

**HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK
MANİFOLDLAR**

Yüksek Lisans Tezi

Sevgi Enveş ERMİŞ

Eskişehir 2019

HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK MANİFOLDLAR

Sevgi Enveş ERMİş

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. şenay BULUT

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Mayıs 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Sevgi Enveş ERMİŞ'in "Hemen Hemen Kontak B-Metrik Manifoldlar" başlıklı tezi 15/05/2019 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Ünvanı-Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Şenay BULUT	
Üye	: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ	
Üye	: Prof. Dr. Cumali EKİCİ	

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK MANİFOLDLAR

Sevgi Enveş ERMİŞ

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Mayıs 2019

Danışman: Doç. Dr. Şenay BULUT

Bu tezde hemen hemen kontak B –metrik manifoldların sınıflandırılması incelenmiştir. İlk olarak hemen hemen kontak manifoldlar, hemen hemen kontak B –metrik manifoldlar ve Sasaki-like hemen hemen kontak B –metrik manifoldlar ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler ele alınmıştır. Sasaki-like hemen hemen kontak B –metrik manifoldların $\mathcal{D}$ –homotetik deformasyonunun yine Sasaki-like hemen hemen kontak B –metrik manifoldlar olduğu gösterilmiştir. İki hemen hemen kontak B –metrik manifoldun çarpımlarının verilen kompleks yapı ve verilen B –metrik ile hemen hemen kompleks B –metrik manifold olduğu ispatlanmıştır. Hemen hemen kontak B –metrik manifoldların sınıflandırılmaları yapılmış ve bazı örnekleri incelenmiştir. Sasaki-like hemen hemen kontak B –metrik manifoldların hangi sınıfa düştüğü belirlenmiştir. Belli sınıf içerisindeki hemen hemen kontak B –metrik manifoldların $\mathcal{D}$ –homotetik deformasyonunun da aynı sınıf içerisinde kaldığı gösterilmiştir.

Orijinal olan tezin son bölümünde ise 5–boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde hemen hemen kontak B –metrik yapıları çalışılmış ve bu B –metrik yapısıyla 5–boyutlu nilpotent Lie cebirlerinin hangi sınıfa düştüğü araştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Hemen hemen kompleks B –metrik manifold, hemen hemen kontak manifold, hemen hemen kontak B –metrik manifold, hemen hemen kontak B –metrik yapısı ile 5–boyutlu nilpotent Lie cebirleri.

ABSTRACT

ALMOST CONTACT B-METRIC MANIFOLDS

Sevgi Enveş ERMiş

Department of Mathematics

Programme in Geometry

Anadolu University, Graduate School of Sciences, May ,2019

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. şenay BULUT

In this thesis, the classification of almost contact B –metric manifolds are examined. Firstly, some basic definitions and theorems regarding almost contact manifolds, almost contact B –metric manifolds, and Sasaki-like almost contact B –metric manifolds are given. It is shown that $\mathcal{D}$ –homothetic deformation of Sasaki-like almost contact B –metric manifolds is also Sasaki-like almost contact B –metric manifold. It is proved that the product of two almost contact B –metric manifolds with given a complex structure and a B –metric is a almost complex B –metric manifold. The classification of almost contact B –metric manifolds is done and some examples of these are investigated. It is determined which class of Sasaki-like almost contact B –metric manifolds fall into. $\mathcal{D}$ –homothetic deformation of almost contact B –metric manifolds within certain class is shown to be within the same class.

In the last part of the thesis which is original, the contact B –metric structures are studied on 5–dimensional nilpotent Lie algebras. It is investigated which class of 5–dimensional nilpotent Lie algebras with the B –metric structure fall into.

Keywords: Almost complex B –metric manifold, almost contact manifold, almost contact B –metric manifold, 5–dimensional nilpotent Lie algebras with the almost contact B –metric structure.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başladığım ilk andan itibaren her konuda yardımını esirgemeyen, özverisiyle bilgisini her daim aktaran danışman hocam Doç. Dr. Şenay BULUT'a, bütün eğitim hayatım boyunca beni maddi manevi destekleyen anneme, babama ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen eşime en içten teşekkürlerimi sunarım.

Sevgi Enveş ERMİŞ

Mayıs 2019

15/05/2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Sevgi Enveş ERMİŞ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar	4
2.2 Hemen Hemen Kontak Manifoldlar	7
2.3 Bir Lie Grubun Lie Cebiri	11
3. HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK MANİFOLDLAR	16
3.1 φ Yapısının Kovaryant Türevlerinin Uzayı	33
3.2 Hemen Hemen Kontak B-Metrik Manifoldların Örnekleri	58
4. 5-BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİNİN SINIFLANDIRILMASI.....	86
5. SONUÇ.....	97
KAYNAKÇA.....	98
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Cismi
V	: Reel Vektör Uzayı
M	: Manifold
$\chi(M)$	: M Manifoldu Üzerindeki Vektör Alanları
$T_p M$	: $p \in M$ noktasındaki Tanjant Uzayı
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	: M den $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
g	: Metrik Tensör Alanı
J	: Kompleks Yapı
N	: Nijenhuis Tensörü
$[,]$	: Lie Braket Operatörü
∇	: g metriğinin Levi-Civita Konneksiyonu
$\mathcal{F}$	: $(0, 3)$ tipindeki Tensör Alanlarının Kümesi
$\langle , \rangle$	: İç Çarpım
$\mathfrak{g}$	: Lie Cebiri
G	: Lie Grup
$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$	: Hemen Hemen Kontak B-metrik Manifold

1. GİRİŞ

Günümüzde hemen hemen kontak manifoldlar matematikte ve fizikte yaygın olarak çalışılmaktadır. Hemen hemen kontak manifold kavramı ilk olarak Gray [15] tarafından tanımlanmıştır. Bu manifoldların tanjant demedinin yapı grubu $U(n) \times 1$ dir. Literatürde hemen hemen kontak manifoldların "Sasakian, normal, quasi Sasakian" gibi bazı sınıfları incelenmiştir. Belli koşulu sağlayan g Riemann metriği ile donatılan hemen hemen kontak manifoldlar tanımlanmış ve bu manifoldlar hemen hemen kontak metrik manifoldlar olarak adlandırılmıştır. Chinea ve Gonzales bu manifoldları temel formun kovaryant türevi yardımıyla elde edilen $(0, 3)$ tipindeki tensörün dekompozisyonu yardımıyla 12 temel sınıfa ayırmıştır. Daha sonra hemen hemen kontak manifoldlar üzerinde belli koşulu sağlayan $(n + 1, n)$ tipinde g yarı-Riemann metriği tanımlanarak hemen hemen kontak B -metrik manifoldlar Ganchev, Mihova ve Gribachev tarafından inşa edilmiş ve 11 temel sınıfa ayrılmıştır [1]. S. Ivanov, H. Manev ve M. Manev, Sasaki-like hemen hemen kontak B -metrik manifoldları incelemişlerdir.

Hemen hemen kontak metrik manifoldların $\mathcal{D}$ -homotetik deformasyonu kavramı ilk olarak Tanno tarafından tanımlanmıştır [16]. Benzer şekilde literatürde hemen hemen kontak B -metrik manifoldların $\mathcal{D}$ -homotetik deformasyonları çalışılmaktadır [17]. Özel olarak Sasaki-like hemen hemen kontak B -metrik manifoldun $\mathcal{D}$ -homotetik deformasyonunun yine Sasaki-like hemen hemen kontak B -metrik manifold olduğu gösterilmiştir.

M , hemen hemen kontak B -metrik manifold ise $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu incelenmiş ve bu çarpım manifoldunun da sınıflaması yapılmıştır [19]. M_1 ve M_2 iki hemen hemen kontak metrik manifoldlar olmak üzere M_1 ve M_2 üzerindeki hemen hemen kontak metrik yapılarının belirlediği $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldunun hemen hemen kompleks yapıya sahip olduğu gösterilmiştir [18]. Ayrıca $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde hemen hemen hermityen yapılar çalışılmıştır.

G , $(2n + 1)$ -boyutlu bağlantılı bir Lie grubu ise G Lie grubu sol invariant hemen hemen kontak metrik yapıya sahiptir ve karşılık gelen $\mathfrak{g}$ Lie cebri üzerinde hemen hemen kontak metrik yapı mevcuttur [20]. Ayrıca literatürde bu yapıların bazı sınıfları ve özellikleri çalışılmıştır. 5-boyutlu nilpotent Lie cebirlerinin sınıflandırılması Dixmier tarafından yapılmıştır ve 9 sınıfa ayrılmıştır [12]. Ayrıca bu cebirlerin farklı boyutlardaki sınıflandırılması çalışılmıştır [14].

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına son bölüm sonuç kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde iki M_1 ve M_2 hemen hemen kontak B –metrik manifoldlarının çarpımı olan $M \times M_2$ çarpım manifoldu üzerinde J kompleks yapısı ve g Norden metriği tanımlanmış ve bu yapılarla çarpım manifoldunun kompleks B –metrik manifold olduğu gösterilmiştir. [1] de verilen hemen hemen kontak B –metrik manifoldların sınıflandırılması incelenmiş ve bazı örnekler verilmiştir. Sasaki-like hemen hemen kontak B –metrik manifoldların sınıfı belirlenmiştir. Tezin son bölümünde Dixmier’in nilpotent Lie cebirleri için verdiği sınıflandırmayı kullanarak 5–boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde hemen hemen kontak B –metrik yapısı tanımlanmıştır. Hemen hemen kontak B –metrik manifoldlar için yapılan sınıflandırmaya göre verilen B –metrik yapısıyla 5–boyutlu nilpotent Lie cebirlerinin hangi sınıfa girdiği belirlenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Diferansiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif tanımlı, simetrik ve 2-lineer g metriği varsa (M, g) ye bir Riemann manifoldu denir.

Tanım 2.0.2. g Riemann metriğinde pozitif tanımlılık aksiyomu yerine non-dejener aksiyomu alınırsa (M, g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir.

Tanım 2.0.3. M diferansiyellenebilir bir manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned} \nabla & : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) & \longmapsto \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

bilineer dönüşümü

- 1) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
- 2) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$ (Leibnitz koşulu)

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde tanımlı bir afın konneksiyonu veya kovaryant türev denir.

Tanım 2.0.4. (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde tanımlı bir afın konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü

$$i) [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \text{ (Sıfır torsiyon özelliği)} \quad (2.1)$$

$$ii) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \text{ (Metrik Uyumluluk Koşulu)} \quad (2.2)$$

koşullarını sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu denir. Ayrıca, bu kovaryant türev

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_V W, X \rangle &= V \langle W, X \rangle + W \langle X, V \rangle - X \langle V, W \rangle \\ &\quad - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklindeki Koszul formülüyle tek türlü belirlidir.

2.1. Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar

Tanım 2.1.1. M bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir J , $(1,1)$ tensör alanı

$$J : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyorsa J dönüşümüne bir hemen hemen kompleks yapı denir. Bu yapı ile M manifoldu hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır ve (M, J) ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. M Riemann manifoldu üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı verilsin. Eğer

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

koşulu sağlanıyorsa (M, J, g) üçlüsüne hemen hemen kompleks metrik manifold denir.

Tanım 2.1.3. M yarı-Riemann manifoldu üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı verilsin. Eğer

$$g(JX, JY) = -g(X, Y)$$

koşulu sağlanıyorsa (M, J, g) üçlüsüne hemen hemen kompleks B -metrik manifold denir.

Örnek 2.1.4. $\mathbb{R}^{2n} = \{(u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n) \mid u^i, v^i \in \mathbb{R}\}$ manifoldunun

$$J : \chi(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \chi(\mathbb{R}^{2n})$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \longmapsto \frac{\partial}{\partial v^i}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \longmapsto -\frac{\partial}{\partial u^i}$$

ile tanımlanan J yapısı ile hemen hemen kompleks manifold olduğunu gösterelim.

$\lambda_i, \mu_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $X = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right)$ olmak üzere

$$J(X) = J \left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \mu_i \frac{\partial}{\partial u^i} \right)$$

dir. Kompleks yapı olması için $J^2 = -I$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} J^2(X) &= J(J(X)) = J \left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \mu_i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i J \left(\frac{\partial}{\partial v^i} \right) - \mu_i J \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\lambda_i \frac{\partial}{\partial u^i} - \mu_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \\ &= -X \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(\mathbb{R}^{2n}, J)$ hemen hemen kompleks manifolddur.

Şimdi $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde $g(X, X) = \sum_{i=1}^n (-\lambda_i^2 + \mu_i^2)$ ile tanımlanan g metriğini aldığımızda $(\mathbb{R}^{2n}, J, g)$ nin hemen hemen kompleks B-metrik manifold olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} g(JX, JX) &= g \left(\sum_{i=1}^n \left(-\mu_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right), \sum_{j=1}^n \left(-\mu_j \frac{\partial}{\partial u^j} + \lambda_j \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\mu_i \mu_j g \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) - \mu_i \lambda_j g \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right) \\ &\quad - \lambda_i \mu_j g \left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) + \lambda_i \lambda_j g \left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \end{aligned}$$

dir. Burada $i \neq j$ iken;

$$g \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = g \left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) = g \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) = 0$$

dir.

$i = j$ iken;

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) = -1 \quad , \quad g\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^i}\right) = 1$$

olur. O halde,

$$g(JX, JX)$$

$$\begin{aligned} &= g\left(\sum_{i=1}^n \left(-\mu_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial v^i}\right), \sum_{j=1}^n \left(-\mu_j \frac{\partial}{\partial u^j} + \lambda_j \frac{\partial}{\partial v^j}\right)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left[\mu_i \mu_j g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) - \mu_i \lambda_j g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) - \lambda_i \mu_j g\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) + \lambda_i \lambda_j g\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\mu_i^2 g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) + \lambda_i^2 g\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^i}\right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (-\mu_i^2 + \lambda_i^2) \\ &= -g(X, X) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $(\mathbb{R}^{2n}, J, g)$ hemen hemen kompleks B -metrik manifolddur.

Tanım 2.1.5. $X, Y \in \chi(M)$, $f \in C^\infty(M)$ olmak üzere X ve Y vektör alanlarının Lie braketi

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.6. M hemen hemen kompleks manifoldu için Nijenhuis tensörü her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_J : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

olmak üzere,

$$N_J(X, Y) := J^2([X, Y]) + [J(X), J(Y)] - J[J(X), Y] - J[X, J(Y)]$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.7. (M, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. Bu durumda J nin bir kompleks yapı olması için gerek ve yeter koşul $N_J = 0$ olmasıdır.

2.2. Hemen Hemen Kontak Manifoldlar

Tanım 2.2.1. M diferensiyellenebilir manifold,

$$\varphi : \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \quad ; \quad (1, 1) \text{ tensör}$$

$$\eta : \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad ; \quad (0, 1) \text{ tensör yani } 1 - \text{form}$$

$$\xi : \chi^*(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad ; \quad (1, 0) \text{ tensör yani vektör alanı}$$

olmak üzere

$$\text{i) } \eta(\xi) = 1 \tag{2.4}$$

$$\text{ii) } \varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \tag{2.5}$$

koşullarını sağlıyorsa (M, φ, η, ξ) dörtlüsüne hemen hemen kontak manifold denir.

(2.5) de X yerine ξ yazarsak $\varphi^2(\xi) = 0$ elde edilir. $\varphi(\xi) = 0$ eşitliğini olmayana ergi yöntemiyle ispatlayalım. $\varphi(\xi) \neq 0$ olsun. $\varphi^2(\xi) = 0$ ifadesinde ξ yerine $\varphi(\xi)$ alınırsa

$$\varphi(\varphi^2(\xi)) = \varphi^2(\varphi(\xi)) = -\varphi(\xi) + \eta(\varphi(\xi))\xi = 0$$

elde edilir. Buradan $\varphi(\xi) = \eta(\varphi(\xi))\xi$ dir. Burada $\eta(\varphi(\xi)) = 0$ veya $\eta(\varphi(\xi)) \neq 0$ olmak üzere iki durum ortaya çıkar.

i) $\eta(\varphi(\xi)) = 0$ ise $\varphi(\xi) = 0$ olup çelişki elde edilir.

ii) $\eta(\varphi(\xi)) \neq 0$ olduğunda $\varphi(\xi) = \eta(\varphi(\xi))\xi$ eşitliğine φ yi uygularsak

$$\varphi^2(\xi) = \eta(\varphi(\xi))\varphi(\xi)$$

olur. Burada $\varphi^2(\xi) = 0$ ve $\eta(\varphi(\xi)) \neq 0$ olduğundan $\varphi(\xi) = 0$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak

$$\varphi(\xi) = 0 \tag{2.6}$$

olmalıdır.

(2.5) de X yerine $\varphi(\xi)$ yazarsak

$$\varphi^2(\varphi(X)) = -\varphi(X) + \eta(\varphi(X))\xi \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi^3(X) &= \varphi(\varphi^2(X)) \\ &= \varphi(-X + \eta(X)\xi) \\ &= -\varphi(X) + \eta(X)\varphi(\xi) \end{aligned}$$

$\varphi(\xi) = 0$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\varphi^3(X) = -\varphi(X) \quad (2.8)$$

elde edilir. (2.7) ve (2.8) den $\eta(\varphi(X))\xi = 0$ elde edilir. $\xi \neq 0$ olduğundan

$$\eta \circ \varphi = 0 \quad (2.9)$$

elde edilir.

Tanım 2.2.2. (M, φ, η, ξ) hemen hemen kontak manifold olsun. M üzerinde g Riemann metriği var öyle ki

$$\begin{aligned} i) \quad &g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \\ ii) \quad &\eta(X) = g(X, \xi) \end{aligned}$$

koşullarını sağlıyorsa $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine hemen hemen kontak metrik manifold denir.

i) koşulundan dolayı

$$\begin{aligned} g(X, \varphi Y) &= g(\varphi X, \varphi^2 Y) \\ &= g(\varphi X, -Y + \eta(Y)\xi) \\ &= -g(\varphi X, Y) + \eta(Y)g(\varphi X, \xi) \\ &= -g(\varphi X, Y) + \eta(Y)\eta(\varphi X) \\ &= -g(\varphi X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.3. M hemen hemen kontak manifoldu için Nijenhuis tensörü her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_\varphi: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

olmak üzere

$$N_\varphi(X, Y) := \varphi^2([X, Y]) + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.4. M , $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen kontak manifold olsun. Bu durumda $M \times \mathbb{R}$ üzerinde,

$$\chi(M \times \mathbb{R}) = \left\{ \left(X, f \frac{d}{dt} \right) \mid X \in \chi(M), f \frac{d}{dt} \in \chi(\mathbb{R}) \right\}$$

olmak üzere

$$J: \chi(M \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M \times \mathbb{R})$$

$$\left(X, f \frac{d}{dt} \right) \longmapsto J \left(X, f \frac{d}{dt} \right) := \left(\varphi(X) - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlanırsa $J^2 = -I$ koşulu sağlanır. Bu durumda J , $M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerinde bir kompleks yapı olur. Şimdi $J^2 = -I$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} J^2 \left(X, f \frac{d}{dt} \right) &= J \left(J \left(X, f \frac{d}{dt} \right) \right) \\ &= J \left(\varphi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right) \\ &= \left(\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi) \frac{d}{dt} \right) \\ &= \left(\varphi^2 X - f\varphi(\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X) \frac{d}{dt} - f\eta(\xi) \frac{d}{dt} \right) \end{aligned}$$

(2.4), (2.5), (2.6), (2.9) eşitliklerinden

$$J^2 \left(X, f \frac{d}{dt} \right) = \left(-X + \eta(X)\xi - \eta(X)\xi, -f \frac{d}{dt} \right) = - \left(X, f \frac{d}{dt} \right)$$

dir. O halde J , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir kompleks yapıdır. Ayrıca J dönüşümünün

$C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineer olduğu kolaylıkla görölür. O halde $(M \times \mathbb{R}, J)$, $(2n + 2)$ -boyutlu hemen hemen kompleks manifolddur.

Tanım 2.2.5. $(M \times \mathbb{R}, J)$ hemen hemen kompleks manifoldu için Nijenhuis tensörü

$$N : \chi(M \times \mathbb{R}) \times \chi(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow \chi(M \times \mathbb{R})$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} N \left(\left(X, f \frac{d}{dt} \right), \left(Y, g \frac{d}{dt} \right) \right) = \\ J^2 \left(\left[\left(X, f \frac{d}{dt} \right), \left(Y, g \frac{d}{dt} \right) \right] \right) + \left[J \left(X, f \frac{d}{dt} \right), J \left(Y, g \frac{d}{dt} \right) \right] \\ - J \left[J \left(X, f \frac{d}{dt} \right), \left(Y, g \frac{d}{dt} \right) \right] - J \left[\left(X, f \frac{d}{dt} \right), J \left(Y, g \frac{d}{dt} \right) \right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.6. M^{2n+1} , hemen hemen kontak manifold olsun. $M \times \mathbb{R}$ üzerinde Lie braket operatörü,

$$[\cdot, \cdot] : \chi(M \times \mathbb{R}) \times \chi(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow \chi(M \times \mathbb{R})$$

$$\left(\left(X, f \frac{d}{dt} \right), \left(Y, g \frac{d}{dt} \right) \right) \longmapsto \left([X, Y], (X(g) - Y(f)) \frac{d}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlanır.

$M \subset \bar{M}$, yarı-Riemann alt manifoldu olsun. M nin Levi-Civita konneksiyonu ∇ ve $\bar{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu $\bar{\nabla}$ olsun. $T_p \bar{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp$ olarak yazabiliriz. $p \in M$, $x \in T_p \bar{M}$, olmak üzere $x = \text{teğ } x + \text{nor } x$ şeklinde yazabiliriz. Burada $\text{teğ } x \in T_p M$, ve $\text{nor } x \in T_p M^\perp$ dir. $X \in \bar{\chi}(M)$, $\text{teğ } X \in \chi(M)$, $\text{nor } X \in \chi(M)^\perp$ olmak üzere

$$X = \text{teğ } X + \text{nor } X$$

şekinde yazabiliriz.

M nin Levi-Civita konneksiyonu ∇ için $\nabla_X W := \text{teğ } \bar{\nabla}_V W$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_V W &= \text{teğ } \bar{\nabla}_V W + \text{nor } \bar{\nabla}_V W \\ &= \nabla_X W + \pi(V, W)\end{aligned}$$

yazılabilir.

Tanım 2.2.7. $M^k \subset \mathbb{R}^n$, her $p \in M$ için $\mathbb{R}^n$ de p nin U komşuluğu vardır.

$X : U \longrightarrow X(U)$ fonksiyonu diferensiyellenebilir öyle ki $X(M \cap U)$, $X(U)$ ile k boyutlu düzlemin arakesitidir. O halde M ye gömülmüş alt manifold denir. Eğer $k = n - 1$ ise M^{n-1} alt manifolduna gömülmüş hiperyüzey denir [6].

2.3. Bir Lie Grubun Lie Cebiri

Tanım 2.3.1. $(G, \cdot)$ bir grup ve diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer

$$\begin{aligned}a) \quad m : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto m(g, h) = g \cdot h \\ b) \quad i : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto i(g) = g^{-1}\end{aligned}$$

şeklindeki çarpım ve inversiyon dönüşümleri diferensiyellenebilir ise G grubuna bir Lie grubu denir. Diferensiyellenebilir dönüşümler sürekli oldukları için bir Lie grup özelliikle bir topolojik gruptur.

Önerme 2.3.2. $(G, \cdot)$ bir grup ve diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$\begin{aligned}G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h^{-1}\end{aligned}$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise G bir Lie gruptur.

Örnek 2.3.3. (Lie Grubu Örnekleri)

Aşağıdaki her bir manifold belirtilen grup işlemine göre bir Lie gruptur.

(a) $GL(n, \mathbb{R})$ genel lineer grup, reel girdili $n \times n$ tipinde terslenebilir matrisler kümesi matris çarpım işlemi altında bir gruptur ve $M(n, \mathbb{R})$ vektör uzayının açık bir alt manifoldudur. Bir AB matris çarpımının matris girdileri A ve B girdilerinde polinom olduğu için çarpma türevlenebilir. A^{-1} in girdilerini A nın girdilerinin rasyonel fonksiyonları olarak tanımlandığı için tersi de türevlenebilir.

(b) $GL(n, \mathbb{C})$ kompleks lineer grup yani matris çarpımı altında $n \times n$ tipindeki terslenebilir kompleks matrislerin grubudur. $M(n, \mathbb{C})$ nin açık bir alt manifoldudur ve böylece bir $2n^2$ boyutlu bir diferensiyellenebilir manifolddur. Aynı zamanda matris çarpımı ve tersleri, matris girdilerinin imajiner ve reel kısımlarının türevlenebilir fonksiyonları oldukları için bir Lie gruptur.

(c) Eğer V keyfi bir reel veya kompleks vektör uzayı ise, $GL(V)$ ile V den kendisine terslenebilir lineer dönüşümlerin kümesini gösterelim. $GL(V)$ bileşke işlemi altında gruptur. Eğer V sonlu boyutlu ise V nin herhangi bir tabanı $GL(V)$ ile $GL(n, \mathbb{R})$ veya $GL(n, \mathbb{C})$ nin $n = \text{boy}V$ olacak şekilde bir izomorfizmini tanımlar, dolayısıyla $GL(V)$ bir Lie gruptur. Herhangi iki izomorfizmin arasındaki geçiş dönüşümü $A \mapsto BAB^{-1}$ formunda bir dönüşüm ile verilmiştir ve diferansiyellenebilirdir. (B matrisi iki taban arasındaki geçiş matrisidir.) Böylece $GL(V)$ üzerinde diferensiyellenebilir manifold yapısı taban seçiminden bağımsızdır.

(d) $x - y$ koordinatları (x, y) nin türevlenebilir fonksiyonları olduğundan, $\mathbb{R}$ cismi ve $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı toplam altında Lie gruptur.

(e) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ reel çarpım işlemi altında 1-boyutlu bir Lie gruptur. (Aslında tanımlayacak olursak girdileri reel sayılar olan 1×1 tipindeki matris kümesi olan $GL(1, \mathbb{R})$ dir.) $\mathbb{R}^+$ bir açık alt gruptur ve böylece kendisi 1-boyutlu Lie gruptur.

(f) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ kompleks çarpım işlemi altında 2-boyutlu bir Lie gruptur ki bu $GL(1, \mathbb{C})$ ile tanımlanabilir.

(g) $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ çemberi bir diferensiyellenebilir manifold ve kompleks çarpım işlemi altında bir gruptur. S^1 in açık alt kümeleri üzerindeki lokal koordinatlar olan uygun açı fonksiyonları ile çarpma ve ters çevirme $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_1 + \theta_2$ ve $\theta \mapsto \theta^{-1}$ türevlenebilir koordinat tanımlarına sahiptir, böylece S^1 çemberi bir Lie gruptur.

Tanım 2.3.4. Herhangi $a \in G$ olmak üzere

$$L_a(x) = ax, \quad R_a(x) = xa$$

şeklinde tanımlanan dönüşümler sırasıyla sol öteleme dönüşümü ve sağ öteleme dönüşümü olarak adlandırılır. $l_a(x) = (a, x)$ ve m çarpım dönüşümü olmak üzere

$$L_a : G \xrightarrow{l_a} G \times G \xrightarrow{m} G$$

diferensiyellenebilir dönüşümlerinin birleşimi olarak yazılabileceğinden L_a diferen-

siyellenebilir.

$L_{a^{-1}}$ diferensiyellenebilir dönüşümü L_a dönüşümünün tersi olduğundan L_a diffeomorfizmdir. Benzer şekilde, $R_a : G \rightarrow G$ dönüşümü de bir diffeomorfizmdir.

Tanım 2.3.5. G bir Lie grup ve X , G üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer her $a, a' \in G$ için

$$(L_a)_* X_{a'} = X_{aa'}$$

oluyorsa X vektör alanına sol invariant vektör alanı denir.

L_a bir diffeomorfizm olduğundan, bu her $a \in G$ için $(L_a)_* X = X$ olarak kısaltılabilir. Çünkü

$$(L_a)_* (c_1 X + c_2 Y) = c_1 (L_a)_* X + c_2 (L_a)_* Y$$

olduğundan G üzerindeki tüm düzgün sol invariant vektör alanlarının kümesi, $\chi(M)$ nin bir lineer alt uzayıdır. Ayrıca Lie braket altında kapalıdır.

Önerme 2.3.6. [21] G bir Lie grup olsun. X ve Y , G üzerinde sol invariant vektör alanı ise $[X, Y]$ sol invarianttır.

Tanım 2.3.7. $\mathfrak{g}$ bir reel vektör uzayı olmak üzere $X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

dönüşümü

i) Bilineerlik: $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z], \\ [Z, aX + bY] &= a[Z, X] + b[Z, Y]. \end{aligned}$$

ii) Antisimetriklik:

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

iii) Jakobi Özdeşliği:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

koşullarını sağlıyorsa $\mathfrak{g}$ reel vektör uzayına bir Lie cebiri denir.

Örnek 2.3.8. (*Lie Cebir Örnekleri*)

a) Bir diferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde tüm diferensiyellenebilir vektör alanlarının $\chi(M)$ uzayı, Lie braket altında bir Lie cebridir.

b) G bir Lie grup ise G üzerinde diferensiyellenebilir tüm sol invariant vektör alanlarının kümesi $\chi(G)$ nin bir Lie alt cebiridir, böylece bir Lie cebirdir.

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere reel veya kompleks girdili $n \times n$ tipinde vektör uzayı

$$[A, B] = AB - BA$$

şeklindeki braket dönüşümü ile bir Lie cebiri olur. $M(n, \mathbb{K})$ nin Lie cebiri $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ ile gösterilir.

d) V bir vektör uzayı ise V den kendisine tüm lineer dönüşümlerin uzayı,

$$[A, B]x = A(Bx) - B(Ax)$$

braket dönüşümü ile bir Lie cebiridir ve $\mathfrak{gl}(V)$ ile gösterilir.

e) V keyfi bir vektör uzayı üzerinde tüm braketleri sıfır olacak şekilde tanımlanan braket dönüşümü ile bir Lie cebiri olur.

