

**RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE
 Spin^T YAPISI VE DİRAC OPERATÖRÜ**

Doktora Tezi

Ali Kemal ERKOCA

Eskişehir, 2019

RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE
 Spin^T YAPISI VE DİRAC OPERATÖRÜ

Ali Kemal ERKOCA

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Şenay BULUT

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Mayıs, 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ali Kemal ERKOCA'nın "Riemann Manifoldları Üzerinde Spin^T Yapısı ve Dirac Operatörü" başlıklı tezi **24/05/2019** tarihinde, aşağıdaki juri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Ünvanı-Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Şenay BULUT	
Üye	: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENÇİ	
Üye	: Prof. Dr. Ayşe BAYAR KORKMAZOĞLU	
Üye	: Prof. Dr. Cumali EKİCİ	
Üye	: Prof. Dr. Murat LİMONCU	

Enstitü Müdürü

ÖZET

RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE Spin^T YAPISI VE DIRAC OPERATÖRÜ

Ali Kemal ERKOCA

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Mayıs, 2019

Danışman: Doç. Dr. Şenay BULUT

Bu tez çalışmasında yönlendirilebilir Riemann manifoldları üzerinde bilinen Spin^c spinor teorisine benzer şekilde Spin^T spinor teorisinin kurgulanabilirliği araştırılmıştır. Öncelikle $\text{Spin}^T(n)$ grubu tanımlanmış ve bu grubun bazı özellikleri araştırılmıştır. Düşük boyutlarda $\text{Spin}^T(n)$ grubu incelenmiştir. $\text{Spin}^c(n)$ grubunun temsilinden hareketle $\text{Spin}^T(n)$ grubunun temsili verilmiştir. Yönlendirilebilir Riemann manifoldları üzerinde Spin^T -yapısı tanımlanmıştır. $\text{Spin}^T(n)$ grubunun temsili kullanılarak Spin^T spinor demedi inşa edilmiştir. Daha sonra yönlendirilebilir Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu yardımıyla Spin^T spinor demedi üzerinde kovaryant türev operatörü tanımlanmıştır. Bu kovaryant türev kullanılarak Spin^T Dirac operatörü tanımlanmış ve bazı özellikleri araştırılmıştır. Son olarak Spin^T Dirac operatörünün Schrödinger-Lichnerowicz tipindeki formüle benzer bir formülü sağladığı gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: $\text{Spin}^T(n)$ grubu; Spin^T Dirac Operatörü; Spinor Demedi; Schrödinger-Lichnerowicz tipindeki formül.

ABSTRACT

Spin^T STRUCTURE AND DIRAC OPERATOR ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

Ali Kemal ERKOCA

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, May, 2019

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şenay BULUT

In this thesis, the constructability of Spin^T spinor theory similar to known Spin^c spinor theory is investigated on the orientable Riemannian manifolds. Firstly, the group $\text{Spin}^T(n)$ is defined and some properties of this group are studied. In low dimensions, the group $\text{Spin}^T(n)$ is examined. With the aid of the representation of the group $\text{Spin}^c(n)$ the representation of the group $\text{Spin}^T(n)$ is given. The Spin^T -structure is defined on the orientable Riemannian manifolds. By using the representation of the group $\text{Spin}^T(n)$, the Spin^T spinor bundle is constructed. Then, by the way of the Levi-Civita connection on the orientable Riemannian manifolds, the covariant derivative operator is defined on Spin^T spinor bundle. By using this covariant derivative, Spin^T Dirac operator is defined and some properties of Spin^T Dirac operator is investigated. Lastly, Spin^T Dirac operator is shown to provide a formula similar to the Schrödinger-Lichnerowicz type formula.

Keywords: The group $\text{Spin}^T(n)$; Spin^T Dirac operator; Spinor bundle
Schrödinger-Lichnerowicz-type formula.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emeği olan ve her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Şenay BULUT'a, doktora çalışmam boyunca her zaman yanımda olan sevgili eşime ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ali Kemal ERKOCA

Mayıs 2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Ali Kemal ERKOCA

24/05/2019

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. CLİFFORD CEBİRİ	2
2.1 Kompleks Clifford Cebiri	11
2.2 Spin Grubu	12
2.3 Düşük Boyutlarda $Spin(n)$ Grubu	16
2.4 $Spin^c(n)$ Grubu	20
2.5 $Spin^T(n)$ Grubu	21
3. ASLİ LİF DEMETLERİ	27
3.1 Geçis Fonksiyonları	28
4. ASLİ LİF DEMEDİNİN KESİTLERİ	30
4.1 Asli Lif Demedi Üzerinde Konneksiyonlar	31
5. VEKTÖR DEMEDİ	34
5.1 Vektör Demetlerinin Lokal ve Global Kesitleri	37

	<u>Sayfa</u>
5.2 Lokal ve Global Çatılar.....	38
5.3 Vektör Demedi Üzerinde Kovaryant Türev	41
5.4 Çatı Demedi	42
6. ASOSYE VEKTÖR DEMEDİ.....	45
6.1 Asosye Vektör Demedi Üzerinde Kovaryant Türev	48
7. Spin^T –YAPISI.....	52
8. SPİNOR DEMEDİ VE DIRAC OPERATÖRÜ	53
8.1 Schrödinger-Lichnerowicz Tipinde Formül	60
9. SONUÇ.....	71
KAYNAKÇA.....	72
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$T(V)$	: Tensör cebiri
(V, q)	: Kuadratik uzay
$Cl(V, q)$	: (V, q) Kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebiri
Cl_n	: Reel Clifford cebiri
$\mathbb{C}l_n$	: Kompleks Clifford cebiri
$Spin(n)$	: Reel Spin grubu
TM	: M manifoldu üzerindeki tanjant demedi
T^*M	: M manifoldu üzerindeki kotanjant demedi
$Spin^c(n)$	: $(Spin(n) \times S^1)/\pm 1$ bölüm grubu
$Spin^T(n)$	: $(Spin(n) \times S^1 \times S^1)/\pm 1$ bölüm grubu
$\chi(M)$	: M manifoldu üzerindeki düzgün vektör alanları kümesi
$O(V)$	: V üzerinde ortogonal grup

1. GİRİŞ

Yönlendirilmiş Riemann ve yarı-Riemann manifoldları üzerinde inşa edilen Spin ve Spin^c manifoldları hem matematikte hem de matematiksel fizikte yaygın olarak çalışılmaktadır [2–4, 15, 16]. Dirac operatörü ilk olarak 1928 de P. A. M. Dirac tarafından tanımlanmış ve fizikte genel rölativite teorisine önemli katkılar sağlamıştır. $\text{Spin}(n)$ ve $\text{Spin}^c(n)$ grubunun spinor temsilleri spinor demedinin inşasında önemli bir yere sahiptir. Spinor demedi üzerinde tanımlanan kovaryant türev operatörü ve Dirac operatörü, M Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu yardımıyla tanımlanır. Spin ve Spin^c yapısının varlığı M manifoldunun bazı topolojik özelliklerine bakılarak araştırılmıştır [2]. Spin manifoldlarının aynı zamanda Spin^c manifoldu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca hemen hemen hermityen manifoldlar üzerinde tanımlanan Dirac operatörü yardımıyla metrik kontak manifoldlar üzerinde de Dirac operatörü tanımlanmıştır [14].

[1] de verilen makalede merkezindeki elemanların karesi 1 olacak şekildeki G kompakt Lie grubu üzerinde $\text{Spin}^G(n)$ grubu tanımlanmıştır. Daha sonra yönlendirilmiş Riemann manifoldları üzerinde $\text{Spin}^G(n)$ yapısı tanımlanmış ve bu yapıya sahip olan manifoldların varlığı irdelenmiştir.

Bu tezde [1] de verilen makaleden ve Spin^c grubunun tanımlanışından hareketle $\text{Spin}^T(n)$ grubu tanımlanmıştır. $\text{Spin}^T(n)$ grubunun temsili $\text{Spin}^c(n)$ grubunun temsili kullanılarak elde edilmiştir ve bazı özellikleri incelenmiştir. Düşük boyutlarda $\text{Spin}^T(n)$ grubuna bakılmıştır. Spin^T manifoldu tanımlanmış ve $\text{Spin}^T(n)$ grubunun temsili yardımıyla Spin^T spinor demedi inşa edilmiştir. Bu demet üzerinde kovaryant türev operatörü yönlendirilmiş Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu yardımıyla oluşturulmuştur. Daha sonra Spin^T Dirac operatörü tanımlanmış ve bazı özellikleri araştırılmıştır. Son olarak Spin ve Spin^c teorisinde bilinen Schrödinger-Lichnerowicz formülüne benzer bir formül elde edilmiştir.

2. CLIFFORD CEBİRİ

V bir reel vektör uzayı ve $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ non-dejenere kuadratik form olsun. Burada $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ non-dejenere simetrik bilinear form olmak üzere $q(v) = b(v, v)$ dir. Clifford cebiri aşağıdaki evrensel özellikle karakterize edilir.

$Cl(V, q)$ birimli ve birleşmeli bir cebir ve $i : V \rightarrow Cl(V, q)$ lineer gömme dönüşümü $i(v)^2 = q(v) \cdot 1$ özelliğini sağlasın. A herhangi birimli ve birleşmeli bir cebir ise $f(v)^2 = q(v) \cdot 1$ eşitliğini sağlayan bir $f : V \rightarrow A$ lineer dönüşümü için tek bir $\tilde{f} : Cl(V, q) \rightarrow A$ cebir homomorfizmi vardır öyle ki aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{f} & \\ Cl(V, q) & & \end{array}$$

Yani $\tilde{f} \circ i = f$ ve $\tilde{f}, f$ nin genişletilmiştir. $Cl(V, q)$ bu özellikle tek türlü belirlidir. Yani B başka bir birimli, birleşmeli cebir ve $j(v)^2 = q(v) \cdot 1$ koşulunu sağlayan $j : V \rightarrow B$ gömme dönüşümü olmak üzere ve yukarıdaki evrensel özellik aynı zamanda B için sağlanıyorsa o zaman $h : Cl(V, q) \rightarrow B$ cebir homomorfizmi vardır öyle ki aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & B \\ \downarrow i & \nearrow h & \\ Cl(V, q) & & \end{array}$$

Önerme 2.0.1. $Cl(V, q)$ ve B cebirleri i ve j gömme dönüşümlerine göre de izomorfiktir.

Kanıt. Bunu görmek için i ve j test dönüşümlerini kullanalım. $Cl(V, q)$ ve B nin evrenselliğinden $\tilde{i}$ ve $\tilde{j}$ cebir homomorfizmlerini elde ederiz.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & B \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{j} & \\ Cl(V, q) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & B \\ \downarrow i & \nwarrow \tilde{i} & \\ Cl(V, q) & & \end{array}$$

$\tilde{i}$ ve $\tilde{j}$ birbirlerinin tersidir. Çünkü i yi test dönüşümü olarak kullanırsak ($f = i$)

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & Cl(V, q) \\ i \downarrow & \nearrow Id & \\ Cl(V, q) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & Cl(V, q) \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{i}\tilde{j} & \\ Cl(V, q) & & \end{array}$$

Id ve $\tilde{i}\tilde{j}$, i nin genişletilmiştir.

$$(\tilde{i}\tilde{j})i = \tilde{i}(\tilde{j}i) = \tilde{i}j = i$$

Genişletmenin tekliğinden $\tilde{i}\tilde{j} = Id_{Cl(V, q)}$ olur.

Benzer şekilde

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & B \\ j \downarrow & \nearrow Id & \\ B & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & B \\ j \downarrow & \nearrow \tilde{j}\tilde{i} & \\ B & & \end{array}$$

$$(\tilde{j}\tilde{i}) = Id_B$$

Böylece $\tilde{i}$ ve $\tilde{j}$, biri diğerinin tersi olan izomorfizmlerdir. $\square$

$V = \mathbb{R}^n$ ve $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$, $r + s = n$ olsun. Bu durumda q non-dejenere kuadratik formdur. Bu durumda $Cl(\mathbb{R}^n, q)$ yu $Cl_{r,s}$ ile, $Cl_{n,0}$ ı Cl'_n ile $Cl_{0,n}$ yi de Cl_n ile göstereceğiz.

Önerme 2.0.2. (V, b) bilineer form ve V nin bir tabanı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ise $i \neq j$ iken $b(e_i, e_j) = 0$ olsun. O zaman $Cl(V, q)$ Clifford cebiri $e_1, e_2, \dots, e_n \in V \subset Cl(V, q)$ elemanları tarafından üretilir ve $e_i^2 = q(e_i) \cdot 1$ ve $i \neq j$ iken $e_i e_j + e_j e_i = 0$ eşitlikleri sağlanır. $Cl(V, q)$ vektör uzayının tabanı

$$1, e_{i_1} \dots e_{i_s} (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n, 1 \leq s \leq n)$$

elemanları tarafından oluşturulur.

Kanıt. $V \subset Cl(V, q)$, $Cl(V, q)$ yu çarpımsal olarak üretir. $\{e_1, \dots, e_n\}$, V vektör uzayının bir tabanı olsun. Böylece $\{e_1, \dots, e_n\}$, $Cl(V, q)$ cebirini de üretir. Ayrıca $e_i^2 = q(e_i) \cdot 1$ ve

$$(e_i + e_j)^2 = q(e_i + e_j) \cdot 1$$

$$e_i^2 + e_i e_j + e_j e_i + e_j^2 = q(e_i + e_j) \cdot 1$$

$$q(e) \cdot 1 + e_i e_j + e_j e_i + q(e_j) \cdot 1 = q(e_i + e_j) \cdot 1$$

ise

$$e_i e_j + e_j e_i = 2b(e_i, e_j) \cdot 1$$

dir. Buradan $i \neq j$ iken $b(e_i, e_j) = 0$ olacağından $e_i e_j + e_j e_i = 0$ sonucu elde edilir. Burada 2^n eleman $Cl(V, q)$ yu üretir.

Sonuç olarak $\dim(Cl(V, q)) = 2^n$ olduğundan 2^n tane eleman bir taban olmak zorundadır. $\square$

1 birim olarak hareket eder ve

$$e_i^2 = 1, \quad 1 \leq i \leq r$$

$$e_i^2 = -1, \quad r+1 \leq i \leq r+s = n$$

$$e_i e_j = -e_j e_i$$

dir.

Düşük boyuttaki bazı örnekleri hesaplayalım.

Örnek 2.0.3. $q(x) = x^2$ formu alındığında $(\mathbb{R}, q)$ kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebiri $Cl'_1 = Cl_{1,0}$ dir.

$\{e'\}$ bu kuadratik uzay için Sylvester tabanı olsun. O zaman $q(e') = 1$ olup $e'^2 = q(e') \cdot 1 = 1$ dir. Önerme 2.0.2 den dolayı $Cl'_1 = \langle 1, e' \rangle$ dir. Her bir $\gamma \in Cl'_1$ elemanı $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ için

$$\gamma = \gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 e'$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda tabanlar üzerinde

$$\begin{aligned} \psi'_1 : \quad Cl'_1 &\rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ 1 &\mapsto (1, 1) \\ e' &\mapsto (-1, 1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan γ_1 dönüşümü bir cebir izomorfizmidir. Daha açık yazarsak

$$'_1(\gamma_0 1 + \gamma_1 e') = (\gamma_0 - \gamma_1, \gamma_0 + \gamma_1)$$

elde edilir.

