{11} = 0$ ve $D_{22} = 0$. $D_{22} \neq 0$ olması problemi çok zora sokmamaktadır, optimal veya bir altopimal kontrolör bulunduktan sonra, $D_{22} \neq 0$ için yeniden yazılabilir. Fakat $D_{11} \neq 0$ problem çözümündeki formülleri daha da karmaşık yapmaktadır.

\mathcal{H}_∞ problem çözümü iki tane Hamilton matrisi içerir;

$$\mathcal{H}_\infty := \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^* \\ -C_1^*C_1 & -A^* \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\mathcal{J}_\infty := \begin{bmatrix} A^* & \gamma^{-2}C_1^*C_1 - C_2^*C_2 \\ -B_1B_1^* & -A \end{bmatrix} \quad (75)$$

Teorem 4.8 [21],[20]: $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ durumunu sağlayacak uygun kontrolörler eğer ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanırsa vardır;

- (i) $\mathcal{H}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ ve $X_\infty := \text{Ric}(\mathcal{H}_\infty) > 0$
- (ii) $\mathcal{J}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ ve $Y_\infty := \text{Ric}(\mathcal{J}_\infty) > 0$
- (iii) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

Ayrıca, bu koşullar gerçekleştiği zaman bir altoptimal kontrolör şu şekilde olur,

$$K_{alt}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right]$$

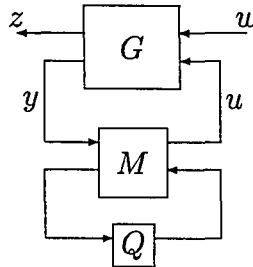
öyle ki,

$$\begin{aligned} \hat{A}_\infty &:= A + \gamma^{-2}B_1B_1^*X_\infty + B_2F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2, & F_\infty &:= -B_2^*X_\infty, \\ L_\infty &:= Y_\infty C_2^* & Z_\infty &:= (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{aligned}$$

Teorem 4.9 [21],[15]: Teorem 4.8'deki (i)'den (iii)'e olan koşullar sağlanırsa, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ durumunu sağlayan tüm uygun kontrolörler için, Şekil 4.2'deki y 'den u 'ya olan tüm transfer matrisler kümesi,

$$M_\infty(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

şeklinde ifade edilir, öyle ki $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ ve $\|Q\|_\infty < \gamma$.



Şekil 4.2: \mathcal{H}_∞ Kontrolör Yapısı

5. DENEYSEL DÜZENEGİN MODELLENMESİ

Bu bölümde modellemesini gerçekleştireceğimiz deneysel düzeneğimizden bahsedeceğiz. Tasarlayacağımız kontrolörün amacı, esnek kolun pozisyonunu kontrol etmek ve aynı zamanda oluşan titreşimin kısa sürede sönümlenmesini sağlamaktır. Dolayısıyla, kolun pozisyonunun kontrolü ve koldaki titreşimlerin sönümlenmesi için, kolun pozisyonunu, hızını ve oluşan bükülmeyi ölçeceğiz. Belirtilen bu ölçümleri alabilmek için, bazı algılayıcılara ihtiyacımız olacaktır.

5.1. Deneysel Düzenegın Tanıtımı

Şekil 5.1'de görülen deneysel düzeneğimiz, en basit anlamda ucunda bir ağırlık olan bir esnek levha, bu levhanın hareketini sağlayan bir DC servo motor ve algılayıcılardan oluşmaktadır.

Deneysel düzeneğimizdeki esnek levha 0.9 m uzunluğunda, 0.0016 m kalınlığında, 0.07 m genişliğinde, 0.3 kg/m doğrusal kütle yoğunluğunda bir levhadır. Elektron mikroskobu ile yapılan ölçümlerde %99 alüminyum olduğu saptanan bu levhanın, Young esneklik modülü alüminyuma ait değer olan 62 GPa olarak kabul edilmiştir. Alan eylemsizlik momenti ise yapılan hesaplamalarla $1.9 \times 10^{-11}\text{ m}^4$ olarak bulunmuştur. Levhanın homojen dağılmış ve bir ucunda da nokta kütle olduğunu varsaydığımız 0.270 kg olarak tarttığımız bir yük vardır. Levhanın diğer ucu ise, kola tork sağlayan bir DC servo motorun miline takılmış bir kuplaj elemanına monte edilmiştir.

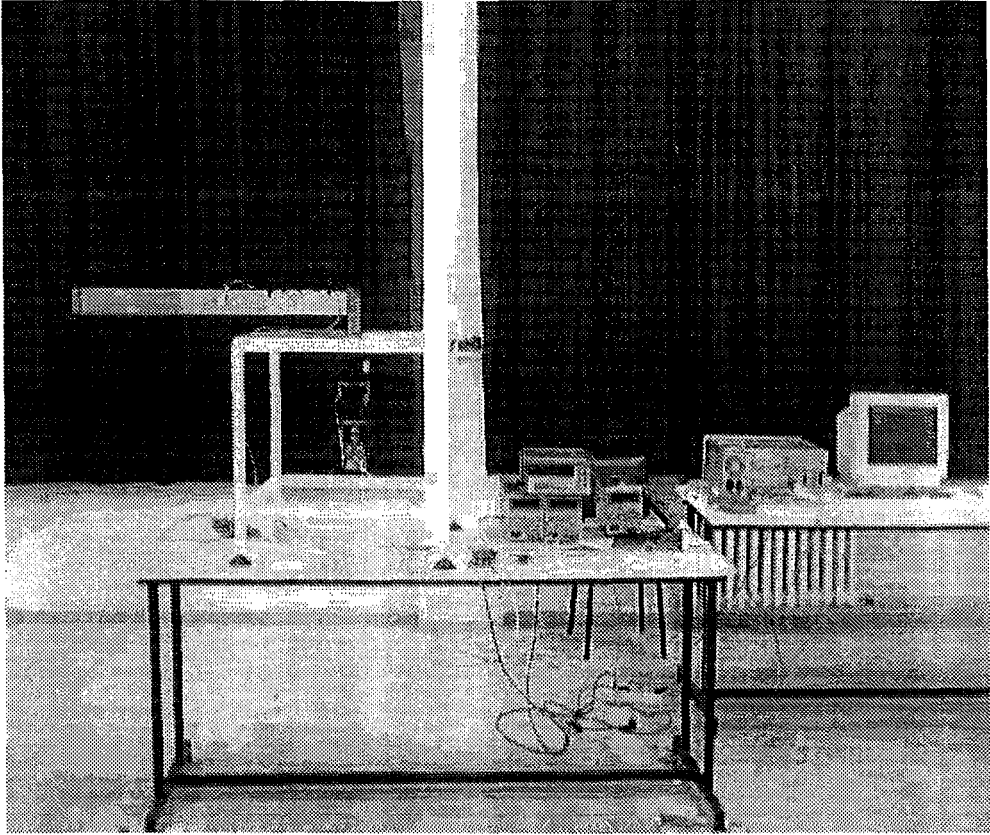
Bautz firmasından alınan, anma (rated) gücü 550 W , anma akımı 21 A , kütle atalet momenti (mass moment of inertia) $0.75 \times 10^{-3}\text{ kgm}^2$ ve tork sabiti 0.35 Nm/A olan Bautz E726MGB modelindeki kalıcı mıknatıslı (permanent magnet) DC servo motor, ELMO Motion firmasından alınan, ELMO SSA 12/55 tipinde anma akımı 12 A ve $10 - 55\text{ V}$ besleme ile beslenen bir servo yükseltici (amplifier) ile sürülmektedir. Bu yükseltici ise maksimum çıkış gerilimi $V = 18\text{ V}$ ve çıkış akımı $I = 5\text{ A}$ olan paralel bağlanmış iki adet Tektronix PS282 DC güç kaynağı ile beslenmektedir.

DC servo motorda bulunan, gerilim sabiti $1000/14\text{ (rpm/V)}$ olan bir tacometre ise motorun açısal hızını vermektedir.

Kolun veya motorun pozisyonu ise, DC servo motorun shaftına bir başka kuplaj elemanı ile yerleştirilmiş, Hohner firmasından satın alınan, 12 bit çözünürlükte, mutlak (absolute) tipte bir MS633A3/4096 Hohner enkoder (encoder) sayesinde ölçülmektedir.

Kolun üzerindeki titreşimi ölçmek için ise kolun her bir yüzüne yarım köprü yapacak şekilde birer gerilme ölçer (strain gauge) yerleştirilmiştir. Bu gerilme ölçerler üzerindeki direnç değişimi ise düşük dirençli kablolarla (leadwire) SC-2043-SG National Instruments 8 kanallı gerilme ölçer sinyal işleme (signal conditioning) kartına taşınmıştır.

Sistemimizi kontrol etmek için ihtiyaç duyduğumuz tüm geribeslemeler, yukarıda belirtilen algılayıcılarla elde edilmektedir. DC servo motoru sürmek



Şekil 5.1: Deneysel Esnek Robot Kolunun Görüntüsü

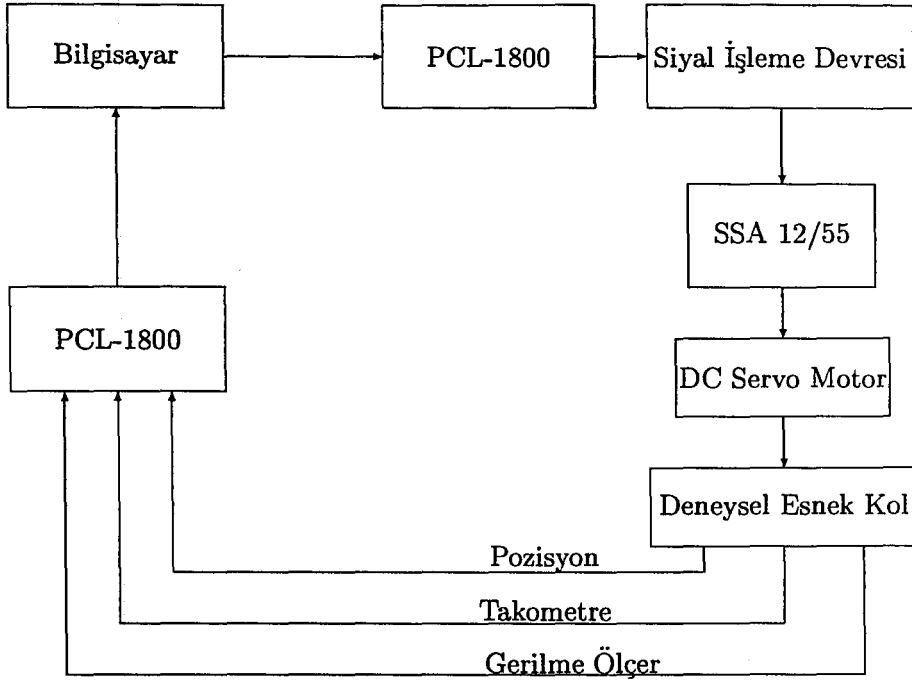
için kullandığımız servo yükselticiyi sürmek ve bu geri beslemeleri işlemek için bir bilgisayarın PCI veri yoluna (Bus) yerleştirilmiş olan Advantech PCL-1800 veri toplama kartı kullanılmıştır.

PCL-1800 veri toplama kartı çıkışları sadece 0-10 volt arasında olduğundan, motoru ters yönde sürmek için gerekecek olan negatif voltajı sağlamak için bir sinyal işleme devresi yapılmıştır. Bu sinyal işleme devresi sayesinde motoru çift yönlü sürebiliriz.

Sistemimizin kontrolü ise, PCL-1800 veri toplama kartına gelen, analog ve sayısal geribesleme sinyallerinin bilgisayarda daha önce tasarlanan kontrolöre göre yazılan C programı ile işlenerek, motorun hareketi için gereken akım gerilim cinsinden PCL-1800 veri toplama kartı aracılığıyla sinyal işleme devresine verilir. Sinyal işleme devresi ise, motora verilecek akımın çift yönlü (bipolar) olmasını sağlayacak şekilde bunu SSA 12/55 servo yükselticiye verir. Bu yükseltici sayesinde gereken akım, gerilimden akıma çevrilerek motor uçlarına iletilir. Sistemimizin bu çalışma yapısını Şekil 5.2'de görüldüğü gibi de özetleyebiliriz.

5.2. Esnek Kolun Dinamiğinin Modellenmesi

Uzunluğu L , doğrusal kütle yoğunluğu $\rho(x)$ ve Young esneklik modülü E olan bir esnek levhanın Şekil 5.3'de olduğu gibi bir DC servo motor aracılığı



Şekil 5.2 Deneysel Düzenegin Diagramı

ile $u(t)$ torku uygulanarak hareketi sağlanmaktadır. Kolun homojen dağılmış olduğunu ve doğrusal kütle yoğunluğunu sabit varsayıyoruz, $\rho(x) = \rho$. Levhanın x noktasındaki katı hal pozisyonundan sapması $r_2 = z(x, t)$ ile belirtilsin. Esnek kolun dx parçasının dirsekten olan vektörel uzaklığı $\mathbf{r}(x, t)$ olarak gösterilirse,

$$\mathbf{r}(x, t) = \mathbf{r}_1(x, t) + \mathbf{r}_2(x, t)$$

$\mathbf{r}_1(x, t)$ ve $\mathbf{r}_2(x, t)$ ifadeleri,

$$\mathbf{r}_1(x, t) = x \cos(\theta(t))\mathbf{i} + x \sin(\theta(t))\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_2(x, t) = -z(x, t) \sin \theta(t)\mathbf{i} + z(x, t) \cos(\theta(t))\mathbf{j}$$

olduğundan $\mathbf{r}(x, t)$ vektörel uzunluğu,

$$\mathbf{r}(x, t) = (x \cos(\theta(t)) - z(x, t) \sin(\theta(t)))\mathbf{i} + (x \sin(\theta(t)) + z(x, t) \cos(\theta(t)))\mathbf{j}$$

şeklinde bulunur. Burada \mathbf{i} ve \mathbf{j} yönleri Şekil 5.3'de gösterilen birim vektörlerdir.

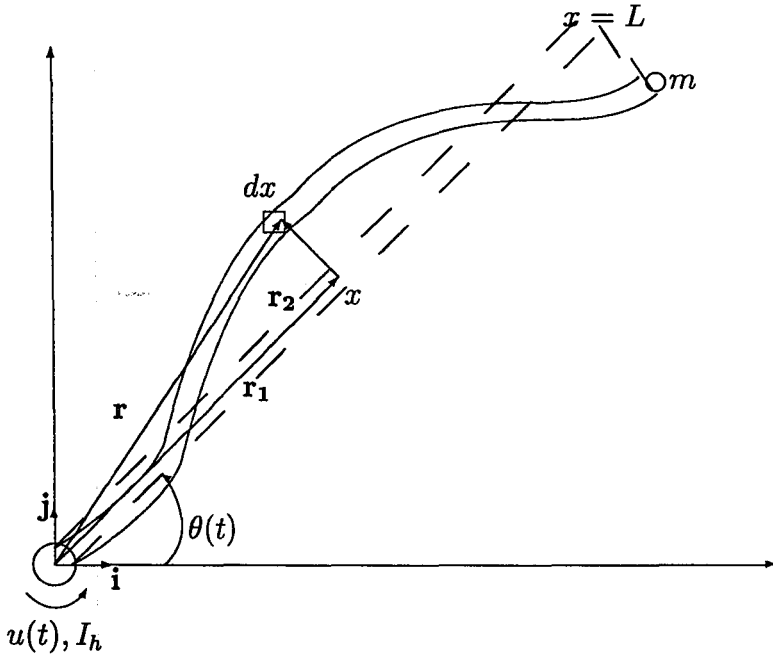
$\mathbf{r}(x, t)$ vektörünün zamana göre türevidi;

$$\dot{\mathbf{r}}(x, t) = (-x\dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) - z_t(x, t) \sin(\theta(t)) - z(x, t)\dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)))\mathbf{i} + (x\dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) + z_t(x, t) \cos(\theta(t)) - z(x, t)\dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)))\mathbf{j}$$

olur.

Sistemdeki kinetik enerjileri yazmak istersek, dirseğin kinetik enerjisi,

$$T_1(t) = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}^2(t).$$



Şekil 5.3 Esnek Kolun Geometrisi

dx parçasının kinetik enerjisi,

$$\hat{T}_2(x, t)dx = \frac{1}{2}\rho dx(\dot{\mathbf{r}}(x, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(x, t)).$$

ve esnek levhanın L ucundaki m kütleli cismin kinetik enerjisi ise,

$$T_3(t) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}}(L, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(L, t)).$$

olur. Esnek levhanın L ucundaki m kütleli cismin kinetik enerjisi yazılırken, cismin kendi etrafında dönmensinden dolayı oluşan kinetik enerjisi ihmal edilmiştir.

Esnemeden kaynaklanan sapmanın karesi kolun x uzaklığının karesine göre çok küçük olduğu varsayılırsa,

$$(x^2 + z(x, t)^2)\dot{\theta}^2(t) \cong x^2\dot{\theta}^2(t).$$

Kinetik enerjileri en son olarak şu şekilde yazabiliriz,

$$T_2(t) = \int_0^L \hat{T}_2(x, t)dx = \int_0^L \frac{1}{2}\rho(x\dot{\theta}(t) + z_t(x, t))^2 dx,$$

$$T_3(t) = \frac{1}{2}m(L^2\dot{\theta}^2(t) + Lz_t(L, t)\dot{\theta}(t) + z_t^2(L, t)).$$

Kol yatay düzlemde hareket ettiğinden, yerçekiminden kaynaklanan potansiyel enerji ihmal edilmiştir. Dolayısıyla, tek potansiyel enerji, esnek koldaki esnmeden kaynaklanan potansiyel enerjidir ve

$$\hat{V}(x, t) = \frac{1}{2}EI_a(z_{xx}(x, t))^2.$$

olarak yazılır.

Esnek levhaya uygulanan torkun yaptığı korunumlu olmayan iş ise;

$$W_{nc} = u(t)\theta(t)$$

olur.

Lagrangian tanımlarsak,

$$L = T - V.$$

T ve V sistemdeki toplam kinetik ve potansiyel enerjiler olmak üzere,

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

$$T = \frac{1}{2}I_h\dot{\theta}^2(t) + \int_0^L \frac{1}{2}\rho(x\dot{\theta}(t) + z_t)^2 dx + \frac{1}{2}m(L\dot{\theta}(t) + z_t(L, t))^2,$$

$$V = \int_0^L \hat{V}(x, t)dx = \int_0^L \frac{1}{2}EI_a z_{xx}^2(x, t)dx.$$

Kinetik ve potansiyel enerji değişimleri (variations),

$$\begin{aligned} \delta T = & I_h\dot{\theta}(t)\delta\dot{\theta}(t) + \int_0^L \rho(x^2\dot{\theta}(t)\delta\dot{\theta}(t) + x\dot{\theta}(t)\delta z_t(x, t) + xz_t(x, t)\delta\dot{\theta}(t) \\ & + z_t(x, t)\delta z_t(x, t))dx + m(L^2\dot{\theta}(t)\delta\dot{\theta}(t) + z_t(L, t)\delta z_t(L, t) \\ & + L\dot{\theta}(t)\delta z_t(L, t) + Lz_t(L, t)\delta\dot{\theta}(t)) \end{aligned}$$

ve

$$\delta V = \int_0^L EI_a(z_{xx}(x, t)\delta z_{xx}(x, t))dx$$

şeklindedir. Ayrıca sistemdeki korunumlu olmayan işin değişimi ise,

$$\delta W_{nc} = u(t)\delta\theta(t)$$

olarak elde edilirse, Hamilton prensibinden yararlanarak,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc})dt = 0$$

$$\delta L = \delta T - \delta V$$

$$\begin{aligned} \delta L = & I_h\dot{\theta}(t)\delta\dot{\theta}(t) + \int_0^L \rho(x^2\dot{\theta}(t)\delta\dot{\theta}(t) + x\dot{\theta}(t)\delta z_t(x, t) + xz_t(x, t)\delta\dot{\theta}(t) \\ & + z_t(x, t)\delta z_t(x, t))dx + m(L^2\dot{\theta}(t)\delta\dot{\theta}(t) + z_t(L, t)\delta z_t(L, t) \\ & + L\dot{\theta}(t)\delta z_t(L, t) + Lz_t(L, t)\delta\dot{\theta}(t)) - \int_0^L EI_a z_{xx}(x, t)\delta z_{xx}(x, t)dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc}) &= \int_{t_1}^{t_2} \{ I_h \dot{\theta}(t) \delta \dot{\theta}(t) + mL^2 \dot{\theta}(t) \delta \dot{\theta}(t) + mz_t(L, t) \delta z_t(L, t) \\
&+ mL \dot{\theta}(t) \delta z_t(L, t) + mL z_t(L, t) \delta \dot{\theta}(t) \\
&+ \left\{ \int_0^L \rho(x^2 \dot{\theta}(t) \delta \dot{\theta}(t) + x \dot{\theta}(t) \delta z_t(x, t) + x z_t(x, t) \delta \dot{\theta}(t) \right. \\
&+ z_t(x, t) \delta z_t(x, t)) dx \} \\
&- \left\{ \int_0^L EI_a(x) z_{xx}(x, t) \delta z_{xx}(x, t) dx \right\} \\
&+ u(t) \delta \theta(t) dt \} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \{ (u(t) - I_h \ddot{\theta}(t) - \left(\int_0^L \rho(x^2 \ddot{\theta}(t) + x z_{tt}(x, t)) dx \right. \\
&- mL^2 \ddot{\theta}(t) - mL z_{tt}(L, t) \delta \theta(t)) - \left(\int_0^L (\rho x \ddot{\theta}(t) \right. \\
&+ \rho z_{tt}(x, t) + EI_a z_{xxxx}(x, t)) dx) \delta z(x, t) \\
&- (m z_{tt}(L, t) + mL \ddot{\theta}(t)) \delta z(L, t) \\
&- EI_a z_{xx}(x, t) \delta z_x(x, t) \Big|_0^L \\
&+ EI_a z_{xxxx}(x, t) \delta z(x, t) \Big|_0^L \} dt = 0. \tag{76}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (76) kullanılarak sistemin dinamik denklemleri ve sınır koşulları aşağıdaki şekilde yazılır :

1. $\delta \theta$: serbest

$$I_h \ddot{\theta} - u + \int_0^L \rho(x^2 \ddot{\theta} + x z_{tt}(x, t)) dx - mL^2 \ddot{\theta} - mL z_{tt}(L, t) = 0 \tag{77}$$

2. δz : serbest

$$\rho x \ddot{\theta} + \rho z_{tt}(x, t) + EI_a z_{xxxx}(x, t) = 0 \tag{78}$$

3. $\delta z(L, t)$: serbest

$$-m z_{tt}(L, t) - mL \ddot{\theta} + EI_a z_{xxxx}(L, t) = 0 \tag{79}$$

4. $\delta z_x(L, t)$: serbest

$$EI_a z_{xx}(L, t) = 0 \quad z_{xx}(L, t) = 0 \tag{80}$$

5.

$$z(0, t) = 0 \tag{81}$$

6.

$$z_x(0, t) = 0 \tag{82}$$

(78) kullanılarak ,

$$z_{tt}(x, t) = -\frac{EI_a z_{xxxx}(x, t)}{\rho} - x\ddot{\theta} \quad (83)$$

elde edilir .

(83), (77)'de yerine konulursa ,

$$u - I_h \ddot{\theta} + EI_a z_{xx}(0, t) = 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u + EI_a z_{xx}(0, t)}{I_h} \quad (84)$$

elde edilir . (83) ayrıca (79)'da yerine konulursa,

$$\frac{m}{\rho} z_{xxxx}(L, t) + z_{xxx}(L, t) = 0. \quad (85)$$

elde edilir.

Esnek yapının hareketini genelleştirilmiş özdeğer probleminin çözümü belirlemektedir. Genelleştirilmiş özdeğer problemi için (83) ifadesinin homojen kısmı olan

$$z_{tt}(x, t) = \frac{-EI_a}{\rho} z_{xxxx}(x, t) \quad (86)$$

ifadesini ele alalım.

Esnek yapıdaki esnemeyi, $z(x, t)$, x 'e ve t 'ye bağlı ayrı fonksiyonların çarpımı olarak yazalım;

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \eta_i(t). \quad (87)$$

t 'ye bağlı olan $\eta(t)$ fonksiyonu $\eta_i(t) = \eta_{i0} e^{jz_i t}$ olarak yazarsak [2], (86) aşağıdaki biçime indirgenebilir;

$$\varphi_i(x) z_i^2 = \frac{EI_a}{\rho} \frac{d^4}{dx^4} \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots \quad (88)$$

Daha önce belirttiğimiz üzere esnek yapının dinamiğini veren kısmi diferansiyel denklemler esnek yapının uzunluğu boyunca, sınır koşulu denklemleri de esnek yapının uzunluğunu oluşturan bu kümenin sınırlarında sağlanmalıdır. Bu sebepten (88) ifadesi, (81), (82), (80)'de ve (85)'deki sınır koşullarından elde edilen;

1. $\varphi_i(0) = 0$
2. $(\varphi_i)'(0) = 0$
3. $(\varphi_i)''(L) = 0$
4. $\frac{m}{\rho} (\varphi_i)^{iv}(L) + (\varphi_i)'''(L) = 0$

sınır koşullarını $i = 1, 2, \dots$ için sağlamalıdır. Çözümü, yukarıdaki sınır koşullarını sağlayan, (88)'deki z_i^2 'lerin değerlerinin bulunması problemi, genelleştirilmiş özdeğer problemidir.

$$\frac{EI_a}{\rho} \frac{d^4}{dx^4} \varphi_i(x) - \varphi_i(x) z_i^2 = 0$$

diferansiyel denkleminin karakteristik kökü şu şekildedir;

$$\beta_i^4 = \frac{z_i^2 \rho}{EI_a}, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Diferansiyel denklemin çözümü ise,

$$\varphi_i(x) = A_i \cos(\beta_i x) + B_i \sin(\beta_i x) + C_i \cosh(\beta_i x) + D_i \sinh(\beta_i x) \quad (89)$$

olur. Diferansiyel denklemin çözümündeki katsayılar, (89) denkleminin sağlanması gerektiği sınır koşullarından bulunur.

i) $\varphi_i(0) = 0 ; A_i = -C_i$

ii) $\varphi_i'(0) = 0 ; B_i = -D_i$

iii) $\varphi_i''(L) = 0 ; \frac{A_i}{B_i} = -\frac{\sin(\beta_i L) + \sinh(\beta_i L)}{\cos(\beta_i L) + \cosh(\beta_i L)}$

iii) ifadesindeki oran, i) ve ii) kullanılarak,

i) $A_i = -\sin(\beta_i L) - \sinh(\beta_i L)$

i) $B_i = \cos(\beta_i L) + \cosh(\beta_i L)$

iii) $C_i = \sin(\beta_i L) + \sinh(\beta_i L)$

iv) $D_i = -\cos(\beta_i L) - \cosh(\beta_i L)$

yazılabilir.

Sınır koşullarını sağlayan $\varphi(x)$ 'e ait katsayılar (89)'da yerine konulursa, aşağıdaki denklem elde edilir;

$$(1 + \cos(\beta_i L) \cosh(\beta_i L)) + \frac{m\beta_i}{\rho} (\sinh(\beta_i L) \cos(\beta_i L) - \cosh(\beta_i L) \sin(\beta_i L)) = 0. \quad (90)$$

Eğer (88) diferansiyel denkleminin çözümü var ise, β_i 'ler (90) eşitliğini sağlamalıdır.

(90)'nın çözümü olan β_i 'ler, $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$ olsun. Bu durumda sistemin özdeğerleri;

$$z_i^2 = \beta_i^4 \frac{EI_a}{\rho}$$

olur. Ve buna karşılık gelen özfonksiyonlar;

$$\varphi_i(x) = C_i \left\{ \cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) - \frac{\cos(\beta_i L) + \cosh(\beta_i L)}{\sin(\beta_i L) + \sinh(\beta_i L)} (\sinh(\beta_i x)) - \sin(\beta_i x) \right\} \quad (91)$$

olur. Özdeğerlerin karekökü ise, z_i , sistemin doğal frekanslarıdır. Karşılık gelen özfonksiyonlar ise, salınının doğal modlarıdır. Sıfır özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise katı halin modlarını gösterir. C_i ifadesi sabit olduğu için, $C_i = 1$ alabiliriz (eğer φ_i bir özfonksiyon ise $C_i \varphi_i$ de bir özfonksiyondur).

Koldaki esnemeyi (87) ifadesindeki biçimde belirtirsek, belirtilen toplamaların yakınsadığı varsayımı altında, esnek yapıya ait dinamik denklemi şu şekilde yazabiliriz;

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\eta}_i(t) \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{EI_a}{\rho} \eta_i(t) \frac{d^4 \varphi_i(x)}{dx^4} = -x \ddot{\theta}(t). \quad (92)$$

(88)'deki ifade kullanılarak, (92) şu şekilde olur;

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\eta}_i(t) \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) z_i^2 \varphi_i(x) = -x \ddot{\theta}(t). \quad (93)$$

$\langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle \triangleq \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$ olacak şekilde bir iç çarpım tanımlayalım. (93) denkleminin her iki tarafını, $\varphi_j(x)$ ile yukarıda tanımlanan iç çarpımını alırsak, (93) ifadesi;

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\eta}_i(t) \langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) z_i^2 \langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle = -\langle x, \varphi_j(x) \rangle \ddot{\theta}(t) \quad (94)$$

olur.

$i \neq j$ için ;

$$a_{ij} = \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = -\frac{m}{\rho} \varphi_j(L) \varphi_i(L)$$

$i = j$ için ;

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^L \varphi_i(x)^2 dx \\ &= \left\{ L + \frac{1 - T_i^2}{4\beta_i} \sin(2\beta_i L) + \frac{1 + T_i^2}{4\beta_i} \sinh(2\beta_i L) \right. \\ &\quad + \frac{T_i^2 - 1}{\beta_i} \cos(\beta_i L) \sinh(\beta_i L) - \frac{T_i^2 + 1}{\beta_i} \cosh(\beta_i L) \sin(\beta_i L) \\ &\quad + \frac{2T_i}{\beta_i} \sin(\beta_i L) \sinh(\beta_i L) \\ &\quad \left. + \frac{T_i}{2\beta_i} \cos(2\beta_i L) - \frac{T_i}{2\beta_i} \cosh(2\beta_i L) \right\} \quad (95) \end{aligned}$$

öyle ki,

$$T_i = \frac{\cos(\beta_i L) + \cosh(\beta_i L)}{\sin(\beta_i L) + \sinh(\beta_i L)}$$

ve

$a_j = \langle -x, \varphi_j(x) \rangle$ iç çarpımının sonucu ise,

$$\langle -x, \varphi_j(x) \rangle = \frac{2L\beta_i(1 + \cos(\beta_i L) \cosh(\beta_i L))}{\beta_i^2(\sinh(\beta_i L) + \sin(\beta_i L))} - \frac{2(\sin(\beta_i L) + \sinh(\beta_i L))}{\beta_i^2(\sinh(\beta_i L) + \sin(\beta_i L))} \quad (96)$$

olur.

a_{ij} ve a_j , denklem (94)'de yerine konulursa, dinamik denklem en son olarak şu şekilde yazılabilir;

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \ddot{\eta}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} z_i^2 \eta_i(t) = a_j \ddot{\theta}(t), \quad j = 1, 2, \dots \quad (97)$$

(97) ifadesindeki sonsuz toplamları matris formunda açıp yazabiliriz,

$$\eta(t) := \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \Lambda := \begin{bmatrix} z_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & z_2^2 & \\ & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots \\ a_{12} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad a := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ olarak ifade edilsinler.}$$

$\ddot{\theta}(t)$ yerine de (84) konulursa, (97) dinamik denkleminin en son hali

$$A\ddot{\eta}(t) + A\Lambda\eta(t) = a \left(\frac{EI_a z_{xx}(0, t) + u(t)}{I_h} \right) \quad (98)$$

olur. $z_{xx}(0, t)$ için, $z_{xx}(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{i_{xx}}(0) \eta_i(t) = [c_1 \ c_2 \ \dots] \eta(t) \triangleq c\eta(t)$, şeklinde ifade edersek, (98) ifadesi, A matrisinin tersinin varlığı varsayımı altında, şu şekilde yazılabilir,

$$\ddot{\eta}(t) + \Lambda\eta(t) = A^{-1}a \left(\frac{EI_a c\eta(t) + u(t)}{I_h} \right)$$

Buradan da,

$$\ddot{\eta}(t) + \Lambda\eta(t) = A^{-1} \frac{EI_a}{I_h} ac\eta(t) + A^{-1}a \frac{1}{I_h} u(t)$$

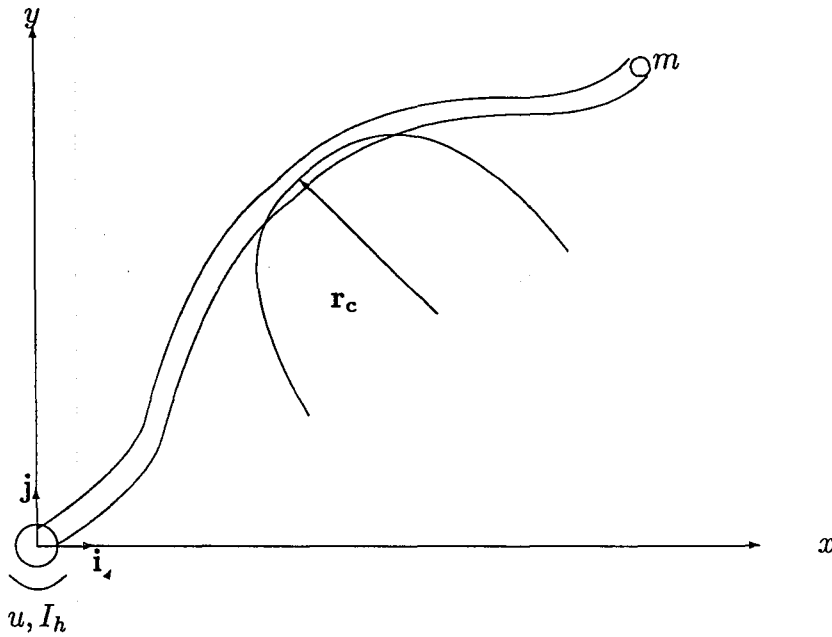
$$\ddot{\eta}(t) + (\Lambda - A^{-1} \frac{EI_a}{I_h} ac\eta(t)) = A^{-1}a \frac{1}{I_h} u(t) \quad (99)$$

yazılır.

$\Delta^2 = (\Lambda - A^{-1}ac \frac{EI_a}{I_h})$ ve $B = A^{-1}a \frac{1}{I_h} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots]^T$ olarak tanımlarsak, (99) ifadesi

$$\ddot{\eta}(t) = -\Delta^2 \eta(t) + Bu(t)$$

biçiminde yazılır.



Şekil 5.4: Bükülmenin Geometrisi

5.3. Bükülmenin Ölçülmesi

Herhangi bir elastik malzemeye dışarıdan bir kuvvet uygulandığı zaman, malzemede uygulanan kuvvetten dolayı küçük yer değiştirmeler ve esnemeler olur. Bu tür esnemeleri veya küçük yer değiştirmeleri ölçmek için gerilme ölçerler kullanılabilir.

Deneyisel esnek kolun herhangi bir noktasındaki bükülme miktarını ölçmek istersek bunun için de gerilme ölçerleri kullanabiliriz. Deneyisel kola uygulanan tork sonrası oluşan bükülmeyi, kolda oluşan eğriye teğet olan çemberin eğrilik yarıçapı r_c bulunarak hesaplanır (Şekil 5.4). Deneyisel kola uygulanan tork sonrası koldaki eğriliği $z(x, t)$ fonksiyonu ile ifade edersek, eğrilik yarıçapı bükülme cinsinden, şu şekilde bulunur [27];

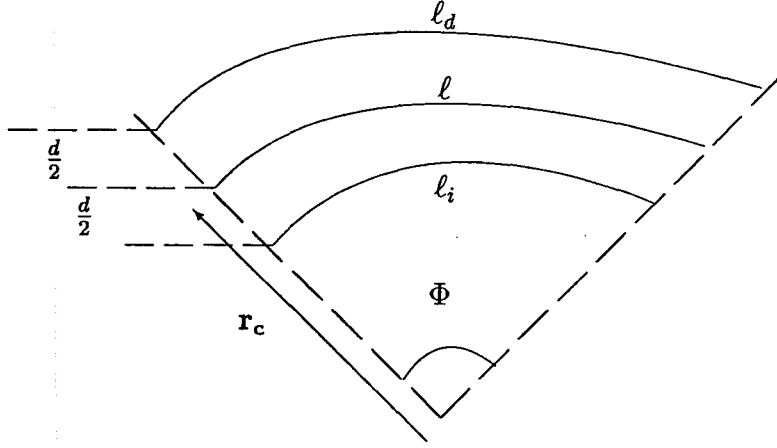
$$\frac{1}{r_c} = \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{[1 + (\frac{dz}{dx})^2]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{z_{xx}(x, t)}{[1 + (z_x(x, t))^2]^{3/2}}$$

$[1 + (z_x(x, t))^2] \approx 1$ dolayısıyla,

$$r_c = \frac{1}{z_{xx}(x, t)} \quad (100)$$

olarak yazabiliriz.



Şekil 5.5: Bükülme Anında Eğrilik Açısı

Bükülmenin olduğu noktadaki kolun iç kısmında bir büzülme dış kısmında ise bir uzama olacaktır (Şekil 5.5). Dış kısımdaki σ_d ve iç kısımdaki σ_i gerilmelerini,

$$\sigma_d = \frac{\delta l_d}{l} = \frac{l_d - l}{l}$$

ve

$$\sigma_i = \frac{\delta l_i}{l} = \frac{l_i - l}{l}$$

olarak yazabiliriz, öyle ki burada l gerilme ölçerin nominal uzunluğu, l_d dış kısımdaki gerilme ölçerin uzunluğu, l_i ise iç kısımdaki gerilme ölçerin uzunluğudur. Bükülmenin olduğu yerdeki eğrilik açısı ise Φ olursa, yayın uzunluğu gerilme ölçerin boyudur,

$$l = \Phi r_c$$

Buradan, kolun iç ve dış gerilmeleri, deneysel kolun kalınlığı, d , türünden aşağıdaki şekilde yazılır;

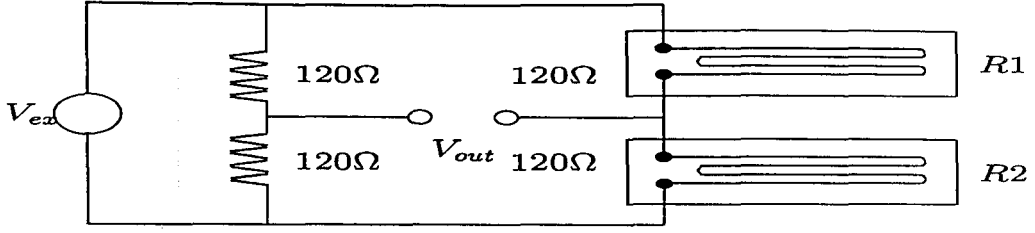
$$\sigma_d = \frac{(r_c + \frac{d}{2})\Phi - \Phi r_c}{\Phi r_c} = \frac{d}{2r_c} \quad (101)$$

ve

$$\sigma_i = \frac{(r_c - \frac{d}{2})\Phi - \Phi r_c}{\Phi r_c} = -\frac{d}{2r_c} \quad (102)$$

Ortalama gerilme ise,

$$\sigma = \frac{\sigma_d - \sigma_i}{2} = \frac{d}{2r_c}$$



Şekil 5.6: Wheatstone Yarım Köprü Bağlantısı

olarak bulunur. Bu durumda eğer esnek kolun orta noktasına bir gerilme ölçer yerleştirilirse, orta noktadaki bükülme $z_{xx}(\frac{L}{2}, t)$, kolun kalınlığı ve gerilme ölçerlerin gerilmeleri cinsinden

$$z_{xx}(\frac{L}{2}, t) = \frac{1}{r_c} = \frac{2}{d}\sigma \quad (103)$$

şeklinde yazılır.

Gerilme ölçerler çok hassas ince direnç kablolarının, çok iyi izole edilmiş bir tabakaya yapıştırılması ve direnç kablolarının birer ucunun dışarıya uzatılmasıyla yapılır. Dolayısıyla, gerilme ölçerler bir anlamda birer dirençdir. Bir telin, geometrik yapısı ile direnci arasında

$$R = \rho_r \frac{L}{S} \quad (104)$$

bağlantısı vardır. (104) ifadesindeki L telin boyunu, ρ_r telin özgül direncini, S telin kesit alanını ve R ise telin direncini göstermektedir. Eğer direncimiz, yukarıda bahsedildiği gibi çok ince bir tel olursa, bu durumda herhangi bir çekme veya bükme kuvvetine maruz kalan tel uzar ve kesit daralmasının gerilme durumuna etkisi ihmal edilebilir. Bu durumda, gerilmeyi sadece tel boyunun değişimi olarak alabiliriz. Bu sebepten gerilme ölçerler bu düşünceye dayanarak yapılır ve kullanılır.

Gerilme ölçerlerin dirençleri gerilmeye orantılı olarak değişir. Dolayısıyla koldaki gerilmeyi veya bükülmeyi ölçmek, oluşan direnç değişimini ölçmek demektir. Fakat bu direnç değişimleri çok küçük olduğu için, bu değişimi rahat ölçebilmek için Wheatstone köprü devresi kullanılır. Deneysel düzeneğimizde kullandığımız Wheatstone yarım köprü devresidir.

Yarım köprü devresini kurduktan sonra, çıkışlarını gerilme değişimini ölçmek için kullandığımız SC-2043-SG National Instruments 8 kanallı gerilme ölçer sinyal işleme devresine taşıyarak, meydana gelen gerilme değişimini gerilim cinsinden elde edebiliriz. Wheatstone yarım köprü devresinin geri kalan yarı köprü kısmı ise kart üzerindeki köprü tamamlayıcı geçici bağlantı telleri (jumper) ile yapılmaktadır [28]. Deneyde kullandığımız gerilme ölçerlerin bükülme olmadığı zaman direnci 120Ω olduğu için, geçici bağlantı tellerinin kurduğu geri kalan yarı köprünün dirençleri de 120Ω 'dur. Yarı köprü devresi Şekil 5.6'da görüldüğü gibidir.

Gerilme ölçerlerin birisinin dış boyundaki değişim miktarı ile iç kısımdaki değişim miktarı aynıdır (102), (101). Dolayısıyla böyle bir durumda Şekil 5.6

dikkate alınırsa V_{out} şu şekilde bulunur,

$$V_{out} = \left(\frac{R1 + \Delta R1}{R1 + R2} - \frac{120}{240} \right) V_{ex} \quad (105)$$

aşlında $R1 = R2$ olduğu için (105) şu şekilde yazılabilir,

$$V_{out} = \left(\frac{\Delta R1}{2R1} \right) V_{ex} \quad (106)$$

Gerilme ile oluşan direnç farkı arasında ise,

$$\sigma = \left(\frac{\Delta R}{R} \right) \frac{1}{K} \quad (107)$$

öyle ki, ΔR gerilme ölçerde meydana gelen direnç değişimi, R gerilme ölçerin nominal direnci (120Ω), K ise ölçüm faktörü (Gauge Factor) ve V_{ex} ise köprü tahrik (excitation) gerilimidir. (107) ve (106) ifadelerinden meydana gelen V_{out} ile gerilme arasında;

$$V_{out} = \frac{V_{ex}}{2} K \sigma \quad (108)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Bu durumda kolun orta noktasında meydana gelen bükülme,

$$z_{xx}\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{4 V_{out}}{d V_{ex}} \frac{1}{K} \quad (109)$$

ifadesiyle bulunur.

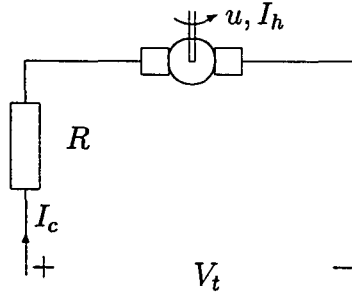
5.4. Hareketlendirici Motorun ve Servo Yükselticinin Modellenmesi

Esnek levhaya uygulanan u torku, kalıcı mıknatıslı DC servo motor tarafından sağlanmaktadır. Bu DC servo motoru ise bir servo yükseltici ile sürmekteyiz. ELMO SSA 12/55 modelindeki bu servo yükseltici hem akım modunda, yani akım yükseltici olarak çalışarak motoru akıma göre sürmekte hem de gerilim modunda yani gerilime bağlı olarak çalışabilmektedir [29]. Akım modunda çalışacağı zaman uygulanan gerilimi belli bir ayarlanabilir kazanç ile akıma çevirmektedir. Ve motorun uçlarına direk olarak akım vermektedir. Gerilim modunda ise tekrar ayarlanabilir kazançlar ile u torkunu sağlayan motorun uçlarına V_t gerilimini vermektedir (Şekil 5.7).

DC servo motorun dinamik denklemlerini Şekil 5.7'den faydalanarak, K_a tork sabiti olmak üzere şu şekilde yazabiliriz;

$$-V_t + I_c(t)R + K_a \dot{\theta}(t) = 0$$

$$u(t) = K_a I_c(t) \quad (110)$$



Şekil 5.7: Motor Sisteminin Yapısı

Bu durumda uygulanan $u(t)$ torku için;

$$u(t) = K_a \left[\frac{V_t}{R} - \frac{K_a}{R} \dot{\theta}(t) \right] \quad (111)$$

yazılır.

(110) ifadesinde görüldüğü üzere, uygulanan tork ile akım arasında doğrusal bir oran vardır. Dolayısıyla motoru akım modunda sürmek daha kolaydır. Bu sebepten servo yükselticiyi akım modunda çalıştıracaktır. Servo motorun üzerinde bulunan ve gerilim/akım kazancı ayarlayan dirençleri ayarlayarak uygun bir gerilim/akım kazancıyla motoru sürebiliriz. Motorun akım modunda iki girdi tipi vardır, bunlardan birisi tek uçlu (single-ended) giriş tipi diğeri ise diferansiyel (differential) tipidir. Deneysel sistemde tek uçlu giriş tipini kullandık ve bu durumdaki SSA 12/55 servo yükselticinin gerilim akım ayarı [29]'da belirtildiği üzere tek uçlu girişin kazancı

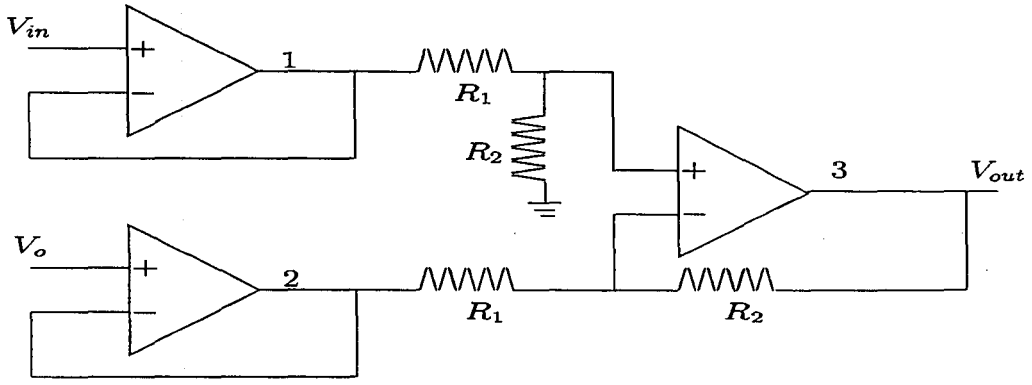
$$G_c = \frac{66.6 * I_s}{100 + R_1}, \quad (Amp/Volt) \quad (112)$$

I_s amper cinsinden yükselticinin anma akımı, R_1 ise kilo ohm cinsinden giriş karşılık gelen ve servo üzerindeki tek uçlu girişin kazancını ayarlayan slota takılan direncin değeri olmak üzere, (112) ifadesiyle ayarlanmaktadır. Deneysel düzenekte servo yükseltici üzerinde bulunan R_1 direnci, kazanç 1 olacak şekilde $R_1 = 700 \text{ k}\Omega$ olarak seçilmiştir.

Daha önce belirttiğimiz gibi veri toplama kartımızın çıkışları $0 - 10 \text{ V}$ arasındaydı, dolayısıyla motoru ters yönde sürmek için bu gerilim aralığını $\pm 5 \text{ V}$ aralığına bir sinyal işleme devresi ile çekebiliriz. Bu aralığı şu şekilde yazabiliriz,

$$V_{outmax} = V_{inmax} * g + V_0 \quad (113)$$

$$V_{outmin} = V_{inmin} * g + V_0 \quad (114)$$



Şekil 5.8: Deneysel Kol İçin Kullanılan Sinyal İşleme Devresi

yukarıdaki formülde, V_{outmax} sinyal işleme devresinin istenilen en yüksek çıkış gerilimi, V_{outmin} sinyal işleme devresinin istenilen en düşük çıkış gerilimi, g sinyal işleme devresinin bu istenilenleri yerine getirmek için olması gereken kazancı, V_o ise ofset gerilimi olarak ifade edilir, bu durumda deneysel sistemimiz için olması gereken sinyal işleme devresi Şekil 5.8'de olduğu gibidir. Şekil 5.8'deki $R_1 = R_2 = 10k\Omega$ ve $V_o = 5 V$ ve $g = 1$ olarak alınmıştır. Bu durumda $0 - 10$ aralığında gelen sinyaller belli bir doğru orantıyla $\pm 5 V$ aralığına gelir.