Tanım 2.3.9. Bir G Lie grubu üzerindeki tüm düzgün sol değişmez vektör alanlarının Lie cebiri, G nin Lie cebiri olarak adlandırılır ve $Lie(G)$ ile gösterilir.

Teorem 2.3.10. G bir Lie grup olsun. e , G nin birim elemanı olmak üzere

$$\begin{aligned} Lie(G) &\rightarrow T_e(G) \\ X &\mapsto X_e \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüm bir vektör uzayı izomorfizmidir.

Bu teoremden G Lie grubunun Lie cebirinin aslında G nin birimdeki tanjant uzayı olduğu sonucuna varılır [21].

G Lie grubu ve $\mathfrak{g}$, G nin Lie cebiri olsun. G üzerinde g metriği sol invariant yarı-Riemann metriği ise yani her $a, b \in G$ için

$$g_b(X_b, Y_b) = g_{ab}(X_{ab}, Y_{ab}) \quad (2.10)$$

ise g yarı-Riemann metriği $\mathfrak{g}$ üzerinde her $X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\langle X, Y \rangle := g(X, Y)$$

şeklinde metrik indirger. Tersine $\mathfrak{g} = T_e G$ üzerindeki her metrik G üzerinde bir sol invaryant yarı-Riemann metriği belirler. (G, g) nin Levi-Civita konneksiyonu sol invaryant afin konneksiyondur. Yani, $X, Y \in \mathfrak{g}$ için $\nabla_X Y \in \mathfrak{g}$ dir. G Lie grubu üzerindeki J hemen hemen kompleks yapısı her $a \in G$ için

$$dL_a \circ J = J \circ dL_a \quad (2.11)$$

koşulunu sağlıyorsa J kompleks yapısına sol invaryanttır, denir. Böylece J , $J_e : T_e G \rightarrow T_e G$ lineer kompleks yapısı ile tam olarak belirlidir. Tersine $\mathfrak{g} = T_e G$ üzerinde her lineer kompleks dönüşüm G üzerinde J sol invaryant hemen hemen kompleks yapıyı belirler. $\mathfrak{g}$ üzerindeki N Nijenhuis tensörü integrallenebilir ise yani $N = 0$ ise G üzerindeki N Nijenhuis tensörü integrallenebilirdir.

Tanım 2.3.11. $\mathfrak{g}$ bir Lie cebiri olsun.

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] \supseteq \mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2] \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}] \supseteq \dots$$

zincirine $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin alt merkez serisi denir.

Tanım 2.3.12. $\mathfrak{g}^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $\mathfrak{g}$ Lie cebirine nilpotent lie cebiri denir.

Tanım 2.3.13. G bağlantılı bir Lie grubu olsun. G Lie grubunun Lie cebiri $Lie(G) = \mathfrak{g}$ nilpotent ise G Lie grubuna nilpotent denir.

3. HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK MANİFOLDLAR

Tanım 3.0.1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen kontak manifold olsun. M üzerinde g yarı-Riemann metriği var öyle ki

$$i) \quad g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (3.1)$$

$$ii) \quad g(X, \xi) = \eta(X) \quad (3.2)$$

koşulları sağlanıyorsa M ye hemen hemen kontak B -metrik manifold denir.

(3.1) ve Tanım 2.2.1 den dolayı $\varphi(\xi) = 0$, $\eta \circ \varphi = 0$ olduğu kolaylıkla görülür.

(3.1) koşulundan

$$g(X, \varphi Y) = g(\varphi X, Y) \quad (3.3)$$

elde edilir.

Örnek 3.0.2. $\mathbb{R}^{2n+1} = \{(u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n, t) \mid u^i, v^i, t \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \eta = dt$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial u^i}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$$

olsun.

$$X = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) + v \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{için} \quad g(X, X) = \sum_{i=1}^n (-\lambda_i^2 + \mu_i^2) + v^2$$

olmak üzere $(\mathbb{R}^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ nin hemen hemen kontak B -metrik manifold olduğunu gösterelim. Şimdi (2.4) ve (2.5) eşitliklerinin sağlandığını gösterelim.

$$\eta(\xi) = dt\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} \varphi^2(X) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) + \mu_i \varphi\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) \right) + v \varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \mu_i \frac{\partial}{\partial u^i} \right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \varphi\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) - \mu_i \varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \\
&= -\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) - v \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial t} \\
&= -X + v \frac{\partial}{\partial t} \quad (\eta(X) = v \text{ olduğundan}) \\
&= -X + \eta(X)\xi
\end{aligned}$$

(3.1) eşitliğinin varlığını söylemek için

$$g(\varphi X, \varphi X) = -g(X, X) + \eta(X)\eta(X) \quad (3.4)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\varphi X = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \mu_i \frac{\partial}{\partial u^i} \right)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
g(\varphi X, \varphi X) &= g \left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \mu_i \frac{\partial}{\partial u^i} \right), \sum_{j=1}^n \left(\lambda_j \frac{\partial}{\partial v^j} - \mu_j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n g \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \mu_i \frac{\partial}{\partial u^i}, \lambda_j \frac{\partial}{\partial v^j} - \mu_j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j g \left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) - \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j g \left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^n \mu_i \lambda_j g \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j g \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i \lambda_i g \left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^i} \right) - \lambda_i \mu_i g \left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right. \\
&\quad \left. - \mu_i \lambda_i g \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^i} \right) + \mu_i \mu_i g \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 - \mu_i^2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} -g(X, X) + \eta(X)\eta(X) &= -\left(\sum_{i=1}^n (-\lambda_i^2 + \mu_i^2) + v^2\right) + v^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 - \mu_i^2) \end{aligned}$$

olup (3.4) eşitliği sağlanır. O halde $(\mathbb{R}^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B -metrik manifolddur.

Teorem 3.0.3. M^{2n+1} hemen hemen kontak manifold olsun. Hemen hemen kontak manifoldu varsa belirli bir U açığında $(2n+1)$ -boyutlu

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n), \xi\}$$

tabanı vardır.

Kanıt. $\text{Ker} \varphi = \text{Span} \{\xi\}$ olmak üzere $\chi(M) = \text{Span} \{\xi\} \oplus \text{Span} \{\xi\}^\perp$ dir. Burada $x \in \text{Span} \{\xi\}^\perp$ ise $g(x, \xi) = \eta(x)$ olup $\eta(x) = 0$ dir. O halde (2.5) den $\varphi^2(x) = -x$ elde edilir. Sonuç olarak $\varphi|_{\text{Span} \{\xi\}^\perp}$ bir hemen hemen kompleks yapıdır. Buna göre $\text{Span} \{\xi\}^\perp$ nin $\{e_1, \dots, e_n, \varphi e_1, \dots, \varphi e_n\}$ şeklinde bir ortonormal bir tabanı vardır. $\chi(M) = \text{Span} \{\xi\} \oplus \text{Span} \{\xi\}^\perp$ olduğundan $\chi(M)$ nin de $\{e_1, \dots, e_n, \varphi e_1, \dots, \varphi e_n, \xi\}$ şeklinde bir ortonormal tabanı vardır. $\square$

Tanım 3.0.4. $(M^{2n+1}, \xi, \eta, \varphi, g)$ hemen hemen kontak B -metrik manifold olsun.

$$\begin{aligned} F : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = g(\nabla_X(\varphi Y) - \varphi(\nabla_X Y), Z) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $F, (0, 3)$ tipinde tensör alanıdır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\mathbf{F1)} \quad F(X, Y, Z) = F(X, Z, Y) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{F2)} \quad F(X, \varphi Y, \varphi Z) = F(X, Y, Z) - \eta(Y)F(X, \xi, Z) - \eta(Z)F(X, Y, \xi) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{F3)} \quad F(X, \xi, \xi) = 0 \quad (3.7)$$

Şimdi (3.5), (3.6) ve (3.7) koşullarının sağlandığını görelim.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F1)} \quad F(X, Z, Y) &= g((\nabla_X \varphi)Z, Y) \\
&= g(\nabla_X(\varphi Z) - \varphi(\nabla_X Z), Y) \quad (g \text{ tensör alanı}) \\
&= g(\nabla_X(\varphi Z), Y) - g(\varphi(\nabla_X Z), Y) \quad ((3.3) \text{ den dolayı}) \\
&= g(\nabla_X(\varphi Z), Y) - g(\nabla_X Z, \varphi Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ metrik uyumluluk koşulunda Z yerine φY , Y yerine Z yazarsak, $g(\nabla_X Z, \varphi Y) = Xg(Z, \varphi Y) - g(Z, \nabla_X(\varphi Y))$ elde edilir. Y yerine φZ , Z yerine Y yazarsak, $g(\nabla_X(\varphi Z), Y) = Xg(\varphi Z, Y) - g(\varphi Z, \nabla_X Y)$ elde edilir. Bu iki eşitliği kullanırsak

$$\begin{aligned}
F(X, Z, Y) &= g(\nabla_X(\varphi Z), Y) - g(\nabla_X Z, \varphi Y) \\
&= Xg(\varphi Z, Y) - g(\varphi Z, \nabla_X Y) \\
&\quad - Xg(Z, \varphi Y) + g(Z, \nabla_X(\varphi Y)) \\
&= -g(\varphi Z, \nabla_X Y) + g(Z, \nabla_X(\varphi Y)) \\
&= -g(Z, \varphi(\nabla_X Y)) + g(Z, \nabla_X(\varphi Y)) \\
&= g(Z, -\varphi(\nabla_X Y) + \nabla_X(\varphi Y)) \\
&= g(\nabla_X(\varphi Y) - \varphi(\nabla_X Y), Z) \quad (g \text{ simetrik tensör alanı}) \\
&= g((\nabla_X \varphi)Y, Z) \\
&= F(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F2)} \quad F(X, \varphi Y, \varphi Z) &= g((\nabla_X \varphi)(\varphi Y), \varphi Z) \\
&= g(\nabla_X(\varphi(\varphi Y)) - \varphi(\nabla_X(\varphi Y)), \varphi Z) \\
&= g(\nabla_X(-Y + \eta(Y)\xi) - \varphi(\nabla_X(\varphi Y)), \varphi Z) \\
&= g(-\nabla_X Y + \nabla_X(\eta(Y)\xi) - \varphi(\nabla_X(\varphi Y)), \varphi Z) \quad (\text{Leibnitz kuralından}) \\
&= g(-\nabla_X Y + X(\eta(Y))\xi + \eta(Y)\nabla_X \xi - \varphi(\nabla_X(\varphi Y)), \varphi Z) \\
&= -g(\nabla_X Y, \varphi Z) + g(X(\eta(Y))\xi, \varphi Z) \\
&\quad + g(\eta(Y)\nabla_X \xi, \varphi Z) - g(\varphi(\nabla_X(\varphi Y)), \varphi Z)
\end{aligned}$$

(3.1), (3.2), ve (3.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
F(X, \varphi Y, \varphi Z) &= g(\nabla_X(\varphi Y) - \varphi(\nabla_X Y), Z) \\
&\quad + \eta(Y)g(\nabla_X \xi, \varphi Z) - \eta(\nabla_X(\varphi Y))\eta(Z) \\
&= F(X, Y, Z) + \eta(Y)F(X, \xi, Z) - \eta(Z)F(X, Y, \xi)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F3)} \quad F(X, \xi, \xi) &= g((\nabla_X \varphi)\xi, \xi) \\
&= g(\nabla_X(\varphi\xi) - \varphi(\nabla_X \xi), \xi) \quad ((2.6) \text{ dan}) \\
&= -g(\varphi(\nabla_X \xi), \xi) \quad ((3.2) \text{ den}) \\
&= -\eta(\varphi(\nabla_X \xi)) \quad ((2.9) \text{ dan}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır.

Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için $F(X, Y, Z) = 0$ ise M manifolduna $\mathcal{F}_0$ sınıfındandır, denir.

Örnek 3.0.5. $\mathbb{R}^{2n+1} = \{(u^1, u^2, \dots, u^n, v^1, v^2, \dots, v^n, t) \mid u^i, v^i, t \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t}, \eta = dt, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i}, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial u^i}, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$$

$$X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \mu^i \frac{\partial}{\partial v^i} + v \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{için} \quad g(X, X) = -\delta_{ij} \lambda^i \lambda^j + \delta_{ij} \mu^i \mu^j + v^2 \text{ verilsin.}$$

$Y = a^j \frac{\partial}{\partial u^j} + b^j \frac{\partial}{\partial v^j} + c \frac{\partial}{\partial t}$ olsun. g metriğine karşılık gelen $\mathbb{R}^{2n+1}$ nin Levi-Civita konneksiyonu $\nabla_X Y = \sum_i X(Y_i) \partial_i$ ile verilir. Şimdi $\nabla \varphi = 0$ olduğunu göstermek

için $(\nabla_X \varphi)Y = \nabla_X(\varphi Y) - \varphi(\nabla_X Y)$ eşitliğinden dolayı $\nabla_X(\varphi Y) = \varphi(\nabla_X Y)$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_i X(Y_i) \partial_i \\
&= \sum_{j=1}^n \left(X(a^j) \frac{\partial}{\partial u^j} + X(b^j) \frac{\partial}{\partial v^j} \right) + X(c) \frac{\partial}{\partial t} \\
\varphi(\nabla_X Y) &= \sum_{j=1}^n \left(X(a^j) \varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) + X(b^j) \varphi\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) + X(c) \varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(X(a^j) \frac{\partial}{\partial v^j} - X(b^j) \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\varphi(Y) &= \sum_{j=1}^n \left(a^j \varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) + b^j \varphi\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) \right) + c \varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(a^j \frac{\partial}{\partial v^j} - b^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right)
\end{aligned}$$

$$\nabla_X(\varphi Y) = \sum_{j=1}^n \left(X(a^j) \frac{\partial}{\partial v^j} - X(b^j) \frac{\partial}{\partial w^j} \right) \quad (3.9)$$

(3.8) ve (3.9) eşitliklerinden $\varphi(\nabla_X Y) = \nabla_X(\varphi Y)$ olup $\nabla\varphi = 0$ dır. Bu nedenle $\mathcal{F}_0$ sınıfındandır.

Tanım 3.0.6. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B -metrik manifold olsun. Eğer her $X, Y, Z \in \mathcal{C}ek\eta = H$ için

$$i) \quad F(X, Y, Z) = F(\xi, Y, Z) = F(\xi, \xi, Z) = 0 \quad (3.10)$$

$$ii) \quad F(X, Y, \xi) = -g(X, Y) \quad (3.11)$$

koşullarını sağlıyorsa M manifolduna Sasaki-like hemen hemen kontak B -metrik manifold denir.

Teorem 3.0.7. [7] $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B -metrik manifold olsun.

O halde aşağıdaki koşullar denktir:

- i) $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasaki-like hemen hemen kontak B -metrik manifolddur.
- ii) $(\nabla_X \varphi)Y = -g(X, Y)\xi - \eta(Y)X + 2\eta(X)\eta(Y)\xi$ eşitliği vardır.
- iii) N_φ Nijenhuis tensörü olmak üzere $N_\varphi = 0$ dır.

$(M_1^{2n+1}, \varphi_1, \xi_1, \eta_1, g_1)$ ve $(M_2^{2m+1}, \varphi_2, \xi_2, \eta_2, g_2)$ hemen hemen kontak B -metrik manifoldları olsun. $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} J : \quad \chi(M_1 \times M_2) &\longrightarrow \chi(M_1 \times M_2) \\ (X_1, X_2) &\longmapsto J(X_1, X_2) : = (\varphi_1 X_1 - \eta_2(X_2)\xi_1, \varphi_2 X_2 + \eta_1(X_1)\xi_2) \end{aligned}$$

tanımlansın.

$$\begin{aligned} J^2(X_1, X_2) &= J(J(X_1, X_2)) \\ &= J((\varphi_1 X_1 - \eta_2(X_2)\xi_1, \varphi_2 X_2 + \eta_1(X_1)\xi_2)) \\ &= (\varphi_1(\varphi_1 X_1 - \eta_2(X_2)\xi_1) - \eta_2(\varphi_2 X_2 + \eta_1(X_1)\xi_2)\xi_1, \\ &\quad \varphi_2(\varphi_2 X_2 + \eta_1(X_1)\xi_2) + \eta_1(\varphi_1 X_1 - \eta_2(X_2)\xi_1)\xi_2) \\ &= (\varphi_1^2 X_1 - \eta_1(X_1)\eta_2(\xi_2)\xi_1, \varphi_2^2 X_2 - \eta_2(X_2)\eta_1(\xi_1)\xi_2) \\ &= (-X_1 + \eta_1(X_1)\xi_1 - \eta_1(X_1)\xi_1, -X_2 + \eta_2(X_2)\xi_2 - \eta_2(X_2)\xi_2) \\ &= -(X_1, X_2) \end{aligned}$$

olduğundan $J^2 = -I$ dir. Yani J , $M_1 \times M_2$ üzerinde bir kompleks yapıdır.

$g = g_1 - g_2$ olarak tanımlayalım. Bu durumda g metriğinin hemen hemen kompleks B -metrik olduğunu yani

$$g(J(X_1, X_2), J(Y_1, Y_2)) = -g((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))$$

olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} & g(J(X_1, X_2), J(Y_1, Y_2)) \\ &= g((\varphi_1 X_1 - \eta_2(X_2)\xi_1, \varphi_2 X_2 + \eta_1(X_1)\xi_2), (\varphi_1 Y_1 - \eta_2(Y_2)\xi_1, \varphi_2 Y_2 + \eta_1(Y_1)\xi_2)) \\ &= g_1(\varphi_1 X_1 - \eta_2(X_2)\xi_1, \varphi_1 Y_1 - \eta_2(Y_2)\xi_1) - g_2(\varphi_2 X_2 + \eta_1(X_1)\xi_2, \varphi_2 Y_2 + \eta_1(Y_1)\xi_2) \\ &= g_1(\varphi_1 X_1, \varphi_1 Y_1) + \eta_2(X_2)\eta_2(Y_2) - g_2(\varphi_2 X_2, \varphi_2 Y_2) - \eta_1(X_1)\eta_1(Y_1) \end{aligned}$$

(3.1) den dolayı

$$\begin{aligned} & g(J(X_1, X_2), J(Y_1, Y_2)) \\ &= -g_1(X_1, Y_1) + \eta_1(X_1)\eta_1(Y_1) + \eta_2(X_2)\eta_2(Y_2) + g_2(X_2, Y_2) \\ &\quad - \eta_2(X_2)\eta_2(Y_2) - \eta_1(X_1)\eta_1(Y_1) \\ &= -(g_1 - g_2)((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) \\ &= -g((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(M_1 \times M_2, J, g = g_1 - g_2)$ hemen hemen kompleks B -metrik manifolddur.

$X \in T_p M$ ve $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = \varphi e_1, \dots, e_{2n} = \varphi e_n, \xi\}$, $T_p M$ nin bir tabanı olmak üzere F ile ilişkili 1-formlar:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= g^{ij} F(e_i, e_j, x) \\ \theta^*(x) &= g^{ij} F(e_i, \varphi e_j, x) \\ \omega(x) &= F(\xi, \xi, x) \end{aligned} \tag{3.12}$$

ile verilir.

Teorem 3.0.8. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B -metrik manifold olsun.

$t \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\tilde{\eta} = t\eta, \quad \tilde{\xi} = \frac{1}{t}\xi, \quad \tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{g} = -tg + t(t+1)\eta \otimes \eta$$

olsun. Bu durumda $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ hemen hemen kontak B metrik manifolddur [17].

Kanıt.

$$\tilde{g}(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) = -\tilde{g}(X, Y) + \tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y) \quad (3.13)$$

$$\tilde{g}(X, \tilde{\xi}) = \tilde{\eta}(X) \quad (3.14)$$

olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) &= \tilde{g}(\varphi X, \varphi Y) \\ &= -tg(\varphi X, \varphi Y) + t(t+1)\eta \otimes \eta(\varphi X, \varphi Y) \\ &= -tg(\varphi X, \varphi Y) + t(t+1)\eta(\varphi X)\eta(\varphi Y) \\ &= -t(-g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\ &= tg(X, Y) - t\eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. Ve

$$\begin{aligned} -\tilde{g}(X, Y) + \tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y) &= tg(X, Y) - t(t+1)\eta(X)\eta(Y) + t^2\eta(X)\eta(Y) \\ &= tg(X, Y) - t\eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \quad (3.16)$$

dir. (3.15) ve (3.16) den (3.13) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \tilde{g}(X, \tilde{\xi}) &= -tg(X, \tilde{\xi}) + t(t+1)\eta(X)\eta(\tilde{\xi}) \\ &= -g(X, \xi) + (t+1)\eta(X)\eta(\xi) \\ &= -g(X, \xi) + t\eta(X) + \eta(X) \\ &= t\eta(X) \\ &= \tilde{\eta}(X) \end{aligned}$$

olduğundan (3.14) eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ hemen hemen kontak B -metrik manifolddur.

□

$F(X, Y, Z) = g((\nabla_X \varphi)Y, Z)$ ise $\tilde{F}(X, Y, Z) = \tilde{g}((\nabla_X \tilde{\varphi})Y, Z)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \tilde{F}(X, Y, Z) &= tF(X, Y, Z) + \frac{t(t+1)}{2} \{d\eta(\varphi Y, Z)\eta(X) - d\eta(Y, \varphi Z)\eta(X) \\ &\quad - d\eta(X, \varphi Y)\eta(Z) - d\eta(X, \varphi Z)\eta(Y)\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $\tilde{F}$ nın (3.7), (3.10) ve (3.11) koşullarını sağladığını kontrol edelim. (3.17) ve $d\eta$ nın antisimetrik olması durumundan,

$$\begin{aligned}\tilde{F}(X, Z, Y) &= tF(X, Z, Y) + \frac{t(t+1)}{2} \{d\eta(\varphi Z, Y)\eta(X) - d\eta(Z, \varphi Y)\eta(X) \\ &\quad - d\eta(X, \varphi Z)\eta(Y) - d\eta(X, \varphi Y)\eta(Z)\} \\ &= \tilde{F}(X, Y, Z)\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\tilde{F}(X, \tilde{\varphi}Y, \tilde{\varphi}Z) &= tF(X, \varphi Y, \varphi Z) + \frac{t(t+1)}{2} \{d\eta(\varphi^2 Y, \varphi Z)\eta(X) - d\eta(\varphi Y, \varphi^2 Z)\eta(X)\} \\ &= tF(X, \varphi Y, \varphi Z) + \frac{t(t+1)}{2} \{[-d\eta(Y, \varphi Z) + \eta(Y) d\eta(\xi, \varphi Z)]\eta(X) \\ &\quad + [d\eta(\varphi Y, Z) - \eta(Z) d\eta(\varphi Y, \xi)]\eta(X)\}\end{aligned}$$

$$\tilde{\eta}(Y) \tilde{F}(X, \tilde{\xi}, Z) = \eta(Y) \left[tF(X, \xi, Z) + \frac{t(t+1)}{2} \{-d\eta(\xi, \varphi Z)\eta(X) - d\eta(X, \varphi Z)\} \right]$$

$$\tilde{\eta}(Z) \tilde{F}(X, Y, \tilde{\xi}) = \eta(Z) \left[tF(X, Y, \xi) + \frac{t(t+1)}{2} \{d\eta(\varphi Y, \xi)\eta(X) - d\eta(X, \varphi Y)\} \right]$$

taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned}&\tilde{F}(X, \tilde{\varphi}Y, \tilde{\varphi}Z) + \tilde{\eta}(Y) \tilde{F}(X, \tilde{\xi}, Z) + \tilde{\eta}(Z) \tilde{F}(X, Y, \tilde{\xi}) \\ &= tF(X, Y, Z) + \frac{t(t+1)}{2} \{d\eta(\varphi Y, Z)\eta(X) - d\eta(Y, \varphi Z)\eta(X) \\ &\quad - d\eta(X, \varphi Z)\eta(Y) - d\eta(X, \varphi Y)\eta(Z)\} \\ &= \tilde{F}(X, Y, Z)\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\tilde{F}(X, \xi, \xi) &= tF(X, \xi, \xi) + \frac{t(t+1)}{2} \{d\eta(\varphi \xi, \xi)\eta(X) - d\eta(\xi, \varphi \xi)\eta(X) \\ &\quad - d\eta(X, \varphi \xi)\eta(\xi) - d\eta(X, \varphi \xi)\eta(\xi)\}\end{aligned}$$

olup (3.11) ve (2.6) eşitliklerinden $\tilde{F}(X, \xi, \xi) = 0$ dir. O halde $\tilde{F}$ istenilen koşulları sağlar.

Teorem 3.0.9. $\tilde{\theta}(x) = -\theta(x)$, $\tilde{\theta}^*(x) = -\theta^*(x)$ ve $\tilde{\omega}(x) = \frac{1}{t}\omega(x)$ dir.

Kanıt. $e_i, e_j \in \text{Çek}\eta$ olmak üzere $\tilde{g}(e_i, e_j) = -tg(e_i, e_j)$ olduğundan $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ iken

$$\tilde{g}^{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{t} & i = j \text{ iken} \\ 0 & i \neq j \text{ iken} \end{cases}$$

ve $\tilde{g}(\varphi e_i, \varphi e_j) = -\tilde{g}(e_i, e_j) = tg(e_i, e_j)$ olduğundan $i, j \in \{n+1, \dots, 2n\}$ iken

$$\tilde{g}^{ij} = \begin{cases} \frac{1}{t} & i = j \text{ iken} \\ 0 & i \neq j \text{ iken} \end{cases}$$

olur. (3.17) den

$$\begin{aligned} \tilde{F}(e_i, e_i, x) &= tF(e_i, e_i, x) + \frac{t(t+1)}{2} \{-d\eta(e_i, \varphi e_i) \eta(x)\} \\ &= tF(e_i, e_i, x) + \frac{t(t+1)}{2} d\eta(\varphi e_i, e_i) \eta(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{\varphi} e_i, \tilde{\varphi} e_i, x) &= \tilde{F}(\varphi e_i, \varphi e_i, x) \\ &= tF(\varphi e_i, \varphi e_i, x) + \frac{t(t+1)}{2} \{-d\eta(\varphi e_i, \varphi^2 e_i) \eta(x)\} \\ &= tF(\varphi e_i, \varphi e_i, x) + \frac{t(t+1)}{2} d\eta(\varphi e_i, e_i) \eta(x) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(x) &= \tilde{g}^{ij} \tilde{F}(e_i, e_j, x) \\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, e_i, x) + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, e_i, x) \\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, e_i, x) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t} \tilde{F}(\varphi e_i, \varphi e_i, x) \\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \left[tF(e_i, e_i, x) + \frac{t(t+1)}{2} d\eta(\varphi e_i, e_i) \eta(x) \right. \\ &\quad \left. - tF(\varphi e_i, \varphi e_i, x) - \frac{t(t+1)}{2} d\eta(\varphi e_i, e_i) \eta(x) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (-F(e_i, e_i, x) + F(\varphi e_i, \varphi e_i, x)) \\ &= -\theta(x) \end{aligned}$$

dir. (3.17) den

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(e_i, \tilde{\varphi}e_i, x) &= tF(e_i, \varphi e_i, x) + \frac{t(t+1)}{2} \{-d\eta(e_i, \varphi^2 e_i) \eta(x)\} \\
&= tF(e_i, \varphi e_i, x) + \frac{t(t+1)}{2} \{d\eta(e_i, e_i) \eta(x)\} \\
&= tF(e_i, \varphi e_i, x) \\
\tilde{F}(\tilde{\varphi}e_i, e_i, x) &= tF(\varphi e_i, e_i, x) + \frac{t(t+1)}{2} \{-d\eta(\varphi e_i, \varphi e_i) \eta(x)\} \\
&= tF(\varphi e_i, e_i, x)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^*(x) &= \tilde{g}^{ij} \tilde{F}(e_i, e_j, x) \\
&= \sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, \varphi e_i, x) + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, \varphi e_i, x) \\
&= \sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, \varphi e_i, x) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{t} \tilde{F}(\varphi e_i, e_i, x) \\
&= \sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \left[\tilde{F}(e_i, \varphi e_i, x) + \tilde{F}(\varphi e_i, e_i, x) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n -F(e_i, \varphi e_i, x) - F(\varphi e_i, e_i, x) \\
&= -\theta^*(x)
\end{aligned}$$

dir. (3.17) den $\tilde{F}(\xi, \xi, x) = tF(\xi, \xi, x)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}(x) &= \tilde{F}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}, x) \\
&= \frac{1}{t^2} \tilde{F}(\xi, \xi, x) \\
&= \frac{1}{t^2} tF(\xi, \xi, x) \\
&= \frac{1}{t} F(\xi, \xi, x) = \frac{1}{t} \omega(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Şimdi $\theta(\xi)$, $\theta^*(\xi)$ nin sırasıyla $\tilde{\theta}(\tilde{\xi})$ ve $\tilde{\theta}^*(\tilde{\xi})$ ile olan ilişkilerini inceleyelim. (3.17) eşitliğinden

$$\tilde{F}(e_i, e_i, \xi) = tF(e_i, e_i, \xi) + \frac{t(t+1)}{2} \{-d\eta(e_i, \varphi e_i)\} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{\varphi} e_i, \tilde{\varphi} e_i, \xi) &= \tilde{F}(\varphi e_i, \varphi e_i, \xi) \\ &= tF(\varphi e_i, \varphi e_i, \xi) + \frac{t(t+1)}{2} \{-d\eta(\varphi e_i, \varphi^2 e_i)\} \\ &= tF(\varphi e_i, \varphi e_i, \xi) + \frac{t(t+1)}{2} d\eta(\varphi e_i, e_i) \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\tilde{\xi}) &= \tilde{g}^{ij} \tilde{F}(e_i, e_j, \tilde{\xi}) \\ &= \frac{1}{t} \tilde{g}^{ij} \tilde{F}(e_i, e_j, \xi) \\ &= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, e_i, \xi) + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, e_i, \xi) \right] \\ &= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, e_i, \xi) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t} \tilde{F}(\varphi e_i, \varphi e_i, \xi) \right] \end{aligned}$$

(3.18) ve (3.19) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\tilde{\xi}) &= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \left(tF(e_i, e_i, \xi) - \frac{t(t+1)}{2} \{d\eta(e_i, \varphi e_i)\} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t} \left(tF(\varphi e_i, \varphi e_i, \xi) + \frac{t(t+1)}{2} d\eta(\varphi e_i, e_i) \right) \right] \\ &= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^n -F(e_i, e_i, \xi) + \sum_{i=1}^n F(\varphi e_i, \varphi e_i, \xi) \right] \\ &= -\frac{1}{t} \theta(\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.17) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(e_i, \tilde{\varphi}e_i, \xi) &= \tilde{F}(e_i, \varphi e_i, \xi) \\
&= tF(e_i, \varphi e_i, \xi) + \frac{t(t+1)}{2} \{-d\eta(e_i, \varphi^2 e_i)\} \\
&= tF(e_i, \varphi e_i, \xi) + \frac{t(t+1)}{2} d\eta(e_i, e_i) \\
&= tF(e_i, \varphi e_i, \xi)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\tilde{\varphi}e_i, e_i, \xi) &= \tilde{F}(\varphi e_i, e_i, \xi) \\
&= tF(\varphi e_i, e_i, \xi) + \frac{t(t+1)}{2} \{-d\eta(\varphi e_i, \varphi e_i)\} \\
&= tF(\varphi e_i, e_i, \xi)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^*(\tilde{\xi}) &= \tilde{g}^{ij} \tilde{F}(e_i, \tilde{\varphi}e_j, \tilde{\xi}) \\
&= \frac{1}{t} \tilde{g}^{ij} \tilde{F}(e_i, \tilde{\varphi}e_j, \xi) \\
&= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, \varphi e_i, \xi) + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, \varphi e_i, \xi) \right] \\
&= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} \tilde{F}(e_i, \varphi e_i, \xi) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{t} \tilde{F}(\varphi e_i, e_i, \xi) \right]
\end{aligned}$$

(3.20) ve (3.21) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^*(\tilde{\xi}) &= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^n -\frac{1}{t} (tF(e_i, \varphi e_i, \xi)) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{t} (tF(\varphi e_i, e_i, \xi)) \right] \\
&= -\frac{1}{t} \theta^*(\xi)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.0.10. *(M, \varphi, \xi, \eta, g) Sasaki-like hemen hemen kontak B-metrik manifold ise \mathcal{D} homotetik deformasyonu olan (M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}) hemen hemen kontak B-metrik manifoldu da Sasaki-like hemen hemen kontak B-metrik manifolddur [17].*

Kanıt. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasaki-like hemen hemen kontak B -metrik manifold ise $d\eta = 0$ dir. O halde $\tilde{F}$ nın (3.5) ve (3.6) koşullarını sağladığı açıkça görülmektedir.

