ARALIK MATRİS OYUNLARIN ÇÖZÜMLERİ

Birgül AKSOY

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak – 2014

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Birgül AKSOY'un "**Aralık Matris Oyunların Çözümleri**" başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 30 /12 /2013 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Doç. Dr. Serkan Ali DÜZCE**	......
Üye	**:**	**Doç. Dr. Handan AKYAR**	......
Üye	**:**	**Doç. Dr. Sevil ŞENTÜRK**	......

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ARALIK MATRİS OYUNLARIN ÇÖZÜMLERİ

Birgül AKSOY

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Serkan Ali DÜZCE
2014, 71 Sayfa

Bu tezde, öncelikle iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar diğer bir deyişle matris oyunlar incelenmiş, temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca matris oyunların çözümleri araştırılmıştır. Aralık tanımı ve aralıklarla ilgili temel aritmetik işlemler ifade edilmiş, aralık karşılaştırması için bir sıralama bağıntısı tanımlanmıştır. Daha sonra matris oyunlar aralık matris oyunlara genelleştirilmiştir. Aralık matris oyunlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiş, $2 \times n$ aralık matris oyunların çözümleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matris Oyunlar, Denge Noktası, Aralık Matris Oyunlar, Denge Aralığı

ABSTRACT

Master of Science Thesis

SOLUTIONS OF INTERVAL MATRIX GAMES

Birgül AKSOY

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Serkan Ali DÜZCE
2014, 71 Pages

In this thesis, firstly two person zero-sum games, in other words matrix games are examined, fundamental definitions and theorems are given. Also solutions of matrix games are investigated. Interval definition and basic arithmetic operations about intervals are expressed and an order relation for comparing interval is defined. Then matrix games are generalized interval matrix games. Fundamental definitions and theorems about interval matrix games are given, solutions of $2 \times n$ interval matrix games are examined.

Keywords: Matrix Games, Equilibrium Point, Interval Matrix Games, Equilibrium Interval

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını ve bilgilerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Serkan Ali DÜZCE'ye ve her zaman beni destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Birgül AKSOY

Aralık – 2013

İçindekiler

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

I_i	:	I. oyuncunun i. saf stratejisi
II_j	:	II. oyuncunun j. saf stratejisi
g_{ij}	:	I_i ve II_j stratejisine karşılık I. oyuncunun getirisi
$\mathbf{G}$	:	matris oyunun getiri matrisi
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$	:	I. oyuncunun karma stratejisi
$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$	:	II. oyuncunun karma stratejisi
X_m	:	I. oyuncunun karma stratejiler kümesi
Y_n	:	II. oyuncunun karma stratejiler kümesi
$\\|\mathbf{x}\\|$	:	$\mathbf{x}$ in öklid normu
$g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	:	$\mathbf{x} \in X_m, \ \mathbf{y} \in Y_n$ karma stratejilerine karşılık oyunun getirisi
$\mathbf{y}^T$	:	$\mathbf{y}$ vektörünün transpozu
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	iç çarpım
ν	:	matris oyunun değeri
$\mathrm{I}_l \geq \mathrm{I}_s$	:	I_l stratejisi I_s stratejisine baskındır
$\mathrm{I}_l > \mathrm{I}_s$	:	I_l stratejisi I_s stratejisine kesin baskındır
$\tilde{\mathbf{G}}$	:	aralık matris oyunun getiri matrisi
$\tilde{A}$	:	A aralığı
$\underline{a}$	:	$\tilde{A}$ aralığının alt sınırı
$\bar{a}$	:	$\tilde{A}$ aralığının üst sınırı
$m(\tilde{A})$	:	$\tilde{A}$ aralığının orta noktası
$r(\tilde{A})$	:	$\tilde{A}$ aralığının yarıçapı
$I(\mathbb{R})$	:	$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı tüm aralıklar kümesi
$w(\tilde{A})$	:	$\tilde{A}$ aralığının genişliği
$\tilde{A} \preceq \tilde{B}$	:	$\tilde{A}$ aralığı $\tilde{B}$ aralığından küçüktür
$\tilde{A} \succeq \tilde{B}$	:	$\tilde{A}$ aralığı $\tilde{B}$ aralığından büyüktür
$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	:	$\mathbf{x} \in X_m, \ \mathbf{y} \in Y_n$ karma stratejilerine karşılık aralık matris oyunun getirisi
$\tilde{\nu}$	:	aralık matris oyunun değeri

1 GİRİŞ

Oyun teorisi, mücadele içerisinde en doğru kararın veya kararların alınabildiği karşılıklı etkileşim sürecini matematiksel yöntemlerle inceleyen bir bilim dalıdır. Hayatımızın birçok kısmında farklı olaylara karşı kararlar almamız gerekebilir. Bu yüzden oyun teorisi günlük yaşamımızda önemli bir yere sahiptir.

Oyun teorisi çıkar çatışmaları altında iki veya daha fazla rasyonel rakibin olduğu karar verme durumları ile ilgilidir. Gerçek yaşamda rekabetçi durumlar sadece iş yaşamında değil aynı zamanda savaşlar, spor müsabakaları ve yarışmaların farklı türlerini içeren insan aktivitesinin diğer yönlerinde de ortaya çıkmaktadır. Hem basit oyunların, hem de iş yaşamındaki ve endüstrideki karmaşık çatışmaların birçok ortak özelliği vardır. Bu nedenle oyun teorisi sürekli rekabetçi durumlarla karşılaşan karar vericiler için vazgeçilmez bir başvuru kaynağıdır. Geçmişten günümüze kadar oyun teorisi birçok alanda uygulanmış ve uygulama alanlarının gün geçtikçe arttığı görülmektedir. Biyoloji, fizik, mekanik, mühendislik, ekonomi, taktik ve stratejik askeri sorunlar gibi birçok alanda yaygın bir uygulama alanına sahiptir.

E. Zermelo [1] 1913 yılında satranç hakkında kanıtladığı bir teoremle oyun teorisinin ilk adımlarından birini atmıştır. E. Zermelo bu teoremiyle satranç oyununu ele alarak ya iki oyuncudan birinin kazanabileceğini ya da iki oyuncunun berabere kalabileceklerini ortaya koymuştur. J. von Neumann [2] 1928 yılında yayımlamış olduğu bir makalesinde "Minimaks Teoremi" ni ispatlaması ile ikinci büyük adımı atmıştır. Ayrıca 1944 yılında J. von Neumann, O. Morgenstern [3] ile birlikte oyun teorisine ait ilk kitap olarak bilinen "Oyunlar Teorisi ve Ekonomik Davranış" adlı kitabı yazıp yayımlamışlardır. Oyun teorisinde başka bir önemli adım ise 1950-1953 yılları arasında dört makale yazan J. F. Nash [4, 5, 6, 7] tarafından atılmıştır. "Nash Dengesi" olarak da bilinen denge kavramını ve oyunda işbirliğinin önemini ortaya koymuştur. J. F. Nash bu dört makalesi ile oyun teorisi bilim dalının gelişmesine önemli katkı sağlamıştır.

Oyunların farklı türleri tartışılmıştır. Sınıflandırmalar getiri fonksiyonunun yapısı, stratejilerin ve oyuncuların sayısı gibi faktörlere dayanır. Matris oyunlar için birkaç çözüm metodu geliştirilmiştir. Bunlardan biri, çok popüler bir teknik olan lineer programlama tekniğidir. Bu teknikte duality teoremini uygulayarak iki oyuncunun stratejileri ve oyunun değerini elde etmek için lineer programların ikisinden birini çözmek yeterlidir. 1999 da S. Kumar ve D. S. N. Reddy [8], K. G. K. Nair ve G. Ranjith [9] denge noktası olmadan oyunların çözümü için bir grafik metodu çalıştılar. Tüm bu metotlar oynanan oyunların her birinde getirilerin kesin bilinmesi ilkesine dayanarak geliştirilmiştir. Fakat gerçek yaşamda getirilerin bilinmediği durumlarda vardır ve tahmin etmek zorunda kalırız ya da bazen yaklaşık olarak biliriz. Dolayısıyla oyuncuların stratejileri değişmemesine rağmen matris oyunların getirileri sabit sayı olmayabilir. Yani getiriler aralık değerli olur ve bu oyunlar aralık matris oyunlar olarak ifade edilir. Aralık matris oyunlar için aralık kavramı ve aralık karşılaştırması önemli bir yere sahiptir. Aralığı bir gerçel sayının genişletilmesi olarak ifade eden R. E. Moore'un [10, 11], aralık aritmetiği ve aralık aritmetiğinin uygulamaları üzerine kapsamlı bir araştırması 1966 ve 1979 daki çalışmalarında bulunabilir. Ayrıca R. E. Moore, aralık karşılaştırması için de çalışmalar yapmıştır. Herhangi iki aralığın karşılaştırılabilmesi için çalışmalar devam etmiş, W. D. Collins ve C. Hu [12], A. Sengupta ve T. K. Pal [13], P. K. Nayak ve M. Pal [14] tarafından oyuncuların seçimlerini dikkate alan aralık karşılaştırması için de çalışmalar yapılmıştır. Aralıklar bilinen sıralama mantığıyla karşılaştırılamaz. L. A. Zadeh [15] tarafından 1965 yılında geliştirilen bulanık (fuzzy) mantık teorisi ile aralıkların bulanık karşılaştırması yapılmıştır.

Aralık matris oyunların çözüm metotları birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu çözüm metotlarından biri olan lineer programlama tekniği kullanılarak S-T. Liu ve C. Kao [16], D-F. Li [17], W. D. Collins ve C. Hu [12], P. K. Nayak ve M. Pal [14] tarafından çalışmalar yapılmıştır. Diğer bir çözüm metodu olan grafik yöntem üzerine de P. K. Nayak ve M. Pal [18], H. Akyar ve E. Akyar' ın [22] çalışmaları bulunmaktadır.

Bu çalışmada matris oyunlar aralık matris oyunlara genelleştirilerek aralık matris oyunların çözümleri incelenmiştir. Öncelikle matris oyunlara yani birinin kazancının diğerinin kaybına eşit olduğu iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlara yer verilmiş, temel tanım ve teoremlere değinilmiştir. İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlarda her zaman çözümün var olduğu ifade edilmiştir. Denge noktasının olduğu ve olmadığı durumlarda oyunların çözümleri incelenmiştir. Bu çalışmanın amacı matris oyunları aralık matris oyunlara genelleştirerek çözüm yöntemlerini aralık matris oyunlara uyarlamaktır. Öncelikle üçüncü bölümde aralık kavramı ifade edilmiş ve aralıklar için bir sıralama bağıntısı verilmiştir. Sonrasında da $2 \times n$ aralık matris oyunların çözümü incelenmiştir.

2 OYUN TEORİSİ İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Taraf veya grupların rekabet içerisinde sürdürdüğü herhangi bir olaya *oyun*, bu taraf veya gruplara ise *oyuncu* denir.

Oyunculardan her birinin oyun süresince oluşabilecek tüm durumlar için alabileceği kararlar bütününe *strateji* denir. Oyunun oynanması sürecinde her oyuncu her bir stratejinin karşılığı olarak oyunun sonunda belirli bir kazanç elde eder. Bu kazanca oyuncunun *getirisi* denir. Bu kazanç negatif, pozitif veya sıfır olabilir.

2.1 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Sonlu Oyunlar

Bir oyunda her oyuncu tarafından kullanılan strateji sonlu sayıda ise bu oyuna *sonlu oyun* denir. Oyunun sıfır toplamlı olması oyunculardan birinin kazancının diğerinin kaybına eşit olması demektir. Diğer bir deyişle oyuncuların kâr ve zararlarının toplamı sıfırdır. İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar mücadele içerisindeki sonlu stratejiye sahip iki oyuncunun en iyi stratejiyi kullanarak oynadıkları oyunlardır.

İki kişilik sıfır toplamlı sonlu bir oyunda I. oyuncunun m tane stratejisi yani $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_m$ stratejileri ve II. oyuncunun da n tane stratejisi yani $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \ldots, \mathrm{II}_n$ stratejileri olmak üzere bu tür oyunlar $m \times n$ *oyunu* yada *matris oyunlar* olarak ifade edilmektedir.

I. oyuncu I_i stratejisini II. oyuncu da II_j stratejisini kullandığında oyun sıfır toplamlı olduğundan I. oyuncunun getirisi g_{ij} olup, II. oyuncunun da getirisi $-g_{ij}$ olur. O halde oyunun getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \ldots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \ldots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \ldots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.1.1}$$

şeklinde olur. Getiri matrisi $G = (g_{ij})_{m \times n}$ şeklinde de gösterilebilir. Yani buradaki g_{ij}, I. oyuncunun kazancını II. oyuncununda kaybını ifade etmektedir.

Dolayısıyla I. oyuncunun kazancı II. oyuncunun kaybına eşittir.

2.1.1 Saf Stratejiler

Tanım 2.1.1. *Oyuncunun stratejisi olasılık olayı içermiyorsa bu stratejiye* ***saf strateji*** *denir. Yani tek bir strateji çifti ile oyunun sonucunun belirlenmesi durumudur.*

Tanım 2.1.2. *Getiri matrisi* (2.1.1) *ile verilen oyunda*

$$\min_{j=1,2,\ldots,n} g_{i_*j} = \max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} g_{ij}$$

koşulunu sağlayan I_{i_*} *stratejisine* I. *oyuncunun* ***optimal saf stratejisi*** *denir.*

$$\max_{i=1,2,\ldots,m} g_{ij_*} = \min_{j=1,2,\ldots,n} \max_{i=1,2,\ldots,m} g_{ij}$$

koşulunu sağlayan II_{j_*} *stratejisine* II. *oyuncunun* ***optimal saf stratejisi*** *denir.*

Tanım 2.1.3. *Getiri matrisi* (2.1.1) *ile verilen oyunda*

$$V_P^L = \max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} g_{ij}$$

değerine oyunun saf stratejiler sınıfında ***alt değeri*** *denir.*

$$V_P^U = \min_{j=1,2,\ldots,n} \max_{i=1,2,\ldots,m} g_{ij}$$

değerine de oyunun saf stratejiler sınıfında ***üst değeri*** *denir.*

Eğer $V_P^L = V_P^U = V$ *ise* V *sayısına saf stratejiler sınıfında* ***oyunun değeri*** *denir.*

Şimdi optimal stratejilerin, oyuncular için ne anlama geldiğini açıklayalım.

$$\min_{j=1,2,\ldots,n} g_{i_*j} = \max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} g_{ij} = V_P^L$$

eşitliğinden

$$\min_{j=1,2,\ldots,n} g_{i_*j} = V_P^L$$

ve keyfi $j = 1, 2, \ldots, n$ için $g_{i_*j} \geq V_P^L$ olur. Bu I. oyuncunun I_{i_*} optimal stratejisiyle oynadığında en az V_P^L kadar kazanacağı anlamına gelmektedir. Benzer şekilde

$$\max_{i=1,2,\ldots,m} g_{ij_*} = \min_{j=1,2,\ldots,n} \max_{i=1,2,\ldots,m} g_{ij} = V_P^U$$

eşitliğinden

$$\max_{i=1,2,\ldots,m} g_{ij_*} = V_P^U$$

ve keyfi $i = 1, 2, \ldots, m$ için $g_{ij_*} \leq V_P^U$ olur. Bu da II. oyuncunun II_{j_*} optimal stratejisi ile oynadığında en fazla V_P^U kadar kaybedeceği anlamına gelmektedir.

Burada I. oyuncu optimal olmayan bir stratejisini kullanırsa II. oyuncu I. oyuncuya V_P^L den daha az kazanç verebilir. II. oyuncu optimal olmayan bir stratejisini kullanırsa I. oyuncu II. oyuncuya V_P^U den daha fazla kayıp verebilir.

Önerme 2.1.4. *Getiri matrisi* (2.1.1) *ile verilen oyunda*

$$V_P^L \leq V_P^U$$

olur.

Kanıt. I. oyuncunun I_{i_*} ve II. oyuncunun II_{j_*} keyfi stratejilerini alalım ve sabitleyelim. O zaman

$$\min_{j=1,2,\ldots,n} g_{i_*j} \leq g_{i_*j_*}$$

olur. Bu eşitsizlik her sabitlenmiş $i_* = 1, 2, \ldots, m$ için doğru olduğundan

$$\max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} g_{ij} \leq \max_{i=1,2,\ldots,m} g_{ij_*}$$

olduğu bulunur. Son eşitsizlikte j_* keyfi sabitlenmiş olduğundan

$$\max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} g_{ij} \leq \min_{j=1,2,\ldots,n} \max_{i=1,2,\ldots,m} g_{ij}$$

olur. Yani

$$V_P^L \leq V_P^U$$

olduğu elde edilir. □

Örnek 2.1.5. *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

verilen 2×2 *oyununu ele alalım.*

Oyunun alt değeri,

$$\begin{aligned} V_P^L = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} g_{ij} &= \max\left\{\min_{j=1,2} g_{1j}, \min_{j=1,2} g_{2j}\right\} \\ &= \max\{-2, -1\} \\ &= -1 \end{aligned}$$

ve oyunun üst değeri,

$$\begin{aligned} V_P^U = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} g_{ij} &= \min\left\{ \max_{i=1,2} g_{i1},\ \max_{i=1,2} g_{i2} \right\} \\ &= \min\{1, 0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. $V_P^L \neq V_P^U$ *olduğundan oyunun saf stratejiler sınıfında değeri yoktur. Burada* I. *oyuncunun optimal saf stratejisi*

$$-1 = V_P^L = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} g_{ij} = \min_{j=1,2} g_{2j}$$

koşulunu sağlayan I_2 *stratejisidir.* II. *oyuncunun optimal saf stratejisi de*

$$0 = V_P^U = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} g_{ij} = \max_{i=1,2} g_{i2}$$

koşulunu sağlayan II_2 *stratejisidir.*

Bu örnekten görüldüğü üzere, oyunun saf stratejiler sınıfında değeri olmayabilir.

2.1.2 Karma Stratejiler

I. oyuncunun saf stratejileri $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_m$ ve II. oyuncunun saf stratejileri $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \ldots, \mathrm{II}_n$ olmak üzere iki kişilik sıfır toplamlı bir $m \times n$ oyununu ele alalım.

Tanım 2.1.6. *Keyfi* $i = 1, 2, \ldots, m$ *için* $x_i \geq 0$ *ve* $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ *olacak şekilde m-boyutlu* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *vektörüne* I. *oyuncunun* ***karma stratejisi*** *denir.* I. *oyuncunun karma stratejileri kümesi* X_m *ile gösterilmek üzere*

$$X_m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) : \forall i = 1, 2, \ldots, m \text{ için } x_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

dir.

Tanım 2.1.7. *Keyfi bir* $j = 1, 2, \ldots, n$ *için* $y_j \geq 0$ *ve* $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ *olacak şekilde n-boyutlu* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *vektörüne* II. *oyuncunun* ***karma stratejisi*** *denir.* II. *oyuncunun karma stratejileri kümesi* Y_n *ile gösterilmek üzere*

$$Y_n = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) : \forall j = 1, 2, \ldots, n \text{ için } y_j \geq 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}$$

dir.

I. oyuncu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X_m$ karma stratejisini seçerse, I_1 stratejisini x_1 olasılığı ile, I_2 stratejisini x_2 olasılığı ile,..., I_m stratejisini x_m olasılığı ile oynamış olur. Oyun s kez oynandığında I. oyuncunun $s \cdot x_1$ kez I_1 stratejisi ile, $s \cdot x_2$ kez I_2 stratejisi ile,..., $s \cdot x_m$ kez I_m stratejisi ile oynadığı anlaşılır. II. oyuncunun da $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_n$ karma stratejisini seçerek oynaması benzer şekilde ifade edilebilir.