5.5. Tüm Sistemin Durum-Uzay Gösterimi

Kolun orta noktasındaki bükülme miktarını ölçmek için kolun her iki yüzünün orta noktasına birer bükülme ölçer koyarsak, orta noktadaki bükülme (103) ile bulabiliriz. Dolayısıyla çıktı olarak $z(x, t)$ 'nin $\frac{L}{2}$ noktasındaki değişiminin ikinci türevini alabiliriz.

$$Y(t) = z_{xx}\left(\frac{L}{2}, t\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i''\left(\frac{L}{2}\right) \eta_i(t)$$

Sistemimizin çıktı vektörü,

$$Y = C\eta(t)$$

olarak ele alırsak, bu durumda bu denklemi sağlayan çıktı matrisi C ,

$$C \triangleq \left[\varphi_1''\left(\frac{L}{2}\right) \quad \varphi_2''\left(\frac{L}{2}\right) \quad \varphi_3''\left(\frac{L}{2}\right) \quad \dots \right]$$

şeklinde yazılabilir.

M matrisi Δ^2 matrisinin modal matrisi olmak üzere, $\eta(t) = M\xi(t)$ olan bir doğrusal dönüşüm (transformation) sonucu, sisteme ait durum-uzay denklemi,

$$\ddot{\xi}(t) = -M^{-1}\Delta^2 M\xi(t) + M^{-1}Bu(t)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda,

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{EI_a c \eta(t) + u(t)}{I_h} = \frac{EI_a c M \xi(t) + u(t)}{I_h}$$

olarak yazılır. Yukarıdaki ifadedeki,

$$\frac{EI_a c M}{I_h} = [k_1 \quad k_2 \quad \dots] \triangleq k$$

olarak tanımlarsak, bu durumda $\ddot{\theta}$ ifadesini,

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{I_h} u(t) + k \xi(t)$$

olarak yazarız. Yukarıdaki ifadede kolda hareketten dolayı olan bir sürtünme vardır. Bu sürtünmeyi de sisteme eklersek yukarıdaki ifade,

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{I_h} u(t) + k \xi(t) - \frac{\beta_m}{I_h} \dot{\theta}(t) \quad (115)$$

olarak yazılır.

Yukarıda yapılan doğrusal çevirim sonucu da, sistemimizin yeni çıktı ve dinamik denklemi $-M^{-1} \Delta^2 M := \Omega^2$ ve $M^{-1} B = T$ olmak üzere,

$$Y = CM \xi(t) \quad (116)$$

$$\ddot{\xi}(t) = \Omega^2 \xi(t) + T u(t)$$

şeklinde yazılır.

Sistemin dinamik denkleminde sönümlenme yok sayılmıştır, fakat esnek kol hareket ederken bir sönümlenme mevcuttur, oransal sönümlenme kullanılarak, sistemimizin sönümlenme katsayısını $\zeta = 0.01$ alalım, sistemin sönümlenmeli dinamik denklemini şu şekilde yazabiliriz,

$$\ddot{\xi}(t) + 2\zeta\Omega\dot{\xi}(t) + \Omega^2\xi(t) = T u(t) \quad (117)$$

Sistemin çıktı matrisini de,

$$CM \triangleq [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad \dots]$$

olarak tanımlayalım. (110), (116) ve (117) denklemlerinden yararlanılarak ve sistemin katı hal modlarını da hesaba katarak, sistemin yeni durum-uzay gösterimini;

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_m}{I_h} & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & -\Omega^2 & -2\zeta\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_a}{I_h} \\ 0 \\ TK_a \end{bmatrix} I_c(t)$$

şeklinde yazarız. Buraya kadar sadece orta noktadaki bükülmeyi çıktı olarak almıştık. Eğer çıktı olarak ayrıca sistemin pozisyon ve takometre çıktılarını da alırsak bu durumda sistemin yeni çıktı denklemi,

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & CM & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

$$T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n \ \dots]^T$$

olarak tanımlayalım.

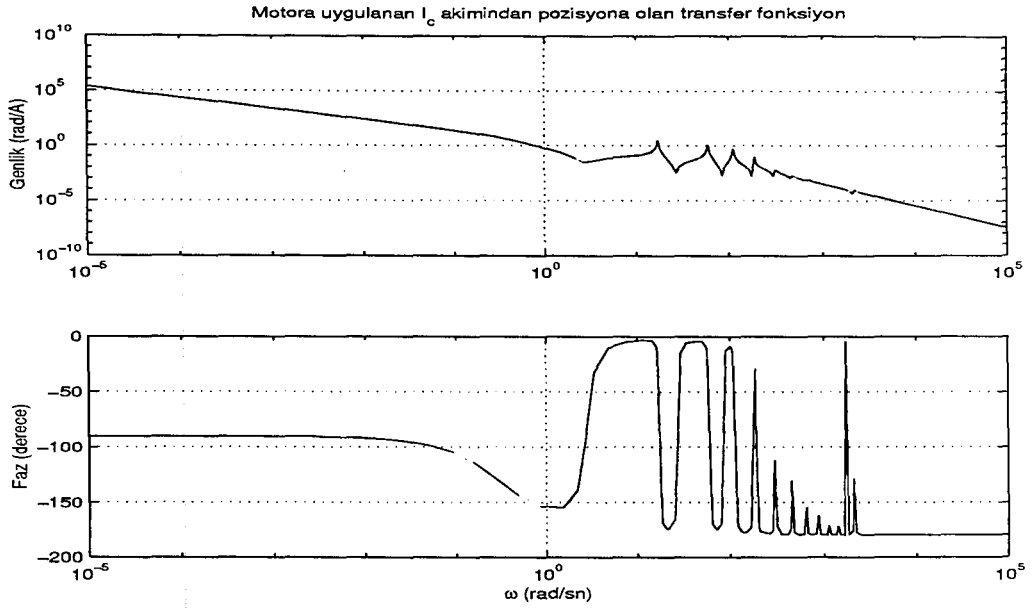
Sistemin I_c girdisinden, \hat{Y} 'e olan transfer fonksiyonun matrisini,

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_a}{s(s+\frac{\beta}{I_h})} \left(\frac{1}{I_h} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i t_i}{s^2 + 2\zeta_i \Omega_i s + \Omega_i^2} \right) \\ \frac{K_a}{(s+\frac{\beta}{I_h})} \left(\frac{1}{I_h} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i t_i}{s^2 + 2\zeta_i \Omega_i s + \Omega_i^2} \right) \\ K_a \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i t_i}{s^2 + 2\zeta_i \Omega_i s + \Omega_i^2} \end{bmatrix} \quad (118)$$

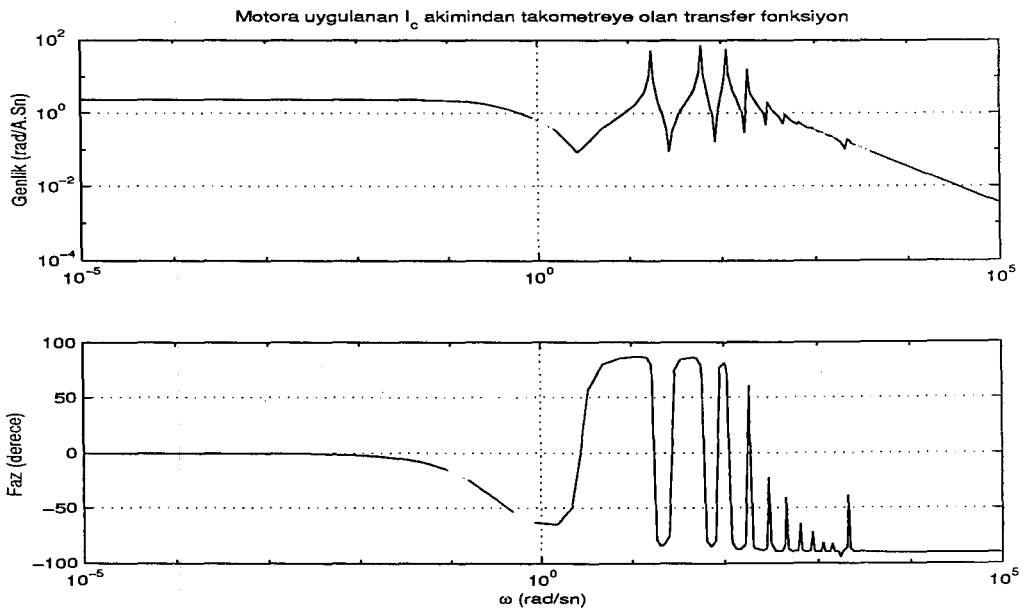
şeklinde elde ederiz. Sistemimiz sonsuz boyutlu olduğu için, yukarıdaki transfer fonksiyonu sonsuz sayıda mod içermektedir. Eğer sistemimizin ilk n esnek modunu almak istersek sistemimizin transfer fonksiyonunu,

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_a}{s(s+\frac{\beta}{I_h})} \left(\frac{1}{I_h} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i t_i}{s^2 + 2\zeta_i \Omega_i s + \Omega_i^2} \right) \\ \frac{K_a}{(s+\frac{\beta}{I_h})} \left(\frac{1}{I_h} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i t_i}{s^2 + 2\zeta_i \Omega_i s + \Omega_i^2} \right) \\ K_a \sum_{i=1}^n \frac{f_i t_i}{s^2 + 2\zeta_i \Omega_i s + \Omega_i^2} \end{bmatrix} \quad (119)$$

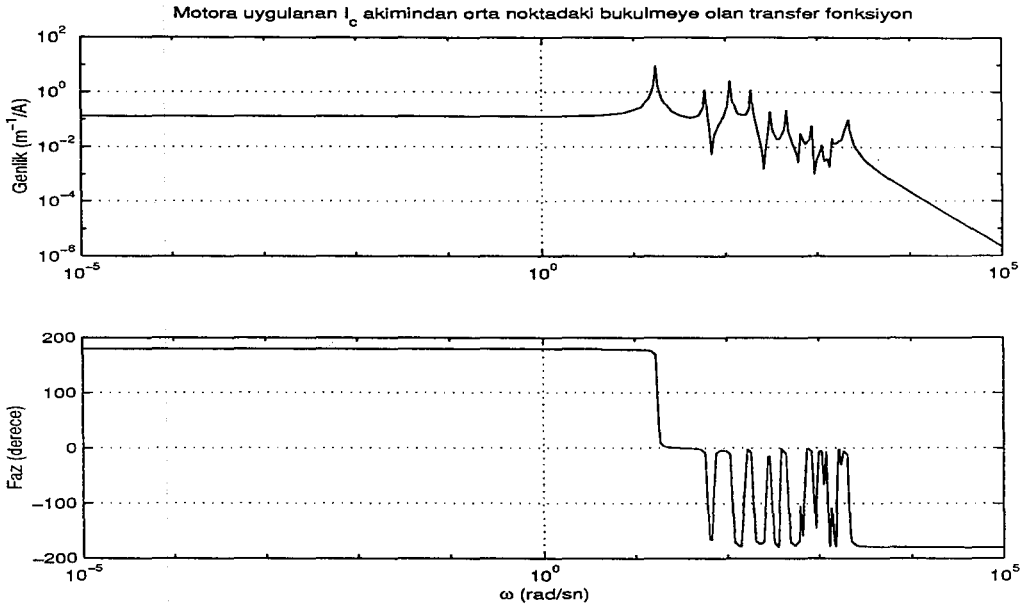
şeklinde yazarız. Plantimizin n esnek mod için transfer fonksiyonunu yukarıdaki biçimde yazdıktan sonra, parametre değerleri daha önce verilen sistemimizin MATLAB paket programı kullanılarak EK-1'de verilen program sayesinde elde ettiğimiz, ilk 12 esnek modu için pozisyon, takometre ve orta noktadaki bükülme çıktılarına ait frekans yanıtları sırasıyla, Şekil 5.9, 5.10 ve 5.11'dedir. Plantimize sabit değerde bir I_c akımı uygularsak SIMULINK'de elde ettiğimiz kolun pozisyon, takometre ve orta noktadaki bükülme tepkileri Şekil 5.12, Şekil 5.13 ve Şekil 5.14'de olduğu gibidir.



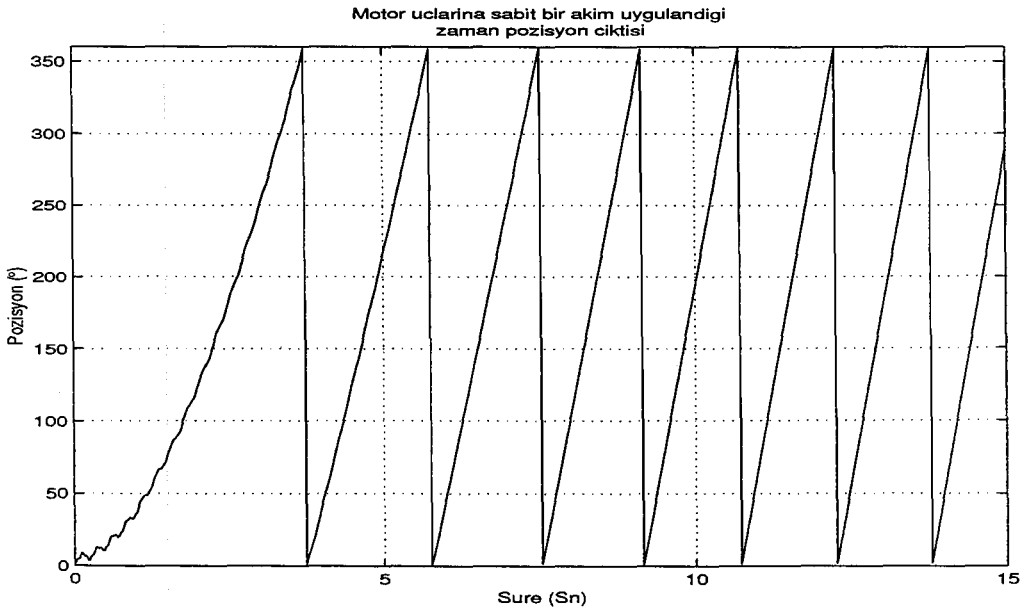
Şekil 5.9: Sisteme uygulanan I_c akımından esnek kolun pozisyon çıktısına olan frekans yanıtı



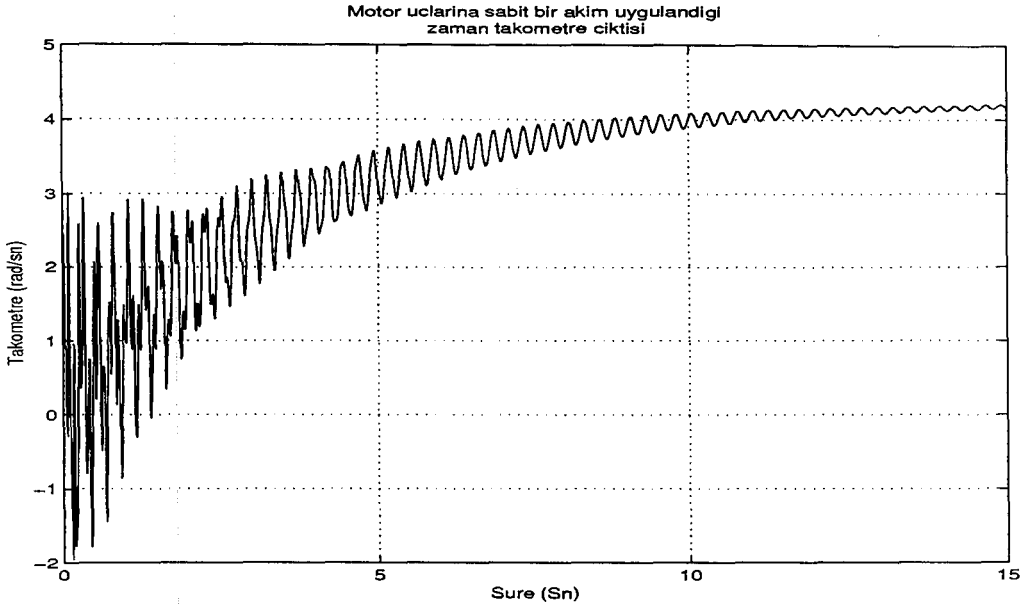
Şekil 5.10: Sisteme uygulanan I_c akımından sistemin takometre çıktısına olan frekans yanıtı



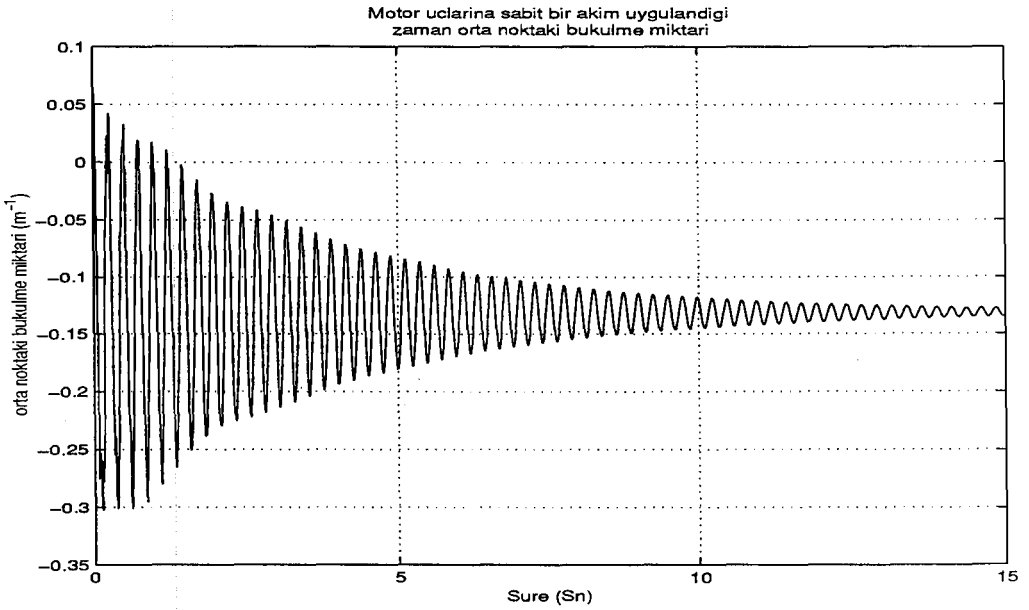
Şekil 5.11: Sisteme uygulanan I_c akımından esnek kolun orta noktasındaki bükülmenin frekans yanıtı



Şekil 5.12: Sisteme uygulanan sabit bir I_c akımı sonucu sistemin pozisyon yanıtı



Şekil 5.13: Sisteme uygulanan sabit bir I_c akımı sonucu sistemin takometre yanıtı



Şekil 5.14: Sisteme uygulanan sabit bir I_c akımı sonucu esnek kolun orta noktasındaki bükülmenin yanıtı

6. DENEYSEL ESNEK ROBOT KOLU İÇİN GÜRBÜZ KONTROLÖR TASARIMI Ve DENEYSEL DÜZENEGE UYGULANMASI

Bu bölüme kadar işlenen konularda, gürbüz kontrol analizi, farklı \mathcal{H}_∞ kontrolör tasarımları ve esnek bir robot kolunun modellenmesini işlemiştik. Bu bölümde, modellemesini gerçekleştirdiğimiz deneysel esnek robot koluna, iki farklı gürbüz kontrolör tekniği ile gürbüz kontrolörler tasarlayacağız ve elde ettiğimiz kontrolörlerin deneysel düzeneğe uygulanmasını inceleyeceğiz.

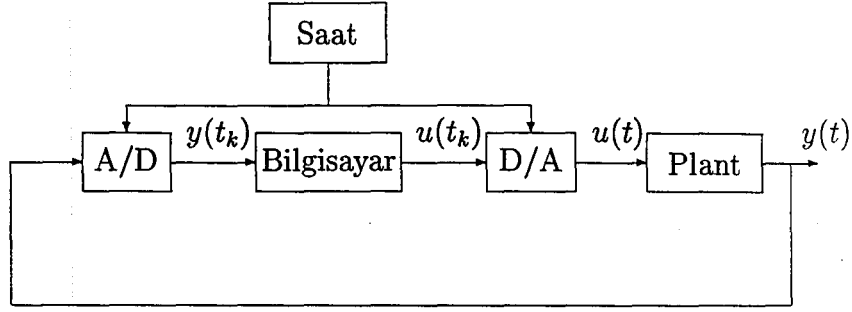
İlk gürbüz kontrolör tasarımında modellediğimiz sistemin I_c girdisinden pozisyona olan transfer fonksiyonu plant olarak alıp, tek girdili tek çıktılı bir sistem için gürbüz kontrolör tasarımı üzerinde çalışacağız. Bu tasarımda "Skew Toeplitz" operatör yönteminden yararlanacağız.

Diğer gürbüz kontrolör tasarımında ise modellediğimiz sistemin I_c girdisinden, hem pozisyona olan transfer fonksiyonu hem de, pozisyona, hıza ve orta noktadaki bükülmeye olan transfer fonksiyonları plant olarak ele alıp hem tek girdili tek çıktılı, hem de tek girdili çok çıktılı (SIMO) bir sistem için kontrolör tasarımı yapacağız. Dolayısıyla bu sayede sistemdeki geribeslemelerin sistem performansına olan etkisini de görebileceğiz. Bu tasarımda ise durum-uzay yaklaşımı kullanarak cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile bir kontrolör bulmaya çalışacağız.

Her iki farklı yöntemle tasarlanan kontrolörlerin deneysel düzeneğe uygulanması ise bilgisayar tarafından olacağı için, tasarlanan sürekli zaman kontrolörlerin bilgisayar ortamında nasıl işlenmesi gerekeceğini de inceleyeceğiz.

6.1. Tasarlanan Sonlu Boyutlu Bir Kontrolörün Bilgisayar Ortamında Uygulanması

Bilgisayar tabanlı kontrol sistemlerini Şekil 6.1'deki gibi ifade edebiliriz. Plantin çıktısı $y(t)$, sürekli zamanda bir sinyaldir. Bu sürekli zaman bilgisi A/D (analog / sayısal) dönüştürücü (converter) sayesinde sayısal forma çevrilir. Bu çevirme işi belli periyodik t_k örnekleme anlarında yapılır. Bilgisayar bu örneklenmiş sinyaller dizisini, yazılan bir algoritmayla işleyerek yeni bir sinyal dizisi olan $\{u(t_k)\}$ olarak verir. Bu dizi ise D/A (sayısal / analog) dönüştürücü sayesinde analog sinyallere çevrilir. Bu yapılan dönüştürme eş zamanlı (synchronize) olarak bilgisayar tarafından yapılır ve her bir dönüşüm belli bir zaman alır. D/A dönüştürücü ile elde edilen analog sinyal plante verilerek çıktı elde edilir. Bilgisayar kontrollü sistemlerde en çok karşılaşılan durum olan D/A dönüştürme işi D/A dönüştürücü yeni bir dönüştürme emri alana dek bir sıfır - mertebe - tutucu (zero-order-hold) devresi ile sayısal sinyali analog sinyale çevirir ve bir sonraki sayısal sinyal gelene kadar bu analog sinyali çıkışında tutar. Dolayısıyla kontrol değişkenlerinin değişme zamanı olarak bir örnekleme zamanı seçmeliyiz.



Şekil 6.1: Bilgisayar Tabanlı Kontrol Sisteminin Yapısı

Bilgisayar tabanlı kontrol sistemlerinde önemli bir problem, sürekli zamanda tanımlanan bir kontrolörün bilgisayara A/D ve D/A dönüştürücüler ile nasıl dönüştürüleceğidir. Şekil 6.1'e bakılırsa, bilgisayarda bulunan $u(t_k)$ ve $y(t_k)$ sinyalleri arasındaki sürekli zaman sisteme $u(t_k)$ kontrol girdisi sağlayan bir bilgisayar tabanlı kontrolör vardır. Sürekli zaman için tasarlanan bu kontrolörün çıktısı olan sürekli zaman sinyalinin, kesikli zamandaki denkinin bulmak sürekli zaman sinyalini örnekleyek mümkündür. Bu şekilde elde edilen modele stroboskopik (stroboscopic) model denir [30]. Çünkü bu model, sistem değişkenleri arasındaki ilişkiyi sadece örnekleme anlarında verir.

Bu şekilde tanımlamak için sürekli zamandaki bir sistemin durum-uzayı denklemleri şu şekilde verilir,

$$\frac{dx}{dt} = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (120)$$

$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \quad (121)$$

Şekilden de anlaşılacağı üzere, kontrol sinyalleri belli örneklenmiş sinyaller olarak ifade edilir $\{u(t_k) : k = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$. Örneklenme anlarında durum değişkenleri arasındaki ilişkiyi şu şekilde belirleyebiliriz. t_k örnekleme anında verilen bir durumun ileride t_{k+1} zamanındaki durumu, (120) çözülerek bulunur. Bu durumda, t_{k+1} anındaki durum,

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$y(t_k) = C_c x(t_k) + D_c u(t_k)$$

olarak bulunur. $t_{k+1} - t_k := t_\Delta$ olarak tanımlarsak $A_d := e^{A(t_\Delta)}$ olarak ve $B_d := \int_0^{t_\Delta} e^{A(\tau)} B d\tau$ olarak tanımlanır. Bu durumda durum-uzayı gösterimini şu şekilde yapabiliriz,

$$x(t_{k+1}) = A_d x(t_k) + B_d u(t_k) \quad (122)$$

$$y(t_k) = C_c x(t_k) + D_c u(t_k) \quad (123)$$

6.2. Skew Toeplitz Operatör Yöntemi İle Gürbüz Kontrolör Tasarımı

Daha önce \mathcal{H}_∞ kontrolör tasarımı bölümünde belirttiğimiz “Skew Toeplitz” yaklaşımı, sonsuz boyutlu sistemler için kontrolör tasarımında kullanılmaktaydı. Sonsuz boyutlu bir sistem için kontrolör tasarlanacağı zaman, bu durumda tasarlanan kontrolör de sonsuz boyutlu olmaktadır; fakat böyle bir kontrolörün fiziksel olarak uygulanması mümkün değildir. Bu sebepten, sonsuz boyutlu sistemler için kontrolör tasarlanacağı zaman, ya sonsuz boyutlu sistem sonlu bir boyuta yaklaştırılır ve bu boyutdaki sistem için bir kontrolör tasarlanır, ya da sonsuz boyutlu sistem için sonsuz boyutlu bir kontrolör tasarlanır ve bu daha sonra sonlu bir boyuta yaklaştırılır.

6.2.1 Kontrolör Tasarımı

Sonsuz boyutlu olduğunu söylediğimiz sistemimizin, modellemesini gerçekleştirdiğimiz zaman sonsuz boyutlu bir yapıda olduğu (118) ifadesinden anlaşılmaktadır. Bundan önce de bahsedildiği üzere, sonsuz boyutlu yapılar için kontrolör tasarımında “Skew Toeplitz” yaklaşımını kullanılarak bir kontrolör bulmaya çalışacağız. Gürbüz kontrol tasarımı için transfer fonksiyonu üzerinde yaptığımız Kabullenme 3.1 gereği, sistemimize ait transfer fonksiyonumuz şu formda olmalıdır;

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{M_n(s)N_1(s)N_2(s)}{M_d(s)}. \quad (124)$$

Burada daha önce de belirtildiği üzere, $M_n(s)$ herhangi bir olası sonsuz boyutlu bir iç fonksiyonu, $M_d(s)$ rasyonel bir iç fonksiyonu, $N_1(s)$ olası sonsuz boyutlu bir dış fonksiyonu ki $N_1(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$, ve $N_2(s)$ ise rasyonel bir dış fonksiyonu göstermekteydi. Fakat sistemimizin transfer fonksiyonu incelenirse, transfer fonksiyonumuz sonsuz boyutlu toplamlardan oluşmaktadır. Bu durumda sistemimizin kutuplarını, kökleri bilinen fonksiyonların sonsuz çarpımı formunda yazabiliriz ama aynı şeyi sıfırlar için söylemek mümkün değildir. Bu sebepten sistemimizin iç-dış ayrıştırmasını sıfırları bilinen sonsuz boyutlu bir iç fonksiyon ile sonsuz boyutlu bir dış fonksiyonun çarpımı olarak yazmak mümkün değildir. Dolayısıyla sonsuz boyutlu sistemimiz için kontrolör tasarımında, sistemimizin ilk n modunu alarak modellediğimiz planti ele alıp bu sistem için bir kontrolör tasarlayacağız.

Yukarıda da belirtildiği üzere, bu kontrolör tasarım yöntemi için sistemdeki I_c girdisinden pozisyona olan transfer fonksiyonu sistemimiz olarak ele alalım. Bu durumda sistemimizi incelersek, sistemimiz minimum faz ve sıfırda bir kutbu vardır. Sistemimizin sıfırda bir kutbu olmasından dolayı sistemimiz kararlı değildir. Dolayısıyla kontrolör tasarlarırken sıfırdaki kutba bir ϵ_1 , öyle ki $0 < \epsilon_1 \ll 1$ olmak üzere ekleyebiliriz. Bu durumda sistemimizin n modu için, plantimizi (124) biçiminde yazarsak, $M_n(s)$, $M_d(s)$, $N_1(s)$ ve $N_2(s)$,

$$M_n(s) = 1, \quad M_d(s) = 1, \quad N_2(s) = \frac{1}{(s + \epsilon_1)(s + \frac{\beta_m}{I_h})}$$

ξ_i ve ζ_i sıfırdan büyük olmak üzere,

$$N_1(s) = \prod_{i=1}^n \frac{s^2 + \xi_i s + \zeta_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \Omega_i s + \Omega_i^2}$$

biçiminde yazılabilir. Yukarıdaki $N_1(s)$ fonksiyonun sıfırları (119) ifadesindeki $G(s)$ transfer fonksiyonundaki pozisyon çıktısı olan transfer fonksiyonun sıfırlarıdır. Sistemin kararlı olmasından dolayı, sistemi kararlaştıran kontrolör için Bezout eşitliğini sağlayan, $X(s), Y(s) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ fonksiyonları, $N(s) = P(s)$, $D(s) = 1$, $X(s) = 0$ ve $Y(s) = 1$ biçiminde seçilerek, Bezout eşitliği sağlanabilir. Bu fonksiyonlar Youla parametrizasyonunda yerine konulursa kontrolör,

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)} = \frac{Q(s)}{1 - M_n(s)N_2(s)N_1(s)Q(s)} \quad (125)$$

olarak bulunur. Elde edilen yeni plantimiz P , ve K kontrolörü iki blok \mathcal{H}_∞ probleminde (40) yerine konulursa,

$$\gamma_{opt} = \inf_{Q \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)} \left\| \begin{bmatrix} W_1(s) - W_1(s)N(s)Q(s) \\ W_m(s)N(s)Q(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (126)$$

şeklinde yazılır. (126) ifadesini şu şekilde de yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \gamma_{opt} &= \inf_{Q \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)} \left\| \begin{bmatrix} W_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_1(s)N_2(s) \\ -W_m(s)N_2(s) \end{bmatrix} M_n(s)N_1(s)Q(s) \right\|_\infty \\ \gamma_{opt} &= \inf_{Q_1 \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)} \left\| \begin{bmatrix} W_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_1(s)N_2(s) \\ -W_m(s)N_2(s) \end{bmatrix} M_n(s)Q_1(s) \right\|_\infty \end{aligned} \quad (127)$$

öyle ki $Q_1(s) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ eğer ve ancak $Q(s), N_1^{-1}(s) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$.

Ağırlıklar üzerinde yaptığımız kabullenmeler dikkate alınırca görülecektir ki, $\begin{bmatrix} W_1(s)N_2(s) \\ -W_m(s)N_2(s) \end{bmatrix}$ vektörü $0 \leq \omega \leq \infty$ aralığında tam kolon ranklı olduğundan bir iç-dış ayrıştırma mümkündür, bu ayrıştırmadaki $G(s)$,

$$N_2^*(s)(W_1^*(s)W_1(s) + W_m^*(s)W_m(s))N_2(s) : = G^*(s)G(s) \quad (128)$$

ifadesinin bir spektral faktörüdür. Dolayısıyla, $G^{-1}(s), G(s) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ olan bir spektral ayrıştırma yazabiliriz. Daha önceden de belirtildiği üzere, Şekil 3.1' deki geribeslemeli yapıların performansları hassasiyet ve tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonları ile ifade edilirler. Bu sebepten, hassasiyet normunun minimize edilmesi ve olası yüksek frekanslardaki istenmeyen bozucu sinyallerin plant üzerindeki etkisinin ortadan kaldırmak için, hassasiyet fonksiyonuna müdahale edecek olan ağırlığın alçak-geçiren seçilmesi ve aynı zamanda da Kabullenme 4.1'i sağlaması gerekmektedir. $N_2(s)$ fonksiyonu da ikinci dereceden olduğu için, $\alpha, a, b, c, d, x, y, t, v$ birer gerçekte sayı olmak üzere ve (128) ifadesini sağlayacak şekilde,

$$W_1(s) = \alpha \frac{as + bcs + d}{xs + yts + v} \in \mathcal{RH}_\infty(\mathbb{C}_+)$$

olarak seçelim. $W_m(s)$ ağırlık fonksiyonunun seçiminde ise Kabullenme 3.2 gereği, ağırlık fonksiyonu düzgün olmamalı ve (128) ifadesindeki spektral ayrışmanın da ağırlıkların çarpımı halinde yazabilmek için $W_m(s)$ ağırlığını şu şekilde seçelim,

$$W_m(s) = \beta(as + b)(cs + d)$$

Ağırlık fonksiyonlarını yukarıdaki gibi tanımlarsak (128) ifadesinin spektral faktörlerini bulurken, ağırlıkların toplamı ile çarpımı arasında $W_1(s)W_1(-s) + W_m(s)W_m(-s) = \varepsilon W_1(s)W_1(-s)W_m(s)W_m(-s)$ şeklinde bir ilişki oluşur. Bu durumda kontrolör hesabını yazmak daha kolaylaşır. Burada ε bir sabit olacak şekilde yazılır ve iç-dış ayrıştırmadan $G(s)$ fonksiyonu şu şekilde elde edilir,

$$G(s) = \sqrt{\varepsilon}W_1(s)W_m(s)N_2(s)$$

(128) ifadesinden aşağıdaki birimsel matrisi tanımlayabiliriz,

$$U(s) = \begin{bmatrix} \frac{W_1^*(s)N_2^*(s)}{G^*(s)} & -\frac{W_m^*(s)N_2^*(s)}{G^*(s)} \\ \frac{W_m(s)N_2(s)}{G(s)} & \frac{W_1(s)N_2(s)}{G(s)} \end{bmatrix}.$$

Birimsel matris normu koruduğu için $U(s)$ fonksiyonunun (127)'de normu tanımlanan matris ile çarpımı γ_{opt} değerini değiştirmez. Bu durumda, γ_{opt} ,

$$\gamma_{opt} = \inf_{Q_1 \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)} \left\| U(s) \left[\begin{bmatrix} W_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_1(s)N_2(s) \\ -W_m(s)N_2(s) \end{bmatrix} M_n(s)Q_1(s) \right] \right\|_\infty,$$

$$\gamma_{opt} = \inf_{Q_1 \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)} \left\| \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{W_1(s)}{W_m^*(s)} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G(s) \\ 0 \end{bmatrix} M_n(s)Q_1(s) \right] \right\|_\infty \quad (129)$$

şeklinde yazılır. (129) ifadesinde farkedileceği üzere, $\frac{W_1(s)}{W_m^*(s)}$ fonksiyonu hariç tüm fonksiyonlar $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ uzayının birer elemanıdır. (129) ifadesinde tüm fonksiyonları $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ uzayının elemanı olması için $\frac{W_1(s)}{W_m^*(s)}$ fonksiyonunun sağ yarı düzlemdeki kutuplarını ortadan kaldıracak ve aynı zamanda (129) ifadesinin normunu koruyacak bir iç fonksiyonla çarpmamız gerekir. Dolayısıyla, $M_i(s) \frac{W_1(s)}{W_m^*(s)} \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)$ koşulunu sağlayan bir $M_i(s)$ iç fonksiyonu şu şekilde yazılabilir,

$$M_i(s) = \frac{W_m^*(s)}{W_m(s)} = \frac{(-as + b)(-cs + d)}{(as + b)(cs + d)}.$$

İç fonksiyonlar da normu koruduğu için $M_i(s)$ fonksiyonunun (129)'da normu alınan matris ile çarpımı sonucu

$$\gamma_{opt} = \inf_{Q_1 \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)} \left\| \begin{bmatrix} M_i(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{W_1(s)}{W_m^*(s)} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G(s) \\ 0 \end{bmatrix} M_n(s)Q_1(s) \right] \right\|_\infty$$

elde edilir. Bu durumda (129) ifadesi şu hale gelir,

$$\gamma_{opt} = \inf_{Q_2(s) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)} \left\| \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{W_1(s)}{W_m(s)} - M(s)Q_2(s) \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{array} \right] \right\|_\infty.$$

$W_o(s) := \frac{W_1(s)}{W_m(s)}$, $Q_2(s) := G(s)Q_1(s)$ ve $M(s) := M_i(s)M_n(s)$ olarak tanımlarsak, yukarıdaki ifade,

$$\gamma_{opt} = \inf_{Q_3(s) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)} \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\begin{array}{c} W_0(s) - M(s)Q_3(s) \\ 1 \end{array} \right] \right\|_\infty.$$

olarak yazılır, öyle ki $Q_3(s) = \sqrt{\varepsilon}Q_2$. Bu ifadeyi de tek blok problemi olarak şu şekilde yazabiliriz,

$$\gamma_{1opt} = \inf_{Q_3(s) \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+)} \| [W_0(s) - M(s)Q_3(s)] \|_\infty. \quad (130)$$

Sonuçta γ_{opt} şu şekilde hesaplanır,

$$\gamma_{opt} = \sqrt{\frac{1 + \gamma_{1opt}^2}{\varepsilon}}. \quad (131)$$

(130) ifadesinde karşılık gelen fonksiyonlar ise,

$$W_0(s) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{(xs + y)(ts + v)}$$

$$M(s) = M_n(s)M_i(s)$$

$$Q_3(s) = \sqrt{\varepsilon}G(s)N_1(s)Q(s)$$

olarak yazılır. Sürekli zamandan kesikli zamana $s = \tau \frac{1+z}{1-z}$ olan bir uygun dönüşüm sonucu $w_o(z)$, $m_n(z)$, $m_i(z)$ ve $q_3(z)$;

$$w_o(z) = W_0\left(\tau \frac{1+z}{1-z}\right), \quad m_n(z) = M_n\left(\tau \frac{1+z}{1-z}\right), \quad m_i(z) = M_i\left(\tau \frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$m(z) = m_i(z)m_n(z), \quad q_3(z) = Q_3\left(\tau \frac{1+z}{1-z}\right)$$

biçiminde ifade edilirler. Bu durumda (130) ifadesini şu şekilde yazabiliriz,

$$\gamma_{1opt} = \|w_o(z) - m(z)q_3(z)\|_\infty.$$

Dolayısıyla (126)'da bulunan iki blok problemi, tek blok problemi haline gelmiş oldu.

Yukarıda belirttiğimiz dönüşüm ile, $m_i(z)$, $m_n(z)$ ve $w_o(z)$ şu şekilde yazılır,

$$m_i(z) = \frac{((-a\tau + b) + (-a\tau - b)z)((-c\tau + d) + (-c\tau - d)z)}{((a\tau + b) + (a\tau - b)z)((c\tau + d) + (c\tau - d)z)} \quad (132)$$

$m_n(z)$ iç fonksiyonunu $M_n(s) = 1$ olduğunda $m_n(z) = 1$ olur.

$$w_0(z) = \frac{\frac{\alpha}{\beta}(1 - 2z + z^2)}{((x\tau - y)z + (x\tau + y))((t\tau - v)z + (t\tau + v))}$$

olarak yazılabildiğinden, $w_0(z)$ fonksiyonunu $b(z)$ ve $k(z)$ polinomlarının oranı olarak $w_0(z) = \frac{b(z)}{k(z)}$ şeklinde yazarsak, $b(z)$ ve $k(z)$ polinomları,

$$b(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{2\alpha}{\beta}z + \frac{\alpha}{\beta}z^2$$

ve

$$k(z) = k_0 + k_1z + k_2z^2 = (t\tau + v)(x\tau + y) + 2(xt\tau^2 - yv)z + (x\tau - y)(t\tau - v)z^2 \quad (133)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda (60) denklemindeki $R_-(z)$ ve $R_+(z)$ fonksiyonları,

$$R_-(z) = V_+(z)(m(z)(z^{-n}b(z^{-1})\mathcal{B} - \rho^2z^{-n}k(z^{-1})\mathcal{K}) - (\mathcal{B}^*\mathcal{M}\mathcal{B} - \mathcal{K}^*\mathcal{M}\mathcal{K})\phi_-)$$

ve

$$R_+(z) := V_+(z)X\phi_+$$

şeklinde olur. Buradaki $\chi_\rho(z)$ fonksiyonu, $V_+(z)$, \mathcal{B} , \mathcal{K} , \mathcal{X} , \mathcal{M} matrisleri ile ϕ_- ve ϕ_+ vektörleri ise, (55), (56), (58) ve (59) ifadelerinin yardımıyla,

$$\begin{aligned} \chi_\rho(z) &= z^2(b(z^{-1})b(z) - \rho^2k(z^{-1})k(z)), & V_+(z) &:= \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, & \mathcal{K} &= \begin{bmatrix} k_2 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, & \mathcal{M} &= \begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ m_1 & m_0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{X} &= \begin{bmatrix} \chi_{-2} & 0 \\ \chi_{-1} & \chi_{-2} \end{bmatrix}, & \phi_- &= \begin{bmatrix} \phi_{-2} \\ \phi_{-1} \end{bmatrix}, & \phi_+ &= \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda (61) ifadesi

$$\begin{bmatrix} R_-(z_1) & R_+(z_1) \\ \vdots & \vdots \\ R_-(z_4) & R_+(z_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_- \\ \phi_+ \end{bmatrix} = 0 \quad (134)$$

şeklinde yazılır. Burada $z_i, i = 1, 2, \chi_\rho(z)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır.

4×4 boyutlu (134) ifadesini 2×2 boyutlu hale indirgemek için (62) ve (63)'teki tanımlamaları yaparsak, bu ifade,

$$\begin{bmatrix} V_+(z_1)(F(z_1) - \mathcal{L}) & V_+(z_1)X \\ \vdots & \vdots \\ V_+(z_2^{-1})(F(z_2^{-1}) - \mathcal{L}) & V_+(z_2^{-1})X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_- \\ \phi_+ \end{bmatrix} = 0 \quad (135)$$

şeklinde yazılabilir. Matris boyutunu daha da indirgeyerek, kolay bir biçimde $\gamma_{1_{opt}}$ elde edebilmek için,

$$\mathcal{F}_+ := \begin{bmatrix} V_+(z_1)F(z_1) \\ V_+(z_2)F(z_2) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}_+ := \begin{bmatrix} V_+(z_1) \\ V_+(z_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{F}_- := \begin{bmatrix} V_+(z_1^{-1})F(z_1^{-1}) \\ V_+(z_2^{-1})F(z_2^{-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}_- := \begin{bmatrix} V_+(z_1^{-1}) \\ V_+(z_2^{-1}) \end{bmatrix}$$

tanımlamalarını yaparsak (135) ifadesi,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_+ - \mathcal{V}_+ \mathcal{L} & \mathcal{V}_+ X \\ \mathcal{F}_- - \mathcal{V}_- \mathcal{L} & \mathcal{V}_- X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_- \\ \phi_+ \end{bmatrix} = 0$$

şekline gelir.

γ_{1opt} değerini hesaplamak için $\|w_0(\mathbf{T})\|$ operatörünün normunun hesaplanması gerektiğini daha önce belirtmiştik. Bu durumda, γ_{opt} hesabı için $w_0(\mathbf{T})$ operatörünün $\|w_0(\mathbf{T})\|_e$ ve $\|w_0\|_\infty$ arasında en büyük tekil değerini bulmak gerekmektedir. Buradan da Teorem 4.7 ile γ_{1opt} değeri bulunur. γ_{opt} değeri de (131) ile bulunur.

Optimum γ değeri γ_{opt} bulunduktan sonra, $u(z)$ tekil vektörü (68) ile bulunur.

Sarason teoreminden, $s_{opt}(z) = w_0(z) - m(z)q_3^{opt}(z)$ olarak yazılır. Ayrıca $s_{opt}(z)$ için (50) ile,

$$w_0(z) - m(z)q_3^{opt}(z) = \frac{b(z)u_{opt}(z) - m(z)V_+(z)B\phi_-^{opt}}{k(z)u_{opt}(z) - m(z)V_+(z)K\phi_-^{opt}}$$

yazılırsa, buradan da

$$q_3^{opt}(z) = \frac{V_+(z)(k(z)B - b(z)K)\phi_-^{opt}}{k(z)(k(z)u_{opt}(z) - m(z)V_+(z)K\phi_-^{opt})}$$

hesaplanır.

$q_3^{opt}(z)$ bulunduktan sonra, sürekli zamandan kesikli zamana yaptığımız dönüşümü tersten yaparsak,

$$Q_3(s) = q_3\left(\frac{s-\tau}{s+\tau}\right)$$

olur, bu durumda $Q(s)$ ise,

$$Q(s) = q_3\left(\frac{s-\tau}{s+\tau}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} G(s)^{-1} N_1^{-1}(s)$$

$$= q_3\left(\frac{s-\tau}{s+\tau}\right) \varepsilon^{-1} W_2^{-1}(s) W_1(s)^{-1} N_2^{-1}(s) N_1^{-1}(s)$$

şeklinde elde edilir. Optimal kontrolör için de $Q(s)$ (125) ifadesinde yerine konulursa, $K_{opt}(s)$,

$$K_{opt}(s) = \frac{W_1^{-1}(s) W_2^{-1}(s) N_2^{-1}(s) N_1^{-1}(s) q_3\left(\frac{s-\tau}{s+\tau}\right)}{\varepsilon - W_1^{-1}(s) W_2^{-1}(s) q_3\left(\frac{s-\tau}{s+\tau}\right)} \quad (136)$$

şeklinde bulunur.