Sonuç olarak $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ nın $\mathcal{D}$ homotetik deformasyonu olan $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ manifoldu da Sasaki-like hemen hemen kontak B -metrik manifolddur. $\square$

$$\tilde{g}: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$\tilde{g}(X, Y) = g(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

olmak üzere $\tilde{g}$, $(0, 2)$ tipinde bir tensör alanı ve B -metriktir.

$\tilde{\nabla}$, $\tilde{g}$ metriğinin Levi-Civita konneksiyonu olsun. $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Phi: \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \end{aligned} \quad (3.22)$$

olarak tanımlayalım. Φ nın $(1, 2)$ tipinde simetrik tensör alanı olduğunu gösterelim.

$f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Phi(fX, Y) &= \tilde{\nabla}_{fX} Y - \nabla_{fX} Y \quad (\tilde{\nabla}, \nabla \text{ konneksiyon}) \\ &= f\tilde{\nabla}_X Y - f\nabla_X Y \\ &= f(\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y) \\ &= f\Phi(X, Y) \end{aligned}$$

$X_1, X_2, Y \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Phi(X_1 + X_2, Y) &= \tilde{\nabla}_{X_1+X_2} Y - \nabla_{X_1+X_2} Y \\ &= \tilde{\nabla}_{X_1} Y + \tilde{\nabla}_{X_2} Y - \nabla_{X_1} Y - \nabla_{X_2} Y \\ &= \tilde{\nabla}_{X_1} Y - \nabla_{X_1} Y + \tilde{\nabla}_{X_2} Y - \nabla_{X_2} Y \\ &= \Phi(X_1, Y) + \Phi(X_2, Y) \end{aligned}$$

olduğundan Φ , 1.bileşene göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir.

$$\begin{aligned} \Phi(X, fY) &= \tilde{\nabla}_X fY - \nabla_X fY \quad (\text{Leibnitz kuralından}) \\ &= X(f)Y + f\tilde{\nabla}_X Y - X(f)Y - f\nabla_X Y \\ &= f(\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y) \\ &= f\Phi(X, Y) \end{aligned}$$

$X, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\Phi(X, Y_1 + Y_2) &= \tilde{\nabla}_X(Y_1 + Y_2) - \nabla_X(Y_1 + Y_2) \quad (\tilde{\nabla}, \nabla \text{ konneksiyon}) \\
&= \tilde{\nabla}_X Y_1 + \tilde{\nabla}_X Y_2 - \nabla_X Y_1 - \nabla_X Y_2 \\
&= \tilde{\nabla}_X Y_1 - \nabla_X Y_1 + \tilde{\nabla}_X Y_2 - \nabla_X Y_2 \\
&= \Phi(X, Y_1) + \Phi(X, Y_2)
\end{aligned}$$

olduğundan Φ , 2.bileşene göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir. Yani Φ , $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir.

Şimdi Φ nin simetrik olduğunu görelim. (3.22) den

$$\begin{aligned}
\Phi(Y, X) &= \tilde{\nabla}_Y X - \nabla_Y X \\
&= \tilde{\nabla}_X Y - [X, Y] - \nabla_X Y + [X, Y] \\
&= \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \\
&= \Phi(X, Y)
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak Φ , (1, 2) tipinde simetrik tensör alanıdır.

$$\begin{aligned}
\Psi : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\
(X, Y, Z) &\mapsto g(\Phi(X, Y), Z)
\end{aligned}$$

olmak üzere Ψ , (0, 3) tipinde tensör alanıdır. $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathbf{1)} \quad \Psi(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \{-F(X, Y, \varphi Z) - F(Y, X, \varphi Z) + F(\varphi Z, X, Y)\} \\
&\quad + \eta(X) \{F(Y, Z, \xi) + F(\varphi Z, \varphi Y, \xi)\} + \eta(Y) \{F(X, Z, \xi) \\
&\quad + F(\varphi Z, \varphi X, \xi)\} + \eta(Z) \{F(X, Y, \xi) + F(Y, X, \xi) + F(X, \varphi Y, \xi) \\
&\quad + F(Y, \varphi X, \xi) - F(\xi, X, Y)\} - \eta(Z) \{\eta(X)\omega(\varphi Y) + \eta(Y)\omega(\varphi X)\} \\
\mathbf{2)} \quad \Psi(X, Y, \xi) &= \frac{1}{2} \{ \{F(X, Y, \xi) + F(Y, X, \xi) + F(X, \varphi Y, \xi) \\
&\quad + F(Y, \varphi X, \xi) - F(\xi, X, Y)\} \\
&\quad - \{\eta(X)\omega(\varphi Y) + \eta(Y)\omega(\varphi X)\} \} \\
\mathbf{3)} \quad \Psi(X, \xi, \xi) &= 0 \\
\mathbf{4)} \quad \Psi(\xi, X, Y) &= \frac{1}{2} \{ \{F(X, Y, \xi) + F(\varphi Y, \varphi X, \xi) - F(X, \varphi Y, \xi) \\
&\quad + F(\varphi Y, X, \xi) - F(\xi, X, \varphi Y)\} \\
&\quad + \eta(X)\omega(Y) \} \\
\mathbf{5)} \quad \Psi(\xi, \xi, X) &= \omega(X) - \omega(\varphi X)
\end{aligned}$$

1) Gerekli işlemler yapıldığında eşitliği elde ederiz. Zahmetli, uzun bir hesabı olduğundan burada ele alınmamıştır.

2) (1) de Z yerine ξ yazarsak;

$$\begin{aligned}
\Psi(X, Y, \xi) &= \frac{1}{2} \{ \{-F(X, Y, \varphi\xi) - F(Y, X, \varphi\xi) + F(\varphi\xi, X, Y)\} \\
&\quad + \eta(X)\{F(Y, \xi, \xi) + F(\varphi\xi, \varphi Y, \xi)\} \\
&\quad + \eta(Y)\{F(X, \xi, \xi) + F(\varphi\xi, \varphi X, \xi)\} \\
&\quad + \eta(\xi)\{F(X, Y, \xi) + F(Y, X, \xi) + F(X, \varphi Y, \xi) \\
&\quad + F(Y, \varphi X, \xi) - F(\xi, X, Y)\} \\
&\quad - \eta(\xi)\{\eta(X)\omega(\varphi Y) + \eta(Y)\omega(\varphi X)\} \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \{F(X, Y, \xi) + F(Y, X, \xi) + F(X, \varphi Y, \xi) \\
&\quad + F(Y, \varphi X, \xi) - F(\xi, X, Y)\} \\
&\quad - \{\eta(X)\omega(\varphi Y) + \eta(Y)\omega(\varphi X)\} \}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3) (2) de Y yerine ξ yazarsak;

$$\begin{aligned}
\Psi(X, \xi, \xi) &= \frac{1}{2} \{ \{F(X, \xi, \xi) + F(\xi, X, \xi) + F(X, \varphi\xi, \xi) \\
&\quad + F(\xi, \varphi X, \xi) - F(\xi, X, \xi)\} \\
&\quad - \{\eta(X)\omega(\varphi\xi) + \eta(\xi)\omega(\varphi X)\} \} \\
&= \frac{1}{2} \{F(\xi, \xi, \varphi X) - \omega(\varphi X)\} \\
&= \frac{1}{2} \{\omega(\varphi X) - \omega(\varphi X)\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4) (1) de X yerine ξ , Y yerine X , Z yerine Y yazarsak;

$$\begin{aligned}
\Psi(\xi, X, Y) &= \frac{1}{2} \{ \{-F(\xi, X, \varphi Y) - F(X, \xi, \varphi Y) + F(\varphi Y, \xi, X)\} \\
&\quad + \eta(\xi)\{F(X, Y, \xi) + F(\varphi Y, \varphi X, \xi)\} \\
&\quad + \eta(X)\{F(\xi, Y, \xi) + F(\varphi Y, \varphi\xi, \xi)\} \\
&\quad + \eta(Y)\{F(\xi, X, \xi) + F(X, \xi, \xi) + F(\xi, \varphi X, \xi) \\
&\quad + F(X, \varphi\xi, \xi) - F(\xi, \xi, X)\} \\
&\quad - \eta(Y)\{\eta(\xi)\omega(\varphi X) + \eta(X)\omega(\varphi\xi)\} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \{ \{-F(\xi, X, \varphi Y) - F(X, \varphi Y, \xi) + F(\varphi Y, X, \xi)\} \\
&\quad + F(X, Y, \xi) + F(\varphi Y, \varphi X, \xi) + \eta(X)F(\xi, \xi, Y) \\
&\quad + \eta(Y)F(\xi, \xi, \varphi X) - \eta(Y)\omega(\varphi X) \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \{-F(\xi, X, \varphi Y) - F(X, \varphi Y, \xi) + F(\varphi Y, X, \xi)\} \\
&\quad + F(X, Y, \xi) + F(\varphi Y, \varphi X, \xi) + \eta(X)\omega(Y) \\
&\quad + \eta(Y)\omega(\varphi X) - \eta(Y)\omega(\varphi X) \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \{F(X, Y, \xi) + F(\varphi Y, \varphi X, \xi) - F(X, \varphi Y, \xi) \\
&\quad + F(\varphi Y, X, \xi) - F(\xi, X, \varphi Y)\} \\
&\quad + \eta(X)\omega(Y) \}
\end{aligned}$$

elde edilir.

5) (4) de X yerine ξ , Y yerine X yazarsak;

$$\begin{aligned}
\Psi(\xi, \xi, X) &= \frac{1}{2} \{ \{F(\xi, X, \xi) + F(\varphi X, \varphi \xi, \xi) - F(\xi, \varphi X, \xi) \\
&\quad + F(\varphi X, \xi, \xi) - F(\xi, \xi, \varphi X)\} + \eta(\xi)\omega(X) \} \\
&= \frac{1}{2} \{ F(\xi, \xi, X) - F(\xi, \xi, \varphi X) \\
&\quad - F(\xi, \xi, \varphi X) + \omega(X) \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \omega(X) - \omega(\varphi X) - \omega(\varphi X) + \omega(X) \} \\
&= \frac{1}{2} \{ 2(\omega(X) - \omega(\varphi X)) \} \\
&= \omega(X) - \omega(\varphi X)
\end{aligned}$$

elde edilir. $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere (1), (2), (3), (4) ve (5) eşitliklerden Ψ için ifade edilen F formülünü

$$\begin{aligned}
F(X, Y, Z) &= \Psi(X, Y, \varphi Z) + \Psi(X, Z, \varphi Y) \\
&\quad + \frac{1}{2} \eta(Y) \{ \Psi(X, Z, \xi) - \Psi(X, \varphi Z, \xi) + \Psi(\xi, X, Z) - \Psi(\xi, X, \varphi Z) \} \\
&\quad + \frac{1}{2} \eta(Z) \{ \Psi(X, Y, \xi) - \Psi(X, \varphi Y, \xi) + \Psi(\xi, X, Y) - \Psi(\xi, X, \varphi Y) \}
\end{aligned}$$

şekilde yazabiliriz.

$X \in \chi(M)$ olmak üzere Ψ ile ilişkili 1-formlar:

$$f(x) = g^{ij}\Psi(e_i, e_j, x) \quad , \quad f^*(x) = g^{ij}\Psi(e_i, \varphi e_j, x)$$

dir [1].

3.1. φ Yapısının Kovaryant Türevlerinin Uzayı

Tanım 3.1.1. V , $(2n + 1)$ boyutlu vektör uzayı üzerinde, (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısı ve g , B -metriği tanımlı olsun. $\mathcal{F}$, V üzerindeki tüm $(0, 3)$ tipindeki tensör alanlarının vektör uzayı öyle ki aşağıdaki koşulları sağlasın:

$x, y, z \in V$ olmak üzere,

$$1) F(x, y, z) = F(x, z, y)$$

$$2) F(x, \varphi y, \varphi z) = F(x, y, z) - \eta(y)F(x, \xi, z) - \eta(z)F(x, y, \xi)$$

$F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ve V nin $\{e_i, e_{2n+1} = \xi\}, (i = 1, 2, \dots, 2n)$ tabanı için

$$\langle F_1, F_2 \rangle = g^{iq}g^{jr}g^{ks}F_1(e_i, e_j, e_k)F_2(e_q, e_r, e_s) \quad (3.23)$$

olmak üzere $\langle, \rangle$, $\mathcal{F}$ üzerinde bir iç çarpımdır. g metriği ile tanımlı olan iç çarpım bilineer ve simetrik.

G bir grup olmak üzere,

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{C}) &= \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A \text{ terslenebilir}\} \\ &= \{A = C + iD \mid C, D \in M(n, \mathbb{R}), A \text{ terslenebilir}\} \end{aligned}$$

$q : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ için $q(z) = z_1^2 + \dots + z_n^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} O(n, \mathbb{C}) &= \{T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \mid \forall z \in \mathbb{C}^n \text{ için } q(Tz) = q(z)\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^T A = I\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ve $q : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ için

$q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - \dots - x_{2n}^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} O(n, n) &= \{T : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \mid \forall x \in \mathbb{R}^{2n} \text{ için } q(Tx) = q(x)\} \\ &= \left\{ A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid A^T M A = M, \quad M = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & -I_{n \times n} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.2. $O(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(n, n)$ dir.

Kanıt. $X \in O(n, \mathbb{C})$ ise $X^T X = I$ dir. $X = A + iB$, $(A + iB)^T(A + iB) = I$ yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} I &= (A + iB)^T(A + iB) \\ &= (A^T + iB^T)(A + iB) \\ &= A^T A + iA^T B + iB^T A - B^T B \\ &= (A^T A - B^T B) + i(A^T B + B^T A) \end{aligned}$$

olmak üzere, $A^T A - B^T B = I$, $A^T B + B^T A = 0$ olmalıdır.

$$X = A + iB \in GL(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow X = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \in GL(2n, \mathbb{R})$$

şeklinde gömme dönüşümü yazabiliriz.

$$\begin{aligned} X^T M X &= \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^T & -B^T \\ B^T & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^T & B^T \\ B^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^T A - B^T B & A^T B + B^T A \\ B^T A + A^T B & B^T B - A^T A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = M \end{aligned}$$

dir.

O halde $\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \in O(n, n)$ elde edilir. $X \in GL(n, \mathbb{C}) \cap O(n, n)$ dir. Tersine de doğrudur. Sonuç olarak $O(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(n, n)$ dir. $\square$

$$G \times I = \begin{bmatrix} G_{2n \times 2n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(2n+1) \times (2n+1)}$$

olmak üzere $x, y, z \in V$, $a \in G \times I$ ve $F \in \mathcal{F}$ için,

$$\begin{aligned} \lambda : G \times I &\longrightarrow \text{End} \mathcal{F} \\ a &\longmapsto \lambda(a) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \\ F &\longmapsto \lambda(a)F(x, y, z) := F(a^{-1}x, a^{-1}y, a^{-1}z) \end{aligned} \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $a^{-1}x$, $G \times I$ grubunun V üzerindeki standart temsildir. Böylece bu standart temsil λ doğal temsilini belirler.

$a \in G \times I$, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ olmak üzere

$$\langle \lambda(a)F_1, \lambda(a)F_2 \rangle = \langle F_1, F_2 \rangle$$

olduğunu görelim. (3.23) ve (3.24) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \langle \lambda(a)F_1, \lambda(a)F_2 \rangle &= g^{iq}g^{jr}g^{ks}(\lambda(a)F_1)(e_i, e_j, e_k)(\lambda(a)F_2)(e_q, e_r, e_s) \\ &= g^{iq}g^{jr}g^{ks}F_1(a^{-1}e_i, a^{-1}e_j, a^{-1}e_k)F_2(a^{-1}e_q, a^{-1}e_r, a^{-1}e_s) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $a = (S_{ij})_{(2n+1) \times (2n+1)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a^{-1}e_i &= \sum_{u=1}^{2n+1} (S^{-1})_{ui}e_u & a^{-1}e_q &= \sum_{t=1}^{2n+1} (S^{-1})_{tq}e_t \\ a^{-1}e_j &= \sum_{v=1}^{2n+1} (S^{-1})_{vj}e_v & a^{-1}e_r &= \sum_{y=1}^{2n+1} (S^{-1})_{yr}e_y \\ a^{-1}e_k &= \sum_{w=1}^{2n+1} (S^{-1})_{wk}e_w & a^{-1}e_s &= \sum_{z=1}^{2n+1} (S^{-1})_{zs}e_z \end{aligned}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
& \langle \lambda(a)F_1, \lambda(a)F_2 \rangle \\
&= g^{iq}g^{jr}g^{ks}F_1 \left(\sum_{u=1}^{2n+1} (S^{-1})_{ui}e_u, \sum_{v=1}^{2n+1} (S^{-1})_{vj}e_v, \sum_{w=1}^{2n+1} (S^{-1})_{wk}e_w \right) \\
& \quad F_2 \left(\sum_{t=1}^{2n+1} (S^{-1})_{tq}e_t, \sum_{y=1}^{2n+1} (S^{-1})_{yr}e_y, \sum_{z=1}^{2n+1} (S^{-1})_{zs}e_z \right) \\
&= \sum_{\substack{i,q,j,r,k,s, \\ u,v,w,t,y,z=1}}^{2n+1} g^{iq}g^{jr}g^{ks}(S^{-1})_{ui}(S^{-1})_{vj}(S^{-1})_{wk}(S^{-1})_{tq}(S^{-1})_{yr}(S^{-1})_{zs}F_1(e_u, e_v, e_w)F_2(e_t, e_y, e_z)
\end{aligned}$$

olur. Burada $g = (B_{ij})_{(2n+1) \times (2n+1)}$ olmak üzere

$$(S^{-1})_{ui}g^{iq}(S^{-1})_{tq} = (S^{-1})_{ui}(B^{-1})_{iq}((S^{-1})^T)_{qt} = (S^{-1}B^{-1}(S^{-1})^T)_{ut} = B_{ut}^{-1} = g^{ut}$$

$$(S^{-1})_{vj}g^{jr}(S^{-1})_{yr} = (S^{-1})_{vj}(B^{-1})_{jr}((S^{-1})^T)_{ry} = (S^{-1}B^{-1}(S^{-1})^T)_{vy} = B_{vy}^{-1} = g^{vy}$$

$$(S^{-1})_{wk}g^{ks}(S^{-1})_{zs} = (S^{-1})_{wk}(B^{-1})_{ks}((S^{-1})^T)_{sz} = (S^{-1}B^{-1}(S^{-1})^T)_{wz} = B_{wz}^{-1} = g^{wz}$$

olup sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(a)F_1, \lambda(a)F_2 \rangle &= \sum_{u,v,w,t,y,z=1}^{2n+1} g^{ut}g^{vy}g^{wz}F_1(e_u, e_v, e_w)F_2(e_t, e_y, e_z) \\
&= \langle F_1, F_2 \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
h : V &\longrightarrow V \\
x &\longmapsto h(x) = -\varphi^2 x := x - \eta(x)\xi
\end{aligned} \tag{3.25}$$

olmak üzere

$$x = hx + \eta(x)\xi \tag{3.26}$$

$$h^2 = h \tag{3.27}$$

elde edilir.

Ayrıca $i = 1, \dots, 2n$ olmak üzere

$$h(e_i) = e_i \quad (3.28)$$

$$h(\xi) = 0 \quad (3.29)$$

dir.

$x, y, z \in V$, $F \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\mathcal{P}_1$ operatörünü,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ F &\longmapsto \mathcal{P}_1(F)(x, y, z) := F(hx, hy, hz) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

Önerme 3.1.3. $\mathcal{P}_1$ operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- 1) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $\langle \mathcal{P}_1 F_1, F_2 \rangle = \langle F_1, \mathcal{P}_1 F_2 \rangle$
- 2) $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1$

Kanıt. 1) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_1 F_1, F_2 \rangle &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} \mathcal{P}_1(F_1)(e_i, e_j, e_k) F_2(e_q, e_r, e_s) \\ &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} F_1(he_i, he_j, he_k) F_2(e_q, e_r, e_s) \quad ((3.28) \text{ den}) \\ &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} F_1(e_i, e_j, e_k) F_2(he_q, he_r, he_s) \\ &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} F_1(e_i, e_j, e_k) \mathcal{P}_2(F_2)(e_q, e_r, e_s) \\ &= \langle F_1, \mathcal{P}_1 F_2 \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

2) $F \in \mathcal{F}$ ve $x, y, z \in V$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_1)(F)(x, y, z) &= \mathcal{P}_1(\mathcal{P}_1(F)(x, y, z)) \\ &= \mathcal{P}_1(F(hx, hy, hz)) \\ &= F(h^2x, h^2y, h^2z) \quad ((3.27) \text{ dan}) \\ &= F(hx, hy, hz) \\ &= \mathcal{P}_1(F)(x, y, z) \end{aligned}$$

elde edilir.

$W_1 = \text{Gör}\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$ olsun. O halde Önerme 3.1.3 den dolayı

- 1) $W_1 = \{F \in \mathcal{F} \mid \mathcal{P}_1 F = F\}$
- 2) $W_1^\perp = \text{Çek}\mathcal{P}_1 = \{F \in \mathcal{F} \mid \mathcal{P}_1 F = 0\}$

olduğunu görelim.

1) $\mathcal{P}_1 : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ olmak üzere

$W_1 = \text{Gör}\mathcal{P}_1$ olduğundan, $F \in W_1$ alırsak $\mathcal{P}_1(F_1) = F$ olacak şekilde $F_1 \in \mathcal{F}$ vardır. $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1$ eşitliğinden $\mathcal{P}_1(\mathcal{P}_1(F_1)) = \mathcal{P}_1 F_1$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_1)(F_1) &= F \\ \mathcal{P}_1(\mathcal{P}_1(F_1)) &= F \\ \mathcal{P}_1(F) &= F \end{aligned}$$

elde edilir.

2) $W_1^\perp = \{F \in \mathcal{F} \mid \forall F' \in W_1 \text{ için } \langle F, F' \rangle = 0\}$ olmalıdır.

$$0 = \langle F, F' \rangle = \langle F, \mathcal{P}_1 F' \rangle = \langle \mathcal{P}_1 F, F' \rangle$$

Her $F' \in W_1$ için $\langle \mathcal{P}_1 F, F' \rangle = 0$ olduğundan $\mathcal{P}_1 F = 0$ olmalıdır. Yani $F \in \text{Çek}\mathcal{P}_1$ dir. $\square$

$x, y, z \in V$, $F \in W_1^\perp$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2 : W_1^\perp &\longrightarrow W_1^\perp \\ F &\longmapsto \mathcal{P}_2(F)(x, y, z) := \eta(y)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, hy, \xi) \end{aligned}$$

operatörünü tanımlayalım.

Önerme 3.1.4. $\mathcal{P}_2$ operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- 1) $F_1, F_2 \in W_1^\perp$, $\langle \mathcal{P}_2 F_1, F_2 \rangle = \langle F_1, \mathcal{P}_2 F_2 \rangle$
- 2) $\mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2$

Kanıt. 1) $F_1, F_2 \in W_1^\perp$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_2 F_1, F_2 \rangle &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} \mathcal{P}_2(F_1)(e_i, e_j, e_k) F_2(e_q, e_r, e_s) \\ &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} (\eta(e_j) F_1(h e_i, \xi, h e_k) \\ &\quad + \eta(e_k) F_1(h e_i, h e_j, \xi)) F_2(e_q, e_r, e_s) \\ &= 0 \\ \langle F_1, \mathcal{P}_2 F_2 \rangle &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} F_1(e_i, e_j, e_k) \mathcal{P}_2(F_2)(e_q, e_r, e_s) \\ &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} F_1(e_i, e_j, e_k) (\eta(e_r) F_2(h e_q, \xi, h e_s) \\ &\quad + \eta(e_s) F_2(h e_q, h e_r, \xi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sonuç olarak $\langle \mathcal{P}_2 F_1, F_2 \rangle = \langle F_1, \mathcal{P}_2 F_2 \rangle$ dir.

2) $x, y, z \in V$, $F \in W_1^\perp$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_2)(F)(x, y, z) \\
&= \mathcal{P}_2(\mathcal{P}_2(F)(x, y, z)) \\
&= \mathcal{P}_2(\eta(y)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, hy, \xi)) \\
&= \eta(y)\mathcal{P}_2(F)(hx, \xi, hz) + \eta(z)\mathcal{P}_2(F)(hx, hy, \xi) \\
&= \eta(y)(\eta(\xi)F(h^2x, \xi, h^2z) + \eta(hz)F(h^2x, h\xi, \xi)) \\
&\quad + \eta(z)(\eta(hy)F(h^2x, \xi, h\xi) + \eta(\xi)F(h^2x, h^2y, \xi)) \\
&= \eta(y)F(h^2x, \xi, h^2z) + \eta(z)F(h^2x, h^2y, \xi) \\
&= \eta(y)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, hy, \xi) \\
&= \mathcal{P}_2(F)(x, y, z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$W_2 = \text{Gör}\mathcal{P}_2$ olarak alalım. O halde

$$1) W_2 = \{F \in W_1^\perp \mid \mathcal{P}_2 F = F\}$$

$$2) W_2^\perp = \text{Çek}\mathcal{P}_2 = \{F \in W_1^\perp \mid \mathcal{P}_2 F = 0\}$$

olduğunu görelim.

$$1) \mathcal{P}_2 : W_1^\perp \longrightarrow W_1^\perp$$

$F \in W_2 = \{\mathcal{P}_2(F) \mid \forall F \in W_1^\perp\}$ alalım. O halde $\mathcal{P}_2(F_1) = F$ olacak şekilde $F_1 \in W_1^\perp$ vardır. $\mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2$ eşitliğinden $\mathcal{P}_2(\mathcal{P}_2(F_1)) = \mathcal{P}_2(F_1)$ dir. Yani $\mathcal{P}_2(F) = F$ elde edilir.

$$2) W_2^\perp = \{F \in W_1^\perp \mid \forall F' \in W_2 \text{ için } \langle F, F' \rangle = 0\}$$

$\forall F' \in W_2$ için $\langle F, F' \rangle = 0$ olmalıdır. O zaman

$$0 = \langle F, F' \rangle = \langle F, \mathcal{P}_2 F' \rangle = \langle \mathcal{P}_2 F, F' \rangle$$

Her F' için $\langle \mathcal{P}_2 F, F' \rangle = 0$ olduğundan $\mathcal{P}_2 F = 0$ olmalıdır. Yani $F \in \text{Çek}\mathcal{P}_2$ dir. $\square$

$x, y, z \in V$, $F \in W_2^\perp$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
P_3 : W_2^\perp &\longrightarrow W_2^\perp \\
F &\longmapsto \mathcal{P}_3(F)(x, y, z) := \eta(x)F(\xi, hy, hz)
\end{aligned}$$

operatörünü tanımlayalım.