I. oyuncu I_i stratejisini 1 olasılığı ile diğer stratejileri de 0 olasılığı ile yani $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in X_m$ karma stratejisi ile oynaması I_i saf stratejisi ile oynaması anlamına gelmektedir. Tersine I. oyuncunun her seferinde I_i saf stratejisi ile oynaması I_i stratejisini 1 olasılığı ile diğer stratejileri de 0 olasılık ile seçerek $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in X_m$ karma stratejisi ile oynaması anlamına gelmektedir. II. oyuncu için de benzer ifadeler geçerlidir. Bu nedenle saf stratejiler kümesinin karma stratejiler kümesinin alt kümesi olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 2.1.8. I. *oyuncunun* $X_m \subset \mathbb{R}^m$ *ve* II. *oyuncunun* $Y_n \subset \mathbb{R}^n$ *karma strateji kümeleri kompakt ve konveks kümelerdir.*

Kanıt. $X_m \subset \mathbb{R}^m$ kümesinin kompakt olduğunu göstermek için kapalı ve sınırlı olduğunu göstermemiz gerekir.

Keyfi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X_m$ alalım. O halde keyfi $i = 1, 2, \ldots, m$ için $x_i \geq 0$ ve $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$ olduğundan

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2} \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$

olur. Buradan keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ için $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ olup X_m sınırlı bir küme olur.

Şimdi de X_m kümesinin kapalı küme olduğunu gösterelim. Keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)}) \in X_m$ olsun. $k \to \infty$ iken $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \ldots, x_m^{(*)})$ olup $\mathbf{x}^{(*)} \in X_m$ olduğunu göstermeliyiz.

$k \to \infty$ iken $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}^{(*)}$ olduğundan keyfi $i = 1, 2, \ldots, m$ için $k \to \infty$ iken $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olur. Keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için $x_i^{(k)} \geq 0$ ve $k \to \infty$ iken $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olduğundan $x_i^{(*)} \geq 0$ olur.

$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)}) \in X_m$ olduğundan $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{(k)} = 1$ olur. Her $k = 1, 2, \ldots$ için $k \to \infty$ iken $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(*)} = 1$$

olur. Keyfi $i = 1, 2, \ldots, m$ için $x_i^{(*)} \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{m} x_i^{(*)} = 1$ olup $\mathbf{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \ldots, x_m^{(*)}) \in X_m$ elde edilir. Böylece X_m kümesi kapalı kümedir.

O halde X_m kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakt bir kümedir.

Şimdi X_m kümesinin konveks küme olduğunu gösterelim. Keyfi $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})$, $\mathbf{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}) \in X_m$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{(2)} \in X_m$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{(2)} = (\lambda x_1^{(1)} + (1 - \lambda)x_1^{(2)}, \ldots, \lambda x_m^{(1)} + (1 - \lambda)x_m^{(2)})$$

olduğu açıktır. Ayrıca, $\mathbf{x}^{(1)} \in X_m$ ve $\mathbf{x}^{(2)} \in X_m$ olduğundan keyfi $i = 1, 2, \ldots, m$ için $x_i^{(1)} \geq 0$, $x_i^{(2)} \geq 0$ olur. O halde keyfi $i = 1, 2, \ldots, m$ için

$$\lambda x_i^{(1)} + (1 - \lambda)x_i^{(2)} \geq 0$$

olur. $\mathbf{x}^{(1)} \in X_m$ ve $\mathbf{x}^{(2)} \in X_m$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(1)} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i^{(2)} = 1$$

eşitlikleri geçerlidir. O halde

$$\sum_{i=1}^{m} [\lambda x_i^{(1)} + (1 - \lambda)x_i^{(2)}] = \sum_{i=1}^{m} \lambda x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{m} (1 - \lambda)x_i^{(2)} = \lambda + (1 - \lambda) = 1$$

olur. Böylece

$$\lambda x_i^{(1)} + (1 - \lambda)x_i^{(2)} \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{m} [\lambda x_i^{(1)} + (1 - \lambda)x_i^{(2)}] = 1$$

olduğundan

$$\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{(2)} \in X_m$$

olarak bulunur. Bu ise X_m kümesinin konveks bir küme olması demektir.

Benzer şekilde Y_n kümesinin de kompakt ve konveks küme olduğu gösterilebilir. □

Tanım 2.1.9. I. *ve* II. *oyuncu*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \ldots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \ldots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \ldots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

getiri matrisi ile verilen $m \times n$ oyununu oynasınlar. I. *oyuncu* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X_m$ *karma stratejisi ile* II. *oyuncu* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_n$ *karma stratejisi ile oynamak üzere* ***oyunun getirisi***

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} G \mathbf{y}^T = \langle \mathbf{x} G, \mathbf{y} \rangle$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\mathbf{y}^T$ vektörü $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_n \subseteq \mathbb{R}^n$ vektörünün transpozunu ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ise iç çarpımı göstermektedir.

I. oyuncu $\mathbf{x}^* = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ karma stratejisi ile II. oyuncu da $\mathbf{y}^* = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ karma stratejisi ile yani I. oyuncu I_i saf stratejisi ile II. oyuncu da II_j saf stratejisi ile oynarlarsa oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = g(\mathrm{I}_i, \mathrm{II}_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j = g_{ij}$$

olur.

Eğer I. oyuncu I_i saf stratejisi ile II. oyuncu da $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ karma stratejisi ile oynarsa oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j$$

olur.

Eğer I. oyuncu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ karma stratejisi ile II. oyuncu da II_j saf stratejisi ile oynarsa oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij}$$

olur.

Önerme 2.1.10. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : X_m \times Y_n \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$*'ye göre süreklidir. Ayrıca her sabitlenmiş* $\mathbf{x} \in X_m$ *için* $\mathbf{y} \to g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *ve her sabitlenmiş* $\mathbf{y} \in Y_n$ *için* $\mathbf{x} \to g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *fonksiyonları doğrusal fonksiyondur.*

Şimdi karma stratejiler sınıfında oyunun alt değerini ve üst değerini tanımlayalım.

Tanım 2.1.11. *Getiri matrisi* (2.1.1) *ile verilen oyunda*

$$V^L = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

değerine oyunun karma stratejiler sınıfında ***alt değeri***

$$V^U = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

değerine de oyunun karma stratejiler sınıfında ***üst değeri*** *denir.*

Eğer $V^L = V^U = \nu$ *ise* (2.1.1) *oyununun değeri vardır denir ve* ν *sayısına karma stratejiler sınıfında* ***oyunun değeri*** *adı verilir.*

Saf stratejiler sınıfında oyunun değerinin olmayabileceğini söylemiştik. Saf stratejiler sınıfı karma stratejiler sınıfına genişletilerek 1928 yılında *John von Neumann* tarafından karma stratejiler sınıfında oyunun değerinin olduğu ifade ve ispat edilmiştir [2].

Teorem 2.1.12 (John von Neumann)**.** *Getiri matrisi* (2.1.1) *ile verilen iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun her zaman değeri vardır. Yani*

$$V^L = V^U = \nu$$

eşitliği her zaman geçerlidir.

2.1.3 Optimal Stratejiler ve Oyunun Çözümü

Tanım 2.1.13.

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu$$

koşulunu sağlayan $\mathbf{x}^* \in X_m$ *stratejisine* I. *oyuncunun* ***optimal stratejisi***

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu$$

koşulunu sağlayan $\mathbf{y}^* \in Y_n$ *stratejisine* II. *oyuncunun* ***optimal stratejisi*** *denir.*

Burada

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \nu$$

eşitliğinden $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$ olur. Bu I. oyuncunun $\mathbf{x}^* \in X_m$ optimal stratejisiyle oynadığında en az ν kadar kazanacağı anlamına gelmektedir. Benzer olarak

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \nu$$

eşitliğinden $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$ olur. Bu da II. oyuncunun $\mathbf{y}^* \in Y_n$ optimal stratejisiyle oynadığında en fazla ν kadar kaybedeceği anlamına gelmektedir.

Tanım 2.1.14. I. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{x}^* \in X_m$, II. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{y}^* \in Y_n$ *ve oyunun değeri de* ν *olmak üzere* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ *üçlüsüne* ***oyunun çözümü*** *denir.*

Teorem 2.1.15. *İki kişilik sıfır toplamlı sonlu her oyunun çözümü vardır.*

Kanıt. İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun değerinin var olduğunu Teorem 2.1.12 gereğince söylemiştik. Yani

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu$$

dir.

$g(\cdot, \cdot) : X_m \times Y_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ye göre sürekli fonksiyon ve $X_m \subset \mathbb{R}^m$ ve $Y_n \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler olmak üzere

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\cdot, \mathbf{y}) : X_m \to \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \cdot) : Y_n \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları da sürekli fonksiyon olur.

$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\cdot, \mathbf{y}) : X_m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $X_m \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme olduğundan

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olacak şekilde $\mathbf{x}^* \in X_m$ vardır. Bu durumda $\mathbf{x}^* \in X_m$ stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Benzer şekilde $\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \cdot) : Y_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $Y_n \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olduğundan

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olacak şekilde $\mathbf{y}^* \in Y_n$ vardır. Bu durumda $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Dolayısıyla $\mathbf{x}^* \in X_m$ stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi, $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi de II. oyuncunun optimal stratejisi ve ν de oyunun değeri olmak üzere $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsü oyunun çözümü olur. $\square$

Teorem 2.1.16. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ *nin oyunun çözüm olması için gerek ve yeter koşul*

$$\textit{keyfi} \quad \mathbf{y} \in Y_n \quad \textit{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$$

$$\textit{keyfi} \quad \mathbf{x} \in X_m \quad \textit{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$$

olmasıdır.

Teorem 2.1.16 gereği aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 2.1.17. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ *üçlüsü verilen oyunun çözümü ise* $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \nu$ *dir.*

Teorem 2.1.16 yı kullanarak bu sonucu yorumlayalım. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsü verilen oyunun çözümü olsun. Eğer I. oyuncu $\mathbf{x}^* \in X_m$ optimal strateji ile oynarsa Teorem 2.1.16 daki $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$ eşitsizliği gereği, kendisine en az ν kadar kazancı garantiler. Eğer II. oyuncu $\mathbf{y}^* \in Y_n$ optimal stratejisi ile oynarsa Teorem 2.1.16 daki $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$ eşitsizliği gereği, kendisine ν den daha fazla kaybetmemeyi garantiler. Bu durumda I. oyuncu $\mathbf{x}^* \in X_m$ optimal stratejisi, II. oyuncu $\mathbf{y}^* \in Y_n$ optimal stratejisi ile oynarlarsa hem I. oyuncunun kazancı hem de II. oyuncunun kaybı $\nu = g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ kadardır.

Şimdi de karma stratejiler sınıfında oyunun çözümünün var olduğunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 2.1.18. *Örnek 2.1.5 teki getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen 2×2 *oyununu ele alalım.*

Her iki oyuncunun da ikişer saf stratejisi olduğundan I. *oyuncunun karma stratejisi* $\mathbf{x} = (x, 1-x) \in X_2$, $x \in [0,1]$, II. *oyuncunun karma stratejisi* $\mathbf{y} = (y, 1-y) \in Y_2$, $y \in [0,1]$ *olarak yazılabilir. O halde bu karma stratejiler için oyunun getirisi*

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 1 \cdot xy + (-2) \cdot x(1-y) + (-1) \cdot (1-x)y + 0 \cdot (1-x)(1-y) \\ &= xy - 2x + 2xy - y + xy \\ &= 4xy - 2x - y \end{aligned}$$

olur.

$\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ *stratejisini alalım. Keyfi* $\mathbf{y} = (y, 1-y) \in Y_2$ *stratejisi için*

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = 4 \cdot \frac{1}{4}y - 2 \cdot \frac{1}{4} - y = -\frac{1}{2}$$

olup keyfi $\mathbf{y} \in Y_2$ *için* $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq -\frac{1}{2}$ *elde edilir.*

$\mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *stratejisini alalım. Keyfi* $\mathbf{x} = (x, 1-x) \in X_2$ *stratejisi için*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = 4x \cdot \frac{1}{2} - 2x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

olup keyfi $\mathbf{x} \in X_2$ *için* $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq -\frac{1}{2}$ *elde edilir.*

Dolayısıyla $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq -\frac{1}{2}$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq -\frac{1}{2}$ *ve Teorem 2.1.16 dan*

$$\left(\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \nu = -\frac{1}{2}\right)$$

üçlüsü oyunun çözümü olarak elde edilir.

Şimdi ileride kullanılacak olan bir önermeyi kanıtlayalım.

Önerme 2.1.19. *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.1.2}$$

olan iki kişilik sıfır toplamlı $m \times n$ *oyununu ele alalım.* $r \in \mathbb{R}$ *olsun.* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ *üçlüsünün oyunun çözümü olması için gerek ve yeter koşul* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu + r)$ *üçlüsünün getiri matrisi*

$$\mathbf{G_1} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} r+g_{11} & r+g_{12} & \dots & r+g_{1n} \\ r+g_{21} & r+g_{22} & \dots & r+g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r+g_{m1} & r+g_{m2} & \dots & r+g_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.1.3}$$

olan oyunun çözümü olmasıdır.

Kanıt. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n$ sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri olsun. Getiri matrisi (2.1.2) ile verilen oyunda $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ karma stratejileri için oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j,$$

getiri matrisi (2.1.3) ile verilen oyunda $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ karma stratejileri için oyunun getirisi

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i (g_{ij} + r) y_j = r + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j = r + g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olur.

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsü getiri matrisi (2.1.2) olan oyunun çözümü olsun. Teorem 2.1.16 dan

$$\forall \mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$$

$$\forall \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$$

olur. $g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r + g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ olduğundan

$$\forall \mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad g_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq r + \nu$$

$$\forall \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq r + \nu$$

olduğu elde edilir. Bu eşitsizliklerden ve yine Teorem 2.1.16 dan $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu + r)$ üçlüsünün getiri matrisi (2.1.3) olan oyunun çözümü olduğu bulunur.

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu + r)$ üçlüsü getiri matrisi (2.1.3) ile verilen oyunun çözümü iken $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsünün getiri matrisi (2.1.2) ile verilen oyunun çözümü olduğu da benzer şekilde kanıtlanır. ☐

Tanım 2.1.20. *Getiri matrisi* (2.1.1) *ile verilen iki kişilik sıfır toplamlı oyunda* $\mathbf{x}^* \in X_m$, $\mathbf{y}^* \in Y_n$ *olsun. Keyfi* $\mathbf{x} \in X_m$, $\mathbf{y} \in Y_n$ *için*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \tag{2.1.4}$$

oluyorsa $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *ikilisine* ***denge stratejileri (denge ikilisi)*** *denir.*

Şimdi $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ ikilisinin, denge ikilisi olmasının ne anlama geldiğini açıklayalım. İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda $\mathbf{x} \in X_m$ ve $\mathbf{y} \in Y_n$ stratejileri için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ getirisinin I. oyuncunun getirisi olduğunu biliyoruz. Öte yandan oyun sıfır toplamlı olduğundan $\mathbf{x} \in X_m$ ve $\mathbf{y} \in Y_n$ stratejileri için II. oyuncunun getirisi $-g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ olur. Şimdi $\mathbf{x} \in X_m$ ve $\mathbf{y} \in Y_n$ için I. oyuncunun getirisini

$g_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$, II. oyuncunun getirisini $g_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ile gösterirsek, $g_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ve $g_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ olur. O halde (2.1.4) ten $\mathbf{x} \in X_m$ için

$$g_1(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq g_1(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$$

ve

$$g_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \leq g_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$$

olur. Bu iki eşitsizlikten aşağıdaki yorum yapılabilir.

$(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ denge stratejileri iken, II. oyuncu $\mathbf{y}^*$ stratejisi ile oynarsa, I. oyuncunun elde edebileceği en büyük getiri $g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ dır ve I. oyuncu bu getirisini $\mathbf{x}^*$ stratejisi ile oynayarak elde edebilir. Benzer olarak I. oyuncu $\mathbf{x}^*$ stratejisi ile oynarsa II. oyuncunun elde edebileceği en büyük getiri $g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ dır ve II. oyuncu bu getirisini $\mathbf{y}^*$ stratejisi ile oynayarak elde edebilir.

Dolayısıyla $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ denge stratejilerinden her biri diğeri için tehdit oluşturacağından oyunculardan herhangi biri denge stratejilerinden kendine ait olanı seçtiğinde diğeri de daha fazla kaybetmemek için denge ikilisini oluşturan diğer stratejiyi seçmek zorunda kalır.

Şimdi de oyunun denge stratejileri ile oyunun çözümü arasındaki ilişkiyi ortaya koyan bir teorem vereceğiz.

Teorem 2.1.21. $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ *ikilisinin oyunun denge stratejileri olması için gerek ve yeter koşul* $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*,g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*))$ *üçlüsünün oyunun çözümü olmasıdır.*

Kanıt. $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ ikilisi oyunun denge stratejileri olsun. O halde Tanım 2.1.20 den $\mathbf{x} \in X_m$, $\mathbf{y} \in Y_n$ için

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})$$

olup bu eşitsizlikten

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$$

ve

$$g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \geq g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$$

olur. Teorem 2.1.16 gereğince $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*,g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*))$ üçlüsünün oyunun çözümü olduğu görülür.

Tersine $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*,g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*))$ üçlüsü oyunun çözümü olsun. O halde Teorem 2.1.16 dan keyfi $\mathbf{x} \in X_m$, $\mathbf{y} \in Y_n$ için

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$$

ve

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

olup bu iki eşitsizlikten

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

olduğu elde edilir. Bu ise Tanım 2.1.20 gereğince $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ ikilisinin denge stratejileri olması demektir. □

2.1.4 Baskın Stratejiler

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda stratejilerden herhangi biri diğer stratejilerden daha fazla veya eşit getiriye sahip olabilir. Her durumda daha az kazanç sağlayan stratejiler oyundan atılır. Atılan stratejiden her durumda daha fazla getiriye sahip olan stratejiyi *baskın strateji* olarak adlandıracağız.

Tanım 2.1.22. *Keyfi $j = 1, 2, \ldots, n$ için $g_{lj} \geq g_{sj}$ ise* I. *oyuncunun* I_l *stratejisi* I_s *stratejisine baskındır. Burada* I_l *stratejisine **baskın strateji**,* I_s *stratejisine de **bastırılan strateji** denir. Bu durum* $\mathrm{I}_l \geq \mathrm{I}_s$ *şeklinde gösterilir.*

Tanım 2.1.23. *Keyfi $i = 1, 2, \ldots, m$ için $g_{ir} \leq g_{ik}$ ise* II. *oyuncunun* II_r *stratejisi* II_k *stratejisine baskındır. Burada* II_r *stratejisine **baskın strateji**,* II_k *stratejisine de **bastırılan strateji** denir. Bu durum* $\mathrm{II}_r \geq \mathrm{II}_k$ *şeklinde gösterilir.*

Şimdi de bu tanımları yorumlayalım. Eğer I. oyuncunun I_l stratejisi I_s stratejisine baskın ise II. oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin I. oyuncu I_l stratejisi ile oynadığında kendisine I_s stratejisi ile elde edebileceği kazançtan daha fazla kazanç sağlar. Bir başka ifadeyle I. oyuncu I_s stratejisi ile oynarsa kendisine elde edebileceği kazançtan daha fazla kazanç sağlayamaz. Bu yüzden I. oyuncu I_l stratejisini kullanır. Benzer şekilde II. oyuncunun II_r stratejisi II_k stratejisine baskın ise I. oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin II. oyuncu II_r stratejisi ile oynadığında II_k stratejisi ile verebileceği kayıptan daha az kayıp verir. Bir başka ifadeyle II. oyuncu II_k stratejisi ile oynarsa II_r stratejisi ile verebileceği kayıptan daha fazla kayıp verir. Bu yüzden II. oyuncu II_r stratejisini kullanır.

Bu ifadelerden görüldüğü üzere baskın stratejiler oyunun çözümünü kolaylaştırır.