6.2.2 Tasarlanan Kontrolör İçin Benzetim Sonuçları

Plantimizi sonlandırmamız gerektiğinden, plantimizi ilk 3 esnek modunu içerecek şekilde sonlandırıp, bu 3 esnek modu kontrol eden bir kontrolör tasarlıyacağız. Plantimizin sıfırda bir kutbu vardır. MATLAB paket programında nümerik hatalara yol açmaması ve kontrolör tasarımıımızın gereği, kutbumuzu $\epsilon_1 = 0.001$ kadar sola kaydardık. Kontrolörümüz deneysel düzeneğe uygulanacağı için ve sistemimiz gerçekte sonsuz boyutlu olduğundan, kontrolör daha fazla esnek mod içeren yapıları da kontrol edebilmelidir. Bundan önce ağırlıklar üzerinde yaptığımız kabullenmeler gereği, ağırlıklarımızı, EK-2'de verilen weight.m programı ile deneme yanılma yöntemiyle, plantimizin en kısa zamanda yatışkın duruma varmasını sağlayacak ağırlıklar olarak,

$$W_1(s) = \frac{0.76s^2 + 1.841s + 0.7109}{0.55s^2 + 1.105s + 0.01} \quad (137)$$

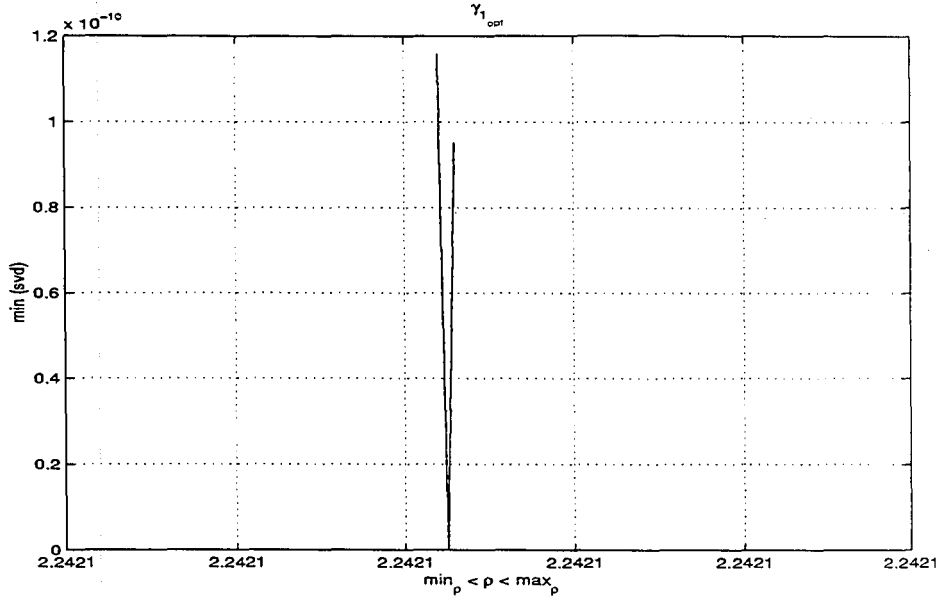
$$W_2(s) = (1.478s^2 + 3.58s + 1.382) \quad (138)$$

seçelim. Bu durumda, bu ağırlık değerleri altında, (126) ifadesinde tanımlanan iki blok problemimiz, (130) ifadesindeki gibi tek blok problemi haline getirilebilir. Sistemimizin optimal performans seviyesi γ_{opt} değerini bulmamız için ilk önce, alt ve üst ρ değerlerini bulmak gerekmektedir. Bunları ise, EK-3 ve EK-4'de verilen minrho.m ve maxrho.m programlarından elde ederiz. Elde edilen ρ için sınır değerler EK-5'deki oprrho.m programına girilerek oprrho.m programı ile ρ_{opt} bulunur. Bulunan ρ_{opt} değeri γ_{opt} ise, (54) ifadesindeki matrisinin determinantını sıfır yapmalıdır. Bu matrisin determinantının, bulunan ρ_{opt} değeri için sıfır olup olmadığını yine EK-5'de bulunan gammaopt.m programı ile test edebiliriz. Verilen (137) ve (138) ağırlıkları ile (54) ifadesindeki matrisin determinantı sıfır yapan en büyük ρ değerini bulana kadar da bu işlemi sürdürülerek γ_{opt} bulunur. Yukarıdaki ağırlıklara göre plantimizi kararlaştıran kontrolör için (131) ifadesinde olduğu gibi, γ_{opt} seviyesi verecek olan $\gamma_{1_{opt}}$ değeri Şekil 6.2'de verildiği gibidir. (131) ifadesini kullanarak, iki blok problemimizin optimum gamma seviyesi γ_{opt} ,

$$\gamma_{opt} = 3.39240019855734 \quad (139)$$

olarak bulunur.

(137) ve (138) ifadelerindeki ağırlıkların yardımıyla EK-6'daki C_opt programını çalıştırdığımızda, ilk olarak bulduğumuz $Q_{1_{opt}}$ ifadesi nümerik hatalardan dolayı $Q_{1_{opt}} \notin \mathcal{H}_\infty$ olarak çıkmaktadır. Kontrolörün kutup ve sıfırları incelendiği zaman sağ yarı düzlemdeki kutuplar aynı düzlemdeki bazı sıfırlara olan yakınlığı 10^{-13} kadar küçüktür, dolayısıyla MATLAB paket programındaki "minreal.m" komutu ile sadeleştirme yaparak ortadan kaldırırsak, 11. dereceden $Q_{opt} \in \mathcal{H}_\infty$ fonksiyonuna karşılık gelen ve 15. dereceden optimum kontrolör K_{opt} elde edilir. Ayrıca ağırlıklar arasındaki ilişki ϵ değeri de bu programda hesaplanır. Elde ettiğimiz 15. dereceden K_{opt} optimum kontrolörümüzün frekans tepkisi Şekil 6.3'de verildiği gibidir.

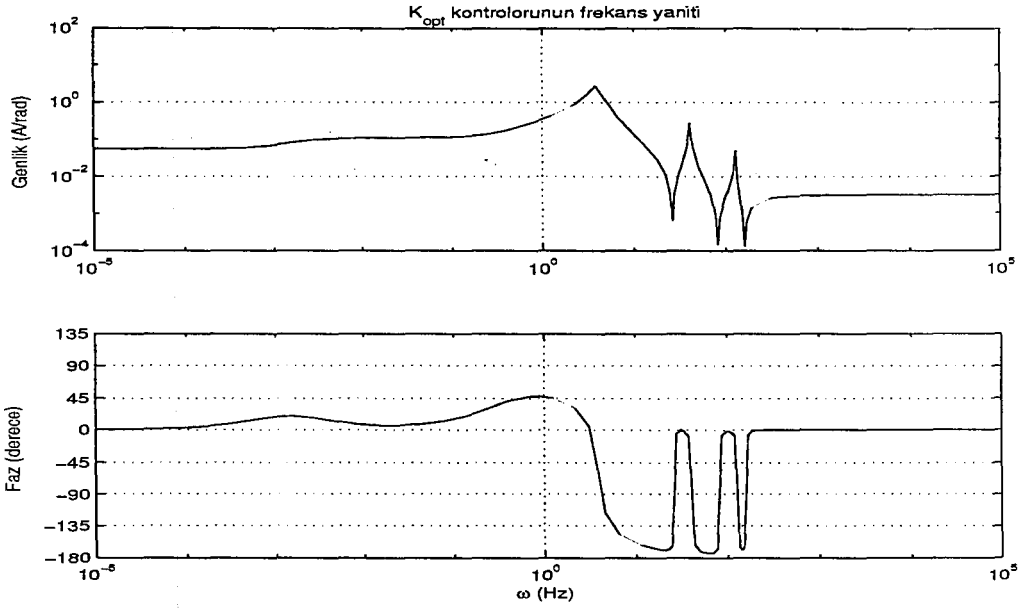


Şekil 6.2: Tek blok için hesaplanan optimum γ_{1opt} değeri.

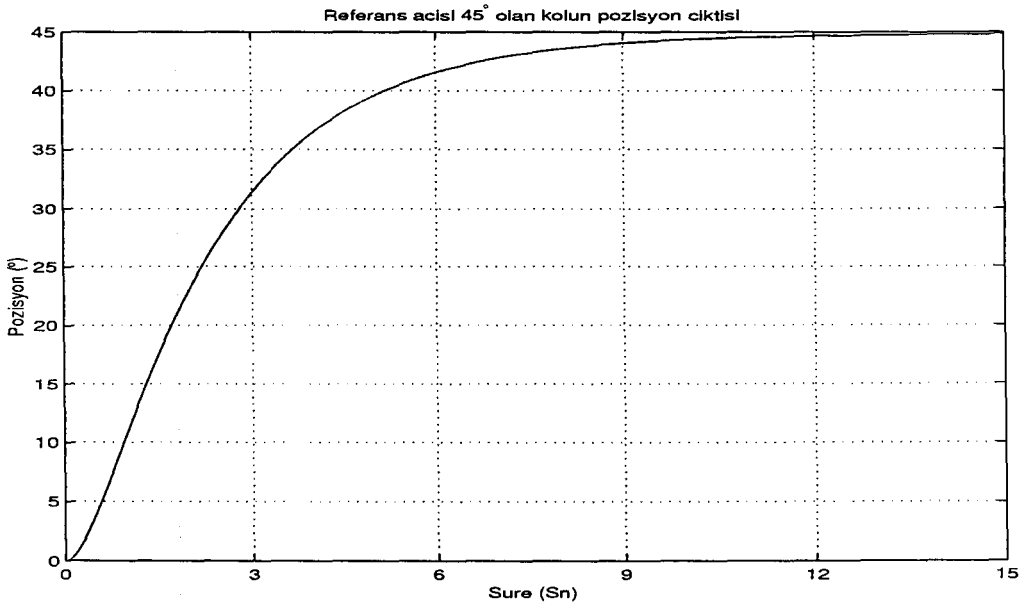
EK-6'daki program sayesinde, tasarlanan kontrolörün hem ilk 3 esnek modu olan plante hem de ilk 12 esnek modu olan plante uygulanmasıyla benzetim sonuçlarını gözlemleyebiliriz.

İlk 3 esnek modu alınan plante referans açısı olarak 45° verildiği zaman, kolun pozisyon, takometre ve orta noktadaki bükülme çıktıları sırasıyla Şekil 6.4, 6.5 ve 6.6'da olduğu gibidir. Plante uygulanması gereken I_c akımı ise Şekil 6.7'de olduğu şekildedir. Aynı kontrolör aynı referans açısı için 12 esnek modu alınan sisteme uygulandığında ise elde edilen kolun pozisyon, takometre ve orta noktadaki bükülme ve uygulanması gereken I_c akımına ait çıktılar sırasıyla Şekil 6.8, 6.9, 6.10 ve 6.11'de olduğu gibidir.

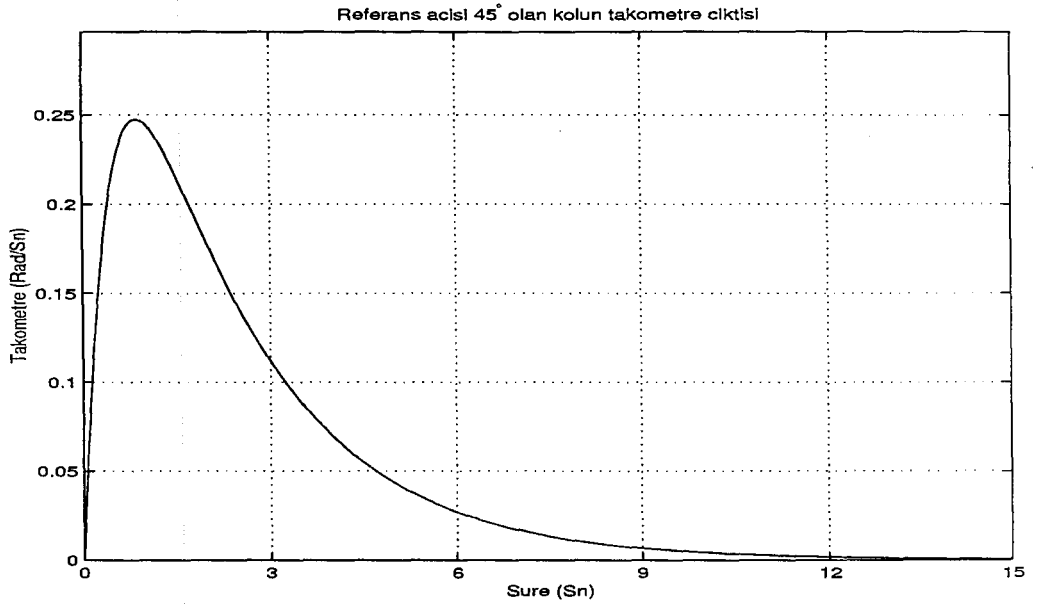
Sonlu boyutlu sistemimiz için bir sonlu boyutlu kontrolör tasarlasak da, amacımız yüksek frekans modlarının etkisinin plantin pozisyon, takometre ve orta noktadaki bükülme çıktılarındaki etkisini azaltmak idi. Dolayısıyla, ilk bulduğumuz kontrolöre göre daha düşük dereceli kontrolörlerin yüksek frekans modlarına olan etkisini inceleyebiliriz. Bulunan optimal kontrolör belirtildiği üzere 15. dereceden bir kontrolördü. Fakat daha düşük dereceli kontrolörler bulmak da mümkündür. Frekans bölgesinde çalışırken MATLAB'daki "balmr.m" komutunu kullanacağız. Eğer bu komutu kullanarak, $\|K_{opt} - K_{opt}^d\|_\infty < 10^{-3}$, olacak şekilde bulduğumuz 8. dereceden K_{opt}^d kontrolörünün frekans yanıtı Şekil 6.12'de görüldüğü gibidir. Elde edilen bu kontrolörün benzetim sonuçlarında da EK-6'da verilen program sayesinde 12 esnek mod içeren plante göre benzetimlerini yapabiliriz. Bir önceki benzetim çalışmalarına benzer şekilde referans açısı 45° olan kolun, pozisyon, takometre, orta noktadaki bükülme miktarı ve kolun referansı takibi için motor uçlarına uygulanması gereken akıma ait benzetim sonuçları da, sırasıyla Şekil 6.13, 6.14, 6.15 ve 6.16'da olduğu gibidir.



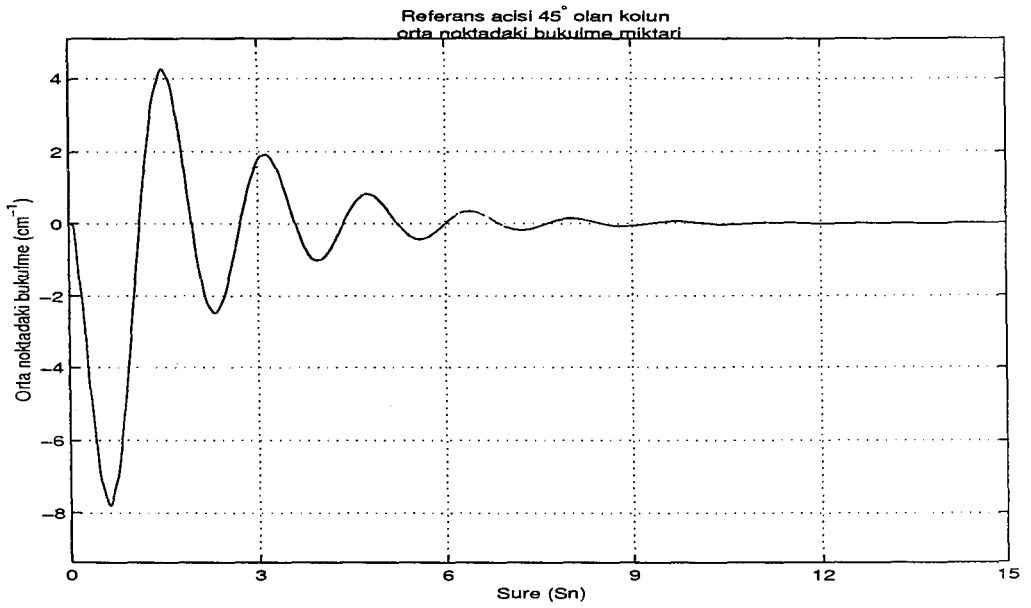
Şekil 6.3: Optimum Kontrolör K_{opt} ' un frekans tepkisi.



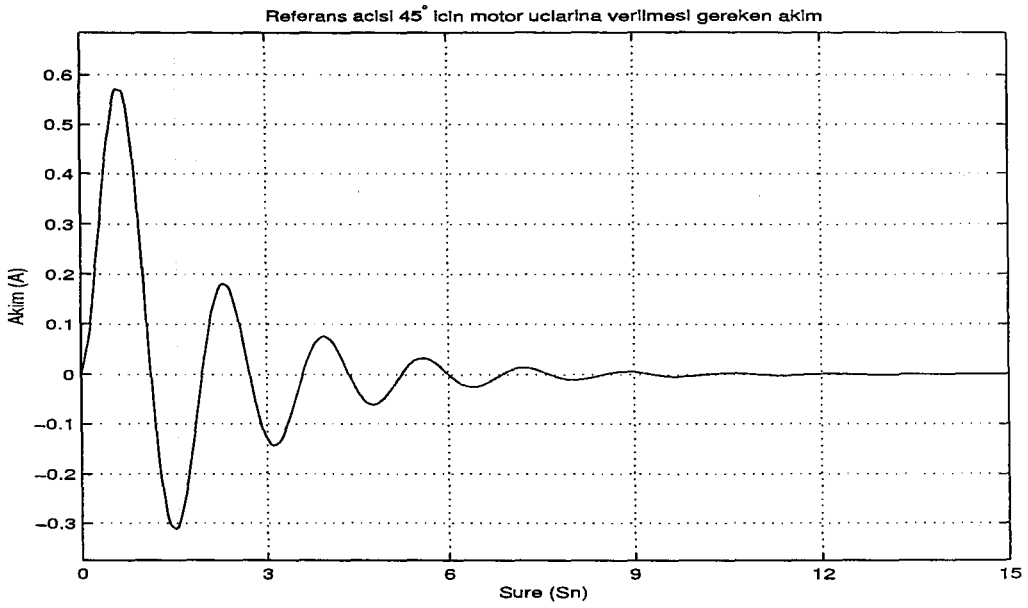
Şekil 6.4: Referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun pozisyonu



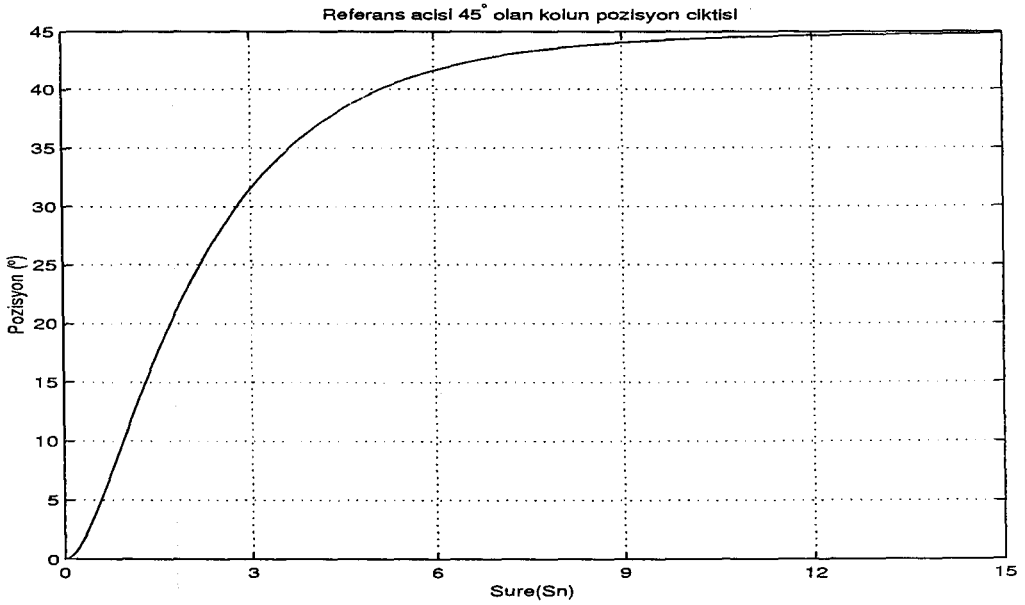
Şekil 6.5: Referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hızı.



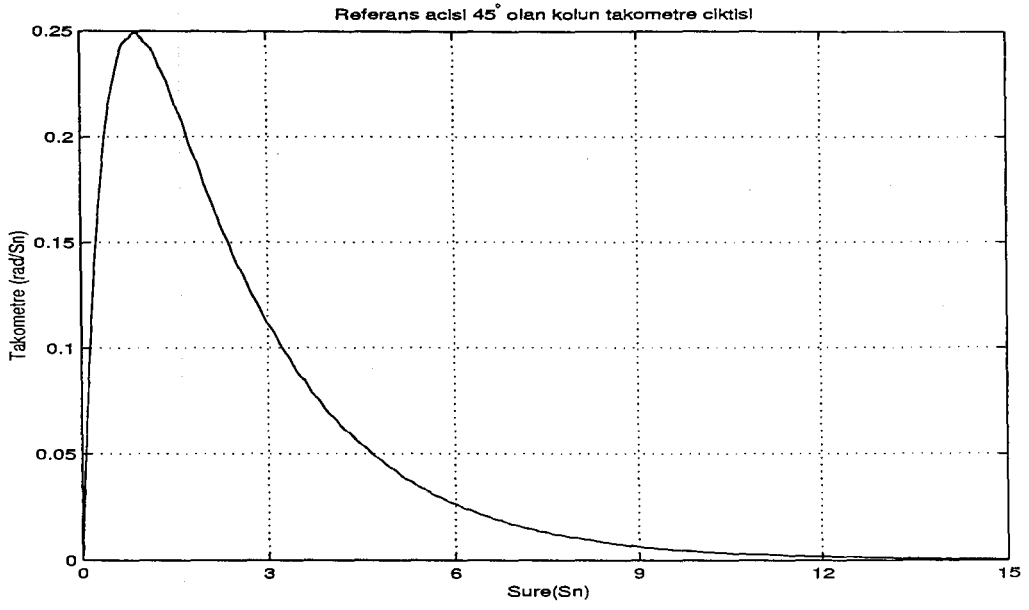
Şekil 6.6: Referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı.



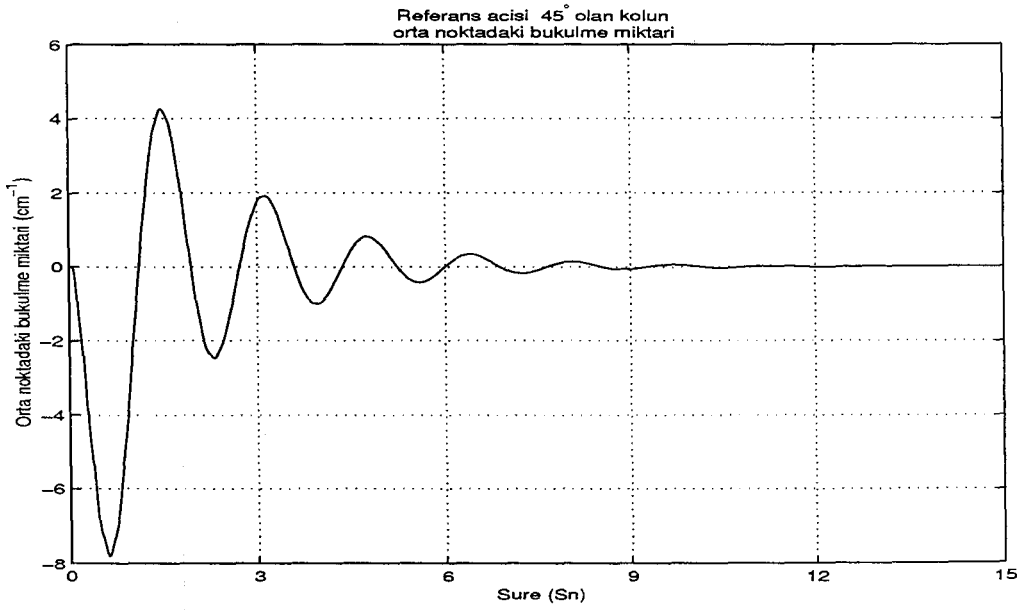
Şekil 6.7: Referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım.



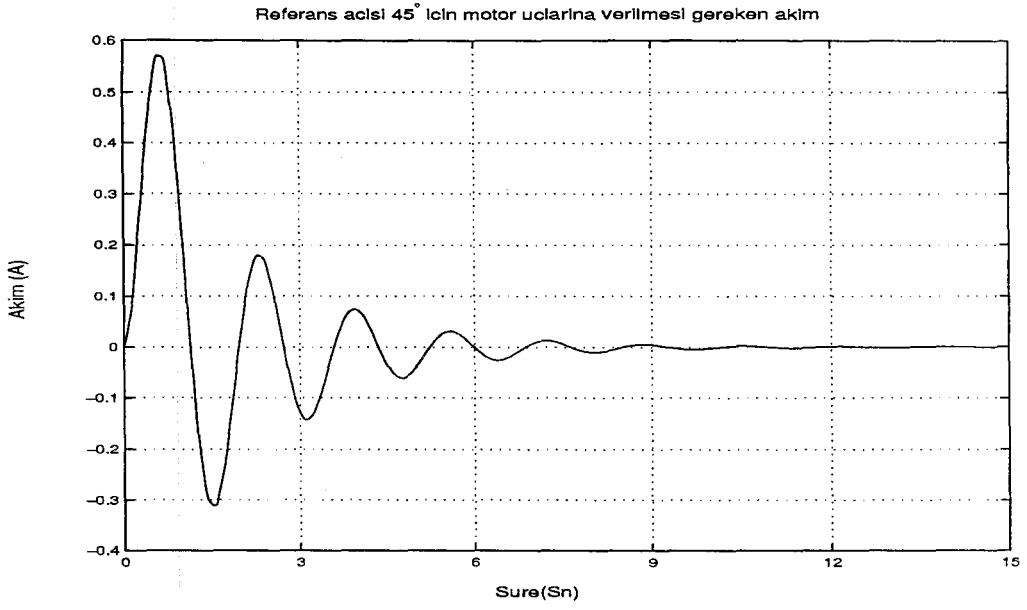
Şekil 6.8: Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu.



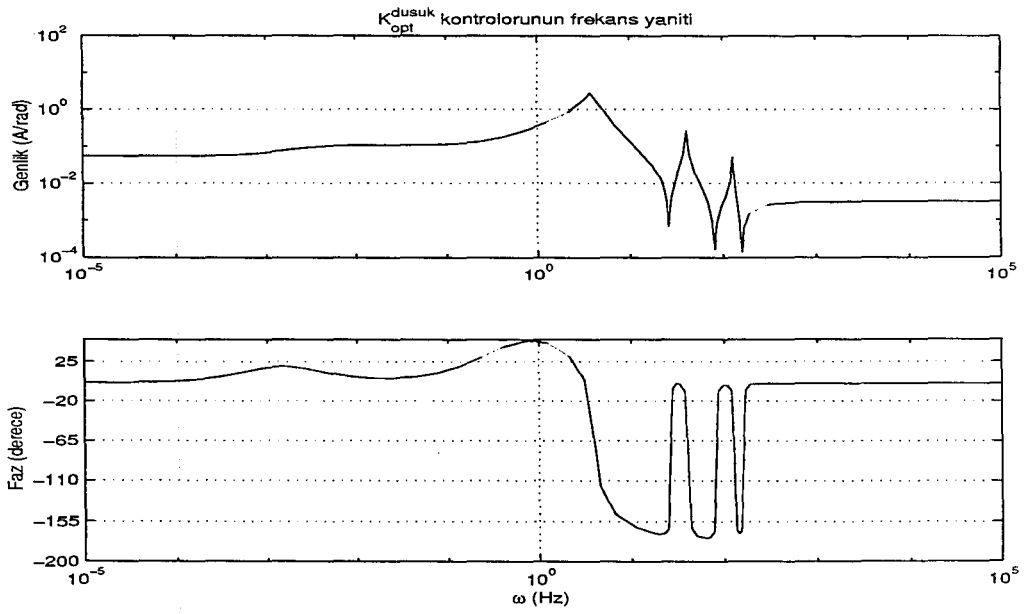
Şekil 6.9: Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı.



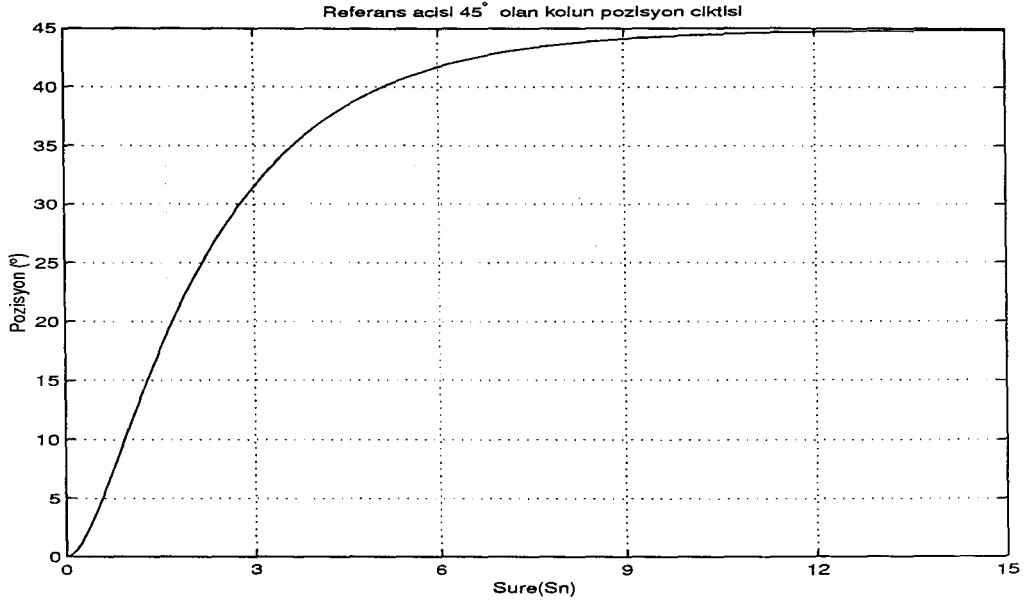
Şekil 6.10: Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı.



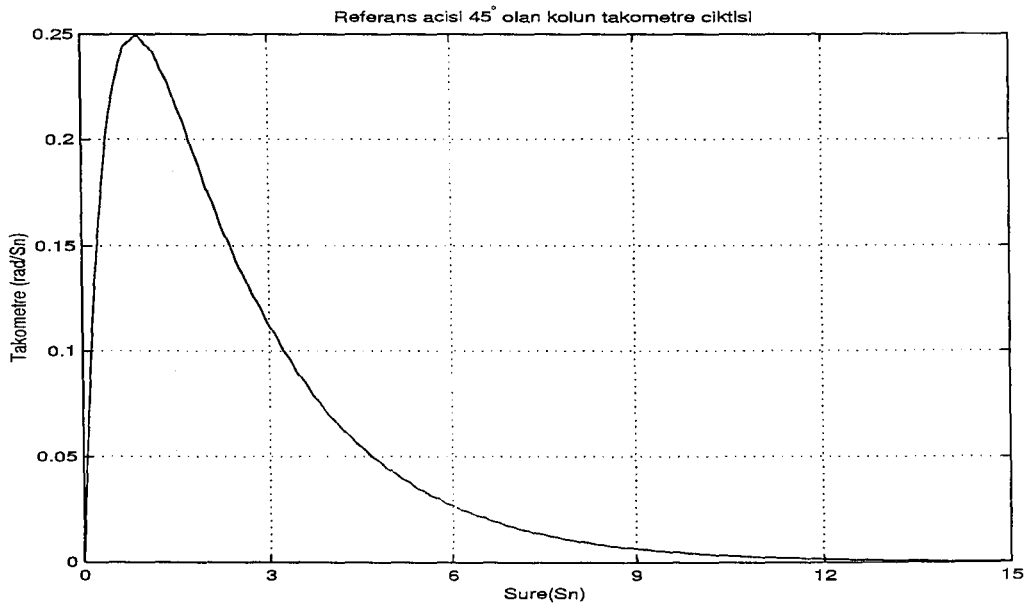
Şekil 6.11: Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım.



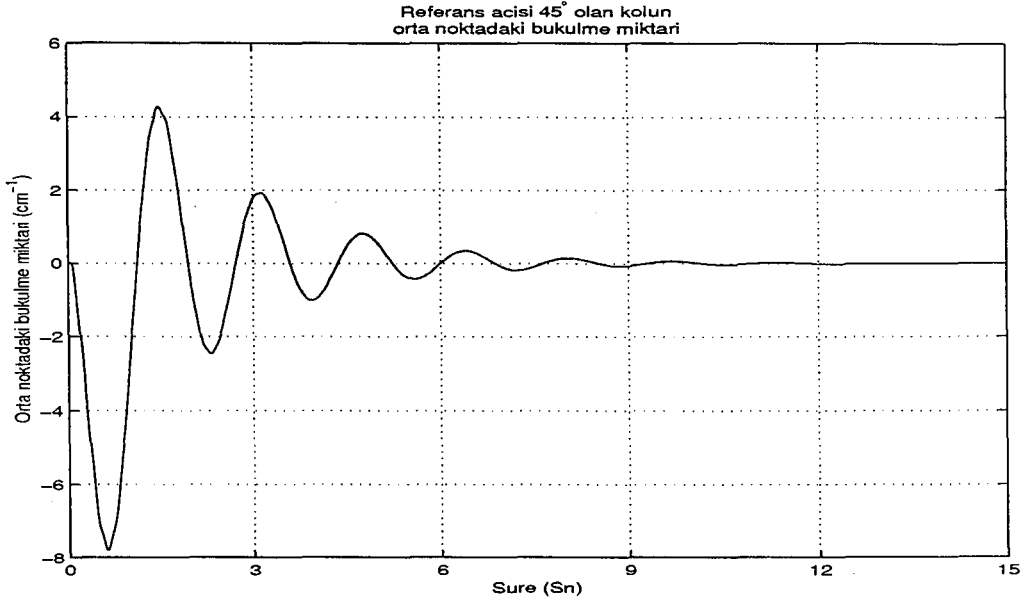
Şekil 6.12: "Skew Toeplitz" yöntemiyle tasarlanan kontrolörün Düşük dereceli formunun frekans tepkisi.



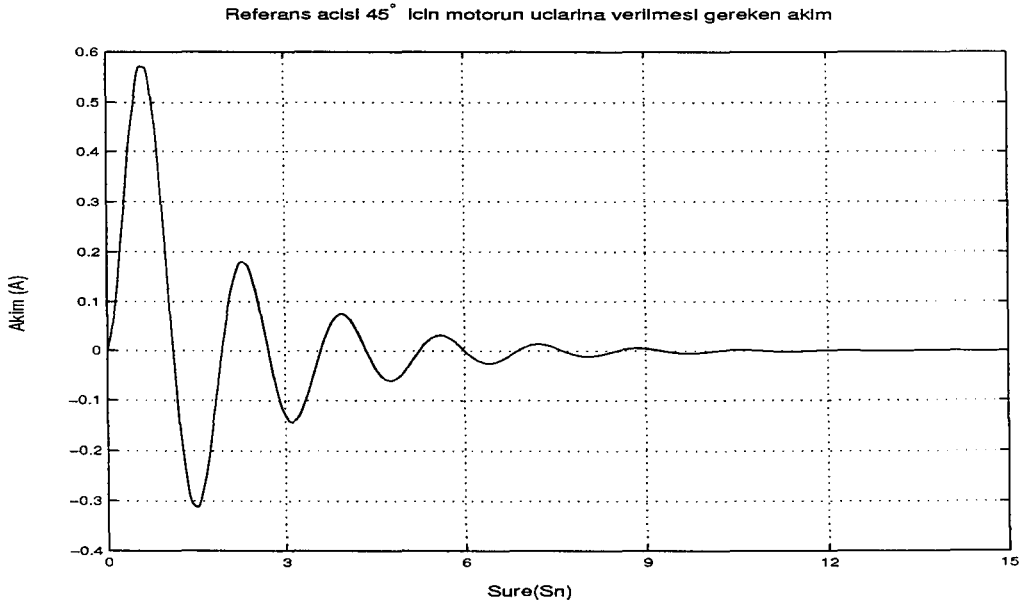
Şekil 6.13: Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu (Düşük Dereceli Kontrolör için).



Şekil 6.14: Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı (Düşük Dereceli Kontrolör için).



Şekil 6.15: Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı (Düşük Dereceli Kontrolör için).



Şekil 6.16: Referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım (Düşük Dereceli Kontrolör için).

6.2.3 Tasarlanan Kontrolörün Deneysel Uygulaması ve Sonuçları

Deneysel düzeneğimizin bilgisayar kontrollü yapısı Şekil 5.2’de olduğu gibidir. Şekil 5.2’deki bilgisayar analog anlamda sistemimizin kontrolörünü ve referans girdisini ifade etmektedir.

Tasarladığımız kontrolörün bilgisayar ortamında uygulanabilmesi için bu sürekli zaman kontrolörünü belli bir periyotta örneklenmiş denkinin bulmak gerekmektedir. Çünkü sistemimizdeki pozisyon bilgisi enkoder aracılığıyla 50 kHz’lik bir frekansta örneklenmekte, dışarıdan gelen analog sinyaller ise 330 kHz’lik bir frekansta örneklenmekte ve bilgisayar bu sinyalleri sayısal olarak işlemektedir.

Bilgisayarın analog anlamda kontrolör ve referans girdisine denk düştüğünü belirtmiştik. Bilgisayar kontrollü deneysel kapalı döngümüz bu haliyle analog anlamda Şekil 3.1’e benzemektedir. Şekil 3.1’deki işlemin gerçekleşmesi, yani bilgisayar ortamında girilen referans bilgisinden sürekli olarak veri toplama kartının sayısal kanalından okuduğu pozisyon bilgisinin çıkartılması ve karşılık gelen hatanın da kontrolörle çarpılarak, motoru sürmesi gereken I_c akımını motora sağlayacak olan motor sürücüyü gerilim olarak gönderilme işini ve pozisyon hatası sıfır oluncaya dek bu döngünün devam etmesini bir C programı ile yapabiliriz. Yazacağımız C programında kontrolörümüzün durum-uzay denklemlerini, sistemdeki en yavaş örnekleme frekansı olan 50 KHz ile örnekleyerek, kontrolörün kesikli zamandaki durum-uzay denklemlerini (122), MATLAB paket programında bulunan “c2d.m” programı ile C programına aktarabiliriz.

Sistemimizdeki bir diğer örnekleme frekansı ise programın yaptığı iştir. Programımızı farklı referans değerleri için, programın döngüyü tamamlama süresini hesaplayabiliriz. Her farklı referans değeri için programın döngüyü işleme süresi farklı olacağından bulunan en düşük örnekleme frekansı olan 1050 Hz yerine olası durumlar için daha düşük bir örnekleme frekansı alabiliriz. Bu durumda döngünün, hızlı çalıştığı zamanları da bu frekans değerinden çıkartarak sisteme gecikme olarak koyarsak, sistemin tüm hata değerlerinde, kontrolörün örnekleme frekansı ile yazılan C programının bir döngüyü tamamlama süresi aynı zamanı alır.

Tasarlanan kontrolöre göre EK-7’de bulunan C programı plante uygulandığı zaman, kontrolörün deneysel düzeneği kontrol etmediği gözükmektedir. Benzetim sonuçlarında plant istenilen referans açısını kontrol etmekte, lakin gerçek deneysel sistemde kontrol etmemektedir. Bunun sebeplerinden birisi kontrolörün integratör içermemesidir. Benzetim sonuçlarındaki takibi ise, plantin katı hal modu sağlamaktadır. Fakat deneysel düzenekteki belirsizlikler ve doğrusalsızlıklar, kontrolörde integratör olmadığı zaman işe yararmaktadır.

Kontrolörde integratör olmamasının sebeplerinden birisi uygun ağırlıkları seçemiyor olmamızdan kaynaklanmaktadır. Ağırlıklar arasındaki ilişki $W_1(s)W_1(-s) + W_m(s)W_m(-s) = \varepsilon W_1(s)W_1(-s)W_m(s)W_m(-s)$ biçiminde olduğundan, (40) ifadesini çözmek yerine, ifadeyi daha sade ve kolay olacak şekilde, iki blok problemimize tek blok problemi haline dönüştürmemizden kaynaklanıyor. Problemi bu hale dönüştürmemizin nedeni ise, $W_1(s)$ ve $W_2(s)$

rastgele seçildiği zaman, tanımladığımız, $\chi_\rho(z)$ polinomunun kökleri (66) ifadesindeki R_ρ matrisinin determinantını çok büyük yapıyor bu da matrisin içinde $\frac{1}{0}$ 'a yakın değerlerden kaynaklanıyor. Bu ise, (61) ifadesindeki $m_i(z)$ 'nin ($m(z) = m_i(z)m_n(z)$) $\chi_\rho(z)$ polinomunun kökleri ile aynı sıfırı olmasından dolayı, çünkü $R_-(z)$ fonksiyonunu $\chi_\rho(z)$ polinomunun köklerinde hesaplarken, bu köklerin birinde 0'a yakın bir değer çıkıyor, benzer şekilde $R_-(z)$ fonksiyonunu aynı kökün tersi ile de değerini hesaplarken de bu durumda $\frac{1}{0}$ 'a yakın bir değer çıkıyor, bu da anlaşılacağı üzere $m(z)$ fonksiyonundan kaynaklanıyor ($m(z) := 1/m(z^{-1})$). Sistemimiz minimum faz fakat (129) ifadesini kararlı yapan bir iç fonksiyona ihtiyaç var. Bu sebepten sistemde bir iç fonksiyon var. Farklı τ değerleri için yaptığımızda ise farklı bir sonuç elde edemedik. Fakat ağırlıkları bu şekilde seçince, $m_i(z)$ fonksiyonu ile, $w_0(z)$ fonksiyonunun ortak kökleri olmuyor. Ayrıca (136) ifadesinde kontrolöre gelen $N_2^{-1}N_1^{-1}$ terimi de kontrolöre, plantin bir ϵ sayısı kadar sola yaklaştırdığımız katı hal modunu sıfır olarak yerleştiriyor. Bu sebeplerden dolayı plantimizin deneysel uygulamasını gerçekleştiremedik.

Tasarladığımız kontrolörün düşük dereceli formunun benzetim sonuçları da incelendiğinde, sistemdeki aynı referans açıları için, kolun pozisyon, takometre, orta noktadaki bükülme ve uygulanması gereken I_c akımına ait çıktılar birbirinin aynısıdır. Bu da iki kontrolör arasındaki mesafenin fazla olmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca, hem düşük dereceli hemde yüksek dereceli kontrolörün frekans yanıtı incelendiğinde aralarında bir fark olmadığı gözükücektir.

6.3. Durum-Uzayı Yöntemleri Kullanarak Kontrolör Tasarımı

Bir diğer kontrolör tasarım yöntemi ise durum-uzay yöntemleri ile kontrolör tasarımıdır. Bu tasarımda diğer kontrolör tasarımı gibi direk olarak operatörlerin etkileri üzerinden değil de, sistemdeki genelleştirilmiş plantin durum-uzay matrisleri ve alt, üst γ değerleri ile elde edilen iki Hamiltonian matrislerinin çözümleri ile elde edilir. Daha önce de belirttiğimiz üzere bu tasarımda, Şekil 4.1 dikkate alınırsa $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ ifadesini sağlayan bir altoptimal kontrolör bulmaya çalışacağız.

6.3.1 Kontrolör Tasarımı

Bu kontrolör tasarım yönteminde iki ayrı durum için kontrolör tasarlayacağız. İlkinde, motora uygulanan I_c akımından pozisyona olan transfer fonksiyonu plant olarak ele alıp, tek girdi tek çıktılı bir sistem için, ikincisinde ise hem takometre hem de orta noktadaki bükülmeye olan transfer fonksiyonları da alıp tek girdili çok çıktılı bir sistem için kontrolör tasarlayacağız. Hem tek girdili tek çıktılı sistem, hem de tek girdili çok çıktılı sistem için, kolun referans açısının takibi, orta noktada oluşan bükülmenin kısa sürede sönümlenmesi ve iyi bir performans sağlanması,

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (140)$$

karma hassasiyet problemini çözen bir \mathcal{H}_∞ kontrolör ile mümkündür. Her iki farklı plant yapısı için de ortak bir gürbüz kontrolör problemini Şekil 6.17'de olduğu gibi ifade edebiliriz.

Tek girdili tek çıktılı durumda plantin boyutu 1×1 olacağından sistemdeki tüm ağırlık fonksiyonları, kontrolör ve sistemdeki tüm sinyaller 1×1 boyutunda olacaktır. Diğer durumda ise plantin boyutu 3×1 boyutunda olacağından, W_e ve W_d ağırlıkları 3×3 boyutunda olmalıdır. Karşılık gelen kontrolör ise 1×3 boyutunda olacaktır. e , y ve z_1 sinyalleri 3×1 boyutlu olacaktır, sistemin girdi sinyali u ve z_2 sinyali ise, diğer durumdaki gibi tek boyutlu olmalıdır.

Karma hassasiyet problemini çözmek için, Şekil 6.17 ve (140) ifadesini standart problem olarak ifade edilen Şekil 4.1 gibi yazabiliriz. Girdi çıktı denklemleri aşağıdaki gibi verilen sistemimizin

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ e \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} d \\ r \\ u \end{bmatrix} \quad (141)$$

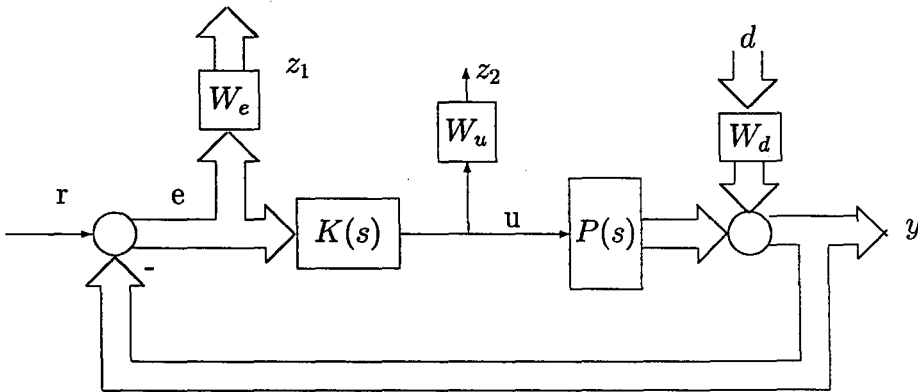
ve

$$u = Ke \quad (142)$$

problemi olan (140) ifadesini, LFT formunda yazarsak, genelleştirilmiş plant G ,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_u \\ -(W_e W_d) & W_e & -(W_e P) \\ -W_d & I & -P \end{bmatrix} \quad (143)$$

olarak yazılır.



Şekil 6.17: Sistem için gürbüz kontrolör yapısı.

6.3.2 Tek Girdili Tek Çıktılı Durum için Tasarlanan Kontrolörün Benzetim Sonuçları

Her iki ayrı kontrol tasarımında [21]'de, hem tek girdili tek çıktılı hem de çok girdili çok çıktılı sistemler için sunulan genel \mathcal{H}_∞ kontrol problemini çözme yolundan faydalanacağız. Bu şekilde kontrolör tasarımı için, MATLAB paket programında “ μ -Analysis & Synthesis Toolbox” ’da bulunan “hinsyn.m” programı ile tasarlayacağız.

Tek girdili tek çıktılı durum için kullandığımız ağırlıkların boyutundan bahsetmiştik. Bu kontrolör tasarımında da “Skew Toeplitz” yöntemindeki gibi 3 esnek modu içeren plant için bir kontrolör tasarlamaya çalışacağız. Bu kontrolör tasarımındaki ağırlık seçimleri bundan önceki tasarıma göre biraz daha farklıdır.

Plantimizin transfer fonksiyonuna bakılırsa (118), plantimizin bir integratörü var. Dolayısıyla açık döngü sistemde, PK , pozisyon takibi için gerekli olan integratöre sahibiz. Fakat kontrolörümüzde de bir integratör olması veya kontrolörün integratör görevi görmesi için W_e ağırlığının seçiminde, iki tane integratör koymalıyız. Kontrolörün integratörü olması sadece sistemde integratör görevi görmenin dışında, (140) ifadesinin sonsuz normunu, eğer S fonksiyonunun orijinde bir sıfırı var ise, bu normu sonlu yapmak, ve olası sabit gürültünün kontrolör tarafından uzaklaştırılmasını sağlamaktır [31]. Fakat MATLAB’ ta W_e ağırlığını aşağıdaki gibi seçersek,

$$W_e = \frac{1}{s^2} \quad (144)$$

tekillik problemleri ile karşılaşacağımızdan, tekillik problemlerini ortadan kaldırmak için paydadaki $s + 0$ yerine $s + d$ gibi, $0 < d \ll 1$ olacak şekilde çok küçük bir sayı seçebiliriz. Bu durumda pozisyon hatasına müdahale eden bu W_e ağırlık fonksiyonunu,

$$W_{e1}(s) = 185.5 \frac{1}{s + 10^{-3}} \frac{1}{s + 10^{-3}} \quad (145)$$

olarak seçilmiştir. Sistemdeki bir diğer ağırlık fonksiyonu ise, plantin çıktısına dışarıdan etki eden bozucu sinyallerin azaltılması için kullanılan $W_d(s)$ ağırlığıdır. Sistemimizdeki (140) ifadesi iki blok bir problemdir ve sistemdeki z_1 ve z_2 çıktılarının ikinci normlarını minimize etmek istediğimizden dolayı, ayrıca iki blok problemimizde amaç sistem gürbüzlüğüne müdahale ve hata sinyalinin azaltılması olduğu için bu bozucu sinyale etki eden ağırlığı sabit ve gelen sinyallerin büyüklüğünü çok azaltacak şekilde,

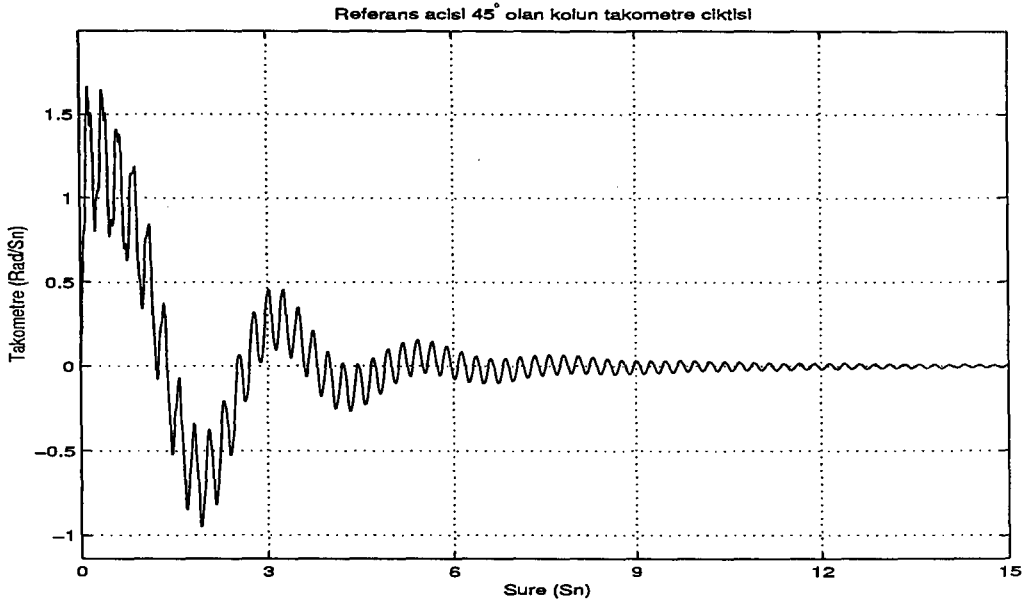
$$W_d(s) = 0.001 \quad (146)$$

olarak seçebiliriz. Sistemin gürbüzlüğüne ise W_u ağırlığı müdahale etmektedir. Plantimiz için kontrolör tasarlarken, kontrolörümüzün plantin ilk 3 modunu kontrol edecek şekilde tasarladık, fakat bunu sınırlamamız kontrolör tasarımının bir gereği idi. Dolayısıyla kontrolörümüz de sonlu boyutludur.