Önerme 3.1.5. $\mathcal{P}_3$ operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- 1) $F_1, F_2 \in W_2^\perp$ için $\langle \mathcal{P}_3 F_1, F_2 \rangle = \langle F_1, \mathcal{P}_3 F_2 \rangle$
- 2) $\mathcal{P}_3 \circ \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3$

Kanıt. 1) $F_1, F_2 \in W_2^\perp$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_3 F_1, F_2 \rangle &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} \mathcal{P}_3(F_1)(e_i, e_j, e_k) F_2(e_q, e_r, e_s) \\ &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} (\eta(e_i) F_1(\xi, h e_j, h e_k)) F_2(e_q, e_r, e_s) \\ &= g^{jr} g^{ks} F_1(\xi, e_j, e_k) F_2(\xi, e_r, e_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle F_1, \mathcal{P}_3 F_2 \rangle &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} F_1(e_i, e_j, e_k) \mathcal{P}_3(F_2)(e_q, e_r, e_s) \\ &= g^{iq} g^{jr} g^{ks} F_1(e_i, e_j, e_k) (\eta(e_q) F_2(\xi, h e_r, h e_s)) \\ &= g^{jr} g^{ks} F_1(\xi, e_j, e_k) F_2(\xi, e_r, e_s) \end{aligned}$$

olup $\langle \mathcal{P}_3 F_1, F_2 \rangle = \langle F_1, \mathcal{P}_3 F_2 \rangle$ dir.

- 2) $x, y, z \in V, F \in W_2^\perp$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_3 \circ \mathcal{P}_3)(F)(x, y, z) &= \mathcal{P}_3(\mathcal{P}_3(F)(x, y, z)) \\ &= \mathcal{P}_3(\eta(x) F(\xi, h y, h z)) \\ &= \eta(x) \mathcal{P}_3(F)(\xi, h y, h z) \\ &= \eta(x) (\eta(\xi) F(\xi, h^2 y, h^2 z)) \quad ((2.4) \text{ ve } (3.27) \text{ dan}) \\ &= \eta(x) F(\xi, h y, h z) \\ &= \mathcal{P}_3(F)(x, y, z) \end{aligned}$$

dir. $W_3 = \text{Gör}\mathcal{P}_3$ ve $W_4 = \text{Çek}\mathcal{P}_3$ olsun. O halde $W_3 = \{F \in W_2^\perp \mid \mathcal{P}_3 F = F\}$ olduğunu görelim.

$F \in W_3$ alalım. O halde $\mathcal{P}_3(F_1) = F$ olacak şekilde $F_1 \in W_2^\perp$ vardır. $\mathcal{P}_3 \circ \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3$ eşitliğinden $\mathcal{P}_3(\mathcal{P}_3(F_1)) = \mathcal{P}_3(F_1)$ dir. Yani $\mathcal{P}_3(F) = F$ olur. $\square$

Önerme 3.1.6. $\mathcal{F} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ dir [1].

Önerme 3.1.7. Keyfi $x, y, z \in V$ ve $i = 1, \dots, 4$ olmak üzere W_i ler

- 1) $W_1 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(\xi, x, y) = F(x, \xi, y) = 0\},$
- 2) $W_2 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(\xi, y, z) = F(x, h y, h z) = 0\},$
- 3) $W_3 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(x, y, \xi) = F(h x, y, z) = 0\},$
- 4) $W_4 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(h x, y, z) = F(x, h y, h z) = 0\}$

şeklinde karakterize edilir.

Kanıt. **1)** $W_1 = \{F \in \mathcal{F} \mid \mathcal{P}_1 F = F\}$ dir. Buradan

$$\mathcal{P}_1 F(x, y, z) = F(hx, hy, hz) = F(x, y, z)$$

dir. $h\xi = 0$ olduğundan

$$x \text{ yerine } \xi \text{ alırsak } F(\xi, x, y) = F(h\xi, hx, hy) = 0$$

$$y \text{ yerine } \xi \text{ alırsak } F(x, \xi, y) = F(hx, h\xi, hy) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $W_1 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(\xi, x, y) = F(x, \xi, y) = 0\}$ dir.

2) $W_2 = \{F \in W_1^\perp \mid \mathcal{P}_2 F = F\}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2 F(x, y, z) &= \eta(y)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, hy, \xi) \\ &= F(x, y, z) \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Burada x yerine ξ alırsak $h\xi = 0$ olduğundan

$$F(\xi, y, z) = \eta(y)F(h\xi, \xi, hz) + \eta(z)F(h\xi, hy, \xi) = 0$$

ve y yerine hy , z yerine hz alırsak $\eta \circ h = 0$ olduğundan

$$F(x, hy, hz) = \eta(hy)F(hx, \xi, h^2z) + \eta(hz)F(hx, h^2y, \xi) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $W_2 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(\xi, y, z) = F(x, hy, hz) = 0\}$ dir.

3) $W_3 = \{F \in W_2^\perp \mid \mathcal{P}_3 F = F\}$ dir. Yani

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3 F(x, y, z) &= \eta(x)F(\xi, hy, hz) \\ &= F(x, y, z) \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Burada z yerine ξ alırsak $h\xi = 0$ olduğundan

$$F(x, y, \xi) = \eta(x)F(\xi, hy, h\xi) = 0$$

ve x yerine hx alırsak $\eta \circ h = 0$ olduğundan

$$F(hx, y, z) = \eta(hx)F(\xi, hy, h\xi) = 0$$

dir. Sonuç olarak $W_3 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(x, y, \xi) = F(hx, y, z) = 0\}$ dir.

4) $W_4 = \{F \in W_2^\perp \mid \mathcal{P}_3 F = 0\}$ dir. $W_2^\perp$ nin tanımından yani $\mathcal{P}_2 F = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &= \eta(y)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, hy, \xi) \\
&= F(hx, \eta(y)\xi, hz) + F(hx, hy, \eta(z)\xi) \\
&= F(hx, y - hy, hz) + F(hx, hy, z - hz) \\
&= F(hx, y, hz) - F(hx, hy, hz) + F(hx, hy, z) - F(hx, hy, hz)
\end{aligned}$$

Burada aynı zamanda $F \in W_1^\perp$ olduğundan $\mathcal{P}_1 F = 0$ yani $F(hx, hy, hz) = 0$ dir. O halde

$$F(hx, y, hz) + F(hx, hy, z) = 0 \quad (3.30)$$

olur.

$W_2^\perp$ nin tanımından

$$\begin{aligned}
0 &= \eta(y)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, hy, \xi) \\
&= \eta(y)F(hx, \xi, z - \eta(z)\xi) + \eta(z)F(hx, y - \eta(y)\xi, \xi) \\
&= \eta(y)F(hx, \xi, z) - \eta(y)\eta(z)F(hx, \xi, \xi) \\
&\quad + \eta(z)F(hx, y, \xi) - \eta(z)\eta(y)F(hx, \xi, \xi)
\end{aligned}$$

(3.30) denkleminde $y = z = \xi$ yazılırsa $F(hx, \xi, \xi) = 0$ elde edilir. O zaman

$$\begin{aligned}
0 &= \eta(y)F(hx, \xi, z) + \eta(z)F(hx, y, \xi) \\
&= F(hx, \eta(y)\xi, z) + F(hx, y, \eta(z)\xi) \\
&= F(hx, y - hy, z) + F(hx, y, z - hz) \\
&= F(hx, y, z) - F(hx, hy, z) + F(hx, y, z) - F(hx, y, hz)
\end{aligned}$$

Burada (3.30) dan $F(hx, hy, z) + F(hx, y, hz) = 0$ dir. Sonuç olarak $F(hx, y, z) = 0$ elde edilir. W_4 ün tanımından ve (3.30) dan $F(hx, hy, hz) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &= \eta(x)F(\xi, hy, hz) \\
&= F(\eta(x)\xi, hy, hz) \\
&= F(x - hx, hy, hz) \\
&= F(x, hy, hz) - F(hx, hy, hz) \\
&= F(x, hy, hz)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Şimdi $\bar{V}$, ξ tarafından kapsanan alt uzayın ortogonal tamamlayıcısı olsun. Endomorfizm φ , $\bar{V}$ üzerinde kompleks bir yapı oluşturur ve $g, \bar{V}$ üzerindeki kompleks B-metriktir.

$W = \left\{ \alpha \in {}^3\bar{V}^* \mid \alpha(x, y, z) = \alpha(x, z, y) = \alpha(x, \varphi y, \varphi z), x, y, z \in \bar{V} \right\}$ olmak üzere, $L : W \rightarrow W$ dönüşümünü

$$L(\alpha)(x, y, z) = \frac{1}{2} [\alpha(y, z, x) + \alpha(z, x, y) + \alpha(\varphi y, \varphi z, x) + \alpha(\varphi z, x, \varphi y)]$$

şeklinde tanımlayalım. $\alpha \in W$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} L(\alpha)(x, z, y) &= \frac{1}{2} [\alpha(z, y, x) + \alpha(y, x, z) + \alpha(\varphi z, \varphi y, x) + \alpha(\varphi y, x, \varphi z)] \\ &= L(\alpha)(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\alpha)(x, \varphi y, \varphi z) &= \frac{1}{2} [\alpha(\varphi y, \varphi z, x) + \alpha(\varphi z, x, \varphi y) + \alpha(\varphi^2 y, \varphi^2 z, x) + \alpha(\varphi^2 z, x, \varphi^2 y)] \\ &= \frac{1}{2} [\alpha(\varphi y, \varphi z, x) + \alpha(\varphi z, x, \varphi y) + \alpha(y, z, x) + \alpha(z, x, y)] \\ &= L(\alpha)(x, y, z) \end{aligned}$$

olduğundan $L(\alpha) \in W$ dur. Şimdi $L^2(\alpha) = \alpha$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} L^2(\alpha)(x, y, z) &= L(L(\alpha)(x, y, z)) \\ &= \frac{1}{2} L [\alpha(y, z, x) + \alpha(z, x, y) + \alpha(\varphi y, \varphi z, x) + \alpha(\varphi z, x, \varphi y)] \\ &= \frac{1}{2} [L(\alpha)(y, z, x) + L(\alpha)(z, x, y) + L(\alpha)(\varphi y, \varphi z, x) + L(\alpha)(\varphi z, x, \varphi y)] \\ &= \frac{1}{4} [\alpha(z, x, y) + \alpha(x, y, z) + \alpha(\varphi z, \varphi x, y) + \alpha(\varphi x, y, \varphi z) + \alpha(x, y, z) \\ &\quad \alpha(y, z, x) + \alpha(\varphi x, \varphi y, z) + \alpha(\varphi y, z, \varphi x) + \alpha(\varphi z, x, \varphi y) + \alpha(x, \varphi y, \varphi z) \\ &\quad - \alpha(z, \varphi x, \varphi y) - \alpha(\varphi x, \varphi y, z) + \alpha(x, \varphi y, \varphi z) + \alpha(\varphi y, \varphi z, x) \\ &\quad - \alpha(\varphi x, y, \varphi z) - \alpha(y, \varphi z, \varphi x)] \\ &= \alpha(x, y, z) \end{aligned}$$

olup $L^2 = I$ dir. O halde L nin özdeğerleri ∓ 1 , özvektörleri

$$W^+ = \{\alpha \in W \mid L\alpha = \alpha\}$$

$$W^- = \{\alpha \in W \mid L\alpha = -\alpha\}$$

dır. Keyfi $x, y, z \in \bar{V}$ için W nun alt uzaylarını

$$U_1 = \left\{ \alpha \in W \mid \alpha(x, y, z) = \frac{1}{2n} \{g(x, \varphi y)\theta(\varphi z) + g(x, \varphi y)\theta(\varphi y) \right. \\ \left. - g(\varphi x, \varphi y)\theta(z) - g(\varphi x, \varphi y)\theta(y) \} \right\}$$

$$U_2 = \{ \alpha \in W \mid \alpha(x, y, \varphi z) + \alpha(y, z, \varphi x) + \alpha(z, x, \varphi y) = 0, \theta = 0 \}$$

$$U_3 = \{ \alpha \in W \mid \alpha(x, y, z) + \alpha(y, z, x) + \alpha(z, x, y) = 0 \}$$

olarak tanımlayalım.

Önerme 3.1.8. $\alpha \in W$, $W \perp U_1 \Leftrightarrow \theta = 0$ dir [3].

Önerme 3.1.9. $\alpha \in W$ olsun.

$$i) \alpha \in W^+ \Leftrightarrow \alpha(x, y, \varphi z) + \alpha(y, z, \varphi x) + \alpha(z, x, \varphi y) = 0$$

$$ii) \alpha \in W^- \Leftrightarrow \alpha \in U_3$$

dür.

Kanıt. i) $\alpha \in W^+$ ise

$$L(\alpha)(x, y, z) = \frac{1}{2} [\alpha(y, z, x) + \alpha(z, x, y) + \alpha(\varphi y, \varphi z, x) + \alpha(\varphi z, x, \varphi y)] \\ = \alpha(x, y, z)$$

dir. O halde $2\alpha(x, y, z) = \alpha(y, z, x) + \alpha(z, x, y) + \alpha(\varphi y, \varphi z, x) + \alpha(\varphi z, x, \varphi y)$ olur ve buradan

$$2\alpha(x, y, \varphi z) = \alpha(y, \varphi z, x) + \alpha(\varphi z, x, y) - \alpha(\varphi y, z, x) - \alpha(z, x, \varphi y) \\ 2\alpha(y, z, \varphi x) = \alpha(z, \varphi x, y) + \alpha(\varphi x, y, z) - \alpha(\varphi z, x, y) - \alpha(x, y, \varphi z) \\ 2\alpha(z, x, \varphi y) = \alpha(x, \varphi y, z) + \alpha(\varphi y, z, x) - \alpha(\varphi x, y, z) - \alpha(y, z, \varphi x)$$

ifadelerini taraf tarafa toplarsak;

$$\alpha(x, y, \varphi z) + \alpha(y, z, \varphi x) + \alpha(z, x, \varphi y) = 0$$

elde edilir.

ii) $\alpha \in W^-$ ise

$$\begin{aligned} L(\alpha)(x, y, z) &= \frac{1}{2} [\alpha(y, z, x) + \alpha(z, x, y) + \alpha(\varphi y, \varphi z, x) + \alpha(\varphi z, x, \varphi y)] \\ &= -\alpha(x, y, z) \end{aligned}$$

dir. O halde $-2\alpha(x, y, z) = \alpha(y, z, x) + \alpha(z, x, y) + \alpha(\varphi y, \varphi z, x) + \alpha(\varphi z, x, \varphi y)$ olur ve buradan

$$\begin{aligned} -2\alpha(x, y, z) &= \alpha(y, z, x) + \alpha(z, x, y) + \alpha(\varphi y, \varphi z, x) + \alpha(\varphi z, x, \varphi y) \\ -2\alpha(y, z, x) &= \alpha(z, x, y) + \alpha(x, y, z) + \alpha(\varphi z, \varphi x, y) + \alpha(\varphi x, y, \varphi z) \\ -2\alpha(z, x, y) &= \alpha(x, y, z) + \alpha(y, z, x) + \alpha(\varphi x, \varphi y, z) + \alpha(\varphi y, z, \varphi x) \end{aligned}$$

ifadelerini taraf tarafa toplarsak;

$$\alpha(x, y, z) + \alpha(y, z, x) + \alpha(z, x, y) = 0$$

olup $\alpha \in U_3$ dür. □

Teorem 3.1.10. $W = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ dür. Böylece

$$\begin{aligned} W^+ &= U_1 \oplus U_2 \\ W^- &= U_3 \end{aligned}$$

dür [1].

W_1, W ya doğal olarak izomorfik olduğundan sırasıyla U_1, U_2, U_3 ; $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \in \mathcal{F}$ ye izomorfiktir. O halde

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ F \in \mathcal{F} \mid F(x, y, z) = \frac{1}{2n} \{g(x, \varphi y)\theta(\varphi z) + g(x, \varphi y)\theta(\varphi y) - g(\varphi x, \varphi y)\theta(z) - g(\varphi x, \varphi y)\theta(y)\} \right\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(x, y, \varphi z) + F(y, z, \varphi x) + F(z, x, \varphi y) = 0, \theta = 0\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) = 0\}$$

yazılabilir. Bundan dolayı aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.1.11. $W_1 = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3$ dir [1].

$$\begin{aligned}
W_2 &= \{F(x, y, z) = \eta(y)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, hy, \xi)\} \\
&= \{F(x, y, z) = \eta(y)F(\varphi^2x, \xi, \varphi^2z) + \eta(z)F(\varphi^2x, \varphi^2y, \xi)\}
\end{aligned}$$

için $L_{1,2} : W_2 \rightarrow W_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
L_1(F)(x, y, z) &= F(\varphi x, \varphi y, \xi)\eta(z) + F(\varphi x, \varphi z, \xi)\eta(y) \\
L_2(F)(x, y, z) &= F(\varphi^2y, \varphi^2x, \xi)\eta(z) + F(\varphi^2z, \varphi^2x, \xi)\eta(y)
\end{aligned}$$

tanımlayalım.

Önerme 3.1.12. L bir lineer dönüşüm olmak üzere

- i) $L_j^2 = I$ ($j = 1, 2$)
 - ii) $\langle L_j F', L_j F'' \rangle = \langle F', F'' \rangle$
 - iii) $L_j(\lambda(\alpha)F) = \lambda(\alpha)L_j(F)$
- dir [3].

W_2 nin tanımından $\mathcal{P}_2 F = F$ olmak üzere,

$$W' = \{F \in \mathcal{F} \mid F(x, y, z) + F(\varphi x, \varphi y, z) + F(\varphi x, y, \varphi z) = 0\},$$

$$W'' = \{F \in \mathcal{F} \mid F(x, y, z) - F(\varphi x, \varphi y, z) - F(\varphi x, y, \varphi z) = 0\}.$$

kümelerinin W_2 nin alt uzayları olduğunu gösterelim.

1. (3.6) eşitliğinde x yerine φx , y yerine φy yazalım.

$$\begin{aligned}
F(\varphi x, \varphi^2y, \varphi z) &= F(\varphi x, \varphi y, z) - \eta(\varphi y)F(\varphi x, \xi, z) - \eta(z)F(\varphi x, \varphi y, \xi) \\
&= F(\varphi x, \varphi y, z) - \eta(z)F(\varphi x, \varphi y, \xi) \\
&= F(\varphi x, \varphi y, z) - F(\varphi x, \varphi y, \eta(z)\xi) \\
&= F(\varphi x, \varphi y, z - \eta(z)\xi) \\
&= F(\varphi x, \varphi y, -\varphi^2z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$F(\varphi x, \varphi^2y, \varphi z) + F(\varphi x, \varphi y, \varphi^2z) = 0 \quad (3.31)$$

dir. $F \in W'$ ise $F(x, y, z) = -F(\varphi x, \varphi y, z) - F(\varphi x, y, \varphi z)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
F(hx, \xi, hz) &= -F(\varphi hx, \varphi \xi, hz) - F(\varphi hx, \xi, \varphi hz) \quad ((3.25) \text{ ve } (2.6) \text{ dan}) \\
&= -F(\varphi^3x, \xi, \varphi^3z) \quad ((2.5) \text{ den}) \\
&= -F(\varphi x, \xi, \varphi z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(hx, hy, \xi) &= -F(\varphi hx, \varphi hy, \xi) - F(\varphi hx, hy, \varphi \xi) \quad ((3.25) \text{ ve } (2.6) \text{ dan}) \\
&= -F(\varphi^3 x, \varphi^3 y, \xi) \quad ((2.5) \text{ den}) \\
&= -F(\varphi x, \varphi y, \xi)
\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\eta(y)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, hy, \xi) \\
&= -\eta(y)F(\varphi x, \xi, \varphi z) - \eta(z)F(\varphi x, \varphi y, \xi) \\
&= -F(\varphi x, \eta(y)\xi, \varphi z) - F(\varphi x, \varphi y, \eta(z)\xi) \\
&= -F(\varphi x, \varphi^2 y + y, \varphi z) - F(\varphi x, \varphi y, \varphi^2 z + z) \\
&= -F(\varphi x, \varphi^2 y, \varphi z) - F(\varphi x, \varphi y, \varphi^2 z) \\
&\quad -F(\varphi x, y, \varphi z) - F(\varphi x, \varphi y, z) \quad ((3.31) \text{ den}) \\
&= F(x, y, z)
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $F \in W_2$ olur.

2. $F \in W''$ ise $F(x, y, z) = F(\varphi x, \varphi y, z) + F(\varphi x, y, \varphi z)$ dir.

$$\begin{aligned}
F(hx, \xi, hz) &= F(\varphi hx, \varphi \xi, hz) + F(\varphi hx, \xi, \varphi hz) \quad ((3.25) \text{ ve } (2.6) \text{ dan}) \\
&= F(\varphi^3 x, \xi, \varphi^3 z) \quad ((2.5) \text{ den}) \\
&= F(\varphi x, \xi, \varphi z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(hx, hy, \xi) &= F(\varphi hx, \varphi hy, \xi) + F(\varphi hx, hy, \varphi \xi) \quad ((3.25) \text{ ve } (2.6) \text{ dan}) \\
&= F(\varphi^3 x, \varphi^3 y, \xi) \quad ((2.5) \text{ den}) \\
&= F(\varphi x, \varphi y, \xi)
\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\eta(y)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, hy, \xi) &= \eta(y)F(\varphi x, \xi, \varphi z) + \eta(z)F(\varphi x, \varphi y, \xi) \\
&= F(\varphi x, \eta(y)\xi, \varphi z) + F(\varphi x, \varphi y, \eta(z)\xi) \\
&= F(\varphi x, \varphi^2 y + y, \varphi z) + F(\varphi x, \varphi y, \varphi^2 z + z) \\
&= F(\varphi x, \varphi^2 y, \varphi z) + F(\varphi x, \varphi y, \varphi^2 z) \\
&\quad + F(\varphi x, y, \varphi z) + F(\varphi x, \varphi y, z) \quad ((3.31) \text{ den}) \\
&= F(x, y, z)
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $F \in W_2$ dir.

Teorem 3.1.13. $W_2 = W' \oplus W''$ dir.

Kanıt. W_2, W' ve W'' nün tanımlarını kullanarak;

$$W' \cap W'' = \{0\} \text{ ve}$$

$F \in W_2$ olsun. $F = A + B$ olacak şekilde en az bir $A \in W', B \in W''$ vardır, ifadelerinin doğruluğunu görelim.

$$F(x, y, z) + F(\varphi x, \varphi y, z) + F(\varphi x, y, \varphi z) = 0$$

ve

$$F(x, y, z) - F(\varphi x, \varphi y, z) - F(\varphi x, y, \varphi z) = 0$$

eşitliklerini taraf taraf toplarsak $F(x, y, z) = 0$ dır. Sonuç olarak $W' \cap W'' = \{0\}$.

$F \in W_2$ iken $F = A + B$ olacak şekilde en az bir $A \in W', B \in W''$ var mıdır?

$F = A + B$ ise $B = F - A$ dır.

$B \in W''$ ise $B(x, y, z) - B(\varphi x, \varphi y, z) - B(\varphi x, y, \varphi z) = 0$ dır. Burada

$$\begin{aligned} B(x, y, z) &= F(x, y, z) - A(x, y, z) \\ -B(\varphi x, \varphi y, z) &= -F(\varphi x, \varphi y, z) + A(\varphi x, \varphi y, z) \\ -B(\varphi x, y, \varphi z) &= -F(\varphi x, y, \varphi z) + A(\varphi x, y, \varphi z) \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned} 0 &= F(x, y, z) - F(\varphi x, \varphi y, z) - F(\varphi x, y, \varphi z) \\ &\quad -A(x, y, z) + A(\varphi x, \varphi y, z) + A(\varphi x, y, \varphi z) \quad ; \quad A \in W' \\ &= F(x, y, z) - F(\varphi x, \varphi y, z) - F(\varphi x, y, \varphi z) - 2A(x, y, z) \end{aligned}$$

$A(x, y, z) = \frac{1}{2}(F(x, y, z) - F(\varphi x, \varphi y, z) - F(\varphi x, y, \varphi z))$ dir. $B = F - A$ olduğundan

$$\begin{aligned} B(x, y, z) &= F(x, y, z) - A(x, y, z) \\ &= F(x, y, z) - \frac{1}{2}(F(x, y, z) - F(\varphi x, \varphi y, z) - F(\varphi x, y, \varphi z)) \\ &= \frac{1}{2}(F(x, y, z) + F(\varphi x, \varphi y, z) + F(\varphi x, y, \varphi z)) \end{aligned}$$

dir. $A \in W'$ ve $B \in W''$ olduğu kolaylıkla görülür. □

$x, y, z \in V$ olmak üzere

$$\mathcal{F}_7 = \{F \in W' \mid F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) = 0\} \subset W'$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{F}_7$ nin dik izdüşümü

$$\mathcal{F}_7^\perp = \{F \in W' \mid F(x, y, z) + F(y, z, x) - F(z, x, y) + 2F(\varphi x, \varphi y, z) = 0\}$$

dır. $\mathcal{F}_7^\perp$ nin alt uzayları,

$$\mathcal{F}_4 = \{F \in \mathcal{F}_7^\perp \mid F(x, y, z) = -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{\eta(y)g(\varphi x, \varphi z) + \eta(z)g(\varphi x, \varphi y)\}$$

$$\mathcal{F}_5 = \{F \in \mathcal{F}_7^\perp \mid F(x, y, z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{\eta(y)g(\varphi x, z) + \eta(z)g(\varphi x, y)\}$$

$$\mathcal{F}_6 = \{F \in \mathcal{F}_7^\perp \mid \theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0\}$$

dır.

Teorem 3.1.14. $W' = \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7$ dir [1].

W'' nün aşağıdaki $\mathcal{F}_8$ ve $\mathcal{F}_9$ alt uzayları vardır.

$$\mathcal{F}_8 = \{F \in W'' \mid F(x, y, z) + F(y, z, x) - F(z, x, y) - 2F(\varphi x, \varphi y, z) = 0\},$$

$$\mathcal{F}_9 = \{F \in W'' \mid F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) = 0\}.$$

Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_8 : \quad & F(x, y, z) = F(\varphi x, \varphi y, z) + F(\varphi x, y, \varphi z); \\ & F(x, y, z) = -F(y, z, x) + F(z, x, y) + 2F(\varphi x, \varphi y, z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_9 : \quad & F(x, y, z) = F(\varphi x, \varphi y, z) + F(\varphi x, y, \varphi z); \\ & F(x, y, z) = -F(y, z, x) - F(z, x, y) \end{aligned}$$

olduğu açıkça görülmektedir. Bu eşitlikler kullanılarak;

$$\mathcal{F}_8 \text{ den } F(x, y, \xi) = F(y, \xi, x) = F(\varphi x, \varphi y, \xi),$$

$$\mathcal{F}_9 \text{ dan } F(x, y, \xi) = -F(y, \xi, x) = F(\varphi x, \varphi y, \xi)$$

ve

$$\begin{aligned}
& F(x, y, z) \\
&= F(\varphi x, \varphi y, z) + F(\varphi x, y, \varphi z) \\
&= F(\varphi^2 x, \varphi^2 y, z) + F(\varphi^2 x, \varphi y, \varphi z) + F(\varphi^2 x, \varphi y, \varphi z) + F(\varphi^2 x, y, \varphi^2 z) \\
&= F(-x, -y + \eta(y)\xi, z) + F(-x, \varphi y, \varphi z) + F(-x, \varphi y, \varphi z) + F(-x, y, -z + \eta(z)\xi) \\
&= F(x, y, z) - F(x, \eta(y)\xi, z) - 2F(x, \varphi y, \varphi z) + F(x, y, z) - F(x, y, \eta(z)\xi) \\
&= 2F(x, y, z) - \eta(y)F(x, \xi, z) - 2F(x, \varphi y, \varphi z) - \eta(z)F(x, y, \xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F(x, y, z) \\
&= \eta(y)F(x, z, \xi) + 2F(x, \varphi y, \varphi z) + \eta(z)F(x, y, \xi) \\
&\quad ; \quad F(x, \varphi y, \varphi z) = F(x, y, z) - \eta(y)F(x, z, \xi) - \eta(z)F(x, y, \xi) \\
&= \eta(y)F(x, z, \xi) + \eta(z)F(x, y, \xi)
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_8 \quad : \quad & F(x, y, z) = \eta(y)F(x, z, \xi) + \eta(z)F(x, y, \xi); \\
& F(x, y, \xi) = F(y, x, \xi) = F(\varphi x, \varphi y, \xi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_9 \quad : \quad & F(x, y, z) = \eta(y)F(x, z, \xi) + \eta(z)F(x, y, \xi); \\
& F(x, y, \xi) = -F(y, x, \xi) = F(\varphi x, \varphi y, \xi).
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.1.15. $W'' = \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_9$ dur.