Örnek 2.0.4. $q(x) = -x^2$ kuadratik formunu alırsak $(\mathbb{R}, q)$ kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebirini $Cl_1 = Cl_{0,1}$ ile göstereyim. $\{e\}$ bu kuadratik uzay için Sylvester tabanı olsun. O zaman $q(e) = -1$ olup

$$e^2 = q(e) \cdot 1 = -1$$

dir. Önerme 2.0.2 den dolayı $Cl_1 = \langle 1, e \rangle$ olur. Her bir $\gamma \in Cl_1$ elemanı ve $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ için $\gamma = \gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 e$ şeklinde yazılabilir. Bu şekilde tabanlar üzerinde

$$\begin{array}{ccc} \psi_1 : Cl_1 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ 1 & \mapsto & 1 \\ e & \mapsto & i \end{array}$$

olarak tanımlanan ψ_1 dönüşümü bir cebir izomorfizmidir. ψ_1 in açık ifadesi

$$\psi_1(\gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 e) = \gamma_0 + \gamma_1 i$$

dir. O halde Cl_1 cebiri $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cebirine izomorftur.

Örnek 2.0.5. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerinde $q(x) = x_1^2 + x_2^2$ formunu aldığımızda buna karşılık gelen Clifford cebiri $Cl'_2 = Cl_{2,0}$ olur. $\{e'_1, e'_2\}$ bu kuadratik uzay için Sylvester tabanı olsun. O halde

$$e'^2_i = q(e'_i) \cdot 1 = 1, \quad 1 \leq i \leq 2$$

dir. Önerme 2.0.2 den dolayı

$$Cl'_2 = \langle 1, e'_1, e'_2, e'_1 e'_2 \rangle$$

dir. Her bir $\gamma \in Cl'_2$ elemanı ve $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_{12} \in \mathbb{R}$ için

$$\gamma = \gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 e'_1 + \gamma_2 e'_2 + \gamma_{12} e'_1 e'_2$$

olarak yazılabilir. O halde tabanlar üzerinde

$$\begin{aligned} \psi'_2 : Cl'_2 &\rightarrow \mathbb{R}(2) \\ 1 &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ e'_1 &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ e'_2 &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ e'_1 e'_2 &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ψ'_2 dönüşümü bir cebir izomorfizmidir. Bu dönüşümü açık olarak yazarsak

$$\psi'_2(\gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 e'_1 + \gamma_2 e'_2 + \gamma_{12} e'_1 e'_2) = \begin{bmatrix} \gamma_0 + \gamma_2 & \gamma_1 - \gamma_{12} \\ \gamma_1 + \gamma_{12} & \gamma_0 - \gamma_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Yani Cl'_2 cebiri $\mathbb{R}(2)$ cebirine izomorftur.

Örnek 2.0.6. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerinde $q(x) = -x_1^2 - x_2^2$ kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebiri $Cl_2 = Cl_{0,2}$ dir. $\{e_1, e_2\}$ bu kuadratik uzay için Sylvester tabanı olsun. O zaman

$$q(e_i) = -1$$

olur. Ayrıca $e_i^2 = q(e_i) \cdot 1 = -1$ dir. Önerme 2.0.2 den dolayı

$$Cl_2 = \langle 1, e_1, e_2, e_1 e_2 \rangle$$

olur. Her bir $\gamma \in Cl_2$ elemanı ve $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_{12} \in \mathbb{R}$ için

$$\gamma = \gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_{12} e_1 e_2$$

olarak yazılabilir. Taban elemanları üzerinde dönüşümü yazarsak

$$\begin{aligned}\psi_2 : Cl_2 &\rightarrow \mathbb{H} \\ 1 &\mapsto 1 \\ e_1 &\mapsto i \\ e_2 &\mapsto j \\ e_1 e_2 &\mapsto k\end{aligned}$$

olur. Görülür ki ψ_2 dönüşümü cebir izomorfizmidir. Açık olarak yazarsak

$$\psi_2(\gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_{12} e_1 e_2) = \gamma_0 1 + \gamma_1 i + \gamma_2 j + \gamma_{12} k$$

olur. Sonuç olarak Cl_2 cebiri $\mathbb{H}$ kuaterniyon cebirine izomorftur.

Örnek 2.0.7. Şimdi de $Cl_{1,1}$ cebirini hesaplayalım. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerinde $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ kuadratik formunu düşünelim. Bu forma karşılık gelen Clifford cebiri $Cl_{1,1}$ dir. $\{e, e'\}$ bu kuadratik uzay için Sylvester tabanı olsun. O halde

$$\begin{aligned}q(e') &= 1 \quad \text{olup} \quad e'^2 = q(e') \cdot 1 = 1 \quad \text{ve} \\ q(e) &= -1 \quad \text{olup} \quad e^2 = q(e) \cdot 1 = -1 \quad \text{dir.}\end{aligned}$$

Önerme 2.0.2 den dolayı $Cl_{1,1} = \langle 1, e, e', ee' \rangle$ olur. Her bir $\gamma \in Cl_{1,1}$ elemanı ve $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_{12} \in \mathbb{R}$ için

$$\gamma = \gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 e + \gamma_2 e' + \gamma_{12} ee'$$

olarak yazılabilir. Tabanlar üzerinde

$$\begin{aligned}\psi_{1,1} : Cl_{1,1} &\rightarrow \mathbb{R}(2) \\ 1 &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ e' &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ e &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ ee' &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dönüşümünü yazarsak bir cebir izomorfizmi elde ederiz. Bu dönüşümün açık ifadesi

$$\psi_{1,1}(\gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 e + \gamma_2 e' + \gamma_{12} ee') = \begin{bmatrix} \gamma_0 + \gamma_{12} & \gamma_1 - \gamma_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \gamma_0 - \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

olur. Ayrıca $Cl_{1,1} \cong Cl'_2$ dir.

Önerme 2.0.8. Şimdi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & Cl_{r,s} \\ e_i & \mapsto & -e_i \end{array} \quad \text{dönüşümünü ele alırsak bu dönüşüm}$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha : Cl_{r,s} & \rightarrow & Cl_{r,s} \\ e_{i_1} \dots e_{i_k} & \mapsto & \alpha(e_{i_1} \dots e_{i_k}) = (-e_{i_1}) \dots (-e_{i_k}) \\ & & = (-1)^k e_{i_1} \dots e_{i_k} \end{array}$$

otomorfizmine genişler. Burada $\alpha \circ \alpha = I$ dir. Bu bize $Cl_{r,s}$ nin çift-tek ayrışımını verir öyle ki

$$Cl_{r,s}^0 = \{x \in Cl_{r,s} \mid \alpha(x) = x\}$$

$$Cl_{r,s}^1 = \{x \in Cl_{r,s} \mid \alpha(x) = -x\}$$

olmak üzere

$$Cl_{r,s} = Cl_{r,s}^0 \oplus Cl_{r,s}^1$$

dir.

Kanıt.

$$\kappa : V \rightarrow Cl(V, q)$$

$$\kappa(v) = -i(v)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman

$$\kappa(v)^2 = (-i(v))^2 = i(v)^2 = q(v) \cdot 1$$

olduğundan $\alpha : Cl_{r,s} \rightarrow Cl_{r,s}$ tek bir cebir homomorfizmi vardır öyle ki her $v \in V$

için $\alpha \circ i(v) = \kappa(v) = -i(v)$ koşulu sağlanır.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & Cl(V, q) \\ & \searrow \kappa & \downarrow \alpha \\ & & Cl(V, q) \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \alpha \circ i)(v) &= (\alpha \circ \alpha)i(v) = \alpha(\alpha \circ i(v)) \\ &= \alpha(-i(v)) = -\alpha \circ i(v) = i(v) \end{aligned}$$

olduğundan α^2 , $i(V) \subset Cl(V, q)$ kümesi üzerinde birimleşir. Bu yüzden $\alpha^2 = I$ dır. $\square$

Her Clifford cebiri $\alpha : Cl_{r,s} \rightarrow Cl_{r,s}$ involusyonunun yanı sıra bir de anti involusyon taşır. Bunu şöyle açıklayalım. A bir cebir ise $x * y = y \cdot x$ çarpımı ile A kümesi üzerinde yeni bir A^* cebirini tanımlayalım. (V, q) kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebiri $Cl_{r,s}$ olsun. $A^* = Cl_{r,s}^*$ cebirini düşünelim.

$$V \xrightarrow{i} A^* = Cl_{r,s}^*$$

lineer dönüşümü için

$$i(v) * i(v) = i(v) \cdot i(v) = i(v)^2 = q(v) \cdot 1$$

ilişkisi A^* cebirinde de geçerlidir. O halde Clifford cebirinin evrensel özelliğinden tek bir

$$t : Cl_{r,s} \rightarrow Cl_{r,s}^*$$

cebiri homomorfizmi vardır öyle ki her $v \in V$ için

$$i(v) = toi(v)$$

koşulu sağlanır.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & Cl_{r,s} \\ & \searrow i & \downarrow t \\ & & Cl_{r,s}^* \end{array}$$

$t : Cl_{r,s} \rightarrow Cl_{r,s}$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- t lineerdir.
- $t \circ t = Id$
- $\forall x, y \in Cl_{r,s}$ için $t(xy) = t(y)t(x)$
- $\forall v \in V$ için $t(v) = v$

Yani $t(e_i) = e_i$, $t(1) = 1$ ve $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ için

$$t(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}) = e_{i_k}e_{i_{k-1}}\dots e_{i_1}$$

olur.

Teorem 2.0.9.

$$(i) \quad Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \cong Cl_{0,n+2}$$

$$(ii) \quad Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n+2,0}$$

Kanıt. Bu izomorfizmler sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\pi_1 : Cl_{0,n+2} \rightarrow Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$$

$$\pi_1(e_i) = \begin{cases} e'_{i-2} \otimes e_1e_2, & 3 \leq i \leq n+2 \text{ ise} \\ 1 \otimes e_i, & i = 1 \text{ ve } i = 2 \text{ ise.} \end{cases}$$

$$\pi_2 : Cl_{n+2,0} \rightarrow Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}$$

$$\pi_2(e'_i) = \begin{cases} e_{i-2} \otimes e'_1e'_2, & 3 \leq i \leq n+2 \text{ ise} \\ 1 \otimes e'_i, & i = 1 \text{ ve } i = 2 \text{ ise.} \end{cases}$$

□

Yardımcı Teorem 2.0.10. *Aşağıdaki izomorfizmler mevcuttur.*

1. $\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{R}(m) \cong \mathbb{R}(nm)$
2. $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(n)$
3. $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{H}(n)$
4. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
5. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2)$
6. $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$

2.1. Kompleks Clifford Cebiri

Kompleks Clifford cebirleri, reel Clifford cebirlerinin aksine kompleks vektör uzayları üzerinde kompleks değerli non-dejenere kuadratik formlarla birlikte tanımlanır. Başka bir deyişle reel Clifford cebirlerinin kompleksleştirilmesidir. Yani $\mathbb{C}l_n = Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\cong Cl'_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ e_i \otimes 1 &\mapsto e'_i \otimes i \\ e_i \otimes i &\mapsto e'_i \otimes (-1) \end{aligned}$$

izomorfizmi mevcuttur. Burada $e_i^2 = -1$ ve $e_i'^2 = 1$ dir.

Teorem 2.1.1. $\mathbb{C}l_{n+2} = \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2$ dir.

Kanıt. $Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n+2,0}$ izomorfizmini ve pozitif tanımlı non-dejenere kompleks kuadratik form ile negatif tanımlı non-dejenere kompleks kuadratik formun denklğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \mathbb{C}l_{n+2} &= Cl_{n+2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong (Cl'_n \otimes_{\mathbb{R}} Cl_2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ &\cong Cl'_n \otimes_{\mathbb{R}} (Cl_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \cong Cl'_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}l_2 \\ &\cong Cl'_n \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2) \cong (Cl'_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2 \\ &\cong \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2 \end{aligned}$$

elde edilir. □

Şimdi $\mathbb{C}l_1, \mathbb{C}l_2, \mathbb{C}l_3, \mathbb{C}l_4$ cebirlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}l_1 &= Cl_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\ \mathbb{C}l_2 &= Cl'_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(2) \\ \mathbb{C}l_3 &\cong Cl_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2 \cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2) \cong \mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2) \\ \mathbb{C}l_4 &\cong Cl_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2 \cong \mathbb{C}(2) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2) \cong \mathbb{C}(4)\end{aligned}$$

Bu izomorfizmlerden tümevarım yöntemiyle $\mathbb{C}l_{2n} \cong \mathbb{C}(2^n)$ ve $\mathbb{C}l_{2n+1} \cong \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n)$ elde edilir.

Tanım 2.1.2. *Kompleks n -spinorların vektör uzayı $n = 2k$ veya $n = 2k + 1$ olmak üzere*

$$\Delta_n : \mathbb{C}^{2^k} = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{k \text{ tane}}$$

ile gösterilir.

Bu gösterim kullanılarak

$$\begin{aligned}n = 2k \text{ için } \mathbb{C}l_n &= End(\Delta_n) \\ n = 2k + 1 \text{ için } \mathbb{C}l_n &= End(\Delta_n) \oplus End(\Delta_n)\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

2.2. Spin Grubu

Şimdi norm fonksiyonunu

$$\begin{aligned}N : Cl_n &\rightarrow Cl_n \\ u &\mapsto u\alpha \circ t(u)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bazen $N(u) = \|u\|$ şeklinde gösterilecektir.

$V = \mathbb{R}^n$ ve $v_i \in V$ olmak üzere

$$Spin(n) := \{v_1 v_2 \cdots v_{2k} \mid N(v_i) = 1, v_i \in \mathbb{R}^n\} \subset Cl_n$$

yi tanımlayalım. Bu grup Cl_n deki terslenebilir elemanların oluşturduğu Cl_n^* de çarpımsal bir gruptur.

Şimdi $Spin(n)$ nin başka bir kullanışlı tanımını yapacağız.

$$\Gamma = \{u \in Cl_n^* \mid \alpha(u)xu^{-1} \in V, \forall x \in V\}$$

ve

$$\Gamma^0 = \Gamma \cap Cl_n^0$$

olsun.

Yardımcı Teorem 2.2.1. Γ, Cl_n^* in bir alt grubudur.

Kanıt. (i) $u_1, u_2 \in \Gamma \Rightarrow u_1 u_2 \in \Gamma$ olduğunu gösterelim.

$$\alpha(u_1 u_2) x (u_1 u_2)^{-1} = \alpha(u_1) \alpha(u_2) x u_2^{-1} u_1^{-1} = \alpha(u_1) (\alpha(u_2) x u_2^{-1}) u_1^{-1} \in V$$

olup $u_1 u_2 \in \Gamma$ dır.