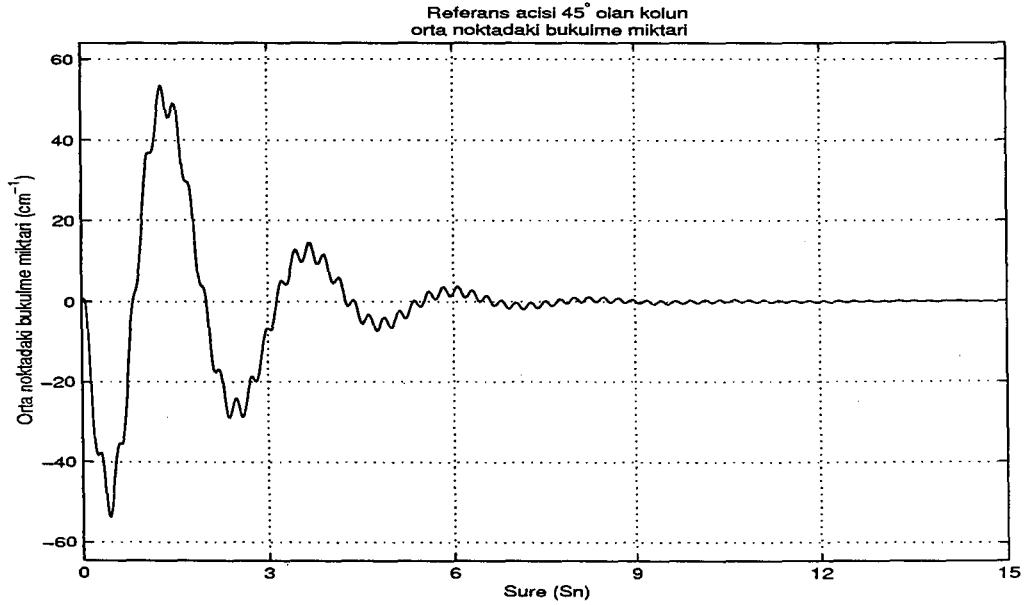
Fakat gerçekte plantin sonsuz boyutlu olması ve kontrolörün de, planti modellerken modellemeye katılamayan bu yüksek frekanslardaki modlarını da kısa sürede sönmemesi için, kontrolör tasarımında modellemeye katılmayan yüksek frekansdaki modları hesaba katmak ve gürbüzlüğü sağlamak için, W_u ağırlığının seçiminde, plantin frekans yanıtı dikkate alınarak, plantin ilk 3 modundan sonraki yüksek frekans modlarını da geçiren bir ağırlığa ihtiyacımız var. Bu sebepten W_u ağırlığını,

$$W_u(s) = 18.75 \frac{s+1}{s+25} \quad (147)$$

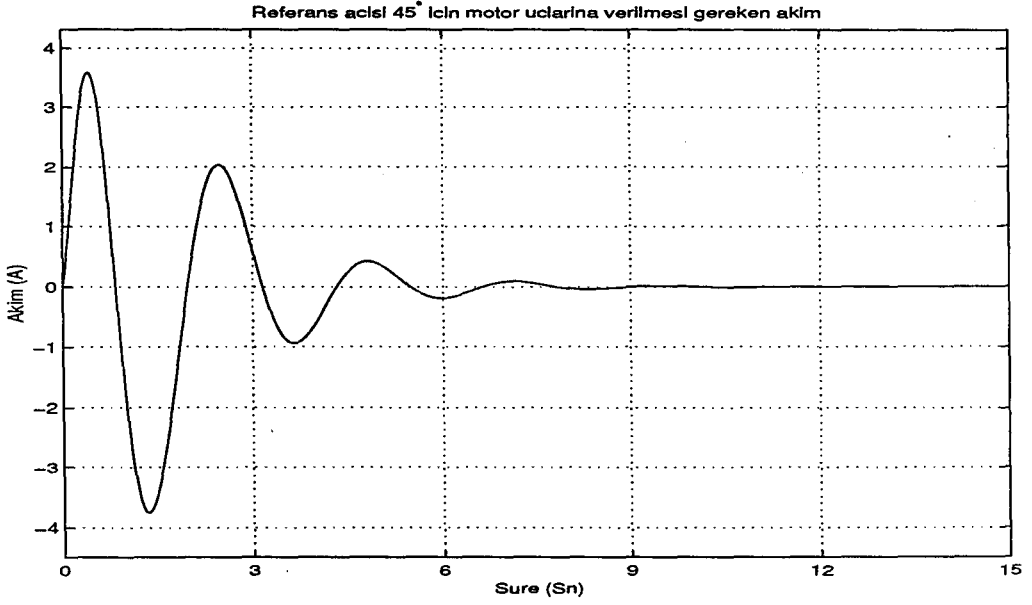
olarak seçebiliriz. Bu koşullar altında EK-8'de kullanılan "sisoric_exp.m" programı ile tasarlanan kontrolörümüzün frekans yanıtı Şekil 6.18'de olduğu gibidir. Elde ettiğimiz bu kontrolör 23. dereceden bir kontrolördür. Bu kontrolörü uygulayarak EK-8 sayesinde benzetim sonuçlarına bakıldığı zaman, kontrolör 3'den fazla esnek modu olan plantlere MATLAB paket programındaki "lsim.m" programı yardımıyla uygulandığı zaman kapalı döngü sistemin kararsız olduğu gözlenmiştir. Bu sebepten benzetim sonuçlarını bulurken yüksek dereceli kontrolörler ve plantlerde SIMULINK paket programından faydalanacağız. Kontrolör hem 3 esnek modu hem de 12 esnek modu olan plante uygulandığı zaman referans açısı olarak da 45° derece verildiğinde, 3 esnek modu olan plantin pozisyon, takometre, orta noktadaki bükülme çıktıları ve motora uygulanması gereken akımlar Şekil 6.19, 6.20, 6.21, 6.22'de olduğu gibidir. Eğer plantimiz, 12 esnek modu olan plant ise, bu durumda referans açısı için kolun pozisyon, takometre, orta noktadaki bükülme çıktıları ile motora uygulanması gereken akımlar Şekil 6.23, 6.24, 6.25, 6.26'da olduğu gibidir. Bundan önceki "Skew Toeplitz" kontrolör tasarımında da olduğu gibi, yüksek frekans modlarının etkisinin plantin pozisyon, takometre ve orta noktadaki bükülme çıktılarındaki etkisinin ilk bulduğumuz kontrolöre göre daha düşük dereceli kontrolörlerin yüksek frekans modlarına olan etkisini bu kontrolör içinde inceleyebiliriz. Tasarlanan kontrolörün düşük dereceli formu için "balmr.m" komutu ile bulunan 23. derece kontrolör dışında, 12. dereceden bir kontrolör de bularak, bu kontrolörün de benzetim sonuçlarını inceleyebiliriz. Bulduğumuz bu düşük dereceli K_{alt}^d kontrolörünün K_{alt} kontrolörüne olan uzaklığı, $\|K_{alt} - K_{alt}^d\|_\infty < 10^{-2}$ kadar olacak şekilde bulunmuştur. Derecesi düşürülmüş olan bu kontrolörü, diğer ilk bulunan kontrolör gibi gerçek zamanda da uygulayacağımızdan benzetim sonuçlarını EK-8'de bulunan programla 12 esnek modu olan plante göre yapabiliriz. Frekans yanıtı Şekil 6.27'de bulunan düşük dereceli kontrolör, referans açısı olarak 45° seçip, kola bu düşük dereceli kontrolör uygulandığı zaman, kolun pozisyon, takometre, orta noktadaki bükülme çıktıları ve motora uygulanması gereken akımlar ise Şekil 6.28, 6.29, 6.30 ve 6.31'de olduğu gibidir.



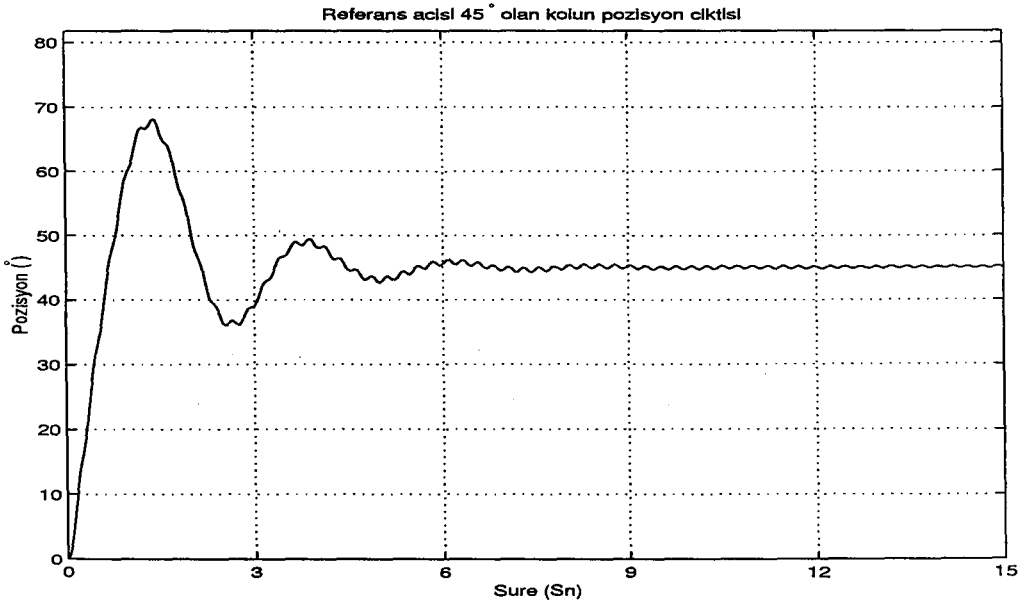
Şekil 6.20: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hızı.



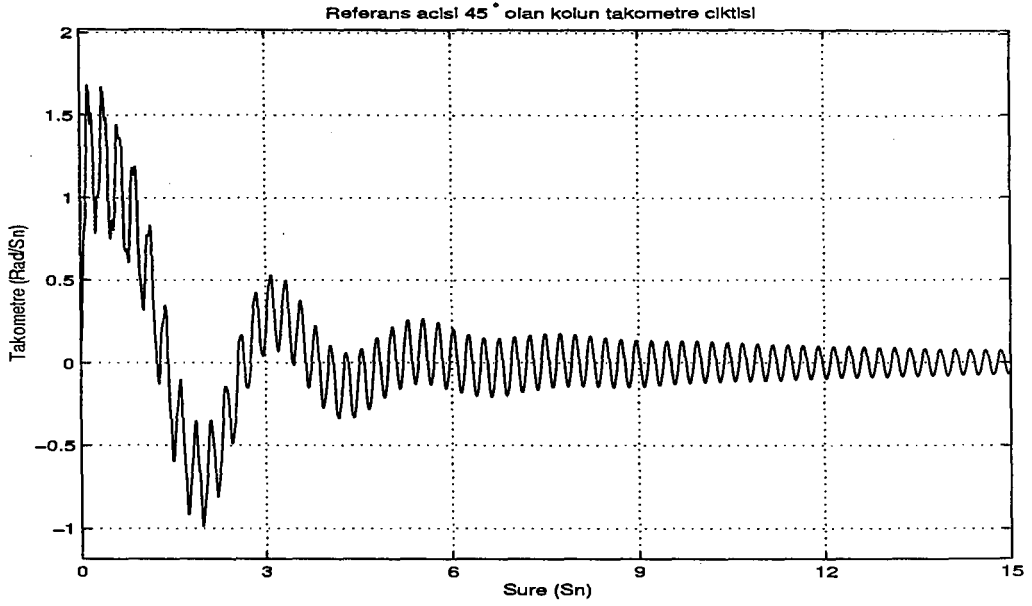
Şekil 6.21: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun orta noktasındaki bükülme miktarı.



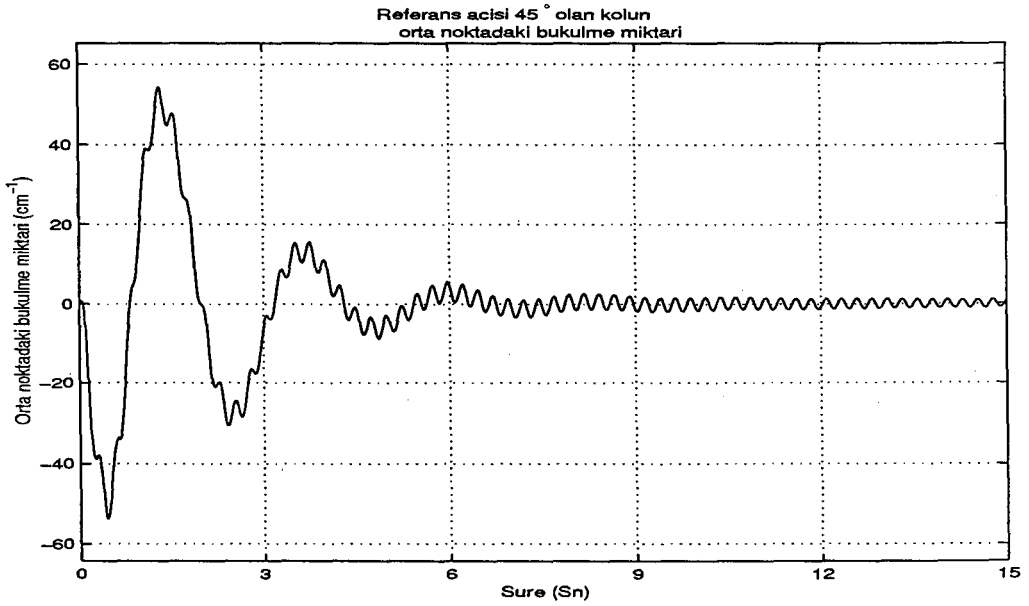
Şekil 6.22: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım



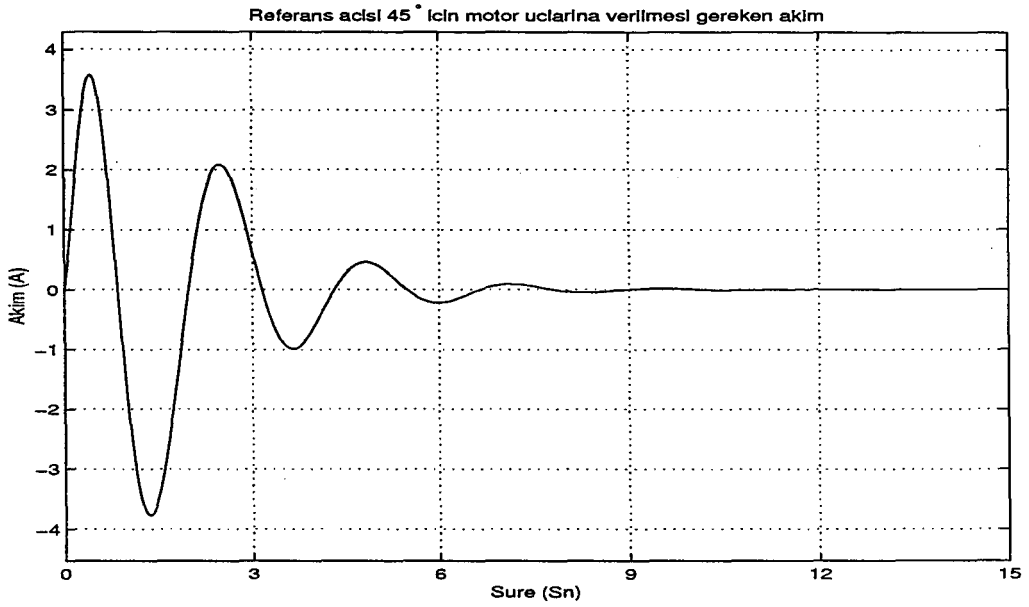
Şekil 6.23: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu.



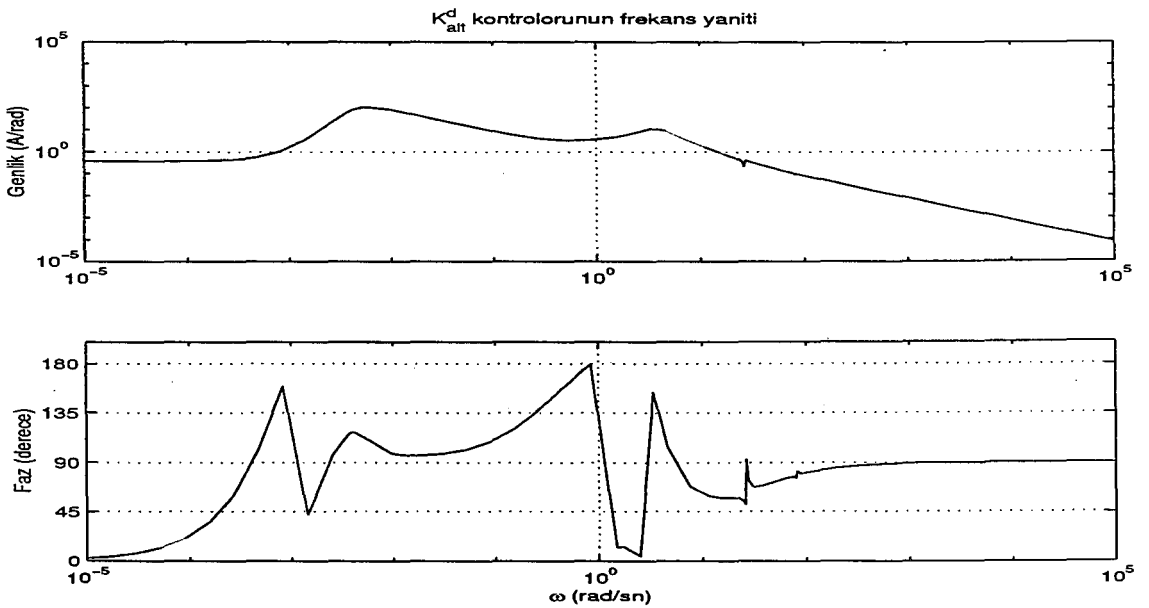
Şekil 6.24: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı.



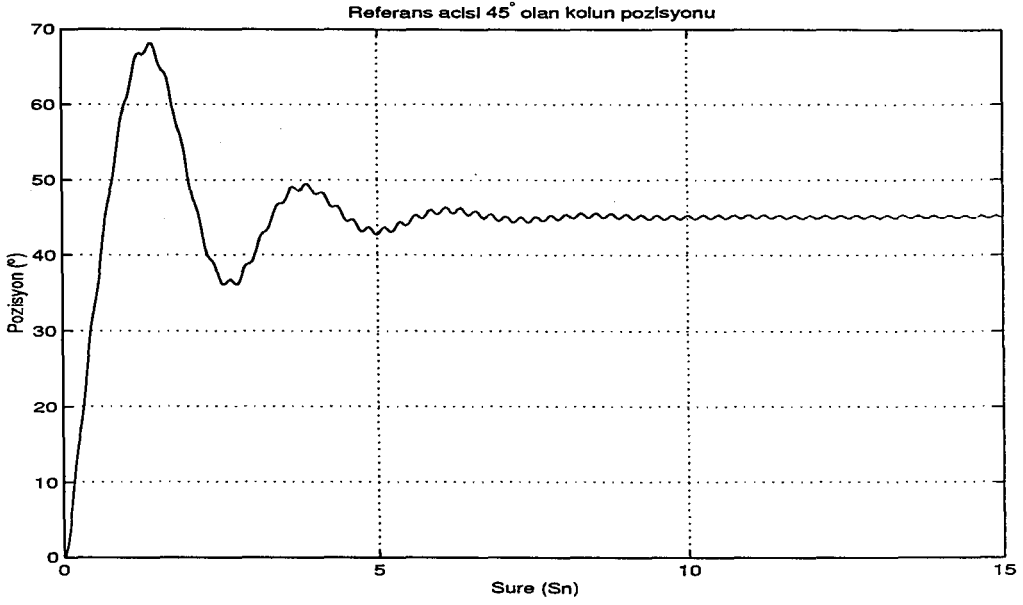
Şekil 6.25: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktasındaki bükülme miktarı.



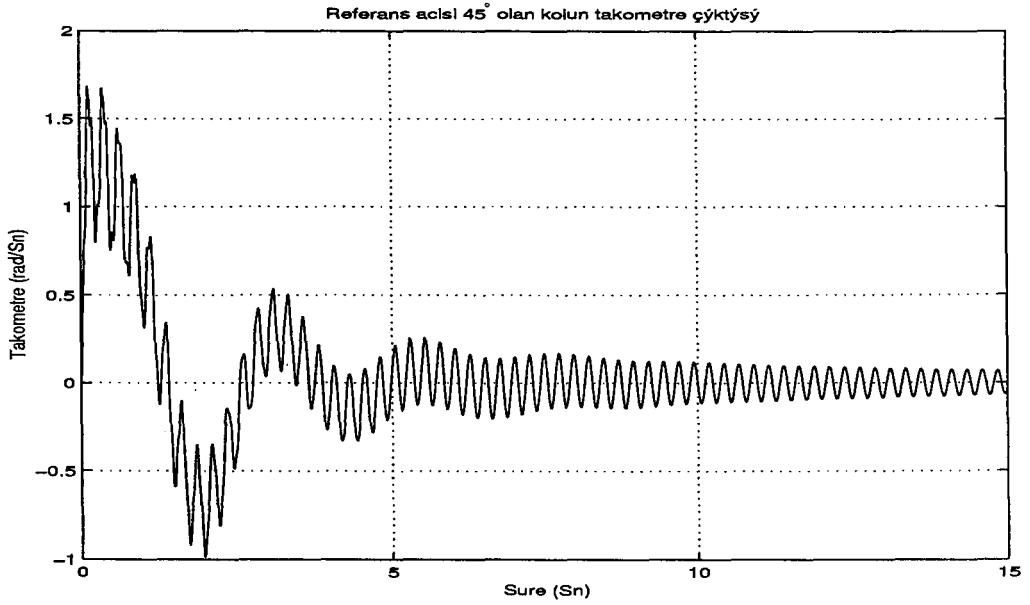
Şekil 6.26: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım



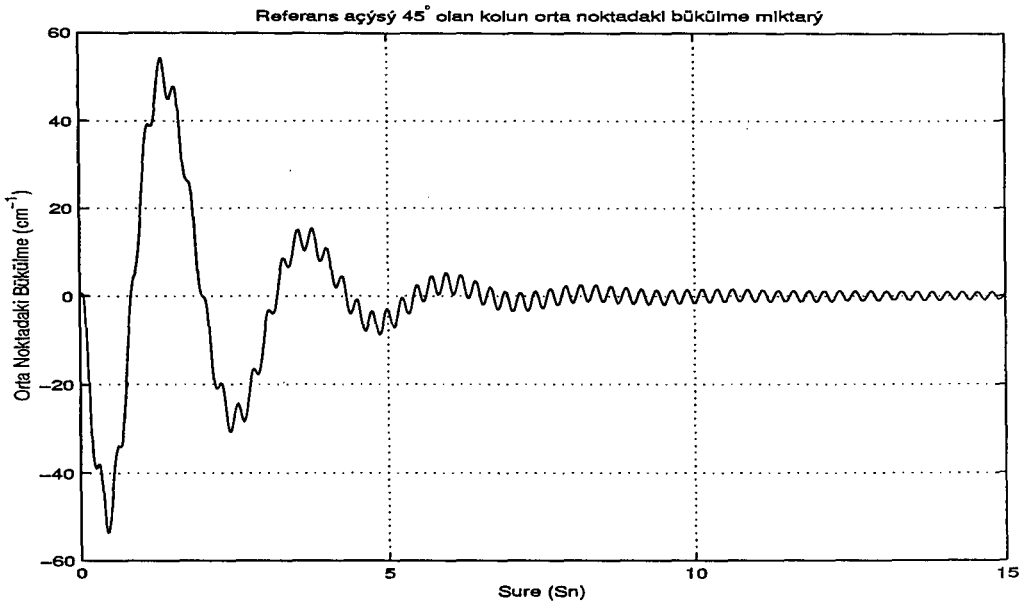
Şekil 6.27: Tek girdi tek çıktılı durumda elde edilen düşük dereceli K_{alt}^d kontrolörünün Frekans Tepkisi.



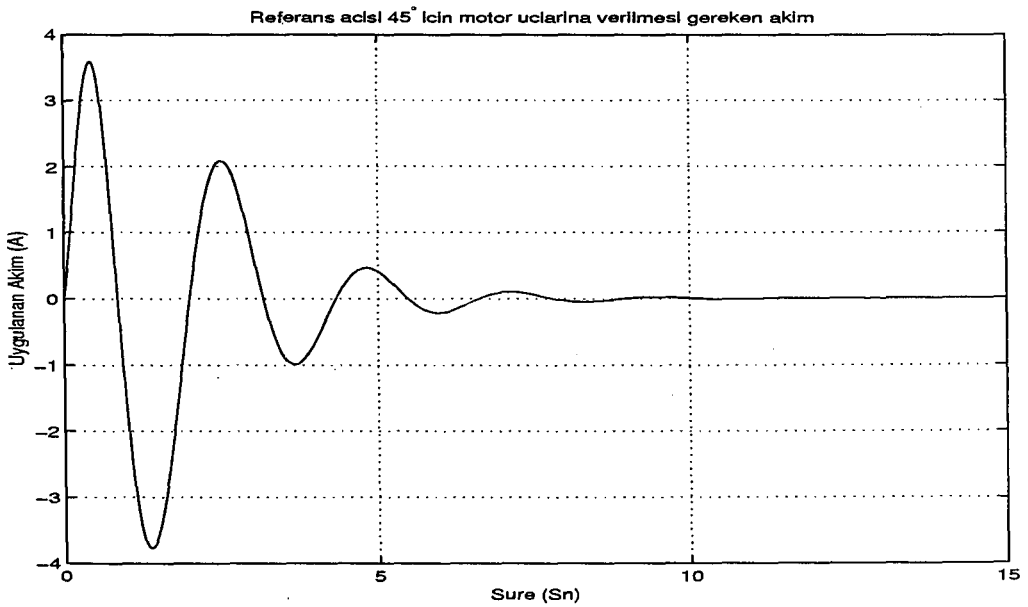
Şekil 6.28: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu (Düşük Dereceli Kontrolör için).



Şekil 6.29: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı (Düşük Dereceli Kontrolör için).



Şekil 6.30: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktasındaki bükülme miktarı (Düşük Dereceli Kontrolör için).



Şekil 6.31: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor uçlarına uygulanması gereken akım (Düşük Dereceli Kontrolör için).

6.3.3 Tek Girdili Tek Çıktılı Durum için Tasarlanan Kontrolörün Deneysel Uygulamaları ve Sonuçları

Bu bölümde cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile bulduğumuz ve frekans yanıtları sırasıyla Şekil 6.18'de bulunan 23. dereceden K_{alt} ve Şekil 6.27'de bulunan 12. dereceden K_{alt}^d kontrolörlerimizin deneysel olarak uygulamalarını işleyeceğiz.

Sürekli zamanda tasarlanan kontrolörümüzün, bilgisayar ortamında uygulanması için, kontrolörümüzün kesikli zaman denkinini bulmamız gerekecektir. Kesikli zaman denkinini de bulmak için, sürekli zaman sistemimizi belli bir f frekansı ile örnekleyerek elde etmek mümkündür. MATLAB paket programındaki "c2d.m" programı ile herhangi bir doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi belli bir f frekansında örnekleyerek, kesikli zamandaki karşılığını bulabiliriz. Kesikli zaman karşılığı için seçeceğimiz örnekleme frekansı sistemdeki en yavaş örnekleme frekansı olmalıdır.

Daha öncede belirttiğimiz üzere sistemdeki örnekleme frekansları, veri toplama kartının örnekleme frekansı, enkoderin örnekleme frekansı ve kontrolörü işleyecek olan, çalışma algoritmasına bağlı olarak değişen ve yazmadan bilemediğimiz yazılacak olan C programının örnekleme frekansdır. Dolayısıyla sistemdeki şu an en küçük gözükten örnekleme frekansı 50 kHz ile kontrolörümüzü örnekleyerek, karşılık gelen A_d ve B_d matrislerini elde edebiliriz. Bu elde ettiğimiz matrisleri, "Skew Toeplitz" yöntemiyle elde edilen K_{opt} kontrolör tasarımının deneysel düzeneğe uygulanması için yazılan C programında bulunan ve K_{opt} kontrolörüne ait olan, 8×8 A_d ve 8×1 B_d matrislerinin boyutlarını 23×23 ve 23×1 olacak şekilde değiştirip, yeni elde ettiğimiz K_{alt} kontrolörünün A_d ve B_d matrislerini yerleştirdikten sonra, tekrar K_{opt} kontrolöründeki 1×8 boyutlu C_c matrisi yerine de tek girdili tek çıktılı sistem için elde ettiğimiz, K_{alt} kontrolörüne ait olan 1×23 boyutlu C_c matrisini yerleştirerek, tek girdili tek çıktılı sistem için olan C programını elde edebiliriz. Yazacağımız C programı bilgisayar ortamında girilen referans girdisinden, veri toplama kartının sayısal kanalında sürekli okunan pozisyon bilgisini çıkartarak hatayı bulacak ve bu hatayı kontrolör ile çarparak motora akım sağlayan motor sürücü uçlarına gerilim olarak gönderecektir. Aynı zamanda da veri toplama kartının analog kanalında bulunan orta noktadaki bükülmeyi, ve takometreyi de ölçmelidir. Bu şekilde bir döngüsü tanımlanan programımız hata sıfır oluncaya kadar çalışacaktır. Bu algoritmaya dayanarak yazdığımız C programının bir döngüyü işleme süresi farklı referans girdileri için incelendiğinde, yazılan C programında bir döngü en yavaş olarak 1.129 ms sürmektedir. Bu süreye karşılık gelen örnekleme frekansı bu durumda sistemdeki en yavaş örnekleme frekansdır.

Bu durumda örnekleme frekansını 600 Hz alıp, sürekli zaman kontrolörü yeniden bu frekansda örneklersek, ve farklı referans girdileri için programın daha hızlı çalışabileceğini de hesaba katarak, programın sonuna referans olarak aldığımız en yavaş döngü süresinden her döngünün çalışma süresini çıkartıp gecikme olarak eklersek, sürekli zamandaki kontrolörün bilgisayar ortamında yazılan kesikli karşılığı ile aralarında fark olmaz.

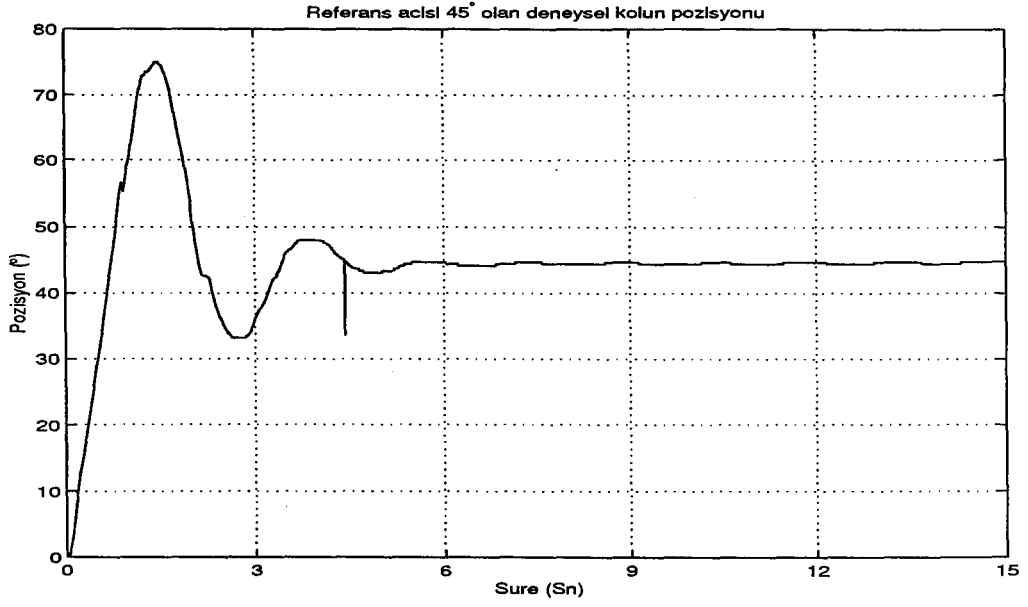
Tek girdi tek çıktılı sistem için elde ettiğimiz kontrolörün 600 Hz örnekleme frekansı ile örneklenerek elde edilmiş durum-uzay denklemleri olan yeni 23×23 boyutlu A_d ve 23×1 boyutlu B_d matrislerini tekrar, yazdığımız C programındaki durum-uzay denklemlerine karşılık gelen yerlere yazarak C programımızın son halini elde etmiş oluruz. Bilgisayar ortamında referans açısı olarak 45° girildiği zaman kolun bu referans açısı için pozisyon, takometre ve orta noktadaki bükülme çıktıları ile bu takibi yapabilmesi için motora verilmesi gereken akım sırasıyla Şekil 6.32, 6.33, 6.34, 6.35'de olduğu gibidir. Motor sürücü uçlarına uygulanan gerilim ise Şekil 6.36'da olduğu gibidir.

Aynı işlemleri tasarlanan yüksek dereceli kontrolörün düşük dereceye indirgenmiş hali için de yapabiliriz. Yazılacak C programı, yüksek dereceli kontrolör için yazılana göre daha hızlı çalışacaktır. Bu sebepten örnekleme frekansını bulurken 50 KHz yerine, bir önceki örnekleme frekansını alabiliriz. Bu durumda benzer süreçleri tekrarlırsak düşük dereceli kontrolör için, 750 kHz alarak, "c2d.m" programı ile A_d ve B_d matrislerini bulup, tek çıktılı sisteme ait olan yüksek dereceli kontrolörün C programında bulunan, A_d ve B_d matrislerini ait olan 23×23 ve 23×1 matris boyutlarını 12×12 ve 12×1 olacak şekilde değiştirip, yeni elde ettiğimiz A_d ve B_d matrislerini yerleştirebiliriz. Ardından da yüksek dereceli kontrolörümüze ait olan 1×23 boyutlu C_c matrisi yerine de düşük dereceli kontrolöre ait olan 1×12 boyutlu C_c matrisini yerleştirerek, tek girdili tek çıktılı sistem için elde edilen düşük dereceli kontrolöre ait olan C programını elde edebiliriz. Yeniden düzenlenmiş olan bu C programını kullanarak, bilgisayar ortamında referans açısı olarak da 45° için kola uygularsak, deneysel kolun pozisyon, takometre ve orta noktadaki bükülme çıktıları ile bu takibi yapabilmesi için motora verilmesi gereken akım ve motor sürücü uçlarına uygulanan gerilim sırasıyla sırasıyla Şekil 6.37, 6.38, 6.39, 6.40, 6.41'de olduğu gibidir.

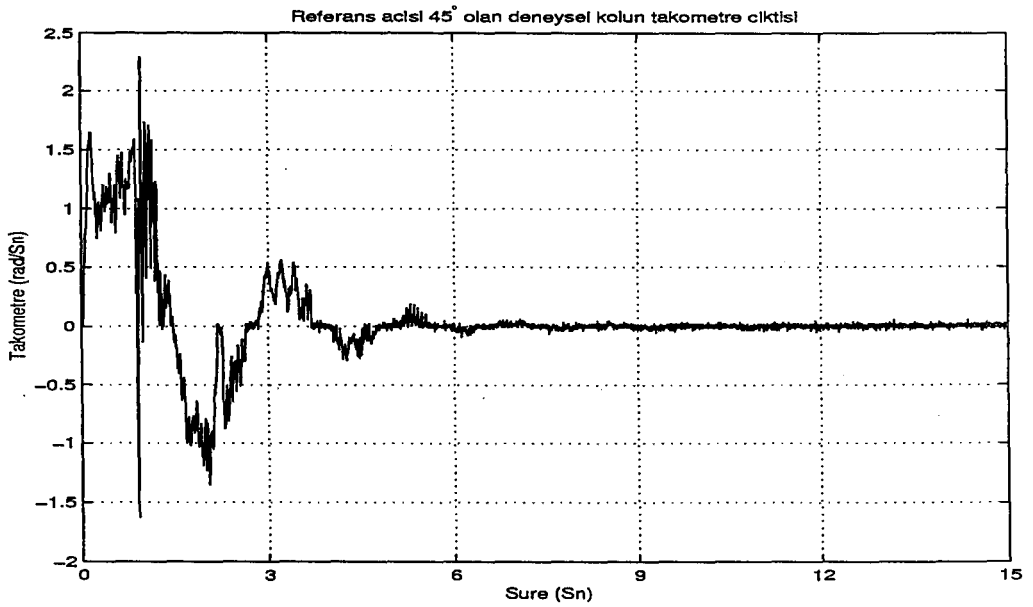
Referans açısı olarak 45° verildiği zaman, "Skew Toeplitz" ve cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile elde edilen kontrolörlerin benzetim sonuçları karşılaştırıldığında, cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile elde edilen kontrolörlerin benzetimlerinde, yüksek frekans modlarının etkisi kolun pozisyon çıktısında hem 3 hem de 12 esnek mod içeren plantde daha fazla gözükmektedir. Bunun en önemli sebebi cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile tasarlanan yüksek ve düşük dereceli kontrolörlerin frekans yanıtları incelendiğinde görülecektir ki, yüksek frekanslarda integratör özelliği göstermesidir.

Bulduğumuz 23. dereceden ilk kontrolör yerine, frekans yanıtı Şekil 6.27'de gözüken 12. dereceden K_{alt}^d kontrolörünü, 12 esnek mod içeren plante uyguladığımız vakit, elde ettiğimiz benzetim sonuçlarına baktığımızda, K_{alt} kontrolörünün uygulanması ile elde edilen benzetim sonuçları ile arasında çok büyük farklılıklar yoktur.

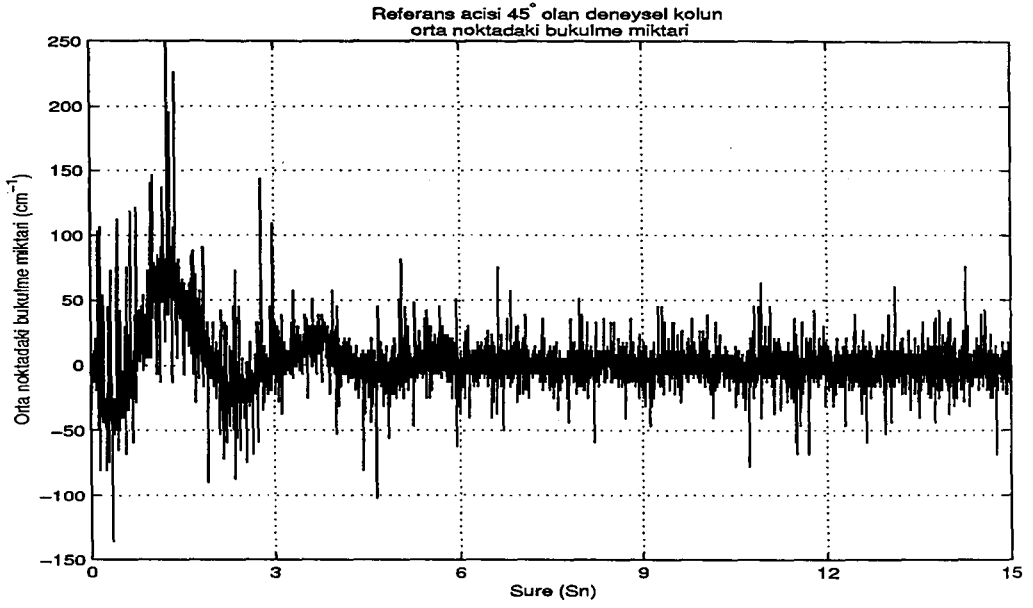
Elde ettiğimiz K_{alt} kontrolörünün deneysel düzeneğe uygulayıp, referans açısı olarak da 45° verdiğimiz vakit, ilk anda kolun pozisyonu benzetime göre daha büyük tepe değerine ulaşmakta ve ardından yaklaşık olarak benzetimdeki gibi davranmaktadır. Deneysel kolun pozisyon çıktısında 0.5° 'den az bir pozisyon hatası vardır (Şekil 6.42). Takometre tepkisi ise, kolun bu ani kalkışından dolayı ilk anda benzetime fazla benzememekte ama sonuçta daha erken sürede sifira ulaşmaktadır. Ayrıca, orta noktadaki bükülmede benzetim



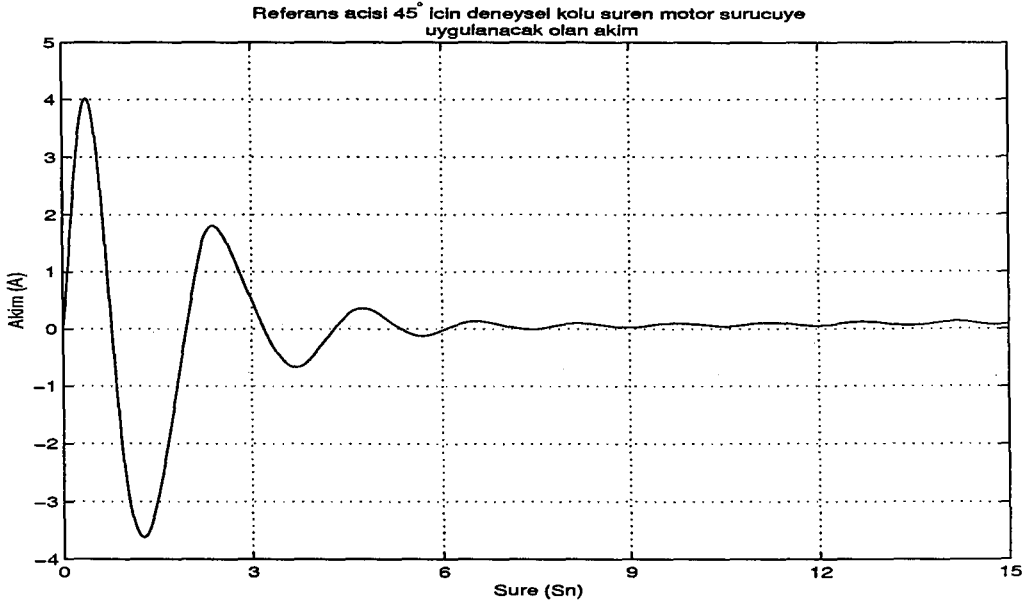
Şekil 6.32: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun pozisyonu.



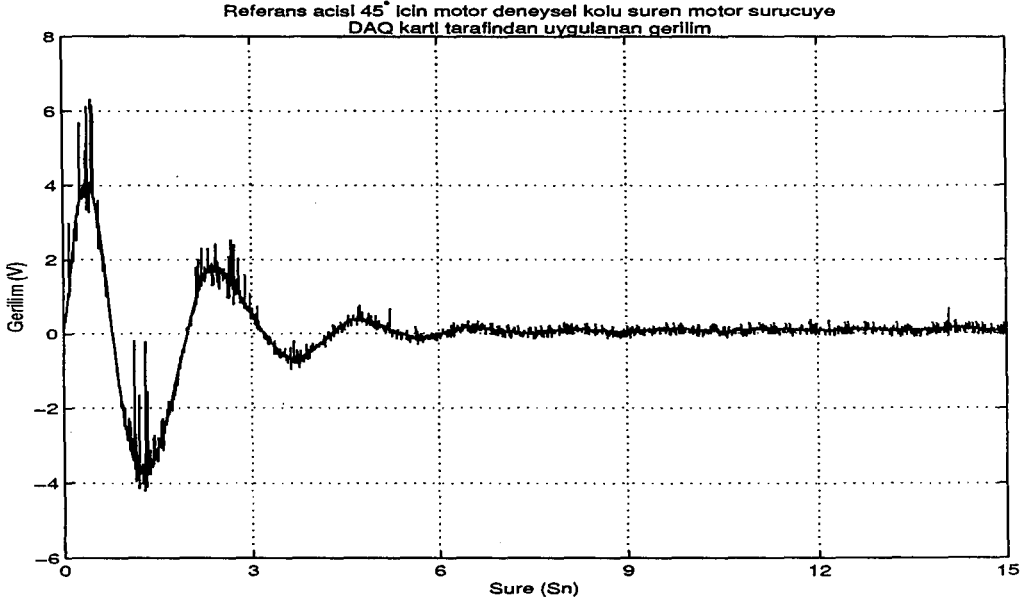
Şekil 6.33: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun hızı.



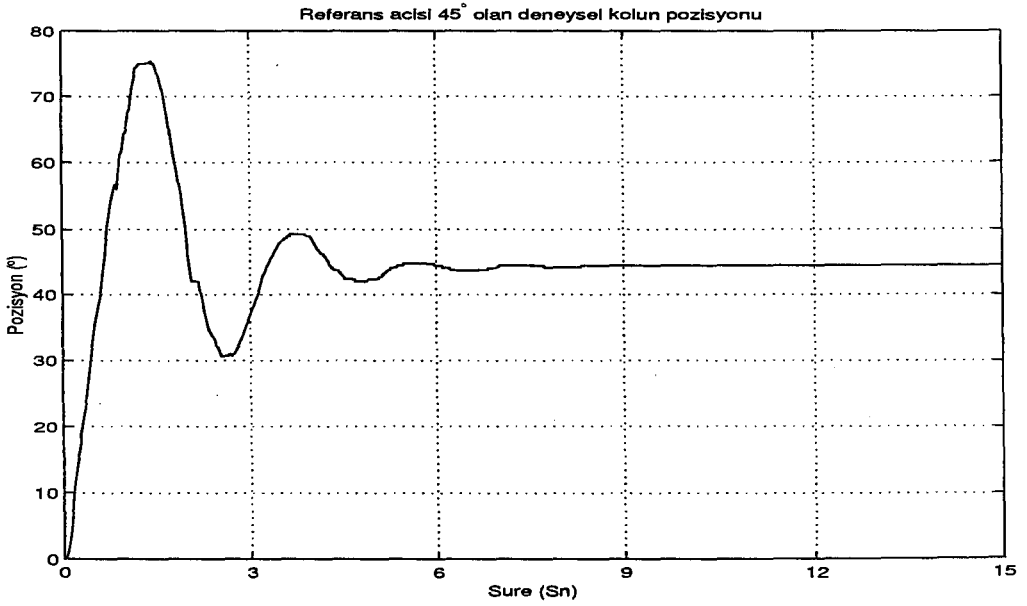
Şekil 6.34: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı.



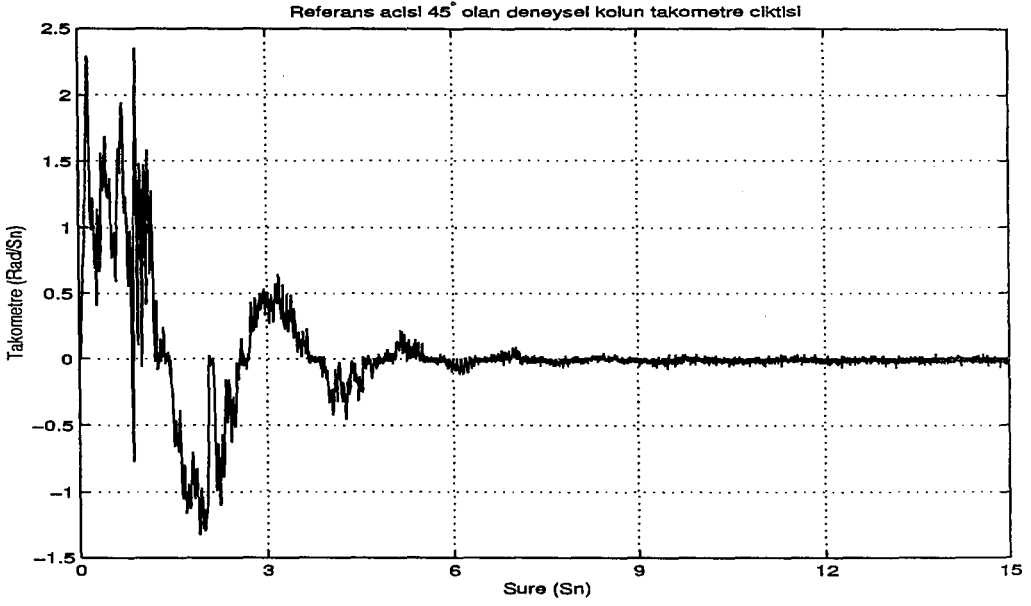
Şekil 6.35: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor uçlarına uygulanması gereken akım.



