

**PCF KENDİNE BENZER YAPILAR
ÜZERİNDE FRAKTAL
İNTERPOLASYON**

Yüksek Lisans Tezi

Serpil ERİM

Eskişehir 2019

PCF KENDİNE BENZER YAPILAR ÜZERİNDE FRAKTAL İNTERPOLASYON

Serpil ERİM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Geometri Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Derya ÇELİK

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Serpil Erim'ın "**PCF Kendine Benzer Yapılar Üzerinde Fraktal İnterpolasyon**" başlıklı tezi 28/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği" nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye(Tez Danışmanı)	: Dr. Öğr. Üyesi Derya ÇELİK	
Üye	: Doç. Dr. Nevin MAHİR	
Üye	: Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR	

.....
Enstitü Müdürü

ÖZET

PCF KENDİNE BENZER YAPILAR ÜZERİNDE FRAKTAL İNTERPOLASYON

Serpil ERİM

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Haziran 2019

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Derya ÇELİK

Bu çalışmada öncelikle Barnsley'in yaklaşımıyla yinelemeli fonksiyon sistemleri ve aralık üzerinde fraktal interpolasyon fonksiyonları kavramları verilmiş, fraktal interpolasyon fonksiyonları ile ilgili çeşitli örnekler verilmiş ve şekillerle gösterilmiştir. Daha sonra Kigami tarafından verilen kendine benzer yapı, PCF kendine benzer yapı ve harmonik yapı kavramları tanımlanmış, PCF kendine benzer yapılar ve harmonik yapılarla ilgili örnekler, aynı zamanda PCF kendine benzer yapı olmayan durumlar ve aynı şekilde harmonik yapı olmayan durumlar ayrıntılı bir şekilde açıklamalı olarak gösterilmiştir. Ardından, son olarak bir PCF kendine benzer yapı üzerinde harmonik fonksiyonlar yardımıyla Barnsley'in fraktal interpolasyon fonksiyonlarının varlığı araştırılmıştır ve bunlarla ilgili örnekler verilmiş ve şekillerle açık bir şekilde ortaya konulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Kendine benzer yapı, Yinelemeli fonksiyon sistemi, Fraktal interpolasyon, Harmonik yapı, Harmonik fonksiyon.

ABSTRACT

FRACTAL INTERPOLATION ON PCF SELF SIMILAR STRUCTURES

Serpil ERİM

Mathematics Department

Anadolu University, Graduate School of Sciences, June 2019

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Derya CELİK

In this study, the concepts of iterative function systems and Fractal interpolation functions on interval were given primarily by Barnsley's approach, various examples of fractal interpolation functions were given and illustrated with shapes. Later, the concepts of self-similar structure, PCF self-similar structure and harmonic structure given by Kigami were defined, examples of PCF self-similar structures and harmonic structures were shown, as well as PCF self-similar non-Structure States and likewise non-harmonic structure states were explained in detail. Finally, with the help of harmonic functions on a PCF self-similar structure, the existence of Barnsley's fractal interpolation functions has been investigated and examples of these have been given and clearly laid out with shapes.

Keywords: Self similar structure, Iterated function system, Fractal interpolation, Harmonic structure, Harmonik function .

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim süresince, sevecenliği ve sıcaklığıyla bir aile, bilgi ve deneyimiyle ise bir danışman olarak her zaman yanımda olan çok değerli hocam Derya Çelik'e, bu yolda benimle beraber her türlü zorluğa katlanan arkadaşlarıma ve bütün eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi hiçbir desteği benden esirgemeyen kıymetli aileme sonsuz teşekkürlerimi iletirim.

Serpil ERİM

Haziran 2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

.....

Serpil ERİM

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1 GİRİŞ	1
1.1 Büzülme Dönüşümleri ve Atraktörler	1
1.2 Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri	2
1.3 Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonları	8
2 PCF KENDİNE BENZER YAPILAR	12
2.1 Harmonik Yapılar	15
2.2 PCF Kendine Benzer Yapılar Üzerinde Harmonik İnterpolasyon	28
2.3 Sierpinski Üçgeni Üzerinde Harmonik Fonksiyonlar	28
KAYNAKÇA	35
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1.	Cantor kümesi'nin elde edilme aşamaları 4
Şekil 1.2.	Sierpinski Üçgeni 5
Şekil 1.3.	Koch Eğrisi 6
Şekil 1.4.	$c=(0,4+0,3i)$ 'ye karşılık gelen Hata Ağacı 7
Şekil 1.5.	$c=(0,5+0,5i)$ 'ye karşılık gelen Hata Ağacı 7
Şekil 1.6.	$\{(-1, 1), (0, \frac{1}{2}), (1, -1)\}$ veri kümesi ve $d_1 = d_2 = 0,7$ 'ye karşılık gelen fraktal interpolasyon fonksiyonu. 10
Şekil 1.7.	$\{(-1, 1), (0, \frac{1}{2}), (1, -1)\}$ veri kümesini interpolate eden bir fonksiyonun ilk 6 iterasyonu 11
Şekil 2.1.	G_0 30
Şekil 2.2.	G_1 31
Şekil 2.3.	V_0 'dan V_1 'e harmonik genişleme 33
Şekil 2.4.	m . adımdaki bir alt üçgen 33
Şekil 2.5.	SG üzerinde harmonik fonksiyon 34
Şekil 2.6.	SG üzerinde fraktal interpolasyon fonksiyonu 34

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

YFS	: Yinelemeli Fonksiyon Sistemi
SG	: Sierpinski Üçgeni
$\mathcal{H}(X)$	: X 'in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı
$W_m = W_m^N$	: Harflerini $\{1, 2, \dots, N\}$ kümesinden alan m uzunluklu kelimelerin kümesi
$\langle N \rangle$	: $\{1, 2, \dots, N\}$ kümesi
$\Sigma = \Sigma^N$	: (Kod uzayı) $\langle N \rangle$ kümesindeki harflerle yazılan tek yönlü sonsuz dizilerin kümesi
σ	: $\sigma : \Sigma^N \rightarrow \Sigma^N$ tanımlı kaydırma(shift) dönüşümü
$\mathcal{L}\mathcal{A}(V)$	: V kümesi üzerindeki Laplasyenlerin kümesi
<i>FIF</i>	: Fraktal Interpolasyon Fonksiyonu

1.GİRİŞ

Bu bölümde çalışmamızda kullanılan bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

1.1. Büzülme Dönüşümleri ve Atraktörler

Tanım 1.1.1. $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon, $a \in X$ olmak üzere eğer

$$f(a) = a$$

ise a 'ya f 'nin bir sabit noktası denir.

Tanım 1.1.2. (X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq s.d(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq s < 1$ gerçel sayısı varsa f 'ye büzülme dönüşümü s ' ye ise f 'nin büzülme katsayısı denir.

Teorem 1.1.3. (Büzülme Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f 'nin bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktaya x_f denirse, keyfi $x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f$$

olur.

Tanım 1.1.4. (X, d) tam metrik uzay olmak üzere, X 'in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı $\mathcal{H}(X)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{H}(X) = \{A \subseteq X | A \neq \emptyset \text{ ve } A \text{ kompakt} \}$$

şeklinde tanımlanır. (X, d) tam metrik uzay, $x \in X$, $B \in \mathcal{H}(X)$ olsun. Bu durumda bir x noktasının, B kümesine uzaklığı;

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) | y \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, seçildikten sonra sabitlenen $x \in X$ için $d_x : B \rightarrow \mathbb{R}, d_x(y) = d(x, y)$ fonksiyonu sürekli ve B kompakt olduğundan bu minimum vardır. Yani $\exists y_0 \in B$ için

$$d(x, B) = d(x, y_0)$$

olur. Şimdi noktanın kümeye olan uzaklığı tanımından hareketle X 'in bir A kompakt alt kümesinin bir B kompakt alt kümesine olan uzaklığını tanımlayalım.

Tanım 1.1.5. (X, d) tam metrik uzay, $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere A kümesinin B kümesine olan uzaklığı $d(A, B)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) | x \in A\}$$

Yine kümelerin kompaktlığı ve metriğin sürekliliği sebebiyle bu maksimum da vardır. Yani $\exists x_0 \in A$ ve $\exists y_0 \in B$ için

$$d(A, B) = d(x_0, y_0)$$

olur. Böylece, X üzerinde tanımlı olan d metriği $\mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X)$ üzerinde de bir fonksiyon tanımlar. Ancak bu şekilde tanımlı fonksiyon $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir metrik değildir. Çünkü, $A = [2, 3]$ ve $B = [1, 3]$ olarak alındığı takdirde $d(A, B) = 0$ olmasına karşın $d(B, A) = 1$ olup metriğin simetri özelliği sağlanmaz. Şimdi X 'in kompakt alt kümelerinin uzayı $\mathcal{H}(X)$ üzerinde Hausdorff metriğini tanımlayacağız.

Tanım 1.1.6. (X, d) tam metrik uzay olsun. $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere A kümesi ile B kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı $h(A, B)$ ile gösterilir ve

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 1.1.7. $(\mathcal{H}(X), h)$ bir metrik uzaydır.

Teorem 1.1.8. (X, d) tam metrik uzay olmak üzere $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayı da tam metrik uzaydır. Yani, $\{A_n \in \mathcal{H}(X) | n = 1, 2, \dots\}$ bir Cauchy dizisiyse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \in \mathcal{H}(X)$$

olur.

1.2. Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri

Önerme 1.2.1. (X, d) metrik uzayı üzerinde tanımlı bir $\omega : X \rightarrow X$ sürekli dönüşümü için $A \in \mathcal{H}(X)$ ise $\omega(A) \in \mathcal{H}(X)$ 'dir. Yani,

$$\omega : \mathcal{H}(X_A) \rightrightarrows \mathcal{H}(\omega(A))$$

iyi tanımlıdır.

Önerme 1.2.2. (X, d) metrik uzay ve $\omega : X \rightarrow X$ büzülme katsayısı s olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} : \mathcal{H}(X) &\rightarrow \mathcal{H}(X) \\ A &\mapsto \tilde{\omega}(A)\end{aligned}$$

olarak tanımlı $\tilde{\omega}$ fonksiyonu da $\mathcal{H}(X)$ üzerinde büzülme katsayısı s olan bir büzülme dönüşümüdür.

Önerme 1.2.3. (X, d) tam metrik uzay ve $n = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere, $\omega_n : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ büzülme katsayısı s_n olan büzülme dönüşümleri olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}W : \mathcal{H}(X) &\rightarrow \mathcal{H}(X), \\ W(B) &= \omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_N(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B)\end{aligned}$$

olarak tanımlı W fonksiyonu büzülme katsayısı $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ olan bir büzülme dönüşümüdür.

Tanım 1.2.4. (YFS) Bir yinelemeli fonksiyon sistemi bir tam metrik uzay ve üzerinde tanımlı büzülme dönüşümlerinden oluşur. Yani (X, d) bir tam metrik uzay ve $n = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere $\omega_n : X \rightarrow X$ büzülme katsayıları s_n olan büzülme dönüşümleri olsun. Bu durumda $\{X; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ sistemine büzülme katsayısı $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ olan Yinelemeli Fonksiyon Sistemi (Iterated Function System) ve kısaca YFS (IFS) ile gösterilir.

Bu tanımlamanın ve yukarıda ifade edilen teoremlerin ışığında aşağıdaki teoremi ifade ediyoruz.

Teorem 1.2.5. Büzülme katsayısı s olan bir $\{X; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}W : \mathcal{H}(X) &\rightarrow \mathcal{H}(X), \\ W(B) &= \omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_N(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B)\end{aligned}$$

fonksiyonunun tek türlü belirli bir sabit noktası vardır ve $\forall A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$A, W(A), W^2(A), \dots, W^{on}(A) \dots \rightarrow W(A^*) = A^*$$

Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} W^{on} = A^*$ 'dır.