(ii) $u \in \Gamma \Rightarrow u^{-1} \in \Gamma$ olduğunu gösterelim. Şimdi

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad}(u) : V &\rightarrow V \\ x &\mapsto \alpha(u) x u^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm birebirdir. Çünkü

$\alpha(u) x u^{-1} = 0$ ise $x = 0$ dır. Aynı zamanda verilen her $y \in V$ için $\alpha(u) x u^{-1} = y$ olacak şekilde $x \in V$ vardır. Yani

$$x = \alpha(u^{-1}) y u = \alpha(u^{-1}) y (u^{-1})^{-1}$$

Bu da demek oluyor ki $u^{-1} \in \Gamma$ dır.

□

Şimdi

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad} : \Gamma &\rightarrow GL(V) \\ u &\mapsto \widetilde{Ad}(u)(x) = \alpha(u) x u^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad}(u_1 u_2)(x) &= \alpha(u_1 u_2) x (u_1 u_2)^{-1} \\ &= \alpha(u_1) \alpha(u_2) x u_2^{-1} u_1^{-1} \\ &= \alpha(u_1) \widetilde{Ad}(u_2)(x) u_1^{-1} \\ &= \widetilde{Ad}(u_1) \circ \widetilde{Ad}(u_2)(x) \end{aligned}$$

eşitliğini sağladığından bir grup homomorfizmidir.

Yardımcı Teorem 2.2.2. $\widetilde{Ad}(u) \in O(V)$ dir, yani iç çarpımı korur.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{Ad}(u)(x), \widetilde{Ad}(u)(x) \rangle &= \langle \alpha(u)xu^{-1}, \alpha(u)xu^{-1} \rangle \\
&= (\alpha(u)xu^{-1})^2 \\
&= (\alpha(u)xu^{-1})(\alpha(u)xu^{-1}) \\
&= -\alpha(u)xu^{-1}\alpha(\alpha(u)xu^{-1}), \quad \alpha(v) = -v, \quad v \in V \\
&= -\alpha(u)xu^{-1}u\alpha(x)\alpha(u^{-1}) \\
&= -\alpha(u)x(-x)\alpha(u^{-1}) \\
&= \alpha(u) \langle x, x \rangle \alpha(u^{-1}) \\
&= \langle x, x \rangle
\end{aligned}$$

Öyleyse $\widetilde{Ad} : \Gamma \rightarrow O(V)$ dönüşümü elde edilir.

□

- $v \in V, v \neq 0$ ve $v \in \Gamma$ olsun.

$$\begin{aligned}
\alpha(v)xv^{-1} &= -(v)xv^{-1} = -(vx)v^{-1} \\
&= -(-(xv) - 2 \langle v, x \rangle)v^{-1} \\
&= x + 2 \langle v, x \rangle v^{-1} \\
&= x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\langle v, v \rangle} v \in V
\end{aligned}$$

- $\widetilde{Ad}(v), v^\perp$ boyunca bir yansımadır.

$\widetilde{Ad}(v)(v) = -v$ ve $x \in v^\perp$, yani $\langle v, x \rangle = 0$ için $\widetilde{Ad}(v)(x) = x$

$v^\perp$ boyunca bu yansımayı $Ref(v)$ ile göstereceğiz.

Yani $Ref(v) = \widetilde{Ad}(v)$ dir.

Yardımcı Teorem 2.2.3. $\widetilde{Ad} : \Gamma \rightarrow O(V)$ dönüşümünün çekirdeği, sıfırdan farklı olan skalerlerden oluşur.

Yardımcı Teorem 2.2.4. $\widetilde{Ad} : \Gamma \rightarrow O(V)$ örtendir.

Kanıt. Cartan-Dieudonné teoreminden herhangi bir $f \in O(V)$ yansımaların çarpımıdır şöyle ki;

$$\begin{aligned}
f &= Ref(v_1)Ref(v_2)...Ref(v_k) \text{ dır. } Ref(v) = \widetilde{Ad}(v) \text{ olduğu için} \\
f &= \widetilde{Ad}(v_1)\widetilde{Ad}(v_2)... \widetilde{Ad}(v_k) = \widetilde{Ad}(v_1v_2...v_k)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi Γ nın yapısını açıklayalım.

$u \in \Gamma$ olsun. $\widetilde{Ad}(u) \in O(V)$ yansımaların çarpımıdır.

$$\begin{aligned}\widetilde{Ad}(u) &= Ref(v_1)Ref(v_2)...Ref(v_k) \\ &= \widetilde{Ad}(v_1)\widetilde{Ad}(v_2)...\widetilde{Ad}(v_k) \\ &= \widetilde{Ad}(v_1v_2...v_k)\end{aligned}$$

O zaman

$$\widetilde{Ad}(u^{-1}v_1v_2...v_k) = Id$$

$u^{-1}v_1v_2...v_k =$ sıfırdan farklı skaler

$$u = \lambda v_1v_2...v_k, \quad v_i \in V, \quad v_i \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0$$

$$u = \lambda \underbrace{\|v_1\| \|v_2\| \dots \|v_k\|}_{\mu} \frac{v_1}{\|v_1\|} \frac{v_2}{\|v_2\|} \dots \frac{v_k}{\|v_k\|}, \quad v_i \neq 0, \quad \lambda \neq 0$$

$$u = \mu \omega_1 \omega_2 \dots \omega_k, \quad \omega_i \in V, \quad N(\omega_i) = 1, \quad \mu \neq 0$$

O halde şunu yazabiliriz:

$$\Gamma = \{\lambda v_1v_2...v_k | v_i \in V, \quad N(v_i) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*\}$$

ve

$$\Gamma^0 = \Gamma \cap Cl_n^0 = \{\lambda v_1v_2...v_k | v_i \in V, \quad N(v_i) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*\}$$

Sonuç olarak gördük ki $\widetilde{Ad} : \Gamma^0 \rightarrow SO(V)$ örten bir dönüşümdür. $\widetilde{Ad} : \Gamma^0 \rightarrow SO(V)$ dir ve bu dönüşümün çekirdeği sıfırdan farklı skalerlerdir. $\square$

N yi Γ ya kısıtlayalım, yani $N : \Gamma \rightarrow Cl_n$ olup

$$u = \lambda v_1v_2...v_k, \quad v_i \in V, \quad N(v_i) = 1, \quad \lambda \neq 0$$

$$t(u) = \lambda v_kv_{k-1}...v_1$$

$$\alpha \circ t(u) = \lambda(-v_k)(-v_{k-1})...(-v_1)$$

$$u \cdot \alpha \circ t(u) = \lambda v_1v_2...v_k \cdot \lambda(-v_k)(-v_{k-1})...(-v_1) = \lambda^2$$

elde edilir. Ayrıca $u_1, u_2 \in \Gamma$ için $N(u_1u_2) = N(u_1)N(u_2)$ dir.

Şimdi

$$\{u \in Cl_n^* | \alpha(u)xu^{-1} \in V, \quad x \in V \text{ için}, \quad N(u) = 1\} \cap Cl_n^0$$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme $Spin(n)$ ile çakışır. Çünkü ilk yerde u ,

$u = \lambda v_1v_2...v_k$ formunda olmak zorundadır.

$N(u) = 1$ koşulu $\lambda = \pm 1$ i gerektirir.

$u \in Cl_n^0$ olduğu için k çift olmalıdır.

Öyleyse

$$\begin{aligned} Spin(n) &= \{v_1 v_2 \dots v_{2k} | v_i \in V, N(v_i) = 1\} \\ &= \{u \in Cl_n^* | \alpha(u) x u^{-1} \in V, \forall x \in V, N(u) = 1\} \cap Cl_n^0 \end{aligned}$$

olup son ifadeyi modifiye edersek

$$Spin(n) = \{u \in Cl_n^0 | u x u^{-1} \in V, \forall x \in V, u \alpha \circ t(u) = 1\} \text{ elde edilir.}$$

$\widetilde{Ad}$ yi $Spin(n) \subset \Gamma^0$ a kısıtlayabiliriz:

$$\widetilde{Ad} : Spin(n) \rightarrow SO(V)$$

Açıktır ki $\widetilde{Ad}$ örtendir. Biliyoruz ki çekirdeği yalnızca sıfırdan farklı skalerler olabilir.

$Spin(n)$ de hangi skalerlerin olduğunu bulmak için

$$v_1 v_2 \dots v_{2k} = \lambda \text{ (} Spin(n) \text{ de bir skaler olsun)}$$

alalım.

$$N(v_1 v_2 \dots v_{2k}) = N(\lambda) = \lambda^2$$

$$1 = \lambda^2$$

elde edilir. Tüm olasılıklar $\lambda = \pm 1$ üzerinedir ve her iki durumda çekirdektedir.

2.3. Düşük Boyutlarda $Spin(n)$ Grubu

$Spin(1)$, $Spin(2)$, $Spin(3)$, $Spin(4)$ gruplarını hesaplayalım.

$$Spin(n) = \{x \in Cl_n^0 | x v x^{-1} \in \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^n, N(x) = 1\}$$

Örnek 2.3.1. $Spin(1) = \{-1, 1\} \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Örnek 2.3.2. $Spin(2) = U(1)$ olduğunu gösterelim.

Cl_2 Clifford cebiri 4 eleman tarafından üretilir. Bu elemanlar

$$1, e_1, e_2, e_1 e_2$$

dir. Ayrıca bu elemanlar

$$e_1^2 = -1, \quad e_2^2 = -1, \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1$$

eşitliklerini sağlar. $Spin(2)$ de her eleman

$$x = a1 + be_1 e_2$$

olarak yazılabilir.

$$\bar{x} = a1 - be_1 e_2$$

olduğu için $N(x) = a^2 + b^2$ ve $N(x) = 1$ eşitliğinden $a^2 + b^2 = 1$ dir. O zaman $Spin(2)$, $a^2 + b^2 = 1$ olacak şekildeki $x = a1 + be_1 e_2$ şeklindeki elemanlardan oluşur.

$$\begin{aligned} Spin(2) &\rightarrow U(1) \\ a1 + be_1 e_2 &\mapsto a1 + bi \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alırsak $Spin(2)$, $U(1)$ 'e izomorfiktir.

Örnek 2.3.3. Şimdi de $Spin(3)$ e göz atalım. Cl_3 Clifford cebiri, 8 eleman tarafından üretilir. Bu elemanlar

$$1, e_1, e_2, e_3, e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3, e_1 e_2 e_3$$

dir ve bu elemanlar

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad i \neq j.$$

eşitliklerini sağlar. $Spin(3)$ grubundaki her eleman ise

$$x = a1 + be_1 e_2 + ce_1 e_3 + de_2 e_3$$

olarak yazılabilir.

$$\bar{x} = a1 - be_1 e_2 - ce_1 e_3 - de_2 e_3$$

olduğundan dolayı

$$N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

şeklindedir. $N(x) = 1$ olduğundan dolayı $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ eşitliği sağlanır. O zaman $Spin(3)$, $x = a1 + be_1e_2 + ce_1e_3 + de_2e_3$ elemanlarından oluşur öyle ki $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ dir.

$$\begin{aligned} Spin(3) &\rightarrow SU(2) \\ e_1e_2 &\mapsto \mathbf{i} \\ e_1e_3 &\mapsto \mathbf{j} \\ e_2e_3 &\mapsto \mathbf{k} \end{aligned}$$

dönüşümü altında $SU(2)$ ve $Spin(3)$ veya S^3 ile $Spin(3)$ arasında izomorfizm vardır.

Burada

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Örnek 2.3.4. $Spin(4)$ grubuna yakından bakalım. Cl_4 Clifford cebiri, 16 eleman tarafından üretilir. Bu elemanlar

$$1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_2e_3, e_2e_4, e_3e_4, e_1e_2e_3, e_1e_2e_4, e_2e_3e_4, e_1e_3e_4, e_1e_2e_3e_4$$

şeklindedir.

$$e_i^2 = -1, \quad e_ie_j = -e_je_i, \quad 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$$

eşitlikleri vardır. O halde $Spin(4)$ ün herhangi bir elemanı

$$x = a_11 + a_2e_1e_2 + a_3e_1e_3 + a_4e_2e_3 + a_5e_3e_4 + a_6e_2e_4 + a_7e_1e_4 + a_8e_1e_2e_3e_4,$$

şeklinde yazılabilir.

$$e_1e_2 \mapsto \mathbf{i}, e_1e_3 \mapsto \mathbf{j}, e_2e_3 \mapsto \mathbf{k}, -e_3e_4 \mapsto \mathbf{i}', e_2e_4 \mapsto \mathbf{j}', -e_1e_4 \mapsto \mathbf{k}'$$

ve

$$\mathbb{I} = e_1e_2e_3e_4$$

alalım.

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{i}^2 = -1, \quad \mathbf{j}^2 = -1, \quad \mathbf{k}^2 = -1$$

$$\mathbb{I}^2 = 1 \quad \text{ve} \quad \bar{\mathbb{I}} = \mathbb{I}$$

O zaman $\forall x \in Spin(4)$ için

$$x = u + \mathbb{I}v, \quad u \mapsto a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \quad \text{ve} \quad v \mapsto a'\mathbf{1} + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}$$

şeklinde yazılabilir.

Yukarıdaki eşitlikleri kullanarak

$$(u + \mathbb{I}v)(u' + \mathbb{I}v') = uu' + vv' + \mathbb{I}(uv' + vu')$$

şeklinde yazılır. Bu durumda,

$$N(u + \mathbb{I}v) = (u + \mathbb{I}v)(\bar{u} + \mathbb{I}\bar{v}) = u\bar{u} + v\bar{v} + \mathbb{I}(u\bar{v} + v\bar{u})$$

ve böylece

$$N(u + \mathbb{I}v) = 1$$

olması için

$$u\bar{u} + v\bar{v} = 1 \quad \text{ve} \quad u\bar{v} + v\bar{u} = 0 \tag{2.1}$$

olmalıdır.

Son olarak $Spin(4)$ grubunun

$$u + \mathbb{I}v \xrightarrow{\varphi} (u + v, u - v)$$

izomorfizmi altında

$$Spin(3) \times Spin(3)$$

çarpımına izomorf olduğunu görebiliriz. φ nin homomorfizma olduğunu görelim:

Şöyle ki 2.1 den dolayı

$$N(u+v) = (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) = 1 \quad \text{ve} \quad N(u-v) = (u-v)(\bar{u}-\bar{v}) = 1$$

olur ve

$$\varphi((u+\mathbb{I}v) \cdot (u'+\mathbb{I}v')) = \varphi(uu'+vv'+\mathbb{I}(uv'+vu')) = (uu'+vv'+uv'+vu', uu'+vv'-uv'-vu')$$

$$\varphi(u+\mathbb{I}v) \cdot \varphi(u'+\mathbb{I}v') = (u+v, u-v) \cdot (u'+v', u'-v') = (uu'+vv'+uv'+vu', uu'+vv'-(uv'+vu'))$$

dir.