Tanım 2.1.24. *Verilen bir oyunda bastırılan strateji oyundan atıldıktan sonra oluşan oyuna **sadeleştirilmiş oyun** denir.*

Önerme 2.1.25. *Sadeleştirilmiş bir oyunun çözümü verilen oyunun da çözümüdür.*

Kanıt. Verilen oyunun getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \end{array}$$

olsun. $\mathrm{I}_2 \geq \mathrm{I}_1$ olduğunu kabul edelim. O halde $j = 1, 2, \dots, n$ için $g_{2j} \geq g_{1j}$ olur. Dolayısıyla I_1 stratejisi bastırılan strateji olduğundan getiri matrisinden çıkararak oyunu sadeleştirelim. O halde sadeleştirilmiş oyunun getiri matrisi

$$\mathbf{G_1} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_3 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ g_{31} & g_{32} & \dots & g_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix}_{(m-1)\times n} \end{array}$$

olur. $\mathbf{G}$ getiri matrisi ile verilen oyunda sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri kümesi X_m ve Y_n, $\mathbf{G_1}$ getiri matrisi ile verilen oyunda ise sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri kümesi X_m^s ve Y_n^s olsun. II. oyuncunun saf stratejilerinin sayısı değişmediğinden $Y_n^s = Y_n$ olur. Ayrıca $X_m^s = X_{m-1}$ dir.

$\mathbf{G}$ getiri matrisi ile verilen oyunda $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n$ karma stratejileri için oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j \tag{2.1.5}$$

dir. $\mathbf{G_1}$ getiri matrisi ile verilen oyunda yani sadeleştirilmiş oyunda $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m) \in X_m^s$ ve $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) \in Y_n^s$ karma stratejileri için oyunun getirisi

$$\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=2}^{m} \tilde{x}_i g_{ij} \tilde{y}_j \tag{2.1.6}$$

olur.

Sadeleştirilmiş oyunda sırasıyla I. ve II. oyuncunun optimal stratejileri $\tilde{\mathbf{x}}^* = (x_2^*, \dots, x_m^*) \in X_m^s$, $\tilde{\mathbf{y}}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) \in Y_n^s$ ve oyunun değeri de ν olsun.

Yani $\mathbf{G_1}$ getiri matrisi ile verilen oyunun çözümü $(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}}^*, \nu)$ olsun. O halde sadeleştirilmiş oyunun çözümü $(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}}^*, \nu)$ olduğundan Teorem 2.1.16 gereği

$$\text{keyfi} \quad \tilde{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_n^s \quad \text{için} \quad \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}}) \geq \nu$$

ve

$$\text{keyfi} \quad \tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X_m^s \quad \text{için} \quad \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}^*) \leq \nu$$

olur.

$\mathbf{G}$ getiri matrisi ile verilen oyunda ise sırasıyla I. ve II. oyuncunun optimal stratejileri $\mathbf{x}^* = (0, x_2^*, \ldots, x_m^*) \in X_m$ ve $\mathbf{y}^* = \tilde{\mathbf{y}}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) \in Y_n = Y_n^s$ olsun. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsünün $\mathbf{G}$ getiri matrisi ile verilen oyunun çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için önce

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_n \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$$

olduğunu gösterelim. Keyfi $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_n$ alalım. $Y_n = Y_n^s$ olduğundan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_n^s$ olur. $\mathbf{x}^* = (0, x_2^*, \ldots, x_m^*) \in X_m$, $\tilde{\mathbf{x}}^* = (x_2^*, \ldots, x_m^*) \in X_m^s$ olduğundan (2.1.5) ve (2.1.6) dan

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i^* g_{ij} y_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=2}^{m} x_i^* g_{ij} y_j \\ &= \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \mathbf{y}) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

olur. $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}})$ olup ve $\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}}) \geq \nu$ olduğundan $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$ olduğu elde edilir.

Şimdi de

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X_m \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$$

olduğunu gösterelim. Keyfi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X_m$ alalım.

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j^* \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_1 g_{1j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} x_2 g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=3}^{m} x_i g_{ij} y_j^* \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

dir. $\mathrm{I}_2 \geq \mathrm{I}_1$ olup keyfi $j = 1, 2, \ldots, n$ için $g_{2j} \geq g_{1j}$ olduğundan ve (2.1.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) &\leq \sum_{j=1}^{n} x_1 g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} x_2 g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=3}^{m} x_i g_{ij} y_j^* \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (x_1 + x_2) g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=3}^{m} x_i g_{ij} y_j^* \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

olur.

$\tilde{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_m)$ olsun. Ayrıca $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_m) \in X_m^s$ olur. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \in X_m$ keyfi sabitlenmiş olduğundan $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_m) \in X_m^s$ de keyfi olur. $\tilde{\mathbf{y}}^* = \mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) \in Y_n = Y_n^s$ olup (2.1.6) gereği ve $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_m)$ den

$$\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}^*) = \sum_{j=1}^{n} (x_1 + x_2) g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=3}^{m} x_i g_{ij} y_j^* \tag{2.1.9}$$

olur.

O halde (2.1.8) ve (2.1.9) dan

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}^*) \leq \nu$$

elde edilir.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \in X_m$ keyfi seçildiğinden $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$ olduğu elde edilir. Teorem 2.1.16 gereği $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$ ve $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$ olup $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsü $\mathbf{G}$ getiri matrisi ile verilen oyunun çözümü olarak elde edilir. □

Önerme 2.1.25 ten görüldüğü üzere sadeleştirilmiş bir oyunun çözümü verilen oyunun çözümü olup oyunun sadeleştirilmesi oyunun çözümünü kolaylaştıracağından öncelikle oyun sadeleştirilebiliyorsa sadeleştirilmelidir. Fakat bu önermenin tersi doğru değildir. Şimdi bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 2.1.26. *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunu ele alalım.

$\mathrm{II}_1 \geq \mathrm{II}_2$ *olduğundan oyunu sadeleştirirsek yani* II_2 *stratejisini çıkarırsak sadeleştirilmiş oyunun matrisi*

$$\mathbf{G}_1 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{II}_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

olur.

Getiri matrisi $\mathbf{G}_1$ *olan oyunda* $\mathrm{I}_1 \geq \mathrm{I}_2$ *olduğundan bu oyunu da sadeleştirirsek yani* I_2 *stratejisini çıkarırsak yeni oyunun getiri matrisi*

$$\mathbf{G}_2 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{II}_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

olur.

Dolayısıyla $\mathbf{G}_2$ *olan oyunda her oyuncunun tek stratejisi olup bu oyunun çözümü* $(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_1, 1)$ *olarak bulunur.*

Şimdi de getiri matrisi $\mathbf{G}$ *olan oyunun çözümünü bulalım. Sırasıyla* I. *ve* II. *oyuncunun* $\mathbf{x} = (x, 1-x) \in X_2$ *ve* $\mathbf{y} = (y, 1-y) \in Y_2$ *karma stratejileri için oyunun getirisi*

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 1 \cdot xy + 1 \cdot x(1-y) + (-1) \cdot (1-x)y + 0 \cdot (1-x)(1-y) \\ &= xy + x - xy - y + xy \\ &= x - y + xy \end{aligned}$$

olur. Oyunun değeri

$$\begin{aligned} \nu = \min_{\mathbf{y}\in Y_2} \max_{\mathbf{x}\in X_2} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} [x - y + xy] \\ &= \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} [x(1+y) - y] \\ &= \min_{y\in[0,1]} [(1+y) - y] \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur.

Şimdi de $\mathbf{x}^* = (1, 0) \in X_2$ *ve keyfi* $\mathbf{y} = (y, 1-y) \in Y_2,\ y \in [0, 1]$ *stratejilerini alalım. O halde* $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x - y + xy$ *den*

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = 1 - y + y = 1$$

bulunur. Keyfi $\mathbf{y} \in Y_2$ *için* $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq 1$ *olur.*

Şimdi ise keyfi $\mathbf{y}^* = (y^*, 1-y^*) \in Y_2$ *ve keyfi* $\mathbf{x} = (x, 1-x)$ *alalım. O halde* $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x - y + xy$ *den*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = x - y^* + xy^* \leq 1 - y^* + y^* = 1$$

olur. Böylece son eşitsizlikten keyfi $\mathbf{x} \in X_2$ *için* $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq 1$ *elde edilir.*

Dolayısıyla $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq 1$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq 1$ *olup Teorem 2.1.16 dan* $\mathbf{x}^* = (1, 0) \in X_2$ *ve keyfi* $\mathbf{y}^* = (y^*, 1-y^*) \in Y_2$ *stratejileri için* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, 1)$ *(veya* $(\mathrm{I}_1, \mathbf{y}^*, 1)$*) üçlüsü* $\mathbf{G}$ *getiri matrisi ile verilen oyunun çözümü olur. Fakat sadeleştirilmiş oyunun tek çözümü* $(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_1, 1)$ *üçlüsüdür.*

Tanım 2.1.27. *Keyfi* $j = 1, 2, \ldots, n$ *için* $g_{lj} > g_{sj}$ *ise* I. *oyuncunun* I_l *stratejisi* I_s *stratejisine kesin baskındır. Burada* I_l *stratejisine* ***kesin baskın strateji****,* I_s *stratejisine de* ***kesin bastırılan strateji*** *denir. Benzer şekilde keyfi* $i = 1, 2, \ldots, m$ *için* $g_{ir} < g_{ik}$ *ise* II. *oyuncunun* II_r *stratejisi* II_k *stratejisine kesin baskındır. Burada* II_r *stratejisine* ***kesin baskın strateji****,* II_k *stratejisine de* ***kesin bastırılan strateji*** *denir.*

Önerme 2.1.28. *Bir oyunda kesin bastırılan strateji atılırsa, oyunun çözümü sadeleştirilmiş oyunun da çözümü olur.*

2.1.5 Gereken Stratejiler

İki kişilik sıfır toplamlı $m \times n$ matris oyunun çözümü $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ olsun. Burada I. oyuncunun optimal stratejisinin $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*) \in X_m$, II. oyuncunun optimal stratejisinin $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) \in Y_n$ ve oyunun değerinin ν olduğunu biliyoruz. Şimdi I. ve II. oyuncu için gereken strateji kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.1.29. I. *oyuncunun* $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*) \in X_m$ *optimal stratejisinde* $x_{i_*}^* > 0$ *ise* I_{i_*} *saf stratejisine* I. *oyuncunun* ***gereken (öz) stratejisi*** *denir.*

Tanım 2.1.30. II. *oyuncunun* $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) \in Y_n$ *optimal stratejisinde* $y_{j_*}^* > 0$ *ise* II_{j_*} *saf stratejisine* II. *oyuncunun* ***gereken (öz) stratejisi*** *denir.*

Sıradaki teorem bize I. oyuncu $\mathbf{x}^*$ optimal stratejisi ile oynarken II. oyuncu gereken II_{j_*} stratejisi ile oynarsa oyunun getirisinin verilen oyunun değerine eşit olacağını veya benzer olarak II. oyuncu $\mathbf{y}^*$ optimal stratejisi ile oynarken I. oyuncu gereken I_{i_*} stratejisi ile oynarsa oyunun getirisinin verilen oyunun değerine eşit olacağını ifade etmektedir.

Teorem 2.1.31. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ *üçlüsü* $m \times n$ *matris oyununun çözümü,* I_{i_*} *ve* II_{j_*} *stratejileri de sırasıyla* I. *ve* II. *oyuncunun gereken stratejileri olsun. Bu durumda*

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu$$

ve

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = g(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_{j_*}) = \nu$$

olur.

Kanıt. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ oyunun çözümü olduğundan, $\mathbf{x}^* \in X_m$ stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi, $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi ve ν oyunun değeri olur.

$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ olsun. Genelliği bozmadan, keyfi $i = 1, 2, \ldots, k$ $(k \le m)$ için $x_i^* > 0$ olmak üzere

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, 0, \ldots, 0)$$

olduğunu kabul edelim. Yani $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ optimal stratejisinde saf stratejilerin sıra numaralarını değiştirerek gereken stratejileri ilk sıraya alalım. Keyfi $1 \le i_* \le k$ alalım. O halde I_{i_*} stratejisi I. oyuncunun gereken stratejisidir ve gereken strateji tanımı gereği $x_{i_*}^* > 0$ olur.

Şimdi $g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu$ olduğunu kanıtlayalım. $g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \neq \nu$ olduğunu kabul edelim. $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi olduğundan

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$$

olur. Bu eşitsizlikte $\mathbf{x} \in X_m$ stratejilerini saf stratejiler alırsak

$$\text{keyfi} \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{için} \quad g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}^*) \leq \nu \tag{2.1.10}$$

elde ederiz. Ayrıca $g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \neq \nu$ kabulünden ve (2.1.10) dan

$$g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu_* < \nu \tag{2.1.11}$$

olduğu bulunur.

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ oyunun çözümü olduğundan, Sonuç 2.1.17 gereği

$$\nu = g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \tag{2.1.12}$$

dir. (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12) den ve $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, 0, \ldots, 0), x_{i_*}^* > 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\nu &= g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i^* g_{ij} y_j^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^* g_{ij} y_j^* \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_i^* g_{ij} y_j^* = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j^* \right) x_i^* \\
&= \sum_{i=1}^{k} g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}^*) x_i^* \\
&= g(\mathrm{I}_1, \mathbf{y}^*) x_1^* + \ldots + g(\mathrm{I}_{i*}, \mathbf{y}^*) x_{i*}^* + \ldots + g(\mathrm{I}_k, \mathbf{y}^*) x_k^* \\
&\leq \nu x_1^* + \ldots + \nu_* x_{i*}^* + \ldots + \nu x_k^* \\
&< \nu x_1^* + \ldots + \nu x_{i*}^* + \ldots + \nu x_k^* = \nu
\end{aligned}$$

olup $\nu < \nu$ elde edilir. Bu ise mümkün değildir. O halde varsayımımız doğru değildir. Yani $g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu$ olmalıdır.

II. oyuncunun gereken II_{j_*} stratejisi için de $g(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_{j_*}) = \nu$ olduğu benzer şekilde kanıtlanır. □

2.2 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Sonlu Oyunların Çözümü

Bu bölümde ilk olarak kesin tanımlı matris oyunlar ifade edilecek ve çözümü ele alınacaktır. Ardından 2×2 matris oyunların çözümü incelenecektir. Daha sonra da $2 \times n$ matris oyunların çözümünü bulmak için kullanılan grafik yöntem verilecektir. Son olarak da lineer programlama yöntemi yardımıyla $m \times n$ matris oyunların çözümünü bulmak için bir yöntem verilecektir.

2.2.1 Kesin Tanımlı Matris Oyunların Çözümü

Tanım 2.2.1. *Denge noktası olan matris oyunlara* ***kesin tanımlı matris oyunlar*** *denir.*

Getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \ldots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen $m \times n$ matris oyununda i. satırın minimum değeri j. sütunun maksimum değeri olduğunda elde edilen g_{ij} getirisi oyunun denge noktasıdır. g_{ij} denge noktası kesin tanımlı oyunun değeri olup $g_{ij} = \nu$, I. oyuncunun optimal stratejisi I_i, II. oyuncunun optimal stratejisi II_j stratejisi olmak üzere $(\mathrm{I}_i, \mathrm{II}_j, \nu)$ üçlüsü kesin tanımlı matris oyunların çözümü olur.

Örnek 2.2.2. *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 & \mathrm{II}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunu ele alalım.

I. *oyuncu kazanmayı hedeflediğinden kendisi için her bir satırdaki minimum değer arasından maksimum olanını seçecektir. O halde her bir satırın minimum değeri sırasıyla 2,0,-7 olmak üzere* I. *oyuncu bu değerler arasından maksimum olan 2 getirisini sağlayacak* I_1 *stratejisini seçer. Bu durumda* II. *oyuncu da kaybını en aza indirmek için her bir sütundaki maksimum değer arasından* *minimum olanını seçecektir. Sütunlardaki maksimum değerler 8,4,2,6 olmak üzere* II. *oyuncu bu değerler arasından minimum olan 2 getirisini sağlayacak* II_3 *stratejisini seçer. O halde oyunda bir denge noktası vardır. Böylece oyunun değeri olan 2 getirisini elde etmek için* I. *oyuncu* I_1 *stratejisini,* II *oyuncu da* II_3 *stratejisini kullanacaklardır.*

Kısaca ifade edecek olursak, g_{13} *getirisi birinci satırın minimumu iken üçüncü sütunun maksimumudur. Dolayısıyla denge noktası vardır ve oyun kesin tanımlı bir oyundur. Oyunun değeri de* $\nu = 2$ *dir.* I. *oyuncunun optimal stratejisi* I_1 *ve* II *oyuncunun optimal stratejisi de* II_3 *olmak üzere* $(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_3, 2)$ *üçlüsü kesin tanımlı matris oyunun çözümü olarak bulunur.*

2.2.2 2×2 Matris Oyunların Çözümü

Getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.2.13}$$

ile verilen 2×2 matris oyununu ele alalım. Bu oyunu çözebilmek için denge noktasının olup olmadığına bakılır. Eğer denge noktası yoksa çözüm şu şekilde bulunur [20].

$g_{11} \geq g_{12}$ ise $g_{12} < g_{22}$ dir. Aksi takdirde g_{12} denge noktası olur. $g_{12} < g_{22}$ olduğu için $g_{22} > g_{21}$ olmalıdır. Aksi takdirde g_{22} denge noktası olur. Dolayısıyla $g_{21} < g_{11}$ ve $g_{11} > g_{12}$ olduğunu görürüz. Bu ise denge noktası olmadığında hem $g_{11} > g_{12}$, $g_{12} < g_{22}$, $g_{22} > g_{21}$, $g_{21} < g_{11}$ hem de $g_{11} < g_{12}$, $g_{12} > g_{22}$, $g_{22} < g_{21}$, $g_{21} > g_{11}$ olduğunu gösterir.

II. oyuncu tarafından seçilen strateji ne olursa olsun I. oyuncu kendi getirisini değiştirmeyecek $\mathbf{x} = (x, 1-x)$ karma stratejisini kullanır. Bu durumda

$$g_{11} \cdot x + g_{21} \cdot (1-x) = g_{12} \cdot x + g_{22} \cdot (1-x)$$

olur. Bu eşitlikten x değeri

$$x = \frac{g_{22} - g_{21}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})}$$

olarak bulunur.

Burada denge noktası olmadığı için $(g_{11} - g_{12})$ ve $(g_{22} - g_{21})$ nin her ikisi de pozitif veya negatiftir. Dolayısıyla $0 < x < 1$ dir. Buradan I. oyuncunun getirisi

$$\nu = g_{11} \cdot x + g_{21} \cdot (1 - x) = \frac{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})}$$

dir.

Benzer şekilde I. oyuncu tarafından seçilen strateji ne olursa olsun II. oyuncu kendi getirisini değiştirmeyecek $\mathbf{y} = (y, 1 - y)$ karma stratejisini kullanır. Bu durumda

$$g_{11} \cdot y + g_{12} \cdot (1 - y) = g_{21} \cdot y + g_{22} \cdot (1 - y)$$

olur. Bu eşitlikten y değeri

$$y = \frac{g_{22} - g_{12}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})}$$

olarak bulunur ve $0 < y < 1$ dir. II. oyuncunun getirisi I. oyuncu tarafından elde edilen getiri ile aynı olur. Yani,

$$g_{11} \cdot y + g_{12} \cdot (1 - y) = \frac{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})} = \nu$$

olur.

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ optimal stratejiler, ν de oyunun değeri olmak üzere $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu)$ üçlüsü getiri matrisi (2.2.13) ile verilen 2×2 matris oyununun çözümü olur.

Örnek 2.2.3.

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen 2×2 *matris oyununu ele alalım.*

İlk önce bu oyunun denge noktasının olup olmadığına bakmalıyız. I. *oyuncu için satırlardaki minimum değerler sırasıyla* -1 *ve* -5 *tir. Bu değerlerden maksimum olanı -1 dir.* II. *oyuncu için ise sütunlardaki maksimum değerlerin her ikisi de 2 dir. Yani bu oyunda denge noktası yoktur. O halde*

$$x = \frac{g_{22} - g_{21}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})} = \frac{-5 - 2}{(-1 - 2) + (-5 - 2)} = \frac{7}{10}$$

$$y = \frac{g_{22} - g_{12}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})} = \frac{-5 - 2}{(-1 - 2) + (-5 - 2)} = \frac{7}{10}$$

$$\nu = \frac{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})} = \frac{(-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 2}{(-1-2) + (-5-2)} = \frac{1}{10}$$

olup oyunun çözümü

$$\left(\mathbf{x} = \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right), \mathbf{y} = \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right), \frac{1}{10}\right)$$

olur.