Tanım 1.2.6. Büzülme katsayısı s olan bir $\{X; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin. Teorem 1.2.5'de W dönüşümünün tek türlü belirli olan sabit noktasına $\{X; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ 'nin atraktörü denir.

Şimdi bir kaç önemli atraktör örneklerini karşılık gelen YFS'leri ile birlikte verelim. İlk örneğimiz Cantor kümesi.

Örnek 1.2.7. $X = [0, 1]$ aralığı üzerindeki standart metrikle bir tam metrik uzaydır. Ayrıca, $\omega_1, \omega_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$\omega_1(x) = \frac{x}{3}$$

$$\omega_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar büzülme katsayısı $\frac{1}{3}$ olan büzülme dönüşümleridir. $\{[0, 1]; \omega_1, \omega_2\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüne Cantor kümesi denir.



Şekil 1.1. Cantor kümesi'nin elde edilme aşamaları

Örnek 1.2.8. $\mathbb{R}^2$ üzerinde bilinen standart metrik ile bir tam metrik uzaydır.

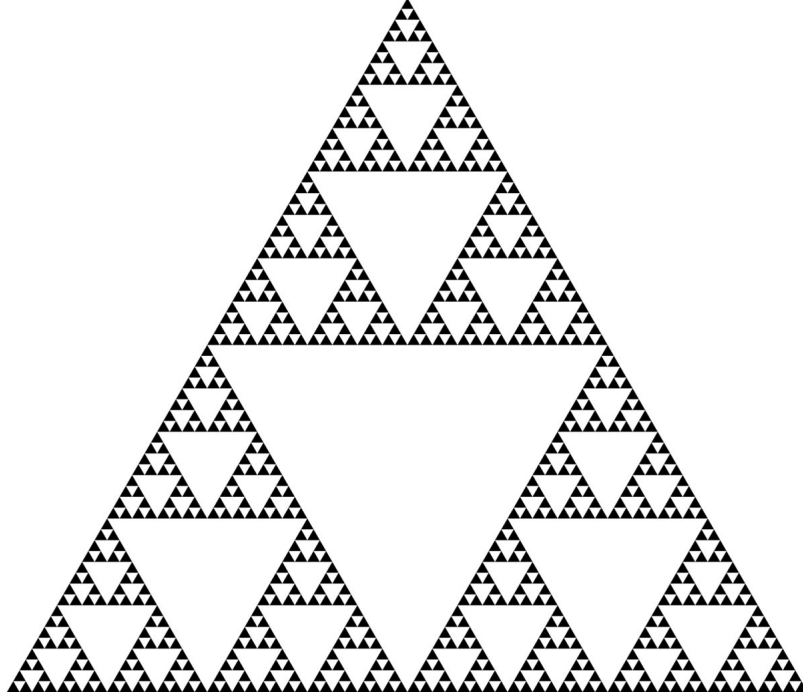
Ayrıca $\omega_1, \omega_2, \omega_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\omega_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\omega_2(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right)$$

$$\omega_3(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$$

dönüşümleri büzülme katsayıları $\frac{1}{2}$ olan birer büzülme dönüşümüdür. $\{\mathbb{R}^2; \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü Sierpinski üçgenidir.



Şekil 1.2. Sierpinski Üçgeni

Örnek 1.2.9. *Yine d standart metrik olmak üzere, $(\mathbb{R}^2, d)$ tam metrik uzayı üzerinde aşağıdaki verilen dönüşümler büzülme katsayıları $\frac{1}{3}$ olan büzülme dönüşümleridir.*

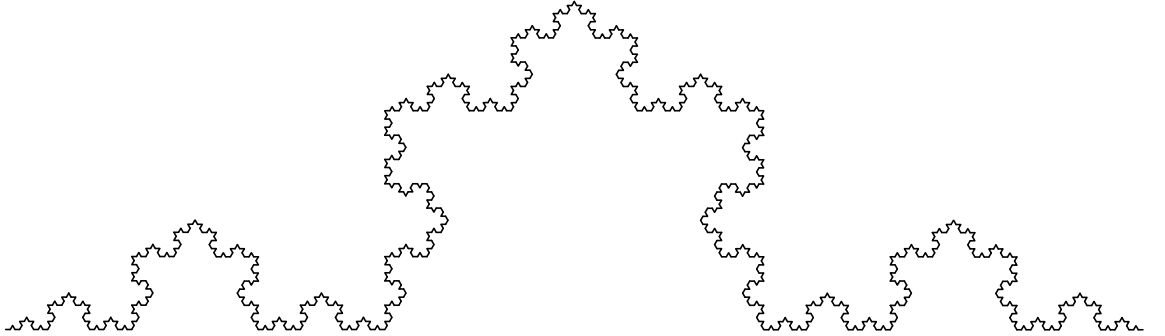
$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

$$f_2(x, y) = \left(-\frac{x}{6} - \frac{\sqrt{3}y}{6} + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}x}{6} - \frac{y}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$f_3(x, y) = \left(\frac{x}{6} + \frac{\sqrt{3}y}{6} + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}x}{6} - \frac{y}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$f_4(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

$\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü Koch eğrisidir.

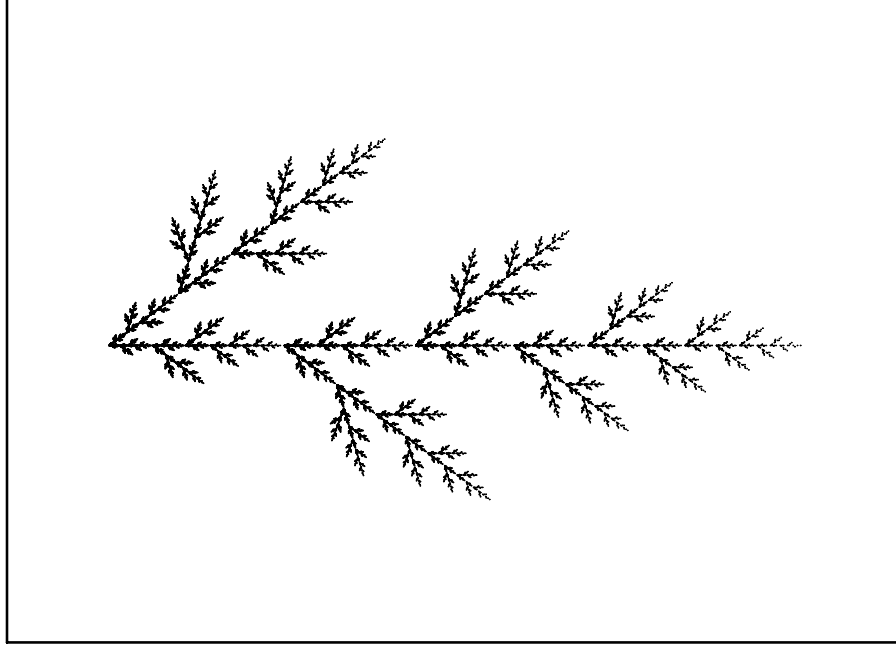


Şekil 1.3. *Koch Eğrisi*

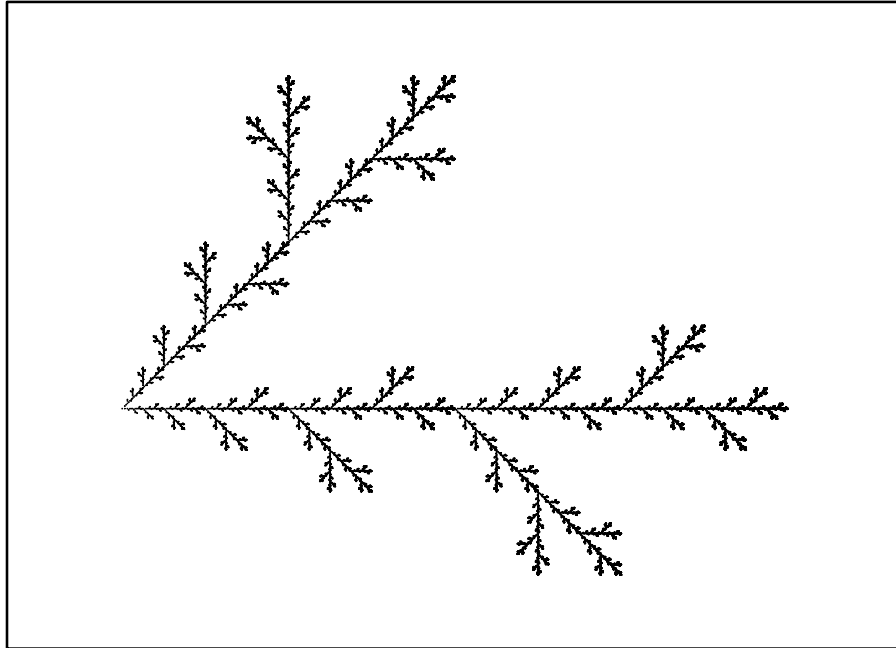
Örnek 1.2.10. $X = \mathbb{C}$ ve $f_{1,2} : X \rightarrow X$, $\|c\|, \|1 - c\| \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f_1(z) = c\bar{z} \text{ ve } f_2(z) = (1 - \|c\|^2)\bar{z} + \|c\|^2$$

$\{\mathbb{C}; f_1, f_2\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüne Hata ağacı denir. Aşağıda c 'nin iki farklı değeri için Hata ağacı örnekleri verilmiştir.



Şekil 1.4. $c=(0,4+0,3i)$ 'ye karşılık gelen Hata Ağacı



Şekil 1.5. $c=(0,5+0,5i)$ 'ye karşılık gelen Hata Ağacı

1.3. Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonları

Tanım 1.3.1. $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N$ ve $x_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\{(x_n, F_n) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, 1, 2, \dots, N\}$$

kümesine bir veri kümesi denir. Ayrıca $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_n) = F_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N)$$

koşulunu sağlayan sürekli fonksiyona bu veri kümesini interpolate eden bir interpolasyon fonksiyonu, (x_n, F_n) noktalarına ise interpolasyon noktaları denir.

Barnsley'in verilen bir veri kümesine karşılık getirdiği fraktal interpolasyon fonksiyonları özel tipten dönüşümlerden oluşan bir YFS sistemine dayanır. Burada $(\mathbb{R}^2, \omega_n, n = 1, 2, \dots, N)$ biçiminde YFS oluşturacak şekilde özel bir dönüşümden bahsedeceğiz. Bir $\{x_i, F_i\}$ veri kümesi verilsin. Bu kümeye karşılık dönüşümler, $\omega_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\omega_n(x, y) = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

biçiminde ve $\omega_n(x_0, F_0) = (x_{n-1}, F_{n-1})$ koşullarını sağlayacak şekilde oluşturulur. Buradan $\omega_n(x_N, F_N) = (x_n, F_n)$

$$\omega_n(x_0, F_0) = (a_n x_0 + e_n, c_n x_0 + f_n) = (x_{n-1}, F_{n-1})$$

$$\omega_n(x_N, F_N) = (a_n x_N + e_n, c_n x_N + f_n) = (x_n, F_n)$$

eşitliklerini kullanarak gerekli işlemler yapıldığında,

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0}$$

$$e_n = x_n - \frac{x_N(x_n - x_{n-1})}{x_N - x_0}$$

$$c_n = \frac{F_n - F_{n-1}}{x_N - x_0} - \frac{d_n(F_N - F_0)}{x_N - x_0}$$

$$f_n = \frac{x_N F_{n-1} - x_0 F_n}{x_N - x_0} - \frac{d_n(x_N F_0 - x_0 F_N)}{x_N - x_0}$$

olarak d_n 'ye bağlı olarak katsayılar ve sabitler elde edilir. Burada d_n sayılarına dikey ölçek çarpanı denir. ω_n dönüşümlerinin y -eksenine paralel doğru parçasını yine y -eksenine paralel

bir doğru parçasına boyunu $|d_n|$ oranında ölçeklediği için d_n sayılarına bu isim verilmiştir. Yani L , y - eksenine paralel bir doğru parçası iken $w_n(L)$ de y - eksenine paralel olup $\frac{\omega_n(L)}{L} = |d_n|$ 'dir.