2.4. $\text{Spin}^c(n)$ Grubu

Tanım 2.4.1. $\text{Spin}^c(n)$ grubu

$$\text{Spin}^c(n) := (\text{Spin}(n) \times S^1)/\{\pm 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\text{Spin}^c(n)$ grubunun elemanları $[g, z]$ denklik sınıflarıdır öyle ki $(g, z) \in \text{Spin}(n) \times S^1$ dir ve

$$(g, z) \sim (-g, -z)$$

denkliği vardır. Şimdi aşağıdaki homomorfizmleri tanımlayalım:

- a. $\lambda : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ 2:1 örtü dönüşümü ve $\lambda(g)(v) = gvg^{-1}$ olmak üzere $\lambda^c : \text{Spin}^c(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ ve $\lambda^c([g, z]) = \lambda(g)$ dir.
- b. $i : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Spin}^c(n)$ doğal gömme dönüşümü olmak üzere $i(g) = [g, 1]$ dir.
- c. $j : S^1 \rightarrow \text{Spin}^c(n)$ gömme dönüşümü ve $j(z) = [1, z]$ dir.
- d. $l : \text{Spin}^c(n) \rightarrow S^1$ dönüşümü $l([g, z]) = z^2$ şeklindedir.
- e. $p : \text{Spin}^c(n) \rightarrow \text{SO}(n) \times S^1$ dönüşümü $p([g, z]) = (\lambda(g), z^2)$ ile verilir. Buradan, $p = \lambda^c \times l$ olur. Buradaki p , 2:1 örtü dönüşümüdür.

Böylece, biz aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz öyle ki satır ve sütun tam dizidir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & S^1 & & \\
 & & & & \downarrow j & \searrow & \\
 1 \longrightarrow & Spin(n) & \xrightarrow{i} & Spin^c(n) & \xrightarrow{l} & S^1 & \longrightarrow 1 \\
 & \searrow \lambda & & \downarrow \lambda^c & & & \\
 & & & SO(n) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & 1 & & &
 \end{array}$$

$Spin^c(n)$ grubunun Lie cebiri

$$\mathfrak{spin}^c(n) = \mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R}$$

dir. Burada $\mathfrak{spin}(n) = \langle e_i e_j \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$ dir. p nin türev dönüşümü, yani

$$p_{*1} : \mathfrak{spin}^c(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R}$$

dönüşümü de ρ herhangi bir reel sayı ve $E_{\alpha\beta}$, $\alpha\beta$. girdisi -1 , $\beta\alpha$. girdisi 1 , diğer tüm girdileri sıfır olan $n \times n$ tipinde matris olmak üzere

$$p_{*1}(e_\alpha e_\beta, \rho i) = (2E_{\alpha\beta}, 2\rho i)$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.4.2. $Spin^c(1) \cong U(1)$

Örnek 2.4.3. $Spin^c(2) \cong U(1)$

Örnek 2.4.4. $Spin^c(3) \cong U(2)$

Örnek 2.4.5. $Spin^c(4) \cong \{(M, N) \in U(2) \times U(2) \mid \det M = \det N\} = U'$

2.5. $Spin^T(n)$ Grubu

$Spin^T(n)$ grubu, $Spin^c(n)$ grubuna benzer şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.5.1. $Spin^T(n)$ grubu

$$Spin^T(n) := (Spin(n) \times S^1 \times S^1) / \{\pm 1\}.$$

şeklinde tanımlanır.

$Spin^T(n)$ grubunun elemanları $[g, z_1, z_2]$ denklik sınıflarıdır öyle ki $(g, z_1, z_2) \in Spin(n) \times S^1 \times S^1$ için

$$(g, z_1, z_2) \sim (-g, -z_1, -z_2)$$

denkliği ile verilir.

Şimdi aşağıdaki homomorfizmleri tanımlayalım:

- a. $\lambda^T : Spin^T(n) \longrightarrow SO(n)$ ve $\lambda^T([g, z_1, z_2]) = \lambda(g)$ şeklindedir.
- b. $i : Spin(n) \longrightarrow Spin^T(n)$ doğal gömme dönüşümü olmak üzere $i(g) = [g, 1, 1]$ şeklindedir.
- c. $j : S^1 \times S^1 \longrightarrow Spin^T(n)$ gömme dönüşümü, $j(z_1, z_2) = [1, z_1, z_2]$ şeklindedir.
- d. $l : Spin^T(n) \longrightarrow S^1 \times S^1$ dönüşümü $l([g, z_1, z_2]) = (z_1^2, z_1 z_2)$ ile verilir.
- e. $p : Spin^T(n) \longrightarrow SO(n) \times S^1 \times S^1$ dönüşümü $p([g, z_1, z_2]) = (\lambda(g), z_1^2, z_1 z_2)$ ile verilir. Buradan, $p = \lambda^T \times l$ dir. Buradaki p , 2:1 örtü dönüşümüdür.

Böylece, aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir öyle ki satır ve sütun tam dizidir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & S^1 \times S^1 & & \\
 & & & & \downarrow j & \searrow & \\
 1 & \longrightarrow & Spin(n) & \xrightarrow{i} & Spin^T(n) & \xrightarrow{l} & S^1 \times S^1 \longrightarrow 1 \\
 & & \searrow \lambda & & \downarrow \lambda^T & & \\
 & & & & SO(n) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & &
 \end{array}$$

Ayrıca aşağıdaki tam dizi de geçerlidir:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin^T(n) \xrightarrow{p} SO(n) \times S^1 \times S^1 \longrightarrow 1.$$

Teorem 2.5.2. $Spin^T(n)$ grubu $Spin^c(n) \times S^1$ grubuna izomorftir.

Kanıt. φ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} Spin(n) \times S^1 \times S^1 &\xrightarrow{\varphi} Spin^c(n) \times S^1 \\ (g, z_1, z_2) &\mapsto ([g, z_1], z_1 z_2) \end{aligned}$$

Kolayca gösterilebilir ki φ örten bir homomorfizmdir ve φ nin çekirdeği $\{(1, 1, 1), (-1, -1, -1)\}$ kümesidir. Böylece, $Spin^T(n)$ grubu $Spin^c(n) \times S^1$ grubuna izomorftir. $\square$

$Spin(n)$ grubu kompleks Clifford cebiri $\mathbb{C}l_n$ nin içinde, yani $Spin(n) \subset Spin^c(n) \subset \mathbb{C}l_n$ olduğu için, $\mathbb{C}l_n$ nin temsili κ yı $Spin(n)$ grubuna kısıtlarsak spin temsili elde edilir. Bu κ temsili, $Spin^T(n)$ nin temsiline genişletilebilir. $Spin^T(n)$ den $[g, z_1, z_2]$ elemanı ve herhangi bir $\psi \in \Delta_n$ spinoru için, $Spin^T(n)$ nin spinor temsili

$$\kappa^T : Spin^T(n) \rightarrow Aut(\Delta_n)$$

$$\kappa^T[g, z_1, z_2]\psi = z_1^2 z_2 \kappa(g)(\psi)$$

ile verilir.

Önerme 2.5.3. Eğer $n = 2k + 1$ tek ise κ^T temsili indirgenemezdir.

Kanıt. Varsayalım ki $\{0\} \neq W \neq \Delta_{2k+1}$, $Spin^T(n)$ nin invaryant alt uzayı olsun. Bu durumda $\kappa^T[g, z_1, z_2](W) \subseteq W$ olur. Yani, $z_1^2 z_2 \kappa(g)(W) \subseteq W$ dir. Bu durumda, her $w \in W$ için, $w' \in W$ elemanı vardır öyle ki $z_1^2 z_2 \kappa(g)(w) = w'$ olur. $\kappa(g)(w) = \frac{1}{z_1^2 z_2} w' \in W$, yani $\kappa(g)(W) \subset W$ olup $Spin(n)$ nin κ temsili n tek olduğunda indirgenemez olduğu için bu bir çelişkidir. Öyleyse $Spin^T(n)$ nin temsili κ^T , $n = 2k + 1$ için indirgenemezdir. $\square$

Önerme 2.5.4. Eğer $n = 2k$ çift ise Δ_{2k} spinor uzayı, $\Delta_{2k} = \Delta_{2k}^+ \oplus \Delta_{2k}^-$ olmak üzere iki parçaya ayrışır.

Kanıt. $n = 2k$ durumunda $\text{Spin}(n)$ nin Δ_{2k} spinor uzayı, Δ_{2k}^+ ve Δ_{2k}^- şeklinde iki parçaya ayrışır. Bu durumda, biz $z_1^2 z_2 \kappa(g)(\Delta_{2k}^+) \subseteq \Delta_{2k}^+$ ve $z_1^2 z_2 \kappa(g)(\Delta_{2k}^-) \subseteq \Delta_{2k}^-$ durumlarını elde ederiz. Yani, $\kappa^T[g, z_1, z_2](\Delta_{2k}^+) \subseteq \Delta_{2k}^+$ ve $\kappa^T[g, z_1, z_2](\Delta_{2k}^-) \subseteq \Delta_{2k}^-$ olur. Buradan, $\text{Spin}^T(2k)$ nin spinor uzayı Δ_{2k} , Δ_{2k}^+ ve Δ_{2k}^- şeklinde iki parçaya ayrışır. Kolayca görülebilir ki

$$\kappa^{T\pm} : \text{Spin}^T(n) \rightarrow \text{Aut}(\Delta_n^\pm)$$

temsilleri indirgenemezdir. □

$\text{Spin}^T(n)$ grubunun Lie cebiri,

$$\mathfrak{spin}^T(n) = \mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

şeklindedir. Burada $\mathfrak{spin}(n) = \langle e_i e_j | 1 \leq i < j \leq n \rangle$ dir.

Teorem 2.5.5. $p_{*1} : \mathfrak{spin}^T(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ türev dönüşümü, ρ ve μ herhangi reel sayılar ve $E_{\alpha\beta}$, $\alpha\beta$. girdisi -1 , $\beta\alpha$. girdisi 1 , diğer tüm girdileri sıfır olan $n \times n$ tipinde matris olmak üzere

$$p_{*1}(e_\alpha e_\beta, i\rho, i\mu) = (2E_{\alpha\beta}, 2i\rho, i(\rho + \mu))$$

dir.

Kanıt. p dönüşümü

$$\begin{aligned} p : \text{Spin}^T(n) &\rightarrow SO(n) \times S^1 \times S^1 \\ [g, z_1, z_2] &\mapsto (\lambda(g), z_1^2, z_1 z_2) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\text{Spin}^T(n)$ üzerinde bir $\gamma(t)$ eğrisi alalım.

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \text{Spin}^T(n) \\ t &\mapsto \gamma(t) = [\cos t + \sin t e_\alpha e_\beta, \cos(\rho t) + i \sin(\rho t), \cos(\mu t) + i \sin(\mu t)] \end{aligned}$$

Buradan $\gamma(0) = [1, 1, 1]$ ve $\gamma'(0) = [e_\alpha e_\beta, i\rho, i\mu]$ olduğundan

$$p_{*1}(e_\alpha e_\beta, i\rho, i\mu) = p_{*1}(\gamma'(0)) = \left. \frac{d}{dt}(p \circ \gamma) \right|_{t=0}$$

olur.

$$\begin{aligned}
(p \circ \gamma)(t) &= (\lambda(\cos t + \sin t e_\alpha e_\beta), \cos 2pt + i \sin 2pt, \cos(\rho + \mu)t + i \sin(\rho + \mu)t) \\
\frac{d}{dt}(p \circ \gamma) &= \\
&= \left(\lambda'(\cos t + \sin t e_\alpha e_\beta), -2p \sin 2pt + 2ip \cos 2pt, -(\rho + \mu) \sin(\rho + \mu)t + i(\rho + \mu) \cos(\rho + \mu)t \right) \\
\frac{d}{dt}(p \circ \gamma) \Big|_{t=0} &= \left(2E_{\alpha\beta}, 2i\rho, i(\rho + \mu) \right)
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$p_{*1}(e_\alpha e_\beta, i\rho, i\mu) = \left(2E_{\alpha\beta}, 2i\rho, i(\rho + \mu) \right) \quad (2.2)$$

eşitliğini elde ederiz. $\square$

Bu türev dönüşümünün tersinin de

$$p_{*1}^{-1}(E_{\alpha\beta}, i\rho, i\mu) = \left(\frac{1}{2}e_\alpha e_\beta, \frac{1}{2}i\rho, i(\mu - \frac{1}{2}\rho) \right) \quad (2.3)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 2.5.6. $\kappa_{*1}^T : \mathfrak{spin}^T(n) \rightarrow \text{End}(\Delta_n)$, κ^T nin birimdeki türevi

$$\kappa_{*1}^T(e_\alpha e_\beta, i\rho, i\mu) = \kappa(e_\alpha e_\beta) + (2i\rho + i\mu)Id$$

şeklindedir. Buradaki ρ ve μ herhangi reel sayılar ve κ , $Spin(n)$ grubunun $Spin$ temsiliidir.

Kanıt. κ^T temsili

$$\begin{aligned}
\kappa^T : \quad Spin^T(n) &\rightarrow \quad Aut(\Delta_n) \\
[g, z_1, z_2] &\mapsto \quad z_1^2 z_2 \kappa(g)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıydı. Şimdi $Spin^T(n)$ üzerinde aşağıdaki şekilde bir $\gamma(t)$ eğrisi alalım öyle ki $\gamma(0) = [1, 1, 1]$ ve $\gamma'(0) = (e_\alpha e_\beta, i\rho, i\mu)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\gamma : \quad [0, 2\pi] &\rightarrow \quad Spin^T(n) \\
t &\mapsto \quad \gamma(t) = [\cos t + \sin t e_\alpha e_\beta, \cos(\rho t) + i \sin(\rho t), \cos(\mu t) + i \sin(\mu t)]
\end{aligned}$$

Şimdi

$$\kappa_{*1}^T(e_\alpha e_\beta, i\rho, i\mu) = \kappa_{*1}^T(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}(\kappa^T \circ \gamma)|_{t=0}$$

olduğundan önce $(\kappa^T \circ \gamma)(t)$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} (\kappa^T \circ \gamma)(t) &= \left(\cos(2\rho t) + i\sin(2\rho t) \right) \left(\cos(\mu t) + i\sin(\mu t) \right) \kappa(\cos t + \sin t e_\alpha e_\beta) \\ &= \left(\cos((2\rho + \mu)t) + i\sin((2\rho + \mu)t) \right) \kappa(\cos t + \sin t e_\alpha e_\beta) \end{aligned}$$

Burada t ye göre türev alacak olursak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\kappa^T \circ \gamma) &= \left(-(2\rho + \mu)\sin((2\rho + \mu)t) + i(2\rho + \mu)\cos((2\rho + \mu)t) \right) \kappa(\cos t + \sin t e_\alpha e_\beta) + \\ &\quad \frac{d}{dt}[\kappa(\cos t + \sin t e_\alpha e_\beta)] \left(\cos((2\rho + \mu)t) + i\sin((2\rho + \mu)t) \right) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $t = 0$ aldığımızda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\kappa^T \circ \gamma)|_{t=0} &= \left(i(2\rho + \mu)\kappa(1) + \kappa(e_\alpha e_\beta) \right) \\ &= (2i\rho + i\mu)\kappa(1) + \kappa(e_\alpha e_\beta) \end{aligned}$$

olur. Bu da demektir ki

$$\kappa_{*1}^T(e_\alpha e_\beta, i\rho, i\mu) = \kappa(e_\alpha e_\beta) + (2i\rho + i\mu)Id \quad (2.4)$$

□

Örnek 2.5.7. $Spin^T(1) \cong U(1) \times U(1)$

Örnek 2.5.8. $Spin^T(2) \cong U(1) \times U(1)$

Örnek 2.5.9. $Spin^T(3) \cong U(2) \times U(1)$

Örnek 2.5.10. $Spin^T(4) \cong U' \times U(1)$

3. ASLİ LİF DEMETLERİ

Tanım 3.0.1. M diferensiyellenebilir bir manifold ve G bir Lie grubu olsun. P bir diferensiyellenebilir manifold, $\mathcal{P} : P \rightarrow M$ bir düzgün örten dönüşüm ve $\sigma : P \times G \rightarrow P$, $\sigma(p, g) = p \cdot g$ bir düzgün sağ etki olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. σ , $\mathcal{P}$ nin liflerini korur, yani her $p \in P$ ve her $g \in G$ için $\mathcal{P}(p \cdot g) = \mathcal{P}(p)$ dir.
2. *{Lokal Triviallık Koşulu}* Her bir $x_0 \in M$ için x_0 ı içeren M içinde V açık kümesi ve aşağıdaki gibi tanımlı $\Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow V \times G$ diffeomorfizmi vardır öyle ki

$$\Psi(p) = (\mathcal{P}(p), \psi(p))$$

sağlanır. Burada $\psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow G$ dönüşümü, her $p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ ve her $g \in G$ için

$$\psi(p \cdot g) = \psi(p)g$$

koşulunu sağlar.