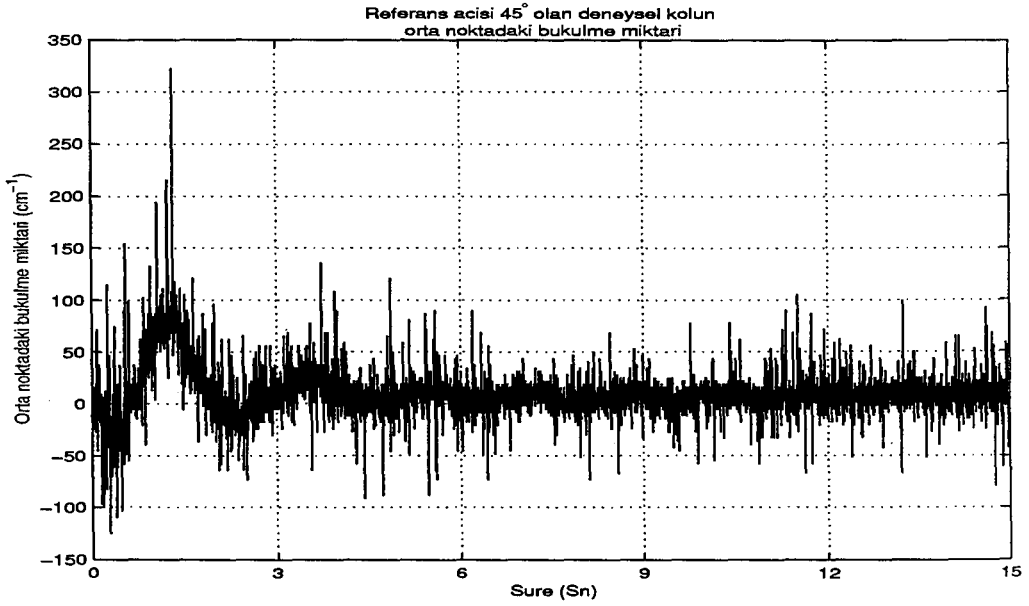
Şekil 6.36: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° , için motor sürücü uçlarına uygulanan gerilim.



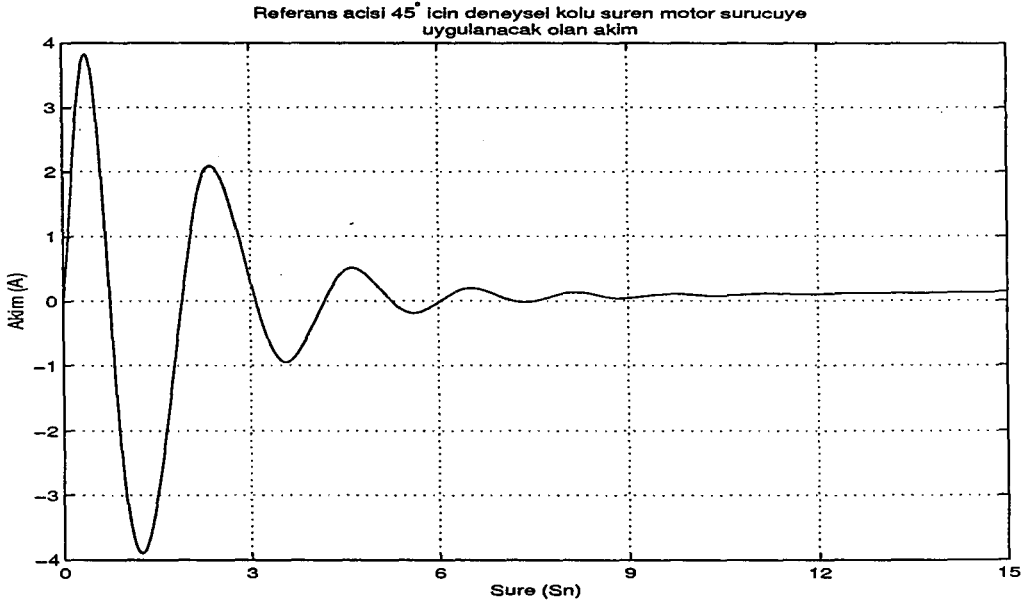
Şekil 6.37: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun pozisyonu (Düşük Dereceli Kontrolör için).



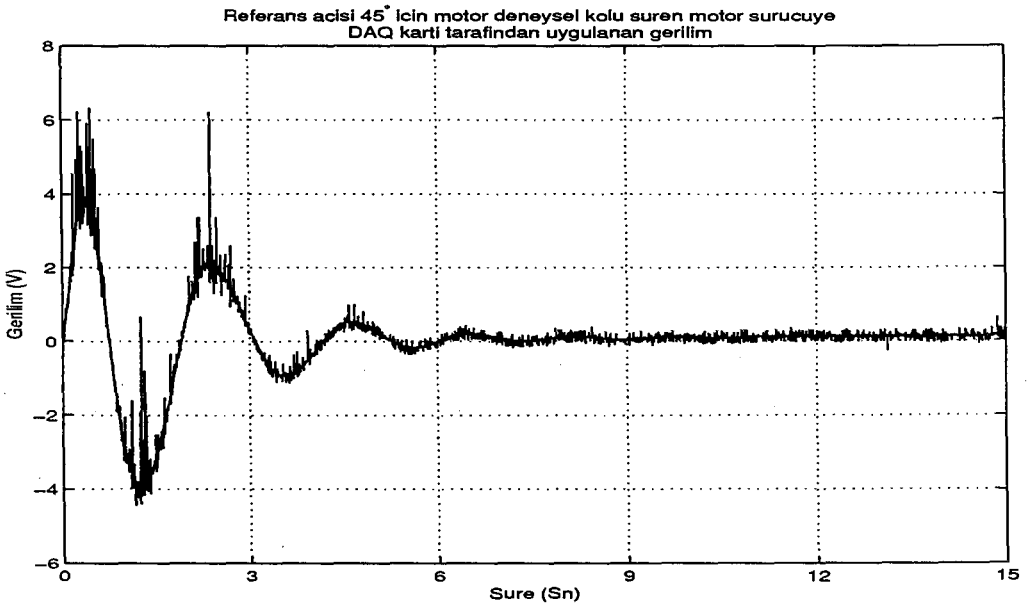
Şekil 6.38: Tek girdi tek çıktılı durumda ,referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun hızı (Düşük Dereceli Kontrolör için).



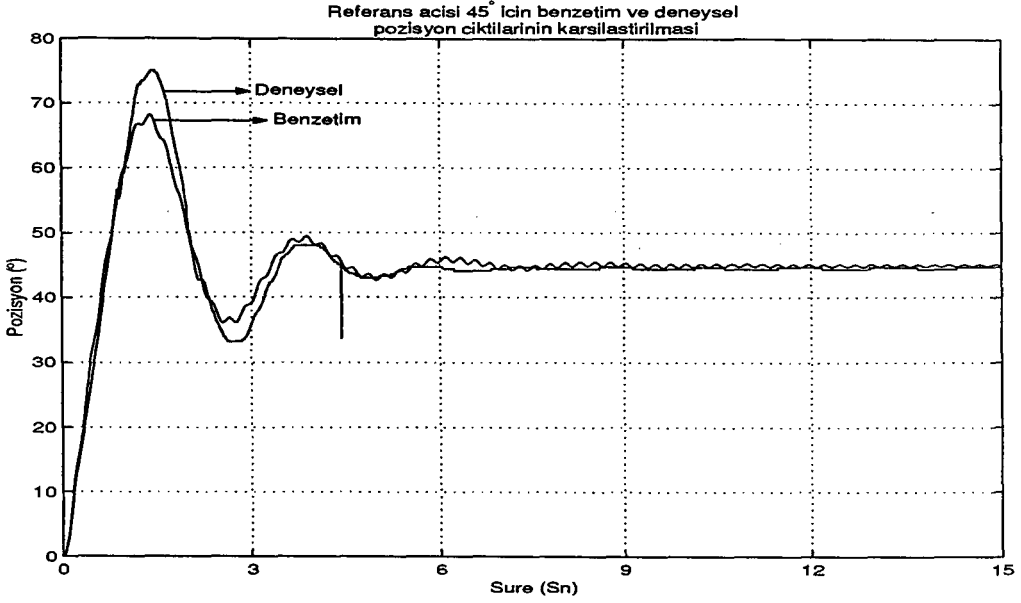
Şekil 6.39: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı (Düşük Dereceli Kontrolör için).



Şekil 6.40: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor uçlarına uygulanması gereken akım (Düşük Dereceli Kontrolör için).



Şekil 6.41: Tek girdi tek çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor sürücü uçlarına uygulanan gerilim (Düşük Dereceli Kontrolör için).



Şekil 6.42: Tek girdili tek çıktılı sistem için tasarlanan kontrolör sonucu elde edilen, benzetim sonucu ile deneysel sonucun 45° için karşılaştırılması.

ile benzer tepkiyi vermekte ama daha kısa sürede sönümlenmektedir.

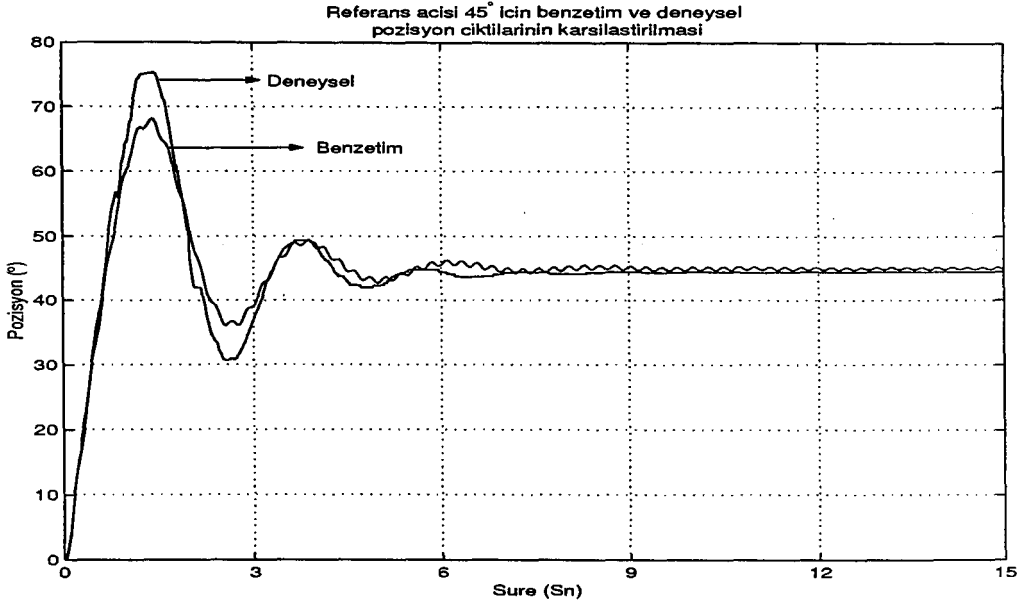
23. dereceden elde edilen kontrolör yerine, deneysel düzeneğe düşük dereceli kontrolör olan K_{alt}^d uygulandığı zaman, Şekil 6.43'den görüleceği üzere, 45°'lik referans açısı için elde edilen benzetim ve deneysel sonuçlar kıyaslandığı vakit, elde edilen benzetim pozisyon sonucu ile deneysel pozisyon sonucu arasında farklılıklar gözükmemektedir.

Özellikler	1. Esnek Kol	2. Esnek Kol	3. Esnek Kol
Kolun cinsi	Alüminyum	Alüminyum	Pirinç
Kolun Eni	70 mm	77 mm	70 mm
Kolun Kalınlığı	1.6 cm	1.5 cm	1.6 mm
Kolun Uzunluğu	0.9 m	1.1 m	0.8 m
Kolun Ağırlığı	0.266 kg	0.318 kg	0.887 kg
Young Modülleri	62 GPa	62 GPa	100 GPa

Tablo 6.1: Özellikleri sıralanan farklı 3 esnek levha.

Tasarladığımız kontrolörleri, Tablo 6.1'de ilk kullandığımız 1. Esnek levha olan alüminyumdan farklı boyut ve türdeki kollara da, tek girdili tek çıktılı sistemler için tasarladığımız yüksek dereceli ve düşük dereceli kontrolörleri uygulayarak, kontrolörlerin farklı esnek kollardaki tepkisini inceleyebiliriz. Modellemesini yapmadığımız, bu kollara aynı kontrolörü uygulayarak, kontrolörün gürbüzlüğünden daha rahat bir şekilde söz edebiliriz.

Şekil 6.44 incelenirse, referans açısı olarak 45° verdiğimizde, pirinç kolun pozisyon çıktısının yatışkın duruma erişme süresi 1. esnek alüminyum kola göre az daha çabuktur. Fakat ilk ulaştığı tepe değeri daha fazladır. Aynı

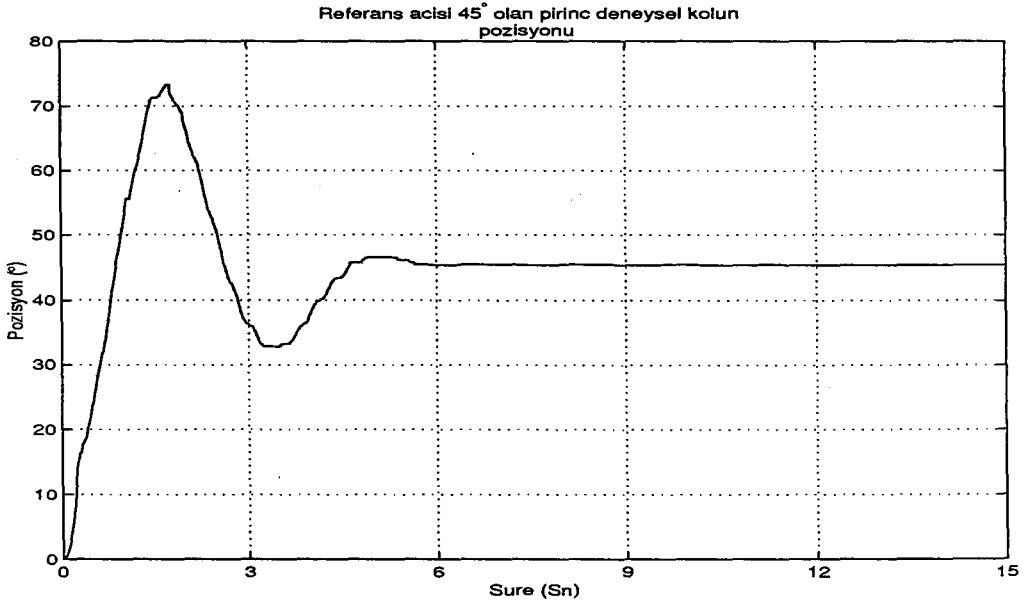


Şekil 6.43: Tek girdili tek çıktılı sistem için tasarlanan kontrolör sonucu elde edilen, benzetim sonucu ile deneysel sonucun 45° için karşılaştırılması (Düşük Dereceli Kontrolör için).

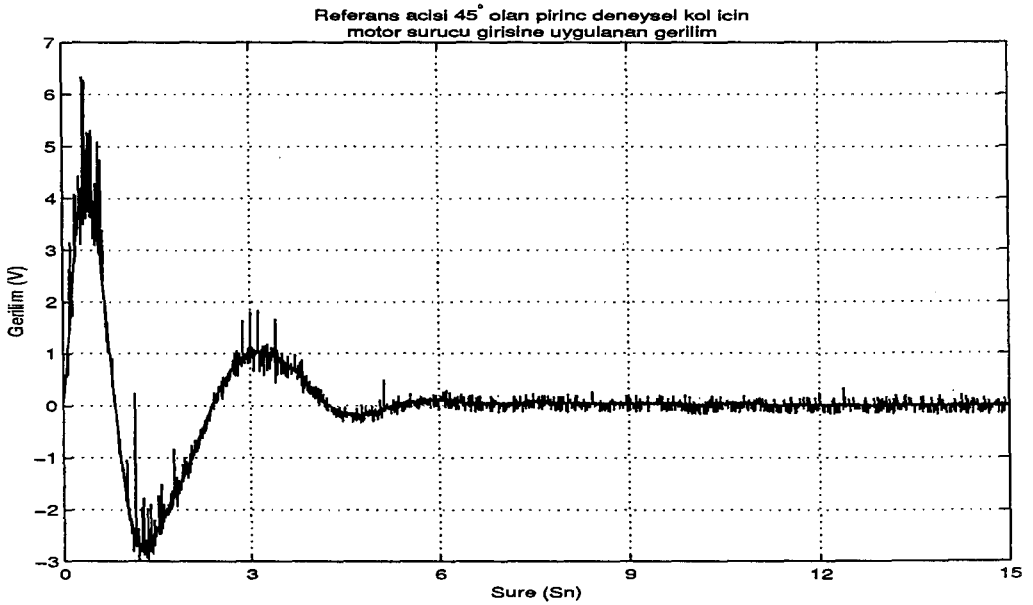
kontrolör uygulanmasına rağmen aynı referans açısı için 1. esnek alüminyum levhaya göre daha fazla akım çekmiştir (Şekil 6.45). 2. esnek alüminyum levhada ise, Şekil 6.46'dan anlaşılacağı üzere, pozisyon çıktısı, diğer kollar-daki pozisyon çıktılarıyla kıyaslandığında, 2. esnek levhanın yüksek frekans modlarının etkisi daha fazla görülmektedir ve bu sebepten dolayı da yatışkın duruma erişme süresi daha geç olmaktadır. 2. esnek levhanın, yatışkın duruma erişmesi veya istenilen referans açısına gidebilmek için, daha az akım çekmekte olduğunu Şekil 6.47'den görebiliriz.

Ayrıca elde ettiğimiz bir diğer kontrolör olan düşük dereceli kontrolör bu iki ayrı kola da uygulandığı zaman da elde edilen deneysel sonuçlar ile yüksek dereceli kontrolör uygulanması sonucu oluşan deneysel sonuçlar arasında belirgin bir fark yoktur. Bu da zaten ilk deneysel kola yüksek dereceli kontrolörün uygulanması sonucu elde edilen pozisyon çıktısı ile 12. dereceden olan düşük dereceli kontrolörün uygulanması sonucu elde edilen pozisyon çıktıları arasında da belirgin bir fark olmamasından dolayı, böyle bir sonucun çıkması doğaldır.

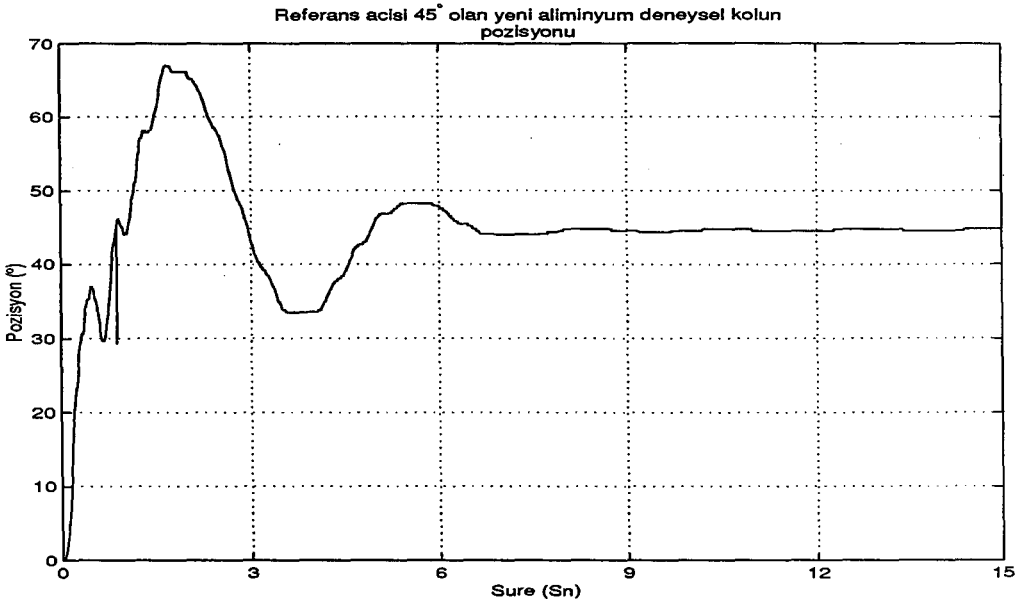
Sonuç olarak, her 3 ayrı kola referans açısı olarak 45° verdiğimizde elde ettiğimiz pozisyon çıktıları karşılaştırdığımızda, Şekil 6.48'den anlaşılacağı üzere aralarında ciddi farklılıklar yoktur. Her üç kolün pozisyon hatalarında ise, en fazla pozisyon hatasını pirinç kol yapmıştır. Pirinç kolün pozisyon hatası 0.6°'den az, diğer iki esnek kolün her birinin pozisyon hatası ise 0.5°'den daha azdır.



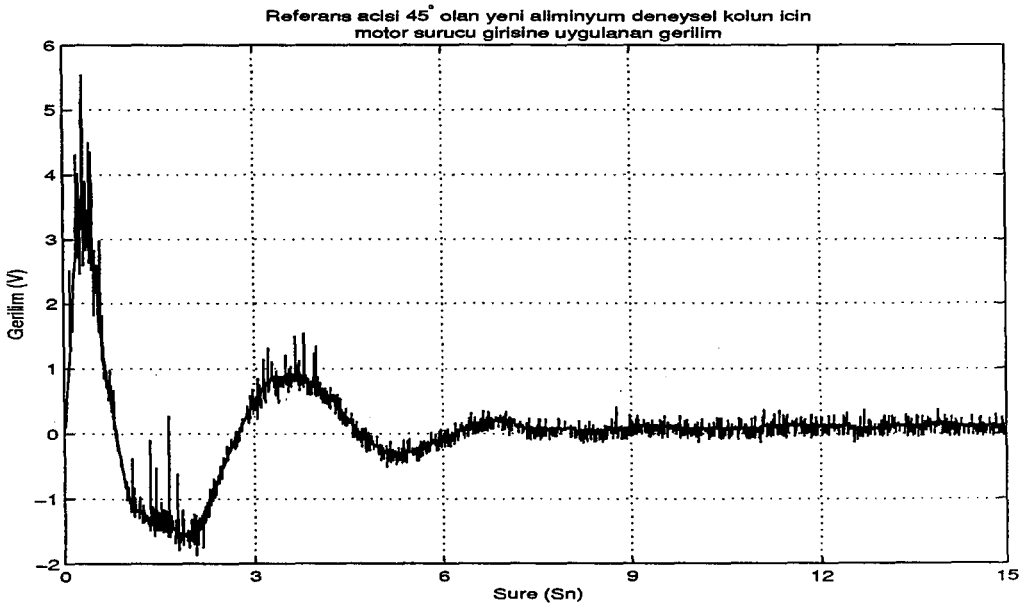
Şekil 6.44: 3. Esnek kolun, Referans açısı 45° için Pozisyon Durumu.



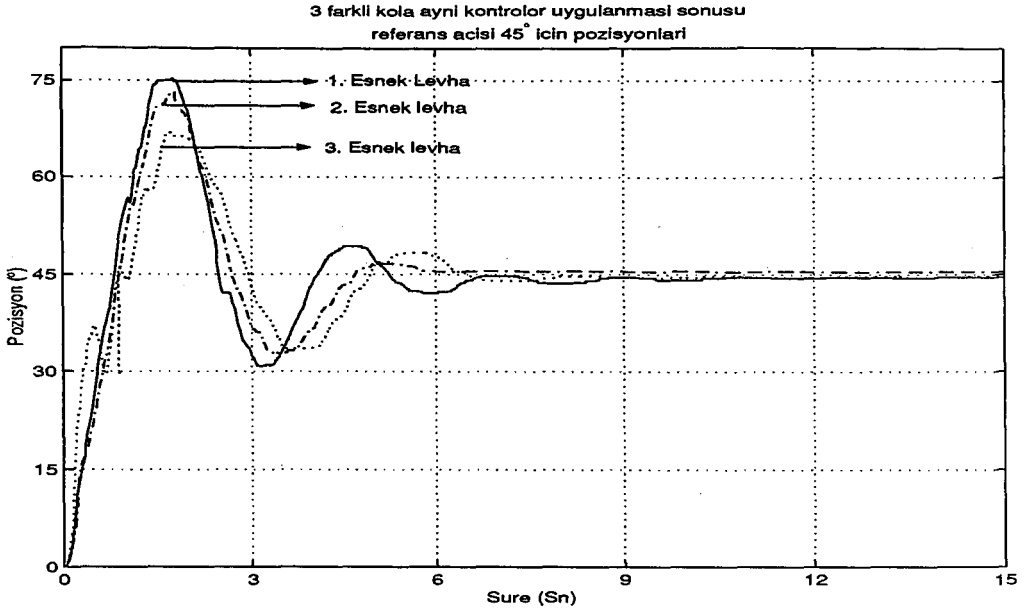
Şekil 6.45: 3. Esnek kol için, Referans açısı 45° 'de Motor Sürücüye Uygulanan Gerilim.



Şekil 6.46: 2. Esnek kolun, Referans açısı 45° için Pozisyon Durumu.



Şekil 6.47: 2. Esnek kol için, Referans açısı 45° 'de Motor Sürücüye Uygulanan Gerilim.



Şekil 6.48: Tek girdili tek çıktılı sistem için tasarlanan kontrolörün Tablo 6.1' deki her bir kola uygulanması sonucu elde edilen sonuçlar.

6.3.4 Tek Girdili Çok Çıktılı Durum için Tasarlanan Kontrolörün Benzetim Sonuçları

Sistemimizin bu kontrolör tasarımında sadece pozisyon çıktısından değil, aynı zamanda da sistemin takometre ve orta noktadaki bükülmesinden de çıktı olarak tek girdili çok çıktılı bir sistem için kontrolör tasarlayacağız. Plantimiz 3×1 boyutunda olduğu için karşılık gelen kontrolör 1×3 boyutunda olacaktır. Bu altopimum kontrolörü $K_{alt1} = [K_1 \ K_2 \ K_3]$ olarak gösterirsek, K_1 pozisyon hatasına, K_2 takometre çıktısına ve K_3 ise orta noktadaki bükülme çıktısına müdahale eden kontrolörler olur.

Sistemimizin 3 tane geribeslemesi olacağından, hata vektörü e , 3×1 boyutunda olur. Dolayısıyla bu hataya müdahale edecek ve sistemin performansını düzgünleştirmeyi sağlayan W_e ağırlığı 3×3 boyutunda olmalıdır. Kontrolör tasarımının daha rahat ve kolay olması açısından bu ağırlık matrisi köşegen olarak seçilmiştir,

$$W_e = \begin{bmatrix} W_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & W_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & W_{e3} \end{bmatrix} \quad (148)$$

öyle ki W_{e1} pozisyon hatasına, W_{e2} takometre çıktısına, W_{e3} ise orta noktadaki bükülme çıktısına müdahale eden ağırlıklardır. Tek girdi tek çıktı probleminde olduğu gibi, ağırlık seçerken, sistemin pozisyon takibi için açık döngüde bir integratörünün olması lazım. Modellediğimiz nominal plante dikkat edersek, (118) ifadesinde nominal plantin bir integratörü vardır. Bundan önce de bahsettiğimiz üzere, hassasiyet matrisinin olası herhangi bir sıfırını ortadan kaldırmak ve (140) ifadesindeki iki blok problemin sonsuz normunun sınırlı

olması için, tek girdi çok çıktılı sistemdeki W_{e_1} ağırlığında bir integratör olmalıdır. Ayrıca, kontrolörün de bir integratörü olması içinde bu durumda, W_{e_1} ağırlığı,

$$W_{e_1} = 175.150 \frac{1}{s + 0.001} \frac{1}{s + 0.001} \quad (149)$$

olarak seçelim. Bundan önce de bahsettiğimiz üzere, MATLAB'daki olası tekillik problemlerini ortadan kaldırmak için, ağırlığa direk bir integratör koyamıyoruz. (149) ifadesindeki W_{e_1} ağırlığının kazancını da değiştirerek, kontrolör çıktısının büyüklüğüne müdahale ederiz.

Plantin diğer çıktılarına müdahale eden ağırlıkların seçiminde ise, bu çıktıların yüksek frekanslarındaki gürültünün azaltımı ayrıca W_e ağırlığı S fonksiyonuna müdahale ettiği için de hassasiyet fonksiyonunu yüksek frekanslardaki sonsuz normunu minimize edebilmesi için W_{e_2} ve W_{e_3} alçak-geçiren filtre olarak

$$W_{e_2} = 1.05 \frac{100s + 24}{100s + 1} \quad (150)$$

$$W_{e_3} = \frac{s + 1}{0.1s + 1} \quad (151)$$

seçilir. Plantin çıktısı da 3 tane olduğu için her bir çıktıya etki edebilecek gürültü ve bozucu sinyallerin etkisinin azaltımı içinde W_d ağırlığımız 3×3 boyutundadır ve

$$W_d = 0.001 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (152)$$

sabit bir matris olarak seçilmiştir. Sistem gürbüzlüğüne müdahale eden W_u ağırlığı ise bundan önceki kontrolör tasarımında olduğu gibi, gürbüzlüğü sağlanabilmesi için yani 3 mod için tasarlanan kontrolör daha yüksek modlar içeren plante uygulanması durumunda bu yüksek frekanslardaki modların da kontrolü için, bunların da tasarımında hesaba katılması gerekir. Dolayısıyla kontrolör tasarımında bu frekansların hesaba katılması için, plantin ilk 3 esnek modundan sonra gelen modları geçirebilecek şekilde,

$$W_u = \frac{s + 1}{0.6s + 1} \quad (153)$$

olarak seçebiliriz. Yukarıda aldığımız W_u ağırlığı tek girdi tek çıktıda kullanıldandan farklıdır. Fakat her ikisinde frekans yanıtları incelenirse, kesim frekansları ve frekans yanıtları birbirine çok yakındır. Fakat kontrolör tasarımıda, ağırlıkların kazançları önemli olduğu için, tek girdi çok çıktılı sistemde (147) ifadesinden farklı bir ağırlık aldık. Bu ağırlıklar kullanılarak, EK-9'da bulunan program ile frekans yanıtları Şekil 6.49, 6.50 ve 6.51'de olduğu gibi olan K_{alt_1} kontrolörü tasarlanmış olur. Elde edilen kontrolör 55. derecedendir.

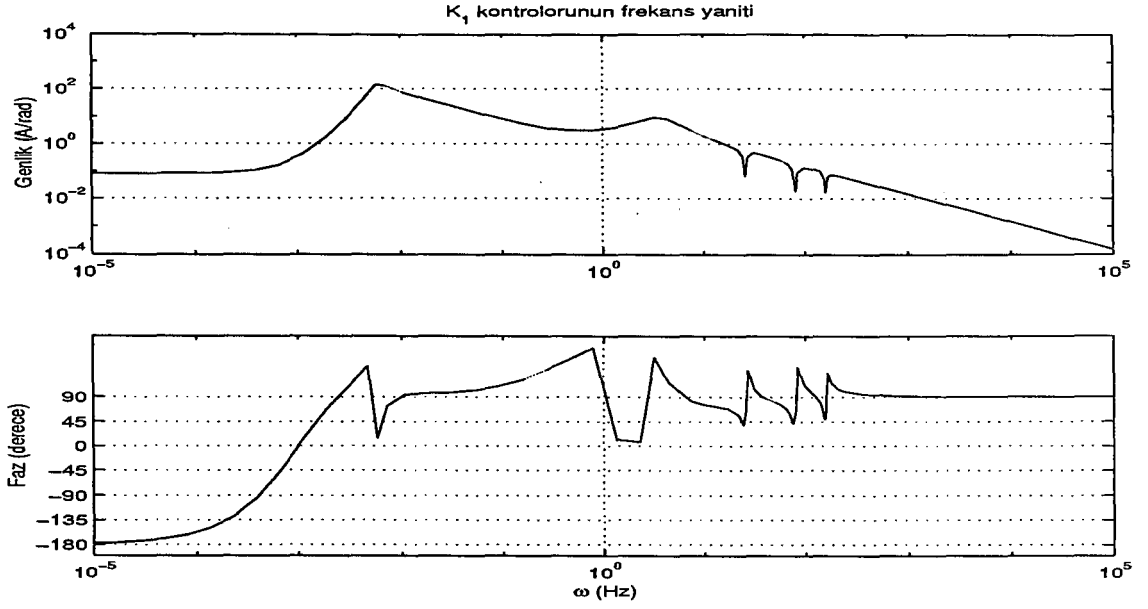
Bu şekilde sistemin kapalı döngüsüne MATLAB'daki "lsim.m" ile bakıldığında kapalı döngü nümerik hatalardan dolayı kararsız çıkmaktadır. Bu sebepten bir önceki kontrolör tasarımı da bahseldiği üzere SIMULINK kullanılarak, referans açısı 45° için, 55. dereceden kontrolör ilk önce 3 esnek modlu plante ardından da 12 esnek modlu plante uygulanması sonucu, pozisyon, takometre, orta noktadaki bükülme çıktıları ile plante uygulanan akıma ait çıktılar sırasıyla, Şekil 6.52, 6.53, 6.54, 6.55, 6.56, 6.57, 6.58, 6.59'da olduğu gibidir. Tasarlanan bu kontrolör C programında bellek problemi yaptığı için, plante bu kontrolörün 20. dereceye düşürülmüş hali olan $K_{alt_1}^d = [K_1^d \ K_2^d \ K_3^d]$ uygulanmıştır. Deneysel düzeneğe de uygulanacak olan 20. dereceden bu kontrolörün frekans yanıtı ise Şekil 6.60, 6.61 ve 6.62'de olduğu gibidir.

Deneysel düzeneğe uygulayacağımız 20. dereceden kontrolörün, referans açısı 45° için, ilk önce 3 esnek modlu plante ardından da 12 esnek modlu plante uygulanması sonucu ise, pozisyon, takometre, orta noktadaki bükülme çıktıları ile plante uygulanması gereken akıma ait çıktılar sırasıyla, Şekil 6.63, 6.64, 6.65, 6.66, 6.67, 6.68, 6.69, 6.70'de olduğu gibidir.

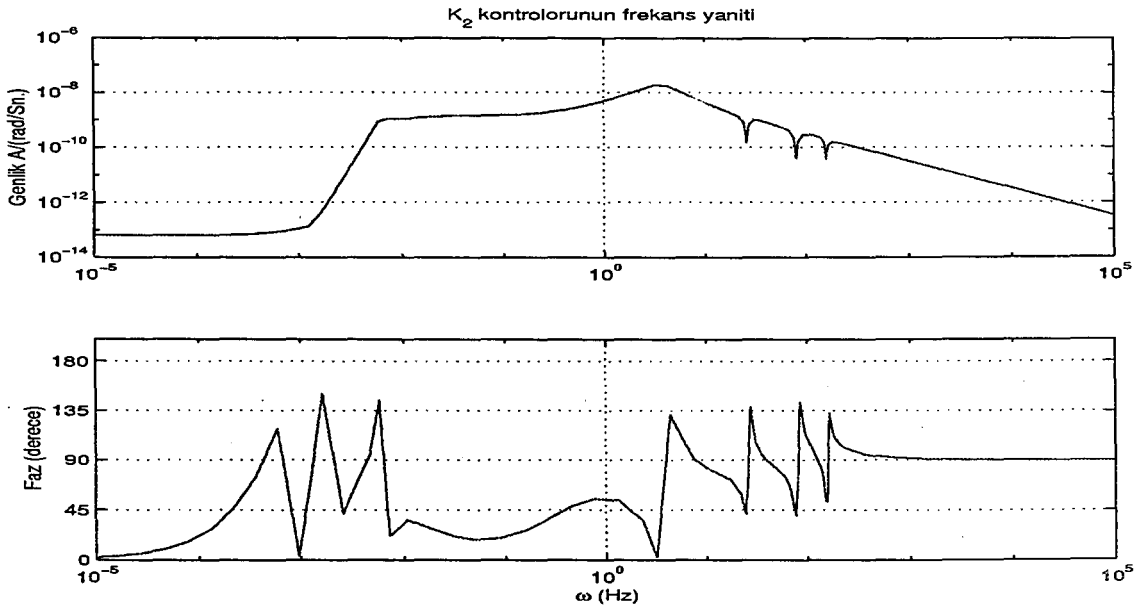
6.3.5 Tek Girdili Çok Çıktılı Durum için Tasarlanan Kontrolörün Deneysel Uygulaması ve Sonuçları

Frekans yanıtları Şekil 6.49, 6.50 ve 6.51'da bulunan 3×1 boyutlu K_{alt_1} kontrolörü 55. derecedendir. K_{alt_1} kontrolörünü kullanarak deneysel uygulamasını yapmak için, bundan önceki uygulamalarda olduğu gibi C dilinde programının yazılması gerekmektedir. Fakat kontrolörümüzün derecesi çok yüksek olduğu için ve C programında olası hafıza problemleri yaratacağı için, kontrolörümüzü MATLAB paket programında bulunan "balmr.m" komutu ile decesesini 20. dereceye ve 10. dereceye kadar düşürülmüştür. Bu şekilde elde ettiğimiz 20. dereceden ve 10. dereceden K_{alt_1} ve $K_{alt_1}^d$ kontrolörlerinin deneysel uygulamasını yapacağız.

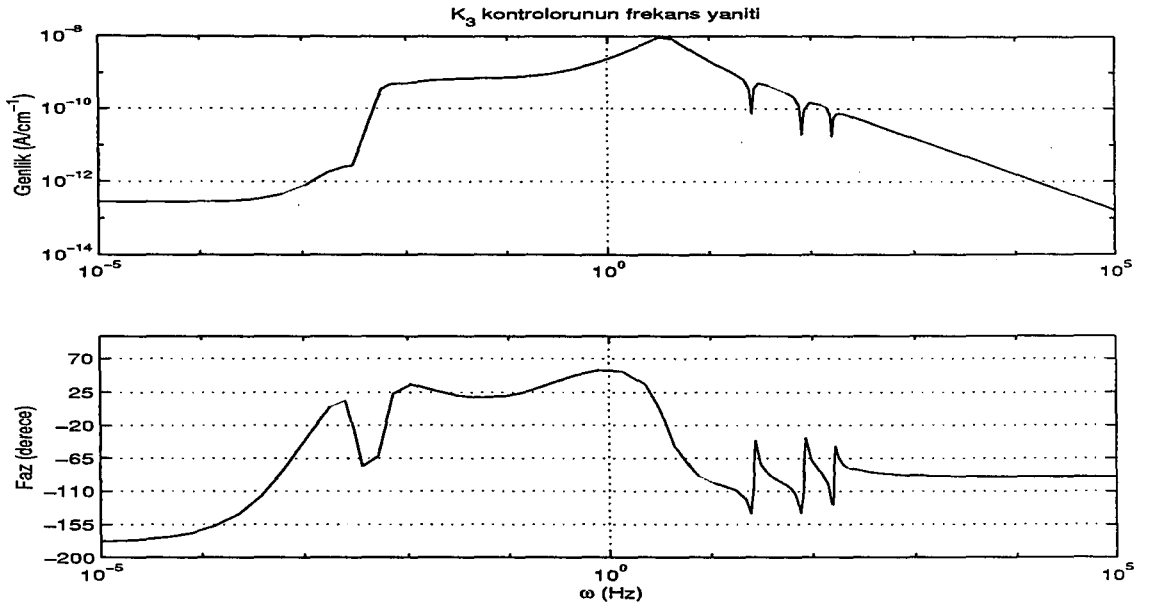
Bu kontrolör tasarımıdaki, tasarlanan kontrolörün deneysel uygulaması için yazılacak C programı, bundan önce yazılan tek girdi tek çıktılı sisteme benzer şekilde ama daha büyük boyutlu bir hatanın, karşılık gelen kontrolörler ile çarpılması ve kontrolör çıktısının deneysel düzeneğe uygulanmasıdır. Deneysel işleyiş algoritmasının farkından dolayı, bilgisayar ortamında yazacağımız kontrolörün kesikli zamandaki karşılığını bulmak için gerekecek olan örnekleme frekansı da tek girdi tek çıktılı sistem için elde edilenden daha farklı olacaktır. Sistemdeki örnekleme frekansları olarak tekrar, geçen bölümde de belirtildiği üzere enkoderin örnekleme frekansı, veri toplama kartının örnekleme frekansı, ve yazılacak C programının frekansı, sistemdeki örnekleme frekanslarıdır. Yazılacak olan C programının örnekleme frekansını bilmediğimizden dolayı, bir önceki uygulamada olduğu gibi, örnekleme frekansını 50 kHz olarak, MATLAB paket programındaki "c2d.m" programı ile kontrolörlerin kesikli zamandaki karşılığını bulabiliriz. Yazacağımız C programı, bilgisayar ortamında girilen referans girdisinden, veri toplama kartının sayısal kanalında bulunan ve sürekli okunan pozisyonu, referans girdisinden çıkartacak, aynı zamanda da veri toplama kartının analog kanalındaki gerilme ölçer ve takometre çıktıları da sıfırdan çıkartarak, her bir geribeslemeye ait hatayı bulacaktır.



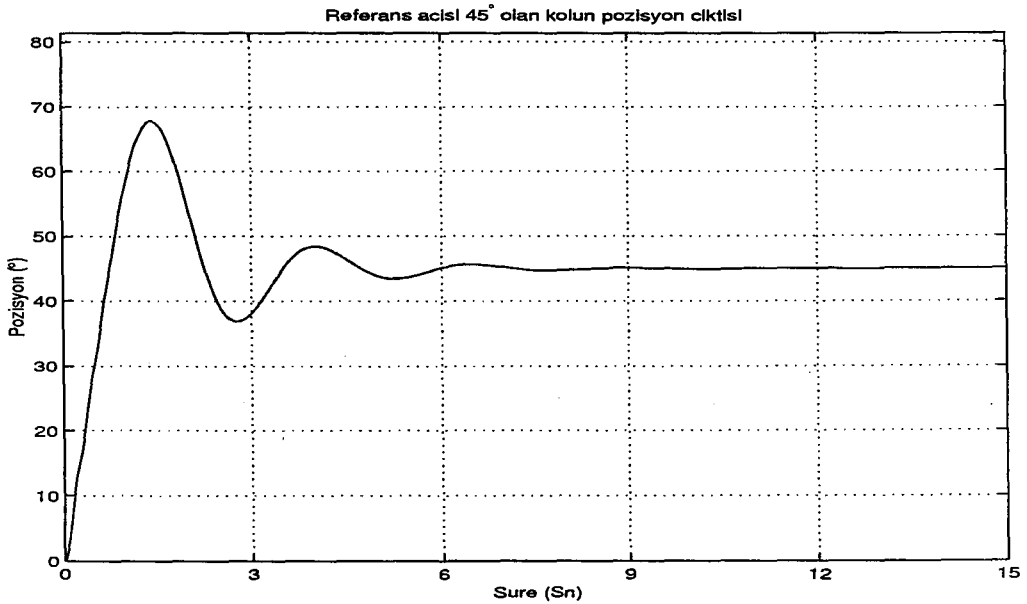
Şekil 6.49: Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu K_{alt_1} kontrolöründeki K_1 kontrolörünün Frekans Yanıtı.



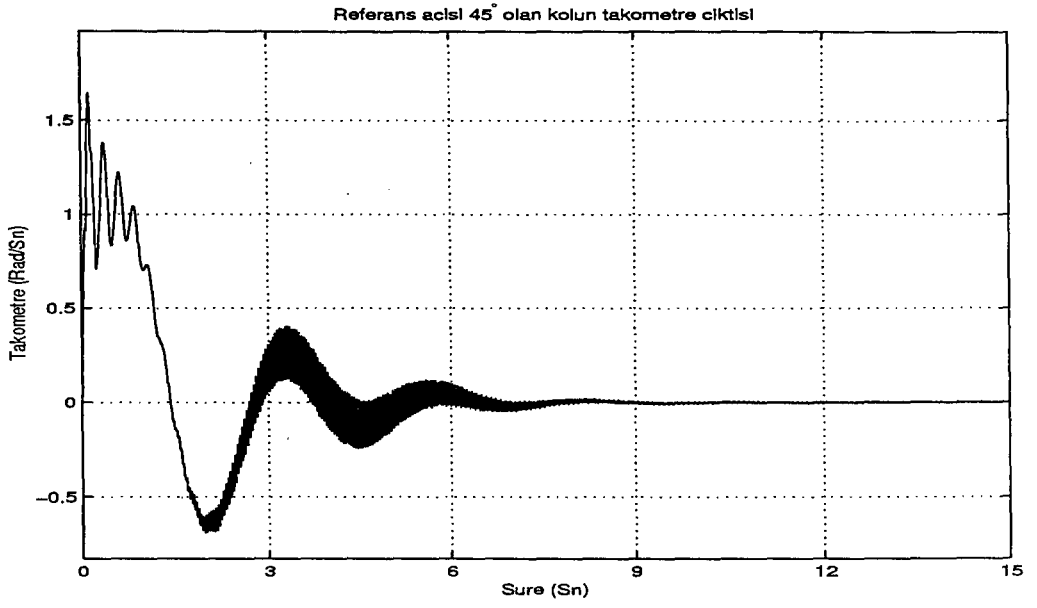
Şekil 6.50: Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu K_{alt_1} kontrolöründeki K_2 kontrolörünün Frekans Yanıtı.



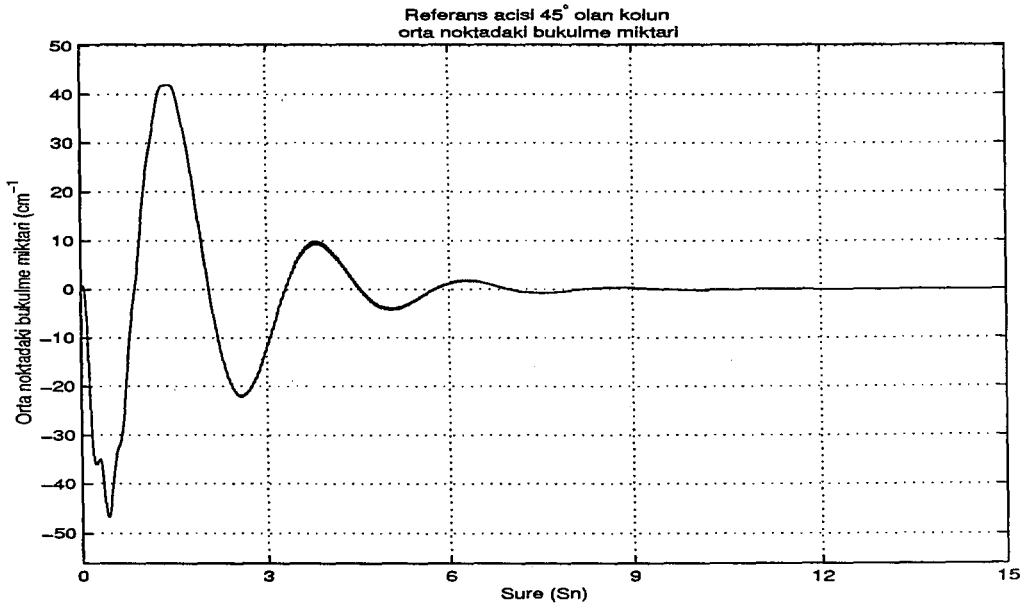
Şekil 6.51: Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu K_{alt1} kontrolöründeki K_3 kontrolörünün Frekans Yanıtı.