2.2.3 $2 \times n$ Matris Oyunların Çözümü

Bu bölümde öncelikle $m \times n$ matris oyunların çözüm yönteminde kullanılan ve oyunun değerini karakterize eden bir önerme verilecektir. Daha sonra $2 \times n$ oyunların çözümünde kullanılan grafik yöntem ele alınacaktır [21].

Önerme 2.2.4. *ν sayısı iki kişilik sıfır toplamlı $m \times n$ oyunun değeri olsun. O halde*

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\ldots,n} g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) = \nu \tag{2.2.14}$$

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{i=1,2,\ldots,m} g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) = \nu \tag{2.2.15}$$

eşitlikleri doğrudur.

Kanıt. Ele aldığımız $m \times n$ oyunun çözümü $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ olsun. O halde

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu \tag{2.2.16}$$

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu \tag{2.2.17}$$

olur. Ayrıca Teorem 2.1.12 den

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu \tag{2.2.18}$$

olduğunu biliyoruz. Keyfi $j = 1, 2, \ldots, n$ için II_j saf stratejisi Y_n karma stratejiler kümesine ait olduğundan (2.2.16) eşitsizliğinden

$$g(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_j) \geq \nu$$

bulunur. O halde

$$\min_{j=1,2,\ldots,n} g(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_j) \geq \nu$$

olup buradan

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\ldots,n} g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) \geq \nu \tag{2.2.19}$$

olduğu elde edilir. Şimdi

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\ldots,n} g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) = \nu \tag{2.2.20}$$

olduğunu kanıtlayalım. Bu eşitliğin doğru olmadığını varsayalım. O halde (2.2.19) dan

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{j=1,2,\ldots,n} g(\mathbf{x},\mathrm{II}_j)=\nu_*>\nu$$

olur. Bu durumda

$$\min_{j=1,2,\ldots,n} g(\tilde{\mathbf{x}},\mathrm{II}_j)=\nu_*>\nu$$

olacak şekilde $\tilde{\mathbf{x}}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_m)\in X_m$ vardır. Buradan

$$\text{keyfi}\quad j=1,2,\ldots,n\quad \text{için}\quad g(\tilde{\mathbf{x}},\mathrm{II}_j)\geq\nu_*>\nu \tag{2.2.21}$$

bulunur. Şimdi keyfi $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in Y_n$ stratejisini alalım. Getiri tanımından ve (2.2.21) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} g(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{y}) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_i g_{ij} y_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_i g_{ij}\right)y_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(\tilde{\mathbf{x}},\mathrm{II}_j)y_j\geq\sum_{j=1}^{n}\nu_*.y_j=\nu_* \end{aligned}$$

olur. Yani

$$\text{keyfi}\quad \mathbf{y}\in Y_n\quad \text{için}\quad g(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{y})\geq\nu_* \tag{2.2.22}$$

olur. $\nu^*>\nu$ olduğundan, (2.2.17) den

$$\text{keyfi}\quad \mathbf{x}\in X_m\quad \text{için}\quad g(\mathbf{x},\mathbf{y}^*)\leq\nu_* \tag{2.2.23}$$

bulunur. O halde (2.2.22), (2.2.23) ve Teorem 2.1.16 dan $(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{y}^*,\nu_*)$ üçlüsünün verilen oyunun çözümü olduğu elde edilir. Böylece $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*,\nu)$ ve $(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{y}^*,\nu_*)$ üçlüleri verilen oyunun çözümü olur. Oyunun değeri tek olduğundan $\nu=\nu_*$ olur. Bu ise $\nu_*>\nu$ olması ile çelişir. O halde varsayımımız doğru değildir ve (2.2.20) eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla (2.2.20) ve (2.2.18) den (2.2.14) eşitliğinin doğruluğu elde edilir.

(2.2.15) eşitliğinin doğruluğu da benzer şekilde kanıtlanır. □

Şimdi $2\times n$ oyunların çözümünü bulmak için kullanılan bir grafik yöntem verelim. Getiri matrisi

$$\mathbf{G}=\begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \ldots & \mathrm{II}_n\end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \ldots & g_{2n}\end{pmatrix}\end{array} \tag{2.2.24}$$

ile verilen iki kişilik sıfır toplamlı $2\times n$ oyununu ele alalım. Oyunun değeri ν_* olsun.

I. oyuncunun iki tane saf stratejisi olduğundan karma stratejisi $\mathbf{x} = (x, 1-x)$, $x \in [0,1]$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda keyfi $j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) = g_{1j}x + g_{2j}(1-x), \quad x \in [0,1]$$

olduğu elde edilir. Keyfi $j = 1, 2, \ldots, n$ için $\varphi_j(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\varphi_j(x) = g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j)$$

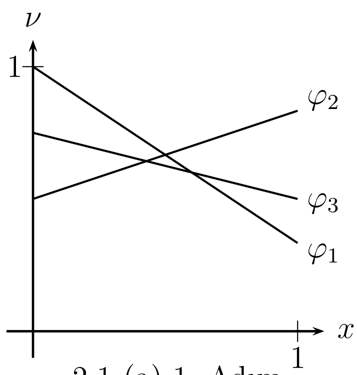
şeklinde gösterirsek

$$\varphi_j(x) = g_{1j}x + g_{2j}(1-x), \quad x \in [0,1]$$

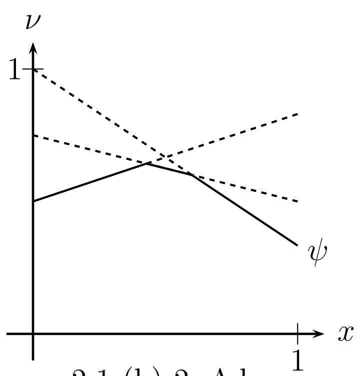
olur. Önerme 2.2.4 ten

$$\nu_* = \max_{\mathbf{x} \in X_2} \min_{j=1,2,\ldots,n} g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) = \max_{\mathbf{x} \in [0,1]} \min_{j=1,2,\ldots,n} \varphi_j(x)$$

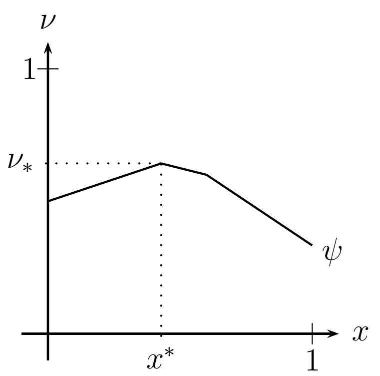
olup ν_* sayısı getiri matrisi (2.2.24) ile verilen oyunun değeri olur.



2.1 (a) 1. Adım



2.1 (b) 2. Adım



2.1 (c) 3. ve 4. Adımlar

Şekil 2.1: Oyunun çözümünü bulmak için bir grafik yöntem

Şimdi (2.2.24) getiri matrisi ile verilen oyunun çözümünü bulabilmek için grafik yöntemin adımlarını verelim.

1. Adım $Ox\nu$ düzleminde keyfi $j = 1, 2, \dots, n$ için $\varphi_j(\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim (Şekil 2.1(a)).

2. Adım Her $x \in [0, 1]$ için

$$\psi(x) = \min_{j=1,2,\dots,n} \varphi_j(x)$$

olmak üzere $\psi(\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. (Şekil 2.1(b)).

3. Adım $\psi(\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ foksiyonunun grafiğini kullanarak, bu fonksiyonun [0,1] aralığındaki maksimumu $\nu_* = \max\limits_{x\in[0,1]} \psi(x)$ bulunur (Şekil 2.1(c)). Dolayısıyla getiri matrisi (2.2.24) ile verilen oyunun değeri elde edilmiş olur.

4. Adım $\psi(\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiğini kullanarak, bu fonksiyona $[0, 1]$ aralığında maksimum değerini veren $x^* \in [0, 1]$ sayısı bulunur (Şekil 2.1(c)). Dolayısıyla ν_* oyunun değeri olmak üzere

$$\nu_* = \max_{x\in[0,1]} \psi(x) = \max_{x\in[0,1]} \min_{j=1,2,\dots,n} \varphi_j(x) = \min_{j=1,2,\dots,n} \varphi_j(x^*)$$

olduğundan $\mathbf{x}^* = (x^*, 1-x^*) \in X_2$ karma stratejisi verilen oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

5. Adım II. oyuncunun optimal stratejisi bulunur.

$$J_* = \{j : g(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_j) = \nu_*\}$$

olsun. $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ stratejisi II. oyuncunun karma optimal stratejisi olduğunu kabul edelim. Eğer II_{j_*} saf stratejisi II. oyuncunun gereken stratejisi ise Teorem 2.1.31 gereği $g(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_{j_*}) = \nu_*$ olduğundan $j_* \in J_*$ olur. $j \notin J_*$ için II. oyuncunun II_j stratejisi gereken strateji değildir. O halde II_j gereken strateji olmadığında Tanım 2.1.30 gereği $y_j = 0$ olur.

I. oyuncunun $\mathbf{x}^* = (x^*, 1 - x^*) \in X_2$ optimal stratejisinde x^* ve $1 - x^*$ sayılarından en az biri veya her ikisi de aynı anda sıfırdan farklı olur. Bu durumda

$$I_* = \begin{cases} \{2\} & , \quad x^* = 0 \quad \text{ise} \\ \{1,2\} & , \quad x^* \in (0,1) \quad \text{ise} \\ \{1\} & , \quad x^* = 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olmak üzere Tanım 2.1.29 gereği I. oyuncunun $i \in I_*$ indisine karşılık I_i saf stratejisi, gereken strateji olur. Böylece Teorem 2.1.31 gereği keyfi $i_* \in I_*$ için

$$g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu_*$$

olur. Bu eşitlik yardımıyla II. oyuncunun $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ karma optimal stratejisi elde edilir.

Şimdi grafik yöntemi daha iyi anlayabilmek için bir örnek verelim.

Örnek 2.2.5.

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 & \mathrm{II}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen 2×4 *oyununun çözümünü bulalım.*

Öncelikle verilen oyunun sadeleştirilip sadeleştirilmediğine bakalım. Oyunda $\mathrm{II}_3 > \mathrm{II}_4$ *olduğundan oyun sadeleştirilirse getiri matrisi*

$$\mathbf{G_1} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

olan oyunu elde ederiz. O halde şimdi bu oyunun çözümünü bulalım.

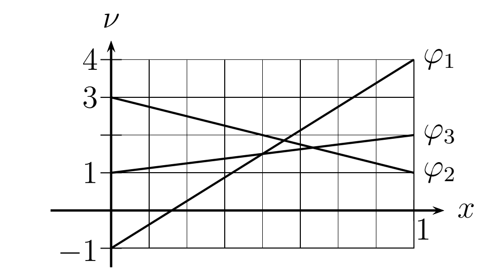
I. *oyuncunun* $\mathbf{x} = (x, 1-x) \in X_2,\ x \in [0,1]$ *karma stratejisi ve* II. *oyuncunun saf* $\mathrm{II}_j,\ j = 1,2,3$ *stratejileri için* $\varphi_j(x) = g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j)$ *fonksiyonlarını hesaplayalım.*

$$\varphi_1(x) = g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_1) = 4 \cdot x + (-1) \cdot (1-x) = -1 + 5x \quad , \quad x \in [0,1]$$

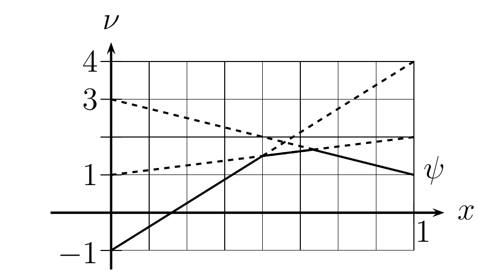
$$\varphi_2(x) = g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_2) = 1 \cdot x + 3 \cdot (1-x) = 3 - 2x \quad , \quad x \in [0,1]$$

$$\varphi_3(x) = g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_3) = 2 \cdot x + 1 \cdot (1-x) = 1 + x \quad , \quad x \in [0,1]$$

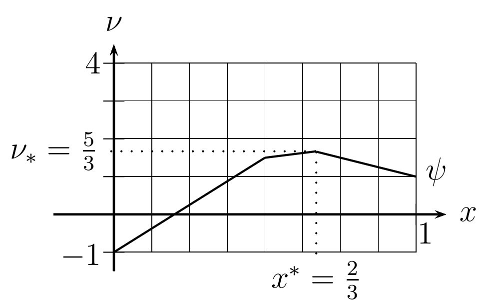
bulunur.



2.2 (a) 1. Adım



2.2 (b) 2. Adım



2.2 (c) 3. ve 4. Adımlar

Şekil 2.2: Getiri matrisi $\mathbf{G_1}$ olan oyunun grafik yöntemiyle çözümü

1. Adım $\varphi_j(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R},\ j = 1,2,3$ *fonksiyonlarının grafiklerini çizelim* (Şekil 2.2 (a)).

2. Adım *Her* $x \in [0,1]$ *için*

$$\psi(x) = \min_{j=1,2} \varphi_j(x)$$

olmak üzere $\psi(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun grafiğini çizelim.* Şekil 2.2 (b) *den görüldüğü gibi*

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \quad ise \\ \varphi_3(x) & , \quad x \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \quad ise \\ \varphi_2(x) & , \quad x \in (\frac{2}{3}, 1] \quad ise \end{cases}$$

yani

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 + 5x & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \quad ise \\ 1 + x & , \quad x \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \quad ise \\ 3 - 2x & , \quad x \in (\frac{2}{3}, 1] \quad ise \end{cases} \tag{2.2.25}$$

olur (Şekil 2.2 (b)).

3. Adım (2.2.25) *ile verilen* $\psi(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun grafiğini kullanarak* (Şekil 2.2 (c)), *bu fonksiyonun* $[0,1]$ *aralığındaki maksimumu* $\nu_* = \max\limits_{x \in [0,1]} \psi(x)$ *değerini bulalım. Bu fonksiyon maksimum değerini* $x = \dfrac{2}{3}$ *noktasında alır ve bu* ν_* *değeri,* $\nu_* = \dfrac{5}{3}$ *olur. O halde* $\mathbf{G_1}$ *oyununun değeri* $\nu_* = \dfrac{5}{3}$ *olur.*

4. Adım *Şimdi de* $\psi(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna* $[0,1]$ *aralığında maksimum değerini veren* $x^* \in [0,1]$ *sayısını bulalım. Bu sayı* 3. Adım *da* ν_* *değerini hesaplarken bulunmuştu. Yani* Şekil 2.2 (c) *den de görüldüğü üzere* $x^* = \dfrac{2}{3}$ *olur. O halde getiri matrisi* $\mathbf{G_1}$ *olan oyunda* I. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{x}^* = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ *olur.*

5. Adım *Son olarak da* II. *oyuncunun optimal stratejisini bulalım.* Şekil 2.2 (c) *den*

$$g(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_2) = \frac{5}{3} \quad , \quad g(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_3) = \frac{5}{3}$$

yani $J_* = \{2,3\}$ *olur. Bir başka deyişle* II_2 *ve* II_3 *stratejileri* II. *oyuncunun gereken stratejileri olup,* II_1 *gereken strateji değildir. Bu durumda* II. *oyuncunun optimal stratejisi*

$$\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$$

şeklinde olur. Ayrıca I. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{x}^* = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \in X_2$ *olduğundan* I. *oyuncunun* I_1 *ve* I_2 *stratejileri gereken stratejilerdir. O halde*

$I_* = \{1, 2\}$ olur. $\mathbf{G_1}$ oyununun değeri $\nu_* = \dfrac{5}{3}$ olduğundan Teorem 2.1.31 gereği

$$g(\mathrm{I}_1, \mathbf{y}^*) = \frac{5}{3} \quad \textit{ve} \quad g(\mathrm{I}_2, \mathbf{y}^*) = \frac{5}{3}$$

ve $\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(\mathrm{I}_1, \mathbf{y}^*) &= 4 \cdot 0 + 1 \cdot y^* + 2 \cdot (1 - y^*) = 2 - y^* \\ g(\mathrm{I}_2, \mathbf{y}^*) &= (-1) \cdot 0 + 3 \cdot y^* + 1 \cdot (1 - y^*) = 1 + 2y^* \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$2 - y^* = \frac{5}{3} \quad \textit{ve} \quad 1 + 2y^* = \frac{5}{3}$$

elde edilir. Bu eşitlikler çözüldüğünde $y^* = \dfrac{1}{3}$ bulunur. Dolayısıyla $\mathbf{G_1}$ getiri matrisi ile verilen oyunda II. *oyuncunun optimal stratejisi $\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$ den*

$$\mathbf{y}^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

olarak elde edilir. Böylece getiri matrisi $\mathbf{G_1}$ olan oyunun çözümü

$$\left(\mathbf{x}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \mathbf{y}^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \frac{5}{3}\right)$$

üçlüsü olarak bulunur. Önerme 2.1.28 den

$$\left(\mathbf{x}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \mathbf{y}^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \frac{5}{3}\right)$$

üçlüsü getiri matrisi $\mathbf{G}$ ile verilen oyunun çözümü olur.

2.2.4 $m \times n$ Matris Oyunların Çözümü

Bu bölümde lineer programlama yöntemi yardımıyla iki kişilik sıfır toplamlı $m \times n$ oyunların çözümü için bir yöntem verilecektir [21].

Getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.2.26}$$

ile verilen $m \times n$ oyununu ele alalım. I. oyuncunun $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in$

X_m ve II. oyuncunun $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_n$ karma stratejileri için oyunun getirisinin

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j$$

olduğunu ve Teorem 2.1.16 dan $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu_*)$ üçlüsünün oyunun çözümü olması için gerek ve yeter koşulun

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu_*$$

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu_*$$

olduğunu biliyoruz. I. oyuncu herhangi bir $\mathbf{x} \in X_m$ stratejisini seçsin. II. oyuncu kendisi için en iyi strateji olan

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = \nu(\mathbf{x})$$

olacak şekilde $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in Y_n$ stratejisini seçer. I. oyuncunun amacı getirisini maksimalleştirmek olduğundan, I. oyuncu $\mathbf{x} \in X_m$ karma stratejilerini değiştirerek $\nu(\mathbf{x})$ sayısını maksimalleştirmeye, dolayısıyla

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \in X_m \\ \text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu \\ \nu \to \max \end{gathered} \tag{2.2.27}$$

problemini çözmeye çalışır. Şimdi (2.2.27) probleminin çözümü ile ilişkili bir önerme vereceğiz.

Önerme 2.2.6. $(\mathbf{x}^*, \nu_*)$ *ikilisi* (2.2.27) *probleminin çözümü olsun.* ν_* *sayısı getiri matrisi* (2.2.26) *ile verilen oyunun değeri,* $\mathbf{x}^* \in X_m$ *ise* I. *oyuncunun optimal stratejisidir.*

Kanıt. $(\mathbf{x}^*, \nu_*)$ ikilisi (2.2.27) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu_*$$

olur. Bu eşitsizlikten

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu_* \tag{2.2.28}$$

ve

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu_* \tag{2.2.29}$$

elde edilir. Şimdi

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \nu_*$$

olduğunu kanıtlayalım. Aksini varsayalım. O halde (2.2.29) dan

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \nu_1 > \nu_* \tag{2.2.30}$$

olacak şekilde bir ν_1 sayısı vardır. $x \to \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ fonksiyonu sürekli olduğundan (2.2.30) dan

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^1,\mathbf{y}) = \nu_1 > \nu_*$$

olacak şekilde $\mathbf{x}^1 \in X_m$ vardır. Buradan

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{y}\in Y_n \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}^1,\mathbf{y}) \geq \nu_1 > \nu_*$$

olur. Bu ise $(\mathbf{x}^*, \nu_*)$ ikilisinin (2.2.27) probleminin çözümü olması ile çelişir. O halde varsayımımız doğru değildir. Yani

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \nu_*$$

eşitliği geçerlidir. ν_* sayısı getiri matrisi (2.2.26) ile verilen oyunun değeridir.