Bu durumda P ye G yapı grubuna sahip M üzerindeki asli lif demedi denir.

(V, Ψ) ikilisi asli lif demedinin lokal trivializasyonu olarak adlandırılır ve $\bigcup_{j \in J} V_j = M$ olacak şekildeki $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$ ailesi M in trivializasyon örtüsü olarak adlandırılır. M üzerindeki asli lif demedini diyagram olarak $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} M$ veya $G \hookrightarrow P \rightarrow M$ şeklinde gösteririz. Şimdi bazı örnekleri inceleyelim:

Örnek 3.0.2. M üzerindeki çarpım manifoldu, aşikar asli lif demedir. Burada $\mathcal{P} : M \times G \rightarrow M$ birinci izdüşüm ve $\sigma((x, h), g) = (x, h) \cdot g = (x, hg)$ hareketinden oluşur. Burada $V = M$ olarak alırsak, Ψ , $\mathcal{P}^{-1}(V) = \mathcal{P}^{-1}(M) = M \times G$ olur ki bu da birim dönüşümdür.

Örnek 3.0.3. $P = S^{n-1}$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ ve $\sigma : S^{n-1} \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow S^{n-1}$

$$\sigma(p, g) = p \cdot g = (x^1, x^2, \dots, x^n) \cdot g = (x^1 g, \dots, x^n g)$$

sağ etki olsun. Yörünge uzayı $M = \mathbb{RP}^{n-1}$ dir ve $\mathcal{P} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ bölüm dönüşümü, yani

$\mathcal{P}(p) = \mathcal{P}(x^1, \dots, x^n) = [x^1, \dots, x^n]$ olsun. Böylelikle

$$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow S^{n-1} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{RP}^{n-1}$$

$\mathbb{RP}^{n-1}$ üzerinde bir $\mathbb{Z}_2$ -asli lif demedidir.

3.1. Geçiş Fonksiyonları

M üzerindeki $\mathcal{P} : P \rightarrow M$ G -asli lif demedini düşünelim ve M nin trivializasyon örtüsünü sabitleyelim, yani $\bigcup_{j \in J} V_j = M$ olmak üzere $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$ lokal trivializasyon ailesini düşünelim. Her bir Ψ_j yi $(\mathcal{P}, \psi_j)$ olarak yazalım. Şimdi de $i, j \in J$ ve $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Her bir $x \in V_i \cap V_j$ için ψ_i ve ψ_j nin her ikisi de $\mathcal{P}^{-1}(x)$ i homeomorfik olarak G nin üzerine taşır. Öyleyse

$$(\psi_j|_{\mathcal{P}^{-1}(x)}) \circ \left(\psi_i|_{\mathcal{P}^{-1}(x)} \right)^{-1} : G \rightarrow G$$

bir homeomorfizmdir.

Örnek 3.1.1. $\psi_j(p) \left(\psi_i(p) \right)^{-1}$, x üzerindeki $\mathcal{P}^{-1}(x)$ lifinde her p için aynı değeri alır.

Örnekten yola çıkarak p , $\mathcal{P}^{-1}(x)$ in herhangi bir elemanı olmak üzere $g_{ji}(x) = \psi_j(p) \left(\psi_i(p) \right)^{-1}$ ile tanımlanan

$$g_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow G$$

dönüşümünü tanımlayabiliriz. ψ_i ve ψ_j ler sürekli ve G topolojik grup olduğundan g_{ji} de süreklidir.

Yardımcı Teorem 3.1.2. Her bir $x \in V_i \cap V_j$ ve her $g \in G$ için

$$(\psi_j|_{\mathcal{P}^{-1}(x)}) \circ \left(\psi_i|_{\mathcal{P}^{-1}(x)} \right)^{-1} (g) = g_{ji}(x)g$$

dir.

Kanıt. $(\psi_i|_{\mathcal{P}^{-1}(x)})^{-1}(g) = p$ olsun. O zaman $g = \psi_i(p)$ ve

$(\psi_j|_{\mathcal{P}^{-1}(x)}) \circ (\psi_i|_{\mathcal{P}^{-1}(x)})^{-1}(g) = \psi_j(p)$ dir. Fakat $p \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ olduğundan

$$g_{ji}(x)g = \psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}g = \psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}(\psi_i(p)) = \psi_j(p)$$

olur ki bu da istenilen sonucu verir. □

Böylece

$$\left(\psi_j|_{\mathcal{P}^{-1}(x)}\right) \circ \left(\psi_i|_{\mathcal{P}^{-1}(x)}\right)^{-1} : G \rightarrow G$$

homeomorfizmi gerçekte $g_{ji}(x) \in G$ elemanı ile oluşturulan soldan çarpmadır.

$V_i \cap V_j \neq \emptyset$ olduğunda tanımlanabilen $g_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow G$ dönüşümleri, M nin trivializasyon örtüsü $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ ile ilişkilendirilmiş asli lif demedinin geçiş fonksiyonları olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.3. $V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$ ve $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$ ise o zaman

$$g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x)$$

tir. Aynı zamanda

$$g_{ii}(x) = e_G$$

ve

$$g_{ij}(x) = (g_{ji}(x))^{-1}$$

olur.

4. ASLİ LİF DEMEDİNİN KESİTLERİ

M lokal trivial asli lif demedinin taban uzayı olmak üzere $V \subset M$ açık alt kümesi olsun. V üzerinde tanımlanan asli lif demedinin bir kesidi $s : V \rightarrow P$ sürekli dönüşümdür öyle ki $\mathcal{P} \circ s = Id_V$ dir. Yani bu kesit V üzerinde her bir lifte bir elemanın sürekli bir şekilde seçimidir. Eğer $\Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow V \times G$ bir asli lif demedinin trivializasyonu ise $s_V(x) = \Psi^{-1}(x, e)$ olacak şekilde $s_V : V \rightarrow P$ lokal kesidi tanımlanabilir. Bu durumda $s_V, \Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow V \times G$ trivializasyonu ile ilişkilendirilmiş kanonikal kesit olarak adlandırılır.

Asli lif demedi üzerindeki grup etkisi bize bu süreci aşağıdaki gibi ters çevirmemize olanak sağlar.

Varsayalım ki V taban uzayın bir alt kümesi olmak üzere, $\mathcal{P} \circ s = Id_V$ ve dolayısıyla $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$ lokal kesidi verilmiş olsun.

$$\mathcal{P}^{-1}(V) = \bigcup_{x \in V} \mathcal{P}^{-1}(x) = \bigcup_{x \in V} \{s(x) \cdot g : g \in G\}$$

olduğu için $\Psi(s(x) \cdot g) = (x, g)$ olacak şekilde

$$\Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow V \times G$$

dönüşümünü tanımlayabiliriz. (V, Ψ) nin asli lif demedimizin lokal trivializasyonu olduğunu gösterelim. Ψ açıkça birebir ve örtendir ve

$\Psi(s(x) \cdot g) = (\mathcal{P}(s(x) \cdot g), \psi(s(x) \cdot g))$ dir ki burada $\psi(s(x) \cdot g) = g$ dir. Böylece $\psi(s(x) \cdot g) \cdot g' = \psi(s(x) \cdot (gg')) = gg' = \psi(s(x) \cdot g)g'$ yani her $p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ ve her $g' \in G$ için $\psi(p \cdot g') = \psi(p)g'$ dir. Geriye kalan tek şey Ψ ve Ψ^{-1} dönüşümlerinin sürekli olduğudur. Şimdi $\Psi^{-1}(x, g) = s(x) \cdot g$ öyle ki bu ifade $(x, g) \rightarrow (s(x), g) \rightarrow s(x) \cdot g$ bileşkesidir ve dolayısıyla süreklidir. Son olarak Ψ nin sürekliliğini

$\psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow G$ nin sürekliliğinden elde edelim. Herhangi $p = s(x) \cdot g \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ için $\psi(p) = \psi(s(x) \cdot g) = g$ dir. O halde $\mathcal{P}(p)$ noktasında, $\Psi' = (\mathcal{P}, \psi')$ ile ifade edilen (V', Ψ') trivializasyonunu seçelim. O zaman

$$\psi'(p) = \psi'((s \circ \mathcal{P})(p) \cdot g) = ((\psi' \circ s \circ \mathcal{P})(p))g$$

olur. Öyleyse ψ nin sürekliliğinden $g = \psi'(p)(\psi' \circ s \circ \mathcal{P})(p)^{-1} = \psi(p)$ olur ki bu da Ψ nin sürekli olduğunu ifade eder. Aynı zamanda $\Psi^{-1}(x, g) = s(x) \cdot g$ olduğu için (V, Ψ) trivializasyonu ile ilişkili kanonikal kesit s_V henüz inşa ettiğimiz s dir.

Böylece bir asli lif demedinin lokal kesitleri ile lokal trivializasyonları arasında birebir bir eşleme inşa etmiş olduk.

Teorem 4.0.1. *Bir G -asli lif demedi $\mathcal{P} : P \rightarrow M$ aşıkardır ancak ve ancak bu G -asli lif demedi $s : M \rightarrow P$ global kesiti kabul eder.*

Örnek 4.0.2. $\Psi_i : \mathcal{P}^{-1}(V_i) \rightarrow V_i \times G$ ve $\Psi_j : \mathcal{P}^{-1}(V_j) \rightarrow V_j \times G$ ler $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ olmak üzere G -asli lif demedinin iki lokal trivializasyonu olsun. Ayrıca $s_i = s_{V_i}$ ve $s_j = s_{V_j}$ ler ilişkili kanonikal kesitler olsunlar. Açıktır ki her bir $x \in V_i \cap V_j$ için ve $g_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow G$ geçiş fonksiyonu olmak üzere

$$s_i(x) = s_j(x) \cdot g_{ji}(x)$$

dir.

Teorem 4.0.3. *M bir düzgün manifold, G bir Lie grubu ve $\{V_j\}_{j \in J}$, M nin bir açık örtüsü olsun. $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ olmak üzere her bir $i, j \in J$ için $g_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow G$ düzgün dönüşümünün var olduğunu ve $V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$ iken her $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$ için*

$$g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x)$$

özellikliğini sağladığını varsayalım. O zaman M üzerinde bir G -asli lif demedi vardır.

Örnek 4.0.4. *M yönlendirilebilir Riemann manifoldu ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $SO(n)$ de değer alır. Bu geçiş fonksiyonları yardımıyla $SO(n)$ -asli lif demedi inşa edilebilir. Bu demet $P_{SO(n)}$ ile gösterilir.*

4.1. Asli Lif Demedi Üzerinde Konneksiyonlar

σ etkisi ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olmak üzere $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} M$, G -asli lif demedi üzerindeki bir konneksiyon aşağıdaki özellikleri sağlayan P üzerinde $\mathfrak{g}$ değerli ω 1-formudur.

1. Her $g \in G$ için $(\sigma_g)^*\omega = ad_{g^{-1}} \circ \omega$, yani her $g \in G, p \in P$ ve $v \in T_{p \cdot g^{-1}}(P)$ için

$$\omega_p((\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(v)) = g^{-1}\omega_{p \cdot g^{-1}}(v)g$$

2. Her $A \in \mathfrak{g}$ için $\omega(A^\#) = A$, yani her $g \in G$ ve $p \in P$ için

$$\omega_p(A^\#(p)) = A$$

Burada $A^\#$, P üzerinde A tarafından belirlenen temel vektör alanıdır. Şöyle ki $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebri olmak üzere ve $A \in \mathfrak{g}$ için $\sigma(A)(p) = (\sigma_p)_*(A)$ ile tanımlanan $\sigma(A)$ vektör alanı bahsettiğimiz $A^\#$ dir.

Teorem 4.1.1. G matris Lie grubu ve bu Lie grubunun Lie cebri $\mathfrak{g}$ olsun. Ayrıca M üzerinde $G \rightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} M$ düzgün G -asli lif demedini alalım. Bu asli lif demedi için $\bigcup_{j \in J} V_j = M$ olmak üzere $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$ trivializasyonlar ailesi olsun. Varsayalım ki her bir $j \in J$ için $\mathcal{A}_j$, V_j üzerinde $\mathfrak{g}$ -değerli 1-form ve $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ için $V_i \cap V_j$ üzerinde

$$\mathcal{A}_j = ad_{g_{ji}^{-1}} \circ \mathcal{A}_i + \Theta_{ij}$$

olsun. Burada $g_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow G$ geçiş fonksiyonu ve $\Theta_{ij} = g_{ji}^* \Theta$, G grubu için Cartan 1-form Θ nın g_{ji} ile geri çekilmişidir.

O zaman $s_j : V_j \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_j)$, (V_j, Ψ_j) trivializasyonu ile ilişkili kanonikal kesit olmak üzere her bir $j \in J$ için $\mathcal{A}_j = s_j^* \omega$ olacak şekilde P üzerinde bir tek ω konneksiyon formu vardır.

Bu teoremin bir sonucu da M üzerinde herhangi bir $\mathfrak{g}$ -değerli 1-formun, yine M üzerinde aşıkâr G -demedinde bir tek konneksiyon formunun M ye geri çekilmiş olmasıdır. Bunun nedeni şudur ki global trivializasyon $\{M, \Psi\}$ yi seçersek öyle ki $\mathcal{A}_j = ad_{g_{ji}^{-1}} \circ \mathcal{A}_i + \Theta_{ij}$ koşulu sağlanır.

Şimdi P üzerinde bir ω konneksiyon formu verilmiş olsun. Her bir $p \in P$ için ω ile belirlenmiş $T_p(P)$ nin yatay alt uzayı $Hor_p(P)$ yi

$$Hor_p(P) = \{v \in T_p(P) : \omega_p(v) = 0\}$$

olarak tanımlayabiliriz. Buradan da aşağıdaki eşitlik gerçekleşir:

$$T_p(P) = Hor_p(P) \oplus Vert_p(P)$$

Burada $Vert_p(P) = \{v \in T_p P | \exists A \in \mathfrak{g} \text{ için } v = A^\sharp(p)\}$ şeklindeki dikey alt uzayıdır.