Kanıt. $\mathcal{F}_8 \cap \mathcal{F}_9 = \{0\}$ ve $F \in W''$ olmak üzere, $F = A + B$ olacak şekilde en az bir $A \in \mathcal{F}_8$, $B \in \mathcal{F}_9$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{F}_8$ ve $\mathcal{F}_9$ u ortak çözersek $F(x, y, \xi) = 0$ ve $F(x, z, \xi) = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Sonuç olarak $F(x, y, z) = 0$ yani $\mathcal{F}_8 \cap \mathcal{F}_9 = \{0\}$ olduğu elde edilir.

$$\begin{aligned}
& F \in W'' \quad \text{ise} \quad F(x, y, z) = F(\varphi x, \varphi y, z) + F(\varphi x, y, \varphi z) \\
& A \in \mathcal{F}_8 \quad \text{ise} \quad A(x, y, z) + A(y, z, x) - A(z, x, y) - 2A(\varphi x, \varphi y, z) = 0 \\
& B \in \mathcal{F}_9 \quad \text{ise} \quad B(x, y, z) + B(y, z, x) + B(z, x, y) = 0
\end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}
B(x, y, z) &= F(x, y, z) - A(x, y, z) \\
B(y, z, x) &= F(y, z, x) - A(y, z, x) \\
B(z, x, y) &= F(z, x, y) - A(z, x, y)
\end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned}
0 &= F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) \\
&\quad - A(x, y, z) - A(y, z, x) - A(z, x, y) \quad ; A \in \mathcal{F}_8 \\
&= F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) \\
&\quad - 2A(z, x, y) - 2A(\varphi x, \varphi y, z)
\end{aligned}$$

dir. Burada x yerine $\varphi^2 x$, y yerine $\varphi^2 y$, yazarsak;

$$\begin{aligned}
0 &= F(\varphi^2 x, \varphi^2 y, z) + F(\varphi^2 y, z, \varphi^2 x) + F(z, \varphi^2 x, \varphi^2 y) \\
&\quad - 2A(z, \varphi^2 x, \varphi^2 y) - 2A(\varphi^3 x, \varphi^3 y, z) \\
&\quad ; A \in W_2, A(z, \varphi^2 x, \varphi^2 y) = 0, \varphi^3 x = \varphi x \\
&= F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) - 2A(z, x, y) \\
&\quad - F(\varphi^2 x, \varphi^2 y, z) - F(\varphi^2 y, z, \varphi^2 x) - F(z, \varphi^2 x, \varphi^2 y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2A(z, x, y) &= F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) \\
&\quad - F(\varphi^2 x, \varphi^2 y, z) - F(\varphi^2 y, z, \varphi^2 x) - F(z, \varphi^2 x, \varphi^2 y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada z yerine x , x yerine y , y yerine z yazalım.

$$\begin{aligned}
A(x, y, z) &= \frac{1}{2} \{ F(y, z, x) + F(z, x, y) + F(x, y, z) \\
&\quad - F(\varphi^2 y, \varphi^2 z, x) - F(\varphi^2 z, x, \varphi^2 y) - F(x, \varphi^2 y, \varphi^2 z) \} \\
B(x, y, z) &= F(x, y, z) - A(x, y, z) \\
&= \frac{1}{2} \{ F(x, y, z) - F(y, z, x) - F(z, x, y) \\
&\quad + F(\varphi^2 y, \varphi^2 z, x) + F(\varphi^2 z, x, \varphi^2 y) - F(x, \varphi^2 y, \varphi^2 z) \}
\end{aligned}$$

dir. $A \in \mathcal{F}_8$ ve $B \in \mathcal{F}_9$ olduğu kolaylıkla görülür. Son olarak $\mathcal{F}_{10} = W_3$ ve $\mathcal{F}_{11} = W_4$ olarak alalım. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

□

Teorem 3.1.16. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_{11}$ dir [1].

$i = \{1, \dots, 11\}$ için $\mathcal{F}_i$ ler aşağıdaki şekilde karakterize edilir. $x, y, z \in V$ olmak üzere,

$$\mathcal{F}_1 : F(x, y, z) = \frac{1}{2n} \{g(x, \varphi y)\theta(\varphi z) + g(x, \varphi z)\theta(\varphi y) + g(\varphi x, \varphi y)\theta(\varphi^2 z) + g(\varphi x, \varphi z)\theta(\varphi^2 y)\},$$

$$\mathcal{F}_2 : F(\xi, y, z) = F(x, \xi, z) = 0; \\ F(x, y, \varphi z) + F(y, z, \varphi x) + F(z, x, \varphi y) = 0 \quad ; \quad \theta = 0,$$

$$\mathcal{F}_3 : F(\xi, y, z) = F(x, \xi, z) = 0; \\ F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) = 0,$$

$$\mathcal{F}_4 : F(x, y, z) = -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{\eta(y)g(\varphi x, \varphi z) + \eta(z)g(\varphi x, \varphi y)\},$$

$$\mathcal{F}_5 : F(x, y, z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{\eta(y)g(\varphi x, z) + \eta(z)g(\varphi x, y)\}$$

$$\mathcal{F}_6 : F(x, y, z) = -F(\varphi x, \varphi y, z) - F(\varphi x, y, \varphi z); \\ F(x, y, z) = -F(y, z, x) + F(z, x, y) - 2F(\varphi x, \varphi y, z); \\ \theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0,$$

$$\mathcal{F}_7 : F(x, y, z) = -F(\varphi x, \varphi y, z) - F(\varphi x, y, \varphi z); \\ F(x, y, z) = -F(y, z, x) - F(z, x, y),$$

$$\mathcal{F}_8 : F(x, y, z) = F(\varphi x, \varphi y, z) + F(\varphi x, y, \varphi z); \\ F(x, y, z) = -F(y, z, x) + F(z, x, y) + 2F(\varphi x, \varphi y, z),$$

$$\mathcal{F}_9 : F(x, y, z) = F(\varphi x, \varphi y, z) + F(\varphi x, y, \varphi z); \\ F(x, y, z) = -F(y, z, x) - F(z, x, y)$$

$$\mathcal{F}_{10} : F(x, y, z) = \eta(x)F(\xi, \varphi y, \varphi z) \quad \text{olduğunu gösterelim.}$$

$$\mathcal{F}_{10} = W_3 = \{F \in \mathcal{F} \mid \mathcal{P}_3 F(x, y, z) = \eta(x)F(\xi, hy, hz)\} \text{ dir.}$$

$$F(x, \varphi y, \varphi z) = F(x, y, z) - \eta(y)F(x, \xi, z) - \eta(z)F(x, y, \xi), F \in \mathcal{F}$$

Burada x yerine ξ , y yerine φy , z yerine φz yazalım. (3.25) den

$$F(\xi, \varphi^2 y, \varphi^2 z) = F(\xi, \varphi y, \varphi z) - \eta(\varphi y)F(\xi, \xi, \varphi z) - \eta(\varphi z)F(\xi, \varphi y, \xi) \\ = F(\xi, \varphi y, \varphi z)$$

$$F(\xi, hy, hz) = F(\xi, \varphi y, \varphi z)$$

elde edilir.

$\mathcal{F}_{11} : F(x, y, z) = \eta(x)\{\eta(y)\omega(z) + \eta(z)\omega(y)\}$ olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{F}_{11} = W_4 = \{F \in W_2^\perp \mid \mathcal{P}_3 F = 0, \eta(x)F(\xi, hy, hz) = 0\}$$

$W_2^\perp$ ve $W_1^\perp$ tanımlarını kullanarak $F \in \mathcal{F}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(x, z, y) \\ F(x, \varphi y, \varphi z) &= F(x, y, z) - \eta(y)F(x, \xi, z) - \eta(z)F(x, y, \xi) \\ F(x, \xi, \xi) &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. $\mathcal{F}_{11}$ in tanımından;

$$\begin{aligned} 0 &= \eta(x)F(\xi, hy, hz) \\ &= F(\eta(x)\xi, hy, hz) \quad ((3.26) \text{ den}) \\ &= F(x - hx, hy, hz) \\ &= F(x, hy, hz) - F(hx, hy, hz) \\ &= F(x, y - \eta(y)\xi, z - \eta(z)\xi) \\ &= F(x, y, z - \eta(z)\xi) - \eta(y)F(x, \xi, z - \eta(z)\xi) \\ &= F(x, y, z) - \eta(z)F(x, y, \xi) - \eta(y)F(x, \xi, z) + \eta(y)\eta(z)F(x, \xi, \xi) \\ &= F(x, y, z) - \eta(z)F(x, y, \xi) - \eta(y)F(x, \xi, z) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $F(x, y, z) = \eta(z)F(x, y, \xi) + \eta(y)F(x, \xi, z)$ dir. Buradan

$$F(x, y, \xi) = F(\xi, \xi, y)\eta(x)$$

$$F(x, \xi, z) = F(x, \xi, \xi)\eta(x)$$

durumlarından bahsedilebilir. $\eta(y)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, hy, \xi) = 0$ denkleminde y yerine ξ yazalım.

$$\begin{aligned} 0 &= \eta(\xi)F(hx, \xi, hz) + \eta(z)F(hx, h\xi, \xi) \quad ((2.4) \text{ ve } (3.29) \text{ dan}) \\ &= F(hx, \xi, hz) \\ &= F(\varphi^2 x, \xi, z - \eta(z)\xi) \\ &= F(\varphi^2 x, \xi, z) - \eta(z)F(\varphi^2 x, \xi, \xi) \\ &= F(\varphi^2 x, \xi, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\xi, y, \xi)\eta(x) &= F(\eta(x)\xi, y, \xi) \\
&= F(x + \varphi^2 x, y, \xi) \\
&= F(x, y, \xi) + F(\varphi^2 x, y, \xi) \\
&= F(x, y, \xi)
\end{aligned}$$

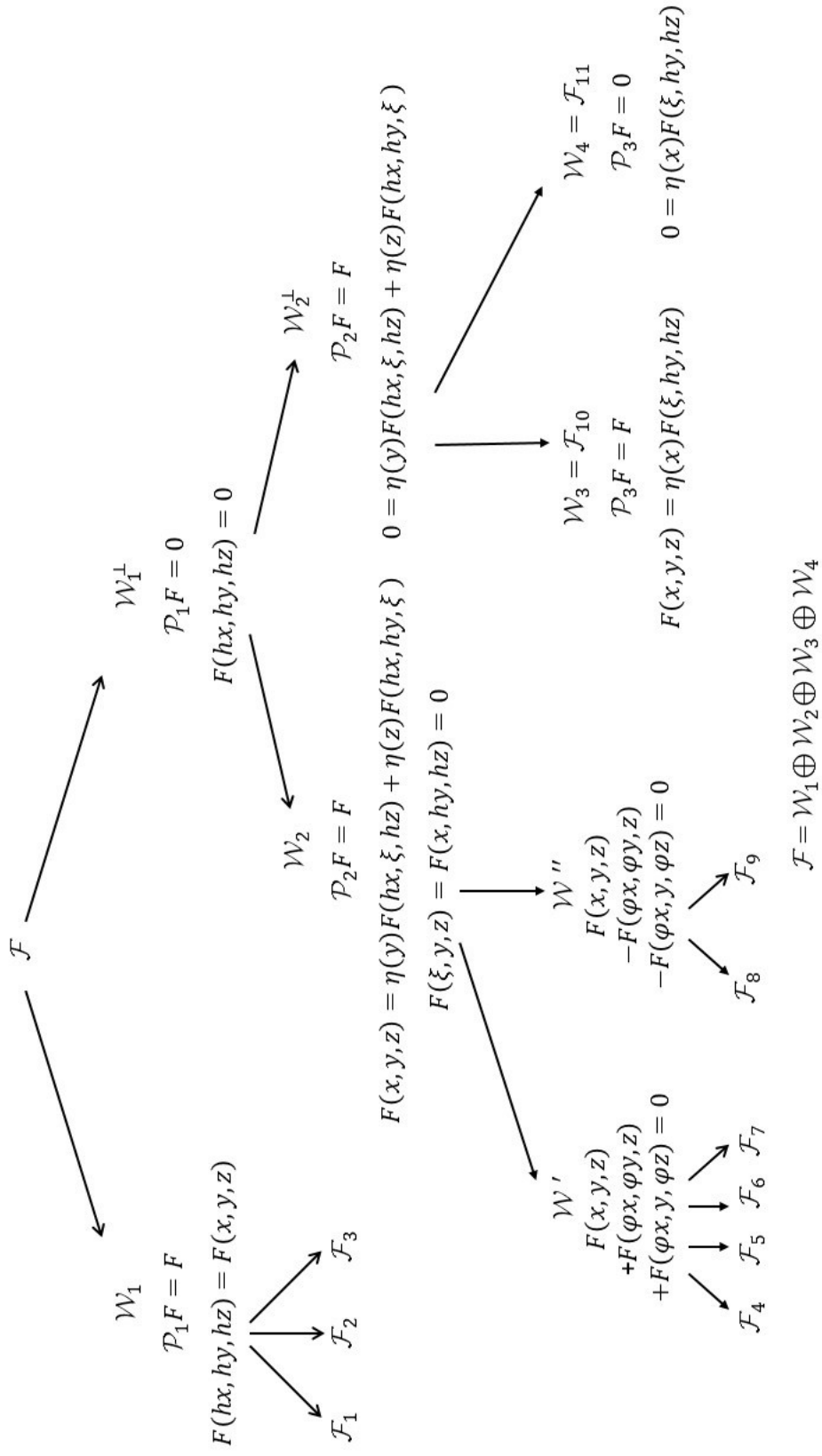
elde edilir.

$$\begin{aligned}
F(\xi, \xi, z)\eta(x) &= F(\eta(x)\xi, \xi, z) \\
&= F(x + \varphi^2 x, \xi, z) \\
&= F(x, \xi, z) + F(\varphi^2 x, \xi, z) \\
&= F(x, \xi, z)
\end{aligned}$$

olup sonuç olarak

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= \eta(z)F(x, y, \xi) + \eta(y)F(x, \xi, z) \\
&= \eta(z)F(\xi, y, \xi)\eta(x) + \eta(y)F(\xi, \xi, z)\eta(x) \\
&= \eta(x)\{\eta(z)F(\xi, y, \xi) + \eta(y)F(\xi, \xi, z)\} \\
&= \eta(x)\{\eta(z)\omega(y) + \eta(y)\omega(z)\}
\end{aligned}$$

dir. Hemen hemen kontak B -metrik manifoldlarının sınıflandırmasını aşağıdaki diagramla verebiliriz:



Teorem 3.1.17. *Sasaki-like hemen hemen kontak B–metrik manifoldlar $\mathcal{F}_4$ sınıfındandır.*

Kanıt. Sasaki-like hemen hemen kontak B–metrik manifoldları için

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= g((\nabla_x \varphi) y, z) \\
&= g(-g(x, y) \xi - \eta(y) x + 2\eta(x) \eta(y) \xi, z) \\
&= -g(x, y) g(\xi, z) - \eta(y) g(x, z) + 2\eta(x) \eta(y) g(\xi, z) \\
&= -g(x, y) \eta(z) - \eta(y) g(x, z) + 2\eta(x) \eta(y) \eta(z)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $F(e_i, e_i, \xi) = -g(e_i, e_i)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\theta(\xi) &= g^{ij} F(e_i, e_j, \xi) \\
&= \sum_{i=1}^n g^{ij} F(e_i, e_i, \xi) + \sum_{i=n+1}^{2n} g^{ij} F(e_i, e_i, \xi) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1) + \sum_{i=n+1}^{2n} (-1) \\
&= -n - n = -2n
\end{aligned} \tag{3.33}$$

dir. (3.32) ve (3.33) dan dolayı $\mathcal{F}_4$ koşulunu sağlayan $F(x, y, z)$ leri düzenleyecek olursak

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{ \eta(y) g(\varphi x, \varphi z) + \eta(z) g(\varphi x, \varphi y) \} \\
&= -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{ \eta(y) (-g(x, z) + \eta(x) \eta(z)) + \eta(z) (-g(x, y) + \eta(x) \eta(y)) \} \\
&= -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{ -\eta(y) g(x, z) + \eta(y) \eta(x) \eta(z) - \eta(z) g(x, y) + \eta(z) \eta(x) \eta(y) \} \\
&= -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{ -\eta(y) g(x, z) - \eta(z) g(x, y) + 2\eta(x) \eta(y) \eta(z) \}
\end{aligned}$$

olur. $\theta(\xi) = -2n$ olduğundan Sasaki-like hemen hemen B-metrik manifoldlar için $F(x, y, z)$, $\mathcal{F}_4$ sınıfının koşulunu sağlar. $\square$

Teorem 3.1.18. [2] $(M, \varphi, \xi, \eta, g), \mathcal{F}_i$ ($i = 0, 1, 4, 5$) sınıfından olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır:

- a) $M \in \mathcal{F}_0$ ise $N = [\varphi, \varphi] = d\eta = F = \nabla\varphi = \nabla\eta = \nabla\xi = \theta = \theta^* = \omega = 0$;
- b) $M \in \mathcal{F}_1$ ise $N = [\varphi, \varphi] = d\eta = \nabla\eta = \nabla\xi = \theta(\xi) = \theta^*(\xi) = \omega = 0$;
- c) $M \in \mathcal{F}_4$ ise $N = [\varphi, \varphi] = d\eta = \theta^* = \omega = 0$;
- d) $M \in \mathcal{F}_5$ ise $N = [\varphi, \varphi] = d\eta = \theta = \omega = 0$.

Teorem 3.1.19. $(M, \varphi, \xi, \eta, g), \mathcal{F}_i$ ($i = 0, 1, 4, 5$) sınıfından olsun. Bu durumda $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ nin $\mathcal{D}$ homotetik deformasyonu olan $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ de $\mathcal{F}_i$ sınıfındandır.

Kanıt. M manifoldu $\mathcal{F}_i$ sınıfından ise önceki teoremden $d\eta = 0$ dır. Dolayısıyla (3.17) eşitliğinden

$$\tilde{F}(x, y, z) = tF(x, y, z) \quad (3.34)$$

elde edilir.

1) $M, \mathcal{F}_0$ sınıfından ise $F = 0$ ve $d\eta = 0$ dır. O halde $\tilde{F} = 0$ olur. Yani $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}) \mathcal{F}_0$ sınıfındandır.

2) $M, \mathcal{F}_1$ sınıfından ise $d\eta = 0$ ve $\mathcal{F}_1$ sınıfının koşulu sağlanır. O halde (3.34) eşitliği sağlanır. Ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n} \{ \tilde{g}(x, \tilde{\varphi}y) \tilde{\theta}(\tilde{\varphi}z) + \tilde{g}(x, \tilde{\varphi}z) \tilde{\theta}(\tilde{\varphi}y) - \tilde{g}(\tilde{\varphi}x, \tilde{\varphi}y) \tilde{\theta}(\tilde{\varphi}^2z) - \tilde{g}(\tilde{\varphi}x, \tilde{\varphi}z) \tilde{\theta}(\tilde{\varphi}^2y) \} \\ &= \frac{1}{2n} \{ tg(x, \varphi y) \theta(\varphi z) + tg(x, \varphi z) \theta(\varphi y) - tg(\varphi x, \varphi y) \theta(\varphi^2z) - tg(\varphi x, \varphi z) \theta(\varphi^2y) \} \\ &= t \left[\frac{1}{2n} \{ g(x, \varphi y) \theta(\varphi z) + g(x, \varphi z) \theta(\varphi y) - g(\varphi x, \varphi y) \theta(\varphi^2z) - g(\varphi x, \varphi z) \theta(\varphi^2y) \} \right] \\ &= tF(x, y, z) = \tilde{F}(x, y, z) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}) \mathcal{F}_1$ sınıfındandır.

3) $M, \mathcal{F}_4$ sınıfından ise $d\eta = 0$ ve $\mathcal{F}_4$ sınıfının koşulu sağlanır. O halde (3.34) eşitliği sağlanır ve

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2n} \tilde{\theta}(\tilde{\xi}) \{ \tilde{\eta}(y) \tilde{g}(\tilde{\varphi}x, \tilde{\varphi}z) + \tilde{\eta}(z) g(\tilde{\varphi}x, \tilde{\varphi}y) \} \\ &= -\frac{1}{2n} \left(-\frac{1}{t} \theta(\xi) \{ -t^2 \eta(y) g(\varphi x, \varphi z) - t^2 \eta(z) g(\varphi x, \varphi y) \} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t \left[-\frac{1}{2n} \theta^*(\xi) \{ \eta(y)g(\varphi x, \varphi z) + \eta(z)g(\varphi x, \varphi y) \} \right] \\
&= tF(x, y, z) = \tilde{F}(x, y, z)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ $\mathcal{F}_4$ sınıfındandır.

4) $M, \mathcal{F}_5$ sınıfından ise $d\eta = 0$ ve $\mathcal{F}_5$ sınıfının koşulu sağlanır. O halde (3.34) eşitliği sağlanır ve

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2n} \tilde{\theta}^*(\tilde{\xi}) \{ \tilde{\eta}(y)\tilde{g}(\tilde{\varphi}x, z) + \tilde{\eta}(z)g(\tilde{\varphi}x, y) \} \\
&= -\frac{1}{2n} \left(-\frac{1}{t} \theta^*(\xi) \{ -t^2 \eta(y)g(\varphi x, z) - t^2 \eta(z)g(\varphi x, y) \} \right) \\
&= t \left[-\frac{1}{2n} \theta^*(\xi) \{ \eta(y)g(\varphi x, z) + \eta(z)g(\varphi x, y) \} \right] \\
&= tF(x, y, z) = \tilde{F}(x, y, z)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ $\mathcal{F}_5$ sınıfındandır. □

3.2. Hemen Hemen Kontak B-Metrik Manifoldların Örnekleri

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B-metrik manifold olsun. $p \in M$ için $V = T_p M$ olmak üzere $\mathcal{F}$ uzayını kullanarak φ yapısının kovaryant türevine göre hemen hemen kontak B-metrik manifoldları sınıfının alt sınıflarını tanımlayabiliriz. Her $p \in M$ için $V = T_p M$ olmak üzere $F(x, y, z) = g((\nabla_x \varphi)y, z)$ tensörü $\mathcal{F}_i$ sınıfına ait ise hemen hemen kontak B-metrik manifoldun $i = 1, \dots, 11$ olmak üzere $\mathcal{F}_i$ sınıfına ait olduğu söylenir. Böylece, hemen hemen kontak B-metrik manifoldların 11 temel sınıfı tanımlanır. Benzer şekilde $\mathcal{F}_i \oplus \mathcal{F}_j, \mathcal{F}_i \oplus \mathcal{F}_j \oplus \mathcal{F}_k, \dots$ sınıflarını da tanımlayabiliriz. Böylece hemen hemen kontak B-metrik manifoldların 2^{11} tane sınıfı mümkündür.

Hemen hemen kontak B-metrik manifoldlarının $\mathcal{F}_0$ sınıfı $F(x, y, z) = 0$ koşuluyla tanımlanır.

Örnek 3.2.1. $\mathbb{R}^{2n+2} = \{(u^1, \dots, u^{n+1}, v^1, \dots, v^{n+1}) \mid u^i, v^i \in \mathbb{R}\}$ uzayı üzerinde g metriğini $X = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right)$ için $g(X, X) = \sum_{i=1}^{n+1} (-\lambda_i^2 + \mu_i^2)$ aldığımızda ve

$$J : \chi(\mathbb{R}^{2n+2}) \longrightarrow \chi(\mathbb{R}^{2n+2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^i} &\longmapsto \frac{\partial}{\partial v^i} \\ \frac{\partial}{\partial v^i} &\longmapsto -\frac{\partial}{\partial u^i} \end{aligned}$$

olarak alındığında $(\mathbb{R}^{2n+2}, J, g)$ hemen hemen kompleks Riemann manifoldu olduğunu söylemiştik.

$$S : g(Z, Z) = -1$$

g , B -metrikli küre olsun. $p \in S$ olmak üzere Z , $T_p S$ tanjant uzayının normal vektörüdür. S üzerinde ξ vektör alanını aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde belirleyelim.

$$\xi = \lambda Z + \mu JZ, \quad g(Z, \xi) = 0, \quad g(\xi, \xi) = 1$$

$$\begin{aligned} 0 = g(Z, \xi) &= g(Z, \lambda Z + \mu JZ) \\ &= \lambda g(Z, Z) + \mu g(Z, JZ) \\ &= -\lambda + \mu g(Z, JZ) \end{aligned}$$

ise $g(Z, JZ) = \frac{\lambda}{\mu}$ elde edilir. $\forall p \in S$ için $g(Z, JZ) = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olsun.

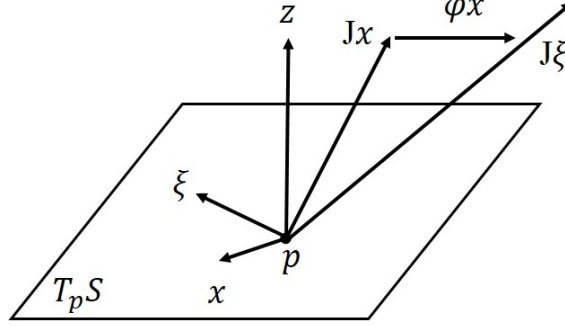
$$\frac{\lambda}{\mu} = \tan t \quad \text{ise} \quad \lambda = \sin t, \mu = \cos t \quad \text{dir.} \quad \text{O halde} \quad \xi = \sin t Z + \cos t JZ,$$

$$J\xi = -\cos t Z + \sin t JZ, \quad Z = \frac{J\xi - \sin t JZ}{-\cos t} \quad \text{dir.}$$

$$\begin{aligned} g(\xi, \xi) &= g(\sin t Z + \cos t JZ, \sin t Z + \cos t JZ) \\ &= \sin^2 t g(Z, Z) + 2 \sin t \cos t g(Z, JZ) + \cos^2 t g(JZ, JZ) \\ &= -\sin^2 t + 2 \sin t \cos t \frac{\sin t}{\cos t} + \cos^2 t \\ &= \sin^2 t + \cos^2 t \\ &= 1 \\ g(J\xi, Z) &= g(-\cos t Z + \sin t JZ, Z) \\ &= -\cos t g(Z, Z) + \sin t g(JZ, Z) \\ &= \cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t} \\ &= \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $J\xi, T_p S$ nin üzerinde değildir.

φx , Jx vektörünün $J\xi$ ye karşılık gelen $T_p S$ üzerindeki izdüşümü yani $x \in T_p S$ olmak üzere $\varphi x = Jx - \lambda J\xi$ dir.



O halde

$$\begin{aligned} 0 = g(\varphi x, Z) &= g(Jx - \lambda J\xi, Z) \\ &= g(Jx, Z) - \lambda g(J\xi, Z) \end{aligned}$$

ise $\lambda = \frac{g(Jx, Z)}{g(J\xi, Z)}$ dir. O halde

$$\varphi x = Jx - \lambda J\xi = Jx - \frac{g(Jx, Z)}{g(J\xi, Z)} J\xi$$

dir.

$$\begin{aligned} \frac{g(Jx, Z)}{g(J\xi, Z)} &= \frac{g\left(Jx, \frac{J\xi - \sin t JZ}{-\cos t}\right)}{g\left(J\xi, \frac{J\xi - \sin t JZ}{-\cos t}\right)} \\ &= \frac{g(Jx, J\xi) - \sin t g(Jx, JZ)}{g(J\xi, J\xi) - \sin t g(J\xi, JZ)} \\ &= \frac{-g(x, \xi) - \sin t g(x, Z)}{-g(\xi, \xi) - \sin t g(\xi, Z)} \end{aligned}$$

$$; g(x, Z) = 0, g(\xi, Z) = 0, g(\xi, \xi) = 1$$

$$= g(x, \xi)$$

eşitliğinden dolayı $\eta(x) = g(x, \xi)$ diyelim. O zaman $\varphi x = Jx - \eta(x)J\xi$ olur.

Şimdi (2.5) eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\varphi(\varphi x) &= \varphi(Jx) - \eta(x)\varphi(J\xi) \\
&= J^2x - \eta(Jx)J\xi - \eta(x)\{J(J\xi) - \eta(J\xi)J\xi\} \\
&= -x - \eta(Jx)J\xi - \eta(x)\{-\xi - \eta(J\xi)J\xi\} \\
&= -x - g(Jx, \xi)J\xi + g(x, \xi)\xi + g(x, \xi)g(J\xi, \xi)J\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi^2x = -x + \eta(x)\xi$ olması için $g(x, \xi)g(J\xi, \xi) - g(Jx, \xi) = 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
g(J\xi, \xi) &= g(-\cos tZ + \sin tJZ, \sin tZ + \cos tJZ) \\
&= -\cos t \sin tg(Z, Z) - \cos^2 tg(Z, JZ) + \sin^2 tg(JZ, Z) + \sin t \cos tg(JZ, JZ) \\
&= 2 \sin t \cos t - \tan t(\cos^2 t - \sin^2 t) \\
&= \tan t \\
g(Jx, \xi) &= g(Jx, \sin tZ + \cos tJZ) \\
&= \sin tg(Jx, Z) + \cos tg(Jx, JZ) \quad ; g(Z, x) = 0 \\
&= \sin tg(Z, Jx) \\
g(x, \xi) &= g(x, \sin tZ + \cos tJZ) \\
&= \sin tg(x, Z) + \cos tg(x, JZ) \quad ; g(Z, x) = 0 \\
&= \cos tg(Z, Jx)
\end{aligned}$$

dir. Buradan $g(x, \xi)g(J\xi, \xi) - g(Jx, \xi) = \cos tg(Z, Jx) \tan t - \sin tg(Z, Jx) = 0$ elde edilir. Böylece (2.5) sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\eta(\xi) &= g(\xi, \xi) = 1 \\
\eta(\varphi x) &= g(\varphi x, \xi) \\
&= g(Jx - \eta(x)J\xi, \xi) \\
&= g(Jx, \xi) - \eta(x)g(J\xi, \xi) \\
&= \sin tg(Z, Jx) - g(x, \xi) \tan t \\
&= \sin tg(Z, Jx) - \cos tg(Z, Jx) \tan t \\
&= 0 \\
\varphi\xi &= J\xi - \eta(\xi)J\xi \\
&= -\cos tZ + \sin tJZ + \cos tZ - \sin tJZ \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

$x, y \in T_p S$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
g(\varphi x, \varphi x) &= g(Jx - \eta(x)J\xi, Jy - \eta(y)J\xi) \\
&= g(Jx, Jy) - \eta(y)g(Jx, J\xi) - \eta(x)g(J\xi, Jy) + \eta(y)\eta(x)g(J\xi, J\xi) \\
&= -g(x, y) + \eta(y)g(x, \xi) + \eta(x)g(\xi, y) - \eta(y)\eta(x) \\
&= -g(x, y) + 2\eta(x)\eta(y) - \eta(y)\eta(x) \\
&= -g(x, y) + \eta(x)\eta(y)
\end{aligned}$$

dir. Böylece S küresi üzerinde (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak B -metrik yapısı vardır. Şimdi $S \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$ hiperyüzeyi için Levi-Civita kovaryant türevini bulalım. $\nabla, \mathbb{R}^{2n+2}$ nin $\bar{\nabla}, S$ nin Levi-Civita konneksiyonu ve $Z \in \mathbb{R}^{2n+2}$ yer vektör alanı ve $X \in \chi(S)$ olsun. $Z = \sum u_i \partial_i$ şeklinde yazılabilir.

$$\bar{\nabla}_X Z = \sum X(u_i) \partial_i = X$$

dir. $X, Y \in \chi(S)$ olmak üzere Gauss ve Weingarten formüllerinden,

$$\begin{aligned}
g(\pi(X, Y), Z) &= g(\text{nor}(\bar{\nabla}_X Y), Z) \\
&= g(\bar{\nabla}_X Y, Z) \quad ((2.2) \text{ den}) \\
&= -g(Y, \bar{\nabla}_X Z) \\
&= -g(Y, X)
\end{aligned}$$

dir. Yani $\pi(X, Y) = g(X, Y)Z$ dir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + g(X, Y)Z, & X, Y \in \chi(S); \\
\bar{\nabla}_X Z &= X, & X \in \chi(S)
\end{aligned}$$

elde edilir. $x, y \in T_p S$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\nabla_x \xi &= \cos t \varphi x - \sin t \varphi^2 x + 2\eta(x) \cos t J\xi \\
F(x, y, \xi) &= g((\nabla_x \varphi)\xi, y) = -\cos t g(\varphi x, \varphi y) - \sin t g(\varphi x, y)
\end{aligned}$$

dir. İlk olarak ξ yi $(-\sin t)$ ve $J\xi$ yi $(\cos t)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak;

$$Z = \sin t \xi - \cos t J\xi, \quad JZ = \sin t J\xi + \cos t \xi$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\nabla_x \xi &= \bar{\nabla}_x \xi - g(x, \xi)Z \\
&= \bar{\nabla}_x (\sin tZ + \cos tJZ) - \eta(x)Z \\
&= \sin t\bar{\nabla}_x Z + \cos tJ(\bar{\nabla}_x Z) - \eta(x)Z \\
&= \sin tx + \cos tJx - \eta(x)Z \\
&= \sin t(-\varphi^2 x + \eta(x)\xi) + \cos t(\varphi x + \eta(x)J\xi) - \eta(x)Z \\
&= -\sin t\varphi^2 x + \eta(x)\sin t\xi + \cos t\varphi x + \eta(x)\cos tJ\xi - \eta(x)Z \\
&= -\sin t\varphi^2 x + \cos t\varphi x + \eta(x)(\sin t\xi + \cos tJ\xi - Z) \\
&= -\sin t\varphi^2 x + \cos t\varphi x + \eta(x)(\sin t\xi + \cos tJ\xi - \sin t\xi + \cos tJ\xi) \\
&= -\sin t\varphi^2 x + \cos t\varphi x + 2\eta(x)\cos tJ\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada x in içinde ξ bulunmadığından $\eta(x) = 0$ dır. O halde

$$\nabla_x \xi = -\sin t\varphi^2 x + \cos t\varphi x$$

dir.

$$\begin{aligned}
F(x, y, \xi) &= g((\nabla_x \varphi)\xi, y) \\
&= g(\nabla_x \varphi \xi - \varphi(\nabla_x \xi), y) \\
&= -g(\varphi(\nabla_x \xi), y) \\
&= -g(\varphi(\cos t\varphi x - \sin t\varphi^2 x), y) \\
&= -g(\cos t\varphi^2 x - \sin t\varphi^3 x, y) \\
&= -\cos tg(\varphi^2 x, y) - \sin tg(\varphi x, y) \\
&= -\cos tg(\varphi x, \varphi y) - \sin tg(\varphi x, y)
\end{aligned}$$

dir. $\cos t = \frac{\theta(\xi)}{2n}$; $\sin t = \frac{\theta^*(\xi)}{2n}$ olduğunu görelim.