Teorem 1.3.2. $N > 1$ bir tamsayı olsun. $\{(x_n, F_n) \in \mathbb{R}^2 : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ veri kümesi üzerinde $\{\mathbb{R}^2; \omega_n, : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ YFS tanımlansın. Dikey ölçek faktörü d_n olmak üzere, $0 \leq d_n < 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^2$ üzerinde Öklid metriğine denk olan bir d metriği vardır ve bu metriğe göre YFS hiperboliktir. O halde büzülme teoremi gereği

$$G = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(G)$$

olacak şekilde tek türlü belirli boş kümeden farklı G kompakt kümesi vardır[Barnsley]

Aşağıdaki teorem bir veri kümesi ve onunla ilintili özel tipte büzölmelerle oluşturulan yinelemeli fonksiyon sisteminin aslında sürekli bir fonksiyonun grafiği olarak realize olduğunu ifade etmektedir. Bilindiği üzere bir yinelemeli fonksiyon sisteminin sabit noktası(atraktörü) o metrik uzayın boş kümeden farklı kompakt bir alt kümedir. Fakat o alt kümenin özel olarak bir fonksiyonun hem de sürekli bir fonksiyonun grafiği olarak karşımıza çıkması bu anlamda aşağıdaki teoremi daha da önemli kılar.

Teorem 1.3.3. $N > 1$ bir tamsayı olsun. $\{(x_n, F_n) \in \mathbb{R}^2 : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ veri kümesiyle ilişkili $\{\mathbb{R}^2; \omega_n : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ YFS verilsin. Ayrıca dikey ölçek faktörü d_n , $0 \leq d_n < 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) olsun. Bu takdirde G ilgili YFS'nin atraktörü olmak üzere G kümesi, $\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, 1, 2, \dots, N\}$ veri kümesini interpolate eden bir $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun grafiğidir. Yani;

$$G = \{(x, f(x)) : x \in [x_0, x_N]\} = G_f$$

şeklindedir.

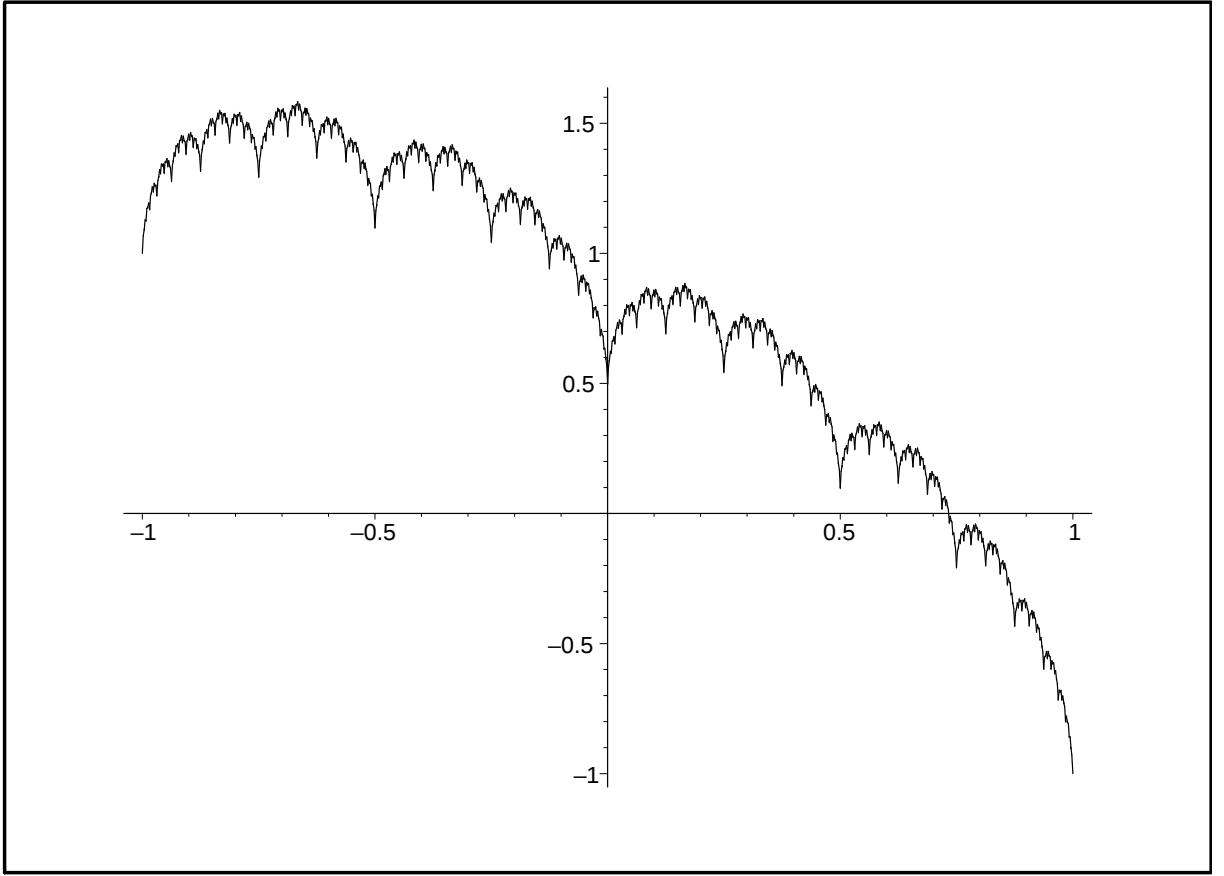
Tanım 1.3.4. Teorem 1.3.3'de ifade edilen f fonksiyonuna $\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, \dots, N\}$ veri kümesine karşılık gelen fraktal interpolasyon fonksiyonu denir.

Örnek 1.3.5. $\{(-1, 1), (0, \frac{1}{2}), (1, -1)\}$ veri kümesine ilişkin $d_1 = d_2 = 0.7$ için karşılık gelen dönüşümler aşağıdaki gibidir.

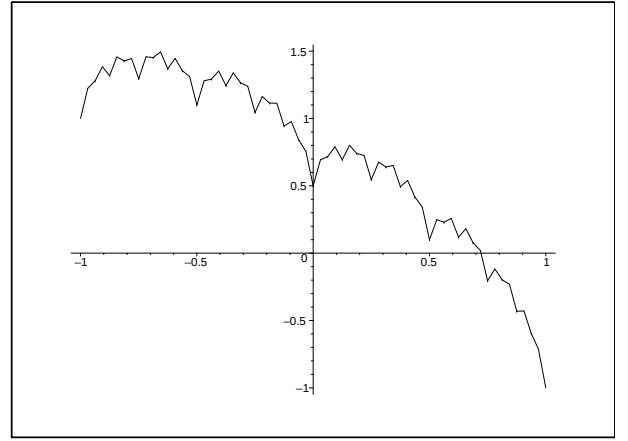
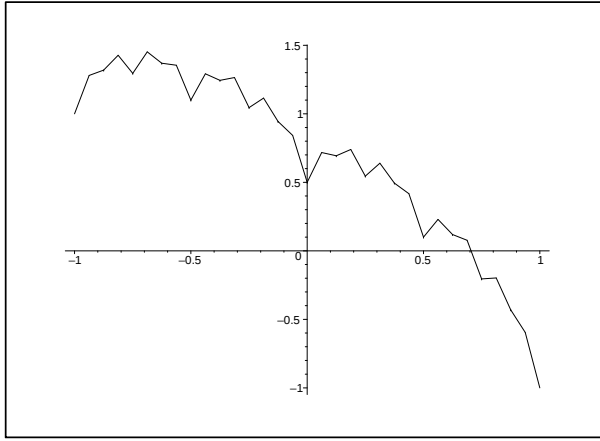
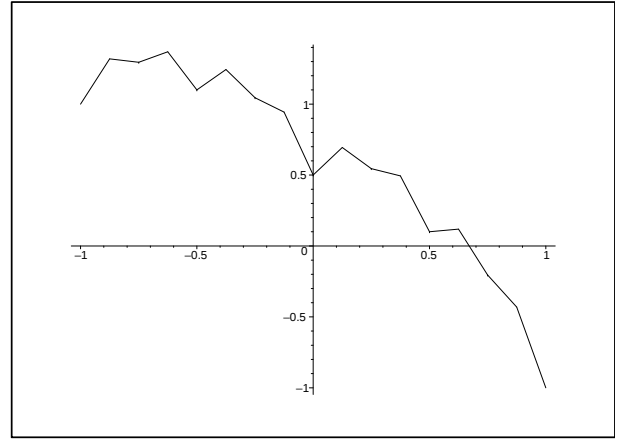
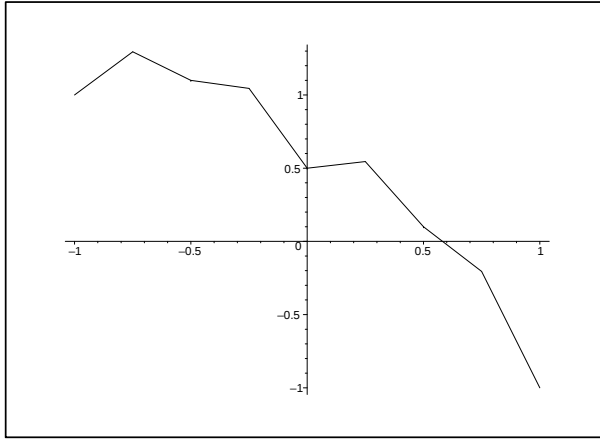
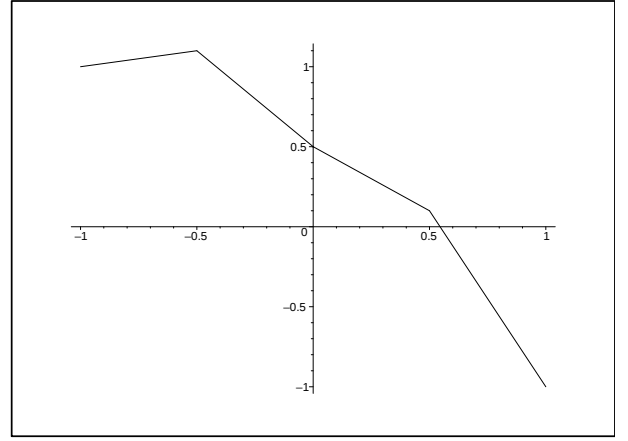
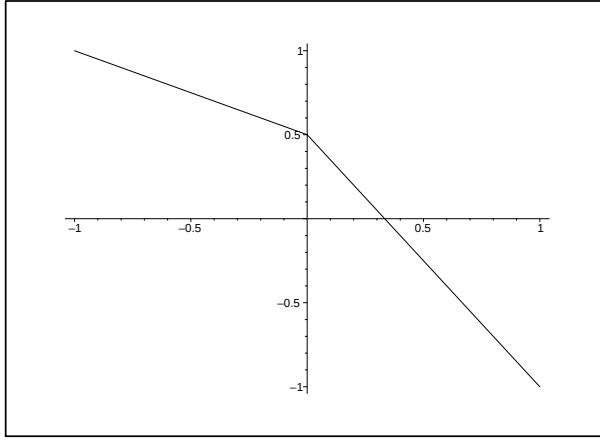
$$\omega_1(x, y) = (0.5x - 0.5, 0.45x + 0.7y + 0.75)$$

$$\omega_2(x, y) = (0.5x + 0.5, -0.45x + 0.7y - 0.25).$$

Bu dönüşümlere karşılık gelen interpolasyon fonksiyonu Şekil 1.6'de, fraktal interpolasyon fonksiyonunun ilk 6 iterasyonu Şekil 1.7'da gösterilmiştir.