5. VEKTÖR DEMEDİ

M bir topolojik uzay olsun. M üzerinde rankı k olan bir reel vektör demedi, $\pi : E \rightarrow M$ örten diferansiyellenebilir dönüşümü ile birlikte E topolojik uzayıdır öyle ki aşağıdaki özellikler sağlanır:

- Her bir $p \in M$ için $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ kümesi (E nin p üzerindeki lifi olarak adlandırılır.) k -boyutlu reel vektör uzayı yapısına sahiptir.
- Her bir $p \in M$ için M de p nin bir U komşuluğu ve $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ diffeomorfizmi (E nin U üzerindeki lokal trivializasyonu olarak adlandırılır.) vardır öyle ki aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

Burada π_1 , 1. izdüşüm fonksiyonudur ve her bir $q \in U$ için Φ nin E_q ya kısıtlanması E_q dan $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ ya bir lineer izomorfizmdir.

M ve E düzgün manifoldlar ise π düzgün dönüşümdür ve lokal trivializasyonlar, diffeomorfizmler olarak seçilebilir. O zaman E ye düzgün vektör demedi denir. Bu durumda görüntüsü üzerine diffeomorfik olan herhangi bir lokal trivializasyonu düzgün lokal trivializasyon olarak adlandıracaktır.

Rankı 1 olan vektör demedi genellikle doğru demedi olarak adlandırılır. Kompleks vektör demetleri benzer şekilde tanımlanır şöyle ki; reel vektör uzayı, kompleks vektör uzayı ile ve $\mathbb{R}^k$ ise $\mathbb{C}^k$ ile yer değiştirir.

E uzayına demedin total uzayı, M ye demedin taban uzayı ve π ye ise demedin projeksiyonu deriz. Bu durumu E , M üzerinde bir vektör demedir veya $E \rightarrow M$ bir vektör demedir veya $\pi : E \rightarrow M$ bir vektör demedir olarak yazarız.

Eğer M nin tümü üzerinde bir trivializasyon varsa (Buna E nin global trivializasyonu denir), E ye bir aşık demet denir. Bu durumda E nin kendisi $M \times \mathbb{R}^k$ ye homeomorfiktir.

Örnek 5.0.1. $\{\text{Çarpım Demedi}\}$

Kolay bir örnek olarak M herhangi bir topolojik uzay olmak üzere $E = M \times \mathbb{R}^k$ ve $\pi = \pi_1 : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ şeklinde birinci izdüşüm dönüşümü olarak alırsak rankı k olan bir vektör demedi elde etmiş oluruz.

Örnek 5.0.2. $\{\text{Tanjant Demedi}\}$

M düzgün bir n -manifold ve TM bu manifoldun tanjant demedi olsun. Bu durumda standart izdüşüm dönüşümü, her bir lif üzerindeki doğal vektör uzayı yapısı ve tanjant demedi üzerindeki manifold yapısı daha önce inşa edilmiştir [8].

Dolayısıyla TM , M üzerinde rankı n olan düzgün bir vektör demedidir.

Aşıkarmaym bir vektör demedi tabiki de birden fazla lokal trivializasyon gerektirir. Şimdi yazacağımız yardımcı teorem iki düzgün lokal trivializasyonun kesişimleri üzerindeki bileşkesinin basit bir formunun olduğunu göstermektedir.

Yardımcı Teorem 5.0.3. $\pi : E \rightarrow M$ düzgün bir vektör demedi olsun ve varsayalım ki $U \cap V \neq \emptyset$ olmak üzere $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ ve $\Psi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$ dönüşümleri E nin iki düzgün lokal trivializasyonu olsun. O zaman

$$\tau : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

dönüşümü vardır öyle ki

$$\Phi \circ \Psi^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$$

bileşke dönüşümü aşağıdaki formdadır:

$$\Phi \circ \Psi^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v)$$

Burada $\tau(p)v$, $k \times k$ tipinde matris olan $\tau(p)$ nin $v \in \mathbb{R}^k$ vektörü üzerindeki genel hareketini göstermektedir.

Kanıt. Aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccccc}
 (U \cap V) \times \mathbb{R}^k & \xleftarrow{\Psi} & \pi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\Phi} & (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \\
 & \searrow \pi_1 & \downarrow \pi & \swarrow \pi_1 & \\
 & & U \cap V & &
 \end{array}$$

Burada Φ ve Ψ dönüşümlerinin $\pi^{-1}(U \cap V)$ ye kısıtlanması söz konusudur. Hemen anlaşılır ki $\pi_1 \circ (\Phi \circ \Psi^{-1}) = \pi_1$ öyle ki bu ifade bir $\sigma : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ dönüşümü için

$$\Phi \circ \Psi^{-1}(p, v) = (p, \sigma(p, v))$$

anlamına gelir. Ayrıca sabitlenmiş her bir $p \in U \cap V$ için $v \mapsto \sigma(p, v), \mathbb{R}^k$ nın lineer izomorfizmidir. Öyleyse $\sigma(p, v) = \tau(p)v$ olacak şekilde $k \times k$ tipinde terslenebilir $\tau(p)$ matrisi vardır. Şimdi sadece

$$\tau : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

dönüşümünün düzgün olduğunu göstermek kaldı. Bunu görmek için $\tau(p)$ matrisinin girdilerini $\tau_j^i(p)$ olarak yazalım öyle ki $\tau(p)v = \tau_j^i(p)v^j e_i$ olur. Not edelim ki $\tau_j^i(p) = \pi^i(\sigma(p, e_j))$ dir. Burada $e_j, j.$ standart taban vektörü ve $\pi^i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, i.$ koordinata izdüşüm dönüşümüdür. Böylelikle τ_j^i ler bileşkedenden dolayı düzgündür. Matris girdileri $GL(k, \mathbb{R})$ üzerinde global düzgün koordinatlar olduğu için τ düzgün bir dönüşümdür. $\square$

Yardımcı Teorem 5.0.4. *Vektör Demedi İnşa Teoremi*

M düzgün bir manifold ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

- Her bir $p \in M$ için E_p k -boyutlu reel vektör uzayı,
 $E = \coprod_{p \in M} E_p$ ve $\pi : E \rightarrow M, E_p$ nin elemanını p noktasına götüren bir dönüşüm olsun.
- A indis kümesi olmak üzere $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, M$ nin bir açık örtüsü,
- Her bir $\alpha \in A$ için $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ki bu dönüşümün her bir E_p ye kısıtlanması E_p den $\{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ ya lineer izomorfizmdir.

- $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak şekilde her bir $\alpha, \beta \in A$ için $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ düzgün bir dönüşüm öyle ki bileşke dönüşüm $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$ aşağıdaki formdadır.

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau_{\alpha\beta}(p)v)$$

Bu durumda E tek bir düzgün manifold yapısına ve M üzerinde k ranklı düzgün vektör yapısına sahiptir. Ayrıca π projeksiyon ve Φ_α düzgün lokal trivializasyonlardır.

5.1. Vektör Demetlerinin Lokal ve Global Kesitleri

$\pi : E \rightarrow M$, M manifoldu üzerinde vektör demedi olsun. E nin kesiti, π dönüşümünün bir kesitidir; yani $\pi \circ \sigma = Id_M$ koşulunu sağlayan $\sigma : M \rightarrow E$ sürekli dönüşümüdür. Özel olarak bu, her bir $p \in M$ için $\sigma(p)$ nin E_p lifinin elemanı olduğu anlamına gelir. E nin bir lokal kesiti ise sadece $U \subset M$ açık alt kümesi üzerinde tanımlı $\sigma : U \rightarrow E$ kesitidir. Eğer kesit M nin tümünde tanımlı ise bu durumda kesit global kesit olarak adlandırılır. Belirtelim ki $U \subset M$ üzerindeki E nin lokal bir kesiti $E|_U$ kısıtlanmış demedinin global kesiti ile aynıdır. Eğer M düzgün bir manifold ve E düzgün bir vektör demedi ise, E nin düzgün bir kesiti lokal veya global bir kesittir yani manifoldlar arasındaki bir dönüşüm olarak düzgündür.

E nin $U \subset M$ üzerinde bir kesitin bir dönüşüm olarak kabaca tanımını yaparsak $\pi \circ \sigma = Id_U$ olacak şekildeki sürekli olmasına gerek olmayan $\sigma : U \rightarrow E$ dönüşümüdür. Ancak kesitten bahsedildiği zaman daima sürekli bir kesit anlaşılacaktır.

E nin bir sıfır kesiti, her bir $p \in M$ için

$$\varsigma(p) = 0 \in E_p$$

ile tanımlanan $\varsigma : M \rightarrow E$ global kesitidir.

Eğer $E \rightarrow M$ düzgün bir vektör demedi ise E nin tüm düzgün global kesitlerinin kümesi $\Gamma(E)$, noktasal toplama ve skaler çarpma altında vektör uzayıdır:

$$(c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2)(p) = c_1\sigma_1(p) + c_2\sigma_2(p)$$

Ek olarak, vektör alanlarındaki gibi eğer $f \in C^\infty(M)$ ve $\sigma \in \Gamma(E)$ ise

$$(f\sigma)(p) = f(p)\sigma(p)$$

ile tanımlanan yeni bir $f\sigma$ kesitini elde ederiz.

Örnek 5.1.1. *{Vektör Demetlerinin Kesitleri}*

- M düzgün bir manifold olmak üzere TM tanjant demedinin kesitleri M nin vektör alanlarıdır.
- $E = M \times \mathbb{R}^k$ çarpım demedini alalım. O zaman E nin düzgün kesitleri ile M den $\mathbb{R}^k$ ya düzgün fonksiyonlar arasında birebir eşleme vardır. Şöyle ki, bir $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ fonksiyonu $\tilde{F}(x) = (x, F(x))$ ile tanımlanan $\tilde{F} : M \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$ kesitini belirler. Bunun tam tersi de geçerlidir. Yani verilen bir $\tilde{F}$ kesiti F fonksiyonunu belirler. Özel olarak, $C^\infty(M)$, doğal olarak $M \times \mathbb{R}^k$ aşıkâr doğru demedinin düzgün kesitlerinin uzayı ile karakterize edilebilir.

5.2. Lokal ve Global Çatılar

$E \rightarrow M$ bir vektör demedi olsun. $U \subset M$ açık alt kümesi ve U üzerindeki E nin lokal kesitleri $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ olmak üzere her bir $p \in U$ için $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$, E_p nin lineer bağımsız elemanları ise $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ kesitlerine lineer bağımsızdır, denir. Benzer şekilde her bir $p \in U$ için $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ lar E_p yi geriyorsa $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ lar E yi geriyordur denir. U üzerinde E için lokal bir çatı, E yi geren U üzerindeki lineer bağımsız lokal kesitlerin k -sıralısı $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ dır. Böylece her bir $p \in U$ için $(\sigma_1(p), \sigma_2(p), \dots, \sigma_k(p))$, E_p lifi için bir taban teşkil eder. Eğer $U = M$ ise bu çatı global çatı olarak adlandırılır. Ayrıca her bir σ_i kesiti düzgün ise bu kesitlerin oluşturduğu lokal veya global çatı düzgündür denir. Kısaltma olsun diye $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ yerine (σ_i) gösterimini kullanacağız.

Örnek 5.2.1. *{Bir Çarpım Demedi için Global Çatı}*

$E = M \times \mathbb{R}^k$ çarpım demedini alırsak $\mathbb{R}^k$ için standart taban elemanları $\{e_1, \dots, e_k\}$, E için $\tilde{e}_i(p) = (p, e_i)$ ile tanımlanan $(\tilde{e}_i)$ çatısını üretir. Eğer M düzgün manifold ise bu global çatı düzgündür.

Örnek 5.2.2. *{Lokal Çatılar ve Lokal Trivializasyonlar}*

Varsayalım ki $\pi : E \rightarrow M$ düzgün vektör demedi olsun. $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, E nin lokal trivializasyonu ise önceki örnekteki gibi aynı fikri E için lokal çatı inşa etmekte kullanabiliriz. $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k : U \rightarrow E$ dönüşümlerini $\sigma_i(p) = \Phi^{-1}(p, e_i) = \Phi^{-1} \circ \tilde{e}_i(p)$ tanımını altında oluşturalım öyle ki

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi_1 \\ & & U \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \swarrow \sigma_i & \uparrow \tilde{e}_i \\ & & U \end{array}$$

olur. O zaman σ_i ler düzgündür çünkü Φ diffeomorfizmdir. Ayrıca $\pi_1 \circ \Phi = \pi$ eşitliğinden

$$\pi \circ \sigma_i(p) = \pi \circ \Phi^{-1}(p, e_i) = \pi_1(p, e_i) = p$$

elde edilir. Öyleyse σ_i ler düzgün kesitlerdir. $(\sigma_i(p))$ ler E_p için taban teşkil eder. Çünkü Φ yi lineer izomorfizm olarak E_p den $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ kısıtlar ve

$$\Phi(\sigma_i(p)) = (p, e_i)$$

olur ki (p, e_i) ler $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ için taban teşkil eder. Böylelikle (σ_i) lokal çatısının Φ ile ilişkili olduğunu söylemiş oluruz.

Önerme 5.2.3. *Bir düzgün vektör demedi için her düzgün lokal çatı yukarıdaki örnekte olduğu gibi düzgün bir lokal trivializasyonla ilişkilidir.*

Kanıt. $U \subset M$ açık alt küme ve (σ_i) , bu açık alt küme üzerinde E için düzgün bir lokal çatı olsun. Şimdi $\Psi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U)$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\Psi(p, (v^1, v^2, \dots, v^k)) = \sum_{i=1}^k v^i \sigma_i(p)$$

Her bir $p \in U$ noktasında $(\sigma_i(p))$ lerin E_p için taban oluşturduğu gerçeği Ψ nin birebir ve örten olduğunu gerektirir ve kolay bir hesaplamayla görebiliriz ki $\sigma_i = \Psi \circ \tilde{e}_i$ dir. Böylece Ψ nin diffeomorfizm olduğunu gösterirsek, Ψ^{-1} düzgün lokal trivializasyon olacaktır ki bu trivializasyonun ilişkili yerel çatısı σ_i dir.

Ψ birebir ve örten olduğu için onun diffeomorfizm olduğunu göstermek demek

lokal diffeomorfizm olduğunu göstermek demektir. $q \in U$ verilsin. q nun öyle bir $V \subset M$ komşuluğunu seçebiliriz ki üzerinde

$$\Phi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$$

düzgün lokal trivializasyonu vardır. Ayrıca $V \subset U$ olmasını istersek V nin uygun elemanlarını istenilenler bozulmayacak şekilde kümeden çıkartabiliriz. Φ diffeomorfizm olduğu için $\Phi \circ \Psi|_{V \times \mathbb{R}^k}$ dönüşümünün $V \times \mathbb{R}^k$ dan $V \times \mathbb{R}^k$ ya diffeomorfizm olduğunu gösterebilirsek o zaman

$$\Psi : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(V)$$

dönüşümü diffeomorfizmdir. Şöyle ki

$$\begin{array}{ccccc} V \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\Psi|_{V \times \mathbb{R}^k}} & \pi^{-1}(V) & \xrightarrow{\Phi} & V \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow \pi & \swarrow \pi_1 & \\ & & V & & \end{array}$$

olur. Her bir σ_i düzgün kesiti için $\Phi \circ \sigma_i|_V : V \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$ bileşke dönüşümü düzgündür ve böylece

$$\Phi \circ \sigma_i(p) = (p, \sigma_i^1(p), \sigma_i^2(p), \dots, \sigma_i^k(p))$$

olacak şekilde $\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^k : V \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonları vardır. Bu nedenle $V \times \mathbb{R}^k$ üzerinde

$$\Phi \circ \Psi(p, (v^1, \dots, v^k)) = (p, (v^i \sigma_i^1(p), \dots, v^k \sigma_i^k(p)))$$

düzgündür.