$\theta(\xi) = g^{ij}F(e_i, e_j, \xi)$, $\theta^*(\xi) = g^{ij}F(e_i, \varphi e_j, \xi)$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned}
F(e_i, e_j, \xi) &= -\cos tg(\varphi e_i, \varphi e_j) - \sin tg(\varphi e_i, e_j) \\
&= -\cos tg(\varphi e_i, \varphi e_j) \\
&= \cos tg(e_i, e_j) = \cos tg_{ij} \\
F(e_i, \varphi e_j, \xi) &= -\cos tg(\varphi e_i, \varphi^2 e_j) - \sin tg(\varphi e_i, \varphi e_j) \\
&= \cos tg(e_i, \varphi e_j) + \sin tg(e_i, e_j) \\
&= \sin tg(e_i, e_j) = \sin tg_{ij}
\end{aligned}$$

dir.

O halde

$$\begin{aligned}\theta(\xi) &= \sum_{i,j=1}^{2n} g^{ij} \cos t g_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2n} g^{ij} g_{ij} \cos t = 2n \cos t \quad \text{ise} \quad \cos t = \frac{\theta(\xi)}{2n} \\ \theta^*(\xi) &= \sum_{i,j=1}^{2n} g^{ij} \sin t g_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2n} g^{ij} g_{ij} \sin t = 2n \sin t \quad \text{ise} \quad \sin t = \frac{\theta^*(\xi)}{2n}\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\nabla_x \varphi$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}(\nabla_x \varphi) y &= \nabla_x(\varphi y) - \varphi(\nabla_x y) \\ &= \bar{\nabla}_x \varphi y - g(x, \varphi y) Z - \varphi(\bar{\nabla}_x y - g(x, y) Z) \\ &= \bar{\nabla}_x(Jy - \eta(y) J\xi) - g(x, \varphi y) Z - \varphi(\bar{\nabla}_x y) + g(x, y) \varphi Z \\ &= \bar{\nabla}_x(Jy) - \bar{\nabla}_x(\eta(y) J\xi) - g(x, \varphi y) Z - \varphi(\bar{\nabla}_x y) + g(x, y) JZ \\ &= \bar{\nabla}_x(Jy) - x\eta(y) J\xi - \eta(y) \bar{\nabla}_x J\xi - g(x, \varphi y) Z - J(\bar{\nabla}_x y) \\ &\quad + \eta(\bar{\nabla}_x y) J\xi + g(x, y) JZ \\ &= -(x(g(y, \xi)) J\xi + g(\bar{\nabla}_x y, \xi)) J\xi - \eta(y) J(\bar{\nabla}_x \xi) - g(x, \varphi y) Z \\ &\quad + g(x, y) JZ\end{aligned}$$

(2.2) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}(\nabla_x \varphi) y &= -g(y, \bar{\nabla}_x \xi) J\xi - \eta(y) J(\bar{\nabla}_x \xi) + g(x, \xi) Z - g(x, \varphi y) Z \\ &\quad + g(x, y) JZ \\ &= -g(y, \nabla_x \xi) J\xi - \eta(x) g(y, Z) J\xi - \eta(y) J(\nabla_x \xi) - \eta(x) \eta(y) JZ \\ &\quad - g(x, \varphi y) Z + g(x, y) JZ \\ &= -\cos t g(y, \varphi x) J\xi + \sin t g(y, \varphi^2 x) J\xi - \eta(x) g(y, Z) J\xi \\ &\quad - \eta(y) \cos t J(\varphi x) + \sin t \eta(y) J(\varphi^2 x) - \eta(x) \eta(y) JZ \\ &\quad - g(x, \varphi y) Z + g(x, y) JZ \\ &= -\cos t g(y, \varphi x) J\xi - \sin t g(y, x) J\xi + \sin t \eta(x) g(y, \xi) J\xi \\ &\quad - \eta(x) g(y, Z) J\xi - \eta(y) \cos t \varphi^2 x - \sin t \eta(y) \varphi x \\ &\quad - g(\varphi x, \varphi y) JZ - g(x, \varphi y) Z \\ &= -\cos t g(y, \varphi x) J\xi - \sin t g(y, x) J\xi + \sin t \eta(x) \eta(y) J\xi \\ &\quad - \eta(y) \cos t \varphi^2 x - \sin t \eta(y) \varphi x - g(\varphi x, \varphi y) (\cos t \xi + \sin t J\xi) \\ &\quad - g(x, \varphi y) (\sin t \xi - \cos t J\xi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos tg(y, \varphi x)J\xi - \sin tg(y, x)J\xi + \sin t\eta(x)\eta(y)J\xi - \eta(y)\cos t\varphi^2x \\
&\quad - \sin t\eta(y)\varphi x - \cos tg(\varphi x, \varphi y)\xi - \sin tg(\varphi x, \varphi y)J\xi - \sin tg(x, \varphi y)\xi \\
&\quad + \cos tg(x, \varphi y)J\xi) \\
&= -\cos tg(y, \varphi x)J\xi - \sin tg(y, x)J\xi + \sin t\eta(x)\eta(y)J\xi - \eta(y)\cos t\varphi^2x \\
&\quad - \sin t\eta(y)\varphi x - \cos tg(\varphi x, \varphi y)\xi - \sin tg(x, y)J\xi - \sin t\eta(x)\eta(y)J\xi \\
&\quad - \sin tg(x, \varphi y)\xi + \cos tg(x, \varphi y)J\xi) \\
&= -\eta(y)\cos t\varphi^2x - \sin t\eta(y)\varphi x - \cos tg(\varphi x, \varphi y)\xi - \sin tg(x, \varphi y)\xi \\
&= -\cos t\{-\eta(y)\varphi^2x + g(\varphi x, \varphi y)\xi\} - \sin t\{\eta(y)\varphi x + g(x, \varphi y)\xi\} \\
&= -\frac{\theta(\xi)}{2n}\{-\eta(y)\varphi^2x + g(\varphi x, \varphi y)\xi\} - \frac{\theta^*(\xi)}{2n}\{\eta(y)\varphi x + g(x, \varphi y)\xi\}
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= g((\nabla_x \varphi)y, Z) \\
&= g\left(-\frac{\theta(\xi)}{2n}\{\eta(y)\varphi^2x + g(\varphi x, \varphi y)\xi\} - \frac{\theta^*(\xi)}{2n}\{\eta(y)\varphi x + g(\varphi x, y)\xi\}, Z\right) \\
&= -\frac{\theta(\xi)}{2n}\eta(y)g(\varphi^2x, Z) - \frac{\theta(\xi)}{2n}g(\varphi x, \varphi y)g(\xi, Z) \\
&\quad - \frac{\theta^*(\xi)}{2n}\eta(y)g(\varphi x, Z) - \frac{\theta^*(\xi)}{2n}g(\varphi x, y)g(\xi, Z) \\
&= -\frac{\theta(\xi)}{2n}\eta(y)g(\varphi x, \varphi Z) - \frac{\theta(\xi)}{2n}g(\varphi x, \varphi y)\eta(Z) \\
&\quad - \frac{\theta^*(\xi)}{2n}\eta(y)g(\varphi x, Z) - \frac{\theta^*(\xi)}{2n}g(\varphi x, y)\eta(Z) \\
&= -\frac{\theta(\xi)}{2n}\{\eta(y)g(\varphi x, \varphi Z) + \eta(Z)g(\varphi x, \varphi y)\} \\
&\quad - \frac{\theta^*(\xi)}{2n}\{\eta(y)g(\varphi x, Z) + \eta(Z)g(\varphi x, y)\}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(S^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B-metrik manifold $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5$ sınıfındandır.

Örnek 3.2.2. M , 3-boyutlu hemen hemen kontak B -metrik manifold yapısı

$$\begin{aligned} e_0 &= \xi, \quad e_2 = \varphi e_1 \\ g(e_0, e_0) &= g(e_1, e_1) = -g(e_2, e_2) = g(\xi, \xi) = 1 \\ g(e_i, e_j) &= 0, \quad i \neq j \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. $\{e_0, e_1, e_2\}$ $T_p M$ nin tabanı olmak üzere 3-boyutlu M manifoldu için θ, θ^* ve ω yı (3.12) formüllerini kullanarak hesaplayalım.

$$1) \theta(X) = \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} F(e_i, e_j, X)$$

$i = j = 0$ iken,

$$\begin{aligned} \theta(e_0) = \theta_0 &= g^{00} F(e_0, e_0, e_0) + g^{11} F(e_1, e_1, e_0) + g^{22} F(e_2, e_2, e_0) \\ &= F(\xi, \xi, \xi) + F(e_1, e_1, e_0) - F(e_2, e_2, e_0) \\ &= F(e_1, e_1, e_0) - F(e_2, e_2, e_0) \\ &= F_{110} - F_{220} \end{aligned}$$

$i = j = 1$ iken,

$$\begin{aligned} \theta(e_1) = \theta_1 &= g^{00} F(e_0, e_0, e_1) + g^{11} F(e_1, e_1, e_1) + g^{22} F(e_2, e_2, e_1) \\ &= F(e_0, e_0, e_1) + F(e_1, e_1, e_1) - F(e_2, e_2, e_1) \\ &= F_{001} + F_{111} - F_{221} \end{aligned}$$

$i = j = 2$ iken,

$$\begin{aligned} \theta(e_2) = \theta_2 &= g^{00} F(e_0, e_0, e_2) + g^{11} F(e_1, e_1, e_2) + g^{22} F(e_2, e_2, e_2) \\ &= F(e_0, e_0, e_2) + F(e_1, e_1, e_2) - F(e_2, e_2, e_2) \\ &= F_{002} + F_{112} - F_{222} \end{aligned}$$

dir.

$$2) \theta^*(X) = \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} F(e_i, \varphi e_j, X)$$

$i = j = 0$ iken,

$$\begin{aligned} \theta^*(e_0) = \theta_0^* &= g^{00} F(e_0, \varphi e_0, e_0) + g^{11} F(e_1, \varphi e_1, e_0) + g^{22} F(e_2, \varphi e_2, e_0) \\ &= F(e_0, \varphi \xi, e_0) + F(e_1, e_2, e_0) + F(e_2, e_1, e_0) \\ &= F(e_1, e_2, e_0) - F(e_2, e_1, e_0) \\ &= F_{120} - F_{210} \end{aligned}$$

$i = j = 1$ iken,

$$\begin{aligned}\theta^*(e_1) = \theta_1^* &= g^{00}F(e_0, \varphi e_0, e_1) + g^{11}F(e_1, \varphi e_1, e_1) + g^{22}F(e_2, \varphi e_2, e_1) \\ &= F(e_0, \varphi \xi, e_1) + F(e_1, e_2, e_1) + F(e_2, e_1, e_1) \\ &= F_{121} - F_{211}\end{aligned}$$

$i = j = 2$ iken,

$$\begin{aligned}\theta^*(e_2) = \theta_2^* &= g^{00}F(e_0, \varphi e_0, e_2) + g^{11}F(e_1, \varphi e_1, e_2) + g^{22}F(e_2, \varphi e_2, e_2) \\ &= F(e_0, \varphi \xi, e_2) + F(e_1, e_2, e_2) + F(e_2, e_1, e_2) \\ &= F_{122} - F_{212}\end{aligned}$$

dir.

$$\mathbf{3)} \quad \omega(X) = F(\xi, \xi, X)$$

$$\begin{aligned}\omega(e_0) &= F(\xi, \xi, e_0) = F(\xi, \xi, \xi) = 0 \\ \omega(e_1) &= F(\xi, \xi, e_1) = F(e_0, e_0, e_1) = F_{001} \\ \omega(e_2) &= F(\xi, \xi, e_2) = F(e_0, e_0, e_2) = F_{002}\end{aligned}$$

$F(X, \varphi Y, \varphi Z) = F(X, Y, Z) - \eta(Y)F(X, \xi, Z) - \eta(Z)F(X, Y, \xi)$ koşulundan,

$$\begin{aligned}F(e_1, \varphi e_1, \varphi e_1) &= F(e_1, e_1, e_1) \\ F(e_1, e_2, e_2) &= F(e_1, e_1, e_1) \\ F_{122} &= F_{111}\end{aligned}$$

dir. $X, Y, Z \in T_p M$, $X = \sum_{i=0}^2 x_i e_i$, $Y = \sum_{j=0}^2 y_j e_j$, $Z = \sum_{k=0}^2 z_k e_k$ olsun. Doğrudan hesaplamalar yaparsak, yapı tensörünün $\mathcal{F}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 11$) bileşenleri, karşılık gelen tabanda $\mathcal{F}_i$ sınıfları şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(x, y, z) &= (x_1 \theta_1 - x_2 \theta_2)(y_1 z_1 + y_2 z_2), \\ \theta_1 &= F_{111} = F_{122}, \quad \theta_2 = -F_{211} = -F_{222}; \\ \mathcal{F}_2(x, y, z) &= \mathcal{F}_3(x, y, z) = 0; \\ \mathcal{F}_4(x, y, z) &= \frac{1}{2} \theta_0 \{x_1 (y_0 z_1 + y_1 z_0) - x_2 (y_0 z_2 + y_2 z_0)\}, \\ \frac{1}{2} \theta_0 &= F_{101} = F_{110} = -F_{202} = -F_{220};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_5(x, y, z) &= \frac{1}{2}\theta_0^* \{x_1 (y_0 z_2 + y_2 z_0) - x_2 (y_0 z_1 + y_1 z_0)\}, \\
\frac{1}{2}\theta_0^* &= F_{102} = F_{120} = F_{201} = F_{210}; \\
\mathcal{F}_6(x, y, z) &= \mathcal{F}_7(x, y, z) = 0; \\
\mathcal{F}_8(x, y, z) &= \lambda \{x_1 (y_0 z_1 + y_1 z_0) + x_2 (y_0 z_2 + y_2 z_0)\}, \\
\lambda &= F_{101} = F_{110} = F_{202} = F_{220}; \\
\mathcal{F}_9(x, y, z) &= \mu \{x_1 (y_0 z_2 + y_2 z_0) - x_2 (y_0 z_1 + y_1 z_0)\}, \\
\mu &= F_{102} = F_{120} = -F_{201} = -F_{210}; \\
\mathcal{F}_{10}(x, y, z) &= vx_0 (y_1 z_1 + y_2 z_2), \quad v = F_{011} = F_{022}; \\
\mathcal{F}_{11}(x, y, z) &= x_0 \{(y_1 z_0 + y_0 z_1) \omega_1 + (y_2 z_0 + y_0 z_2) \omega_2\}, \\
\omega_1 &= F_{010} = F_{001}, \quad \omega_2 = F_{020} = F_{002}.
\end{aligned}$$

3–boyutlu hemen hemen kontak B –metrik manifoldlarının sınıfı

$$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10} \oplus \mathcal{F}_{11}$$

dır.

Örnek 3.2.3. G , $(2n + 1)$ –boyutlu reel bağlantılı Lie grup ve global bir taban $\{E_0, E_1, \dots, E_{2n}\}$ olsun öyle ki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
[E_0, E_i] &= -a_i E_i - a_{n+i} E_{n+i} \\
[E_0, E_{n+i}] &= -a_{n+i} E_i + a_i E_{n+i}
\end{aligned}$$

ve diğer durumlarda $[E_i, E_j] = 0$ olsun. Hemen hemen kontak yapıyı da şu şekilde tanımlayalım:

$$\varphi E_0 = 0, \quad \varphi E_i = E_{n+i}, \quad \varphi E_{n+i} = -E_i, \quad \xi = E_0, \quad \eta(E_0) = 1, \quad \eta(E_i) = \eta(E_{n+i}) = 0.$$

g hemen hemen kontak B –metriği,

$$\begin{aligned}
g(E_0, E_0) &= g(E_i, E_i) = -g(E_{n+i}, E_{n+i}) = 1 \\
g(E_0, E_j) &= g(E_j, E_k) = 0
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Özel olarak $n = 1$ için $(G, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3–boyutlu hemen hemen kontak B –metrik manifold olsun.

(2.3) deki Koszul formülünde $V \rightarrow E_i, W \rightarrow E_j, X \rightarrow E_k$ yazalım.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) &= E_i(g(E_j, E_k)) + E_j(g(E_k, E_i)) - E_k(g(E_i, E_j)) \\
&\quad - g(E_i, [E_j, E_k]) + g(E_j, [E_k, E_i]) + g(E_k, [E_i, E_j]) \\
&= -g(E_i, [E_j, E_k]) + g(E_j, [E_k, E_i]) + g(E_k, [E_i, E_j]) \\
&= g([E_i, E_j], E_k) + g([E_k, E_i], E_j) + g([E_k, E_j], E_i)
\end{aligned}$$

dir. $i = j = 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{E_1} E_1, E_k) &= g([E_1, E_1], E_k) + g([E_k, E_1], E_1) + g([E_k, E_1], E_1) \\
&= 2g([E_k, E_1], E_1)
\end{aligned}$$

$$\nabla_{E_1} E_1 = \sum_{i=0}^2 \lambda_i E_i \text{ olup } g(\nabla_{E_1} E_1, E_k) = \sum_{i=0}^2 \lambda_i g(E_i, E_k) \text{ dir.}$$

Buradan $\lambda_k g(E_k, E_k) = g([E_k, E_1], E_1)$ dir. v

$k = 0$ ise

$$\begin{aligned}
\lambda_0 g(E_0, E_0) &= g([E_0, E_1], E_1) \\
&= g(-a_1 E_1 - a_2 E_2, E_1) \\
&= -a_1 g(E_1, E_1) - a_2 g(E_2, E_1) \\
&= -a_1
\end{aligned}$$

$k = 1$ ise

$$\lambda_1 g(E_1, E_1) = g([E_1, E_1], E_1) = 0$$

$k = 2$ ise

$$\lambda_2 g(E_2, E_2) = g([E_2, E_1], E_1) = 0$$

olup

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1} E_1 &= \lambda_0 E_0 + \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 \\
&= -a_1 E_0
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde Koszul formülünden,

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_2} E_2 &= -a_1 E_0 \\
\nabla_{E_0} E_1 &= -a_2 E_2 \\
\nabla_{E_0} E_2 &= -a_2 E_1 \\
\nabla_{E_1} E_0 &= a_1 E_1 \\
\nabla_{E_2} E_0 &= -a_1 E_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} F_{ijk} = F(E_i, E_j, E_k) &= g((\nabla_{E_i}\varphi)E_j, E_k) \\ &= g((\nabla_{E_i}\varphi)E_j, E_k) - g(\varphi(\nabla_{E_i}E_j), E_k) \end{aligned}$$

olmak üzere F_{ijk} ları hesaplayalım.

$$\begin{aligned} F_{011} &= g((\nabla_{E_0}\varphi)E_1, E_1) \\ &= g((\nabla_{E_0}\varphi)E_1, E_1) - g(\varphi(\nabla_{E_0}E_1), E_1) \\ &= g((\nabla_{E_0}E_2, E_1) - g(\varphi(-a_2E_2), E_1) \\ &= g(-a_2E_1, E_1) + g(a_2\varphi(E_2), E_1) \\ &= -a_2g(E_1, E_1) - a_2g(E_1, E_1) \\ &= -2a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{022} &= g((\nabla_{E_0}\varphi)E_2, E_2) \\ &= g((\nabla_{E_0}\varphi)E_2, E_2) - g(\varphi(\nabla_{E_0}E_2), E_2) \\ &= -g((\nabla_{E_0}E_1, E_2) - g(\varphi(-a_2E_1), E_2) \\ &= -g(-a_2E_2, E_2) + g(a_2\varphi(E_1), E_1) \\ &= a_2g(E_2, E_2) + a_2g(E_2, E_2) \\ &= -2a_2 \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$F_{102} = F_{121} = -F_{201} = -F_{210} = a_1$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F\left(\sum_{i=0}^2 x_i E_i, \sum_{j=0}^2 y_j E_j, \sum_{k=0}^2 z_k E_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k=0}^2 x_i y_j z_k F_{ijk} \\ &= x_0 y_1 z_1 (-2a_2) + x_0 y_2 z_2 (-2a_2) + x_1 y_0 z_2 (a_1) \\ &\quad + x_1 y_2 z_0 (a_1) + x_2 y_0 z_1 (-a_1) + x_2 y_1 z_0 (-a_1) \\ &= (-2a_2)x_0(y_1 z_1 + y_2 z_2) \\ &\quad + a_1\{z_0(x_1 y_2 - x_2 y_1) + y_0(x_1 z_2 - x_2 z_1)\} \end{aligned}$$

dir. Yani $F(x, y, z) = \mathcal{F}_9(x, y, z) + \mathcal{F}_{10}(x, y, z)$ dir. Sonuç olarak 3 boyutlu manifold $\mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındandır.

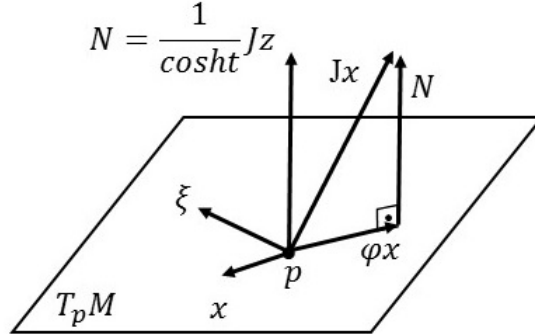
Örnek 3.2.4. $M, \mathbb{R}^{2n+2} = \{(u^1, u^2, \dots, u^{n+1}, v^1, v^2, \dots, v^{n+1}) \mid u^i, v^i \in \mathbb{R}\}$ de

$$M : g(Z, JZ) = 0; \quad g(Z, Z) > 0$$

şeklinde tanımlanan bir hiperyüzey olsun. M nin her p noktasında $t > 0$ olmak üzere $g(Z, Z) = \cosh^2 t$ olsun. JZ vektör alanı M nin normalidir. $N = \left(\frac{1}{\cosh t}\right) JZ$ birim normal olarak seçilebilir. Öyle ki

$$\begin{aligned} g(N, N) &= g\left(\left(\frac{1}{\cosh t}\right) JZ, \left(\frac{1}{\cosh t}\right) JZ\right) \\ &= \left(\frac{1}{\cosh^2 t}\right) g(JZ, JZ) \\ &= -\frac{1}{\cosh^2 t} g(Z, Z) = -1 \end{aligned}$$

olur. $\xi = -JN = \left(\frac{1}{\cosh t}\right) Z$ olarak tanımlansın.



$T_p M$ üzerinde keyfi bir x vektörü için Jx vektörünü düşünelim. ϕx ile $T_p M$ üzerine Jx in dik izdüşümünü gösterimi ϕx olarak tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \phi x &= Jx - \frac{g(Jx, N)}{g(N, N)} N \quad (g(N, N) = -1) \\ &= Jx + g(Jx, N) N \\ &= Jx + g(x, JN) N \quad (\xi = -JN) \\ &= Jx - g(x, \xi) J\xi \end{aligned}$$

dir. $g(x, \xi) = \eta(x)$ olsun. Bu durumda $\phi x = Jx + \eta(x) J\xi$ elde edilir.

$x \in T_p M$ olmak üzere (2.4), (2.5) , (2.6) ve (2.9) eşitliklerinin sağlandığını görelim.

$$g(Jx, \xi) = g\left(Jx, \left(\frac{1}{\cosh t}\right) Z\right) = \left(\frac{1}{\cosh t}\right) g(Jx, Z) = 0,$$

$$g(x, \xi) = g\left(x, \left(\frac{1}{\cosh t}\right) Z\right) = \left(\frac{1}{\cosh t}\right) g(x, Z),$$

$$g(J\xi, \xi) = g(N, \xi) = 0$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi x) &= \varphi(Jx) - \eta(x)\varphi(J\xi) \\ &= J^2x - \eta(Jx)J\xi - \eta(x)\varphi(J\xi) \\ &= -x - g(Jx, \xi)J\xi - \eta(x)\{J\xi - \eta(J\xi)J\xi\} \\ &= -x + \eta(x)J\xi - \eta(x)\{g(Jx, \xi)J\xi - \eta(J\xi)J\xi\} \\ &= -x + \eta(x)\xi - g(x, \xi)\{g(J\xi, \xi)J\xi - g(Jx, \xi)J\xi\} \\ &= -x + \eta(x)\xi \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\eta(\xi) = g(\xi, \xi) = \frac{1}{\cosh^2 t} g(Z, Z) = 1$$

$$\begin{aligned} \eta(\varphi x) &= g(\varphi x, \xi) \\ &= g(Jx - \eta(x)J\xi, \xi) \\ &= g(Jx, \xi) - \eta(x)g(J\xi, \xi) \\ &= g\left(Jx, \frac{1}{\cosh t} Z\right) \\ &= \frac{1}{\cosh t} g(Jx, Z) = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi\xi = J\xi - \eta(\xi)J\xi = 0 \quad ((2.4) \text{ den })$$

dir. $x, y \in T_p M$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g(\varphi x, \varphi y) &= g(Jx - \eta(x)J\xi, Jy - \eta(y)J\xi) \\ &= g(Jx, Jy) - \eta(y)g(Jx, J\xi) - \eta(x)g(J\xi, Jy) + \eta(y)\eta(x)g(J\xi, J\xi) \\ &= -g(x, y) + \eta(y)g(x, \xi) + \eta(x)g(\xi, y) - \eta(y)\eta(x) \\ &= -g(x, y) + 2\eta(x)\eta(y) - \eta(y)\eta(x) \\ &= -g(x, y) + \eta(x)\eta(y) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B-metrik manifolddur.