Şekil 1.6. $\{(-1, 1), (0, 1/2), (1, -1)\}$ veri kümesi ve $d_1 = d_2 = 0.7$ 'ye karşılık gelen fraktal interpolasyon fonksiyonu



Şekil 1.7. $\{(-1, 1), (0, \frac{1}{2}), (1, -1)\}$ veri kümesini interpolate eden bir fonksiyonun ilk 6 iterasyonu

2. PCF KENDİNE BENZER YAPILAR

Tanım 2.0.1. $N \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $m \geq 1$ doğal sayısı için

$$W_m = W_m^N = \{1, 2, \dots, N\}^m = \{w_1 w_2 \dots w_m : w_i \in \{1, 2, \dots, N\}, i \geq 1\}$$

kümesine $\{1, 2, \dots, N\}$ kümesinden seçilmiş sembollerle yazılan m uzunluklu kelimelerin kümesi denir. Özel olarak $m = 0$ durumunda W_0 , 0 uzunluklu kelimelerin kümesi yani $\emptyset$ olacaktır.

$\{1, 2, \dots, N\}$ kümesini kısaca $\langle N \rangle$ ile göstereceğiz. Bu kümeye harflerin kümesi de diyeceğiz.

Tanım 2.0.2. $\langle N \rangle$ kümesindeki harflerle yazılan tek yönlü sonsuz dizilerin kümesi Σ^N ile gösterilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$\Sigma = \sum = \sum^N = \{w_1 w_2 \dots w_m : w_i \in \{1, 2, \dots, N\}, i \geq 1\}$$

Tanım 2.0.3. K bir kompakt metrik uzay ve $N \in \mathbb{N}^+$ olsun. Ayrıca $i \in \langle N \rangle$ olmak üzere $F_i : K \rightarrow K$ sürekli ve birebir dönüşümler olsun. Eğer her $i \in \langle N \rangle$ için $F_i \circ \pi = \pi \circ \sigma_i$ olacak şekilde $\pi : \Sigma \rightarrow K$ sürekli örten dönüşümü varsa $L := (K, \langle N \rangle, \{F_i\}_{i \in \langle N \rangle})$ üçlüsüne bir "kendine benzer yapı" denir.

Burada $i \in \langle N \rangle$ için $\sigma_i : \Sigma \rightarrow \Sigma$,

$$\sigma_i(w_1 w_2 w_3 \dots) = i w_1 w_2 w_3 \dots$$

şeklinde tanımlı fonksiyondur.

Tanım 2.0.4. $\sigma : \Sigma^N \rightarrow \Sigma^N$

$\sigma(w_1 w_2 w_3 \dots) = w_2 w_3 w_4 \dots$ şeklinde tanımlanan dönüşüme kaydırma (shift) dönüşümü denir.

Teorem 2.0.5. $(K, \langle N \rangle, \{F_i\}_{i \in \langle N \rangle})$ bir kendine benzer yapı olsun. Bu durumda π dönüşümü tektir ve aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\{\pi(w)\} = \bigcap_{m \geq 1} F_{w_1 w_2 \dots w_m}(K)$$

Örnek 2.0.6. K olarak Sierpinski Üçgenini alalım.

$N = 3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F_1 : K &\rightarrow K, F_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ F_2 : K &\rightarrow K, F_2(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \\ F_3 : K &\rightarrow K, F_3(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

dönüşümleri sürekli ve birebir dönüşümlerdir.

$F_i \circ \pi = \pi \circ \sigma_i$ sağlanır mı?

$$(\pi \circ \sigma_i)_{(w)} = \pi(iw_1w_2w_3\ldots) = \bigcap_{m \geq 1} F_i \circ F_{w_1} \circ F_{w_2} \circ \cdots \circ F_{w_m}$$

$$(F_i \circ \pi)_{(w)} = F_i\left(\bigcap_{m \geq 1} F_{w_1} \circ F_{w_2} \circ \cdots \circ F_{w_m}\right)$$

F_i birebir olduğundan,

$$= \bigcap_{m \geq 1} F_i \circ F_{w_1} \circ F_{w_2} \circ \cdots \circ F_{w_m}$$

olur. O halde Sierpinski üçgeni kendine benzer bir yapıdır.

$m \geq 1$ olmak üzere m uzunluklu kelimeler kümesini, $W_m := \langle N \rangle^m$ şeklinde tanımlayalım ve $W_* = \bigcup_{m \geq 0} W_m$ olsun. $w = w_1w_2w_3\ldots w_m \in W_m$ olmak üzere,

$$F_w : W \rightarrow W$$

$F_w := F_{w_1} \circ F_{w_2} \circ \cdots \circ F_{w_m}$ sürekli birebir örten fonksiyonu tanımlanır. Burada $F_w(K)$ 'yi K_w olarak göstereceğiz.

Tanım 2.0.7. $L = (K, \langle N \rangle, \{F_i\}_{i \in \langle N \rangle})$ bir kendine benzer yapı olsun.

$$C_{L,K} = \bigcup_{i,j \in \langle N \rangle, i \neq j} (F_i(K) \cap F_j(K))$$

$$C_L = \pi^{-1}(C_{L,K})$$

yani

$$C_L = \pi^{-1}\left(\bigcup_{i,j \in \langle N \rangle, i \neq j} (F_i(K) \cap F_j(K))\right)$$

şeklinde tanımlanan C_L kümesine L 'nin kritik noktalar kümesi denir.

$P_L = \bigcup_{n \geq 1} \sigma^n(C_L)$ şeklinde tanımlanan P_L kümesine L 'nin postkritik kümesi denir.

Tanım 2.0.8. $L = (K, \langle N \rangle, \{F_i\}_{i \in \langle N \rangle})$ bir kendine benzer yapı olsun. Eğer P_L kümesi sonlu elemanlı ise, L 'ye PCF (post critically finite) kendine benzer yapı denir.

Ayrıca bir L kendine benzer yapısı verildiğinde $\pi(P_L)$ kümesine K 'nın sınırı denir ve V_0 ile gösterilir.

Şimdi yukarıda tanımlanan V_0 kümesi yardımıyla aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$V_m = \bigcup_{i \in W_m} F_i(V_0)$$

ve

$$V_* = \bigcup_{m \geq 0} V_m$$

Burada görüldüğü üzere, her $m \geq 0$ için $V_m \subset V_{m+1}$ olur ve K, V_* ' in kapanışıdır.

Örnek 2.0.9. *Cantor için V_0, C_L ve P_L 'yi bulalım.*

$$F_1(x) = \frac{x}{3}$$

$$F_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

$\langle N \rangle = \{1, 2\}$ olduğundan yukarıda tanımladığımız C_L kümesini bulalım.

$$C_L = \pi^{-1}(F_1(K) \cap F_2(K))$$

$$(F_1(K) \cap F_2(K)) = \emptyset$$

olduğundan

$$C_L = \pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} P_L &= \bigcup_{n \geq 1} \sigma^n(C_L) \\ &= \bigcup_{n \geq 1} \sigma^n(\emptyset) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

P_L 'nin eleman sayısı 0'dır ve bu da sonlu olduğundan PCF kendine benzer yapıdır.

$$V_0 = \pi(P_L) = \pi(\emptyset) = \emptyset$$

Örnek 2.0.10. *Sierpinski Üçgeninde V_0, C_L ve P_L 'yi bulalım.*

$$F_1 : K \rightarrow K, F_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$F_2 : K \rightarrow K, F_2(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

$$F_3 : K \rightarrow K, F_3(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$i, j \in \langle N \rangle = \{1, 2, 3\} \text{ ve } i \neq j \text{ için}$$

$$C_L = \pi^{-1}((F_1(K) \cap F_2(K)) \cup (F_1(K) \cap F_3(K)) \cup (F_2(K) \cap F_3(K)))$$

$$C_L = \{1\dot{2}, 2\dot{1}, 2\dot{3}, 3\dot{2}, 3\dot{1}, 1\dot{3}\} \text{ olarak bulunur.}$$

Buna bağlı olarak

$$P_L = \bigcup_{n \geq 1} \sigma^n(C_L) = \bigcup_{n \geq 1} \sigma^n(\{1\dot{2}, 2\dot{1}, 2\dot{3}, 3\dot{2}, 3\dot{1}, 1\dot{3}\})$$

$P_L = \{\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$ kümesini elde ederiz.

Görüldüğü gibi P_L 'nin eleman sayısı 3'dür ve bu da sonlu olduğundan $(K, \langle N \rangle, \{F_i\}_{i \in \langle N \rangle})$ bir PCF kendine benzer yapıdır.

$$V_0 = \pi(P_L) = \pi(\{\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}) = \{p_1, p_2, p_3\} \text{ olarak bulunur.}$$

Tabii ki PCF kendine benzer yapı olmayan örnekler de vardır. Bunlardan bir tanesine bakalım.

Örnek 2.0.11. $K = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ birim kare ve $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ için $F_i : K \rightarrow K$ dönüşümlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$F_1(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$$

$$F_2(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) + (\frac{1}{2}, 0)$$

$$F_3(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$F_4(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) + (0, \frac{1}{2})$$

Bu durumda,

$$C_L = \pi^{-1}(\bigcup_{i, j \in \langle N \rangle, i \neq j} (F_i(K) \cap F_j(K)))$$

kümesinin eleman sayısı sonlu değildir ve dolayısıyla P_L kümesi de sonlu sayıda elemana sahip değildir. Bu nedenle birim kare kendine benzer bir yapı olmasına rağmen, PCF kendine benzer yapı değildir.

2.1. Harmonik Yapılar

Harmonik yapıları tanımlamadan önce, bu tanımlı yapmak için gerekli olan yapıları tanımlayalım.

Tanım 2.1.1. V herhangi bir küme olmak üzere,

$$\ell(V) = \{f \mid f : V \rightarrow \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanır.

Eğer V sonlu bir küme ise $\ell(V)$ de sonlu boyutlu bir vektör uzayı olur. Ayrıca $f, g \in \ell(V)$ için

$$\langle f, g \rangle = \sum_{v \in V} f(v)g(v)$$

ile $(\ell(V), \langle, \rangle)$ bir iç çarpım uzayıdır.

Notasyon: U, V 'nin herhangi bir alt kümesi olmak üzere, U 'nun karakteristik fonksiyonunu $\mathcal{X}_U^V$ ile göstereceğiz. Karışıklığın olmadığı durumda ise $\mathcal{X}_U$ ile göstereceğiz. Eğer $U = \{p\}$ ise $\mathcal{X}_{\{p\}}$ yerine $\mathcal{X}_p$ gösterimini kullanacağız.

Ayrıca herhangi bir $H : \ell(V) \rightarrow \ell(V)$ lineer dönüşümünü için $H(\mathcal{X}_q)(p)$ reel sayısını H_{pq} ile göstereceğiz. Buna göre bir $f \in \ell(V)$ için

$$f = \sum_{q \in V} f \cdot \mathcal{X}_q$$

olarak yazılabileceğinden,

$$(Hf)(p) = H \left(\sum_{q \in V} f \cdot \mathcal{X}_q \right) (p) = \sum_{q \in V} f(p) H(\mathcal{X}_q)(p) = \sum_{q \in V} f(p) H_{pq}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.1.2. $H : \ell(V) \rightarrow \ell(V)$ simetrik lineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa V üzerinde bir Laplasyen denir:

- i) H pozitif tanımlı değildir.
- ii) $Hu = 0 \Leftrightarrow u, V$ üzerinde sabittir.
- iii) Her $p \neq q \in V$ için $H_{pq} \geq 0$.