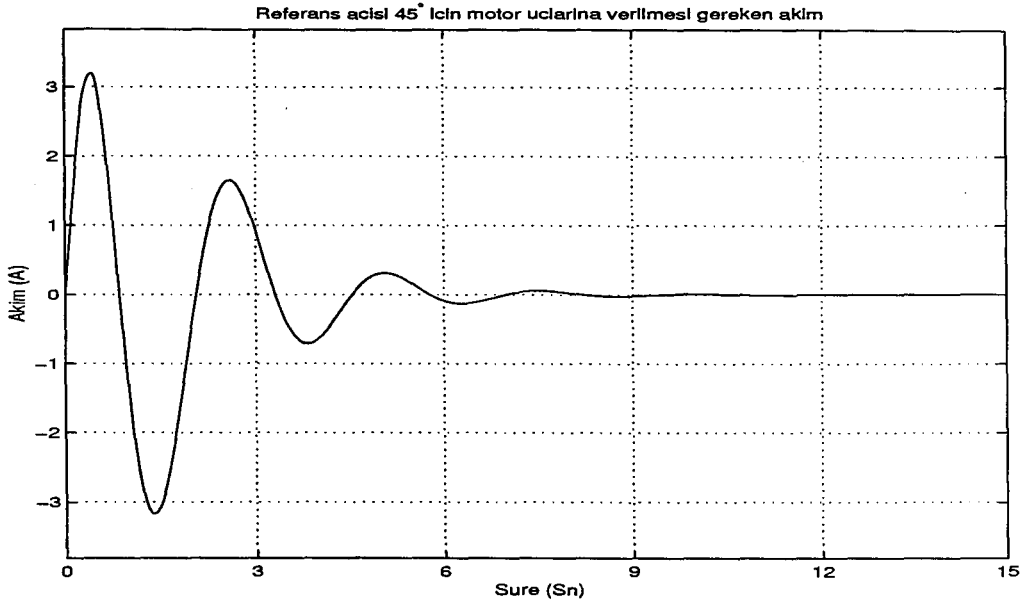
Şekil 6.52: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun pozisyonu.



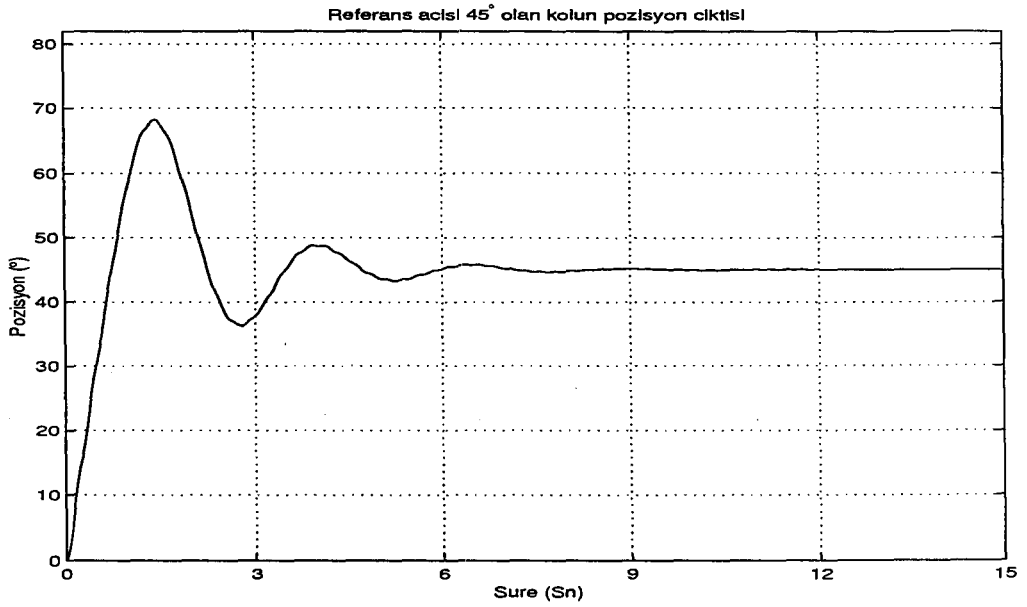
Şekil 6.53: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hızı.



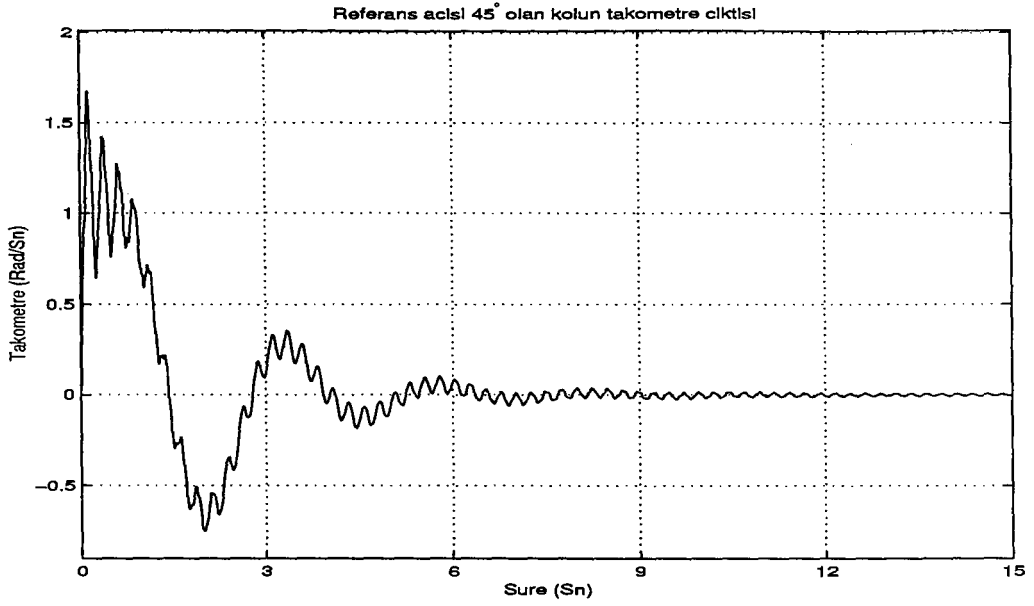
Şekil 6.54: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı.



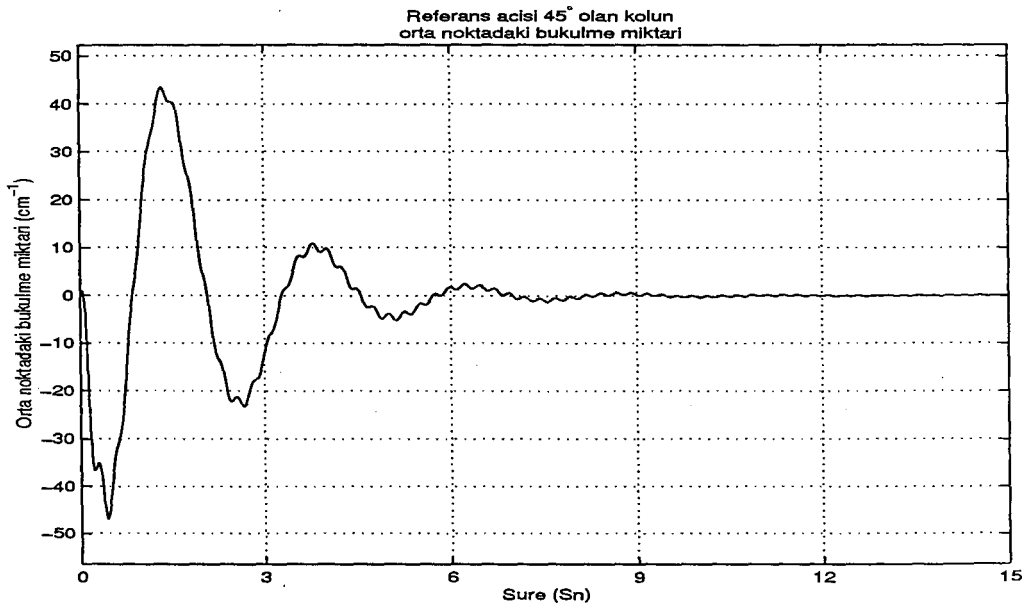
Şekil 6.55: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım



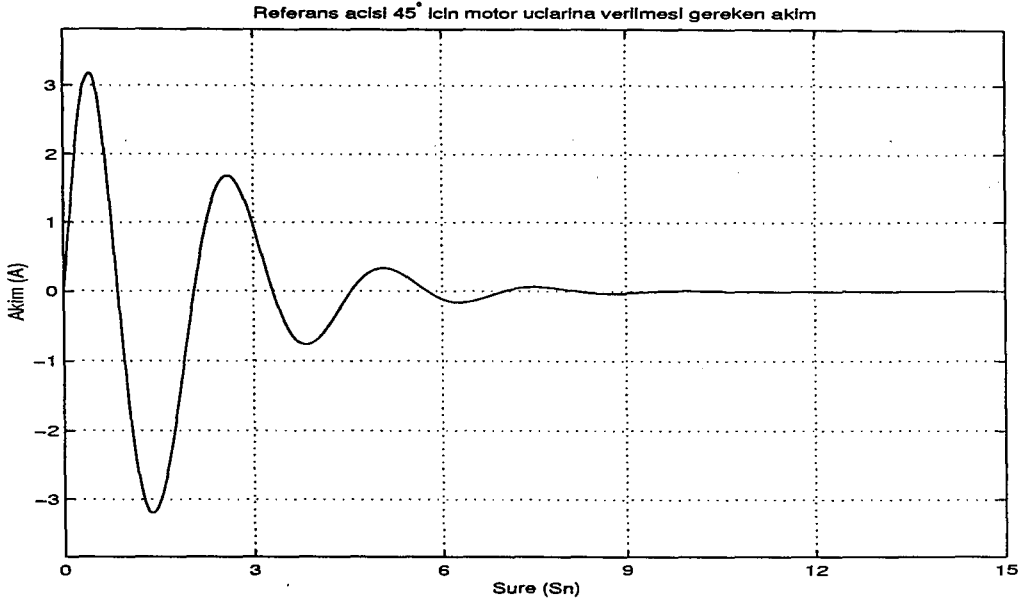
Şekil 6.56: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu.



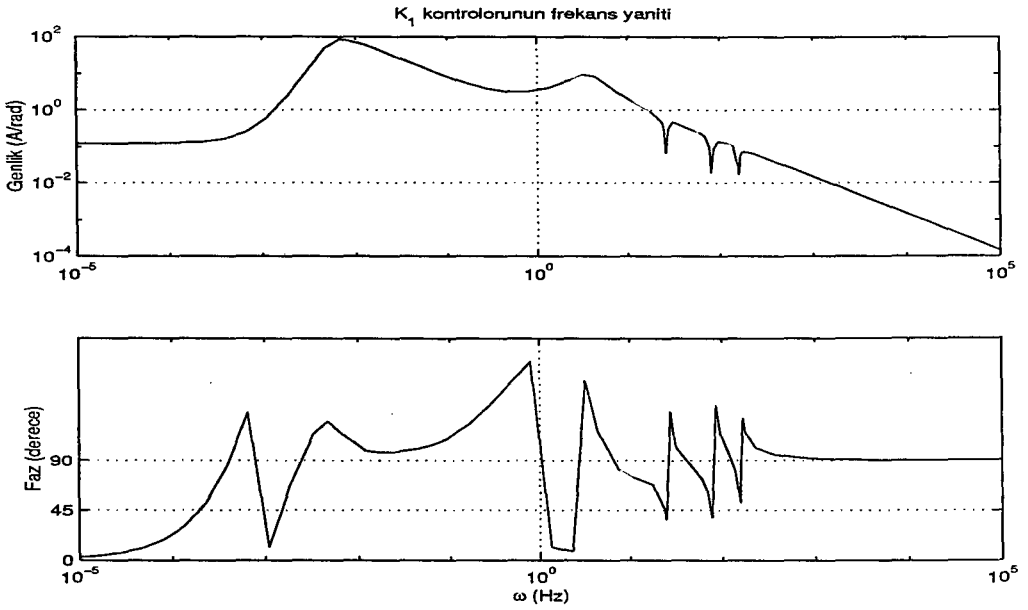
Şekil 6.57: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı.



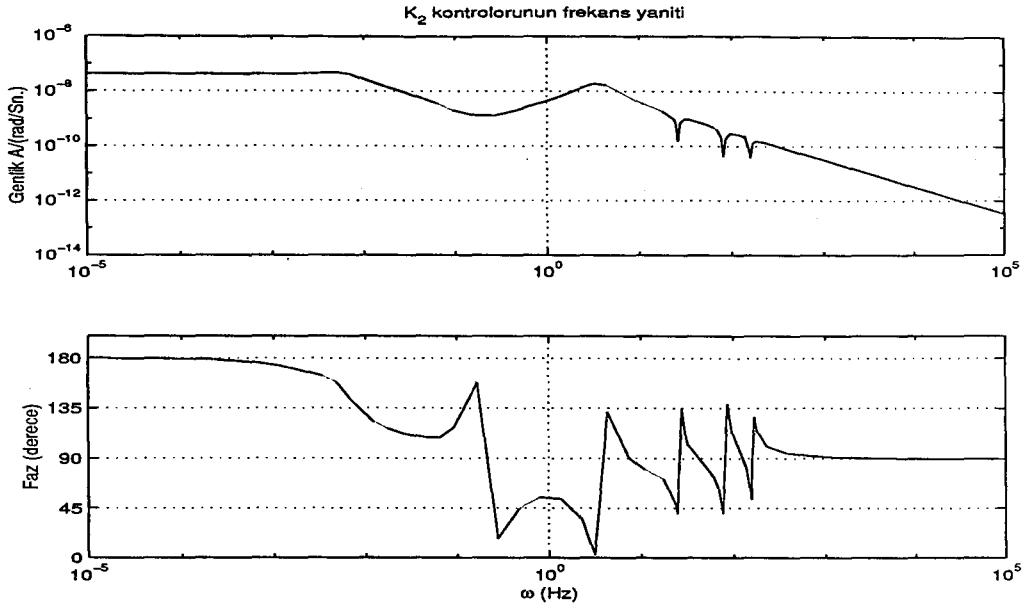
Şekil 6.58: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı.



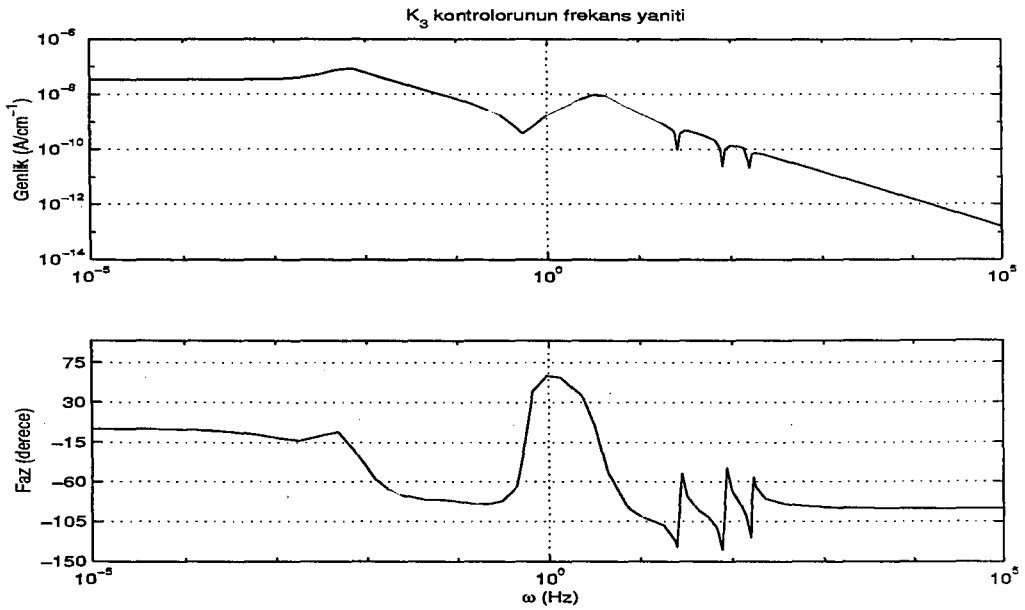
Şekil 6.59: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım



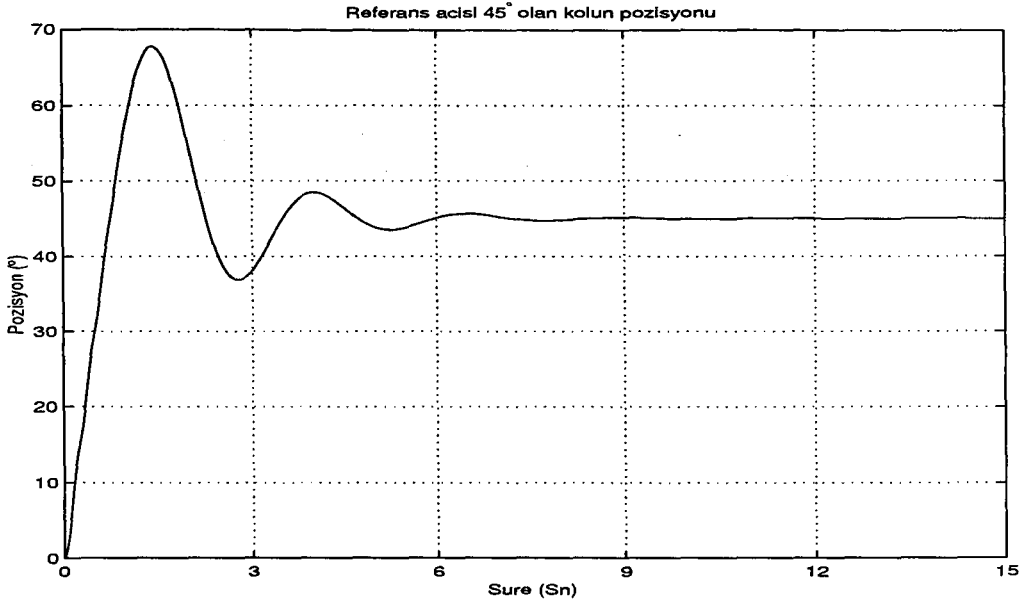
Şekil 6.60: Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu 20. dereceden K_{alt1}^d kontrolöründeki K_1^d kontrolörünün Frekans Yanıtı.



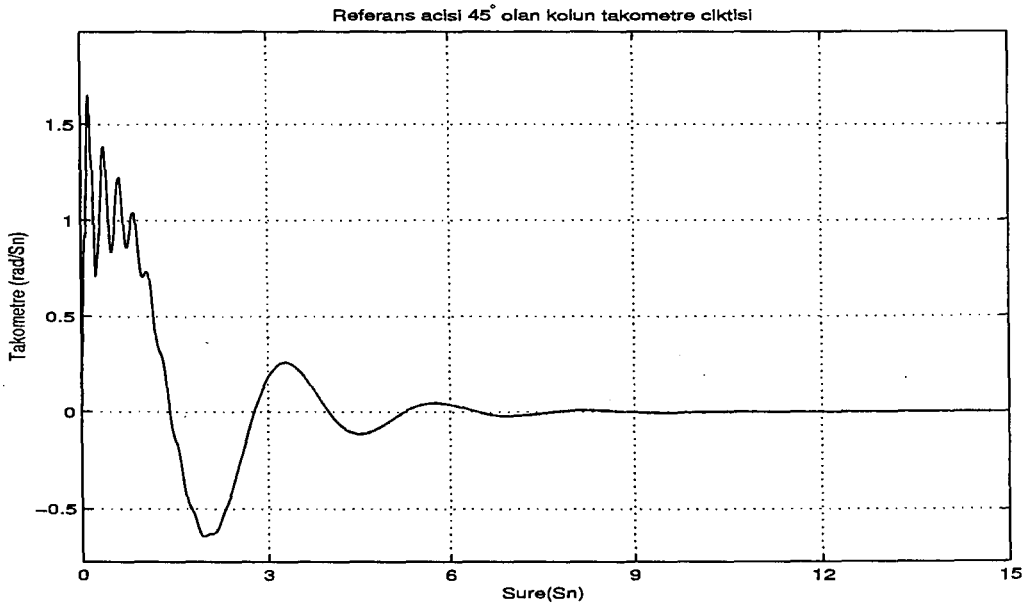
Şekil 6.61: Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu 20. dereceden K_{alt1}^d kontrolöründeki K_2^d kontrolörünün Frekans Yanıtı.



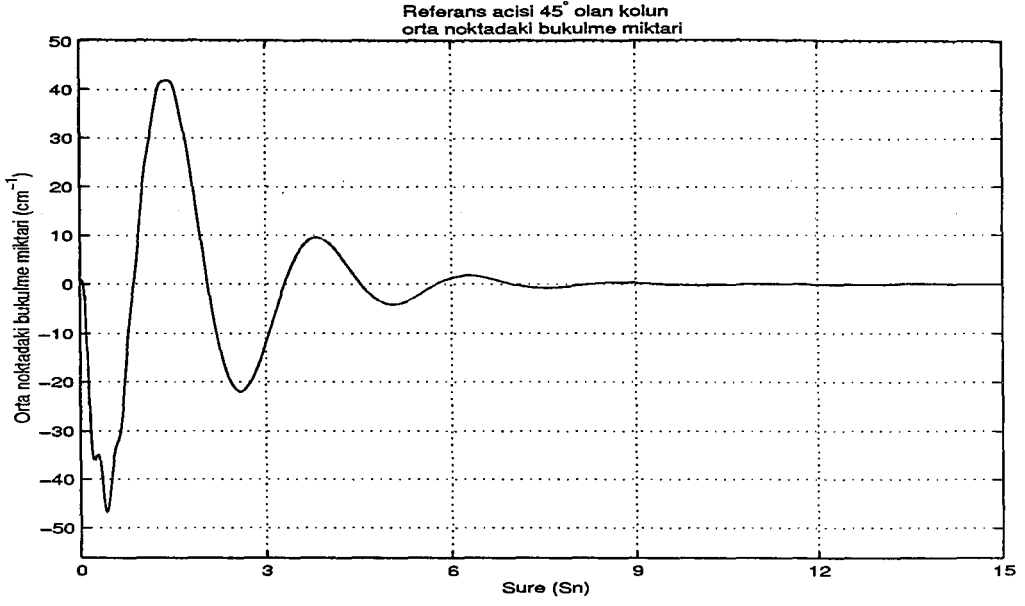
Şekil 6.62: Tek girdi çok çıktılı durumda 3×1 boyutlu 20. dereceden K_{alt1}^d kontrolöründeki K_3^d kontrolörünün Frekans Yanıtı.



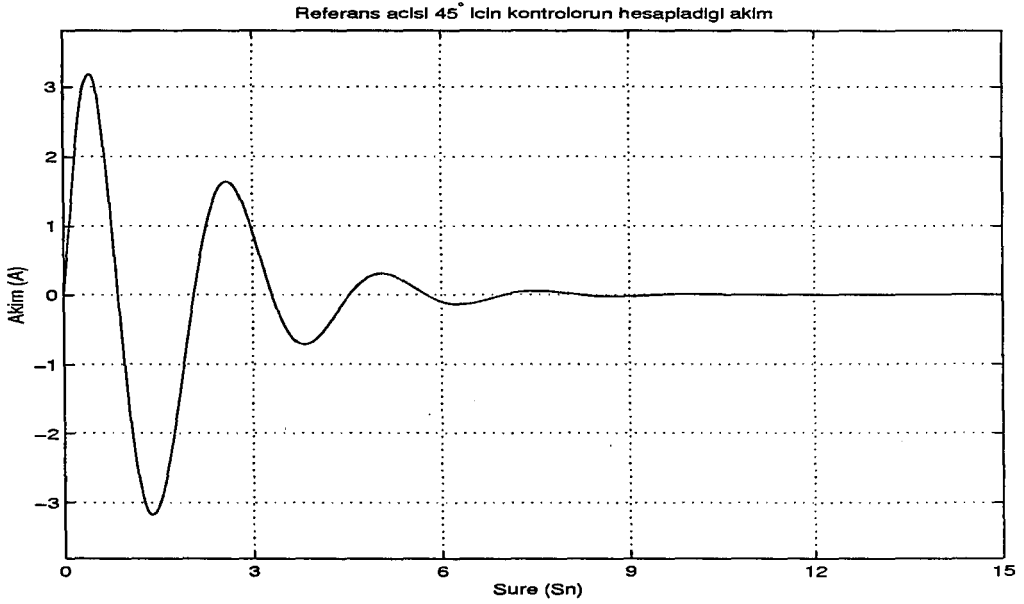
Şekil 6.63: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun pozisyonu (20. Dereceden Kontrolör için).



Şekil 6.64: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hızı (20. Dereceden Kontrolör için).



Şekil 6.65: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı. (20. Dereceden Kontrolör için)



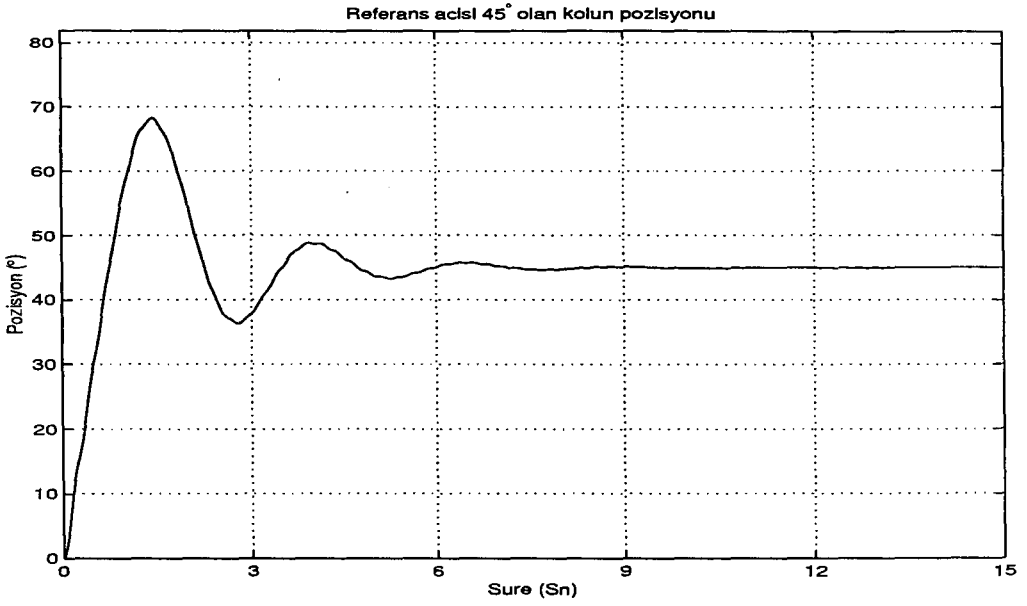
Şekil 6.66: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım (20. Dereceden Kontrolör için)

Bulduğu her bir hatayı karşılık gelen kontrolör ile çarparak sinyal işleme devresine vermelidir. Bu kontrolörün deneysel uygulaması diğer tasarımların aksine daha fazla geri besleme içermektedir. Bu sebepten daha önce yazılan C programındaki matris ve boyutlarını değiştirmek ile bu algoritmayı gerçekleştiremeyiz. Dolayısıyla bu algoritmayı gerçeklemek için EK-10'daki yazılan C programını kullanacağız. Farklı referans girdileri için, programın örnekleme frekansı yaklaşık olarak 600 Hz olarak gözlenmiştir.

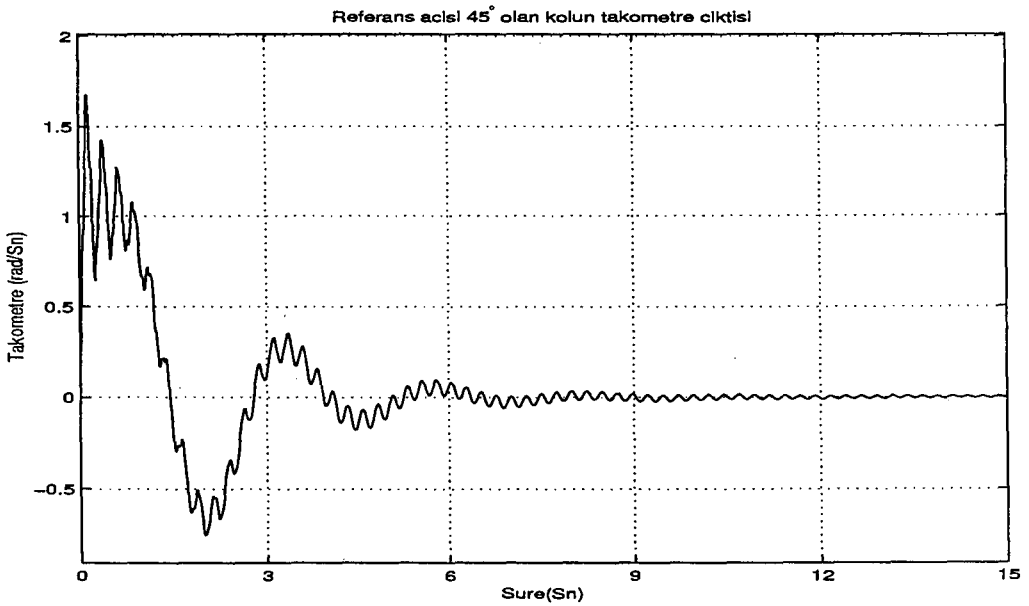
Bu durumda, örnekleme süresi en yavaş bilgisayardaki yazılan programın olduğundan, sistemdeki örnekleme frekansını seçerken 600 Hz alabiliriz. Fakat her farklı referans girdisi için hata farklı olacağı için, örnekleme frekansı olarak yaklaşık olarak 444 kHz alalım, ve elde ettiğimiz kontrolörlerin kesikli zaman denklemlerini bu örnekleme frekansı ile tekrar bulup, EK-10'daki matrisleri de bu yeni bulduğumuz matris değerleri ile değiştirelim. Bazı referans değerlerinde, örnekleme frekansı daha hızlı olabileceği için, programdaki döngü sonuna bu şekildeki olası durumlar için o döngünün çalışma süresinden, sistemin kesikli zaman karşılığını bulmak için kullandığımız süreden çıkartarak, bunu da, gecikme olarak döngü sonuna eklersek, tüm sistemimiz her farklı referans girdisinde hep aynı sürede çalışır.

Bu koşullarla birlikte yazdığımız EK-10'daki C programı ile, bilgisayardan referans açısı olarak 45° girildiği zaman, deneysel kolun pozisyon, takometre, orta noktadaki bükülme, bilgisayarın hesapladığı akım ve motor sürücü uçlarına uygulanan gerilime ait çıktılar sırasıyla Şekil 6.71, 6.72, 6.73, 6.74, 6.75'de olduğu gibidir.

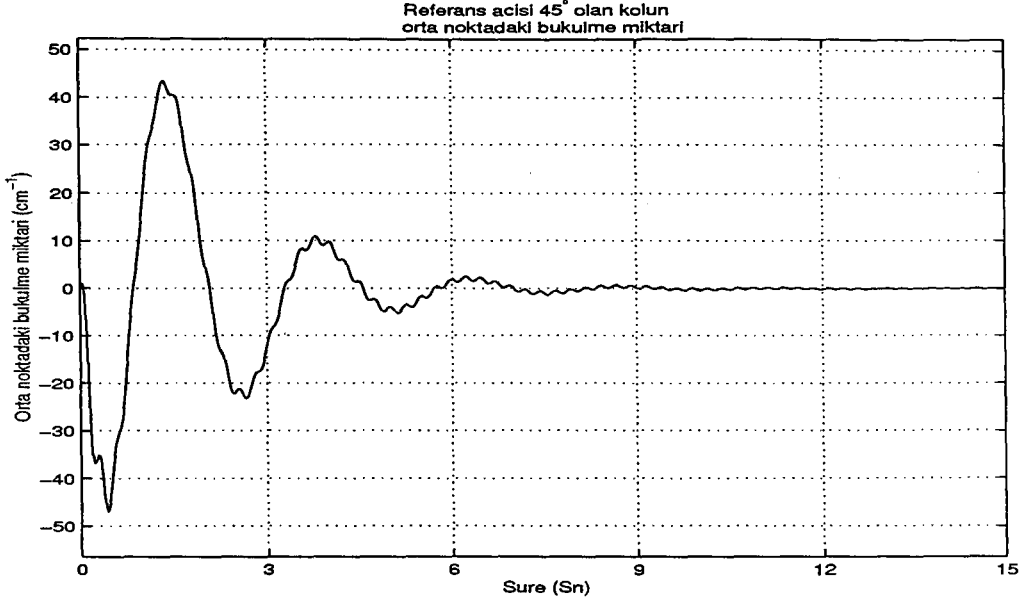
Cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile her iki ayrı durum için tasarladığımız kontrolörlerin benzetim sonuçlarını kıyaslarsak, kolun çıktılarındaki yüksek frekans modlarının etkisi tek girdi çok çıktılı durumda daha da azalmıştır. İlk bulduğumuz kontrolör 55. dereceden bir kontrolördü, bu kontrolörü bilgisayarda uygularken bellek problemi ile karşılaştığımız için, kontrolörümüzün derecesini 20. dereceye düşürdük. Şekil 6.76 incelenirse görülecektir ki, benzetim sonuçları ve deneysel sonuçlar kıyaslandığında ise, sistemin deneysel çıktısıyla, benzetimleri birbirine oldukça yakındır. Her iki dereceden benzetim sonuçları kıyaslandığında ise aralarında fazla bir fark gözükmemektedir. Fakat kontrolör derecesini 10. dereceye kadar düşürdüğümüzde, tatmin edici benzetim ve deneysel sonuçlar elde edemedik. Bunun sebebi ise, Şekil 6.77'den de anlaşılacağı üzere, her 55. dereceden kontrolör ile 20. dereceden kontrolörün yaklaşık olarak tüm frekans aralıklarında tekil değerleri birbirlerine çok benzemekte fakat 10. dereceden tasarlanan kontrolörün tekil değerleri diğerlerine oranla, birkaç bölge dışında, çok farklılıklar göstermektedir.



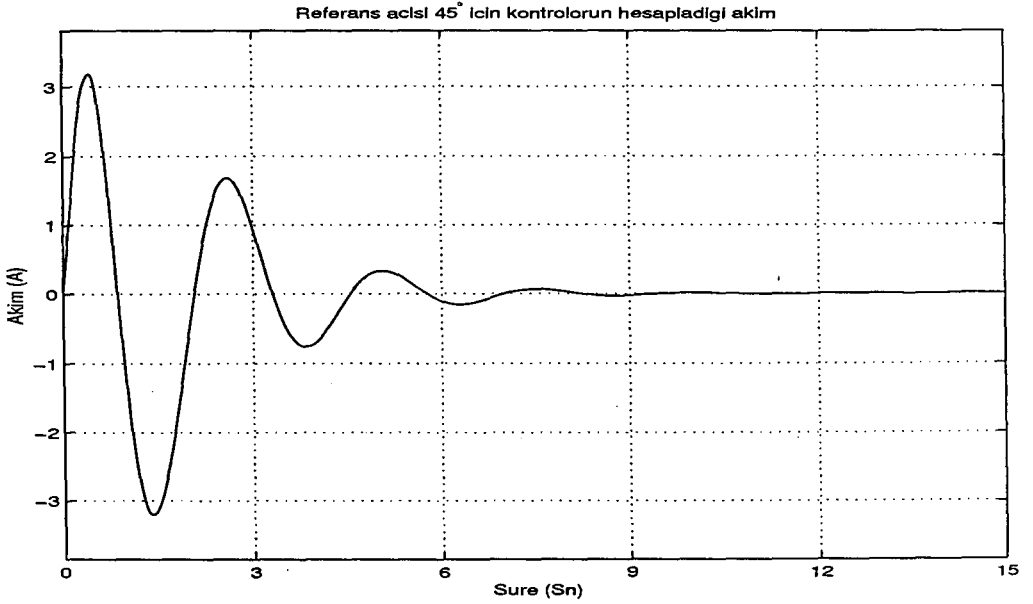
Şekil 6.67: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun pozisyonu (20. Dereceden Kontrolör için).



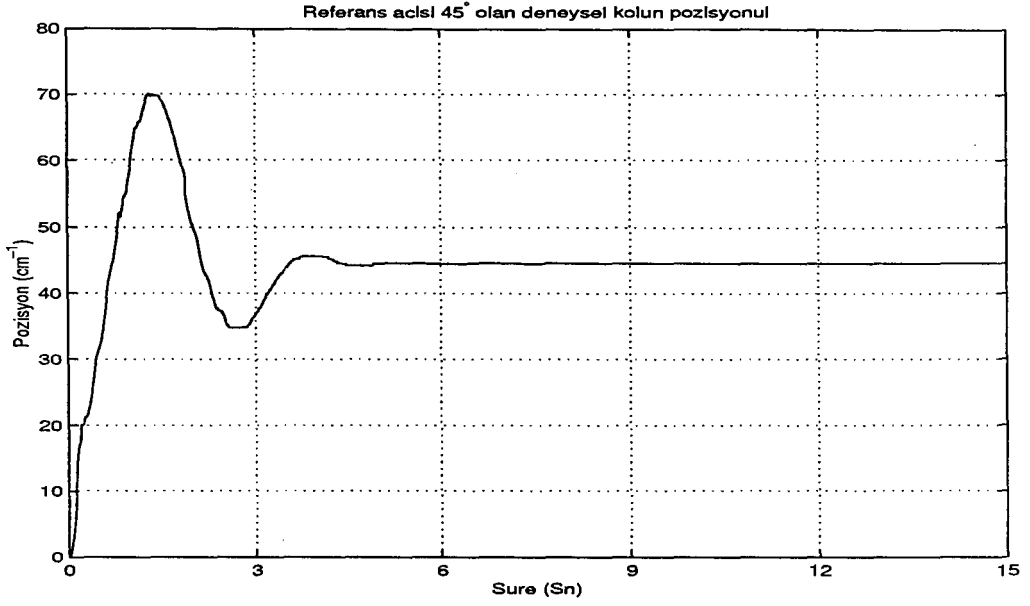
Şekil 6.68: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun hızı (20. Dereceden Kontrolör için).



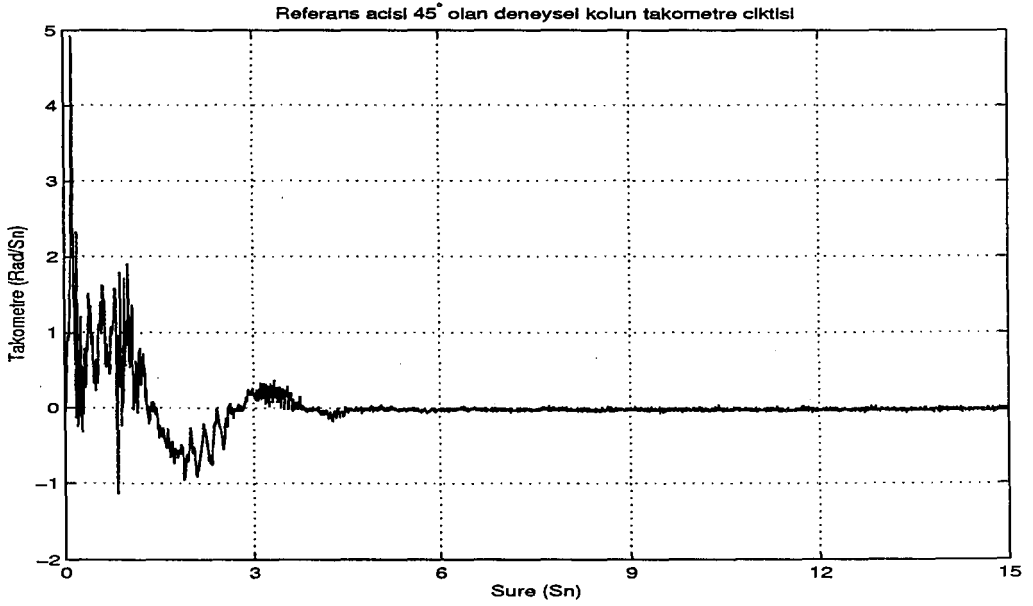
Şekil 6.69: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 12 esnek modlu esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı. (20. Dereceden Kontrolör için)



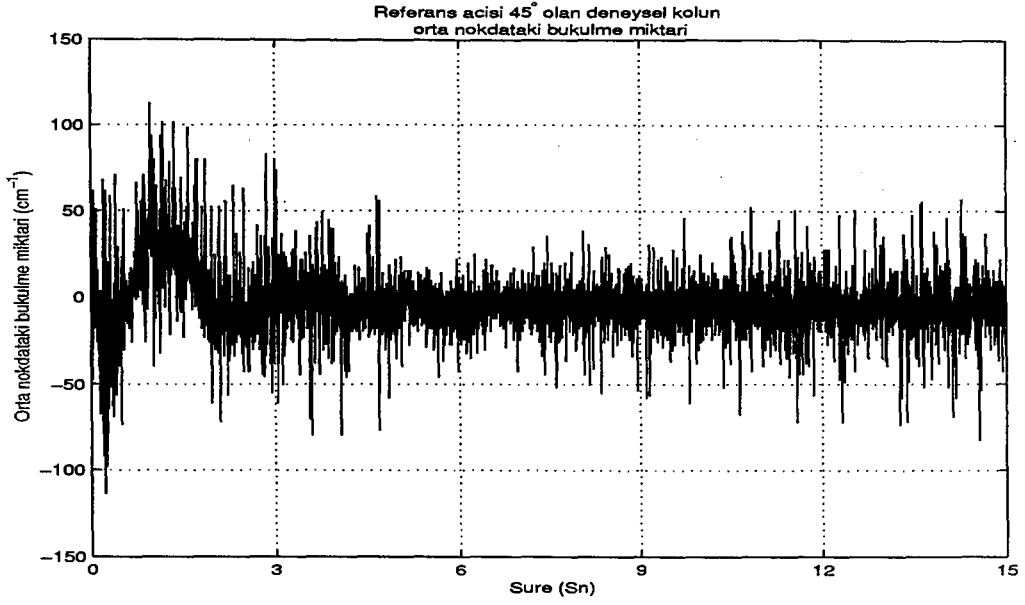
Şekil 6.70: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, 3 esnek modlu esnek kolun hareketi için motora uygulanması gereken akım (20. Dereceden Kontrolör için).



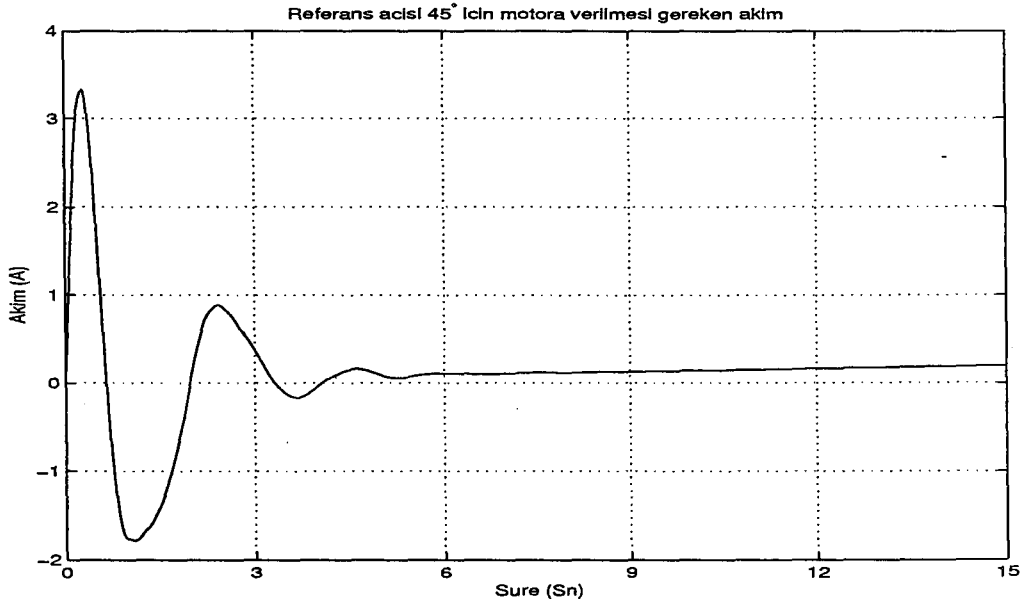
Şekil 6.71: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun pozisyonu.



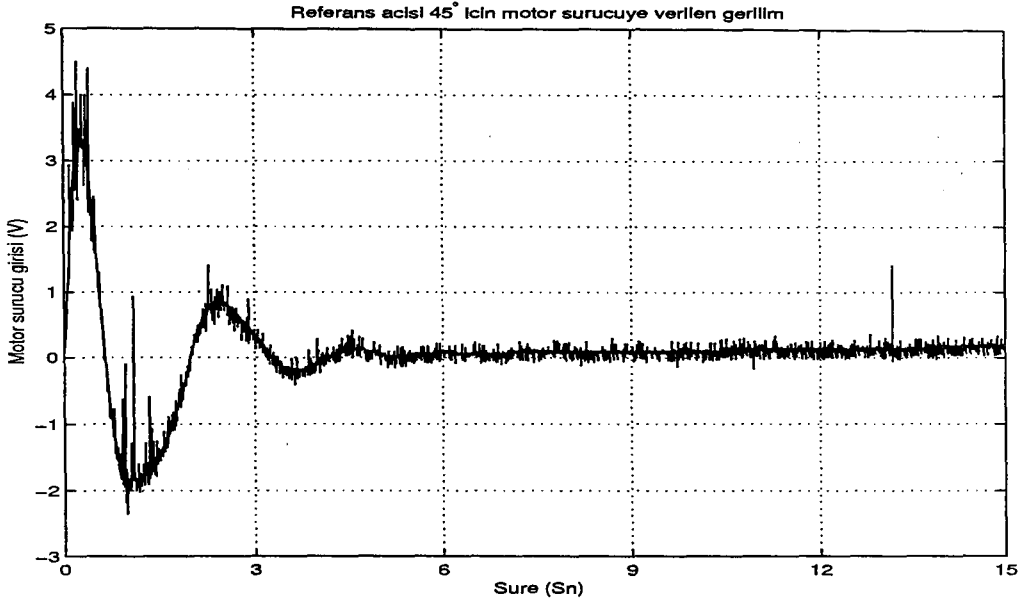
Şekil 6.72: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun hızı.



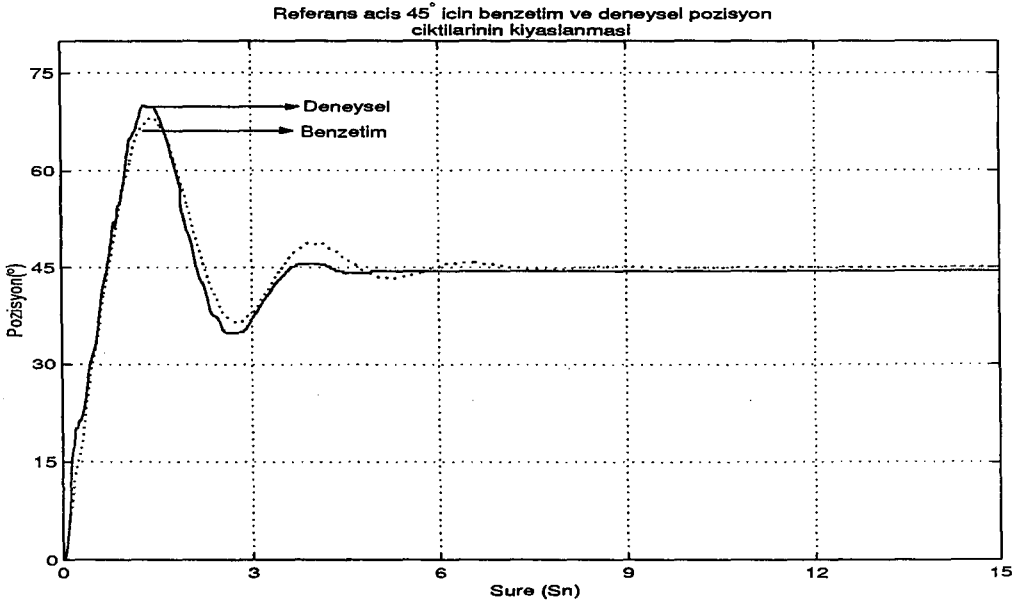
Şekil 6.73: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, deneysel esnek kolun orta noktadaki bükülme miktarı.



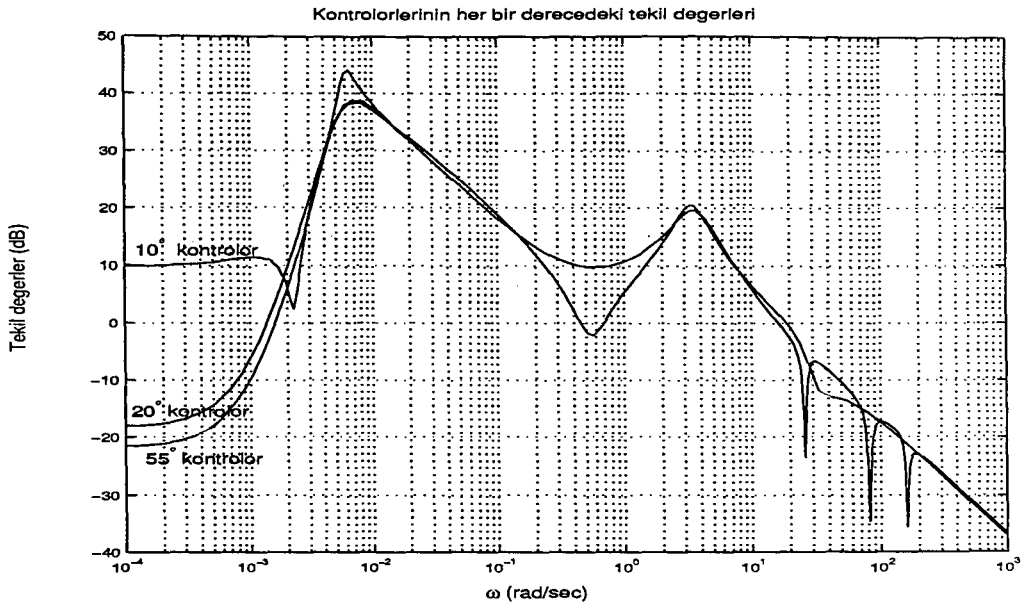
Şekil 6.74: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor uçlarına uygulanması gereken akım.