$\nabla, \mathbb{R}^{2n+2}$ nin $\bar{\nabla}, M$ nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. $Z \in \mathbb{R}^{2n+2}$ yer vektör alanı ve $X \in \chi(M)$ olsun. $Z = \sum u_i \partial_i$ şeklinde yazılabilir.

$$\bar{\nabla}_X Z = \sum X(u_i) \partial_i = X$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X N &= \bar{\nabla}_X \left(\frac{1}{\cosh t} \right) JZ \\ &= \left(\frac{1}{\cosh t} \right) \bar{\nabla}_X JZ \\ &= \left(\frac{1}{\cosh t} \right) J (\bar{\nabla}_X Z) \\ &= \left(\frac{1}{\cosh t} \right) J(X) \\ &= \frac{1}{\cosh t} \varphi(X) \end{aligned}$$

elde edilir. $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere Gauss ve Weingarten formüllerinden,

$$\begin{aligned} g(\pi(X, Y), N) &= g(\text{nor}(\bar{\nabla}_X Y), N) \\ &= g(\bar{\nabla}_X Y, N) \\ &= -g(Y, \bar{\nabla}_X N) \\ &= -g\left(Y, \frac{1}{\cosh t} \varphi X\right) = -\frac{1}{\cosh t} g(Y, \varphi X) \end{aligned}$$

dir. Yani $\pi(X, Y) = \frac{1}{\cosh t} g(\varphi X, Y) N$ dir. Sonuç olarak

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi X, Y) N; \quad X, Y \in \chi(M)$$

$$\bar{\nabla}_X N = \frac{1}{\cosh t} \varphi X; \quad X \in \chi(M)$$

elde edilir. $x \in T_p M$ olmak üzere

$$\bar{\nabla}_x \xi = -\bar{\nabla}_x JN = -J\bar{\nabla}_x N = -J\left(\frac{1}{\cosh t} \varphi x\right) = -\frac{1}{\cosh t} J(\varphi x) = -\frac{1}{\cosh t} \varphi^2 x$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
F(x, y, \xi) &= F(x, \xi, y) = g((\nabla_x \varphi)\xi, y) \\
&= g((\nabla_x \varphi \xi - \varphi(\nabla_x \xi), y) \\
&= -g(\varphi(\nabla_x \xi), y) \\
&= -g\left(\varphi\left(\bar{\nabla}_x \xi + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, \xi) N\right), y\right) \\
&= -g\left(\varphi\left(-\frac{1}{\cosh t} \varphi^2 x\right), y\right) + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, \xi) g(J\xi, y) \\
&= \frac{1}{\cosh t} g(\varphi(\varphi^2 x), y) \\
&= \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla

$$\theta(\xi) = 0 ; \quad \frac{\theta^*(\xi)}{2n} = \frac{1}{\cosh t}$$

olduğunu göstereyim.

$$\begin{aligned}
\theta(\xi) &= \sum_{i,j=1}^{2n} g^{ij} F(e_i, e_j, \xi) = \sum_{i,j=1}^{2n} g^{ij} \left(-\frac{1}{\cosh t} g(\varphi e_i, e_j) \right) = 0 \\
\theta^*(\xi) &= \sum_{i,j=1}^{2n} g^{ij} F(e_i, \varphi e_j, \xi) = \sum_{i,j=1}^{2n} g^{ij} \left(-\frac{1}{\cosh t} g(\varphi e_i, \varphi e_j) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2n} g^{ij} \left(\frac{1}{\cosh t} g(e_i, e_j) \right) = \sum_{i,j=1}^{2n} g^{ij} g_{ij} \left(\frac{1}{\cosh t} \right) \\
&= 2n \left(\frac{1}{\cosh t} \right) \Rightarrow \frac{\theta^*(\xi)}{2n} = \frac{1}{\cosh t}
\end{aligned}$$

dir. Son olarak $x, y \in T_p M$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\nabla_x \varphi) y &= \nabla_x(\varphi y) - \varphi(\nabla_x y) \\
&= \bar{\nabla}_x \varphi y - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, \varphi y) N - \varphi \left(\bar{\nabla}_x y - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, y) N \right) \\
&= \bar{\nabla}_x (Jy - \eta(y) N) - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, \varphi y) N - \varphi(\bar{\nabla}_x y) \\
&\quad + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, y) \varphi N \\
&= \bar{\nabla}_x (Jy) - \bar{\nabla}_x \eta(y) N - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, \varphi y) N - J(\bar{\nabla}_x y) + \eta(\bar{\nabla}_x y) N \\
&\quad + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, y) \varphi N \\
&= -x(\eta(y)) N - \eta(y) \bar{\nabla}_x N - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, \varphi y) N + g(\bar{\nabla}_x y, \xi) N \\
&\quad + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, y) \varphi N \\
&= \left[-x(\eta(y)) + g(\bar{\nabla}_x y, \xi) \right] N - \eta(y) \frac{1}{\cosh t} \varphi x - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, \varphi y) N \\
&\quad + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, y) \varphi N \\
&= -g(y, \bar{\nabla}_x \xi) N - \eta(y) \frac{1}{\cosh t} \varphi x - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, \varphi y) N \\
&\quad + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, y) \varphi N \\
&= -g \left(y, -\frac{1}{\cosh t} \varphi^2 x \right) N - \eta(y) \frac{1}{\cosh t} \varphi x - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, \varphi y) N \\
&\quad + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, y) \varphi N \\
&= -g \left(y, -\frac{1}{\cosh t} (-x + \eta(x) \xi) \right) N - \eta(y) \frac{1}{\cosh t} \varphi x \\
&\quad - \frac{1}{\cosh t} (-g(x, y) + \eta(x) \eta(y)) N + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi x, y) \varphi N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\cosh t}g(y, x)N + \frac{1}{\cosh t}\eta(x)\eta(y)N - \eta(y)\frac{1}{\cosh t}\varphi x \\
&\quad + \frac{1}{\cosh t}g(x, y)N - \frac{1}{\cosh t}\eta(x)\eta(y)N + \frac{1}{\cosh t}g(\varphi x, y)\varphi N \\
&= -\eta(y)\frac{1}{\cosh t}\varphi x + \frac{1}{\cosh t}g(\varphi x, y)\varphi N \\
&= -\frac{1}{\cosh t}(\eta(y)\varphi x - g(\varphi x, y)\varphi N)
\end{aligned}$$

elde edilir. $JN = \varphi N + g(N, \xi)N$, $-\xi = \varphi N + g(J\xi, \xi)N$ ve $-\xi = \varphi N$ olduğundan

$$(\nabla_x \varphi)y = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n}\{\eta(y)\varphi x + g(\varphi x, y)\xi\}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= g((\nabla_x \varphi)y, z) \\
&= g\left(-\frac{\theta^*(\xi)}{2n}\{\eta(y)\varphi x + g(\varphi x, y)\xi\}, z\right) \\
&= -\frac{\theta^*(\xi)}{2n}\{\eta(y)g(\varphi x, z) + g(\varphi x, y)g(\xi, z)\} \\
&= -\frac{\theta^*(\xi)}{2n}\{\eta(y)g(\varphi x, z) + g(\varphi x, y)\eta(z)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B -metrik manifoldu $\mathcal{F}_5$ sınıfındandır.

Örnek 3.2.5. G , 5-boyutlu bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ Lie cebiri olsun. Eğer $\{e_i\}$ G nin sol-invariant vektör alanlarının global bir tabanı ise (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısını ve g , B -metriğini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
&\varphi(e_1) = e_3, \quad \varphi(e_2) = e_4, \quad \varphi(e_3) = -e_1, \quad \varphi(e_4) = -e_2, \quad \varphi(e_5) = 0; \\
&\xi = e_5; \quad \eta(e_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \eta(e_5) = 1; \\
&g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = g(e_5, e_5) = 1 \\
&g(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.
\end{aligned}$$

5 boyutlu $(G, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B -metrik manifolddur. ∇ , Levi-Civita

konneksiyonu olmak üzere Koszul formülünden,

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) &= e_i(g(e_j, e_k)) + e_j(g(e_k, e_i)) - e_k(g(e_i, e_j)) \\
&\quad - g(e_i, [e_j, e_k]) + g(e_j, [e_k, e_i]) - g(e_k, [e_i, e_j]) \\
&= -g(e_i, [e_j, e_k]) + g(e_j, [e_k, e_i]) - g(e_k, [e_i, e_j]) \quad (3.35)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
2F(e_i, e_j, e_k) &= 2g(\nabla_{e_i}(\varphi e_j), e_k) - 2g(\nabla_{e_i} e_j, \varphi e_k) \\
&= g([e_i, \varphi e_j], e_k) + g([e_k, e_i], \varphi e_j) + g([e_k, \varphi e_j], e_i) \\
&\quad - g([e_i, e_j], \varphi e_k) - g([\varphi e_k, e_i], e_j) - g([\varphi e_k, e_j], e_i) \\
&= g([e_i, \varphi e_j] - \varphi[e_i, e_j], e_k) + g(\varphi[e_k, e_i] - [\varphi e_k, e_i], e_j) \\
&\quad + g([e_k, \varphi e_j] - [\varphi e_k, e_j], e_i).
\end{aligned}$$

$\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7$ deki herhangi bir manifoldda $F(e_i, e_j, \xi) = -F(\varphi e_i, \varphi e_j, \xi)$ ve $F(\xi, e_i, e_j) = 0$ eşitlikleri vardır [2]. O halde

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= g((\nabla_x \varphi)y, z) = g(\nabla_x(\varphi y) - \varphi(\nabla_x y), z) \\
F(x, \varphi y, \xi) &= (\nabla_x \eta)y = g(\nabla_x \xi, y), \quad \eta(\nabla_x \xi) = 0
\end{aligned}$$

olduğundan son iki eşitlik sırasıyla $\nabla_{\varphi e_i} \xi = \varphi \nabla_{e_i} \xi$ ve $\nabla_\xi \varphi e_i = \varphi \nabla_\xi e_i$ olmasına denktir.

$$\begin{aligned}
F(e_i, \xi, e_j) &= -F(\varphi e_i, \xi, \varphi e_j) \\
g((\nabla_{e_i} \varphi)\xi, e_j) &= -g((\nabla_{\varphi e_i} \varphi)\xi, \varphi e_j) \\
g(\nabla_{e_i}(\varphi \xi) - \varphi(\nabla_{e_i} \xi), e_j) &= -g(\nabla_{\varphi e_i}(\varphi \xi) - \varphi(\nabla_{\varphi e_i} \xi), \varphi e_j) \\
-g(\varphi(\nabla_{e_i} \xi), e_j) &= -g(\nabla_{\varphi e_i} \xi, \varphi^2 e_j) \\
-g(\varphi(\nabla_{e_i} \xi), e_j) &= -g(\nabla_{\varphi e_i} \xi, e_j) \\
g(\varphi(\nabla_{e_i} \xi) - \nabla_{\varphi e_i} \xi, e_j) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $g(\varphi(\nabla_{e_i} \xi) - \nabla_{\varphi e_i} \xi, e_j) = 0$ olması için $\varphi(\nabla_{e_i} \xi) - \nabla_{\varphi e_i} \xi = 0$ olmalıdır. Yani $\varphi(\nabla_{e_i} \xi) = \nabla_{\varphi e_i} \xi$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
F(\xi, e_i, e_j) &= 0 \\
g((\nabla_\xi \varphi)e_i, e_j) &= 0 \\
g(\nabla_\xi(\varphi e_i) - \varphi(\nabla_\xi e_i), e_j) &= 0
\end{aligned}$$

olması için $\nabla_\xi(\varphi e_i) - \varphi(\nabla_\xi e_i) = 0$ olmalıdır. Bu da $\nabla_\xi(\varphi e_i) = \varphi(\nabla_\xi e_i)$ olmasına denktir. Bu eşitlikler $\mathcal{U}_2$ manifoldu üzerinde

$$[\varphi e_i, \xi] = \varphi [e_i, \xi]$$

özelliğini gösterir. Şöyle ki,

$$\begin{aligned} [\varphi e_i, \xi] &= \nabla_{\varphi e_i} \xi - \nabla_\xi(\varphi e_i), \\ [e_i, \xi] &= \nabla_{e_i} \xi - \nabla_\xi e_i, \\ \varphi [e_i, \xi] &= \varphi(\nabla_{e_i} \xi) - \varphi(\nabla_\xi e_i) \\ &= \nabla_{\varphi e_i} \xi - \nabla_\xi(\varphi e_i) \\ &= [\varphi e_i, \xi]. \end{aligned}$$

dir.

$$F(x, y, \xi) = F(y, x, \xi) = -F(\varphi x, \varphi y, \xi)$$

ve

$$\begin{aligned} 2F(e_i, e_j, e_k) &= g([e_i, \varphi e_j] - \varphi[e_i, e_j], e_k) + g(\varphi[e_k, e_i] - [\varphi e_k, e_i], e_j) \\ &\quad + g([e_k, \varphi e_j] - [\varphi e_k, e_j], e_i) \end{aligned}$$

özellikleri ile $\mathcal{U}_1 = \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6$ içindeki bir manifold için

$$\eta([e_i, e_j]) = 0$$

eşitliği vardır [2]. $\mathcal{F}_6$ da bulunan manifold için $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0$ olacak şekilde ayarladık.

$$\theta(z) = g^{ij} F(e_i, e_j, z), \theta^*(z) = g^{ij} F(e_i, \varphi e_j, z), \omega(z) = F(\xi, \xi, z)$$

ve

$$\begin{aligned} F(e_i, e_j, \xi) &= \frac{1}{2} \{ g([e_i, \varphi e_j] - \varphi[e_i, e_j], \xi) + g(\varphi[\xi, e_i] - [\varphi \xi, e_i], e_j) \\ &\quad + g([\xi, \varphi e_j] - [\varphi \xi, e_j], e_i) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ g([e_i, \varphi e_j], \xi) - g(\varphi[e_i, \xi], e_j) + g([\xi, \varphi e_j], e_i) \} \\ &= -\frac{1}{2} \{ g([e_i, \xi], \varphi e_j) + g([e_j, \xi], \varphi e_i) \} \end{aligned} \tag{3.36}$$

eşitliğinin bir sonucu olarak,

$$\theta(\xi) = g^{ij}g([e_i, \xi], \varphi e_j) = 0, \quad \theta^*(\xi) = g^{ij}g([e_i, \xi], e_j) = 0$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= g^{ij}F(e_i, e_j, \xi) \\ &= -\frac{1}{2}g^{ij}(g([e_i, \xi], \varphi e_j) + g([e_j, \xi], \varphi e_i)) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 g^{ij}g([e_i, \xi], \varphi e_j) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 g^{ij}g([e_j, \xi], \varphi e_i) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 g^{ij}g([e_i, \xi], \varphi e_j) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 g^{ji}g([e_i, \xi], \varphi e_j) \\ &= -\sum_{i,j=1}^4 g^{ij}g([e_i, \xi], \varphi e_j) \end{aligned}$$

dir. (3.36) dan

$$\begin{aligned} F(e_i, \varphi e_j, \xi) &= -\frac{1}{2}\{g([e_i, \xi], \varphi^2 e_j) + g([\varphi e_j, \xi], \varphi e_i)\} \\ &= \frac{1}{2}\{g([e_i, \xi], e_j) - g(\varphi[e_j, \xi], \varphi e_i)\} \\ &= \frac{1}{2}\{g([e_i, \xi], e_j) - g([e_j, \xi], \varphi^2 e_i)\} \\ &= \frac{1}{2}\{g([e_i, \xi], e_j) + g([e_j, \xi], e_i)\} \end{aligned}$$

dir. Bunun yardımıyla

$$\begin{aligned} \theta^*(\xi) &= g^{ij}F(e_i, \varphi e_j, \xi) \\ &= \frac{1}{2}g^{ij}(g([e_i, \xi], e_j) + g([e_j, \xi], e_i)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 g^{ij}g([e_i, \xi], e_j) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 g^{ij}g([e_j, \xi], e_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 g^{ij}g([e_i, \xi], e_j) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 g^{ji}g([e_i, \xi], e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^4 g^{ij}g([e_i, \xi], e_j) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, $\mathfrak{g}$ Lie cebirini düşünelim, $[\varphi e_i, \xi] = \varphi[e_i, \xi]$ ve $\eta([e_i, e_j]) = 0$ koşullarını sağlayan aşağıdaki sıfır olmayan komütatörler tarafından belirlenir:

$$\begin{aligned}
[e_1, \xi] &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4, \\
[e_2, \xi] &= \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4, \\
[e_3, \xi] &= [\varphi e_1, \xi] = \varphi[e_1, \xi] \\
&= \lambda_1 \varphi(e_1) + \lambda_2 \varphi(e_2) + \lambda_3 \varphi(e_3) + \lambda_4 \varphi(e_4) \\
&= -\lambda_3 e_1 - \lambda_4 e_2 + \lambda_1 e_3 + \lambda_2 e_4, \\
[e_4, \xi] &= [\varphi e_2, \xi] = \varphi[e_2, \xi] \\
&= \mu_1 \varphi(e_1) + \mu_2 \varphi(e_2) + \mu_3 \varphi(e_3) + \mu_4 \varphi(e_4) \\
&= -\mu_3 e_1 - \mu_4 e_2 + \mu_1 e_3 + \mu_2 e_4.
\end{aligned}$$

Burada $\mu_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, 3, 4$) dir.

$$\begin{aligned}
\theta(\xi) &= -\sum_{i,j=1}^4 g^{ij} g([e_i, \xi], \varphi e_j) \\
&= -(g([e_1, \xi], \varphi e_1) + g([e_2, \xi], \varphi e_2) - g([e_3, \xi], \varphi e_3) \\
&\quad - g([e_4, \xi], \varphi e_4) + g([e_5, \xi], \varphi e_5)) \\
&= -(g([e_1, \xi], e_3) + g([e_2, \xi], e_4) + g([e_3, \xi], e_1) \\
&\quad + g([e_4, \xi], e_2)) \\
&= -(-\lambda_3 - \mu_4 - \lambda_3 - \mu_4) \\
&= 2\lambda_3 + 2\mu_4
\end{aligned}$$

$2\lambda_3 + 2\mu_4 = 0$ olmalıdır. O halde $\mu_4 = -\lambda_3$ koşulu elde edilir.

$$\begin{aligned}
\theta^*(\xi) &= \sum_{i,j=1}^4 g^{ij} g([e_i, \xi], e_j) \\
&= g([e_1, \xi], e_1) + g([e_2, \xi], e_2) - g([e_3, \xi], e_3) \\
&\quad - g([e_4, \xi], e_4) + g([e_5, \xi], e_5) \\
&\quad ; g([e_5, \xi], e_5) = 0 \\
&= \lambda_1 + \mu_2 + \lambda_1 + \mu_2 \\
&= 2(\lambda_1 + \mu_2)
\end{aligned}$$

$2(\lambda_1 + \mu_2) = 0$ olmalıdır. O halde $\mu_2 = -\lambda_1$ koşulu elde edilir. Bu koşullardan dolayı

$$\begin{aligned}
[e_1, \xi] &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4, \\
[e_2, \xi] &= \mu_1 e_1 - \lambda_1 e_2 + \mu_3 e_3 - \lambda_3 e_4, \\
[e_3, \xi] &= -\lambda_3 e_1 - \lambda_4 e_2 + \lambda_1 e_3 + \lambda_2 e_4, \\
[e_4, \xi] &= -\mu_3 e_1 + \lambda_3 e_2 + \mu_1 e_3 - \lambda_1 e_4
\end{aligned} \tag{3.37}$$

elde ederiz. Diğer komütatörlerin sıfır olduğunu bulmak kolaydır. (3.36) ve (3.37) ü kullanarak sıfır olmayan bileşenlerinden aşağıdakileri elde ettik:

$F_{ijk} = F(e_i, e_j, e_k)$ olmak üzere $F_{ij5} = F(e_i, e_j, \xi) = -\frac{1}{2}\{g([e_i, \xi], \varphi e_j) + g([e_j, \xi], \varphi e_i)\}$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ olduğunu biliyoruz.

$i = j = 1$ iken

$$\begin{aligned}
F_{115} &= -\frac{1}{2}\{g([e_1, \xi], \varphi e_1) + g([e_1, \xi], \varphi e_1)\} \\
&= -g([e_1, \xi], e_3) \\
&= -(\lambda_3 g(e_3, e_3)) \\
&= \lambda_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
F_{115} = -F_{225} = -F_{335} = F_{445} &= \lambda_3, \quad F_{135} = -F_{245} = \lambda_1, \\
F_{145} = F_{235} &= \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_1), \quad F_{125} = -F_{345} = \frac{1}{2}(\lambda_4 + \mu_3)
\end{aligned}$$

dir.

$(G, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B -metrik manifoldu $\mathcal{F}_6$ sınıfına aittir. Çünkü istenilen koşullar sağlanacak şekilde ayarlama yaptık. Bu sınıfa ait olan hemen hemen kontak B -metrik manifoldunun Levi-Civita kovaryant türevinin tabanlar cinsinden ifadesini (3.35) ve (3.37) ü kullanarak hesaplayabiliriz. $k = 1, 2, 3, 4$ için $g(\nabla_{e_1} e_1, e_k) = 0$ olduğundan $\nabla_{e_1} e_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ şeklinde yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
k = 1 \text{ için } g(\nabla_{e_1} e_1, e_1) &= 0 \text{ yani } a_1 = 0, \\
k = 2 \text{ için } g(\nabla_{e_1} e_1, e_2) &= 0 \text{ yani } a_2 = 0, \\
k = 3 \text{ için } g(\nabla_{e_1} e_1, e_3) &= 0 \text{ yani } a_3 = 0, \\
k = 4 \text{ için } g(\nabla_{e_1} e_1, e_4) &= 0 \text{ yani } a_4 = 0,
\end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1}e_1, e_k) &= g([e_1, e_1], e_k) + g([e_k, e_1], e_1) + g([e_k, e_1], e_1) \\
&= 2g([e_k, e_1], e_1) \quad (e_k = \xi \text{ yazarsak}) \\
&= 2g([\xi, e_1], e_1) \\
&= -2\lambda_1 g(e_1, e_1) \\
&= -2\lambda_1
\end{aligned}$$

$g(\nabla_{e_1}e_1, \xi) = -\lambda_1$ dir. Yani $a_5 = -\lambda_1$ olup sonuç olarak $\nabla_{e_1}e_1 = -\lambda_1\xi$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\nabla_{e_1}e_1 = -\nabla_{e_2}e_2 = -\nabla_{e_3}e_3 = \nabla_{e_4}e_4 = -\lambda_1\xi$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_\xi\xi, e_k) &= g([e_k, \xi], \xi) + g([e_k, \xi], \xi) \\
&= 2g([e_k, \xi], \xi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\nabla_\xi\xi = 0$ dir.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1}e_2, e_k) &= g([e_1, e_2], e_k) + g([e_k, e_1], e_2) + g([e_k, e_2], e_1) \\
&= g([e_k, e_1], e_2) + g([e_k, e_2], e_1)
\end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3, 4$ için eşitliğin sağ tarafı sıfır olur. $k = 5$ için

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1}e_2, e_5) &= g([\xi, e_1], e_2) + g([\xi, e_2], e_1) \\
&= -g([e_1, \xi], e_2) - g([e_2, \xi], e_1) \\
&= -\lambda_2 - \mu_1
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\nabla_{e_1}e_2 = -\frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_1)$ dir. Benzer şekilde

$$\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1 = -\nabla_{e_3}e_4 = -\nabla_{e_4}e_3 = -\frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_1)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1}e_3, e_k) &= g([e_1, e_3], e_k) + g([e_k, e_1], e_3) + g([e_k, e_3], e_1) \\
&= g([e_k, e_1], e_3) + g([e_k, e_3], e_1)
\end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3, 4$ için eşitliğin sağ tarafı sıfır olur.

$k = 5$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1} e_3, e_5) &= g([\xi, e_1], e_3) + g([\xi, e_3], e_1) \\ &= -g([e_1, \xi], e_3) - g([e_3, \xi], e_1) \\ &= \lambda_3 + \lambda_3 = 2\lambda_3 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $g(\nabla_{e_1} e_3, \xi) = \lambda_3$ olup buradan $\nabla_{e_1} e_3 = \lambda_3 \xi$ dir. Benzer şekilde

$$\nabla_{e_1} e_3 = -\nabla_{e_2} e_4 = \nabla_{e_3} e_1 = -\nabla_{e_4} e_2 = \lambda_3 \xi$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1} e_4, e_k) &= g([e_1, e_4], e_k) + g([e_k, e_1], e_4) + g([e_k, e_4], e_1) \\ &= g([e_k, e_1], e_4) + g([e_k, e_4], e_1) \end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3, 4$ için eşitliğin sağ tarafı sıfır olur. $k = 5$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1} e_4, e_5) &= g([\xi, e_1], e_4) + g([\xi, e_4], e_1) \\ &= -g([e_1, \xi], e_4) - g([e_4, \xi], e_1) \\ &= -(-\lambda_4) + \mu_3 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $g(\nabla_{e_1} e_4, e_k) = \frac{1}{2}(\lambda_4 + \mu_3)$ olup buradan $\nabla_{e_1} e_4 = \frac{1}{2}(\lambda_4 + \mu_3)$ dir. Benzer şekilde

$$\nabla_{e_1} e_4 = \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_3} e_2 = \nabla_{e_4} e_1 = \frac{1}{2}(\lambda_4 + \mu_3)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$2g(\nabla_{e_1} \xi, e_k) = g([e_1, \xi], e_k) + g([e_k, e_1], \xi) + g([e_k, \xi], e_1)$ olduğundan $k = 1$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1} \xi, e_1) &= g([e_1, \xi], e_1) + g([e_1, e_1], \xi) + g([e_1, \xi], e_1) \\ &= 2g([e_1, \xi], e_1) \\ &= 2\lambda_1 \end{aligned}$$

olup $g(\nabla_{e_1} \xi, e_1) = \lambda_1$ dir. $k = 2$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1} \xi, e_2) &= g([e_1, \xi], e_2) + g([e_2, e_1], \xi) + g([e_2, \xi], e_1) \\ &= g([e_1, \xi], e_2) + g([e_2, \xi], e_1) \\ &= \lambda_2 + \mu_1 \end{aligned}$$

ise $g(\nabla_{e_1}\xi, e_2) = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_1)$ dir. $k = 3$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1}\xi, e_3) &= g([e_1, \xi], e_3) + g([e_3, e_1], \xi) + g([e_3, \xi], e_1) \\ &= g([e_1, \xi], e_3) + g([e_3, \xi], e_1) \\ &= -\lambda_3 - \lambda_3 = -2\lambda_3 \end{aligned}$$

olduğundan $g(\nabla_{e_1}\xi, e_3) = \lambda_3$ dür. $k = 4$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1}\xi, e_4) &= g([e_1, \xi], e_4) + g([e_4, e_1], \xi) + g([e_4, \xi], e_1) \\ &= g([e_1, \xi], e_4) + g([e_4, \xi], e_1) \\ &= -\lambda_4 - \mu_3 \end{aligned}$$

olduğundan $g(\nabla_{e_1}\xi, e_4) = \frac{1}{2}(\lambda_4 + \mu_3)$ dür. Sonuç olarak

$$\nabla_{e_1}\xi = \lambda_1 e_1 + \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_1)e_2 + \lambda_3 e_3 + \frac{1}{2}(\lambda_4 + \mu_3)e_4$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\nabla_{e_2}\xi = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_1)e_1 - \lambda_1 e_2 + \frac{1}{2}(\lambda_4 + \mu_3)e_3 - \lambda_3 e_4$$

$$\nabla_{e_3}\xi = -\lambda_3 e_1 - \frac{1}{2}(\lambda_4 + \mu_3)e_2 + \lambda_1 e_3 + \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_1)e_4$$

$$\nabla_{e_4}\xi = -\frac{1}{2}(\lambda_4 + \mu_3)e_1 + \lambda_3 e_2 + \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_1)e_3 - \lambda_1 e_4$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$2g(\nabla_{\xi}e_1, e_k) = g([\xi, e_1], e_k) + g([e_k, \xi], e_1)$ eşitliğinden $k = 1$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi}e_1, e_1) &= g([\xi, e_1], e_1) + g([e_1, \xi], e_1) \\ &= -g([e_1, \xi], e_1) + g([e_1, \xi], e_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$k = 2$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi}e_1, e_2) &= g([\xi, e_1], e_2) + g([e_2, \xi], e_1) \\ &= -g([e_1, \xi], e_2) + g([e_2, \xi], e_1) \\ &= -\lambda_2 + \mu_1 \end{aligned}$$

olup $g(\nabla_{\xi} e_1, e_2) = -\frac{1}{2}(\lambda_2 - \mu_1)$ dir. $k = 3$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi} e_1, e_3) &= g([\xi, e_1], e_3) + g([e_3, \xi], e_1) \\ &= -g([e_1, \xi], e_3) + g([e_3, \xi], e_1) \\ &= \lambda_3 - \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

$k = 4$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi} e_1, e_4) &= g([\xi, e_1], e_4) + g([e_4, \xi], e_1) \\ &= -g([e_1, \xi], e_4) + g([e_4, \xi], e_1) \\ &= \lambda_4 - \mu_3 \end{aligned}$$

olup $g(\nabla_{\xi} e_1, e_4) = -\frac{1}{2}(\lambda_4 - \mu_3)$ dür. Sonuç olarak,

$$\nabla_{\xi} e_1 = -\frac{1}{2}(\lambda_2 - \mu_1)e_2 - \frac{1}{2}(\lambda_4 - \mu_3)e_4$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\nabla_{\xi} e_2 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \mu_1)e_1 + \frac{1}{2}(\lambda_4 - \mu_3)e_3,$$

$$\nabla_{\xi} e_3 = \frac{1}{2}(\lambda_4 - \mu_3)e_2 - \frac{1}{2}(\lambda_2 - \mu_1)e_4,$$

$$\nabla_{\xi} e_4 = -\frac{1}{2}(\lambda_4 - \mu_3)e_1 + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \mu_1)e_3.$$

olduğu kolaylıkla görülür.

4. 5-BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Tanım 4.0.1. G bağlantılı bir Lie grubu ve (φ, ξ, η) , G üzerinde bir hemen hemen kontak yapı olsun. Her $a \in G$ için, $L_a : G \rightarrow G$ sol öteleme dönüşümü olmak üzere,

$$\varphi \circ dL_a = dL_a \circ \varphi, \quad dL_a(\xi) = \xi$$

koşulları sağlanıyorsa bu yapıya G üzerinde bir sol invaryant hemen hemen kontak yapı denir. Eğer G hemen hemen kontak B -metrik manifold ve g metriği sol invaryant yani (2.10) koşulunu sağlıyorsa G ye sol invaryant hemen hemen kontak B -metrik manifold denir.

Tanım 4.0.2. $\mathfrak{g}$, $(2n+1)$ boyutlu bir Lie cebiri olsun. η 1-form, $\varphi \in \text{End}(\mathfrak{g})$, $\xi \in \mathfrak{g}$ olmak üzere, her $X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad g(\varphi(X), \varphi(Y)) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

koşulları sağlanıyorsa (φ, ξ, η, g) yapısına $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde bir hemen hemen kontak B -metrik yapı denir.