V kümesi üzerindeki Laplasyenlerin kümesini $\mathcal{LA}(V)$ ile göstereceğiz. Sadece i ve ii koşulunu sağlayan $\ell(V)$ 'den kendisine tanımlı simetrik lineer operatörlerin kümesini ise $\widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ ile göstereceğiz.

Önerme 2.1.3. V bir sonlu küme ve U, V 'nin bir özalt kümesi olsun. $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ için,

$$T_U : \ell(U) \rightarrow \ell(U)$$

$$J_U : \ell(U) \rightarrow \ell(V \setminus U) \text{ ve}$$

$$X_U : \ell(V \setminus U) \rightarrow \ell(V \setminus U)$$

$$H = \begin{bmatrix} T_U & J_U^t \\ J_U & X_U \end{bmatrix}$$

olacak şekilde H matrisini tanımlayalım. Bu durumda X_U negatif tanımlıdır. (Burada J_U^t , J_U 'nin transpozunu gösterir. Ayrıca $T = T_U$, $J = J_U$, $X = X_U$ ile göstereceğiz.)

Şimdi uyumluluk kontrolünde kullanılan $P_{V,U}$ dönüşümünü tanımlayalım. V bir sonlu küme, U V 'nin bir özalt kümesi ve $H : \ell(V) \rightarrow \ell(V)$

$$H = \begin{bmatrix} T_U & J_U^t \\ J_U & X_U \end{bmatrix}$$

olmak üzere $P_{V,U} : \ell(U) \rightarrow \ell(U)$

$$P_{V,U}(H) = T - J^t . X^{-1} . J$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.4. V bir sonlu küme, U V 'nin bir özalt kümesi olmak üzere $H \in \widetilde{\mathcal{L}\mathcal{A}}(V)$ ise $P_{V,U} \in \widetilde{\mathcal{L}\mathcal{A}}(U)$ olur. Ayrıca $H \in \mathcal{L}\mathcal{A}(V)$ ise $P_{V,U} \in \mathcal{L}\mathcal{A}(U)$ 'dir.

Tanım 2.1.5. V_i sonlu küme, $H_i \in \widetilde{\mathcal{L}\mathcal{A}}(V_i) (i = 1, 2)$ olsun. $(V_1, H_1) \leq (V_2, H_2)$ olması demek, $V_1 \subseteq V_2$ ve $P_{V_2, V_1}(H_2) = H_1$ olması demektir.

Tanım 2.1.6. $m \geq 0$ için, V_m bir sonlu küme ve $H_m \in \widetilde{\mathcal{L}\mathcal{A}}(V_m)$ olsun. Eğer, her $m \geq 0$ için

$$(V_m, H_m) \leq (V_{m+1}, H_{m+1})$$

oluyorsa, $\{(V_m, H_m)\}_{m \geq 0}$ bir uyumlu dizidir.

Tanım 2.1.7. $D \in \widetilde{\mathcal{L}\mathcal{A}}(V_0)$ ve $i \in \langle N \rangle$ için $r_i > 0$ olmak üzere $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ olarak verilsin. D ve r yardımıyla $H_m : \ell(V_m) \rightarrow \ell(V_m)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$H_m = \sum_{w \in W_m} \frac{1}{r_w} R_w^t D R_w$$

Burada $R_w : \ell(V_m) \rightarrow \ell(V_0)$, $R_w(f) = f \circ F_w$ şeklinde tanımlı fonksiyondur. Ayrıca bir $w = w_1 w_2 \dots w_m$ için $r_w = r_{w_1} r_{w_2} \dots r_{w_m}$ 'dir.

Tanım 2.1.8. $D \in \widetilde{\mathcal{L}\mathcal{A}}(V_0)$ ve $i \in \langle N \rangle$ için $r_i > 0$ olmak üzere $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ verilsin ve buna karşılık (D, r) ikilisi verilsin. Eğer $\{(V_m, H_m)\}_{m \geq 0}$ uyumlu bir dizi ise (D, r) 'ye bir harmonik yapı denir.

Şimdi verilen bir (D, r) ikilisinin Harmonik yapı olup olmadığını kontrol etmek için oldukça kolaylık sağlayan aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2.1.9. (D, r) ikilisi için,

$$(D, r) \text{ bir harmonik yapıdır} \Leftrightarrow (V_0, D) \leq (V_1, H_1) \text{ 'dir}$$

Bu teoremi kullanarak birim aralık ve Sierpinski üçgeni üzerinde harmonik yapı örnekleri verelim.

Örnek 2.1.10. $D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $r = (r_1, r_2)$; $r_1 + r_2 = 1$ ve $0 < r_1, r_2 < 1$ olmak üzere (D, r) 'nin $[0, 1]$ aralığı üzerinde bir Harmonik Yapı olduğunu görelim. Bunun için

$$F_1(x) = \frac{x}{2}$$

$$F_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

dönüşümlerini kullanarak, $V_0 = \{p_1, p_2\}$ ve $V_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ kümelerini elde ederiz.

$$H_1 = \frac{1}{r_1} R_1^t D R_1 + \frac{1}{r_2} R_2^t D R_2$$

olmak üzere $(V_0, D) \leq (V_1, H_1)$ olduğunu görmeliyiz. Burada $V_0 \subseteq V_1$ olduğundan görülmesi gereken,

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = D$$

olduğudur. Öncelikle H_1 dönüşümünü belirleyelim. Bunun için ise sırasıyla R_1 ve R_2 dönüşümlerini bulmalıyız.

$$R_1 : \ell(V_1) \rightarrow \ell(V_0)$$

$$(R_\omega f)_p = f(F_\omega(p))$$

eşitliğini kullanarak R_1 dönüşümünün matrisini bulalım.

$i = 1, 2, 3$ olmak üzere $f_i : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$ için

$$f_i(p_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar $\ell(V_1)$ uzayının standart taban elemanlarıdır.

Benzer şekilde $g_i : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i(p_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$ fonksiyonları da $\ell(V_0)$ uzayının standart taban elemanlarıdır. Şimdi R_1 'in $\{f_1, f_2, f_3\}$ ve $\{g_1, g_2\}$ sıralı taban çiftine göre matrisini bulalım.

$(R_1 f)(p) = f(F_1(p))$ eşitliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} (R_1 f_1)_{(p_1)} &= f_1(F_1(p_1)) = f_1(p_1) = 1 \\ (R_1 f_1)_{(p_2)} &= f_1(F_1(p_2)) = f_1(p_3) = 0 \\ (R_1 f_2)_{(p_1)} &= f_2(F_1(p_1)) = f_2(p_1) = 0 \\ (R_1 f_2)_{(p_2)} &= f_2(F_1(p_2)) = f_2(p_3) = 0 \\ (R_1 f_3)_{(p_1)} &= f_3(F_1(p_1)) = f_3(p_1) = 0 \\ (R_1 f_3)_{(p_2)} &= f_3(F_1(p_2)) = f_3(p_3) = 1 \end{aligned}$$

olmak üzere R_1 dönüşümünün matrisi ve transpozu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Benzer hesaplamalarla R_2 dönüşüm matrisi ve transpozunu da elde edebiliriz.

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elde edilen matrisleri,

$$H_1 = \frac{1}{r_1} R_1^t D R_1 + \frac{1}{r_2} R_2^t D R_2$$

eşitliğinde yerine yazıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$H_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1} & 0 & \frac{1}{r_1} \\ 0 & -\frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & -(\frac{r_1+r_2}{r_1 \cdot r_2}) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_2} \end{bmatrix}, \quad J^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -(\frac{r_1+r_2}{r_1 \cdot r_2}) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan uyumluluğu kontrol etmek için gerekli olan X^{-1} matrisi de

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1+r_2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Son olarak da

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = D$$

olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} P_{V_1, V_0}(H_1) &= T - J^t X^{-1} J \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1+r_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

için gerekli işlemler yapıldığında, $P_{V_1, V_0}(H_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1+r_2} & \frac{1}{r_1+r_2} \\ \frac{1}{r_1+r_2} & -\frac{1}{r_1+r_2} \end{bmatrix} = D$ olarak elde edilir.

$r_1 + r_2 = 1$ olarak aldığımızdan, $P_{V_1, V_0}(H_1)$ matrisi, D matrisine eşit olacaktır. Bu yüzden (D, r) birim aralık üzerinde bir harmonik yapıdır.

Örnek 2.1.11. $D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ve $r = (\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5})$ olmak üzere (D, r) 'nin Sierpinski

üçgeni üzerinde bir Harmonik yapı olduğunu görelim. Bunun için $V_0 = \{p_1, p_2, p_3\}$, $V_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ ve

$$H_1 = \frac{1}{r_1} R_1^t D R_1 + \frac{1}{r_2} R_2^t D R_2 + \frac{1}{r_3} R_3^t D R_3$$

olmak üzere $(V_0, D) \leq (V_1, H_1)$ olduğunu görmeliyiz. $V_0 \subseteq V_1$ olduğundan görülmesi gereken,

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = D$$

olduğudur. Öncelikle H_1 dönüşümünü belirleyelim. Bunun için ise sırasıyla R_1, R_2 ve R_3 dönüşümelerini bulalım.

$R_1 : \ell(V_1) \rightarrow \ell(V_0)$, $f \in \ell(V_1)$ için $R_1 f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in V_0$ olmak üzere

$$R_1(f)(p) = f(F_1(p))$$

eşitliğini kullanarak R_1 dönüşümünün matrisini bulalım.

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ olmak üzere $f_i : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_i(p_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar $\ell(V_1)$ uzayının standart taban elemanlarıdır. Benzer şekilde $g_i : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i(p_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$. fonksiyonları da $\ell(V_0)$ uzayının standart taban elemanlarıdır. Şimdi R_1 'in $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ ile $\{g_1, g_2, g_3\}$ sıralı taban çiftine göre matrisini bulalım.

$(R_1 f)(p) = f(F_1(p))$ eşitliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} (R_1 f_1)_{(p_1)} &= f_1(F_1(p_1)) = f_1(p_1) = 1 \\ (R_1 f_1)_{(p_2)} &= f_1(F_1(p_2)) = f_1(p_4) = 0 \\ (R_1 f_1)_{(p_3)} &= f_1(F_1(p_3)) = f_1(p_6) = 0 \\ (R_1 f_2)_{(p_1)} &= f_2(F_1(p_1)) = f_2(p_1) = 0 \\ (R_1 f_2)_{(p_2)} &= f_2(F_1(p_2)) = f_2(p_4) = 0 \\ (R_1 f_2)_{(p_3)} &= f_2(F_1(p_3)) = f_2(p_6) = 0 \\ (R_1 f_3)_{(p_1)} &= f_3(F_1(p_1)) = f_3(p_1) = 0 \\ (R_1 f_3)_{(p_2)} &= f_3(F_1(p_2)) = f_3(p_4) = 0 \\ (R_1 f_3)_{(p_3)} &= f_3(F_1(p_3)) = f_3(p_6) = 0 \\ (R_1 f_4)_{(p_1)} &= f_4(F_1(p_1)) = f_4(p_1) = 0 \\ (R_1 f_4)_{(p_2)} &= f_4(F_1(p_2)) = f_4(p_4) = 1 \\ (R_1 f_4)_{(p_3)} &= f_4(F_1(p_3)) = f_4(p_6) = 0 \\ (R_1 f_5)_{(p_1)} &= f_5(F_1(p_1)) = f_5(p_1) = 0 \\ (R_1 f_5)_{(p_2)} &= f_5(F_1(p_2)) = f_5(p_4) = 0 \\ (R_1 f_5)_{(p_3)} &= f_5(F_1(p_3)) = f_5(p_6) = 0 \\ (R_1 f_6)_{(p_1)} &= f_6(F_1(p_1)) = f_1(p_1) = 0 \\ (R_1 f_6)_{(p_2)} &= f_6(F_1(p_2)) = f_1(p_4) = 0 \\ (R_1 f_6)_{(p_3)} &= f_6(F_1(p_3)) = f_1(p_6) = 0 \end{aligned}$$

olmak üzere R_1 dönüşümünün matrisi ve transpozu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Benzer hesaplamalarla R_2 ve R_3 dönüşümlerinin matrisleri ve transpozları da aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_3^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elde edilen matrisleri,

$$H_1 = \frac{1}{r_1} R_1^t D R_1 + \frac{1}{r_2} R_2^t D R_2 + \frac{1}{r_3} R_3^t D R_3$$

eşitliğinde yerine yazıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$H_1 = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & -\frac{20}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{20}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Burada,

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}, \quad J^t = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -\frac{20}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{20}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan uyumluluğu kontrol etmek için gerekli olan X^{-1} matrisi de

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{50} & -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} \\ -\frac{3}{50} & -\frac{9}{50} & -\frac{3}{50} \\ -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} & -\frac{9}{50} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Şimdi de son aşama olan

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = D$$

olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} P_{V_1, V_0}(H_1) &= T - J^t X^{-1} J \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{9}{50} & -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} \\ -\frac{3}{50} & -\frac{9}{50} & -\frac{3}{50} \\ -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} & -\frac{9}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında,

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = D$$

olarak elde edilir. Bu yüzden (D, r) Sierpinski üçgeni üzerinde bir harmonik yapıdır.