Şimdi de $\mathbf{x}^* \in X_m$ stratejisinin I. oyuncunun optimal stratejisi olduğunu kanıtlayalım. Bunun için

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = \nu_*$$

olduğunu göstermeliyiz. Yine aksini varsayalım. O halde (2.2.28) den

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^1,\mathbf{y}) = \nu_1 > \nu_*$$

olacak şekilde $\mathbf{x}^1 \in X_m$ vardır. Buradan

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq \nu_1 > \nu_*$$

olduğu elde edilir. Bu ise ν_* sayısının oyunun değeri olması ile çelişir. O halde varsayımımız doğru değildir. Yani

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = \nu_*$$

eşitliği geçerlidir. ν_* sayısı oyunun değeri olduğu için $\mathbf{x}^* \in X_m$ stratejisinin I. oyuncunun optimal stratejisi olduğu bulunur. □

Önerme 2.2.7. *$\mathbf{x} \in X_m$ olsun. Keyfi $\mathbf{y} \in Y_n$ için $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq \nu$ olması için gerek ve yeter koşul keyfi $j = 1, 2, \ldots, n$ için $g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) \geq \nu$ olmasıdır.*

Kanıt. Keyfi $\mathbf{y} \in Y_n$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu$ olsun. Her I_i saf stratejisi (sadece i. koordinat 1) $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ karma stratejisi ile eşlenebilir. Bir başka deyişle, saf stratejiler karma stratejiler kümesine ait olduğundan keyfi $j = 1, 2, \ldots, n$ için $g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) \geq \nu$ olur.

Şimdi keyfi $j = 1, 2, \ldots, n$ için $g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) \geq \nu$ olsun. Keyfi $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_n$ karma stratejisini alalım ve sabitleyelim. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X_m$ olup

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} \right) y_j = \sum_{j=1}^{n} g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) y_j \geq \sum_{j=1}^{n} \nu y_j = \nu \end{aligned}$$

olur. Yani keyfi $\mathbf{y} \in Y_n$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu$ elde edilir. $\square$

Bu önerme gereği (2.2.27) problemi

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \in X_m \\ \text{keyfi } j = 1, 2, \ldots, n \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) \geq \nu \\ \nu \to \max \end{gathered} \tag{2.2.31}$$

problemine denk olur.

$$X_m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) : \forall i = 1, 2, \ldots, m \text{ için } x_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

ve

$$g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) = \sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_i$$

olduğundan (2.2.31) problemini

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_i &\geq \nu \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \nu &\to \max \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

olarak ifade edebiliriz.

Keyfi $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $g_{ij} > 0$ ise $\nu > 0$ olarak alınabilir. Eğer $g_{ij} > 0$ değilse $r + g_{ij} > 0$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı bulunabilir. Önerme 2.1.19 dan (2.2.26) getiri matrisindeki tüm g_{ij} sayılarının aynı r sayısı ile toplanmasının oyunun optimal (veya denge) stratejilerini değiştirmeyeceğini sadece oyunun değerini r sayısı kadar değiştireceğini biliyoruz. Bu nedenle genelliği bozmadan $\nu > 0$ olduğunu kabul edelim. O halde (2.2.32) problemi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\nu} &= \frac{1}{\nu} \\ \frac{x_i}{\nu} &\geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij} \frac{x_i}{\nu} &\geq 1 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \nu &\to \max \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer $i = 1, 2, \ldots, m$ için $X_i = \dfrac{x_i}{\nu}$ dersek (2.2.33) problemi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} X_i &= \frac{1}{\nu} \\ X_i &\geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij} X_i &\geq 1 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \nu &\to \max \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

problemine denk olur.

Pozitif ν sayısının maksimalleştirilmesi $\dfrac{1}{\nu}$ sayısının minimalleştirilmesine denk olduğundan (2.2.34) problemi standart şekilde verilen

$$\begin{gathered} \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} X_i \right\} \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij} X_i \geq 1 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ X_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{gathered} \tag{2.2.35}$$

lineer programlama problemi olarak yazılabilir.

$\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_m^*)$ olmak üzere $(\mathbf{X}^*, r^*)$ ikilisi (2.2.35) probleminin çözümü olsun. Bu durumda $\mathbf{x}^* = (\nu_* X_1^*, \nu_* X_2^*, \ldots, \nu_* X_m^*)$, $\nu_* = \dfrac{1}{r^*}$ olmak üzere $(\mathbf{x}^*, \nu_*)$ ikilisi (2.2.27) probleminin çözümü olur. O halde $(\mathbf{x}^*, \nu_*)$ ikilisi (2.2.27) probleminin çözümü ise $\nu_* = \dfrac{1}{r^*}$ sayısı (2.2.26) ile verilen oyunun değeri, $\mathbf{x}^* = (\nu_* X_1^*, \nu_* X_2^*, \ldots, \nu_* X_m^*)$ stratejisi de I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Böylece aşağıdaki teoremi kanıtlamış bulunuyoruz.

Teorem 2.2.8. $(\mathbf{X}^*, r^*)$ *ikilisi* (2.2.35) *lineer programlama probleminin çözümü olsun.* $\mathbf{x}^* = (\nu_* X_1^*, \nu_* X_2^*, \ldots, \nu_* X_m^*) \in X_m$ *stratejisi getiri matrisi* (2.2.26) *olan oyunda* I. *oyuncunun optimal stratejisi ve* $\nu_* = \dfrac{1}{r^*}$ *sayısı da oyunun değeri olur.*

Böylece (2.2.26) getiri matrisi ile verilen oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi ve oyunun değeri (2.2.35) lineer programlama probleminin çözümü ile elde edilir.

Şimdi de II. oyuncunun optimal stratejisini bulalım. II. oyuncu herhangi bir $\mathbf{y} \in Y_n$ stratejisini seçsin. O halde I. oyuncu ise kendisi için en iyi olan

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y})$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{x}(\mathbf{y}) \in X_m$ stratejisini seçer. II. oyuncunun amacı getirileri minimalleştirmek olduğundan, II. oyuncu $\mathbf{y} \in Y_n$ karma stratejilerini değiştirerek $\mu(\mathbf{y})$ sayısını minimalleştirmeye çalışır. Dolayısıyla II. oyuncu

$$\begin{gathered} \mathbf{y} \in Y_n \\ \text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mu \\ \mu \to \min \end{gathered} \tag{2.2.36}$$

problemini çözmeye çalışır. Aşağıdaki önermeler, Önerme 2.2.6 ve Önerme 2.2.7 ye benzer olarak kanıtlanabilir.

Önerme 2.2.9. $(\mathbf{y}^*, \mu_*)$ *ikilisi* (2.2.36) *probleminin çözümü olsun.* μ_* *gerçel sayısı getiri matrisi* (2.2.26) *ile verilen oyunun değeri,* $\mathbf{y}^* \in Y_n$ *ise* II. *oyuncunun optimal stratejisidir.*

Önerme 2.2.10. $\mathbf{y} \in Y_n$ *olsun. Keyfi* $\mathbf{x} \in X_m$ *için* $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mu$ *olması için gerek ve yeter koşul keyfi* $i = 1, 2, \ldots, m$ *için* $g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) \leq \mu$ *olmasıdır.*

Önerme 2.2.10 gereği (2.2.36) problemi

$$\begin{gathered} \mathbf{y} \in Y_n \\ \text{keyfi } i = 1, 2, \ldots, m \text{ için } g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) \leq \mu \\ \mu \to \min \end{gathered} \tag{2.2.37}$$

problemine dönüşür.

$$Y_n = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) : \forall j = 1, 2, \ldots, n \text{ için } y_j \geq 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}$$

ve

$$g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j$$

olduğundan (2.2.37) problemini

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} y_j &= 1 \\ y_j &\geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j &\leq \mu \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \mu &\to \min \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

olarak ifade edebiliriz. Genelliği bozmadan $\mu > 0$ olduğunu kabul edelim. O halde (2.2.38) problemini

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{\mu} &= \frac{1}{\mu} \\ \frac{y_j}{\mu} &\geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \frac{y_j}{\mu} &\leq 1 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \mu &\to \min \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Eğer $j = 1, 2, \ldots, n$ için $Y_j = \dfrac{y_j}{\mu}$ dersek, (2.2.39) problemi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} Y_j &= \frac{1}{\mu} \\ Y_j &\geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{n} g_{ij} Y_j &\leq 1 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \mu &\to \min \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

şekline dönüşür.

Pozitif μ sayısının minimalleştirilmesi $\dfrac{1}{\mu}$ sayısının maksimalleştirilmesine denk olduğundan (2.2.40) problemi standart verilen

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} Y_j\right\}$$
$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}Y_j \leq 1 \quad , \quad i=1,2,\dots,m \tag{2.2.41}$$
$$Y_j \geq 0 \quad , \quad j=1,2,\dots,n$$

lineer programlama problemi olarak yazılabilir.

$\mathbf{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*)$ olmak üzere $(\mathbf{Y}^*, r_*)$ ikilisi (2.2.41) probleminin çözümü olsun. Bu durumda $\mathbf{y}^* = (\mu_* Y_1^*, \mu_* Y_2^*, \dots, \mu_* Y_n^*)$ ve $\mu_* = \dfrac{1}{r_*}$ olmak üzere $(\mathbf{y}^*, \mu_*)$ ikilisi (2.2.36) probleminin çözümü olur. O halde $(\mathbf{y}^*, \mu_*)$ ikilisi (2.2.36) probleminin çözümü ise $\mu_* = \dfrac{1}{r_*}$ sayısı getiri matrisi (2.2.26) ile verilen oyunun değeri, $\mathbf{y}^* = (\mu_* Y_1^*, \mu_* Y_2^*, \dots, \mu_* Y_n^*) \in Y_n$ stratejisi de II. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Böylece aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 2.2.11. $(\mathbf{Y}^*, r_*)$ *ikilisi* (2.2.41) *lineer programlama probleminin çözümü ise* $\mathbf{y}^* = (\mu_* Y_1^*, \mu_* Y_2^*, \dots, \mu_* Y_n^*) \in Y_n$ *stratejisi getiri matrisi* (2.2.26) *ile verilen oyunda* II. *oyuncunun optimal stratejisi ve* $\mu_* = \dfrac{1}{r_*}$ *sayısı da oyunun değeri olur.*

Böylece getrisi matrisi (2.2.26) olan oyunda II. oyuncunun optimal stratejisi ve oyunun değeri (2.2.41) lineer programlama probleminin çözümü yardımıyla bunulur.

Verilen bilgiler sonucunda $(\mathbf{X}^*, r^*)$ ikilisi (2.2.35), $(\mathbf{Y}^*, r_*)$ ikilisi de (2.2.41) lineer programlama problemlerinin çözümleri olsun. Bu durumda (2.2.35) ve (2.2.41) lineer programlama problemleri primal-dual çift olduğundan $r^* = r_*$ olur. O halde getiri matrisi (2.2.26) olan oyunun değeri, (2.2.35) ve (2.2.41) lineer programlama problemlerinin çözümüyle bulunan ve birbirine eşit olan r^* ve r_* sayılarından herhangi birinin çarpım tersi olarak bulunur. Yani

$$\nu_* = \mu_* = \frac{1}{r^*} = \frac{1}{r_*}$$

olur.

Dolayısıyla (2.2.35) ve (2.2.41) lineer programlama problemlerinden elde edilen $\mathbf{x}^* = (\nu_* X_1^*, \nu_* X_2^*, \dots, \nu_* X_m^*,) \in X_m$ I. oyuncunun optimal stratejisi,

$\mathbf{y}^* = (\mu_* Y_1^*, \mu_* Y_2^*, \ldots, \mu_* Y_n^*) \in Y_n$ de II. oyuncunun optimal stratejisi, (2.2.35) veya (2.2.41) lineer programlama problemlerinin herhangi birinin çözümünden elde edilen ν_* veya μ_* değeri de oyunun değeridir. Böylece (2.2.26) ile verilen oyunun çözümü $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu_* = \mu_*)$ olur.

3 ARALIK MATRİS OYUNLAR

Bu bölümde iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunların genişletilmiş hali olan aralık matris oyunlar araştırılacaktır. Aralık matris oyunlarının getiri matrisindeki elemanları aralıklar olacağından öncelikle aralık kavramını tanımlayıp ardından aralıklar üzerindeki işlemler ve aralık karşılaştırması ele alınacaktır.

3.1 Aralık Tanımı

Aralık, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin gerçel alt kümesi olarak ve bir gerçel sayının genişletilmesi olarak ifade edilmiştir [11].

Tanım 3.1.1. $\mathbb{R}$ *gerçel sayılar kümesi olmak üzere*

$$\tilde{A} = [\underline{a}, \overline{a}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{R}$ *gerçel sayılar kümesinin* $\tilde{A}$ *gerçel alt kümesine* ***aralık*** *denir.*

Burada $\underline{a}$ ve $\overline{a}$ gerçel sayıları sırasıyla $\tilde{A}$ aralığının alt ve üst sınırlarıdır. Eğer $\underline{a} = \overline{a}$ ise $\tilde{A} = [\underline{a}, \overline{a}]$ aralığı bir gerçel sayı olur. $\mathbb{R}$ deki tüm aralıkların kümesi $I(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Ayrıca

$$m(\tilde{A}) = \frac{1}{2}(\overline{a} + \underline{a}) \quad \text{ve} \quad r(\tilde{A}) = \frac{1}{2}(\overline{a} - \underline{a})$$

olmak üzere $m(\tilde{A})$ ve $r(\tilde{A})$ sırasıyla $\tilde{A}$ aralığının orta noktası ve yarıçapı olup $\tilde{A}$ aralığı $\tilde{A} = \langle m(\tilde{A}), r(\tilde{A})\rangle$ şeklinde de gösterilebilir.

3.2 Aralık İşlemleri

Tanım 3.2.1. $\tilde{A} = [\underline{a}, \overline{a}], \tilde{B} = [\underline{b}, \overline{b}] \in I(\mathbb{R})$ *iki aralık verilsin.*

i) Toplama

$$\tilde{A} + \tilde{B} = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$$

ii) Çıkarma

$$\tilde{A} - \tilde{B} = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]$$

iii) Çarpma

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$$

iv) $\alpha \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$\alpha\tilde{A} = \begin{cases} [\alpha\overline{a}, \alpha\underline{a}] & \alpha < 0 \\ [\alpha\underline{a}, \alpha\overline{a}] & \alpha \geq 0 \end{cases}$$

v) Bölme

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \left[\min\left\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\overline{b}\right\}, \max\left\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\overline{b}\right\}\right], \quad (\underline{b} \neq 0, \overline{b} \neq 0)$$

Ayrıca $\tilde{A} - \tilde{A} \neq 0$ *ve* $\dfrac{\tilde{A}}{\tilde{A}} \neq 1$ *olabilir.*

Örnek 3.2.2. $\tilde{A} = [2,3]$ *ve* $\tilde{B} = [4,5]$ *olsun. O halde*

$\tilde{A} + \tilde{B} = [6,8]$, $\tilde{A} - \tilde{B} = [-3,-1]$

$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = [\min\{8,10,12,15\}, \max\{8,10,12,15\}] = [8,15]$

$\dfrac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \left[\min\left\{\dfrac{2}{4}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{5}\right\}, \max\left\{\dfrac{2}{4}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{5}\right\}\right] = \left[\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{4}\right]$ *bulunur. Ayrıca*

$\tilde{A} - \tilde{A} = [-1,1]$ *ve*

$\dfrac{\tilde{A}}{\tilde{A}} = \left[\min\left\{\dfrac{2}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{3}\right\}, \max\left\{\dfrac{2}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{3}\right\}\right] = \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}\right]$ *olmak üzere*

$\tilde{A} - \tilde{A} \neq 0$ *ve* $\dfrac{\tilde{A}}{\tilde{A}} \neq 1$ *olduğu elde edilir.*

Aralık karşılaştırmasına geçmeden önce üyelik fonksiyonu, fuzzy küme, üyelik derecesi, fuzzy sayı tanımlarını verelim [23].

Tanım 3.2.3. *X evrensel kümesinin elemanlarını* $\{0,1\}$ *kümesine resmeden fonksiyona* ***üyelik fonksiyonu*** *denir. Yani üyelik fonksiyonu* f_A *ile gösterilmek üzere,* $f_A : X \to \{0,1\}$ *dir. A herhangi bir küme olmak üzere*

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

dir.

Tanım 3.2.4. *X evrensel küme olsun.* $A : X \to [0,1]$ *fonksiyonuna X üzerinde bir* ***bulanık (fuzzy) küme*** *denir. A fuzzy kümesi,* f_A *üyelik fonksiyonu ile karakterize edildiği için A fonksiyonu yerine genellikle* f_A *kullanılır.*

$$\begin{aligned} f_A : \quad & X \to [0,1] \\ & x \to f_A(x) \end{aligned}$$

olmak üzere $f_A(x)$*' e x elemanının* ***üyelik derecesi*** *denir.*

Tanım 3.2.5. *Bir fuzzy küme gerçel sayılarda tanımlanmış, konveks, normalleştirilmiş ve üyelik fonksiyonu parçalı sürekli ise bu kümeye bir* ***fuzzy sayı*** *denir.*

3.3 Aralık Karşılaştırması

Gerçel sayıların "$<$" bağıntısı ile sıralandığını biliyoruz. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a < b$ ve $b < c$ iken $a < c$ olduğundan bu bağıntının geçişken olduğunu söyleyebiliriz. $\tilde{A} = [\underline{a}, \overline{a}]$, $\tilde{B} = [\underline{b}, \overline{b}] \in I(\mathbb{R})$ olmak üzere bu bağıntıya karşılık Moore [11], aralıklar için ayrık iki aralık arasındaki sıralamayı

$$\tilde{A} < \tilde{B} \Leftrightarrow \overline{a} < \underline{b}$$

şeklinde tanımlamıştır. Aralıklar için de $\tilde{A} < \tilde{B}$ ve $\tilde{B} < \tilde{C}$ iken $\tilde{A} < \tilde{C}$ olur. Moore [11], aralıklar için başka bir geçişken sıralama bağıntısını ise

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a} \geq \underline{b} \quad \text{ve} \quad \overline{a} \leq \overline{b}$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu sadece $\tilde{A}$ aralığının $\tilde{B}$ aralığının içinde olduğunu ifade eder, herhangi bir sıralama yapmaz.

Ishibuchi ve Tanaka [19] aralıkların hem alt hem de üst sınırlarının yardımıyla $\leq_{LR}$ sıralama bağıntısını

$$\begin{aligned} \tilde{A} \leq_{LR} \tilde{B} \quad &\Leftrightarrow \quad \underline{a} \leq \underline{b} \quad \text{ve} \quad \overline{a} \leq \overline{b} \\ \tilde{A} <_{LR} \tilde{B} \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{A} \leq_{LR} \tilde{B} \quad \text{ve} \quad \tilde{A} \neq \tilde{B} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlamıştır. $\leq_{LR}$ bağıntısının uygulanamadığı durumlar vardır. Bunun içinde Ishibuchi ve Tanaka [19] aralıkların orta noktaları ve yarıçaplarını kullanarak $\leq_{mr}$ sıralama bağınıtısını

$$\begin{aligned} \tilde{A} \leq_{mr} \tilde{B} \quad &\Leftrightarrow \quad m(\tilde{A}) \leq m(\tilde{B}) \quad \text{ve} \quad r(\tilde{A}) \geq r(\tilde{B}) \\ \tilde{A} <_{mr} \tilde{B} \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{A} \leq_{mr} \tilde{B} \quad \text{ve} \quad \tilde{A} \neq \tilde{B} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlamıştır.