Bu durumda Lie cebirleri üzerindeki hemen hemen kontak B -metrik yapıların sınıfları da benzer şekilde tanımlanabilir. G bağlantılı Lie grubu, sol invaryant hemen hemen kontak B -metrik yapıya sahip ise G üzerindeki bu yapı, $\mathfrak{g}$ üzerinde bir tek hemen hemen kontak B -metrik yapıyı belirler. Kolaylık olması açısından $\mathfrak{g}$ üzerindeki yapı yine $(G, \varphi, \xi, \eta, g)$ ile gösterilecektir. Boyutu ≤ 5 olan nilpotent Lie cebirlerinin sınıflandırılması Dixmier tarafından yapılmıştır [12]. Ayrıca bu cebirlerin farklı boyutlardaki sınıflandırılması da çalışılmıştır [14].

5-boyutlu nilpotent Lie cebirleri dokuz sınıfa ayrılmıştır [12]. $\{e_1, \dots, e_5\}$ Lie cebirlerinin üreteçleri olmak üzere $\mathfrak{g}_i$ Lie cebirleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 : [e_1, e_2] &= e_5, [e_3, e_4] = e_5 \\ \mathfrak{g}_2 : [e_1, e_2] &= e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_5 \\ \mathfrak{g}_3 : [e_1, e_2] &= e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_5 \\ \mathfrak{g}_4 : [e_1, e_2] &= e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5 \\ \mathfrak{g}_5 : [e_1, e_2] &= e_4, [e_1, e_3] = e_5 \\ \mathfrak{g}_6 : [e_1, e_2] &= e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = e_5 \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_7, \mathfrak{g}_8, \mathfrak{g}_9$ sınıfları ise abelyen olup braketleri sıfırdır. $\mathfrak{g}_i$, ($i = 1, \dots, 9$) Lie cebirleri için hemen hemen kontak metrik yapıları tanımlanmış ve hangi sınıflara ait olduğu belirlenmiştir [22]. Bu bölümde, bu cebirler üzerinde hemen hemen kontak B -metrik yapısı verip tanımlanan hangi sınıfa düştüğünü belirleyelim.

$$\begin{aligned} g(e_1, e_1) &= g(e_2, e_2) = g(e_5, e_5) = -g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = 1 \\ \varphi(e_1) &= e_3, \varphi(e_2) = e_4, \varphi(e_3) = -e_1, \varphi(e_4) = -e_2, \varphi(e_5) = 0 \\ \xi &= e_5, \eta = e_5 \end{aligned}$$

eşitlikleri hemen hemen kontak B -metrik yapısı tanımlar.

Teorem 4.0.3. $\mathfrak{g}_1$ Lie cebiri $\mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındandır.

Kanıt. $\mathfrak{g}_1 : [e_1, e_2] = e_5, [e_3, e_4] = e_5$ olmak üzere (2.3) den,

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_2 &= \frac{1}{2} e_5, \nabla_{e_1} e_5 = -\frac{1}{2} e_2, \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_5, \nabla_{e_2} e_5 = \frac{1}{2} e_1, \\ \nabla_{e_3} e_4 &= \frac{1}{2} e_5, \nabla_{e_3} e_5 = \frac{1}{2} e_4, \nabla_{e_4} e_3 = -\frac{1}{2} e_5, \nabla_{e_4} e_5 = -\frac{1}{2} e_3, \\ \nabla_{e_5} e_1 &= -\frac{1}{2} e_2, \nabla_{e_5} e_2 = \frac{1}{2} e_1, \nabla_{e_5} e_3 = \frac{1}{2} e_4, \nabla_{e_5} e_4 = -\frac{1}{2} e_3 \end{aligned}$$

elde edilir. $i = 1, \dots, 5$ olmak üzere $F(e_i, e_i, x) = 0$ ve $F(e_i, \varphi e_i, x) = 0$ dır. O halde (3.12) den $\theta(x) = \theta^*(x) = 0$ elde edilir.

$F(e_i, e_j, e_k) = F_{ijk}$ olmak üzere Tanım 3.0.4 den

$$\begin{aligned} F_{145} &= F_{415} = F_{154} = F_{451} = -\frac{1}{2} \\ F_{514} &= F_{541} = -1 \\ F_{235} &= F_{325} = F_{253} = F_{352} = \frac{1}{2} \\ F_{523} &= F_{532} = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}x_1y_4z_5 - \frac{1}{2}x_4y_1z_5 - \frac{1}{2}x_1y_5z_4 - \frac{1}{2}x_4y_5z_1 - x_5y_1z_4 - x_5y_4z_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_2y_3z_5 + \frac{1}{2}x_3y_2z_5 + \frac{1}{2}x_2y_5z_3 + \frac{1}{2}x_3y_5z_2 + x_5y_2z_3 + x_5y_3z_2
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
F_8(x, y, z) &= -\frac{1}{2}x_1y_4z_5 - \frac{1}{2}x_4y_1z_5 - \frac{1}{2}x_1y_5z_4 - \frac{1}{2}x_4y_5z_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_2y_3z_5 + \frac{1}{2}x_3y_2z_5 + \frac{1}{2}x_2y_5z_3 + \frac{1}{2}x_3y_5z_2
\end{aligned}$$

$$F_{10}(x, y, z) = -x_5y_1z_4 + x_5y_2z_3 + x_5y_3z_2 - x_5y_4z_1$$

olduğundan $F(x, y, z) = F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ dir. Yani $F \in \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ elde edilir.

O halde $\mathfrak{g}_1$ Lie cebiri $\mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfına aittir. $\square$

Teorem 4.0.4. $\mathfrak{g}_2$ Lie cebiri $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındandır.

Kanıt. $\mathfrak{g}_2 : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_5$ olmak üzere (2.3) den,

$$\nabla_{e_1}e_2 = \frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_1}e_3 = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_5, \nabla_{e_1}e_5 = \frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_3,$$

$$\nabla_{e_2}e_3 = -\frac{1}{2}e_1, \nabla_{e_2}e_4 = \frac{1}{2}e_5, \nabla_{e_2}e_5 = \frac{1}{2}e_4, \nabla_{e_3}e_1 = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_5,$$

$$\nabla_{e_3}e_2 = -\frac{1}{2}e_1, \nabla_{e_3}e_5 = \frac{1}{2}e_1, \nabla_{e_4}e_2 = -\frac{1}{2}e_5, \nabla_{e_4}e_5 = \frac{1}{2}e_2,$$

$$\nabla_{e_5}e_1 = \frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_5}e_2 = \frac{1}{2}e_4, \nabla_{e_5}e_3 = \frac{1}{2}e_1, \nabla_{e_5}e_4 = \frac{1}{2}e_2$$

elde edilir. (3.12) den $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0$ ve $x = \sum_{i=1}^5 x_i e_i$ olmak üzere $\theta(x) = x_2$, $\theta^*(x) = x_4$ elde edilir.

$F(e_i, e_j, e_k) = F_{ijk}$ olmak üzere Tanım 3.0.4 den

$$\begin{aligned}
F_{112} &= F_{121} = F_{134} = F_{143} = F_{341} = F_{314} = \frac{1}{2} \\
F_{115} &= F_{225} = F_{335} = F_{445} = F_{151} = F_{252} = F_{353} = F_{454} = \frac{1}{2} \\
F_{332} &= F_{323} = -\frac{1}{2} \\
F_{511} &= F_{522} = F_{533} = F_{544} = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= \frac{1}{2}x_1 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_2 z_1 + \frac{1}{2}x_1 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_3 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_4 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_1 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_2 y_2 z_5 + \frac{1}{2}x_3 y_3 z_5 + \frac{1}{2}x_4 y_4 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_3 y_5 z_3 + \frac{1}{2}x_4 y_5 z_4 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_2 - \frac{1}{2}x_3 y_2 z_3 + x_5 y_1 z_1 + x_5 y_2 z_2 \\
&\quad + x_5 y_3 z_3 + x_5 y_4 z_4
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
F_8(x, y, z) &= \frac{1}{2}x_1 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_2 y_2 z_5 + \frac{1}{2}x_3 y_3 z_5 + \frac{1}{2}x_4 y_4 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_2 + \frac{1}{2}x_3 y_5 z_3 + \frac{1}{2}x_4 y_5 z_4
\end{aligned}$$

$$F_{10}(x, y, z) = x_5 y_1 z_1 + x_5 y_2 z_2 + x_5 y_3 z_3 + x_5 y_4 z_4$$

ve diğer terimler $\mathcal{F}_2$ sınıfına ait olup $F(x, y, z) = F_2(x, y, z) + F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ olur. Yani $F \in \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ elde edilir. O halde $\mathfrak{g}_2$ Lie cebiri $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfına aittir. $\square$

Teorem 4.0.5. $\mathfrak{g}_3$ Lie cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındandır.

Kanıt. $\mathfrak{g}_3 : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_5$ olmak üzere (2.3) den,

$$\nabla_{e_1} e_2 = \frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_1} e_3 = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_4, \nabla_{e_1} e_4 = -\frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_5, \nabla_{e_1} e_5 = \frac{1}{2}e_4,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_2} e_3 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_5, \nabla_{e_2} e_5 = \frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_3} e_1 = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_4,$$

$$\nabla_{e_3} e_2 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_5, \nabla_{e_3} e_4 = -\frac{1}{2}e_1, \nabla_{e_3} e_5 = \frac{1}{2}e_2, \nabla_{e_4} e_1 = -\frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_5,$$

$$\nabla_{e_4} e_3 = -\frac{1}{2}e_1, \nabla_{e_4} e_5 = \frac{1}{2}e_1, \nabla_{e_5} e_1 = \frac{1}{2}e_4, \nabla_{e_5} e_2 = \frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_5} e_3 = \frac{1}{2}e_2, \nabla_{e_5} e_4 = \frac{1}{2}e_1$$

elde edilir. (3.12) den $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0$ ve $x = \sum_{i=1}^5 x_i e_i$ olmak üzere $\theta(x) = x_2$,

$\theta^*(x) = x_4$ elde edilir.

$F(e_i, e_j, e_k) = F_{ijk}$ olmak üzere Tanım 3.0.4 den

$$\begin{aligned} F_{112} &= F_{121} = F_{123} = F_{132} = F_{125} = F_{152} = F_{134} = F_{143} = \frac{1}{2} \\ F_{215} &= F_{251} = F_{314} = F_{341} = F_{345} = F_{354} = F_{435} = F_{453} = \frac{1}{2} \\ F_{114} &= F_{141} = F_{312} = F_{321} = F_{323} = F_{332} = F_{334} = F_{343} = -\frac{1}{2} \\ F_{211} &= F_{233} = F_{433} = F_{411} = -1 \\ F_{512} &= F_{521} = F_{534} = F_{543} = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\ &= \frac{1}{2}x_1 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_2 z_1 + \frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 + \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_2 z_5 \\ &\quad + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_3 + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_4 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_5 + \frac{1}{2}x_3 y_5 z_4 + \frac{1}{2}x_4 y_3 z_5 \\ &\quad + \frac{1}{2}x_4 y_5 z_3 - \frac{1}{2}x_1 y_1 z_4 - \frac{1}{2}x_1 y_4 z_1 - \frac{1}{2}x_3 y_1 z_2 - \frac{1}{2}x_3 y_2 z_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}x_3 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_2 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_4 - \frac{1}{2}x_3 y_4 z_3 - x_2 y_1 z_1 \\ &\quad - x_2 y_3 z_3 - x_4 y_3 z_3 - x_4 y_1 z_1 + x_5 y_1 z_2 + x_5 y_2 z_1 + x_5 y_3 z_4 + x_5 y_4 z_3 \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} F_8(x, y, z) &= \frac{1}{2}x_1 y_2 z_5 + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_5 + \frac{1}{2}x_4 y_3 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_5 z_4 + \frac{1}{2}x_4 y_5 z_3 \end{aligned}$$

$$F_{10}(x, y, z) = x_5 y_1 z_2 + x_5 y_2 z_1 + x_5 y_3 z_4 + x_5 y_4 z_3$$

ve diğer kalan terimler $W_1 = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z)$ uzayında olup $F(x, y, z) = W_1 + F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ dir. Yani $F \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ elde edilir. O halde $\mathfrak{g}_3$ Lie cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfına aittir. $\square$

Teorem 4.0.6. $\mathfrak{g}_4$ Lie cebiri $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındandır.

Kanıt. $\mathfrak{g}_4 : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5$ olmak üzere (2.3) den,

$$\nabla_{e_1} e_2 = \frac{1}{2} e_3, \nabla_{e_1} e_3 = \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_4, \nabla_{e_1} e_4 = -\frac{1}{2} e_3 + \frac{1}{2} e_5, \nabla_{e_1} e_5 = \frac{1}{2} e_4,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_3, \nabla_{e_2} e_3 = -\frac{1}{2} e_1, \nabla_{e_3} e_1 = \frac{1}{2} e_2 - \frac{1}{2} e_4, \nabla_{e_3} e_2 = -\frac{1}{2} e_1,$$

$$\nabla_{e_3} e_4 = -\frac{1}{2} e_1, \nabla_{e_4} e_1 = -\frac{1}{2} e_3 - \frac{1}{2} e_5, \nabla_{e_4} e_3 = -\frac{1}{2} e_1, \nabla_{e_4} e_5 = \frac{1}{2} e_1,$$

$$\nabla_{e_5} e_1 = \frac{1}{2} e_4, \nabla_{e_5} e_4 = \frac{1}{2} e_1$$

elde edilir. (3.12) den $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0$ ve $x = \sum_{i=1}^5 x_i e_i$ olmak üzere $\theta(x) = \theta^*(x) = 0$ elde edilir.

$F(e_i, e_j, e_k) = F_{ijk}$ olmak üzere Tanım 3.0.4 den

$$\begin{aligned} F_{112} &= F_{121} = F_{123} = F_{132} = F_{125} = F_{152} = F_{134} = F_{143} = \frac{1}{2} \\ F_{314} &= F_{341} = F_{435} = F_{453} = F_{512} = F_{521} = F_{534} = F_{543} = \frac{1}{2} \\ F_{114} &= F_{141} = F_{312} = F_{321} = F_{323} = F_{332} = F_{334} = F_{343} = -\frac{1}{2} \\ F_{411} &= F_{433} = -1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x_1y_1z_2 + \frac{1}{2}x_1y_2z_1 + \frac{1}{2}x_1y_2z_3 + \frac{1}{2}x_1y_3z_2 + \frac{1}{2}x_1y_2z_5 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_1y_5z_2 + \frac{1}{2}x_1y_3z_4 + \frac{1}{2}x_1y_4z_3 - \frac{1}{2}x_3y_2z_3 - \frac{1}{2}x_3y_3z_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_4y_3z_5 + \frac{1}{2}x_4y_5z_3 + \frac{1}{2}x_5y_1z_2 + \frac{1}{2}x_5y_2z_1 + \frac{1}{2}x_5y_3z_4 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_5y_4z_3 - \frac{1}{2}x_1y_1z_4 - \frac{1}{2}x_1y_4z_1 - \frac{1}{2}x_3y_1z_2 - \frac{1}{2}x_3y_2z_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_3y_1z_4 + \frac{1}{2}x_3y_4z_1 - \frac{1}{2}x_3y_3z_4 - \frac{1}{2}x_3y_4z_3 - x_4y_1z_1 - x_4y_3z_3
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
F_8(x, y, z) &= \frac{1}{2}x_1y_2z_5 + \frac{1}{2}x_3y_4z_5 + \frac{1}{2}x_1y_5z_2 + \frac{1}{2}x_4y_5z_3 \\
F_{10}(x, y, z) &= \frac{1}{2}x_5y_1z_2 + \frac{1}{2}x_5y_2z_1 + \frac{1}{2}x_5y_3z_4 + \frac{1}{2}x_5y_4z_3
\end{aligned}$$

ve diğer terimler $F_2(x, y, z)$ ve $F_3(x, y, z)$ sınıfları içerisine düşmekte olup $F(x, y, z) = F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) + F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ olur. Yani $F \in \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ elde edilir. O halde $\mathfrak{g}_4$ Lie cebiri $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfına aittir. $\square$

Teorem 4.0.7. $\mathfrak{g}_5$ Lie cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındandır.

Kanıt. $\mathfrak{g}_5 : [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5$ olmak üzere (2.3) den,

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}e_2 &= \frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_1}e_3 = \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_1}e_4 = \frac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_1}e_5 = \frac{1}{2}e_3, \\
\nabla_{e_2}e_1 &= -\frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_2}e_4 = -\frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_3}e_5 = \frac{1}{2}e_1, \\
\nabla_{e_4}e_1 &= \frac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_4}e_2 = -\frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_5}e_1 = \frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_5}e_3 = \frac{1}{2}e_1
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.12) den $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0$ ve $x = \sum_{i=1}^5 x_i e_i$ olmak üzere $\theta(x) = -x_1$, $\theta^*(x) = -x_3$ elde edilir.

$F(e_i, e_j, e_k) = F_{ijk}$ olmak üzere Tanım 3.0.4 den

$$\begin{aligned}
F_{115} &= F_{151} = F_{335} = F_{353} = F_{414} = F_{441} = \frac{1}{2} \\
F_{212} &= F_{221} = F_{234} = F_{243} = F_{423} = F_{432} = -\frac{1}{2} \\
F_{122} &= F_{144} = F_{511} = F_{533} = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= \frac{1}{2}x_1 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_3 z_5 + \frac{1}{2}x_3 y_5 z_3 + \frac{1}{2}x_4 y_1 z_4 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_4 y_4 z_1 - \frac{1}{2}x_2 y_1 z_2 - \frac{1}{2}x_2 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_2 y_3 z_4 - \frac{1}{2}x_2 y_4 z_3 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_4 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_4 y_3 z_2 + x_1 y_2 z_2 + x_1 y_4 z_4 + x_5 y_1 z_1 + x_5 y_3 z_3
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$F_8(x, y, z) = \frac{1}{2}x_1 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_3 y_3 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_5 z_3$$

$$F_{10}(x, y, z) = x_5 y_1 z_1 + x_5 y_3 z_3$$

ve kalan diğer terimler $F_1(x, y, z)$ ve $F_3(x, y, z)$ sınıfları içerisinde düşmekte olup $F(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_3(x, y, z) + F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ olur. Yani $F \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathfrak{g}_5$ Lie cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfına aittir. $\square$

Teorem 4.0.8. $\mathfrak{g}_6$ Lie cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındandır.

Kanıt. $\mathfrak{g}_6 : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = e_5$ olmak üzere (2.3) den,

$$\nabla_{e_1} e_2 = \frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_1} e_3 = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_4, \nabla_{e_1} e_4 = -\frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2}e_3,$$

$$\nabla_{e_2} e_3 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_5, \nabla_{e_2} e_5 = \frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_3} e_1 = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_4, \nabla_{e_3} e_2 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_5,$$

$$\nabla_{e_3} e_4 = -\frac{1}{2}e_1, \nabla_{e_3} e_5 = \frac{1}{2}e_2, \nabla_{e_4} e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_4} e_3 = -\frac{1}{2}e_1, \nabla_{e_5} e_2 = \frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_5} e_3 = \frac{1}{2}e_2$$

elde edilir. (3.12) den $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0$ ve $x = \sum_{i=1}^5 x_i e_i$ olmak üzere $\theta(x) = x_2$,

$\theta^*(x) = x_4$ elde edilir. $F(e_i, e_j, e_k) = F_{ijk}$ olmak üzere Tanım 3.0.4 den

$$\begin{aligned}
F_{112} &= F_{121} = F_{123} = F_{132} = F_{215} = F_{251} = F_{134} = F_{143} = \frac{1}{2} \\
F_{314} &= F_{341} = F_{512} = F_{521} = F_{534} = F_{543} = F_{345} = F_{354} = \frac{1}{2} \\
F_{114} &= F_{141} = F_{312} = F_{321} = F_{323} = F_{332} = F_{334} = F_{343} = -\frac{1}{2} \\
F_{211} &= F_{233} = F_{433} = F_{411} = -1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= \frac{1}{2}x_1 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_2 z_1 + \frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 + \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_1 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_3 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_4 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_1 + \frac{1}{2}x_5 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_5 y_2 z_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_5 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_5 y_4 z_3 - \frac{1}{2}x_1 y_1 z_4 - \frac{1}{2}x_1 y_4 z_1 - \frac{1}{2}x_3 y_1 z_2 - \frac{1}{2}x_3 y_2 z_1 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_3 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_2 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_4 - \frac{1}{2}x_3 y_4 z_3 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_5 + \frac{1}{2}x_3 y_5 z_4 \\
&\quad - x_2 y_1 z_1 - x_2 y_3 z_3 - x_4 y_3 z_3 - x_4 y_1 z_1
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$F_8(x, y, z) = \frac{1}{2}x_2 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_5 + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_5 z_4$$

$$F_{10}(x, y, z) = \frac{1}{2}x_5 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_5 y_2 z_1 + \frac{1}{2}x_5 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_5 y_4 z_3$$

ve diğer kalan terimler $W_1 = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z)$ uzayında olup $F(x, y, z) = W_1 + F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ dir. Yani $F \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ elde edilir. O halde $\mathfrak{g}_6$ Lie cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfına aittir. $\square$

Teorem 4.0.9. $\mathfrak{g}_i$ ($i = 1, \dots, 6$) Lie cebirleri üzerinde tanımlanan ξ vektör alanı Killing vektör alanıdır.

Kanıt. $X = \sum_i x_i e_i$ ve $Y = \sum_j y_j e_j$ olmak üzere

$$g(\nabla_x \xi, y) = -g(\nabla_y \xi, x) \quad (4.1)$$

ise ξ Killing vektör alanıdır.

$\mathfrak{g}_1$ Lie cebiri için

$$\begin{aligned} g(\nabla_x \xi, y) &= \sum_{i,j} x_i y_j g(\nabla_{e_i} \xi, e_j) \\ &= -x_1 y_2 \frac{1}{2} + x_2 y_1 \frac{1}{2} - x_3 y_4 \frac{1}{2} + x_4 y_3 \frac{1}{2} \\ g(\nabla_y \xi, x) &= \sum_{i,j} y_j x_i g(\nabla_{e_j} \xi, e_i) \\ &= -y_1 x_2 \frac{1}{2} + y_2 x_1 \frac{1}{2} - y_3 x_4 \frac{1}{2} + y_4 x_3 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden (4.1) sağlanır. Yani $\mathfrak{g}_1$ Lie cebiri için ξ Killing vektör alanıdır.

$\mathfrak{g}_2$ Lie cebiri için

$$\begin{aligned} g(\nabla_x \xi, y) &= \sum_{i,j} x_i y_j g(\nabla_{e_i} \xi, e_j) \\ &= -x_1 y_3 \frac{1}{2} - x_2 y_4 \frac{1}{2} + x_3 y_1 \frac{1}{2} + x_4 y_2 \frac{1}{2} \\ g(\nabla_y \xi, x) &= \sum_{i,j} y_j x_i g(\nabla_{e_j} \xi, e_i) \\ &= -y_1 x_3 \frac{1}{2} - y_2 x_4 \frac{1}{2} + y_3 x_1 \frac{1}{2} + y_4 x_2 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden (4.1) sağlanır. Yani $\mathfrak{g}_2$ Lie cebiri için ξ Killing vektör alanıdır.

$\mathfrak{g}_3$ Lie cebiri için

$$\begin{aligned} g(\nabla_x \xi, y) &= \sum_{i,j} x_i y_j g(\nabla_{e_i} \xi, e_j) \\ &= -x_1 y_4 \frac{1}{2} - x_2 y_3 \frac{1}{2} + x_3 y_2 \frac{1}{2} + x_4 y_1 \frac{1}{2} \\ g(\nabla_y \xi, x) &= \sum_{i,j} y_j x_i g(\nabla_{e_j} \xi, e_i) \\ &= -y_1 x_4 \frac{1}{2} - y_2 x_3 \frac{1}{2} + y_3 x_2 \frac{1}{2} + y_4 x_1 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden (4.1) sağlanır. Yani $\mathfrak{g}_3$ Lie cebiri için ξ Killing vektör alanıdır.

$\mathfrak{g}_4$ Lie cebiri için

$$\begin{aligned} g(\nabla_x \xi, y) &= \sum_{i,j} x_i y_j g(\nabla_{e_i} \xi, e_j) \\ &= -x_1 y_4 \frac{1}{2} + x_4 y_1 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_y \xi, x) &= \sum_{i,j} y_j x_i g(\nabla_{e_j} \xi, e_i) \\ &= -y_1 x_4 \frac{1}{2} + y_4 x_1 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden (4.1) sağlanır. Yani $\mathfrak{g}_4$ Lie cebiri için ξ Killing vektör alanıdır.

$\mathfrak{g}_5$ Lie cebiri için

$$\begin{aligned} g(\nabla_x \xi, y) &= \sum_{i,j} x_i y_j g(\nabla_{e_i} \xi, e_j) \\ &= -x_1 y_3 \frac{1}{2} + x_3 y_1 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_y \xi, x) &= \sum_{i,j} y_j x_i g(\nabla_{e_j} \xi, e_i) \\ &= -y_1 x_3 \frac{1}{2} + y_3 x_1 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden (4.1) sağlanır. Yani $\mathfrak{g}_5$ Lie cebiri için ξ Killing vektör alanıdır.

$\mathfrak{g}_6$ Lie cebiri için

$$\begin{aligned} g(\nabla_x \xi, y) &= \sum_{i,j} x_i y_j g(\nabla_{e_i} \xi, e_j) \\ &= -x_2 y_3 \frac{1}{2} + x_3 y_2 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_y \xi, x) &= \sum_{i,j} y_j x_i g(\nabla_{e_j} \xi, e_i) \\ &= -y_2 x_3 \frac{1}{2} + y_3 x_2 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden (4.1) sağlanır. Yani $\mathfrak{g}_6$ Lie cebiri için ξ Killing vektör alanıdır. $\square$

5. SONUÇ

Hemen hemen kontak B –metrik manifoldların sınıflandırılması incelenmiş ve bu manifoldlar 2^{11} sınıfa ayrılmıştır. Bazı hemen hemen kontak B –metrik manifold örnekleri incelenip hangi sınıf içerisinde olduğu belirlenmiştir. Tezin orijinal bölümünde ise 5–boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde hemen hemen kontak B –metrik yapısı tanımlayıp hangi sınıflara ait olduğu belirlenmiştir.

$\mathcal{F}_i$ sınıfına ait M_1 ve M_2 hemen hemen kontak B –metrik manifoldlarının çarpımı ile elde edilen $M_1 \times M_2$ hemen hemen kompleks B –metrik manifoldunun hangi sınıflara düştüğünü bulmak ayrı bir araştırma konusudur.

KAYNAKÇA

- [1] Ganchev, G., Mihova, V. ve Gribachev, K. (1993). Almost contact manifolds with B -metric, *Mathematica Balkanica*, 7, 3-4, 261-276.
- [2] Manev, M. (2012). Curvature properties on some classes of almost contact manifolds with B -metric, *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.* 65, 283-290 .
- [3] Ganchev, G. ve Borisov, A. (1986). Note on almost contact manifolds with Norden metric, *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, 39, 31-34.
- [4] Blair, D. (1976). Contact manifolds in Riemannian geometry, *Lect. Notes in Math.*, 7, Springer Verlag.
- [5] Manev, H. (2015). On the structure tensors of almost of contact B -metric Manifolds, *Filomat* 29 (3), 427-436.
- [6] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press.
- [7] Ivanov, S., Manev, H. ve Manev, M. (2016). Sasaki-like almost contact complex Riemannian manifolds, *J.Geo.Phys.*, 107, 136-148.
- [8] Chinea, D. ve Gonzalez, C. (1984). A classification of almost contact metric manifolds, *An.Sti.Univ."Al.I.Cuza" Iasi*, 30, 75-79.
- [9] Alexiev, V. ve Ganchev, G. (1986). On the classification of the almost contact metric manifolds, *Math. and Educ. in Math.*, Proc. of the XV Spring Conf. of UBM Sunny Beach, 155-161.
- [10] Blair, D. ve Oubina, J. (1990). Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds", *Publ. Math. Debrecen*, 34, 199-207.
- [11] Chiena, D. ve Gonzalez, C. (1990). A classification of almost contact metric manifolds, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 156, 15-36.
- [12] Dixmier, J. (1958). Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotentes III, *Canadian Journal of Mathematics*, 10, 321-348.

- [13] Gray, A. ve Hervella, L. M. (1980). The sixteen classes of almost hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 123, 35-58.
- [14] Gong, M. (1998). A classification of nilpotent Lie algebras of Dimension 7, PhD thesis, University of Waterloo, Canada.
- [15] Gray, J.W. (1959). Some global properties of contact structures, *Ann. Math.*, 699, 2, 421-450.
- [16] Tanno, S. (1968). The topology of contact Riemannian manifolds, *Illinois J. Math.* 12, 700-717.
- [17] Bulut, Ş. (2019). $\mathcal{D}$ –homothetic deformation on almost contact B-metric manifolds, *J. of Geo.*, 110:23.
- [18] Capursi, M. (1984). Some remarks on the product of two almost contact manifolds, *An. St. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi*, 30, 75-79.
- [19] Manev, M. (1995). Examples of almost contact manifolds with B –metric, derived from almost complex manifolds with B-metric, *Plovdiv Univ. Sci. Works Math.*, 32, 3, 61-66.
- [20] Morimoto, A. (1963). On normal almost contact structures, *J. Math. Soc. Japan*, 15, 420-436.
- [21] Lee, J.M. (2003). Introduction to smooth manifolds, Springer-Verlag.
- [22] Özdemir, N., Solgun, M. ve Aktay, Ş. (2016). Almost contact metric structures on 5-dimensional nilpotent Lie algebras, *Symmetry*, 8, 76.