Şimdi ise Hata ağacı üzerinde bir harmonik yapı örneği verelim.

Örnek 2.1.12. $X = \mathbb{C}$ ve $f_{1,2} : X \rightarrow X$, $\|c\|$, $\|1 - c\| \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1(z) &= c\bar{z} \\ f_2(z) &= (1 - \|c\|^2)\bar{z} + \|c\|^2 \end{aligned}$$

$\{\mathbb{C}; f_1, f_2\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörünün Hata ağacı olduğunu biliyoruz. Burada $V_0 = \{c, 0, 1\}$ ve $V_1 = \{c, 0, 1, |c|^2, f_2(c)\}$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu kümelerdeki noktaları $V_0 = \{p_1, p_2, p_3\}$ ve $V_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_5\}$ olarak isimlendirebiliriz. Şimdi de

$$D = \begin{bmatrix} -h & h & 0 \\ h & -(h+1) & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } r = (0, 1)$$

olmak üzere $r = (r, 1 - r^2)$ için (D, r) 'nin Hata ağacı üzerinde bir harmonik yapı olduğunu görelim.

$$H_1 = \frac{1}{r_1} R_1^t D R_1 + \frac{1}{r_2} R_2^t D R_2$$

değerini bulmak için gerekli R_1 ve R_2 matrislerini bulmak için gerekli işlemler yapıldığında

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur ve H_1 eşitliğinde yerine yazdığımızda,

$$H_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r_1} & \frac{h+1}{r_1} & 0 & \frac{h}{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} & 0 \\ 0 & \frac{h}{r_1} & \frac{1}{r_2} & -\left(\frac{h}{r_1} + \frac{h+1}{r_2}\right) & \frac{h}{r_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h}{r_2} & -\frac{h}{r_2} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Burada,

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = D$$

olduğunu görmeliyiz.

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = T - J^t X^{-1} J$$

olduğundan, bunun için gerekli olan T, J, X ve X^{-1} matrisleri, H_1 matrisinde rahatlıkla görülebilir. Bu matrisleri

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = T - J^t X^{-1} J$$

eşitliğinde yerine yazdığımızda ,

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_1} & 0 \\ \frac{1}{r_1} & -\left(\frac{h}{hr_2+r_1} + \frac{1}{r_1}\right) & \frac{h}{hr_2+r_1} \\ 0 & \frac{h}{hr_2+r_1} & -\frac{h}{hr_2+r_1} \end{bmatrix}$$

matrisini elde edilir. Burada ise $r \cdot h = 1$ alırsak,

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = D$$

olduğunu, dolayısıyla (D, r) 'nin Hata ağacı üzerinde bir Harmonik yapı olduğunu görmüş oluruz.

Tanım 2.1.13. $L = (K, \langle N \rangle, F_i)_{i \in \langle N \rangle}$ PCF kendine benzer yapı ve $(D, r), L$ üzerinde bir harmonik yapı olsun. Bu durumda, $f \in \ell(V_0)$ için

$$\begin{cases} (H_m v)|_{V_m \setminus V_0} = 0, \text{ her } m \geq 1 \text{ için} \\ v|_{V_0} = f \end{cases}$$

denkleminin [6]'de varlığı ve tekliği gösterilen $u \in \ell(V_*)$ fonksiyonuna, sınır değeri f olan bir harmonik fonksiyon denir.

Teorem 2.1.14. u, L üzerinde bir harmonik fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\tilde{u}|_{V_*} = u$$

olacak şekilde tek türlü $\tilde{u} \in C(K)$ fonksiyonu vardır.

$L = (K, \langle N \rangle, F_i)_{i \in \langle N \rangle}$ bir PCF kendine benzer yapı olmak üzere teorem 2.1.14'de varlığı gösterilen sürekli fonksiyonların kümesini $\mathcal{A}(L)$ ile göstereceğiz.

Önerme 2.1.15. $L = (K, \langle N \rangle, F_i)_{i \in \langle N \rangle}$ bir PCF kendine benzer yapı olmak üzere $\forall x \in V_0$ için

$$r_i(x) = h_1(F_i(x)) - \rho_i h_1(x)$$

koşulunu sağlayan $h_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $r_i : V_* \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonları verilsin. Bu takdirde h_1 fonksiyonunun $\forall x \in V_*$ için

$$h(F_i(x)) = \rho_i h(x) + r_i(x)$$

koşulunu sağlayan tek türlü belirli $h : V_* \rightarrow \mathbb{R}$ genişlemesi vardır.

Kanıt. $h_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $r_i : V_* \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

$$x \in V_0 \text{ için } r_i(x) = h_1(F_i(x)) - \delta_i h_1(x)$$

$$\forall x \in V_{m-1} \text{ için}$$

$n = m$ için $r_i(x) = h_m(F_i(x)) - \delta_i h_m(x)$ koşulunu sağlayan $h_m : V_m \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu h_m 'nin V_{m-1} 'e kısıtlanmış h_{m-1} olacak şekilde var olsun.

$n = m + 1$ için $\forall x \in V_m$ için $r_i(x) = h_{m+1}(F_i(x)) - \delta_i h_{m+1}(x)$ koşulunu sağlayan $h_{m+1} : V_{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu yazılabilir mi?

$$h_{m+1}(x) = \begin{cases} h_m(x), & x \in V_m \\ \delta_i h_m(F_i^{-1}(x)) + r_i(F_i^{-1}(x)), & x \in V_{m+1} \setminus V_m \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$x \in V_m \text{ için}$$

$$\begin{aligned} r_i(x) &= h_{m+1}(F_i(x)) - \delta_i h_{m+1}(x) \\ &= h_m(F_i(x)) - \delta_i h_m(x) \\ &= \delta_i h_m(x) + r_i(x) - \delta_i h_m(x) \end{aligned}$$

sağlanır. □

Teorem 2.1.16. $L = (K, \langle N \rangle, F_i)_{i \in \langle N \rangle}$ bir PCF kendine benzer yapı olsun.

$r_i : K \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$ sınırlı fonksiyonları, $V_1 = \{t_1, t_2, \dots, t_{\alpha_1}\}$ olmak üzere $u_j, j = 1, 2, \dots, \alpha_1$ reel sayıları verilsin. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} h(F_i(x)) &= \rho_i h(x) + r_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ h(t_j) &= u_j \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan tek türlü belirli $h : K \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunun var olması için gerek ve yeter koşul $t_j := t_{i,k} = F_i(p_k)$ olmak üzere $u_j = \rho_i u_k + r_i(p_k)$ olmasıdır. r_i fonksiyonları sürekli ise h fonksiyonu da süreklidir.

Teorem 2.1.17. $F_i : K \rightarrow K$ büzülme katsayısı s_i olan büzülme dönüşümleri, $L = (K, \langle N \rangle, F_i)_{i \in \langle N \rangle}$ bir PCF kendine benzer yapı olmak üzere, $\{\rho_i\}_i \in \langle N \rangle, 0 < |\rho_i| < 1$ ve $u_i, i \in \langle A \rangle$ sayıları verilsin. Ayrıca, $S \subseteq C(K)$ kümesi, her $i \in \langle v \rangle$ ve her $u_i \in \mathbb{R}$ için $f(p_i) = u_i$ koşulunu sağlayan S 'de tek türlü belirli fonksiyonların kümesi olsun. Eğer her $f \in S$ ve her $x, y \in K$ için $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot \|x - y\|$ olacak şekilde bir k sabiti varsa

$$\begin{aligned} h(F_i(x)) &= \rho_i h(x) + r_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ h(t_j) &= u_j \end{aligned}$$

koşulunu sağlayan, tek türlü belirli $h \in C(K)$ fonksiyonu vardır. Burada $i \in \langle N \rangle$ olmak üzere, r_i fonksiyonları $r_i(p_k) = u_j - \rho_i u_k$ koşulunu sağlayan S kümesine ait tek türlü belirli fonksiyonlardır.

Ayrıca h' nin grafiği, $i \in \langle N \rangle$ için

$$P_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, P_i(x, y) = (F_i(x), \rho_i y + r_i(x))$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; P_1, P_2, \dots, P_N\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüdür. Yani,

$$G_h = \bigcup_{i \in \langle N \rangle} P_i(G_h)$$

dir.

Kanıt. $r_i \in S$ olduğundan, her $i \in \langle N \rangle$ için,

$$|r_i(x) - r_i(y)| \leq k_i \|x - y\|$$

koşulunu sağlayan $k_i \in \mathbb{R}$ vardır. Her $i \in \langle N \rangle$ için $s_i^2 + \frac{2k_i^2}{\beta^2} < 1$ ve $\frac{\sqrt{2}\rho_i}{\beta} < 1$ olacak şekilde $\beta \in \mathbb{R}$ seçelim. Ayrıca

$$r'_i(p_k) = \frac{u_j}{\beta} - \rho_i \frac{u_k}{\beta}$$

koşulunu sağlayan ve S 'de tek türlü belirli olan r'_i fonksiyonunu düşünelim. Teorem 2.1.16 gereği,

$$\begin{aligned} f(F_i(x)) &= \rho_i f(x) + r'_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ f(t_j) &= \frac{u_j}{\beta} \end{aligned}$$

olacak şekilde $f \in C(K)$ vardır. Şimdi,

$$P_i^*(x, y) = (F_i(x), \frac{\rho_i y + r_i(x)}{\beta})$$

olmak üzere, f 'nin grafiğinin $\{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; P_i^*, i \in \langle N \rangle\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olduğunu görelim. Bunun için öncelikle bu şekilde tanımlanan P_i^* dönüşümlerinin birer büzülme dönüşümü olduğunu görelim. Bunun için,

$$\|P_i^*(x_1, y_1) - P_i^*(x_2, y_2)\| \leq m \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$$

olacak şekilde $m \in (0, 1)$ reel sayısının var olduğunu görmeliyiz.

$$\begin{aligned} \|P_i^*(x_1, y_1) - P_i^*(x_2, y_2)\| &= \|(F_i(x_1), \frac{\rho_i y_1 + r_i(x_1)}{\beta}) - (F_i(x_2), \frac{\rho_i y_2 + r_i(x_2)}{\beta})\| \\ &= \left\| \left(F_i(x_1) - F_i(x_2), \frac{1}{\beta}(\rho_i y_1 - \rho_i y_2 + r_i(x_1) - r_i(x_2)) \right) \right\| \\ &= \sqrt{(F_i(x_1) - F_i(x_2))^2 + \frac{1}{\beta^2}(\rho_i(y_1 - y_2) + r_i(x_1) - r_i(x_2))^2} \end{aligned}$$

□

Teorem 2.1.17' de varlığı ispatlanan, h fonksiyonlarının kümesini, $FIF(L, \rho_i, S)$ ile göstereceğiz.