Şekil 6.75: Tek girdi çok çıktılı durumda, referans açısı 45° için, motor sürücü uçlarına uygulanan gerilim.



Şekil 6.76: Tek girdili çok çıktılı sistem için tasarlanan kontrolör sonucu elde edilen benzetim sonucu ile deneysel sonucun 45° için karşılaştırılması



Şekil 6.77: Tek girdili çok çıktılı sistem için tasarlanan kontrolör ve düşük derecelerinin tekil değerleri

7. SONUÇLAR

Bu tezde, sonsuz boyutlu bir sistem olarak modellediğimiz deneysel esnek robot kolunu, sonlu boyutta alıp, bu sonlu durum için farklı gürbüz kontrolörler tasarlayarak deneysel düzeneğimize uyguladık.

Sistemimize gürbüz kontrolör tasarlamamızın amacı, sistemimizi modelerken modellediğimiz sistem dinamiklerini, yüksek frekans modları, ve belirsizlikleri hesaba katarak hem nominal planti hem de gerçek planti kararlı kılabilen bir kontrolör tasarlamaktır.

Gürbüz kontrolör tasarlarırken iki farklı kontrolör tasarım yönteminden faydalandık. Bunlardan ilki, "Skew Toeplitz" yöntemiyle kontrolör tasarımı idi. Frekans bölgesinde tasarlamaya çalıştığımız bu kontrolörde, plantimizi Kabbullenme 3.1'de olduğu gibi sonsuz iç-dış çarpımlar yerine ancak sonlu iç-dış çarpımlar olarak ayrıştırılabildik. Plantimizin sonsuz boyutlu iç-dış çarpanlar şeklinde ayrıştırılabilsedik, sonsuz boyutlu bir kontrolör elde etmiş olacaktık. Fiziksel gerçeklemesi mümkün olmayan bu sonsuz boyutlu kontrolörü, iki blok problemindeki γ_{opt} ifadesini veren yüksek dereceli kontrolörler bularak, sistemin yüksek frekans modlarına daha rahat müdahale edebilirdik.

Kontrolör tasarımında da çıkan tekillik problemlerini ortadan kaldırmak için, $W_1(s)W_1(-s) + W_m(s)W_m(-s) = \epsilon W_1(s)W_1(-s)W_m(s)W_m(-s)$ biçiminde ağırlıklar arasında bir ilişki tanımlayarak, iki blok problemimizi tek blok problemi haline indirgedik. Deneme yanılma yöntemi ile bulunan ağırlıklar sayesinde elde edilen K_{opt} kontrolörünü uygulayıp, benzetim sonuçlarına baktığımızda ise, kol istenilen referansı takip etmekte ama deneysel düzenek takip edememektedir. Bu da kontrolörde bir integratörün olmamasından kaynaklanmaktadır. Bunu sağlayacak olan ağırlıkları ise yukarıdaki formda tanımlamamızdan ötürü kontrolöre bir integratör yerleştirememekteyiz. Çünkü, W_1 ağırlığına iki integratör yerleştirmeye çalıştığımızda, optimum bir γ değeri bulamamaktayız. Bu ise, W_1 ağırlığı değıştikçe W_2 ağırlığının da değışmesinden kaynaklanmaktadır.

Bir diğerkullandığımız kontrolör yöntemi ise cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile kontrolör tasarımıdır. Bu kontrolör tasarımında ilk önce sadece kolun pozisyonundan geri besleme alarak tek girdili tek çıktılı sistem için, ardından da kolun hem pozisyon, hem takometre çıktısı, hem de orta noktasındaki bükülmeden geri beslemeler alarak, tek girdili çok çıktılı sistemimiz için kontrolör tasarladık ve bunu deneysel düzeneğimize uyguladık.

Daha önceden de bahsedildiği gibi, kontrolörde bir integratör olması için, W_e ağırlığını, her iki kontrolör tasarımında da çift integratörlü almamız gerekir, fakat MATLAB'daki nümerik hatalardan dolayı, integratör yerine sifıra yakın solda çift kutup yerleştirdik. Bozucu sinyallerin etkisini azaltmak için de W_d ağırlığını çok küçük bir sabit seçmemizin amacı, sistemimiz için tanımladığımız iki blok probleminin, daha fazla blok içeren bir probleme dönüşmemesini sağlamaktır.

Cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile elde edilen kontrolörlerin benzetim sonuçları ile "Skew Toeplitz" yöntemiyle tasarlanan kontrolörün benzetim sonuçlarına bakarsak, kolun yüksek frekans modlarının etkisinin "Skew Toeplitz" ile elde edilen kontrolöre ait benzetim sonuçlarında daha az olduğu

gözükmektedir. Bunun en başlıca sebeplerinden birisi, "Skew Toeplitz" yöntemi ile elde edilen kontrolörün genliği yüksek frekanslarda sabit olması ama cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile elde edilen kontrolör ise yüksek frekanslarda integratör özelliği göstermektedir. Bir diğer sebep ise, ilk yöntem ile elde edilen kontrolör deneysel düzeneğe uygulandığı vakit, kol referans açısına oldukça geç ulaşmaktadır.

Cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile tek girdili tek çıktılı sistem için tasarlanan kontrolör ile tek girdili çok çıktılı sistem için tasarlanan kontrolörün benzetim sonuçlarına bakarsak, tek girdili çok çıktılı sistem için tasarlanan kontrolör sistemdeki yüksek frekans modlarına daha iyi müdahale etmektedir. Ayrıca, bunu deneysel sonuçlardan da çıkarmak mümkündür. Dolayısıyla, tek girdili çok çıktılı sistem için tasarlanan kontrolörün sistem performansı iyileştirdiğini, yani orta noktadaki bükülmeyi geri besleyerek sistemin yüksek frekans modlarına daha iyi müdahale ettiğini söyleyebiliriz.

Deneysel düzeneğe uyguladığımız kontrolörlerin benzetim sonuçları ile deneysel sonuçlarını kıyasladığımızda, pozisyon çıktılarında, referans açısı olarak 45° verdiğimiz vakit, ilk anda kolun pozisyonu benzetime göre daha fazla tepe değerine ulaşmakta ve ardından yaklaşık olarak benzetimdeki gibi davranmaktadır. İlk anda yüksek tepe değerine çıkması motorun ilk kalkış anındaki uygulayacağı torkun doğrusal olmaması, dolayısıyla beklenenden daha fazla akım çekmesinden kaynaklanmaktadır.

Kontrolörlerin frekans bölgesindeki tekil değerlerini incelersek (Şekil 6.77), 55. ile 20. dereceden bulunan kontrolör tüm frekans bölgesinde birbirini yaklaşık olarak takip etmekte ama 10. derece kontrolörün diğerlerine oranla düşük frekanslardaki tekil değeri daha büyüktür ve bazı frekans bölgelerinde diğerlerine oranla çok farklılık göstermektedir. Dolayısıyla, 10. dereceden kontrolörün uygulamasında deneysel çıktılar benzetimlere benzememekte ama yatışkın duruma gelmektedir. Bu ise, kontrolörün sifıra yakın kutuplarından ve kontrolörün düşük frekanslardaki kazancının yüksek olmasından kaynaklanmaktadır.

Cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile tek girdili tek çıktılı sistem için tasarlanan kontrolörümüzün gürbüzlüğünden bahsederken, Tablo 6.1'de bulunan birbirinden farklı kollara aynı kontrolörlerin uygulanması sonucu elde ettiğimiz pozisyon çıktılarına bakarak karar verebiliriz. Her 3 kola da referans açısı olarak 45° verip pozisyon çıktılarını karşılaştırsak, bu durumda harcanan güç, pozisyon doğruluğu, düşük atalet kıyaslamalarını rahat yapabiliriz (Şekil 6.48). Pirinç kol aynı kontrolör uygulanmasına rağmen aynı referans açısı için 1. esnek alüminyum levhaya göre ağırlığından ötürü daha fazla akım çekmiştir. 2. esnek alüminyum levha ise, daha uzun ve daha geniş olmasından dolayı doğal frekansları daha düşük ve sol yarı düzlemdeki kutup ile sıfırları sanal eksene daha yakındır. Bunların etkisinden dolayı, pozisyon çıktısında yüksek frekans modlarının etkisi görmek mümkündür, ve bu sebeplerden dolayı yatışkın duruma daha geç ulaşmaktadır. Ama hafif olduğundan dolayı az akım çekmektedir.

Ayrıca düşük dereceli kontrolörler uygulandığı vakit elde edilen sonuçlar ile yüksek dereceli kontrolör uygulanması sonucu oluşan deneysel çıktılar arasında belirgin bir fark yoktur.

Kullandığımız enkoder 12 bit çözünürlükte ve yaklaşık olarak 1 bitlik değişim 0.09° karşılık gelmektedir. Dolayısıyla verdiğimiz 45° referans açısına hatasız ulaşması mümkün değildir. Dolayısıyla bu referans açısında her zaman bir hata mümkün ve kontrolör çıktısında, kontrolör integratör içerdiği için her zaman çok küçük hataları bile düzeltmek için, sisteme akım vermektedir.

Ayrıca çıktılarda bir problem de kayma hatası (floating error) problemidir. Bunun bir sebebi ise, tüm geribeslemelerin tek uçlu olmasına rağmen takometre çıktısı ise, içten topraklı değildir. Bir diğer sebep ise, kullandığımız güç kaynağının AC - DC çevirmede kullandığı kapasitör değerleridir. Orta noktadaki bükülme incelendiği zaman ise, veri toplama kartının 5 mV hassasiyetinden olması ve orta noktadaki bükülme maksimum olduğunda bile sinyal işleme kartı SC -2043 SG'nin çıkışının yaklaşık 30 mV olmasıdır. Bu tür problemleri ortadan kaldırmak için koaksiyel kablolar kullanılmalı ve yalıtım iyi yapılmalıdır.

Orta noktadaki bükülme kayma hatasından dolayı tam olarak seçilememektedir. Ama referans açısı olarak 45° verildiği zaman, bükülme fazla olduğu için gözlenebiliyor. Bu durumda deneysel çıktıyla benzetimi karşılaştırdığımızda deneysel çıktındaki bükülmenin az olmasının sebebi, deneysel esnek kolu modellerken aldığımız sönümleme katsayısının düşük olmasıdır.

Deneysel sonuçların gözlemi sonucunda, tatmin edici sonuçları sadece durum-uzayı yöntemleri ile kontrolör tasarımı sonucu elde ettik. Deneysel esnek koldaki modellenmeyen yüksek frekans modlarının, pozisyon çıktısındaki etkisini azaltmak için orta noktadan geribesleme aldık. En fazla geribesleme alarak tasarladığımız kontrolörde en iyi iyileştirmenin olduğunu gördük. Durum-uzayı yöntemleri tasarımı ile elde ettiğimiz kontrolörde ayrıca oldukça gürbüzdür, zaten bunu modellemediğimiz farklı kolların iyi takip yapmasından da çıkartabiliriz.

Kontrolörlerin maliyetini azaltmak içinde, düşük dereceli kontrolörler kullanılabilir. Her üç farklı tasarımın, benzetim sonuçları incelendiğinde bunu görmek mümkündür. Ayrıca, durum-uzayı yöntemi ile tasarlanan kontrolörün deneysel sonuçlarında da bunu görmekteyiz. Sonuç olarak belli bir mesafeye kadar kontrolör derecesi düşürülebilir.

Orta noktadaki bükülmenin ve yüksek frekans modlarının pozisyon çıktılarındaki etkisi bir yandan da ağırlıkların kazançlarından kaynaklanmaktadır. Bu ağırlıkların yüksek kazançları ise, modellenmeyen doğrusalsızlıklardan ötürüdür. İleriki çalışmalarda bu modellenmeyen doğrusalsızlıklar modellemeye katılarak kontrolör tasarlanırsa daha iyi sonuçlar alınabilir. Tez çalışmamızda da bahsedilen doğrusalsızlıklar modellenmemesine rağmen kontrolör hem gürbüz hem de iyi takip yapabilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] HSU, C., LU, S., VE WANG, W., *Experiments on the Position Control of a One-Link Flexible Robot Arm*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 5. 3, 373–377 (1989).
- [2] MEIROVITCH, L., *Dynamics and Control of Structures*. Wiley, (1990).
- [3] CANNON, R.H., VE SCHMITZ, E.JR., *Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot*. The International Journal of Robotics Research, 3. 3, 325–338 (1984).
- [4] FUKUSHIMA, S., MATSUNO, F., VE SAKAWA, Y., *Modelling and Feedback Control of a Flexible Arm*. Journal of Robotic Systems, 2. 4, 453–472 (1985).
- [5] LENZ, K., VE ÖZBAY, H., *Analysis and Robust Control Techniques for an Ideal Flexible Beam*. Control and Dynamic Systems Vol 57.,
- [6] LENZ, K., ÖZBAY, H., TANNENBAUM, A., TURI, J., VE MORTON, B., *Frequency Domain Analysis and Robust Control Design for an Ideal Flexible Beam*. Automatica, 27. 6, 947–961 (1991).
- [7] LUO ZHENG H., *Direct Strain Feedback Control of Flexible Robot Arms: New Theoretical and Experimental Results*. IEEE Transactions on Automatic Control, 38. 11, 1610–1622 (1993).
- [8] SUTTON R.P., HALIKIAS G.D., PLUMMER, A.R., VE WILSON D.A., *Modelling and H^∞ control of a single-link flexible manipulator*. Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part I (Journal of Systems and Control Engineering 213. 12 , 85–104 (1999).
- [9] PLUMMER, A.R., SUTTON R.P., WILSON D.A., VE HALIKIAS G.D., *Experimental Results In The Vibration Control of a Highly Flexible Manipulator*. Proc. of the Motion And Vibration Conference, Zurich (August 1998).
- [10] DOĞAN, A., *İki Eklemlı Esnek Bir Robot Kolunun Modellenmesi ve Kontrolü*. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, (1997).

- [11] ÖZEL, K., *Esnek Robot Kollarının Modellenmesi ve Kontrolü*. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, (1997).
- [12] ÜNAL, H.U., *Development of an Experimental Setup for Flexible Robot Arm Control*. Bitirme Tezi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, (1999).
- [13] KÜÇÜKYILMAZ, İ., *Esnek Robot Kolları için Kontrol Yöntemleri Uygulamaları*. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, (2000).
- [14] FOIAS, C., ÖZBAY, H., VE TANNENBAUM, A., *Robust Control of Infinite Dimension Systems: Frequency Domain Methods*. Springer-Verlag, (1996).
- [15] ZHOU, K., VE DOYLE, J., *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Inc., (1998).
- [16] FRANCIS, B., *A Course in \mathcal{H}_∞ Control Theory*. Springer-Verlag, Londra, 1987.
- [17] SHAPIRO, H. S., *Operator Theory and Harmonic Analysis*.
<http://www.cs.umb.edu/asi/analysis2000/papers/shapiro.pdf>
- [18] SZ.-NAGY BÉLA VE FOIAS, C., *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces*. North-Holland Publishing, (1970).
- [19] HALMOS, P.R., *A Hilbert Space Problem Book*. Springer Verlag, New York, 1982.
- [20] ZHOU, K., J.C.DOYLE, ve GLOVER, K., *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall Inc., (1995).
- [21] DOYLE, J.C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P.P., VE FRANCIS, B.A., *State-Space Solutions To Standart \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Control Problems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 34. 8 831–847 (1989).
- [22] ÖZBAY, H., SMITH, M. C., VE TANNENBAUM, A., *Controller Design for Unstable Distributed Plants*. Proc. of the American Control Conference, San Diego,CA, 1163–1167 (May 1990).
- [23] ÖZBAY, H., SMITH, M. C., VE TANNENBAUM, A., *On the Optimal Two Block \mathcal{H}_∞ -Compensators for Distributed Unstable Plants*. Proc. of the American Control Conference, Chicago, IL, 1865–1869 (June 1992),.
- [24] ÖZBAY, H., SMITH, M. C., VE TANNENBAUM, A., *On the Two Block Problem for Unstable Distributed Plants*. Proc. of the American Control Conference, Honolulu, Hawaii, 1163–1167 (December 1990).

- [25] FOIAS, C, FRANCIS, B, HELTON, J.W, KWAKERNAK, H. VE PEARSON, J.B, *\mathcal{H}_∞ -Control Theory*. Springer Verlag Inc., (1990).
- [26] SMITH, M. C., *On Stabilization and Existence of Coprime Factorizations*. IEEE Transactions on Automatic Control 34. 9, 1005–1007 (1989).
- [27] BURUNAK, Ö., *Esnek Bir Robot Kolu İçin Kontrolör Tasarımı*. Dönem Projesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, (2000).
- [28] NATIONAL INSTRUMENTS *DAQ SC-2043-SG User Manual*. Ağustos (1996).
- [29] ELMO MOTION CONTROL LTD. *SSA Series Installation & Operating Manual* .
- [30] ÅSTRÖM, K. J., VE WITTENMARK, B., *Computer - Controlled Systems: Theory And Design* . Prentice Hall, Springer Verlag Inc., (1997).
- [31] MEINSMA, G., *Unstable and Nonproper Weights in \mathcal{H}_∞ Control*. Automatica 31 11, 1655–1658 (1995).

EKLER

EK-1 : Esnek kolun n esnek modu için sistemimizin benzetimini yapan program

```

function [G1,G2,G3]=nominal_plant;
E=62.1e+9;
L=0.898;
rho=0.2960762426;
m=0.2710800473;
d=0.0015;
Ia=1.940625e-11;
Ih=0.0010118;
Bm=0.00033;
Ka=0.35;
GF=2.12;
damp=1e-2;
k=input('mod sayisini giriniz ...');
mod=k;
s=1;
x=0;
while s<=mod;
f=1+cos(x)*cosh(x)+(m/rho)*(x/L)*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));
x=x+0.5;
f1=1+cos(x)*cosh(x)+(m/rho)*(x/L)*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));
while (f*f1>0)
f=1+cos(x)*cosh(x)+(m/rho)*(x/L)*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));
x=x+0.5;
f1=1+cos(x)*cosh(x)+(m/rho)*(x/L)*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));
end
xe=x;
x0(s,1)=xe;
s=s+1;
end
for i=1:mod;
f=1+cos(x(i))*cosh(x(i))+(m/rho)*(x(i)/L)* ...
(sinh(x(i))*cos(x(i))-cosh(x(i))*sin(x(i)));
df=sinh(x(i))*cos(x(i))-cosh(x(i))*sin(x(i))+...
(m/rho)*(1/L)*(sinh(x(i))*cos(x0(i))-...
cosh(x(i))*sin(x(i)))-2*(m/rho)*(x(i)/L)*(sinh(x(i))*sin(x(i)));
zp(i,1)=x(i)-f/df;
z(i)=x(i);
while(abs(zp(i,1)-z(i)))>1e-12
z(i)=zp(i,1);
f=1+cos(z(i))*cosh(z(i))+(m/rho)*(z(i)/L)* ...
(sinh(z(i))*cos(z(i))-cosh(z(i))*sin(z(i)));
df=sinh(z(i))*cos(z(i))-cosh(z(i))*sin(z(i))+ ...
(m/rho)*(1/L)*(sinh(z(i))*cos(z(i))-...
cosh(z(i))*sin(z(i)))-2*(m/rho)*(z(i)/L)*(sinh(z(i))*sin(z(i)));
zp(i,1)=z(i)-f/df;
end
end
beta=zp/L;
for i=1:1:k;
for j=1:1:k;
x=beta(i)*L;
y=beta(j)*L;
Ti=(cos(x)+cosh(x))/(sin(x)+sinh(x));
tj=(cos(y)+cosh(y))/(sin(y)+sinh(y));

```

```

if i==j
A(i,j)=L+(1/beta(i))*(((1-(Ti)^2)/4)*sin(2*x)+((1+(Ti)^2)/4)*sinh(2*x)...
+((Ti)^2-1)*cos(x)*sinh(x)-((Ti)^2+1)*cosh(x)*sin(x)...
+(2*Ti)*sin(x)*sinh(x)+Ti/2*cos(2*x)-Ti/2*cosh(2*x));
else
A(i,j)=-(m/rho)*(cosh(x)-cos(x)-Ti*(sinh(x)-sin(x)))*...
(cosh(y)-cos(y)-tj*(sinh(y)-sin(y)));
end
end
end
for i=1:1:k;
x=beta(i)*L;
Ti=(cos(x)+cosh(x))/(sin(x)+sinh(x));
omega_kare(i)=(beta(i)^4)*(E*I_a/rho);
a(i)=2*((x*(1+cos(x)*cosh(x))-(sin(x)+sinh(x)))/(beta(i)^2*(sin(x)+sinh(x))));
c(i)=2*beta(i)^2;
C(i)=(beta(i)^2*(cosh(x/2)+cos(x/2)-Ti*(sinh(x/2)+sin(x/2))));
end
Delta_kare=diag(omega_kare)-(E*I_a/I_h)*inv(A)*a.'*c;
B=inv(A)*a.'/I_h;
[v,d]=eig(Delta_kare);
M=v;
Ohm_kare=diag(inv(M)*Delta_kare*M);
Ohm_kare=diag(Ohm_kare);
k=(E*I_a/I_h)*c*M;
Cc=C*M;
T=inv(M)*B;
damp=damp*eye(mod);
A=[0 1 zeros(1,mod) zeros(1,mod); ...
0 -B_m/I_h k zeros(1,mod);...
zeros(mod,1) zeros(mod,1) zeros(mod,mod) eye(mod);...
zeros(mod,1) zeros(mod,1) -Ohm_kare -2*damp*sqrt(Ohm_kare)];
B=[0;K_a/I_h;zeros(mod,1);T*K_a];
C1=[1 0 zeros(1,mod) zeros(1,mod)];
C2=[0 1 zeros(1,mod) zeros(1,mod)];
C3=[0 0 Cc zeros(1,mod)];
D=[0];
C=[C1;C2;C3];
G1=tf(ss(A,B,C1,D));
G2=tf(ss(A,B,C2,D));
G3=tf(ss(A,B,C3,D));
G=[G1;G2;G3];
figure
subplot(2,1,1)
[mag1,phase1,w1]=bode(G1,1e-5,1e+5);
phase1=rem(phase1,180);
loglog(w1,mag1(:,:))
title('Motora uygulanan I.c akimindan pozisyona olan transfer fonksiyon')
ylabel('Genlik (rad/A)')
grid
subplot(2,1,2)
semilogx(w1,phase1(:,:))
ylabel('Faz (derece)')
xlabel('\omega (rad/sn)')
grid
figure
subplot(2,1,1)

```

```

[mag1,phase1,w1]=bode(G2,1e-5,1e+5);
phase1=rem(phase1,180);
loglog(w1,mag1(:,:))
title('Motora uygulanan I.c akimindan takometreye olan transfer fonksiyon')
ylabel('Genlik (rad/A.Sn)')
grid
subplot(2,1,2)
semilogx(w1,phase1(:,:))
ylabel('Faz (derece)')
xlabel('\omega (rad/sn)')
grid
figure
subplot(2,1,1)
[mag1,phase1,w1]=bode(G3,1e-5,1e+5);
phase1=rem(phase1,180);
loglog(w1,mag1(:,:))
title('Motora uygulanan I.c akimindan orta noktadaki bukulmeye
olan transfer fonksiyon')
ylabel('Genlik (cm-1/A)')
grid
subplot(2,1,2)
semilogx(w1,phase1(:,:))
ylabel('Faz (derece)')
xlabel('\omega (rad/sn)')
grid

```

EK-2 : Sistem için ağırlıkları veren program

```

function [numW1,denW1,numWm,denWm]=weight;
alpha=input('alpha degerini giriniz');
beta=input('beta degerini giriniz');
x=input('x degerini giriniz');
y=input('y degerini giriniz');
t=input(' t degerini giriniz');
v=input(' v degerini giriniz ');
tt= [0 0 0 0 1]*alpha^2+beta^2
*conv([-x^2 0 y^2], [-t^2 0 v^2]);
tr= roots(tt);
wa= 1;
wb= tr(1);
wc= 1;
wd= tr(3);
numW1= alpha*conv([wa wb],[wc wd]);
denW1= conv([x y],[t v]);
numWm= beta*conv([wa wb],[wc wd]);
denWm= 1;
W1= alpha*tf([wa wb],[x y])*tf([wc wd],[t v]);
W2= beta*tf([wa wb],[0 1])*tf([wc wd],[0 1]);
figure
[mag,phase,w]= bode(W1);
subplot(2,1,1)
loglog(w,20*log10(mag(:,:)))
title ('W_1 Agirliginin Frekans Tepkisi')
ylabel('Genlik')
subplot(2,1,2)
semilogx(w,phase(:,:))
ylabel('Faz')
figure
subplot(2,1,1)
[mag,phase,w]= bode(W2);
loglog(w,20*log10(mag(:,:)))
ylabel('Genlik')
title ('W_2 Agirliginin Frekans Tepkisi')
subplot(2,1,2)
semilogx(w,phase(:,:))
ylabel('Faz')

```

EK-3 : ρ 'nun alt sınıır değerini veren program

```

function min_rho=minrho
clear ;
[ numW1, denW1, numWm, denWm, numN1, denN1, numN2, ...
denN2, numMn, denMn, lw, hw, Npoints, lpoints,tau]=veri;
numMi=star(numWm);
denMi=numWm;
numM=conv(numMi,numMn);
denM=conv(denMi,denMn);
numW0=1;
denW0=denW1;
[numw0,denw0]=transwo(numW0,denW0,tau);
[numm,denm]=transm(numM,denM,tau);
zi=roots(numm);
min_rho1=[ ];
for i=1:length(zi)
min_rho1=[min_rho1;polyval(numw0,zi(i))/polyval(denw0,zi(i))];
end
min_rho2=polyval(numw0,1)/polyval(denw0,1);
min_rho=min([min_rho1;min_rho2]);
min_rho=min_rho+0.0001;
veri.m

function [nW1, dW1, nWm, dWm, nN1, dN1, nN2, dN2, nMn, dMn, ...
lw, hw, Npoints, lpoints, tao]=veri;
clear
Pm=frekans;
P=minreal(Pm(1)*tf([1 0],[1 0.001]));
[nMn,dMn,nN1,dN1,nN2,dN2]=factor_rob1(P);
[nW1,dW1,nWm,dWm]=weight;
Npoints=2500;
lpoints=1000;
lw=-2;
hw=+5;
tao=2;
factor_rob1.m

function [numMn,denMn,numN1,denN1,numN2,denN2]=factor_rob1(P);
P=rot1;
[numP,denP]=tfdata(P,'v');
j=length(find(denP))-length(find(numP));
gain=numP(min(find(numP)))/denP(min(find(denP)));
zeroP=roots(numP);
poleP=roots(denP);
zeroMn=zeroP(find(zeroP>1e-6));
numMn=poly(zeroMn);
denMn=poly(-zeroMn);
epsil=0.001;
pole.zero=find(poleP==0);
poleP(pole.zero)=-epsil;
zeroN1=[zeroP(find(zeroP<-1e-6));-zeroMn];
poleN1=[poleP(2:length(poleP)-1)];
[numN1,denN1]=zp2tf(zeroN1,poleN1,gain);
numN1=polysum(numN1,0);
denN1=polysum(denN1,0);

```

```

zeroN2=[ ];
poleN2=[poleP(1);poleP(length(poleP))];
[numN2,denN2]=zp2tf(zeroN2,poleN2,1);
numN2=polysum(numN2,0);
denN2=polysum(denN2,0);
polysum.m

```

```

function sum=polysum(A,B)
h=length(A)-length(B);
if h > 0;
sum=A+conv([zeros(1,h) 1],B);
elseif h==0;
sum=A+B;
elseif h<0;
sum=B+conv([zeros(1,-h) 1],A);
end
while abs(sum(1))<1e-8;
sum=sum(2:length(sum));
end
star.m

```

```

function sv=star(v)
j=length(v);
for i=1:1:j;
sv(i)=v(i)*(-1)^(j+i);
end
transwo.m

```

```

function [numw0, denw0] = transwo( numW0, denW0, a);
epsn=1e-10;
numW0=polysum(numW0,0);
denW0=polysum(denW0,0);
if length(numW0) =1
error('look numW0');
else
end
polew0=roots(denW0);
gainw0=denW0(1);
numw0=[1 -2 1];
denw0=gainw0*conv([(a+polew0(1)) (a-polew0(1))],...
[(a+polew0(2)) (a-polew0(2))]);
numw0=polysum(numw0,0);
denw0=polysum(denw0,0);
transm.m

```

```

function [numm, denm] = transm( numM, denM, a);
numM=polysum(numM,0);
denM=polysum(denM,0);
ganumM=numM(1);
gadenM=denM(1);
if length(numM)-length(denM) =0
error('error inner functions');
else
end
poleM=roots(denM);
n=length(poleM);

```

```
denm=1;
for i=1:1:n;
denm=conv(denm,[(a+poleM(i)) (a-poleM(i))]);
end
numm=1;
for i=1:1:n;
numm=conv(numm,[(a-poleM(i)) (a+poleM(i))]);
end
denm1=polysum(gadenM*denm,0);
numm1=polysum(ganumM*numm,0);
if abs(length(denm1)-length(denm)) =0
error('Not inner func. after trans')
elseif abs(length(numm1)-length(numm)) =0
error('Not inner func. after trans')
end
```

EK-4 : ρ 'nun üst sınır değerini veren program

```

function max_rho=maxrho
clear;
[numW1, denW1, numWm, denWm, numN1, denN1, numN2, denN2, ...
numMn, denMn, lw, hw, Npoints, lpoints, tau]=veri;
omegint=[ ];
k=1;
for omeg=lw:(hw-lw)/lpoints:hw;
lgomeg=10^omeg;
omegint=[omegint ; omeg];
s=i*lgomeg;
valW1=polyval(numW1,s)/polyval(denW1,s);
valWm=polyval(numWm,s)/polyval(denWm,s);
valN2=polyval(numN2,s)/polyval(denN2,s);
valu(k)=abs(valW1*valW1*valN2/sqrt(abs(valN2*valW1)^2+...
abs(valN2*valWm)^2));
k=k+1;
end
plot(omegint,valu);
grid on
xlabel('log( w )');
ylabel('max_rho');
max_rho=max(valu);
max_rho=max_rho-0.001;

```

EK-5 : ρ_{opt} değerini bulan program

```

function rho_opt=rhoopt
clear;
data1=[ ];
data2=[ ];
data3=[ ];
data4=[ ];
[numW1, denW1, numWm, denWm, numN1, denN1, numN2, denN2, numMn, denMn,....
lw, hw, Npoints, lpoints, tau]=veri;
minrho=input('mininum rho değerini giriniz : ');
maxrho=input('maksimum rho değerini giriniz : ');
numMi=star(numWm);
denMi=numWm;
numW0=1;
denW0=denW1;
numM=conv(numMi,numMn);
denM=conv(denMi,denMn);
[numw0,denw0]=transwo(numW0,denW0,tau);
[numm,denm]=transm(numM,denM,tau);
b=numw0;
k=denw0;
g=length(b);
m=length(k);
n=max(g,m);
if abs(m-n) ==0;
hatk=[k(2) k(1) 0];
K=[0 k(1) ; 0 0];
else
hatk=fliplr(k);
K=[k(1) k(2) ; 0 k(1)];
end
hatb=fliplr(b);
B=[b(1) b(2) ; 0 b(1)];
invdg=[0 0 0 1 ; 0 0 1 0 ; 0 1 0 0 ; 1 0 0 0 ];
for rho=maxrho:-(maxrho-minrho)/500 : minrho;
ze=polysum(conv(b,hatb),-rho^2*conv(k,hatk));
zr=roots(ze);
zer=sort(zr);
if abs(zer(1)) > 1;
zer=invdg*zer;
else
end
valum1_p=polyval(numm,zer(1))/polyval(denm,zer(1));
valum2_p=polyval(numm,zer(2))/polyval(denm,zer(2));
valF1_pexcm=polysum(polyval(hatb,zer(1))*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer(1))*K);
valF2_pexcm=polysum(polyval(hatb,zer(2))*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer(2))*K);
valF1_p=valum1_p*valF1_pexcm;
valF2_p=valum2_p*valF2_pexcm;
V1_p=[1 zer(1)];
V2_p=[1 zer(2)];
beaF1_p=V1_p*valF1_p;
beaF2_p=V2_p*valF2_p;
beaF_plus=[beaF1_p;beaF2_p];
V_plus=[V1_p ; V2_p];

```

```

valum1_m=polyval(numm,zer(1)^-1)/polyval(denm,zer(1)^-1);
valum2_m=polyval(numm,zer(2)^-1)/polyval(denm,zer(2)^-1);
valF1_mexcm=polysum(polyval(hatb,zer(1)^-1)*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer(1)^-1)*K);
valF2_mexcm=polysum(polyval(hatb,zer(2)^-1)*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer(2)^-1)*K);
valF1_m=valum1_m*valF1_mexcm;
valF2_m=valum2_m*valF2_mexcm;
V1_m=[1 zer(1)^-1];
V2_m=[1 zer(2)^-1];
beaF1_m=V1_m*valF1_m;
beaF2_m=V2_m*valF2_m;
beaF_minus=[beaF1_m;beaF2_m];
V_minus=[V1_m ; V2_m];
Rrho=polysum(inv(V_minus)*beaF_minus,...
-inv(V_plus)*beaF_plus);
singuls=svd(Rrho);
mingsing=min(singuls);
data1=[data1 ; rho];
data2=[data2 ; mingsing];
data3=[data3 ; zer];
data4=[data4 ; det(Rrho)];
end
plot(data1,abs(data2));
xlabel('min - $\rho < \rho < \max -\rho$ ');
ylabel('min (svd)');
title('' $\gamma_{1\_opt}$ '');
[a,b]=min(data2);
gamma_min=data1(b)
gammaopt.m

```

```

function [numq3opt,denq3opt]=gammaopt;
clear ;
gamma_opt=input('' $\gamma_{opt}$  degerini giriniz:');
[numW1,denW1,numWm,denWm,numN1,denN1,numN2,denN2, ...
numMn,denMn,lw,hw,Npoints,lpoints,tau]=veri;
omegaint=[ ];
numMi=star(numWm);
denMi=numWm;
numW0=1;
denW0=denW1;
numM=conv(numMi,numMn);
denM=conv(denMi,denMn);
[numw0,denw0]=transwo(numW0,denW0,tau);
[numm,denm]=transm(numM,denM,tau);
b=numw0;
k=denw0;
g=length(b);
m=length(k);
n=max(g,m);
if abs(m-n) =0;
hatk=[k(2) k(1) 0];
K=[0 k(1) ; 0 0];
else
hatk=fliplr(k);
K=[k(1) k(2) ; 0 k(1)];

```

```

end
hatb=fliplr(b);
B=[b(1) b(2) ; 0 b(1)];
invdg=[0 0 0 1 ; 0 0 1 0 ; 0 1 0 0 ; 1 0 0 0];
rho=gamma_opt ;
ksi_opt=polysum(conv(b,hatb),-rho^2*conv(k,hatk));
ze_opt=ksi_opt;
zr_opt=roots(ze_opt);
zer_opt=sort(zr_opt);
if abs(zer_opt(1))>1;
zer_opt=invdg*zer_opt;
else
end
valum1_p_opt=polyval(numm,zer_opt(1))/polyval(denm,zer_opt(1));
valum2_p_opt=polyval(numm,zer_opt(2))/polyval(denm,zer_opt(2));
valF1_pexcm_opt=polysum(polyval(hatb,zer_opt(1))*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer_opt(1))*K);
valF2_pexcm_opt=polysum(polyval(hatb,zer_opt(2))*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer_opt(2))*K);
valF1_p_opt=valum1_p_opt*valF1_pexcm_opt;
valF2_p_opt=valum2_p_opt*valF2_pexcm_opt;
V1_p_opt=[1 zer_opt(1)];
V2_p_opt=[1 zer_opt(2)];
beaF1_p_opt=V1_p_opt*valF1_p_opt;
beaF2_p_opt=V2_p_opt*valF2_p_opt;
beaF_plus_opt=[beaF1_p_opt;beaF2_p_opt];
V_plus_opt=[V1_p_opt ; V2_p_opt];
valum1_m_opt=polyval(numm,zer_opt(1)^-1)/polyval(denm,zer_opt(1)^-1);
valum2_m_opt=polyval(numm,zer_opt(2)^-1)/polyval(denm,zer_opt(2)^-1);
valF1_mexcm_opt=polysum(polyval(hatb,zer_opt(1)^-1)*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer_opt(1)^-1)*K);
valF2_mexcm_opt=polysum(polyval(hatb,zer_opt(2)^-1)*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer_opt(2)^-1)*K);
valF1_m_opt=valum1_m_opt*valF1_mexcm_opt;
valF2_m_opt=valum2_m_opt*valF2_mexcm_opt;
V1_m_opt=[1 zer_opt(1)^-1];
V2_m_opt=[1 zer_opt(2)^-1];
beaF1_m_opt=V1_m_opt*valF1_m_opt;
beaF2_m_opt=V2_m_opt*valF2_m_opt;
beaF_minus_opt=[beaF1_m_opt;beaF2_m_opt];
V_minus_opt=[V1_m_opt ; V2_m_opt];
Ropt=polysum(inv(V_minus_opt)*beaF_minus_opt,...
-inv(V_plus_opt)*beaF_plus_opt);
sing_opt=svd(Ropt);
mising_opt=min(sing_opt);
detRopt=det(Ropt)
Phi_eksi=null(Ropt);
if length(Phi_eksi) > 0
warning('Dogru gamma_opt')
else
warning='yanlis gama opt'
break
end

```

EK-6 : \mathcal{H}_∞ optimal kontrolörü veren program

```

function [numCopt,denCopt]=C_opt;
clear ;
gamma_opt1=input('gamma_opt degerini giriniz:');
[numW1,denW1,numWm,denWm,numN1,denN1,numN2,denN2, ...
numMn,denMn, lw,hw,Npoints,lpoints,tau]=veri;
omegaint=[ ];
numMi=star(numWm);
denMi=numWm;
numW0=1;
denW0=denW1;
numM=conv(numMi,numMn);
denM=conv(denMi,denMn);
[numw0,denw0]=transwo(numW0,denW0,tau);
[numm,denm]=transm(numM,denM,tau);
b=numw0;
k=denw0;
g=length(b);
m=length(k);
n=max(g,m);
if abs(m-n) =0;
hatk=[k(2) k(1) 0];
K=[0 k(1) ; 0 0];
else
hatk=fliplr(k);
K=[k(1) k(2) ; 0 k(1)];
end
hatb=fliplr(b);
B=[b(1) b(2) ; 0 b(1)];
invdg=[0 0 0 1 ; 0 0 1 0 ; 0 1 0 0 ; 1 0 0 0 ];
rho=gamma_opt1 ;
ksi_opt=polysum(conv(b,hatb),...
-rho^2*conv(k,hatk));
ze_opt=ksi_opt;
zr_opt=roots(ze_opt);
zer_opt=sort(zr_opt);
if abs(zer_opt(1))>1;
zer_opt=invdg*zer_opt;
else
end
valum1_p_opt=polyval(numm,zer_opt(1))/polyval(denm,zer_opt(1));
valum2_p_opt=polyval(numm,zer_opt(2))/polyval(denm,zer_opt(2));
valF1_pexcm_opt=polysum(polyval(hatb,zer_opt(1))*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer_opt(1))*K);
valF2_pexcm_opt=polysum(polyval(hatb,zer_opt(2))*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer_opt(2))*K);
valF1_p_opt=valum1_p_opt*valF1_pexcm_opt;
valF2_p_opt=valum2_p_opt*valF2_pexcm_opt;
V1_p_opt=[1 zer_opt(1)];
V2_p_opt=[1 zer_opt(2)];
beaF1_p_opt=V1_p_opt*valF1_p_opt;
beaF2_p_opt=V2_p_opt*valF2_p_opt;
beaF_plus_opt=[beaF1_p_opt;beaF2_p_opt];
V_plus_opt=[V1_p_opt ; V2_p_opt];
valum1_m_opt=polyval(numm,zer_opt(1)^-1)/polyval(denm,zer_opt(1)^-1);
valum2_m_opt=polyval(numm,zer_opt(2)^-1)/polyval(denm,zer_opt(2)^-1);

```

```

valF1_mexcm_opt=polysum(polyval(hatb,zer_opt(1)^-1)*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer_opt(1)^-1)*K);
valF2_mexcm_opt=polysum(polyval(hatb,zer_opt(2)^-1)*B,...
-rho^2*polyval(hatk,zer_opt(2)^-1)*K);
valF1_m_opt=valum1_m_opt*valF1_mexcm_opt;
valF2_m_opt=valum2_m_opt*valF2_mexcm_opt;
V1_m_opt=[1 zer_opt(1)^-1];
V2_m_opt=[1 zer_opt(2)^-1];
beaF1_m_opt=V1_m_opt*valF1_m_opt;
beaF2_m_opt=V2_m_opt*valF2_m_opt;
beaF_minus_opt=[beaF1_m_opt;beaF2_m_opt];
V_minus_opt=[V1_m_opt ; V2_m_opt];
Ropt=polysum(inv(V_minus_opt)*beaF_minus_opt,...
-inv(V_plus_opt)*beaF_plus_opt);
sing_opt=svd(Ropt);
mingsing_opt=min(sing_opt);
detRopt=det(Ropt)
Phi_eksi=null(Ropt);
if length(Phi_eksi)==0
error('null is empty')
else
end
for pp=1:length(Phi_eksi);
if abs(imag(Phi_eksi(pp)))<1e-14;
Phi_eksi(pp)=real(Phi_eksi(pp));
else
end
end
F11=polysum(conv(hatb,B(1,1)),-rho^2*conv(hatk,K(1,1)));
F12=polysum(conv(hatb,B(1,2)),-rho^2*conv(hatk,K(1,2)));
F21=conv(hatb,B(2,1))-rho^2*conv(hatk,K(2,1));
F22=polysum(conv(hatb,B(2,2)),-rho^2*conv(hatk,K(2,2)));
numF11=conv(F11,numm);
denF11=denm;
numF12=conv(F12,numm);
denF12=denm;
numF21=conv(F21,numm);
denF21=1;
numF22=conv(F22,numm);
denF22=denm;
ibeaVpbeaF=inv(V_plus_opt)*beaF_plus_opt;
ibeaVpbeaF11=ibeaVpbeaF(1,1);
ibeaVpbeaF12=ibeaVpbeaF(1,2);
ibeaVpbeaF21=ibeaVpbeaF(2,1);
ibeaVpbeaF22=ibeaVpbeaF(2,2);
F_min_ibeaVpbeaF11=polysum(numF11,-conv(denm,ibeaVpbeaF11));
F_min_ibeaVpbeaF12=polysum(numF12,-conv(denm,ibeaVpbeaF12));
F_min_ibeaVpbeaF21=polysum(numF21,-conv(denm,ibeaVpbeaF21));
F_min_ibeaVpbeaF22=polysum(numF22,-conv(denm,ibeaVpbeaF22));
F_min_ibeaVpbeaF1=polysum(F_min_ibeaVpbeaF11*Phi_eksi(1),...
F_min_ibeaVpbeaF12*Phi_eksi(2));
F_min_ibeaVpbeaF2=polysum(F_min_ibeaVpbeaF21*Phi_eksi(1),...
F_min_ibeaVpbeaF22*Phi_eksi(2));
for xx=1:length(F_min_ibeaVpbeaF1);
if abs(imag(F_min_ibeaVpbeaF1(xx)))<1e-10;
F_min_ibeaVpbeaF1(xx)=real(F_min_ibeaVpbeaF1(xx));
else

```

```

end
end
for ff=1:length(F_min_ibeaVpbeaF2);
if abs(imag(F_min_ibeaVpbeaF1(ff)))<1e-10;
F_min_ibeaVpbeaF2(ff)=real(F_min_ibeaVpbeaF2(ff));
else
end
end
numuopt=polysum(conv([1 0], F_min_ibeaVpbeaF2), F_min_ibeaVpbeaF1);
denuopt=conv(denm,ksi_opt);
V_pBPhi_m=[B(2,2)*Phi_eksi(2),B(1,1)*Phi_eksi(1)+B(1,2)*Phi_eksi(2)];
numsopt1=conv(conv(denuopt,numm),V_pBPhi_m);
numsopt2=conv(conv(b,numuopt),denm);
numsopt=polsum(numsopt2,-numsopt1);
V_pKPhi_m=[K(2,2)*Phi_eksi(2),K(1,1)*Phi_eksi(1)+K(1,2)*Phi_eksi(2)];
densopt1=conv(conv(denuopt,numm),V_pKPhi_m);
densopt2=conv(conv(k,numuopt),denm);
densopt=polsum(densopt2,-densopt1);
nummq3opt=polysum(conv(b,densopt),-conv(k,numsopt));
denmq3opt=conv(k,densopt);
numq3opt=conv(nummq3opt,denm);
denq3opt=conv(denmq3opt,numm);
[numQ3opt,denQ3opt]=transq3(numq3opt,denq3opt,tau);
[numG,denG]=spect_fact(numW1,denW1,numWm,denWm,numN2,denN2);
sqrtvarepsil=numG(1)*denW1(1)*denWm(1)/(denG(1)*numW1(1)*numWm(1));
numQ2opt=numQ3opt;
denQ2opt=sqrtvarepsil*denQ3opt;
numQ1opt=conv(denG,numQ2opt);
denQ1opt=conv(numG,denQ2opt);
numQopt=conv(denN1,rnumQ1opt);
denQopt=conv(numN1,rdenQ1opt);
[rnumQopt,rdenQopt]=karsivek(numQopt,denQopt);
numCopt1=conv(conv(denN1,denW1),conv(denWm,denN2));
numCopt2=conv(numQ3opt,denMn);
numCopt=conv(numCopt1,numCopt2);
denCopt1=conv(conv(denMn,numW1),conv(numWm,denQ3opt));
denCopt2=conv(conv(numMn,denW1),conv(denWm,numQ3opt));
denCopt3=polysum(denCopt1,-denCopt2);
denCopt=conv(denCopt3,conv(numN1,numN2));
Coptim=tf(numCopt,denCopt);
Coptim=minreal(Coptim);
optgamma=sqrt(1+(gamma_opt1)^2)/sqrtvarepsil;
[P1,P2,P3]=plant2;
OP1=P1*Coptim;
OP2=P2*Coptim;
OP3=P3*Coptim;
S=(inv(1+OP1));
cls1=OP1*S;
cls2=OP2*S;
cls3=OP3*S;
cls4=Coptim*S;
figure
[mag,phase,w]=bode(Coptim,1e-5,1e+5);
figure
subplot(2,1,1)
loglog(w,mag(:,:));
title('K_opt kontrolunun frekans yaniti')

```

```

ylabel('Genlik (A/rad)')
subplot(2,1,2)
phase1=rem(phase(:,1),180);
semilogx(w,phase1(:,1));
ylabel('Faz (derece)')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90 135])
ref=input('referans acisi: ')
t=[0:0.01:15];
u=(ref*pi/180)*ones(1,length(t));
[y,t1]=lsim(cls1,u,t);
degy=180*y/pi;
figure
plot(t1,degy)
title('Referans acisi ...° icin,kolon pozisyon ciktisi')
ylabel('Pozisyon (°)')
xlabel('Sure(Sn)')
grid
figure
[y,t2]=lsim(cls2,u,t);
plot(t2,y);
title('Referans acisi ...° icin, kolun takometre ciktisi')
ylabel('Takometre (rad/Sn)')
xlabel('Sure(Sn)')
grid
figure
[yy,t3]=lsim(cls3,u,t);
yy=100*y;
plot(t3,yy);
title('Referans acisi ...° kolun orta noktadaki bukulme miktarı')
ylabel('Orta Noktadaki Bukulme (cm-1)')
xlabel('Sure(Sn)')
grid
figure
lsim(cls4,u,t);
title('Referans acisi ...° motorun uclarina uygulanmasi gereken akim')
ylabel('Akim (A)')
xlabel('Sure(Sn)')
grid
[Ac,Bc,Cc,Dc]=ssdata(Coptim);
[Ad1,Bd1]=c2d(Ac,Bc,...*1e-3);
[am,bm,cm,dm,aug,svh]=balmr(Ac,Bc,Cc,Dc,2,1e-5);
Coptim11=tf(ss(am,bm,cm,dm));
[Ad,Bd]=c2d(am,bm,...*1e-3);

```

polsum.m

```

function sum=polsum(A,B)
h=length(A)-length(B);
if h>0;
sum=A+conv([zeros(1,h) 1],B);
elseif h==0;
sum=A+B;
elseif h<0;
sum=B+conv([zeros(1,-h) 1],A);
end
while abs(sum(1))<1e-8;
sum=sum(2:length(sum));
end
f=length(sum);
if abs(sum(2)/sum(1))<1e+6;
sum=sum;
else
sum=sum(2:length(sum));
end
transq3.m