$\leq_{LR}$ ve $\leq_{mr}$ sıralama bağıntıları yansıyan, ters simetrik ve geçişkendir. Dolayısıyla aralıklar arasında kısmi sıralama tanımlıdır. Yani aralık karşılaştırmasında bu sıralama bağıntıları da yetersiz kalır. Bu yüzden herhangi iki aralığın karşılaştırılabilmesi için çalışmalar devam etmiş, oyuncuların seçimlerini de dikkate alan karşılaştırmalar araştırılmıştır [12, 13, 14].

Aralıkların fuzzy olarak karşılaştırmasını sağlayacak olan sıralama bağıntısı vermeden önce bazı durumlar için bu karşılaştırmayı yorumlayalım.

1. Durum: $\overline{a} < \underline{b}$ ise $\tilde{A}$ aralığının her bir elemanı $\tilde{B}$ aralığının tüm elemanlarından küçük olduğu için rasyonel bir oyuncu $\tilde{A}$ aralığını tercih etmez. Dolayısıyla $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ olur.

2. Durum: $\underline{a} < \underline{b} < \overline{a} < \overline{b}$ ise rasyonel bir oyuncu hem minimum hem de maksimum değeri daha az olan $\tilde{A}$ aralığını tercih etmez. Yani $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ olur.

3. Durum: $\underline{a} = \underline{b}$ ve $\overline{a} = \overline{b}$ yani $\tilde{A} = \tilde{B}$ ise rasyonel bir oyuncu iki aralıktan birini diğerine tercih etmez. Hem $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ hem de $\tilde{B} \leq \tilde{A}$ dır.

Dolayısıyla bu üç durum da bilinen aralık karşılaştırmasına göre aralıklar kesin karşılaştırılabilirdir.

4. Durum: $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ yani $\underline{b} < \underline{a}$ ve $\overline{a} < \overline{b}$ ise oyuncunun seçimi belirsizdir. Çünkü $\tilde{B}$ aralığındaki değerlerin $\tilde{A}$ aralığındaki değerlerden büyük olan değerleri olduğu gibi $\tilde{A}$ aralığındaki değerlerden küçük olan değerleri de vardır. Bu durumda risk almayan bir oyuncu $\tilde{A}$ aralığının minimum değeri daha büyük olduğundan daha fazla kaybetmemek için $\tilde{A}$ aralığını seçecektir. Bunun aksine risk alan bir oyuncu $\tilde{B}$ aralığının minimum değeri daha küçük olsa da maksimum değeri daha büyük olduğundan daha fazla kazanabilmek için $\tilde{B}$ aralığını seçecektir.

Buradan görüldüğü üzere bu durumdaki iki aralığın karşılaştırılması, bilinen sıralama bağıntısı ile belirlenemez. Bu belirsizlik bulanık (fuzzy) mantık teorisi ile ele alınmıştır. Dolayısıyla üyelik değeri ile aralık karşılaştırmaları yapılabilir. O halde $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ olmak üzere $\underline{a} = \underline{b} < \overline{a} < \overline{b}$ durumunu düşünelim. Bu durumda rasyonel bir oyuncu $\tilde{B}$ aralığının maksimum değeri daha büyük olduğundan daha fazla kazanabilmek için $\tilde{B}$ aralığını seçecektir. Dolayısıyla $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ kesin doğrudur ve üyelik değeri 1 olur. Diğer yandan $\tilde{A}$ aralığını sağa kaydırıp üst sınırların eşitlendiği, $\underline{b} < \underline{a} < \overline{a} = \overline{b}$ durumunu düşünelim. Bu durumda ise rasyonel bir oyuncu $\tilde{A}$ aralığının minimum değeri daha büyük olduğundan $\tilde{A}$ aralığını seçecektir. Dolayısıyla $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ kesin doğru değildir ve üyelik derecesi 0 olur. Bu ifadelerden görüldüğü üzere $\tilde{A}$ aralığı soldan sağa doğru hareket ettirildiğinde üyelik değeri 1 den 0 a doğru gider. Yani $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ bağıntısının üyelik değeri 1 ise oyuncu kesin $\tilde{B}$ aralığını, üyelik değeri 0 ise oyuncu kesin $\tilde{A}$ aralığını seçer. Bu durumda sırasıyla $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ aralıklarının genişliği $w(\tilde{A}) = \overline{a} - \underline{a}$

ve $w(\tilde{B}) = \overline{b} - \underline{b}$ olmak üzere

$$f(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{w(\tilde{B}) - w(\tilde{A})}$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ nin orta noktaları aynı olduğu zaman üyelik derecesi 0.5 olur.

Sonuç olarak herhangi iki aralık için " $\preceq$ " sıralama bağıntısı fuzzy üyelik fonksiyonu ile aşağıdaki şekilde tanımlanabilir [12].

Tanım 3.3.1. *$\tilde{A} = [\underline{a}, \overline{a}]$, $\tilde{B} = [\underline{b}, \overline{b}] \in I(\mathbb{R})$ olsun. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ nin fuzzy üyelik fonksiyonu*

$$\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) = \begin{cases} 1 & , \tilde{A} = \tilde{B};\ \textit{veya}\ \overline{a} \le \underline{b}, \tilde{A} \ne \tilde{B};\ \textit{veya} \\ & \ \underline{a} < \underline{b} < \overline{a} < \overline{b} \\ 0 & , \overline{b} \le \underline{a}, \tilde{A} \ne \tilde{B};\ \textit{veya}\ \underline{b} < \underline{a} < \overline{b} < \overline{a} \\ \dfrac{\overline{b} - \overline{a}}{w(\tilde{B}) - w(\tilde{A})} & , \underline{b} \le \underline{a} \le \overline{a} \le \overline{b},\ w(\tilde{B}) > 0,\ \tilde{A} \ne \tilde{B} \\ \dfrac{\underline{b} - \underline{a}}{w(\tilde{A}) - w(\tilde{B})} & , \underline{a} \le \underline{b} \le \overline{b} \le \overline{a}, w(\tilde{A}) > 0, \tilde{A} \ne \tilde{B} \end{cases}$$

şeklindedir.

Ayrıca $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B})$, $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ sıralama bağıntısının kabul edilebilirlik derecesi olarak da ifade edilebilir.

Şimdi $\tilde{A}$ aralığının $\tilde{B}$ aralığından küçük olmadığını ifade eden $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$ bağıntısını tanımlayalım.

Tanım 3.3.2. *$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ aralıklarının fuzzy üyelik fonksiyonu $\tilde{A} = \bar{B}$ ise $\varphi(\tilde{A} \succeq \tilde{B}) = 1$ olarak tanımlanır. Diğer durumlarda ise $\varphi(\tilde{A} \succeq \tilde{B}) = 1 - \varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B})$ şeklinde olur. Yani*

$$\varphi(\tilde{A} \succeq \tilde{B}) = \begin{cases} 1 & , \tilde{A} = \tilde{B};\ \textit{veya}\ \overline{b} \le \underline{a}, \tilde{A} \ne \tilde{B};\ \textit{veya} \\ & \ \underline{b} < \underline{a} < \overline{b} < \overline{a} \\ 0 & , \overline{a} \le \underline{b}, \tilde{A} \ne \tilde{B};\ \textit{veya}\ \underline{a} < \underline{b} < \overline{a} < \overline{b} \\ \dfrac{\underline{a} - \underline{b}}{w(\tilde{B}) - w(\tilde{A})} & , \underline{b} \le \underline{a} \le \overline{a} \le \overline{b}, w(\tilde{B}) > 0, \tilde{A} \ne \tilde{B} \\ \dfrac{\overline{a} - \overline{b}}{w(\tilde{A}) - w(\tilde{B})} & , \underline{a} \le \underline{b} \le \overline{b} \le \overline{a}, w(\tilde{A}) > 0, \tilde{A} \ne \tilde{B} \end{cases}$$

ifade edilir.

Eğer fuzzy üyelik fonksiyonunun değeri 1 veya 0 yani $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) = 1$ veya $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) = 0$ ise $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ aralıkları kesin karşılaştırılabilirdir. Aksi takdirde fuzzy karşılaştırılabilirdir.

Örnek 3.3.3. $[-1,4]$ *ile* $[5,7]$ *aralıkları verilsin. Şimdi bu sıralama bağıntısına göre bu aralıkları inceleyelim.*

$\varphi([-1,4] \preceq [5,7]) = 1$ *olduğundan* $[-1,4]$ *aralığı* $[5,7]$ *aralığından küçüktür. Bu durumda oyuncu kesinlikle* $[5,7]$ *aralığını tercih edecektir.*

$[2,5]$ *ile* $[1,7]$ *aralıkları* $1 < 2 < 5 < 7$ *olduğundan fuzzy karşılaştırılabilir ve*

$$\varphi([2,5] \preceq [1,7]) = \frac{7-5}{6-3} = \frac{2}{3}$$

olur. Bu durumda oyuncu $\dfrac{2}{3}$ *üyelik değeri ile* $[1,7]$ *aralığını tercih edecektir.*

Önerme 3.3.4. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ *olmak üzere* $\varphi(\tilde{\nu} \preceq \tilde{\nu}_1) \leq 1$ *ve* $\varphi(\tilde{\nu} \preceq \tilde{\nu}_2) \leq 1$ *ise*

$$\varphi((\alpha_1 + \alpha_2)\tilde{\nu} \preceq \alpha_1\tilde{\nu}_1 + \alpha_2\tilde{\nu}_2) \leq 1$$

olur.

Kanıt. $\alpha_1 \in \mathbb{R}^+$ ve $\varphi(\tilde{\nu} \preceq \tilde{\nu}_1) \leq 1$ ise

$$\varphi(\alpha_1\tilde{\nu} \preceq \alpha_1\tilde{\nu}_1) \leq 1$$

dir. $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ ve $\varphi(\tilde{\nu} \preceq \tilde{\nu}_2) \leq 1$ ise

$$\varphi(\alpha_2\tilde{\nu} \preceq \alpha_2\tilde{\nu}_2) \leq 1$$

dir. O halde $\varphi(\alpha_1\tilde{\nu} \preceq \alpha_1\tilde{\nu}_1) \leq 1$ ve $\varphi(\alpha_2\tilde{\nu} \preceq \alpha_2\tilde{\nu}_2) \leq 1$ den

$$\varphi(\alpha_1\tilde{\nu} + \alpha_2\tilde{\nu} \preceq \alpha_1\tilde{\nu}_1 + \alpha_2\tilde{\nu}_2) \leq 1$$

dir. Yani

$$\varphi((\alpha_1 + \alpha_2)\tilde{\nu} \preceq \alpha_1\tilde{\nu}_1 + \alpha_2\tilde{\nu}_2) \leq 1$$

olur. □

Genel aralık matris oyunları için kesin karşılaştırma aynı satırda (veya sütunda) tüm aralıklar için sağlanmayabilir. Bu yüzden V aralık kümesinin maksimumu ve minimumu olan $\tilde{v}_i$ aralığının üyelik değerini tanımlamak için aralık karşılaştırması genişletilmelidir. O halde şimdi V deki en küçük ve en büyük aralığın değerini tanımlayalım.

Tanım 3.3.5. $V = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_n\}$ *aralık kümesi olsun.* $\tilde{v}_i$ *aralığının üyelik değeri*

$$\xi(\tilde{v}_i) = \min_{1\leq j\leq n} (\tilde{v}_i \preceq \tilde{v}_j)$$

olmak üzere V nin ***en küçük aralığı***

$$\tilde{\upsilon}_i^* = \max_{1\leq i\leq n} \xi(\tilde{\upsilon}_i)$$

değerine sahip $\tilde{\upsilon}_i^*$ aralığıdır. Benzer şekilde $\tilde{\upsilon}_i$ aralığının üyelik değeri

$$\delta(\tilde{\upsilon}_i) = \min_{1\leq j\leq n} (\tilde{\upsilon}_i \succeq \tilde{\upsilon}_j)$$

olmak üzere V nin ***en büyük aralığı***

$$\tilde{\upsilon}_i^* = \max_{1\leq i\leq n} \delta(\tilde{\upsilon}_i)$$

değerine sahip $\tilde{\upsilon}_i^*$ aralığıdır.

Örnek 3.3.6. $V = \{[-2,2],[1,6],[2,4]\}$ *aralık kümesi verilsin. Tanım 3.3.5 ten,*

$$\begin{aligned}
\xi([-2,2]) &= \min\{[-2,2] \preceq [-2,2], [-2,2] \preceq [1,6], [-2,2] \preceq [2,4]\} \\
&= \min\{1,1,1\} \\
&= 1 \\
\xi([1,6]) &= \min\{[1,6] \preceq [1,6], [1,6] \preceq [-2,2], [1,6] \preceq [2,4]\} \\
&= \min\{1,0,\frac{1}{3}\} \\
&= 0 \\
\xi([2,4]) &= \min\{[2,4] \preceq [2,4], [2,4] \preceq [-2,2], [2,4] \preceq [1,6]\} \\
&= \min\{1,0,\frac{2}{3}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup $\max \xi(\cdot) = 1$ *olduğundan* $[-2,2]$ *aralığı en küçük aralık olur.*

$$\begin{aligned}
\delta([-2,2]) &= \min\{[-2,2] \succeq [-2,2], [-2,2] \succeq [1,6], [-2,2] \succeq [2,4]\} \\
&= \min\{1,0,0\} \\
&= 0 \\
\delta([1,6]) &= \min\{[1,6] \succeq [1,6], [1,6] \succeq [-2,2], [1,6] \succeq [2,4]\} \\
&= \min\{1,1,\frac{2}{3}\} \\
&= \frac{2}{3} \\
\delta([2,4]) &= \min\{[2,4] \succeq [2,4], [2,4] \succeq [-2,2], [2,4] \succeq [1,6]\} \\
&= \min\{1,1,\frac{1}{3}\} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

olup $\max \delta(\cdot) = \dfrac{2}{3}$ *olduğundan* $[1,6]$ *aralığı en büyük aralık olur.*

Gerçel değerli oyunlardan farklı olarak en büyük veya en küçük aralık tek olmak zorunda değildir. Eşit olmayan aralıkların orta noktaları eşit olduğu zaman en büyük veya en küçük aralık birden fazla olabilir. Bu durum sıradaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.3.7. $V = \{[-2,2],[1,6],[2,5]\}$ *aralık kümesi verilsin. Tanım 3.3.5 ten en küçük aralık* $[-2,2]$ *aralığıdır. Yine Tanım 3.3.5 ten*

$$\delta([-2,2]) = 0, \quad \delta([1,6]) = \frac{1}{2} \quad \textit{ve} \quad \delta([2,5]) = \frac{1}{2}$$

olup $\delta([1,6]) = \delta([2,5]) = \dfrac{1}{2}$ *olduğundan* $[1,6]$ *ve* $[2,5]$ *en büyük aralıklardır.*

3.4 Aralık Matris Oyunlar

Bu bölümde iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar aralık matris oyunlara genelleştirilecektir. I. oyuncunun stratejileri $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_m$ ve II. oyuncunun stratejileri $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \ldots, \mathrm{II}_n$ olsun. I. oyuncu I_i stratejisini II. oyuncu da II_j stratejisini kullandığında I. oyuncunun getirisi $\tilde{g}_{ij} = [\underline{g}_{ij}, \overline{g}_{ij}]$ olmak üzere aralık matris oyunun getiri matrisi

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \ldots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \ldots & \tilde{g}_{1n} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \ldots & \tilde{g}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{m1} & \tilde{g}_{m2} & \ldots & \tilde{g}_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.4.42}$$

dir. Burada oyun sıfır toplamlı olduğundan I. oyuncunun kazancı II. oyuncunun kaybına eşit olur.

Aralık matris oyunun saf stratejiler sınıfındaki *alt* ve *üst değeri* sırasıyla

$$\tilde{V}_P^L = \max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}_{ij} \quad \text{ve} \quad \tilde{V}_P^U = \min_{j=1,2,\ldots,n} \max_{i=1,2,\ldots,m} \tilde{g}_{ij}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\tilde{V}_P^L = \tilde{V}_P^U = \tilde{V}$ ise $\tilde{V}$ değerine saf stratejiler sınıfında *oyunun değeri* denir.

Tanım 3.4.1.

$$\min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}_{i_* j} = \max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}_{ij}$$

koşulunu sağlayan I_{i_*} *stratejisine* I. *oyuncunun* ***optimal saf stratejisi*** *denir.*

$$\max_{i=1,2,\ldots,m} \tilde{g}_{ij_*} = \min_{j=1,2,\ldots,n} \max_{i=1,2,\ldots,m} \tilde{g}_{ij}$$

koşulunu sağlayan II_{j_*} *stratejisine* II. *oyuncunun* ***optimal saf stratejisi*** *denir.*

Önerme 3.4.2. *Getiri matrisi* (3.4.42) *ile verilen oyunda*

$$\tilde{V}_P^L \preceq \tilde{V}_P^U$$

olur.

Örnek 3.4.3. *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} [0,1] & [-2,-1] \\ [-1,0] & [1,2] \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunu ele alalım.

Oyunun alt değeri,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_P^L = \max_{i=1,2}\min_{j=1,2}\tilde{g}_{ij} &= \max\left\{\min_{j=1,2}\tilde{g}_{1j}, \min_{j=1,2}\tilde{g}_{2j}\right\} \\ &= \max\left\{[-2,-1],[-1,0]\right\} \\ &= [-1,0] \end{aligned}$$

ve oyunun üst değeri,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_P^U = \min_{j=1,2}\max_{i=1,2}\tilde{g}_{ij} &= \min\left\{\max_{i=1,2}\tilde{g}_{1j}, \max_{i=1,2}\tilde{g}_{2j}\right\} \\ &= \min\left\{[0,1],[1,2]\right\} \\ &= [0,1] \end{aligned}$$

olur. Buradan $\tilde{V}_P^L \neq \tilde{V}_P^U$ *olduğundan oyunun saf stratejiler sınıfında değeri yoktur.*

Bu örnekten görüldüğü üzere aralık matris oyunlarında da her zaman saf stratejiler sınıfında oyunun değeri olmayabilir.

Sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri kümesi

$$X_m = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) : \forall i = 1,2,\ldots,m \text{ için } x_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\}$$

ve

$$Y_n = \left\{\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) : \forall j = 1,2,\ldots,n \text{ için } y_j \geq 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right\}$$

dir.

Tanım 3.4.4. *Getiri matrisi* (3.4.42) *ile verilen aralık matris oyununda* I. *oyuncu* $\mathbf{x} \in X_m$ *karma stratejisi ve* II. *oyuncu* $\mathbf{y} \in Y_n$ *karma stratejisi ile oynamak üzere* ***oyunun getirisi***

$$\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \tilde{g}_{ij} y_j = \mathbf{x}\tilde{G}\mathbf{y}^T$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca $\tilde{g}_{ij} = [\underline{g}_{ij}, \overline{g}_{ij}]$ olmak üzere oyunun getirisi

$$\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \underline{g}_{ij} y_j, \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \overline{g}_{ij} y_j \right]$$

olur.

Getiri matrisi (3.4.42) ile verilen oyunun karma stratejiler sınıfındaki *alt* ve *üst değeri* sırasıyla

$$\tilde{V}^L = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \text{ve} \quad \tilde{V}^U = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

olarak tanımlanır. Eğer $\tilde{V}^L = \tilde{V}^U = \tilde{\nu}$ ise $\tilde{\nu}$ değerine *oyunun değeri* denir.

Tanım 3.4.5.

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tilde{\nu}$$

koşulunu sağlayan $\mathbf{x}^* \in X_m$ *stratejisine* I. *oyuncunun* ***optimal stratejisi*** *ve*

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tilde{\nu}$$

koşulunu sağlayan $\mathbf{y}^* \in Y_n$ *stratejisine* II. *oyuncunun* ***optimal stratejisi*** *denir.*

Tanım 3.4.6. I. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{x}^* \in X_m$, II. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{y}^* \in Y_n$ *ve oyunun değeri de* $\tilde{\nu}$ *olmak üzere* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$ *üçlüsüne* ***oyunun çözümü*** *denir.*

Teorem 3.4.7. *İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun her zaman çözümü vardır.*

Teorem 3.4.8. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$ *nin oyunun çözüm olması için gerek ve yeter koşul*

$$\textit{keyfi} \quad \mathbf{y} \in Y_n \quad \textit{için} \quad \tilde{g}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \geq \tilde{\nu}$$

$$\textit{keyfi} \quad \mathbf{x} \in X_m \quad \textit{için} \quad \tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq \tilde{\nu}$$

olmasıdır.