Önerme 2.1.18. F_i dönüşümleri büzülme dönüşümleri olmak üzere, $L = (K, \langle N \rangle, F_i)_{i \in \langle N \rangle}$ bir PCF kendine benzer yapı olsun. Eğer S bir vektör uzayı ise, $FIF(L, \rho_i, S)$ de bir vektör uzayıdır ve boyutu V_1 'in eleman sayısına eşittir.

Kanıt. Verilen $u_j, j = 1, 2, \dots, \alpha_1$ sayıları için $u = (u_1, u_2, \dots, u_{\alpha_1})$ vektörüne karşılık gelen, Teorem 2.1.17'de varlığı gösterilen fonksiyonu h_u ile gösterelim. $h_u, h_v \in FIF(L, \rho_i, S)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, toplama ve skalerle çarpma işlemini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$h_u(F_i(x)) = \rho_i h_u(x) + r_i(x)$$

$$h_v(F_i(x)) = \rho_i h_v(x) + r_i^*(x)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} (h_u + h_v)(F_i(x)) &= h_u(F_i(x)) + h_v(F_i(x)) \\ &= \rho_i h_u(x) + r_i(x) + \rho_i h_v(x) + r_i^*(x) \end{aligned}$$

olur. $r_i, r_i^* \in S$ ve S vektör uzayı olduğundan, $r_i + r_i^* \in S$ 'dir. Bu durumda fonksiyon toplamaya göre kapalıdır. Aynı şekilde $r_i \in S$ için $\alpha r_i \in S$ olduğundan, h_u fonksiyonu skalerle çarpmaya göre de kapalıdır.

$$h_u + h_v = h_{u+v}$$

$$\lambda h_u = h_{\lambda u}$$

Bu işlemlerle $FIF(L, \rho_i, S)$ 'in bir vektör uzayı olduğunu görelim.

$$1) h_u + h_v = h_{u+v} = h_{v+u} = h_v + h_u$$

$$2) \quad h_u + (h_v + h_w) = h_u + h_{v+w} = h_{u+(v+w)} = h_{(u+v)+w} = h_{u+v} + h_w = (h_u + h_v) + h_w$$

$$3) \quad \text{Verilen her } h_u \in FIF(L, \rho_i, S) \text{ için } \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{\alpha_1} \text{ olmak üzere,}$$

$$h_u + h_0 = h_{u+0} = h_u$$

$$4) \quad \text{Verilen her } h_u \in FIF(L, \rho_i, S) \text{ için,}$$

$$h_{-u} + h_u = h_u + h_{-u} = h_{u+(-u)} = h_{u-u} = h_0$$

$$5) \quad 1h_u = h_{1u} \quad 6) \quad c \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere,}$$

$$c(h_u + h_v) = ch_{u+v} = h_{c(u+v)} = h_{cu+cv} = h_{cu} + h_{cv} = ch_u + ch_v$$

$$7) \quad c, d \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere,}$$

$$(c + d)h_u = h_{(c+d)u} = h_{cu+du} = h_{cu} + h_{du} = ch_u + dh_u$$

8) $(cd)h_u = h_{(cd)u} = ch_{du} = c(dh_u)$ $FIF(L, \rho_i, S)$ kümesi, yukarıda görüldüğü gibi, 8 aksi-yomu sağladığından, bir vektör uzayıdır.

Şimdi $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{\alpha_1}$ olmak üzere, $h_{e_i}, i \in \{1, 2, \dots, \alpha_1\}$ fonksiyonlarının $FIF(L, \rho_i, S)$ uzayının bir tabanı olduğunu görelim.

$$a_1 h_{e_1} + a_2 h_{e_2} + \dots + a_{\alpha_1} h_{e_{\alpha_1}} = h_0$$

$$h_{a_1 e_1} + h_{a_2 e_2} + \dots + h_{a_{\alpha_1} e_{\alpha_1}} = h_0$$

$$h_{a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_{\alpha_1} e_{\alpha_1}} = h_0$$

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_{\alpha_1} e_{\alpha_1} = 0$$

ve buradan, $i = 1, 2, \dots, \alpha_1$ için $a_i = 0$ olur ve bu durumda h fonksiyonu lineer bağımsızdır.

$v = (v_1, v_2, \dots, v_{\alpha_1})$ ve $e_1, e_2, \dots, e_{\alpha_1}$ standart taban vektörleri olmak üzere,

$$\begin{aligned}
h_v &= h_{(v_1, v_2, \dots, v_{\alpha_1})} \\
&= h_{(v_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + (0, 0, \dots, v_{\alpha_1})} \\
&= h_{(v_1, 0, 0, \dots, 0)} + h_{(0, v_2, 0, \dots, 0)} + \dots + h_{(0, 0, \dots, v_{\alpha_1})} \\
&= h_{v_1(1, 0, \dots, 0)} + h_{v_2(0, 1, \dots, 0)} + \dots + h_{v_{\alpha_1}(0, 0, \dots, 1)} \\
&= v_1 h_{(1, 0, \dots, 0)} + v_2 h_{(0, 1, \dots, 0)} + \dots + v_{\alpha_1} h_{(0, 0, \dots, 1)} \\
&= v_1 h_{e_1} + v_2 h_{e_2} + \dots + v_{\alpha_1} h_{e_{\alpha_1}}
\end{aligned}$$

O halde, $FIF(L, \rho_i, S)$ vektör uzayının boyutu α_1 'dir. Yani V_1 'in eleman sayısı kadardır. $\square$

2.2. PCF Kendine Benzer Yapılar Üzerinde Harmonik İnterpolasyon

Teorem 2.2.1. $L = (K, \langle N \rangle, F_i)_{i \in \langle N \rangle}$ bir PCF kendine benzer yapı olsun. Ayrıca L üzerinde bir harmonik yapı var olsun. Bu durumda, $r_i \in \mathcal{A}(L)$ fonksiyonları

$$r_i(p_k) = u_j - \rho_i u_k$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}
h(F_i(x)) &= \rho_i h(x) + r_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \\
h(t_j) &= u_j, \quad t_j \in V_1
\end{aligned}$$

olacak şekilde tek türlü belirli $h : K \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonu vardır.

Teorem 2.2.1'de ifade edilen h fonksiyonlarının kümesini $\mathcal{H}(L, \{\rho_i\})$ ile göstereceğiz. Bu durumda, $\mathcal{A}(L)$ vektör uzayı olduğundan, Teorem 2.1.18'in bir sonucu olarak, aşağıdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

Teorem 2.2.2. $L = (K, \langle N \rangle, F_i)_{i \in \langle N \rangle}$ bir PCF kendine benzer yapı ve L üzerinde bir harmonik yapı var olsun. Bu durumda, $\mathcal{H}(L, \{\rho_i\})$ bir vektör uzayıdır ve boyutu V_1 'in eleman sayısına eşittir.

2.3. Sierpinski Üçgeni Üzerinde Harmonik Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1. p_1, p_2, p_3 kenar uzunluğu 1 birim olan bir eşkenar üçgenin köşe noktaları olsun. $u_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3$ için $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ ve $p_i = (p_i^{(1)}, p_i^{(2)})$ olmak üzere

$$u_i(x) = \left(\frac{x^{(1)} + p_i^{(1)}}{2}, \frac{x^{(2)} + p_i^{(2)}}{2} \right)$$

şeklinde tanımlanan büzülme dönüşümleri olmak üzere

$$\{\mathbb{R}^2; u_1, u_2, u_3\}$$

itere fonksiyon sisteminin atraktörüne Sierpinski üçgeni (SG) denir (Şekil 1.1).

Bu durumda

$$\mathcal{A}\{u_1, u_2, u_3\} = SG$$

dir. Yani

$$u_1(SG) \cup u_2(SG) \cup u_3(SG) = SG$$

dir.

İlk adımdaki köşe noktaları kümesini $V_0 = \{p_1, p_2, p_3\}$ ile göstereceğiz. $m \geq 1$ için

$$U : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2), U(A) = u_1(A) \cup u_2(A) \cup u_3(A)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} V_m &= \bigcup_{i=1}^3 u_i(V_{m-1}) = u_1(V_{m-1}) \cup u_2(V_{m-1}) \cup u_3(V_{m-1}) \\ &= U(V_{m-1}) = U^m(V_0) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan kümeye m . adımdaki köşe noktaları kümesi denir. Tanımlanışından dolayı

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_m$$

olacağı açıktır. Ayrıca, G_0 (Şekil 2.1) köşe noktaları 1 birim olan eşkenar üçgen olmak üzere m . aşamadaki grafiği

$$G_m = \bigcup_{i=1}^3 u_i(G_{m-1}) = u_1(G_{m-1}) \cup u_2(G_{m-1}) \cup u_3(G_{m-1})$$

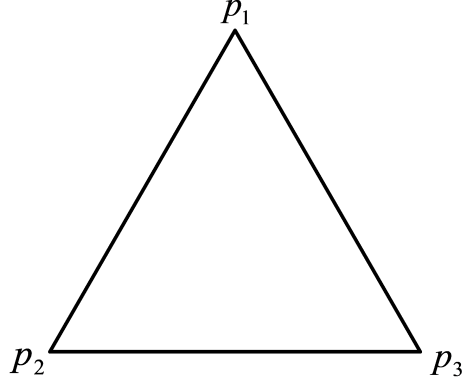
olarak gösterilir [4].

$$B_0 = \{(p_1, p_2), (p_1, p_3), (p_2, p_3)\}$$

$$B_1 = \{(u_i(p_k), u_i(p_l)) \mid 1 \leq k < l \leq 3, 1 \leq i \leq 3\}$$

$\vdots$

$$B_m = \{(u_{i_1} \circ \dots \circ u_{i_m}(p_k), u_{i_1} \circ \dots \circ u_{i_m}(p_l)) \mid 1 \leq k < l \leq 3, 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq 3\}$$



Sekil 2.1. G_0

şeklinde tanımlanan B_m ye de m . adımdaki kenarların kümesi diyeceğiz.

$$V_* = \bigcup_{m \geq 0} V_m$$

olsun. V_* ın kapanışı bize yukarıda tanımlanan Sierpinski Üçgenini verecektir. Yani

$$\overline{V_*} = SG$$

dir. Şimdi çalışmamızda kullanılan bazı notasyonları verelim.

$$\{1, 2, 3\}^m = \{w_1 w_2 \dots w_m \mid 1 \leq w_1, w_2, \dots, w_m \leq 3\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $w \in \{1, 2, 3\}^m$ için

$$\begin{aligned} u_w &= u_{w_1} \circ u_{w_2} \circ \dots \circ u_{w_m} \\ u_w(SG) &= (u_{w_1} \circ u_{w_2} \circ \dots \circ u_{w_m})(SG) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $i = 1, 2, 3$ ve $w \in \{1, 2, 3\}^m$ için

$$p_i(w) = u_w(p_i)$$

dir. Bu notasyonlarla

$$V_m = \bigcup_{w \in \{1, 2, 3\}^m} u_w(V_0), \quad u_w(V_0) = \{p_1(w), p_2(w), p_3(w)\}$$

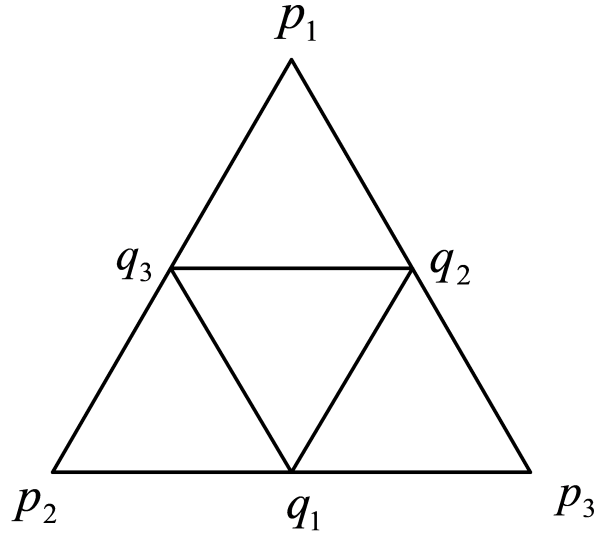
olarak yazılabilir.