```

```

function [numQ3opt,denQ3opt]=transq3(numq3opt,denq3opt,a);
gainnumq3opt=numq3opt(min(find(numq3opt)));
gaindenq3opt=denq3opt(min(find(denq3opt)));
zq3opt=roots(numq3opt);
pq3opt=roots(denq3opt);
n=length(roots(numq3opt));
d=length(roots(denq3opt));
numQ3opt1=1;
for e=1:1:n; numQ3opt1=conv(numQ3opt1,[(1-zq3opt(e)) -a*(1+zq3opt(e))]); end
for ee=1:1:length(numQ3opt1);
if abs(imag(numQ3opt1(ee)))<1e-10;
numQ3opt1(ee)=real(numQ3opt1(ee));
else
numQ3opt1(ee)=numQ3opt1(ee);
end
end
denQ3opt1=1;
for tt=1:1:d;
denQ3opt1=conv(denQ3opt1,[(1-pq3opt(tt)) -a*(1+pq3opt(tt))]);
end
for ttt=1:1:length(denQ3opt1);
if abs(imag(denQ3opt1(ttt)))<1e-10;
denQ3opt1(ttt)=real(denQ3opt1(ttt));
else
denQ3opt1(ttt)=denQ3opt1(ttt);
end
end
m=n-d;
if m>0
for ii=1:1:m;
denQ3opt1=conv(denQ3opt1,[1 a]);
end
elseif m<0
for ii=1:1:abs(m);

```

```

numQ3opt1=conv(numQ3opt1,[1 a]);
end
elseif m==0
numQ3opt1=numQ3opt1;
denQ3opt1=denQ3opt1;
end
numQ3opt1=conv(gainnumq3opt,numQ3opt1);
denQ3opt1=conv(gaindenq3opt,denQ3opt1);
numQ3opt=polysum(numQ3opt1,0);
denQ3opt=polysum(denQ3opt1,0);
spect_fact.m

```

```

function [numG,denG]=spect_fact(numW1,denW1, ...
numWm,denWm,numN2,denN2);
numsw1=star(numW1);
densw1=star(denW1);
numswm=star(numWm);
denswm=star(denWm);
numsn2=star(numN2);
densn2=star(denN2);
A1=conv(numsw1,numW1);
A2=conv(denw1,densw1);
B3=conv(numwm,numswm);
B2=conv(denwm,denswm);
C1=conv(numn2,numsn2);
C2=conv(denn2,densn2);
AA=polysum(conv(A2,B3),conv(A1,B2));
A=polysum(conv(AA,C1),0);
B=polysum(conv(conv(A2,B2),C2),0);
numG=spect(A);
denG=spect(B);
spect.m

```

```

function A=spect(B);
gainB=B(min(find(B)));
rootsB=roots(B);
rootsA=rootsB(find(rootsB<-1e-6));
gainA=sqrt(gainB);
A=gainA*poly(rootsA);

```

EK-7 : “ Skew Toeplitz” yöntemiyle tasarlanan kontrolörün C programı

```

/* TEK EKLEMLI KOL ICIN SKEW TOEPLITZ KONTROLOR */
#include<stdio.h>
#include<dos.h>
#include<conio.h>
#include<ctype.h>
#include<stdlib.h>
#include<alloc.h>
#include<time.h>
#if defined(_MSC_VER) | defined(_QC)
#include <graph.h>
#define outportb(port,data) outp(port,data)
#define inportb(port) inp(port)
#define inport(port) inpw(port)
#define gotoxy( col, row) _settextposition(row,col)
#define clrscr() _clearscreen(_GCLEARSCREEN)
#define cursor_off() _displaycursor(_G_CURSOROFF)
#define cursor_on() _displaycursor(_G_CURSORON)
#else
#define cursor_off() _setcursortype(_NOCURSOR)
#define cursor_on() _setcursortype(_NORMALCURSOR)
#define one 0
#define two 1
#define three 2
#define four 3
#define five 4
#endif
float first;
unsigned int Base = 0x300;
int far *DecToGray;
int far *GrayToDec;
char st[4096][13];
int Bintodec (char *s) { int res, i, e;
res=0; e=1;
for (i=0;i<12;i++) {
if(s[i]=='1') res+=e;
e*=2;
}
return res;
}
void init() {
int digit, index, i, k, e;
char arr[4]={'0','1','1','0'};
DecToGray=(int far *) farmalloc(4096*sizeof(int));
GrayToDec=(int far *) farmalloc(4096*sizeof(int));
for (i=0; i<4096; i++) st[i][12]=0;
e=1;
for (digit=0;digit<12;digit++) {
for (i=0;i<4096/(e*4);i++)
for (index=0;index<4;index++)
for (k=0;k<e;k++)
st[i*e*4+index*e+k][digit]=arr[index];
e*=2;
}
for (i=0; i<2048; i++) st[i][11]='0';
for (i=2048; i<4096; i++) st[i][11]='1';

```

```

for (i=0;i<4096;i++)
*(DecToGray+i)=Bintodec(st[i]);
for (i=0; i<4096; i++) {
k=0;
while (i==(DecToGray+k) && k<4096) k++;
*(GrayToDec+i)=k;
}
}
void Init1800() { unsigned char cId1, cId2 ;
cId1 = inportb(Base+30); /* get the pcl-1800 ID code */
cId2 = inportb(Base+30);
if(((cId1 = 0) || (cId2 = 0x18)) && ((cId1 = 0x18) || (cId2 = 0))) {
printf("PCL-1800 initial failure\n");
printf("Please set base address to
exit(1);
}
}
float ReadVoltage(int Channel){
unsigned int wChannel, wGainCode, wData;
unsigned char cId1, cId2 ;
float fFullScale, fVoltage ;
wGainCode = 0 ;
wGainCode = 0x08 ;
fFullScale = 20 ;
outportb(Base+9,0xa4); /* set to software trigger */
outportb(Base+21,0); /* set to normal mode */
outportb(Base+22,0); /* not to generate any interrupt */
outportb(Base+23,0); /* disable dual DMA */
outportb(Base+24,0); /* base frequency to 1 mHz */
outportb(Base+30,0); /* reset FIFO */
outportb(Base,0); /* Software trigger */
switch(Channel){
case one:{
outportb(Base+1,wGainCode); /* setting the gain */
outportb(Base+2, 0x00); /* set start/stop channel*/
break;}
case two:{
outportb(Base+1,wGainCode); /* setting the gain */
outportb(Base+2, 0x11); /* set start/stop channel*/
break;}
case three:{
outportb(Base+1,wGainCode); /* setting the gain */
outportb(Base+2, 0x22); /* set start/stop channel*/
break;}
}
do{ } while ((inportb(Base+8) & 0x80) = 0) ; /* check A/D EOC */
wData = inport(Base); /* get A/D data */
fVoltage = fFullScale / 0xffff * ((int)(wData >> 4) - 0x800) ;
switch(Channel){
case one: return (fFullScale / 0xffff * ((int)(wData >> 4) - 0x800));
case two: return (fFullScale / 0xffff * ((int)(wData >> 4) - 0x800));
case three: return (fFullScale / 0xffff * ((int)(wData >> 4) - 0x800));
}
return(fFullScale / 0xffff * ((int)(wData >> 4) - 0x800));
}
float strain(){
float first;

```

```

first=ReadVoltage(one) - 0.0703 + 0.00745;
gotoxy(1,22);
printf("Gerilim Ölçerin Çıkış Gerilimi = %f V ", first);
return first;
}
float outservo(){
float t;
t=ReadVoltage(two);
gotoxy(1,23);
printf("Uygulanan Gerilimi Ölçmek = %f V ", t);
return t;
}
float takome(){
float t;
t=ReadVoltage(three)0.00786;
gotoxy(1,25);
printf("Takometrede Oluşan Gerilim = %f V ", t);
return t;
}
void SendData(float Data)
{
float Vout;
int MSB, LSB;
Vout=Data*409.6;
MSB=(Vout/16);
LSB=(Vout-16*MSB);
outportb(Base+4,LSB);
outportb(Base+5,MSB);
}
float ReadDegree()
{
int base0,base1;
int a,b;
base0=(inportb(Base+3));
base1=(inportb(Base+11));
b=(base1-240)*256+base0;
return GrayToDec[b]*0.087890625;
}
void main()
{
unsigned int wchannel1,wchannel2;
float error,outfile,radi,l,errorr,errors;
float derece, voltage, outvoltage;
float refe,enco,farkt;
float xkp[15]={0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
float Adx[15]={0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
float yk=0;
float out,outcir;
float excitavolt,strv,outs,tako,outstr;
int i,j;
double k;
double T=0.00125;
int FINISH=0;
char tus;
FILE *out1,*out2,*out3,*out4,*out5,*out6,*out7,*out8;
clock_t bir,iki,start,end;
float Cc[15]= {

```

```

-0.00781552047131, 0.37275917115769, 0.03006439496062, 0.50341199937668,
0.08626264429183, 0.18476884786570, 0.11789809323827, 0.06479885291544,
0.03798370924450, 0.02506871779434, 0.01812076290369, 0.01282550334163,
0.01390105457521, 0.00208981270841, 0.00023281352905
};
float Bd[15]= {
0.00137377178693,
0.00012399217669,
0.00000743129166,
0.00000016677552,
0.00000000299221,
0.0000000002236,
0.00000000000007,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000
};
float xk[15]={0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
float Dc=0.00317474883653;
float Ad[15][15]=
{
0.95687161616109,-0.19565569655861,-0.02548802359253,-0.03829715668250,
-0.00809197529932,-0.00178529489133,-0.00053735137812,-0.00023184715355,
-0.00013843083023,-0.00010833438899,-0.00010360546725,-0.00010698373052,
-0.00017612561470,-0.00002987211862,-0.00000624388341,
0.17584278872730, 0.98241047689790,-0.00224806231082,-0.00344550390595,
-0.00072913388718,-0.00016095108472,-0.00004845993090,-0.00002091393104,
-0.00001248968408,-0.00000977569459,-0.00000934994900,-0.00000965553308,
-0.00001589648565,-0.00000269615930,-0.00000056355262,
0.01587099861608, 0.17814784329533, 0.99986682138438,-0.00020617226099,
-0.00004366327638,-0.00000964090513,-0.00000290319663,-0.00000125309411,
-0.00000074841336,-0.00000058582622,-0.00000056034164,-0.00000057867640,
-0.00000095273167,-0.00000016159037,-0.00000003377571,
0.00047560266616, 0.00800457436278, 0.08959703201898, 0.99999537742737,
-0.00000097941862,-0.00000021629106,-0.0000006513868,-0.0000002811763,
-0.00000001679429,-0.00000001314642,-0.00000001257492,-0.00000001298666,
-0.00000002138151,-0.00000000362646,-0.00000000075801,
0.00001067363352, 0.00023935153848, 0.00401402699867, 0.08959991711654,
0.9999998243352,-0.00000000387972,-0.00000000116850,-0.00000000050442,
-0.00000000030129,-0.00000000023586,-0.00000000022561,-0.00000000023300,
-0.00000000038362,-0.0000000006506,-0.00000000001360,
0.00000009575080, 0.00000268231493, 0.00005994319992, 0.00200703938090,
0.04479999986876, 0.99999999997101,-0.0000000000873,-0.00000000000377,
-0.0000000000225,-0.0000000000176,-0.0000000000169,-0.0000000000174,
-0.0000000000287,-0.0000000000049,-0.0000000000010,
0.00000000035777, 0.00000001202081, 0.00000033568287, 0.00001498589669,
0.00050175999958, 0.02239999999991, 0.9999999999997,-0.00000000000001,
-0.00000000000001,-0.00000000000001,-0.00000000000001,-0.00000000000001,
-0.00000000000001,-0.00000000000000,-0.00000000000000,
0.00000000000057, 0.00000000002244, 0.00000000075193, 0.00000004196051,
0.00000187323733, 0.00012544000000, 0.01120000000000, 1.00000000000000,
-0.00000000000000,-0.00000000000000,-0.00000000000000,-0.00000000000000,

```

```

-0.000000000000000,-0.000000000000000,-0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000002, 0.000000000000070, 0.00000000004700,
0.00000000262253, 0.00000023415467, 0.00003136000000, 0.005600000000000,
1.000000000000000,-0.000000000000000,-0.000000000000000,-0.000000000000000,
-0.000000000000000,-0.000000000000000,-0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000002,
0.000000000000147, 0.00000000016391, 0.00000002926933, 0.00000784000000,
0.002800000000000, 1.000000000000000,-0.000000000000000,-0.000000000000000,
-0.000000000000000,-0.000000000000000,-0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000005, 0.00000000001024, 0.00000000365867,
0.000001960000000, 0.001400000000000, 1.000000000000000,-0.000000000000000,
-0.000000000000000,-0.000000000000000,-0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000064,
0.00000000045733, 0.000000490000000, 0.000700000000000, 1.000000000000000,
-0.000000000000000,-0.000000000000000,-0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000,
0.000000000000002, 0.00000000002858, 0.00000006125000, 0.00017500000000,
1.000000000000000,-0.000000000000000,-0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000179, 0.00000000765625,
0.00008750000000, 1.000000000000000,-0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000,
0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000003,
0.00000000047852, 0.00001093750000, 1.000000000000000 };
clrscr();
printf("1.kol icin reference derecesini giriniz: ");
scanf("%f",&refe);
init(); /* initialize the GrayToDec & DecToGray arrays */
Init1800(); /* initialize the DAC */
if ((out1=fopen("C:\\SKEWAPP\\FULL\\CALCUL.DAT","w+"))==NULL)
printf("Dosya olusturmada hata olustu" );
if ((out2=fopen("C:\\SKEWAPP\\FULL\\ERROR.DAT","w+"))==NULL)
printf("Dosya olusturmada hata olustu" );
if ((out3=fopen("C:\\SKEWAPP\\FULL\\POSITION.DAT","w+"))==NULL)
printf("Dosya olusturmada hata olustu" );
if ((out4=fopen("C:\\SKEWAPP\\FULLREF.DAT","w+"))==NULL)
printf("Dosya olusturmada hata olustu" );
if ((out5=fopen("C:\\SKEWAPP\\FULL\\APPLY.DAT","w+"))==NULL)
printf("Dosya olusturmada hata olustu" );
if ((out6=fopen("C:\\SKEWAPP\\FULL\\STRAIN.DAT","w+"))==NULL)
printf("Dosya olusturmada hata olustu" );
if ((out7=fopen("C:\\SKEWAPP\\FULL\\TAKO.DAT","w+"))==NULL)
printf("Dosya olusturmada hata olustu" );
if ((out8=fopen("C:\\SKEWAPP\\FULL\\TIME.DAT","w+"))==NULL)
printf("Dosya olusturmada hata olustu" );
derece=0;
clrscr();
bir=clock();
k=0;
do {
start=clock();
derece=ReadDegree(); /* Pozisyon */

```

```

gotoxy(1,1); printf(" ");
gotoxy(1,2); printf(" Kolun pozisyonu = %f o",derece );
error=(refe-derece)*3.1416/180;
gotoxy(1,3); printf("Kolun pozisyon hatasi = %f\n ",error*180/3.1416);
yk=0;
printf("\n");
for (i=0;i<15;i++)
{
yk=yk+Cc[i]*xk[i];
}
yk=yk+Dc*error;
out=5-(yk*1.002+0.065);
gotoxy(1,4);
printf(" Kontrolorun Hesapladigi Akim : %f\n ",yk*1.002);
SendData(out);
for (i=0;i<15;i++)
{
for (j=0;j<15;j++)
{
Adx[i]=Adx[i]+Ad[i][j]*xk[j]; /* xk = x(k) */
}
xkp[i]=Adx[i]+Bd[i]*error; /* xkp = x(k+1) */ }
printf("Durumlar: ");
for (i=0;i<15;i++)
{
Adx[i]=0;
xk[i]=xkp[i];
printf("\n %f",xk[i]);
}
outstr=strain(); /* 1. channel*/
outs=outservo()+0.0087550827;
tako=takome();
fprintf (out1,"%3.9f \n",yk/1.001893939);
fprintf (out2,"%3.9f \n",error*180/3.1416);
fprintf (out3,"%3.9f \n",derece);
fprintf (out4,"%3.9f \n",refe);
fprintf (out5,"%3.9f \n",-outs);
fprintf (out6,"%3.9f \n",outstr*5031.446541);
fprintf (out7,"%3.9f \n",tako*7.479982507);
k=k+1;
end=clock();
delay((double)T-(end-start)/CLK_TCK);
if (kbhit() {
tus=getch();
switch(toupper(tus)) {
case 27 : FINISH=1;
}
}
} while(FINISH);
fclose(out1);
fclose(out2);
fclose(out3);
fclose(out4);
fclose(out5);
fclose(out6);
fclose(out7);
iki=clock();

```

```
farkt=(iki-bir)/CLK_TCK;
gotoxy(1,27);
printf("Geçen Süre=%f saniye \n",farkt);
fprintf(out8,"%3.9f \n",farkt);
fclose(out8);
gotoxy(1,28);
printf("İslem Adedi=%f ",k);
gotoxy(1,29);
printf("İslem Frekansı%f ",1/(farkt/k));
gotoxy(1,30);
printf("İslem Periodu=%f ",(farkt/k));
farfree(DecToGray);
farfree(GrayToDec);
}
//end of the program
```

EK-8 : Durum uzayı yaklaşımı kullanılarak, \mathcal{H}_∞ optimal kontrolörü veren program tek girdili tek çıktılı sistem için

```

sisoric_exp.m
clear all
[G1,G2,G3]=nominal_plant;
nG1=G1*tf([1 0],[1 0.001]);
newG1=minreal(nG1);
Wu=18.750*tf([1 1],[1 25]);
Wd=0.001*eye(1,1);
we1=185.5*tf([0 1],[1 1e-3])*tf([0 1],[1 1e-3]);
We=we1;
P=newG1;
G=[zeros(1,1) zeros(1,1) Wu ; -(We*Wd), We, -(We*P) ;-Wd eye(1,1) -P];
[a,b,c,d]=ssdata(G);
root_flex4=pck(a,b,c,d);
nmeas=1;
nu=1;
gmn=0.05;
gmx=80000;
tol=0.1;
[k,clp,gammainf]=hinsyn(root_flex4,nmeas,nu,gmn,gmx,tol);
[ak,bk,ck,dk]=unpck(k);
hatK=tf(ss(ak,bk,ck,dk));
[P1,P2,P3]=nominal_plant;
P=P1;
[Ac,Bc,Cc,Dc]=ssdata(hatK);
[am,bm,cm,dm,aug,svh]=balmr(Ac,Bc,Cc,Dc,2,1e-2);
Kl=tf(ss(am,bm,cm,dm));
t=[0:0.01:15];
u=(10*pi/180)*ones(1,length(t));
S=inv((1+K*P1));
cls1=1-S;
cls2=P2*K*S;
cls3=P3*K*S;
clsu=K*S;
figure [mag,phase,w]=bode(K,1e-5,1e+5);
phase=rem(phase,180);
subplot(2,1,1)
loglog(w,mag(:,:))
title('K kontrolörünün frekans yaniti ')
ylabel('Genlik')
subplot(2,1,2)
semilogx(w,phase(:,:))
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
figure [mag,phase,w]=bode(Kl,1e-5,1e+5);
phase=rem(phase,180);
subplot(2,1,1)
loglog(w,mag(:,:))
title('Kl kontrolörünün frekans yaniti ')
ylabel('Genlik')
subplot(2,1,2)
semilogx(w,phase(:,:))
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
figure [mag,phase,w]=bode(Wu,1e-5,1e+5);

```

```

phase=rem(phase,180);
subplot(2,1,1)
loglog(w,mag(:,:))
title('Wu agiriginin frekans yaniti ')
ylabel('Genlik')
subplot(2,1,2)
semilogx(w,phase(:,:))
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
figure
[mag,phase,w]=bode(We,1e-5,1e+5);
phase=rem(phase,180);
subplot(2,1,1)
loglog(w,mag(:,:))
title('We agiriginin frekans yaniti ')
ylabel('Genlik')
subplot(2,1,2)
semilogx(w,phase(:,:))
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
ref=input('referans acisi: ')
t=[0:0.01:15];
u=(ref*pi/180)*ones(1,length(t));
[y,tt]=lsim(1-S,u,t);
deg=y*180/pi;
plot(tt,deg);
title('Referans acisi ° olan kolun pozisyon ciktisi')
ylabel('Pozisyon (o)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
figure
[ty,tt]=lsim(cls2,u,t);
plot(tt,ty);
title('Referans acisi ° olan kolun takometre ciktisi')
ylabel('Takometre (rad/Sn)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
figure,
[tp,tt]=lsim(cls3,u,t);
plot(tt,100*tp);
title('Referans acisi ° olan kolun orta noktada bukulme miktari ')
ylabel('Orta Noktadaki Bukulme (cm^-1)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
figure,
[tu,tt]=lsim(clsu,u,t);
plot(tt,tu);
title('Referans acisi ° olan kolun motor uclarina uygulanan akim ')
ylabel('Uygulanan Akim (A)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
[Ad,Bd]=c2d(Ac,Bc,...)
[Ad1,Bd1]=c2d(am1,bm1,...)

```

EK-9: Durum uzayı yaklaşımı kullanılarak, \mathcal{H}_∞ optimal kontrolörü veren program tek girdili çok çıktılı sistem için rictez55.m

```

clear all
[A,B,C,D]=rotm;
[Aor,Bor,Cor,Dor]=nominal_plant;
Wu=1.0*tf([1 1],[0.1 1]);
Wd=0.001*eye(3,3);
we1=175.150*tf([0 1],[1 1e-3])*tf([0 1],[1 1e-3]);
we2=1.05*tf([100 24],[100 1]);
we3=1.815*tf([100 50],[100 1]);
We=[we1 0 0 ; 0 we2 0 ; 0 0 we3];
P=tf(ss(A,B,C,D));
G=[zeros(1,3) zeros(1,3) Wu ; -(We*Wd), We, -(We*P) ; -Wd eye(3,3) -P];
[a,b,c,d]=ssdata(G);
root_flex4=pck(a,b,c,d);
nmeas=3;
nu=1;
gmn=0.5;
gmx=2510;
tol=0.1;
[k,clp,gammainf]=hinfyn(root_flex4,nmeas,nu,gmn,gmx,tol);
[ak,bk,ck,dk]=unpck(k);
hatK=tf(ss(ak,bk,ck,dk));
[Ac,Bc,Cc,Dc]=ssdata(hatK);
figure
[mag,phase,w]=bode(hatK(1),1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(w,mag(:,:));
ylabel('Genlik')
title('K1 kontrolörünün frekans yaniti ')
subplot(2,1,2)
phase1=rem(phase(:,:),180);
semilogx(w,phase1(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90])
grid
figure
[mag2,phase2,w2]=bode(hatK(2),1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(w2,mag2(:,:));
ylabel('Genlik')
subplot(2,1,2)
title('K2 kontrolörünün frekans yaniti ')
phase21=rem(phase2(:,:),180);
semilogx(w2,phase21(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90 135 180])
grid
figure
[mag3,phase3,w3]=bode(hatK(3),1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(w3,mag3(:,:));
ylabel('Genlik')
title('K3 kontrolörünün frekans yaniti ')

```



```

subplot(2,1,2)
phase31=rem(phase3(:,:),180);
semilogx(w3,phase31(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90])
grid
figure
[mage1,phasee1,fe1]=bode(we1,1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(fe1,mage1(:,:));
ylabel('Genlik')
subplot(2,1,2)
title('We1 agirliginin frekans yaniti ')
phasee11=rem(phasee1(:,:),180);
semilogx(fe1,phasee11(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90])
grid
figure
[mage2,phasee2,fe2]=bode(we2,1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(fe2,mage2(:,:));
ylabel('Genlik')
title('We2 agirliginin frekans yaniti ')
subplot(2,1,2)
phaseee1=rem(phasee2(:,:),180);
semilogx(fe2,phaseee1(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-30 -20 -10 0 10 30])
grid
figure
[mage3,phasee3,fe3]=bode(we3,1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(fe3,mage3(:,:));
ylabel('Genlik')
title('We3 agirliginin frekans yaniti ')
subplot(2,1,2)
phaseee1=rem(phasee3(:,:),180);
semilogx(fe3,phaseee1(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-30 -20 -10 0 10 20])
grid
figure
[magu,phaseu,fu]=bode(Wu,1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(fu,magu(:,:));
ylabel('Genlik')
title('Wu agirliginin frekans yaniti ')
subplot(2,1,2)
phaseu1=rem(phaseu(:,:),180);
semilogx(fu,phaseu1(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')

```

```

set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90])
grid
K1=hatK(1);
K2=hatK(2);
K3=hatK(3);
Por=tf(ss(Aor,Bor,Cor,Dor));
S=inv(1+hatK*Por);
cls=Por*S*hatK;
clsu=S*K1;
ref=input('referans acisi: ');
t=[0:0.01:15];
u=(ref*pi/180)*ones(1,length(t));
figure
[y,t]=lsim(cls(1,1),u,t);
degrey=y*180/pi;
plot(t,degrey)
title('Referans acisi ° olan kolun pozisyon ciktisi')
ylabel('Pozisyon (°)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
figure
lsim(cls(2,1),u,t)
title('Referans acisi ° olan kolun takometre ciktisi')
ylabel('Takometre (rad/Sn)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
figure
lsim(cls(3,1),u,t)
title('Referans acisi ° olan kolun orta noktada bukulme miktarı ')
ylabel('Orta Noktadaki Bukulme (cm-1)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
figure
lsim(clsu,u,t)
title('Referans acisi ° olan kolun motor uclarina uygulanan akim ')
ylabel('Uygulanan Akim (A)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
[am,bm,cm,dm]=balmr(Ac,Bc,Cc,Dc,1,20);
[am1,bm1,cm1,dm1]=balmr(Ac,Bc,Cc,Dc,1,10);
nK=tf(ss(am,bm,cm,dm))
nK1=tf(ss(am1,bm1,cm1,dm1))
figure
[mag,phase,w]=bode(nK(1),1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(w,mag(:,:));
ylabel('Genlik')
title('K1 kontrolörünün frekans yaniti ')
subplot(2,1,2)
phase1=rem(phase(:,:),180);
semilogx(w,phase1(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90])
grid
figure
[mag2,phase2,w2]=bode(nK(2),1e-5,1e+5);

```

```

subplot(2,1,1)
loglog(w2,mag2(:,:));
ylabel('Genlik')
subplot(2,1,2)
title('K2 kontrolörünün frekans yaniti ')
phase21=rem(phase2(:,:),180);
semilogx(w2,phase21(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90 135 180])
grid
figure
[mag3,phase3,w3]=bode(nK(3),1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(w3,mag3(:,:));
ylabel('Genlik')
title('K3 kontrolörünün frekans yaniti ')
subplot(2,1,2)
phase31=rem(phase3(:,:),180);
semilogx(w3,phase31(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90])
grid
figure
[mag,phase,w]=bode(nK1(1),1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(w,mag(:,:));
ylabel('Genlik')
title('K1 kontrolörünün frekans yaniti ')
subplot(2,1,2)
phase1=rem(phase(:,:),180);
semilogx(w,phase1(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90])
grid
figure
[mag2,phase2,w2]=bode(nK1(2),1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(w2,mag2(:,:));
ylabel('Genlik')
subplot(2,1,2)
title('K2 kontrolörünün frekans yaniti ')
phase21=rem(phase2(:,:),180);
semilogx(w2,phase21(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90 135 180])
grid
figure
[mag3,phase3,w3]=bode(nK1(3),1e-5,1e+5);
subplot(2,1,1)
loglog(w3,mag3(:,:));
ylabel('Genlik')
title('K3 kontrolörünün frekans yaniti ')
subplot(2,1,2)

```

```

phase31=rem(phase3(:,:),180);
semilogx(w3,phase31(:,:));
ylabel('Faz')
xlabel('\omega (Hz)')
set(gca,'YTick',[-180 -135 -90 -45 0 45 90])
grid
S=inv(1+nK*Por);
cls=Por*S*nK;
clsu=S*nK(1);
ref=input('referans acisi: ');
t=[0:0.01:15];
u=(ref*pi/180)*ones(1,length(t));
figure
[y,t]=lsim(cls(1,1),u,t);
degrey=y*180/pi;
plot(t,degrey)
title('Referans acisi ° olan kolun pozisyon ciktisi')
ylabel('Pozisyon (°)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
figure
lsim(cls(2,1),u,t)
title('Referans acisi ° olan kolun takometre ciktisi')
ylabel('Takometre (rad/Sn)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
figure
lsim(cls(3,1),u,t)
title('Referans acisi ° olan kolun orta noktada bukulme miktari ')
ylabel('Orta Noktadaki Bukulme (cm^-1)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
figure
lsim(clsu,u,t)
title('Referans acisi ° olan kolun motor uclarina uygulanan akim ')
ylabel('Uygulanan Akim (A)')
xlabel('Sure (Sn)')
grid
[Ac1,Bc1,Cc1,Dc1]=ssdata(nK);
[am1,bm1,cm1,dm1]=c2d(Ac1,Bc1,...);
[Ac2,Bc2,Cc2,Dc2]=ssdata(nK1);
[am2,bm2,cm2,dm2]=c2d(Ac2,Bc2,...);

```

rotm.m

```

function [A,B,C,D,mod]=rotm;
E=62.1e+9;
L=0.898;
rho=0.2960762426;
m=0.2710800473;
d=0.0015;
La=1.940625e-11;
Lh=0.0010118;
Bm=0.00033;
Ka=0.35;
GF=2.12;
damp=1e-2;

```

```

k=input('mod sayisini giriniz ...');
mod=k;
s=1;
x=0;
while s<=mod;
f=1+cos(x)*cosh(x)+(m/rho)*(x/L)*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));
x=x+0.5;
f1=1+cos(x)*cosh(x)+(m/rho)*(x/L)*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));
while (f*f1>0)
f=1+cos(x)*cosh(x)+(m/rho)*(x/L)*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));
x=x+0.5;
f1=1+cos(x)*cosh(x)+(m/rho)*(x/L)*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));
end
xe=x;
x(s,1)=xe;
s=s+1; end
for i=1:mod;
f=1+cos(x0(i))*cosh(x0(i))+(m/rho)*(x0(i)/L)* ...
(sinh(x0(i))*cos(x0(i))-cosh(x0(i))*sin(x0(i)));
df=sinh(x0(i))*cos(x0(i))-cosh(x0(i))*sin(x0(i))+ ...
(m/rho)*(1/L)*(sinh(x0(i))*cos(x0(i))-cosh(x0(i))*sin(x0(i)))- ...
2*(m/rho)*(x0(i)/L)*(sinh(x0(i))*sin(x0(i)));
zp(i,1)=x0(i)-f/df;
z(i)=x0(i);
while(abs(zp(i,1)-z(i)))>1e-12
z(i)=zp(i,1);
f=1+cos(z(i))*cosh(z(i))+(m/rho)*(z(i)/L)* ...
(sinh(z(i))*cos(z(i))-cosh(z(i))*sin(z(i)));
df=sinh(z(i))*cos(z(i))-cosh(z(i))*sin(z(i))+ ...
(m/rho)*(1/L)*(sinh(z(i))*cos(z(i))-cosh(z(i))*sin(z(i)))- ...
2*(m/rho)*(z(i)/L)*(sinh(z(i))*sin(z(i)));
zp(i,1)=z(i)-f/df;
end
end
beta=zp/L;
for i=1:1:k;
for j=1:1:k;
x=beta(i)*L;
y=beta(j)*L;
Ti=(cos(x)+cosh(x))/(sin(x)+sinh(x));
tj=(cos(y)+cosh(y))/(sin(y)+sinh(y));
if i==j
A(i,j)=L+(1/beta(i))*(((1-(Ti)^2)/4)*sin(2*x)+((1+(Ti)^2)/4)*sinh(2*x)...
+((Ti)^2-1)*cos(x)*sinh(x)-((Ti)^2+1)*cosh(x)*sin(x)...
+(2*Ti)*sin(x)*sinh(x)+Ti/2*cos(2*x)-Ti/2*cosh(2*x));
else
A(i,j)=-(m/rho)*(cosh(x)-cos(x)-Ti*(sinh(x)-sin(x)))*...
(cosh(y)-cos(y)-tj*(sinh(y)-sin(y)));
end end end
for i=1:1:k;
x=beta(i)*L;
Ti=(cos(x)+cosh(x))/(sin(x)+sinh(x));
omega_kare(i)=(beta(i)^4)*(E*I_a/rho);
a(i)=2*((x*(1+cos(x)*cosh(x))-(sin(x)+sinh(x)))/(beta(i)^2*(sin(x)+sinh(x))));
c(i)=2*beta(i)^2;
C(i)=(beta(i)^2*(cosh(x/2)+cos(x/2)-Ti*(sinh(x/2)+sin(x/2))));
end

```

```

Delta_kare=diag(omega_kare)-(E*I.a/I.h)*inv(A)*a.'*c;
B=inv(A)*a./I.h;
[v,d]=eig(Delta_kare);
M=v;
Ohm_kare=diag(inv(M)*Delta_kare*M);
Ohm_kare=diag(Ohm_kare);
k=(E*I.a/I.h)*c*M;
Cc=C*M;
T=inv(M)*B;
damp=damp*eye(mod);
A=[0 1 zeros(1,mod) zeros(1,mod); ...
0 -B.m/I.h k zeros(1,mod);...
zeros(mod,1) zeros(mod,1) zeros(mod,mod) eye(mod);...
zeros(mod,1) zeros(mod,1) -Ohm_kare -2*damp*sqrt(Ohm_kare)];
B=[0;K.a/I.h;zeros(mod,1);T*K.a];
C1=[1 0 zeros(1,mod) zeros(1,mod)];
C2=[0 1 zeros(1,mod) zeros(1,mod)];
C3=[0 0 Cc zeros(1,mod)];
D=[0];
C=[C1;C2;C3];
G1=tf(ss(A,B,C1,D));
G2=tf(ss(A,B,C2,D));
G3=tf(ss(A,B,C3,D));
G=[G1;G2;G3];
G1=minreal(tf(ss(A,B,C1,D))*tf([1 0],[1 0.001]));
[nG1,dG1]=tfdata(G1,'v');
newG1=tf(nG1,dG1);
newG2=G2;
newG3=G3;
G=[newG1;newG2;newG3];
[A,B,C,D]=ssdata(G);

```

EK-10 : Cebirsel Riccati denklemlerinin çözümü ile SIMO sistem için tasarlanan kontrolör ile deneysel düzeneği kontrol etmek için yazılan C programı

```

/* TEK EKLEMI KOL ICIN SIMO KONTROLOR */
#include<stdio.h>
#include<dos.h>
#include<conio.h>
#include<ctype.h>
#include<stdlib.h>
#include<alloc.h>
#include<time.h>
#if defined(_MSC_VER) | defined(_QC)
#include <graph.h>
#define outportb(port,data) outp(port,data)
#define inportb(port) inp(port)
#define inport(port) inpw(port)
#define gotoxy( col, row) _settextposition(row,col)
#define clrscr() _clearscreen(_GCLEARSCREEN)
#define cursor_off() _displaycursor(_GCURSOROFF)
#define cursor_on() _displaycursor(_GCURSORON)
#else
#define cursor_off() _setcursortype(_NOCURSOR)
#define cursor_on() _setcursortype(_NORMALCURSOR)
#define one 0
#define two 1
#define three 2
#define four 3
#define five 4
#endif
float first;
unsigned int Base = 0x300;
int far *DecToGray;
int far *GrayToDec;
char far st[4096][13];
int Bintodec (char *s)
{
int res, i, e;
res=0; e=1;
for (i=0;i<12;i++) {
if(s[i]=='1') res+=e;
e*=2;
}
return res;
}
void init()
{
int digit, index, i, k, e;
char arr[4]={'0','1','1','0'};
DecToGray=(int far *) farmalloc(4096*sizeof(int));
GrayToDec=(int far *) farmalloc(4096*sizeof(int));
for (i=0; i<4096; i++) st[i][12]=0;
e=1;
for (digit=0;digit<12;digit++) {
for (i=0;i<4096/(e*4);i++)
for (index=0;index<4;index++)
for (k=0;k<e;k++)

```

```

st[i*e*4+index*e+k][digit]=arr[index];
e*=2;
}
for (i=0; i<2048; i++) st[i][11]='0';
for (i=2048; i<4096; i++) st[i][11]='1';
for (i=0; i<4096; i++)
*(DecToGray+i)=Bintodec(st[i]);
for (i=0; i<4096; i++) {
k=0;
while (i*(DecToGray+k) && k<4096) k++;
*(GrayToDec+i)=k;
}
}
void Init1800()
{
unsigned char cId1, cId2 ;
cId1 = inportb(Base+30); /* get the pcl-1800 ID code */
cId2 = inportb(Base+30);
if(((cId1 = 0) || (cId2 = 0x18)) && ((cId1 = 0x18) || (cId2 = 0))) {
printf("PCL-1800 initial failure \n");
printf("Please set base address to
exit(1);
}
}
float ReadVoltage(int Channel){
unsigned int wChannel, wGainCode, wData;
unsigned char cId1, cId2 ;
float fFullScale, fVoltage ;
outportb(Base+9,0xa4); /* set to software trigger */
outportb(Base+21,0); /* set to normal mode */
outportb(Base+22,0); /* not to generate any interrupt */
outportb(Base+23,0); /* disable dual DMA */
outportb(Base+24,0); /* base frequency to 1 mHz */
outportb(Base+30,0); /* reset FIFO */
outportb(Base,0); /* Software trigger */
switch(Channel){
case one:{
wGainCode = 0x03 ;
fFullScale = 1.25 ;
outportb(Base+1,wGainCode); /* setting the gain */
outportb(Base+2, 0x00); /* set start/stop channel*/
break;}
case two:{
wGainCode = 0x08 ;
fFullScale = 20 ;
outportb(Base+1,wGainCode); /* setting the gain */
outportb(Base+2, 0x11); /* set start/stop channel*/
break;}
case three:{
wGainCode = 0x01 ;
fFullScale = 5 ;
outportb(Base+1,wGainCode); /* setting the gain */
outportb(Base+2, 0x22); /* set start/stop channel*/
break;} }
do{ } while ((inportb(Base+8) & 0x80) = 0) ; /* check A/D EOC */
wData = inport(Base); /* get A/D data */
fVoltage = fFullScale / 0xff * ((int)(wData >> 4) - 0x800) ;

```

```

switch(Channel){
case one: return (fFullScale / 0xff * ((int)(wData >> 4) - 0x800));
case two: return (fFullScale / 0xff * ((int)(wData >> 4) - 0x800));
case three: return (fFullScale / 0xff * ((int)(wData >> 4) - 0x800));
}
return(fFullScale / 0xff * ((int)(wData >> 4) - 0x800));
}
float strain(){
float first;
first=ReadVoltage(one)-0.0558-0.004;
gotoxy(1,23);
printf("Gerilme Ölçerin Çıkış Gerilimi = %f V ", first);
return first;
}
float outservo(){
float t;
t=ReadVoltage(two);
gotoxy(1,22);
printf("Uygulanan Gerilimi Ölçmek = %f V ", t);
return t;
}
float takome(){ float t;
t=ReadVoltage(three)0.0141;
gotoxy(1,24);
printf("Takometrede Olusan Gerilim = %f V ", t);
return t;
}
void SendData(float Data)
{
float Vout;
int MSB, LSB;
Vout=Data*409.6;
MSB=(Vout/16);
LSB=(Vout-16*MSB);
outportb(Base+4,LSB);
outportb(Base+5,MSB);
}
float ReadDegree()
{
int base0,base1;
int a,b;
base0=(inportb(Base+3)); base1=(inportb(Base+11));
b=(base1-240)*256+base0;
return GrayToDec[b]*0.087890625;
}
void main()
{
unsigned int wchannel1,wchannel2;
float error,outfile,radi,l,errorr,errors;
float derece, voltage, outvoltage;
float refe,enco,farkt;
float xkp[23] = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
float xkpt[23] = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
float xkps[23] = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
float Adx[23] = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
float Adxt[23] = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
float Adxs[23] = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
}

```

```

float yk=0;
float y1=0;
float out,outcir;
float T=0.003;
float excitavolt,strv,outs,tako,outstr;
int i,j;
double k;
int FINISH=0;
char tus;
FILE *out1,*out2,*out3,*out4,*out5,*out6,*out7,*out8,*out9;
clock_t bir,iki,fark,start,end;
float Cc[20]=
{
1.85001112521951, 0.23194435514701, 0.95876369439146, 0.10774712821541,
0.19289553709824, 0.07577773077984, 0.12226885001075, 0.12688989289092,
0.34806620780028, 0.78949214383940, 0.54405370847178, 0.17030376642186,
0.05463040994788, 0.02907647025925, 0.00071537771705,-0.00816161848834,
-0.00408883430996,-0.00077459952832,-0.00013104248112,-0.00001674982615
};
float Ccs[20]=
{
0.000031839443820528, 0.000004029589773545, 0.000032967911444484,
0.000007373961814742, 0.000026415995189291, 0.000020430495200394,
0.000032771458208784, 0.000016840520583361, 0.000022454327697226,
0.000050398985768170, 0.000003280501533563, 0.000008010181540089,
0.000002373496002910, 0.000003039048601195,-0.000000196912324835,
-0.000000293612054517, 0.000000113282224704, 0.000000064013558245,
0.000000051542811058,-0.000000148169542761 };
float Cct[20]=
{-0.000065833507525891,-0.000008037463662938,-0.000068171501353930,
-0.000014824271132808,-0.000054665755755359,-0.000041336346698425,
-0.000068167786489792,-0.000033808779218276,-0.000047094147330836,
-0.000099439074976822,-0.000009044511941612,-0.000003626022108770,
-0.000001081426908165,-0.000001096829159387, 0.000000239979788481,
0.000000180574959291,-0.00000008687212145,-0.000000014889121081,
-0.000000034442538437, 0.000000184160063030 };
float Bd[20]= {
0.01630774626035,
0.00487970757911,
0.00095332206935,
0.00013862895919,
0.00000803500044,
0.00000019367213,
0.00000000199833,
0.00000000000901,
0.00000000000002,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000,
0.00000000000000
}

```


0.52184788033122, 0.91425371287797,-0.01571903401598,-0.00883582472726,
-0.00190194456170,-0.00140566903886,-0.00069496951122,-0.00096223817779,
-0.00081807467952,-0.00067393206370,-0.00082913935354,-0.00006629739499,
-0.00002309196778,-0.00000041365350, 0.00000078581015, 0.00000025092978,
0.00000006133216,-0.00000002932507, 0.00000002315722, 0.00000066789141,
0.15615064253164, 0.55940467705861, 0.99701560762105,-0.00171686626223,
-0.00036813589694,-0.00027376763062,-0.00013518502591,-0.00018773768871,
-0.00015972003460,-0.00013159925122,-0.00016198194255,-0.0001295194332,
-0.00000451135084,-0.00000008081418, 0.00000015351933, 0.00000004902278,
0.00000001198214,-0.00000000572908, 0.00000000452405, 0.00000013048233,
0.03050630621910, 0.16348791071702, 0.57557342067294, 0.99975113538003,
-0.00005323869686,-0.00003973761244,-0.00001960777114,-0.00002727877574,
-0.00002321713843,-0.00001913130223,-0.0000235466421,-0.00000188341009,
-0.00000065602563,-0.00000001175181, 0.00000002232426, 0.00000000712873,
0.00000000174240,-0.00000000083310, 0.00000000065787, 0.00000001897431,
0.00221806334708, 0.01578663381065, 0.08291955811165, 0.28798560606031,
0.99999692552585,-0.00000230042799,-0.00000113454561,-0.00000158027000,
-0.00000134533826,-0.00000110865132,-0.00000136523123,-0.00000010916262,
-0.00000003802355,-0.00000000068114, 0.00000000129392, 0.00000000041318,
0.00000000010099,-0.0000000004829, 0.00000000003813, 0.00000000109976,
0.00006428000348, 0.00056997623440, 0.00398072770013, 0.02073565357331,
0.14399992608705, 0.99999994459910,-0.00000002731353,-0.00000003807607,
-0.00000003242165,-0.00000002671888,-0.00000003290679,-0.0000000263120,
-0.00000000091650,-0.0000000001642, 0.00000000003119, 0.00000000000996,
0.00000000000243,-0.00000000000116, 0.00000000000092, 0.00000000002651,
0.00000077468850, 0.00000822132576, 0.00007165762440, 0.00049766042953,
0.00518399923885, 0.07199999942874, 0.9999999971843,-0.00000000039276,
-0.00000000033448,-0.00000000027566,-0.00000000033953,-0.00000000002715,
-0.00000000000946,-0.00000000000017, 0.00000000000032, 0.00000000000010,
0.00000000000003,-0.00000000000001, 0.00000000000001, 0.00000000000027,
0.00000000399665, 0.00000004937929, 0.00000051595114, 0.00000447895991,
0.00006220799657, 0.00129599999742, 0.03599999999873, 0.9999999999823,
-0.00000000000151,-0.00000000000124,-0.00000000000153,-0.00000000000012,
-0.00000000000004,-0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000000,-0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.000000000000901, 0.00000000012706, 0.00000000154788, 0.00000001612428,
0.00000027993599, 0.00000777599999, 0.00032400000000, 0.01800000000000,
1.00000000000000,-0.00000000000000,-0.00000000000000,-0.00000000000000,
-0.00000000000000,-0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000000,-0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000001, 0.00000000000014, 0.00000000000199, 0.00000000002419,
0.00000000050388, 0.00000001749600, 0.00000097200000, 0.00008100000000,
0.00900000000000, 1.00000000000000,-0.00000000000000,-0.00000000000000,
-0.00000000000000,-0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000000,-0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000002,
0.00000000000038, 0.00000000001575, 0.00000000109350, 0.00000012150000,
0.00002025000000, 0.00450000000000, 1.00000000000000,-0.00000000000000,
-0.00000000000000,-0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000000,-0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000000, 0.00000000000001, 0.00000000000049, 0.00000000006834,
0.00000001518750, 0.00000506250000, 0.00225000000000, 1.00000000000000,
-0.00000000000000,-0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000000,-0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000,
0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000000, 0.00000000000001,


```

{
for (j=0;j<20;j++)
{
Adx[i]=Adx[i]+Ad[i][j]*xk[j]; /* xk = x(k) */
}
xkp[i]=Adx[i]+Bd[i]*error; /* xkp = x(k+1) */
}
for (i=0;i<20;i++)
{
for (j=0;j<20;j++)
{
Adxt[i]=Adxt[i]+Adt[i][j]*xkt[j]; /* xk = x(k) */
Adxs[i]=Adxs[i]+Ads[i][j]*xks[j]; /* xk = x(k) */
}
xkpt[i]=Adxt[i]+Bdt[i]*error; /* xkp = x(k+1) */
xkps[i]=Adxs[i]+Bds[i]*errors; /* xkp = x(k+1) */
}
yk=0;
y1=0;
for (i=0;i<20;i++)
{
Adx[i]=0;
xk[i]=xkp[i];
}
for (i=0;i<20;i++)
{
Adxt[i]=0;
Adxs[i]=0;
xks[i]=xkps[i];
xkt[i]=xkpt[i];
}
printf("K1 kontrolörünün durumlar:");
for (i=0;i<20;i++)
{ printf("\n %f",xk[i]);
}
for (i=0;i<20;i++)
{
y1=y1+Cct[i]*xkt[i]+Ccs[i]*xks[i]+Cc[i]*xk[i];
}
out=5-((y1)*1.002+0.01);
gotoxy(1,21);
printf(" Kontrolörün Hesapladığı Akım : %lf ",y1*1.002+0.1);
SendData(out);
fprintf (out1,"%3.3f \n",y1/1.002);
fprintf (out2,"%3.3f \n",error*180/3.1416);
fprintf (out3,"%3.3f \n",derece);
fprintf (out4,"%3.3f \n",refe);
fprintf (out5,"%3.3f \n",-outs);
fprintf (out6,"%3.3f \n",outstr*5031.446541);
fprintf (out7,"%3.3f \n",tako*7.479982507);
k=k+1;
end=clock();
delay(T-(double)(end-start)/CLOCKS_PER_SEC);
if (kbhit()) {
tus=getch();
switch(toupper(tus)) {
case 27 : FINISH=1;

```

```
    } } }  
while(FINISH);  
fclose(out1);  
fclose(out2);  
fclose(out3);  
fclose(out4);  
fclose(out5);  
fclose(out6);  
fclose(out7);  
iki=clock();  
farkt=(iki-bir)/CLOCKS_PER_SEC;  
gotoxy(1,25);  
printf("Süre=%f saniye \n",farkt);  
fprintf (out8,"%f \n",farkt);  
fclose(out8);  
gotoxy(1,30);  
printf("Sayı%f ",k);  
fprintf (out9,"%f \n",1/(farkt/k));  
fclose(out9);  
farfree(DecToGray);  
farfree(GrayToDec);  
}  
//end of the program
```