Teorem 3.4.8 gereği aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 3.4.9. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$ *üçlüsü verilen oyunun çözümü ise* $\tilde{g}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$ *dir.*

$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ stratejisinde $x_{i_*}^* > 0$ ise I_{i_*} saf stratejisi I. oyuncunun gereken stratejisi ve $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ stratejisinde $y_{j_*}^* > 0$ ise II_{j_*} saf stratejisi II. oyuncunun gereken stratejisi olduğunu biliyoruz. Sıradaki teorem I.

oyuncu $\mathbf{x}^*$ optimal stratejisi ile oynarken II. oyuncu da II_{j_*} gereken stratejisi ile oynarsa oyunun getirisinin verilen oyunun değerine eşit olduğunu ifade etmektedir. Benzer şekilde II. oyuncu $\mathbf{y}^*$ optimal stratejisi ile oynarken I. oyuncu da I_{i_*} gereken stratejisi ile oynarsa oyunun getirisi verilen oyunun değerine eşit olur.

Teorem 3.4.10. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$ *üçlüsü getiri matrisi* (3.4.42) *ile verilen aralık matris oyununun çözümü,* I_{i_*} *ve* II_{j_*} *stratejileri de sırasıyla* I. *ve* II. *oyuncunun gereken stratejileri olsun. Bu durumda*

$$\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \tilde{g}(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$$

ve

$$\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_{j_*}) = \tilde{\nu}$$

olur.

Kanıt. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$ üçlüsü oyunun çözümü olduğundan $\mathbf{x}^* \in X_m$ stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi, $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi, $\tilde{\nu}$ de oyunun değeri olur. Dolayısıyla Sonuç 3.4.9 dan $\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$ olur. Genelliği bozmadan $x_i^* > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$ $(k \leq m)$ ve $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^* = 1$ için I. oyuncunun optimal stratejisini $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, 0, \ldots, 0)$ olduğunu kabul edelim. Yani $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ optimal stratejisinde saf stratejiler ile gereken stratejilerin yerlerini değiştirerek gereken stratejileri ilk sıraya alalım. Keyfi $1 \leq i_* \leq k$ alalım. O zaman I_{i_*} stratejisi I. oyuncunun gereken stratejisi ve $x_{i_*}^* > 0$ olur.

Şimdi seçilen bir i_* için $\tilde{g}(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$ olduğunu kanıtlayalım. Bunun için

$$\varphi\big(\tilde{g}(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \preceq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\big) = 1$$

$$\varphi\big(\tilde{g}(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\big) = 1$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\mathbf{x}^*$ optimal olduğu için $\varphi\big(\tilde{g}(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \preceq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\big) = 1$ olduğu açıktır. Şimdi diğer durumun gerçekleştiğini gösterelim. Aksini varsayalım. Yani

$$\varphi\big(\tilde{g}(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\big) < 1 \tag{3.4.43}$$

olsun. Öte yandan

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} = \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^* \tilde{g}_{ij} y_j^* \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* \tilde{g}_{ij} y_j^* \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i^* \Big(\sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_{ij} y_j^*\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i^* \tilde{g}(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}^*)\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\tilde{\nu} = \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_{i=1}^{k} x_i^* \tilde{g}(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}^*) \tag{3.4.44}$$

elde edilir. $i \neq i_*$ olmak üzere

$$\varphi\big(\tilde{g}(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\big) = 1$$

olur. Buradan $x_i^* > 0$ olmak üzere Önerme 3.3.4 ten

$$\varphi\Bigg(\sum_{i=1, i\neq i_*}^{k} x_i^* \tilde{g}(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}^*) \succeq \sum_{i=1, i\neq i_*}^{k} x_i^* \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\Bigg) = 1 \tag{3.4.45}$$

olur. (3.4.43) ve (3.4.45) ten

$$\varphi\Bigg(\sum_{i=1}^{k} x_i^* \tilde{g}(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}^*) \succeq \sum_{i=1}^{k} x_i^* \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\Bigg) < 1 \tag{3.4.46}$$

bulunur. I. oyuncunun optimal stratejisi $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, 0, \ldots, 0)$ olup $\sum_{i=1}^{k} x_i^* = 1$ olduğu için (3.4.46) ifadesi

$$\varphi\Bigg(\sum_{i=1}^{k} x_i^* \tilde{g}(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\Bigg) < 1 \tag{3.4.47}$$

şekline dönüşür ve (3.4.44) ten

$$\varphi\big(\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\big) < 1$$

olduğu elde edilir. Bu ise olamaz. O halde varsayımımız doğru değildir. Yani

$$\varphi\big(\tilde{g}(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\big) = 1$$

olmalıdır. Dolayısıyla her iki durumda sağlandığından

$$\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \tilde{g}(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$$

olduğu elde edilir. Benzer şekilde II. oyuncunun II_{j_*} gereken stratejisi için de $\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_{j_*}) = \tilde{\nu}$ olduğu kanıtlanabilir. □

3.5 Aralık Matris Oyunların Çözümü

3.5.1 Kesin Tanımlı Aralık Matris Oyunların Çözümü

Tanım 3.5.1. *Denge aralığı olan aralık matris oyunlara* ***kesin tanımlı aralık matris oyunlar*** *denir.*

Getiri matrisi

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} & \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \dots & \tilde{g}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{m1} & \tilde{g}_{m2} & \dots & \tilde{g}_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunda i. satırın minimum değeri j. sütunun maksimum değeri olduğunda elde edilen $\tilde{g}_{ij}$ getirisi oyunun dengesidir. $\tilde{g}_{ij}$ denge aralığı kesin tanımlı aralık oyununun değeri olup $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\nu}$, I. oyuncunun optimal stratejisi I_i, II. oyuncunun optimal stratejisi II_j olmak üzere $(\mathrm{I}_i, \mathrm{II}_j, \tilde{\nu})$ üçlüsü kesin tanımlı aralık matris oyunların çözümü olur.

Örnek 3.5.2.

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_3 \end{array} & \begin{pmatrix} [2,4] & [-1,0] & [2,6] \\ [3,5] & [2,3] & [3,4] \\ [-2,-1] & [0,1] & [-1,0] \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunu ele alalım.

Burada $\tilde{g}_{22} = [2,3]$ *aralığı ikinci satırın minimumu iken ikinci sütunun maksimumudur. Dolayısıyla denge aralığıdır ve oyun kesin tanımlı bir oyundur. Oyunun değeri de* $\tilde{g}_{22} = \tilde{\nu} = [2,3]$ *dir.* I. *oyuncunun optimal stratejisi* I_2 *ve* II. *oyuncunun optimal stratejisi de* II_2 *olmak üzere* $(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_2, [2,3])$ *üçlüsü oyunun çözümü olarak bulunur.*

3.5.2 2×2 Aralık Matris Oyunların Çözümü

$[\underline{g}_{11}, \overline{g}_{11}], [\underline{g}_{12}, \overline{g}_{12}], [\underline{g}_{21}, \overline{g}_{21}], [\underline{g}_{22}, \overline{g}_{22}] \in I(\mathbb{R})$ aralıkları verilsin. Getiri matrisi

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} [\underline{g}_{11}, \overline{g}_{11}] & [\underline{g}_{12}, \overline{g}_{12}] \\ [\underline{g}_{21}, \overline{g}_{21}] & [\underline{g}_{22}, \overline{g}_{22}] \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.5.48}$$

ile verilen 2×2 aralık matris oyununu ele alalım. Bu oyunu çözebilmek için denge aralığının olup olmadığına bakılır. Eğer denge aralığı yoksa çözüm şu şekilde bulunur [14].

II. oyuncu tarafından seçilen strateji ne olursa olsun I. oyuncu kendi getirisini değiştirmeyecek $\mathbf{x} = (x, 1-x)$ karma stratejisini kullanır. Bu durumda

$$[\underline{g}_{11}, \overline{g}_{11}] \cdot x + [\underline{g}_{21}, \overline{g}_{21}] \cdot (1-x) = [\underline{g}_{12}, \overline{g}_{12}] \cdot x + [\underline{g}_{22}, \overline{g}_{22}] \cdot (1-x)$$

olup bu eşitlikten

$$\underline{g}_{11} \cdot x + \underline{g}_{21} \cdot (1-x) = \underline{g}_{12} \cdot x + \underline{g}_{22} \cdot (1-x) \tag{3.5.49}$$

ve

$$\overline{g}_{11} \cdot x + \overline{g}_{21} \cdot (1-x) = \overline{g}_{12} \cdot x + \overline{g}_{22} \cdot (1-x) \tag{3.5.50}$$

elde edilir. (3.5.49) ve (3.5.50) eşitliklerden x değeri

$$x = \frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} \quad \text{ve} \quad x = \frac{\overline{g}_{22} - \overline{g}_{21}}{(\overline{g}_{11} - \overline{g}_{12}) + (\overline{g}_{22} - \overline{g}_{21})} \tag{3.5.51}$$

bulunur. $i, j = 1, 2$ için $\underline{g}_{ij}$ ve $\overline{g}_{ij}$ değerleri $\overline{g}_{ij} = \underline{g}_{ij} + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ eşitliğini sağladığı durumda

$$\frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} = \frac{\overline{g}_{22} - \overline{g}_{21}}{(\overline{g}_{11} - \overline{g}_{12}) + (\overline{g}_{22} - \overline{g}_{21})}$$

olur. Bir başka deyişle (3.5.51) için tüm aralıklar aynı uzunlukta olduğu zaman yalnız bir x değeri bulunur. Dolayısıyla

$$x = \frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})}$$

dir. O halde

$$\mathbf{x} = \left(\frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})}, \frac{\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} \right)$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde I. oyuncu tarafından seçilen strateji ne olursa olsun II. oyuncu kendi getirisini değiştirmeyecek $\mathbf{y} = (y, 1-y)$ karma stratejisini kullanır. Bu durumda

$$[\underline{g}_{11}, \overline{g}_{11}] \cdot y + [\underline{g}_{12}, \overline{g}_{12}] \cdot (1-y) = [\underline{g}_{21}, \overline{g}_{21}] \cdot y + [\underline{g}_{22}, \overline{g}_{22}] \cdot (1-y)$$

olup bu eşitlikten

$$\underline{g}_{11} \cdot y + \underline{g}_{12} \cdot (1-y) = \underline{g}_{21} \cdot y + \underline{g}_{22} \cdot (1-y) \tag{3.5.52}$$

ve

$$\overline{g}_{11} \cdot y + \overline{g}_{12} \cdot (1-y) = \overline{g}_{21} \cdot y + \overline{g}_{22} \cdot (1-y) \tag{3.5.53}$$

bulunur. (3.5.52) ve (3.5.53) eşitliklerden y değeri

$$y = \frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{12}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} \quad \text{ve} \quad y = \frac{\overline{g}_{22} - \overline{g}_{12}}{(\overline{g}_{11} - \overline{g}_{12}) + (\overline{g}_{22} - \overline{g}_{21})} \tag{3.5.54}$$

bulunur. $i, j = 1, 2$ için $\underline{g}_{ij}$ ve $\overline{g}_{ij}$ değerleri $\overline{g}_{ij} = \underline{g}_{ij} + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ eşitliğini sağladığı durumda

$$\frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{12}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} = \frac{\overline{g}_{22} - \overline{g}_{12}}{(\overline{g}_{11} - \overline{g}_{12}) + (\overline{g}_{22} - \overline{g}_{21})}$$

olur. Bir başka deyişle (3.5.54) için tüm aralıklar aynı uzunlukta olduğu zaman yalnız bir y değeri bulunur. Dolayısıyla

$$y = \frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{12}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})}$$

dir. O halde

$$\mathbf{y} = \left(\frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{12}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})}, \frac{\underline{g}_{11} - \underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} \right)$$

olarak elde edilir. I. veya II. oyuncunun getirileri oyunun değerini verdiğinden dolayı

$$\tilde{\nu} = [\underline{g}_{11}, \overline{g}_{11}] \cdot x + [\underline{g}_{21}, \overline{g}_{21}] \cdot (1-x)$$

veya

$$\tilde{\nu} = [\underline{g}_{11}, \overline{g}_{11}] \cdot y + [\underline{g}_{12}, \overline{g}_{12}] \cdot (1-y)$$

olur. Bu $\tilde{\nu}$ değerlerinin herhangi birinde x veya y sayılarından herhangi birini yerine yazdığımızda oyunun değeri

$$\tilde{\nu} = \left[\frac{\underline{g}_{22}\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}\underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})}, \frac{\overline{g}_{22}\overline{g}_{11} - \overline{g}_{12}\overline{g}_{21}}{(\overline{g}_{11} - \overline{g}_{12}) + (\overline{g}_{22} - \overline{g}_{21})} \right]$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ optimal stratejiler, $\tilde{\nu}$ de oyunun değeri olmak üzere $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{\nu})$ üçlüsü getiri matrisi (3.5.48) ile verilen 2×2 aralık matris oyununun çözümü olur.

Örnek 3.5.3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} [1,2] & [6,7] \\ [4,5] & [2,3] \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen 2×2 *aralık matris oyununu ele alalım. Verilen oyunun denge aralığı yoktur. O halde*

$$\begin{aligned} x &= \frac{2-4}{(1-6)+(2-4)} = \frac{2}{7} \Rightarrow \mathbf{x} = (x, 1-x) = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right) \\ y &= \frac{2-6}{(1-6)+(2-4)} = \frac{4}{7} \Rightarrow \mathbf{y} = (y, 1-y) = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right) \\ \tilde{\nu} &= \left[\frac{1\cdot 2 - 4\cdot 6}{(1-6)+(2-4)}, \frac{2\cdot 3 - 5\cdot 7}{(3-5)+(2-7)}\right] = \left[\frac{22}{7}, \frac{29}{7}\right] \end{aligned}$$

olmak üzere oyunun çözümü

$$\left(\mathbf{x} = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right), \mathbf{y} = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \left[\frac{22}{7}, \frac{29}{7}\right]\right)$$

üçlüsü olarak bulunur.

3.5.3 $2 \times n$ Aralık Matris Oyunların Çözümü

Bu kısımda $2 \times n$ aralık matris oyunların çözümünde kullanılan ve oyunun değerini karakterize eden bir önermenin kanıtını vermeden önce önermenin kanıtında kullanılacak olan yardımcı iki teorem verilecektir. Sonra $2\times n$ oyunların çözümünde kullanılan grafik yöntem aralıklar için gösterilecektir. P. K. Nayak ve M. Pal'ın [18], H. Akyar ve E. Akyar'ın [22] $2\times n$ aralık oyunların çözümünde kullanılan grafik yöntemiyle ilgili çalışması bulunmaktadır.

Yardımcı Teorem 3.5.4. *Her bir* $\tilde{C}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *aralık olmak üzere* $\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n\}$ *aralıklar kümesi verilsin.*

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y_j \right\} = \min_{1\le j\le n} \{\tilde{C}_j\} \tag{3.5.55}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Fuzzy sıralama indeksi yardımıyla $\min\limits_{1\le j\le n} \tilde{C}_j$ bulunur.

$$\min_{1\le j\le n} \tilde{C}_j = \tilde{C}_l$$

olduğunu varsayalım. Buradan

$$\varphi(\tilde{C}_j \succeq \tilde{C}_l) = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

olduğu açıktır. Herhangi bir $y_j \geq 0$ için

$$\varphi(\tilde{C}_j y_j \succeq \tilde{C}_l y_j) = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

dir. $y_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ve $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ olduğundan

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y_j \succeq \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_l y_j = \tilde{C}_l \right) = 1$$

olur. Buradan

$$\varphi\left(\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y_j \right\} \succeq \tilde{C}_l \right) = 1 \tag{3.5.56}$$

elde edilir. Öte yandan $\mathbf{y} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ için $\tilde{C}_l = \tilde{C}_1 \times 0 + \tilde{C}_2 \times 0 + \ldots + \tilde{C}_l \times 1 + \ldots + \tilde{C}_n \times 0$ den

$$\varphi\left(\tilde{C}_l \succeq \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y_j \right\} \right) = 1 \tag{3.5.57}$$

dir. (3.5.56) ve (3.5.57) den

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y_j \right\} = \tilde{C}_l = \min_{1\leq j\leq n} \{\tilde{C}_j\}$$

olur. □

Yardımcı Teorem 3.5.5. *Her bir $\tilde{D}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ aralık olmak üzere $\{\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \ldots, \tilde{D}_m\}$ aralıklar kümesi verilsin.*

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \tilde{D}_i x_i \right\} = \max_{1\leq i\leq m} \{\tilde{D}_i\} \tag{3.5.58}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 3.5.4 e benzer şekilde (3.5.58) eşitliğinin de doğru olduğu gösterilebilir. □

Önerme 3.5.6. *$\tilde{\nu}$ değeri iki kişilik sıfır toplamlı $m \times n$ oyunun değeri olsun. O halde*

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) = \tilde{\nu} \tag{3.5.59}$$

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{i=1,2,\ldots,m} \tilde{g}(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) = \tilde{\nu} \tag{3.5.60}$$

eşitlikleri doğrudur.

Kanıt. Getiri matrisi (3.4.42) ile verilen oyunun çözümü $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$ olsun. O halde

$$\mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad \varphi(\tilde{\nu} \preceq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})) = 1 \tag{3.5.61}$$

$$\mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad \varphi(\tilde{\nu} \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)) = 1 \tag{3.5.62}$$

olur. (3.5.59) eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlayalım. Bunun için

$$\varphi\Big(\tilde{\nu} \preceq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j)\Big) = 1$$

$$\varphi\Big(\tilde{\nu} \succeq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j)\Big) = 1$$

olduğunu göstermeliyiz. II_j saf stratejisi Y_n karma stratejiler kümesine ait olduğundan (3.5.61) den

$$\varphi(\tilde{\nu} \preceq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_j)) = 1 \tag{3.5.63}$$

olur. $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ için (3.5.63) geçerli olduğundan

$$\varphi\Big(\tilde{\nu} \preceq \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_j)\Big) = 1$$

ve

$$\varphi\Big(\tilde{\nu} \preceq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j)\Big) = 1$$

olduğu elde edilir.

Şimdi diğer durumun gerçekleştiğini gösterelim. Aksini varsayalım. Yani

$$\varphi\Big(\tilde{\nu} \succeq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j)\Big) < 1 \tag{3.5.64}$$

olsun. $\exists \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m) \in X_m$ için (3.5.64) ifadesi

$$\varphi\Big(\tilde{\nu} \succeq \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}(\hat{\mathbf{x}}, \mathrm{II}_j)\Big) < 1 \tag{3.5.65}$$

olur. $\tilde{g}(\hat{\mathbf{x}}, \mathrm{II}_j) = \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i \tilde{g}_{ij}$ olduğundan (3.5.65) ifadesi

$$\varphi\Big(\tilde{\nu} \succeq \min_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i \tilde{g}_{ij}\Big) < 1$$

olur. Yardımcı Teorem 3.5.4 ten

$$\varphi\Big(\tilde{\nu} \succeq \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i \tilde{g}_{ij}\Big) y_j\Big) < 1$$

olur. Buradan

$$\varphi\Big(\tilde{\nu} \succeq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i \tilde{g}_{ij} y_j\Big) < 1 \tag{3.5.66}$$

bulunur. $\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i\tilde{g}_{ij}y_j$ olup (3.5.66) dan

$$\varphi\left(\tilde{\nu} \succeq \max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{\mathbf{y}\in Y_n}\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right) < 1 \tag{3.5.67}$$

bulunur. Teorem 2.1.12 gereğince

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{\mathbf{y}\in Y_n}\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tilde{\nu}$$

olduğundan (3.5.67) ifadesinden

$$\varphi(\tilde{\nu} \succeq \tilde{\nu}) < 1$$

elde edilir. Bu ise olamaz. O halde varsayımımız doğru değildir. Yani

$$\varphi\left(\tilde{\nu} \succeq \max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{j=1,2,\ldots,n}\tilde{g}(\mathbf{x},\mathrm{II}_j)\right) = 1$$

olmalıdır. Dolayısıyla her iki durum da sağlandığından

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{\mathbf{y}\in Y_n}\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{j=1,2,\ldots,n}\tilde{g}(\mathbf{x},\mathrm{II}_j) = \tilde{\nu}$$

olduğu elde edilir.