Şimdi Sierpinski üçgeni üzerinde harmonik fonksiyonu tanımlamak için gerekli bazı kavramları tanımlayalım.

Şekil 2.2 de görüldüğü gibi q_1 noktası için V_1 köşe noktaları kümesinde q_1 e B_1 de bağlı olan 4 tane nokta vardır. Bu noktalar şekilden de görüleceği üzere p_2, p_3, q_2 ve q_3 dir. Benzer şekilde q_2 noktası için p_1, p_3, q_1, q_3 ve q_3 noktası için de p_1, p_2, q_1, q_2 olmak üzere 4 nokta vardır. Fakat p_1, p_2 ve p_3 noktaları için bu özellikteki noktalar 2 tanedir. Örneğin p_1 noktası için; q_2 ve q_3 dir. Benzer şekilde bir $p \in V_m$ noktası içinde V_m köşe noktaları kümesinde p ye B_m de bağlı olan noktalar vardır. Bu noktalar $p \in V_m \setminus V_0$ ise 4, $p \in V_0$ için 2 tanedir. Bir $p \in V_m$ için bu şekildeki noktaların kümesi $V_{m,p}$ ile gösterilir ve

$$V_{m,p} = \{q \in V_m \mid (p,q) \text{ veya } (q,p) \in B_m\}$$

olarak tanımlanır.



Şekil 2.2. G_1

Tanım 2.3.2. $l(V_m) = \{f \mid f : V_m \rightarrow \mathbb{R}\}$ olmak üzere

$$H_m : l(V_m) \rightarrow l(V_m)$$

$f \in l(V_m)$ için

$$H_m f(p) = \sum_{q \in V_{m,p}} (f(q) - f(p))$$

olarak tanımlanan H_m operatörüne (V_m, B_m) grafiği üzerindeki ayrık laplasiyen denir.

SG üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C(SG)$ ile gösterilir ve

$$C(SG) = \{f \mid f : SG \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ sürekli}\}$$

olarak tanımlanır. Şimdi Sierpinski üçgeni üzerindeki harmonik fonksiyonu tanımlayacağız.

Tanım 2.3.3. $f \in C(SG)$ olmak üzere eğer $\forall m \geq 1$ ve $\forall p \in V_m \setminus V_0$ için

$$H_m f(p) = 0$$

ise f ' ye harmonik fonksiyon denir.

p_1, p_2, p_3 köşe noktalarında sırasıyla α, β, γ değerleri verilsin. Acaba bu değerleri V_1 köşe noktaları kümesine

$$H_1 f(p) = 0$$

olacak şekilde nasıl genişletebiliriz.

$$(H_1 f)(q_1) = f(p_2) + f(p_3) + f(q_2) + f(q_3) - 4f(q_1) = 0$$

$$(H_1 f)(q_2) = f(p_1) + f(p_3) + f(q_1) + f(q_3) - 4f(q_2) = 0$$

$$(H_1 f)(q_3) = f(p_1) + f(p_2) + f(q_1) + f(q_2) - 4f(q_3) = 0$$

olması istenilmektedir. O halde bu sistem α, β ve γ ya bağlı olarak çözülürse

$$\begin{aligned} f(q_1) &= \frac{\alpha + 2\beta + 2\gamma}{5} \\ f(q_2) &= \frac{2\alpha + \beta + 2\gamma}{5} \\ f(q_3) &= \frac{2\alpha + 2\beta + \gamma}{5} \end{aligned}$$

elde edilir.

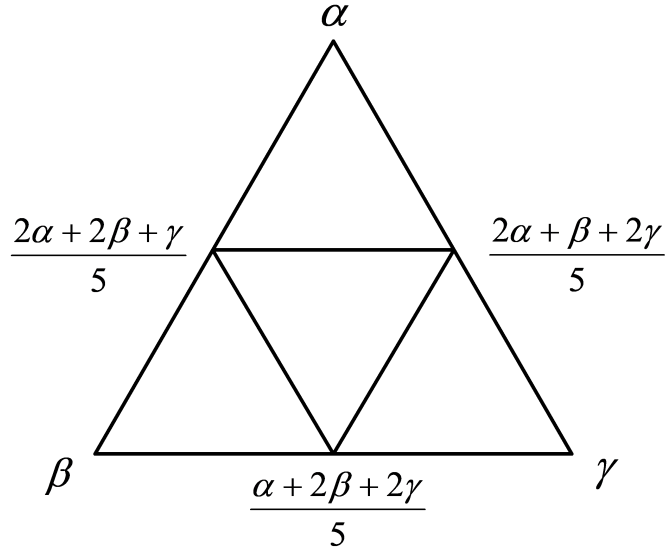
$$\begin{pmatrix} f(q_1) \\ f(q_2) \\ f(q_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(p_1) \\ f(p_2) \\ f(p_3) \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir.

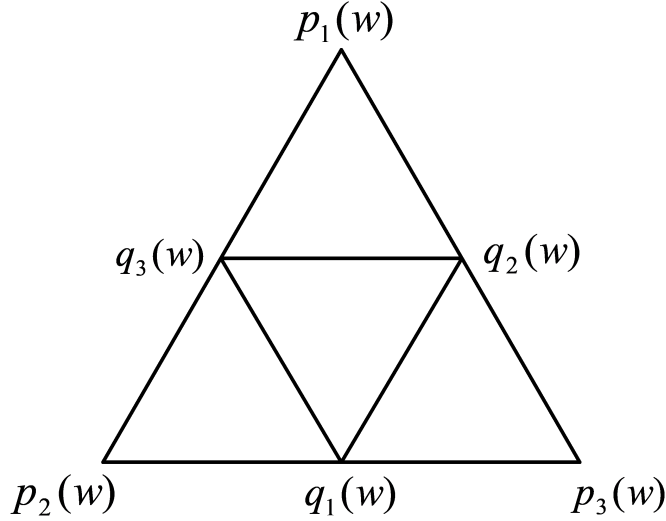
Bu durumda f nin $V_1 \setminus V_0$ köşe noktalarındaki değerleri V_0 köşe noktalarındaki değerler yardımıyla bulunmaktadır. Aslında aralarındaki bu ilişki bir kurala bağlıdır. Dikkat edilecek olunursa bulunan bu değerler o noktanın V_0 da komşu noktalardaki değerlerin iki katı ile karşı noktadaki değerlerin tek katı toplamının beşe bölümüdür (Şekil 2.3). Aslında bir sonraki aşamada da aynı algoritma geçerlidir. Çünkü bir sonraki aşamada her bir küçük üçgen için aynı mantık geçerli olacaktır.

Dolayısıyla herhangi bir $w \in \{1, 2, 3\}^m$ için $p_1(w), p_2(w), p_3(w)$ noktalarındaki değerler biliniyorken

$$H_{m+1} f(q_i(w)) = 0$$



Şekil 2.3. V_0 'dan V_1 'e harmonik genişleme



Şekil 2.4. m . adımdaki bir alt üçgen

denklemini çözülerek

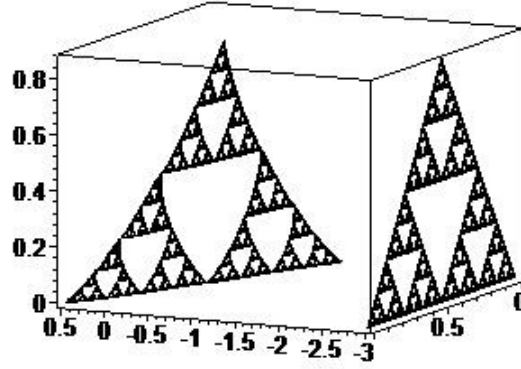
$$\begin{pmatrix} f(q_1(w)) \\ f(q_2(w)) \\ f(q_3(w)) \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(p_1(w)) \\ f(p_2(w)) \\ f(p_3(w)) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir [5].

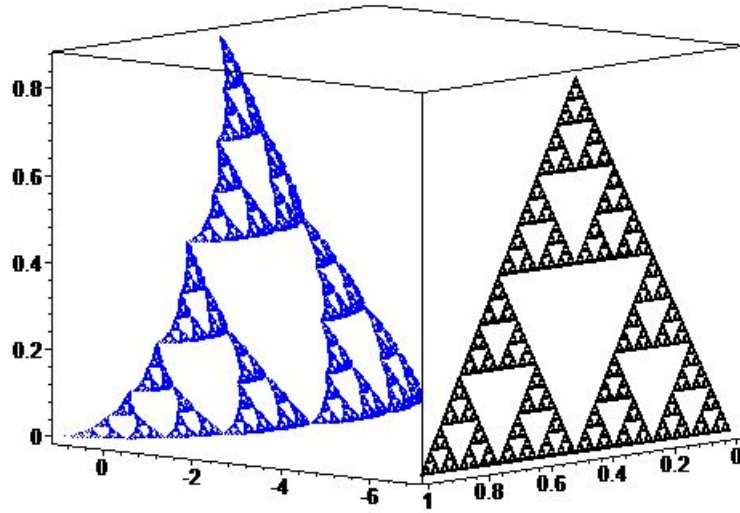
Yani eğer fonksiyon harmonik ise ve sınırdaki değerleri biliniyor ise tek türlü belirlidir ve bu algoritmayla hesaplanabilir. Şimdi bununla ilgili aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2.3.4. *Keyfi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ değerleri verildiği takdirde $f(p_1) = \alpha, f(p_2) = \beta, f(p_3) = \gamma$ olacak şekilde bir tek harmonik fonksiyon vardır [5].*

Örnek 2.3.5. $V_1 = p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ ve $f: V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(p_1) = 1, f(p_2) = 0, f(p_3) = 1, f(q_1) = -1, f(q_2) = 0, f(q_3) = 1$ ve $\rho_1, \rho_2, \rho_3 = \frac{1}{2}$ için SG üzerinde harmonik fonksiyon Şekil 2.5’de gösterilmiştir. Ayrıca verilen $f(p_1) = 1, f(p_2) = 0, f(p_3) = 1, f(q_1) = -1, f(q_2) = 0, f(q_3) = 1$ fonksiyon değerleri için SG üzerine fraktal interpolasyon fonksiyonu da Şekil 2.6’de verilmiştir.



Şekil 2.5. SG üzerinde harmonik fonksiyon



Şekil 2.6. SG üzerinde fraktal interpolasyon fonksiyonu

KAYNAKÇA

- [1] Barnsley,M. (1988). *Fractal Everywhere*. London: Academic Press Inc.
- [2] Brzoska Antoni (2017). *Spectral Properties of the Hata Tree*. University of Connecticut Graduate School, Doctoral Dissertations
- [3] Çelik D., Koçak S., Özdemir Y. (2008). *Fractal interpolation on the Sierpinski Gasket*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 337, 243-337
- [4] Enrique de Amo, Manuel Diaz Carrillo, Juan Fernandez Sanchez. (2013). *PCF self-similar sets and fractal interpolation*. *Mathematics And Computers In Simulation*. 92, 28-39
- [5] Kigami J., Yamaguti M., Hata M.(1997) *Mathematics of Fractals* (Çev:K.Hudson). USA: American Mathematical Society.
- [6] Kigami, J.(2001) *Analysis On Fractals*. United Kingdom: The Press Syndicate Of The University Of Cambridge.