Şimdi $(\Phi \circ \Psi)^{-1}$ dönüşümünün düzgün olduğunu gösterelim. Unutmayalım ki $(\sigma_i^j(p))$ matrisi her bir p için terslenebilirdir çünkü $(\sigma_i(p))$ ler E_p için bir taban teşkil eder. $(\tau_i^j(p))$ matrisi $(\sigma_i^j(p))$ nin ters matrisini gösterebilir. Bir matrisi tersine götüren dönüşüm düzgün bir dönüşüm olduğu için τ_i^j fonksiyonları düzgündür. Önceki paragraftan hesaplamalara devam edersek

$$(\Phi \circ \Psi)^{-1}(p, (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k)) = (p, (\omega^i \tau_i^1(p), \omega^i \tau_i^2(p), \dots, \omega^i \tau_i^k(p)))$$

dönüşümü ortaya çıkar ki bu dönüşüm de düzgün bir dönüşümdür. $\square$

Sonuç 5.2.4. *Düzgün bir vektör demedi aşıkardır ancak ve ancak bu vektör demedi düzgün bir global çatı kabul eder.*

Kanıt. Örnek 5.2.2 ve Önerme 5.2.3 beraber düşünüldüğünde gösterebiliriz ki bir $U \subset M$ açık alt kümesi üzerinde düzgün lokal trivializasyon vardır ancak ve ancak U üzerinde düzgün bir lokal çatı vardır. Bu sonuç da $U = M$ olduğundaki özel durumdur. $\square$

5.3. Vektör Demedi Üzerinde Kovaryant Türev

Tanım 5.3.1. $\pi : E \rightarrow M$ vektör demedi ve $\Gamma(E)$, E nin düzgün kesitlerinin uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (X, \sigma) &\mapsto \nabla_X \sigma \end{aligned}$$

bilineer dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ∇ ya E de bir konneksiyon denir.

1. $\nabla_X \sigma$, X bileşenine göre $C^\infty(M)$ -lineerdir. Yani $f, g \in C^\infty(M)$ ve $X_1, X_2 \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} \sigma = f \nabla_{X_1} \sigma + g \nabla_{X_2} \sigma$$

dır.

2. ∇ çarpım kuralını sağlar şöyle ki; $f \in C^\infty(M)$ ise

$$\nabla_X (f\sigma) = f \nabla_X \sigma + (Xf)\sigma$$

eşitliği sağlanır.

Bu durumda $\nabla_X \sigma$, X yönünde σ nın kovaryant türevi olarak adlandırılır.

$U \subset M$ açık kümesi üzerinde lokal çatı $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ olsun. O zaman $X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \sigma_j = \sum_{i=1}^k \omega_{ij}(X) \sigma_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\omega_{ij}(X) \in C^\infty(M)$ dir. Ayrıca $\omega_{ij}(fX) = f\omega_{ij}(X)$ olduğundan ω_{ij} ler U üzerinde 1-formlardır. k^2 tane 1-form vardır. $\omega_U = (\omega_{ij})$ ye U

üzerinde ∇ nın konneksiyon formu veya konneksiyon potansiyelleri denir ve ω_U , U üzerinde $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$ değerli 1-formdur.

5.4. Çatı Demedi

M n -boyutlu düzgün bir manifold ise $x \in M$ deki bir çatı $T_x M$ tanjant uzayındaki $p = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ sıralı tabanıdır. e_i ler $\mathbb{R}^n$ nın standart tabanı olmak üzere ve $i = 1, \dots, n$ için herhangi böyle bir çatı $\tilde{p}(e_i) = \sigma_i$ ile tanımlanan

$$\tilde{p}: \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$$

doğrusal izomorfizmini verir.

Tersine, her $\tilde{p}: \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ izomorfizmi $p = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = (\tilde{p}(e_1), \dots, \tilde{p}(e_n))$ çatısını verir. Şimdi $x \in M$ noktasındaki tüm çatıların kümesini $L(M)_x$ ile gösterebiliriz ve $L(M) = \bigcup_{x \in M} L(M)_x$ olsun. Her bir $p \in L(M)_x \subseteq L(M)$ için $\mathcal{P}_L(p) = x$ dönüşümünü tanımlayalım ve buradan

$$\mathcal{P}_L: L(M) \rightarrow M$$

örten dönüşümünü elde ederiz. Şimdi de $GL(k, \mathbb{R})$ nin $L(M)$ üzerindeki sağ etkisi olan

$$\sigma: L(M) \times GL(k, \mathbb{R}) \rightarrow L(M)$$

dönüşümünü $p = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in L(M)_x \subseteq L(M)$ ve $g = (g_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ olmak üzere $\sigma(p, g) = p \cdot g$ şeklinde tanımlayalım.

Burada $j = 1, \dots, n$ ve

$$p \cdot g = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^1 & \dots & g_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ g_1^n & \dots & g_n^n \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca $p \cdot (g_1 g_2) = (p \cdot g_1) \cdot g_2$ ve $p \cdot I = p$ sağlanır. Her $p \in L(M)$ ve $g \in GL(n, \mathbb{R})$ için tanımdan

$$\mathcal{P}_L(p \cdot g) = \mathcal{P}_L(p)$$

dir. Bir çatı $\tilde{p} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ izomorfizmi ile belirlidir. O halde herhangi $g = (g_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ elemanı verildiğinde

$$\tilde{g}(e_i) = e_i g_j^i$$

tanımı ile $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir dönüşüm olur. Bu durumda $p \cdot g$ çatısı

$$\widetilde{p \cdot g} = \tilde{p} \circ \tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow T_x M$$

izomorfizmine karşılık gelir. Çünkü $j = 1, \dots, n$ için

$$(\tilde{p} \circ \tilde{g})(e_j) = \tilde{p}(e_i g_j^i) = \tilde{p}(e_i) g_j^i = \sigma_i g_j^i = \hat{p}_j$$

olur. Ele aldığımız bu $L(M)$ bir topolojiye ve manifold yapısına sahiptir ve σ nın yukarıdaki tanımıyla birlikte

$$GL(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow L(M) \xrightarrow{\mathcal{P}_L} M$$

M üzerinde düzgün bir $GL(n, \mathbb{R})$ -asli lif demedidir ve M nin çatı demedi olarak adlandırılır.

Şimdi elde ettiğimiz bu çatı demedinin açıklarından bahsedelim.

(U, φ) , $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordinat fonksiyonları olmak üzere M üzerinde bir kart olsun.

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{P}_L^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times GL(n, \mathbb{R})$$

dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$p = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $x = \mathcal{P}_L(p) \in U$ noktasında bir çatı olsun. O zaman her bir $j = 1, \dots, n$ için

$$\sigma_j = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x A_j^i(p)$$

yazalım.

$$A(p) = \left(A_j^i(p) \right)$$

matrisi terslenebilir olduğundan dolayı

$$\tilde{\varphi}(p) := \left(\varphi(x), A(p) \right)$$

tanımını yapabiliriz. Açıktır ki $\tilde{\varphi}$ birebirdir ve herhangi $A \in GL(n, \mathbb{R})$, her bir $x \in U$ noktasındaki en az bir çatı ile eşleşir. Bu da $\tilde{\varphi} : \mathcal{P}_L^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times GL(k, \mathbb{R})$ dönüşümünün birebir ve örten olduğu anlamına gelir.

Ayrıca $\varphi(U) \times GL(n, \mathbb{R})$ kümesi $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n+n^2}$ de açıktır.

Böylece $\mathcal{U} \subset L(X)$ açıktır ancak ve ancak (U, φ) , M üzerinde bir kart olmak üzere $\tilde{\varphi}(\mathcal{U} \cap \mathcal{P}_L^{-1}(U))$ kümesi $\tilde{\varphi}(\mathcal{P}_L^{-1}(U)) = \varphi(U) \times GL(k, \mathbb{R})$ de açıktır. $L(M)$ kümesi de bu tanım altında bir topolojik yapıya sahiptir.

6. ASOSYE VEKTÖR DEMEDİ

$\sigma : P \times G \rightarrow P$, $\sigma(p, g) = p \cdot g$ sağ etki olmak üzere $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} M$ düzgün bir G -asli lif demedi olsun. F düzgün bir manifold öyle ki G bu manifold üzerinde soldan etki etsin. $\left((g, \xi) \in G \times F \text{ elemanının bu etki altındaki görüntüsü } g \cdot \xi \text{ olarak yazılacak.} \right)$ O zaman

$$\begin{aligned} (P \times F) \times G &\rightarrow P \times F \\ ((p, \xi), g) &\mapsto (p, \xi) \cdot g := (p \cdot g, g^{-1} \cdot \xi) \end{aligned}$$

$P \times F$ üzerinde düzgün sağ etkidir [7]. $P \times F$ üzerinde aşağıdaki gibi bir denklik bağıntısı tanımlayalım.

$$(p_1, \xi_1) \sim (p_2, \xi_2) \Leftrightarrow \exists g \in G, (p_2, \xi_2) = (p_1, \xi_1) \cdot g$$

(p, ξ) yi içeren denklik sınıfı

$$[p, \xi] = \{(p \cdot g, g^{-1} \cdot \xi) : g \in G\}$$

dir. O zaman bu elemanlardan oluşan kümeyi

$$P \times_G F = \{[p, \xi] : (p, \xi) \in P \times F\}$$

ile gösterelim. Bu şekilde oluşan $P \times_G F$ kümesi üzerindeki bölüm topolojisi

$$\mathcal{Q} : P \times F \rightarrow P \times_G F, \quad \mathcal{Q}(p, \xi) = [p, \xi]$$

bölüm dönüşümü ile belirlenen topolojidir. Aynı zamanda

$$\mathcal{P}_G : P \times_G F \rightarrow M, \quad \mathcal{P}_G([p, \xi]) = \mathcal{P}(p)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{P}_G$ süreklidir ve herhangi bir $x \in M$ ve $p \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ için

$$\mathcal{P}_G^{-1}(x) = \{[p, \xi] : \xi \in F\}$$

dir [7]. (V, Ψ) , $\mathcal{P} : P \rightarrow M$ G -asli lif demedinin herhangi bir lokal trivializasyonu ve $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$ bir kesit ise $\tilde{\Phi}(x, \xi) = [s(x), \xi]$ ile tanımlanan

$$\tilde{\Phi} : V \times F \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$$

dönüşümü homeomorfizmdir ve tersi $\tilde{\Psi} : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow V \times F$ olmak üzere $\tilde{\Psi}(s(x), \xi) = (x, \xi)$ dir.

$V_i \cap V_j \neq \emptyset$ olmak üzere (V_i, Ψ_i) ve (V_j, Ψ_j) trivializasyonlar ve $g_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow G$ geçiş fonksiyonları ise $\tilde{\Psi}_j \circ \tilde{\Psi}_i^{-1}(x, \xi) = (x, g_{ji}(x) \cdot \xi)$ ile verilen

$$\tilde{\Psi}_j \circ \tilde{\Psi}_i^{-1} : (V_i \cap V_j) \times F \rightarrow (V_i \cap V_j) \times F$$

dönüşümü diffeomorfizmdir [7]. Böylelikle $P \times_G F$ üzerinde tek bir diferansiyellenebilir yapı vardır. Bu durumda

$$\mathcal{P}_G : P \times_G F \rightarrow M$$

ye $\mathcal{P} : P \rightarrow M$ asli lif demedine karşılık gelen asosye lif demedi denir. Bunun özel bir durumunu ele alalım. Yani $F = \mathcal{V}$, üzerinde doğal diferansiyellenebilir yapısı ile birlikte sonlu boyutlu vektör uzayı olsun. $\rho : G \rightarrow GL(\mathcal{V})$, G nin $\mathcal{V}$ üzerindeki düzgün temsili olsun. Bu durumda ρ , G nin $\mathcal{V}$ üzerindeki düzgün sol etkisini ortaya çıkarır. $\left((g, v) \rightarrow g \cdot v = (\rho(g))(v) \right)$. O halde bu etki ile birlikte $\mathcal{P} : P \rightarrow M$ asli lif demedine karşılık gelen asosye lif demedi

$$\mathcal{P}_\rho : P \times_\rho \mathcal{V} \rightarrow M$$

ile gösterilir ve ρ temsili yardımıyla $\mathcal{P} : P \rightarrow X$ asli lif demedine karşılık gelen asosye vektör demedi denir.

Bu durumda $p \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ olmak üzere $\mathcal{P}_\rho^{-1}(x) = \{[p, v] : v \in \mathcal{V}\}$ lifi $\mathcal{V}$ nin bir kopyasıdır ve doğal bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Yani her $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve her $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ için

$$a_1[p, v_1] + a_2[p, v_2] = [p, a_1v_1 + a_2v_2]$$

dir.

Örnek 6.0.1. $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} M$, keyfi $U(1)$ -asli lif demedi olsun ve $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ (2-boyutlu reel vektör uzayı olarak) alalım. Eğer $\rho : U(1) \rightarrow GL(\mathbb{C})$, $U(1)$ in $\mathbb{C}$ üzerindeki herhangi bir temsili ise o zaman $\mathcal{P}_\rho : P \times_\rho \mathbb{C} \rightarrow M$ asosye vektör demedi öyle liflere sahiptir ki bu lifler $\mathbb{C}$ nin kopyasıdır ve M üzerindeki kompleks doğru demedi olarak adlandırılır. $\rho : U(1) \rightarrow GL(\mathbb{C})$ yi daha açık olarak yazacak olursak, her bir $g \in U(1)$ ve $z \in \mathbb{C}$ için $(\rho(g))(z) = gz$ olarak alabiliriz. (Eğer $g = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ise $\rho(g)$, θ derece döndürmedir.) Daha genel olarak tanımlamak istersek, herhangi bir n tamsayısı için $\rho : U(1) \rightarrow GL(\mathbb{C})$ temsili $(\rho(g))(z) = g^n z$ olarak alabiliriz ve böylelikle M üzerinde asosye vektör demedi elde etmiş oluruz.