Benzer şekilde (3.5.60) eşitliği de kanıtlanabilir. □

Şimdi $2\times n$ aralık oyunların çözümünü bulmak için bir grafik yöntemi ifade edelim. Getiri matrisi

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \ldots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \ldots & \tilde{g}_{1n} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \ldots & \tilde{g}_{2n} \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.5.68}$$

ile verilen iki kişilik sıfır toplamlı $2\times n$ oyununu ele alalım. Oyunun değeri $\tilde{\nu}_*$ olsun.

I. oyuncunun iki tane saf stratejisi olduğundan karma stratejisini $\mathbf{x} = (x, 1-x)$, $x \in [0,1]$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda keyfi $j = 1,2,\ldots,n$ için

$$\tilde{g}(\mathbf{x},\mathrm{II}_j) = \tilde{g}_{1j}x + \tilde{g}_{2j}(1-x), \quad x \in [0,1]$$

olduğu elde edilir. Keyfi $j = 1,2,\ldots,n$ için $\tilde{\varphi}_j(\cdot) : [0,1] \to I(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\tilde{\varphi}_j(x) = \tilde{g}(\mathbf{x},\mathrm{II}_j)$$

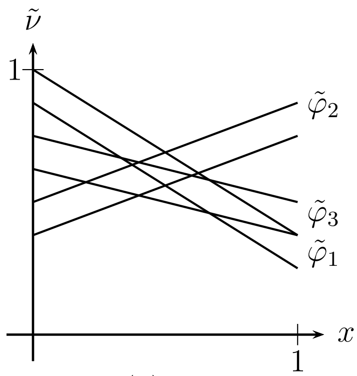
şeklinde gösterirsek

$$\tilde{\varphi}_j(x) = \tilde{g}_{1j}x + \tilde{g}_{2j}(1-x), \quad x \in [0,1]$$

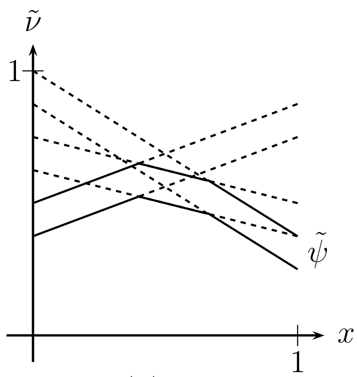
olur. Önerme 3.5.6 dan

$$\tilde{\nu}_* = \max_{\mathbf{x}\in X_2} \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) = \max_{\mathbf{x}\in[0,1]} \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{\varphi}_j(x)$$

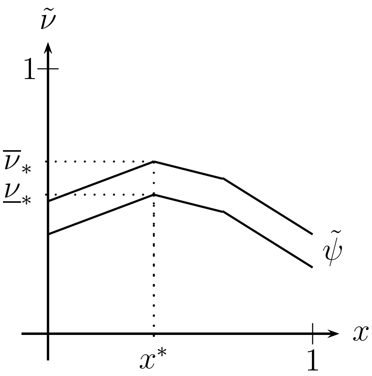
olup $\tilde{\nu}_*$ sayısı getiri matrisi (3.5.68) ile verilen oyunun değeri olur.



3.3 (a) 1. Adım



3.3 (b) 2. Adım



3.3 (c) 3. ve 4. Adımlar

Şekil 3.3: Oyunun çözümünü bulmak için bir grafik yöntem

Şimdi (3.5.68) getiri matrisi ile verilen aralık oyunun çözümünü bulabilmek için grafik yöntemin adımlarını verelim.

1. Adım $Ox\tilde{\nu}$ düzleminde keyfi $j = 1, 2, \ldots, n$ için $\tilde{\varphi}_j(\cdot) : [0,1] \to I(\mathbb{R})$ dönüşümlerinin grafiklerini çizelim (Şekil 3.3(a)).

2. Adım Her $x \in [0,1]$ için $\tilde{\psi}(x) = \min\limits_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{\varphi}_j(x)$ olmak üzere $\tilde{\psi}(\cdot) : [0,1] \to I(\mathbb{R})$ dönüşümünün grafiğini çizelim (Şekil 3.3(b)).

3. Adım $\tilde{\psi}(\cdot) : [0,1] \to I(\mathbb{R})$ dönüşümünün grafiğini kullanarak bu dönüşümün [0,1] aralığındaki maksimumu $\tilde{\nu}_* = \max\limits_{x\in[0,1]} \tilde{\psi}(x)$ bulunur (Şekil 3.3(c)). Dolayısıyla (3.5.68) matrisi ile verilen aralık oyunun değeri elde edilmiş olur.

4. Adım $\tilde{\psi}(\cdot) : [0,1] \to I(\mathbb{R})$ dönüşümüne $[0,1]$ aralığında maksimum değerini veren $x^* \in [0,1]$ sayısını buluruz (Şekil 3.3(c)). $\tilde{\nu}_*$ oyunun değeri olmak üzere

$$\tilde{\nu}_* = \max_{x\in[0,1]} \tilde{\psi}(x) = \max_{x\in[0,1]} \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{\varphi}_j(x) = \min_{j=1,2,\ldots,n} \tilde{\varphi}_j(x^*)$$

olduğundan $\mathbf{x}^* = (x^*, 1-x^*) \in X_2$ karma stratejisi verilen oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

5. Adım II. oyuncunun optimal stratejisini buluruz.

$$J_* = \{j : \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_j) = \tilde{\nu}_*\}$$

olsun. $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ stratejisi II. oyuncunun karma optimal stratejisi olduğunu kabul edelim. Şimdi II_{j_*} saf stratejisi II. oyuncunun gereken stratejisi olmak üzere Teorem 3.4.10 dan $\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_{j_*}) = \tilde{\nu}_*$ olduğundan $j_* \in J_*$ olur. $j \notin J_*$

için II. oyuncunun II_j stratejisi gereken strateji değildir. II_j gereken strateji olmadığında gereken strateji tanımına göre $y_j = 0$ olur.

I. oyuncunun $\mathbf{x}^* = (x^*, 1-x^*) \in X_2$ optimal stratejisinde x^* ve $1-x^*$ sayılarından en az biri veya her ikisi de aynı anda sıfırdan farklı olur. Bu durumda

$$I_* = \begin{cases} \{2\} & , \quad x^* = 0 \quad \text{ise} \\ \{1,2\} & , \quad x^* \in (0,1) \quad \text{ise} \\ \{1\} & , \quad x^* = 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olsun. O halde gereken strateji tanımına göre I. oyuncunun $i \in I_*$ stratejisine karşılık I_i saf stratejisi, gereken strateji olur. Böylece Teorem 3.4.10 gereği keyfi $i_* \in I_*$ için

$$\tilde{g}(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}_*$$

olur. Bu eşitlik yardımıyla II. oyuncunun $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ karma optimal stratejisi elde edilir.

Örnek 3.5.7.

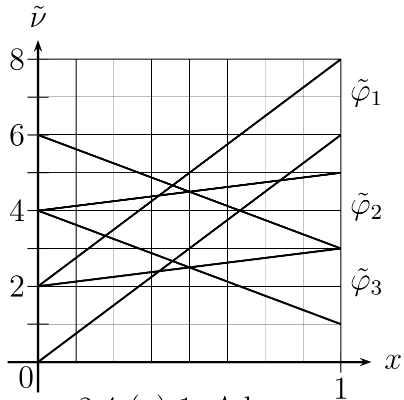
$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} [6,8] & [3,5] & [1,3] \\ [0,2] & [2,4] & [4,6] \end{pmatrix} \end{array}$$

matrisi ile verilen 2×3 *aralık oyununun çözümünü bulalım.*

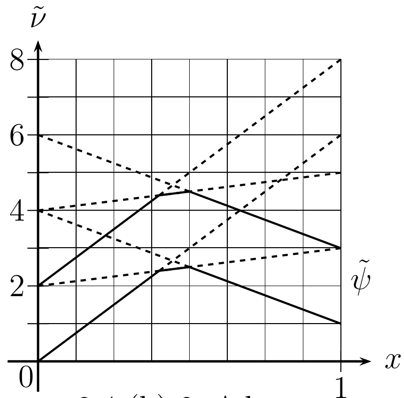
Verilen oyun sadeleştirilebilir değildir. Bu oyunun çözümünü grafik yöntemi kullanarak bulalım. I. *oyuncunun* $\mathbf{x} = (x, 1-x) \in X_2$, $x \in [0,1]$ *karma stratejisi ve* II. *oyuncunun saf stratejileri* II_j, $j = 1,2,3$ *için* $\tilde{\varphi}_j(x) = \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j)$ *dönüşümlerini hesaplayalım.*

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(x) &= \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{II}_1) = x \cdot [6,8] + (1-x) \cdot [0,2] = [6x, 2+6x] \quad , \quad x \in [0,1] \\ \tilde{\varphi}_2(x) &= \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{II}_2) = x \cdot [3,5] + (1-x) \cdot [2,4] = [2+x, 4+x] \quad , \quad x \in [0,1] \\ \tilde{\varphi}_3(x) &= \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{II}_3) = x \cdot [1,3] + (1-x) \cdot [4,6] = [4-3x, 6-3x] \quad , \quad x \in [0,1] \end{aligned}$$

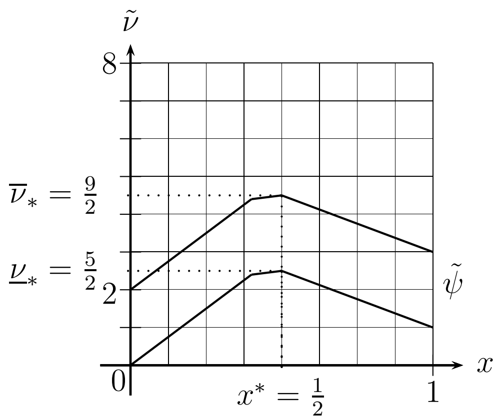
bulunur.



3.4 (a) 1. Adım



3.4 (b) 2. Adım



3.4 (c) 3. ve 4. Adımlar

Şekil 3.4: Getiri matrisi $\tilde{\mathbf{G}}$ olan oyunun grafik yöntemiyle çözümü

1. Adım $\tilde{\varphi}_j(\cdot) : [0,1] \to I(\mathbb{R})$, $j = 1,2,3$ *dönüşümlerinin grafiklerini çizelim* (Şekil 3.4 (a)).

2. Adım *Her* $x \in [0,1]$ *için* $\tilde{\psi}(x) = \min\limits_{j=1,2,3} \tilde{\varphi}_j(x)$ *olmak üzere* $\tilde{\psi}(\cdot) : [0,1] \to I(\mathbb{R})$ *dönüşümünün grafiğini çizelim.* Şekil 3.4 (b) *de görüldüğü gibi*

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(x) & , \quad x \in [0, \frac{2}{5}] \quad ise \\ \tilde{\varphi}_2(x) & , \quad x \in (\frac{2}{5}, \frac{1}{2}] \quad ise \\ \tilde{\varphi}_3(x) & , \quad x \in (\frac{1}{2}, 1] \quad ise \end{cases}$$

yani

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} [6x, 2+6x] & , \quad x \in [0, \frac{2}{5}] \quad ise \\ [2+x, 4+x] & , \quad x \in (\frac{2}{5}, \frac{1}{2}] \quad ise \\ [4-3x, 6-3x] & , \quad x \in (\frac{1}{2}, 1] \quad ise \end{cases} \tag{3.5.69}$$

olur (Şekil 3.4 (b)).

3. Adım (3.5.69) *ile verilen* $\tilde{\psi}(\cdot) : [0,1] \to I(\mathbb{R})$ *dönüşümünün grafiğini kullanarak* (Şekil 3.4 (c)), *bu dönüşümün* $[0,1]$ *aralığındaki maksimumu yani* $\tilde{\nu}_* = \max\limits_{x\in[0,1]} \tilde{\psi}(x)$ *değerini bulalım. Bu dönüşüm maksimum değerini* $x = \dfrac{1}{2}$ *noktasında alır ve bu* $\tilde{\nu}_*$ *değeri,* $\tilde{\nu}_* = \left[\dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{2}\right]$ *olur. O halde verilen oyunun değeri* $\tilde{\nu}_* = \left[\dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{2}\right]$ *olur.*

4. Adım *Şimdi de* $\tilde{\psi}(\cdot) : [0,1] \to I(\mathbb{R})$ *dönüşümüne* $[0,1]$ *aralığında maksimum değerini veren* $x^* \in [0,1]$ *sayısını bulalım. Bu sayı* 3. Adım *da* $\tilde{\nu}_*$ *değerini hesaplarken bulunmuştu. Yani* Şekil 3.4 (c) *den de görüldüğü üzere* $x^* = \dfrac{1}{2}$ *olur. O halde verilen oyunda* I. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{x}^* = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ *olur.*

5. Adım *Son olarak* II. *oyuncunun optimal stratejisini bulalım.* Şekil 3.4 (c) *den*

$$\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_2) = [2+6x, 4+x] = \left[2 + 6\cdot\frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$$
$$\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_3) = [4-3x, 6-3x] = \left[4 - 3\cdot\frac{1}{2}, 6 - 3\cdot\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

olur. O halde $J_* = \{2,3\}$, *yani* II_2 *ve* II_3 *stratejileri* II. *oyuncunun gereken stratejileri olup* II_1 *gereken strateji değildir. Bu durumda* II. *oyuncunun optimal stratejisi*

$$\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1-y^*)$$

şeklindedir. Ayrıca I. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{x}^* = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \in X_2$ *olduğundan* I. *oyuncunun* I_1 *ve* I_2 *stratejileri gereken stratejilerdir.* $I_* = \{1,2\}$ *ve* *oyunun değeri* $\tilde{\nu}_* = \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$ *olduğundan Teorem 3.4.10 gereği*

$$\tilde{g}(\mathrm{I}_1, \mathbf{y}^*) = \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right] \quad ve \quad \tilde{g}(\mathrm{I}_2, \mathbf{y}^*) = \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

olur. $\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\mathrm{I}_1, \mathbf{y}^*) &= 0 \cdot [6, 8] + y^* \cdot [3, 5] + (1 - y^*) \cdot [1, 3] = [1 + 2y^*, 3 + 2y^*] \\ \tilde{g}(\mathrm{I}_2, \mathbf{y}^*) &= 0 \cdot [0, 2] + y^* \cdot [2, 4] + (1 - y^*) \cdot [4, 6] = [4 - 2y^*, 6 - 2y^*] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$[1 + 2y^*, 3 + 2y^*] = \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right] \quad ve \quad [4 - 2y^*, 6 - 2y^*] = \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

elde edilir. Bu eşitlikler çözüldüğünde $y^* = \frac{3}{4}$ *bulunur. Dolayısıyla verilen oyunda* II. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$ *den*

$$\mathbf{y}^* = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

olduğu elde edilir. Böylece verilen oyunun çözümü

$$\left(\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \mathbf{y}^* = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]\right)$$

üçlüsü olarak bulunur.

4 SONUÇ

Bu çalışmada, matris oyunlar aralık matris oyunlara genelleştirilerek aralık matris oyunların çözümleri incelenmiştir.

Öncelikle oyun teorisi ile ilgili temel kavramlar üzerinde durulmuş, iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunların yani matris oyunların çözümleri incelenmiştir. Aralık matris oyunların çözümünde getiri matrisindeki aralıklar arasındaki sıralama önemlidir. Bu yüzden aralık karşılaştırmasında bir bağıntıya ihtiyaç duyulmuştur. Aralık matris oyunların çözümüne geçmeden önce aralıkların fuzzy karşılaştırması için bir sıralama bağıntısı verilmiştir.

Verilen bir oyunda oyunculardan herhangi biri optimal stratejisi ile oynadığında diğer oyuncu da gereken stratejisiyle oynarsa elde edilen getirinin oyunun değerine eşit olacağını ifade eden bir teorem ile oyunun değerini karakterize eden bir önerme ayrıca aralık matris oyunlar için bu sıralama bağıntısı yardımıyla kanıtlanmıştır.

$2\times n$ matris oyunların çözümünde kullanılan grafik yöntemi yardımıyla $2\times n$ aralık matris oyunların çözümü de incelenmiştir. Getiri matrisindeki aralıkların yarıçapı yani uzunlukları eşit olan aralıklar dikkate alınarak $2\times n$ aralık matris oyununun çözümü incelenmiştir. Getiri aralıklarının uzunlukları farklı olan $2\times n$ aralık matris oyunların çözümü de mevcut yöntemler geliştirilerek ya da yeni yöntemler ortaya koyarak çözümleri incelenebilir.

Kaynaklar

[1] Zermelo, E., "Uber eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels", *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, **2**, 501-504, 1913.

[2] von Neumann, J., "Zur theorie der gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen*, **100**, 295-320, 1928.

[3] von Neumann, J. ve Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.

[4] Nash, J. F., "The bargaining problem", *Econometrica*, **18**, 155-162, 1950.

[5] Nash, J. F., "Equilibrium points in n-person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, U. S. A., **36**, 48-49, 1950.

[6] Nash, J. F., "Non-Cooperative Games", *The Annals of Mathematics*, **54**(2), 286-295, 1951.

[7] Nash, J. F., "Two-person cooperative games", *Econometrica*, **21**, 128-140, 1953.

[8] Kumar, S. ve Reddy, D. S. N., "Graphical solution of $(n \times m)$ matrix of a game theory", *European Journal of Operational Research*, **112**, 467-471, 1999.

[9] Nair, K. G. K. ve Ranjith, G., "Solutions of (3×3) games using graphical method", *European Journal of Operational Research*, **112**, 472-478, 1999.

[10] Moore, R. E., *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.

[11] Moore, R. E., *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, 1979.

[12] Collins, W. D. ve Hu, C., "Interval matrix games", *Knowledge Processing with Interval and Soft Computing*- Chapter7, Springer, London, 2008.

[13] Sengupta, A. ve Pal, T. K., "On comparing interval numbers", *European Journal of Operational Research*, **127**, 28-43, 2000.

[14] Nayak, P. K. ve Pal M., "Linear programming technique to solve two person matrix games with interval pay-offs", *Asia-Pasific Journal of Operational Research*, **26**(2), 285-305, 2009.

[15] Zadeh, L. A., "Fuzzy sets", *Information and Control*, **8**(3), 338-353, 1965.

[16] Liu, S-T. ve Kao, C., "Matrix games with interval data", *Computers and Industrial Engineering*, **56**(4), 1697-1700, 2009.

[17] Li, D-F.,"Linear programming approach to solve interval-valued matrix games", *Omega* **39**(6), 655-666, 2011.

[18] Nayak, P. K. ve Pal M., "Solution of rectangular interval games using grapcihal method", *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences* **22**(1), 95-115, 2006.

[19] Ishibuchi, H. ve Tanaka, H., "Multiobjective programming in optimization of the interval objective function", *European Journal of Operational Research*, **48**(2), 219-225, 1990.

[20] Ferguson, T. S., *Game Theory*, University of California at Los Angeles, 2013.
http://www.math.ucla.edu/∼tom/Game_Theory/mat.pdf

[21] Guseinov, K. G., Akyar, E. ve Düzce, S. A., *Oyun Teorisi Çatışma ve Anlaşmanın Matematiksel Modelleri*, Seçkin Yayınları, Ankara, 2010.

[22] Akyar, H. ve Akyar E., "A graphical method for solving interval matrix games", *Abstract and Applied Analysis*, 17 pages, 2011.

[23] Kwang, H. Lee, *First Course on Fuzzy Theory and Applications*, Springer, Germany, 2005.