$\mathcal{P} : P \rightarrow M$ G -asli lif demedi ve $\mathcal{P}_G : P \times_G \mathcal{V} \rightarrow M$ asosye vektör demedi olsun. Eğer V , M in açık bir alt kümesi ve her $p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ ve $g \in G$ için

$$\phi(p \cdot g) = g^{-1} \cdot \phi(p) \quad (6.1)$$

eşitliği sağlanırsa $\phi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow \mathcal{V}$ düzgün dönüşümüne equivaryant dönüşüm denir. Böyle bir equivaryant dönüşüm verildiğinde $p \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ olmak üzere

$$s_\phi : V \rightarrow \mathcal{P}_G^{-1}(V)$$

dönüşümü $s_\phi(x) = [p, \phi(p)]$ olacak şekilde tanımlanabilir. Bu durumda s_ϕ dönüşümü düzgündür ve $\mathcal{P}_G \circ s_\phi = Id_V$ eşitliğini sağlar.

Tersine $s : V \rightarrow \mathcal{P}_G^{-1}(V)$, $P \times_G \mathcal{V}$ asosye vektör demedinin bir lokal kesiti olsun. Bu durumda $\phi_s : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow \mathcal{V}$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım: $p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ ise $\mathcal{P}(p) = x \in V$ dir. Öyleyse $s(x) \in \mathcal{P}_G^{-1}(V)$ dir ve

$$s(x) = [p, \phi_s(p)]$$

olacak şekilde tek bir $\phi_s(p) \in \mathcal{V}$ elemanı vardır öyle ki (6.1) equivaryantlık koşulunu sağlar. Yani, $\phi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow \mathcal{V}$ equivaryant dönüşümleri ve $P \times_G \mathcal{V}$ asosye vektör demedinin $s : V \rightarrow \mathcal{P}_G^{-1}(V)$ kesitleri arasında birebir ve örten eşleme vardır [7].

6.1. Asosye Vektör Demedi Üzerinde Kovaryant Türev

$\mathcal{P} : P \rightarrow M$ G -asli lif demedi üzerinde ω konneksiyon 1-formu ve $\phi : P \rightarrow \mathcal{V}$ lokal kesit olsun. Her bir $p \in P$ ve $v \in T_p(P)$ için v^H , v nin yatay kısmı olmak üzere

$$(d^\omega \phi)_p(v) = (d\phi)_p(v^H)$$

şeklinde $d^\omega \phi$ 1-formunu tanımlayalım.

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{V})$$

dönüşümü G nin $\mathcal{V}$ üzerindeki sol etkisi ve düzgün homomorfizm olsun. $\mathfrak{g}$, G nin Lie cebiri ve her bir $A \in \mathfrak{g}$ ve her bir $v \in \mathcal{V}$ için $A \cdot v$ yi aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$A \cdot v = \left. \frac{d}{dt}(e^{tA} \cdot v) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\rho(e^{tA}))(v) \right|_{t=0}$$

Ayrıca $\rho_{*1} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$, ρ nun birimdeki türev dönüşümü olmak üzere

$$\left. \frac{d}{dt}(\rho(e^{tA}))(v) \right|_{t=0} = \rho_{*1}(A)(v)$$

dir. Burada G matris Lie grubu ve ρ kapsama dönüşümü ise her bir $A \in \mathfrak{g}$ için $A \cdot v = Av$ matris çarpımıdır.

G nin bu etkisi yardımıyla $P \times_\rho \mathcal{V}$ asosye vektör demedi elde edilir. Bu vektör demedinin kesitlerinin $P \rightarrow \mathcal{V}$ şeklindeki equivaryant dönüşümler olarak düşünülebileceği gösterilmişti.

$\phi : P \rightarrow \mathcal{V}$ equivaryant dönüşüm ve ω , $\mathfrak{g}$ -değerli 1-form, ayrıca $p \in P$ ve $v \in T_p(P)$ olmak üzere

$$(\omega \cdot \phi)_p(v) = \omega_p(v) \cdot \phi(p)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi iddia ediyoruz ki

$$d^\omega \phi = d\phi + \omega \cdot \phi$$

eşitliği doğrudur. Bunu kanıtlamak için her $v \in T_p(P)$ için

$$(d\phi)_p(v^H) = (d\phi)_p(v) + \omega_p(v) \cdot \phi(p)$$

olduğunu göstermek zorundayız.

İki taraf da v de lineer ve $T_p(P) = Hor_p(P) \oplus Vert_p(P)$ olduğu için v nin yatay ve dikey olduğu durumları ayrı ayrı gözönüne almak bize yardımcı olacaktır. Şimdi, v yatay kısım ise $v = v^H$ ve $\omega_p(v) = 0$ dir. Bu durumda zaten yukarıdaki eşitlik sağlanır. Varsayalım ki v dikey kısım olsun. O halde $v^H = 0$ olur ki bu da yukarıdaki eşitliğin sol tarafının sıfır olduğu anlamına gelir. [7] de gösterilmiştir ki $v = A^\sharp(p)$ olacak şekilde bir tek $A \in \mathfrak{g}$ elemanı vardır. Böylece

$$(d\phi)_p(v) = (d\phi)_p(A^\sharp(p)) = A^\sharp(\phi)(p)$$

ve

$$\omega_p(v) = \omega_p(A^\sharp(p)) = A$$

olur. Öyleyse

$$A^\sharp(\phi(p)) = -A \cdot \phi(p)$$

eşitliğini kanıtlamalıyız.

$A^\sharp(\phi)(p)$ yi hesaplamak için $\beta(t) = p \cdot \exp(tA)$ olsun. O zaman

$$A^\sharp(\phi)(p) = A^\sharp(p)(\phi) = \beta'(0)(\phi) = (\phi \circ \beta)'(0)$$

Fakat $(\phi \circ \beta)(t) = \phi(\beta(t)) = \phi(p \cdot \exp(tA)) = \exp(-tA) \cdot \phi(p)$ olduğundan

$$(\phi \circ \beta)'(0) = -A \cdot \phi(p)$$

dir ki bu da göstermek istediğimiz şeydir.

$d^\omega \phi$ dış kovaryant türevini koordinatlarda hesaplamak için $\mathcal{P} : P \rightarrow M$ G -asli lif demedinin lokal kesiti veya trivializasyonunu almamız gerekmektedir.

$s : U \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(U)$ kesitinin tanım kümesi U nun aynı zamanda M nin koordinat

komşuluğu olduğunu varsayalım ve aşağıdaki eşitliği düşünelim.

$$\begin{aligned} s^*(d^\omega \phi) &= s^*(d\phi + \omega \cdot \phi) = s^*(d\phi) + s^*(\omega \cdot \phi) \\ &= d(\phi \circ s) + (s^*\omega) \cdot (\phi \circ s) \end{aligned}$$

U üzerinde $s^*\omega : TU \rightarrow \mathfrak{g}$ ayar potansiyeli için $\mathcal{A}$ yazarsak

$$s^*(d^\omega \phi) = d(\phi \circ s) + \mathcal{A} \cdot (\phi \circ s)$$

olur.

Şimdi P üzerindeki ω konneksiyon 1-formu yardımıyla $E = P \times_\rho \mathcal{V}$ asosye vektör demedi üzerinde ∇ kovaryant türev operatörü tanımlayalım.

$X \in \chi(M)$ ve $\phi \in \Gamma(E)$ olmak üzere

$$\nabla_X \phi = d^\omega \phi(X^*)$$

eşitliği ile verilen ∇ dönüşümü bir konneksiyondur [2]. Burada X^* , X vektör alanının yatay kaldırılmışıdır. Bu konneksiyona $E = P \times_\rho \mathcal{V}$ üzerinde ω tarafından belirlenen konneksiyon denir. Bu konneksiyon için kullandığımız yöntem spinor demedi üzerinde konneksiyon tanımlarken kullanılacaktır. Buradaki ∇ nın lokal koordinatlardaki ifadesi $U_\alpha \subset M$, $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow P$ ve X , U_α üzerinde bir vektör alanı olmak üzere

$$\nabla_X \phi = d\phi_\alpha(X) + \mathcal{A}_\alpha(X) \cdot \phi_\alpha$$

olur. Burada

$$\phi_\alpha = \phi \circ s_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathcal{V}$$

ve

$$\mathcal{A}_\alpha(X) \cdot \phi_\alpha = \rho_{*1}(\mathcal{A}_\alpha(X))(\phi_\alpha)$$

dır. Açık yazmak gerekirse

$$\nabla_X \phi = d\phi_\alpha(X) + \rho_{*1}(\mathcal{A}_\alpha(X))(\phi_\alpha)$$

olur. $E = P \times_{\rho} \mathcal{V}$ üzerindeki ∇ kovaryant türevi [9] da $\phi_{\alpha} \in \Gamma(S)$, $X \in \chi(M)$ olmak üzere denklik sınıfları yardımıyla

$$\nabla_X \phi = [s, d\phi_{\alpha}(X) + \mathcal{A}_{\alpha}(X)\phi_{\alpha}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $U_{\alpha} \subset M$ için $s_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow P$ lokal kesittir. Ayrıca bu tanımlama seçilen kesitten bağımsızdır.

7. Spin^T –YAPISI

Tanım 7.0.1. (M^n, g) yönlendirilmiş Riemann manifoldu üzerinde bir Spin^T –yapısı, $\Lambda : P_{\text{Spin}^T(n)} \rightarrow P_{SO(n)}$ düzgün dönüşüm olmak üzere bir $P_{\text{Spin}^T(n)}$ $\text{Spin}^T(n)$ –asli lif demedidir öyle ki aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc} P_{\text{Spin}^T(n)} \times \text{Spin}^T(n) & \longrightarrow & P_{\text{Spin}^T(n)} \\ \downarrow \Lambda \times \lambda^T & & \downarrow \Lambda \\ P_{SO(n)} \times SO(n) & \longrightarrow & P_{SO(n)} \end{array}$$

Böylece M manifolduna Spin^T –manifoldu denir.

Yukarıdaki tanımdan

$$\Pi : P_{\text{Spin}^T(n)} \rightarrow P_{SO(n)} \times P_{S^1 \times S^1}$$

2:1 örtü dönüşümünü inşa edebiliriz.

Bir $(P_{\text{Spin}^T(n)}, \Lambda)$ Spin^T –yapısı verildiğinde, $\lambda^T : \text{Spin}^T(n) \rightarrow SO(n)$ dönüşümü bir izomorfizm indirger.

$$P_{\text{Spin}^T(n)}/S^1 \times S^1 \cong P_{SO(n)}.$$

Benzer şekilde, $\text{Spin}^T(n)/_{\text{Spin}(n)} \cong S^1 \times S^1$ yardımıyla,

$$P_{\text{Spin}^T(n)}/\text{Spin}(n) \cong P_{S^1 \times S^1}$$

izomorfizmi vardır.

$i : \text{Spin}(n) \hookrightarrow \text{Spin}^T(n)$ kapsama dönüşümünden dolayı, M üzerindeki her Spin yapısı Spin^T –yapısı indirger. Benzer şekilde, $\text{Spin}^c(n) \hookrightarrow \text{Spin}^T(n)$ kapsama dönüşümü var olduğundan, M üzerindeki her Spin^c yapısı bir Spin^T yapısı indirger.

8. SPİNOR DEMEDİ VE DIRAC OPERATÖRÜ

(M^n, g) yönlendirilmiş bağlantılı bir Riemann manifold ve $P_{SO(n)} \rightarrow M$, pozitif olarak yönlendirilmiş ortonormal çatının $SO(n)$ —asli lif demedi olsun. M üzerindeki ∇ Levi-Civita konneksiyonu, $P_{SO(n)}$ asli lif demedi üzerinde, $\omega : TP_{SO(n)} \rightarrow \mathfrak{so}(n)$ $\mathfrak{so}(n)$ —değerli konneksiyon 1—formunu belirler. $U \subset M$ açık alt kümesi ve $e : U \rightarrow P_{SO(n)}$, $P_{SO(n)}$ çatı demedinin lokal kesiti olsun. O zaman $P_{SO(n)}$ üzerinde bu konneksiyon lokal olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$TU \xrightarrow{e_*} TP_{SO(n)} \xrightarrow{\omega} \mathfrak{so}(\mathfrak{n})$$

olmak üzere

$$TU \xrightarrow{\omega \circ e_*} \mathfrak{so}(\mathfrak{n})$$

dir. Burada $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, ortonormal çatı ve $\omega^e = \omega \circ e_* = e^*(\omega)$ alacak olursak

$$\omega^e = \sum_{i < j} g(\nabla e_i, e_j) E_{ij} \quad (8.1)$$

dir. Buradan $X \in \chi(U)$ olmak üzere

$$\omega^e(X) = \sum_{i < j} g(\nabla_X e_i, e_j) E_{ij}$$

elde edilir. Burada E_{ij} , ij . girdisi -1 , ji . girdisi 1 , diğer tüm girdileri sıfır olan $n \times n$ tipinde matristir.

Şimdi konneksiyonlar için lokal bir formül vereceğiz. $s : U \rightarrow P_{S^1 \times S^1}$, $P_{S^1 \times S^1}$ —asli lif demedi üzerinde bir kesit olsun. O zaman

$$(A, B) : TP_{S^1 \times S^1} \rightarrow i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

konneksiyon olmak üzere

$$TU \xrightarrow{s_*} TP_{S^1 \times S^1} \xrightarrow{(A, B)} i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

olur. Buradan da

$$TU \xrightarrow{(A,B) \circ s_*} i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

dönüşümünü elde ederiz. Son dönüşümü aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$s^*(A, B) = (A, B) \circ s_* = (A, B)^s : TU \rightarrow i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

A^s, B^s, U kümesi üzerinde tanımlı $i\mathbb{R}$ -değerli 1-formlar olmak üzere $(A, B)^s = (A^s, B^s)$ dir.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{e} & P_{SO(n)} \\ & \searrow s & \\ & & P_{S^1 \times S^1} \end{array}$$

dönüşümlerini düşünürsek

$$e \times s : U \rightarrow P_{SO(n)} \times P_{S^1 \times S^1}$$

çarpım demedi üzerinde bir lokal kesittir. Buradan

$$\begin{array}{ccc} & & P_{Spin^T(n)} \\ & \nearrow \widetilde{e \times s} & \downarrow \Pi \\ U & \xrightarrow{e \times s} & P_{SO(n)} \times P_{S^1 \times S^1} \end{array}$$

olur. Burada $\widetilde{e \times s}$, Π iki katlı örtü dönüşümü yardımıyla $e \times s$ kesitinin kaldırılmışıdır.

ω ve (A, B) konneksiyonları, $P_{SO(n)} \times P_{S^1 \times S^1}$ çarpım demedi üzerinde

$$\omega \times (A, B) : T(P_{SO(n)} \times P_{S^1 \times S^1}) \rightarrow \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

konneksiyonunu indirger. Şimdi aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde $P_{Spin^T(n)}$ asli lif demedi üzerinde $\omega \times \widetilde{(A, B)}$ konneksiyon 1-formunu tanımlayalım :

$$\begin{array}{ccc} TP_{Spin^T(n)} & \xrightarrow{\omega \times \widetilde{(A, B)}} & \mathfrak{spin}^T(n) = \mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \\ \downarrow \Pi_* & & \downarrow p_* \\ T(P_{SO(n)} \times P_{S^1 \times S^1}) & \xrightarrow{\omega \times (A, B)} & \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \end{array}$$

Yani

$$p_* \circ \left(\omega \times \widetilde{(A, B)} \right) = \left(\omega \times (A, B) \right) \circ \Pi_*$$

eşitliği sağlanır.

Ayrıca $\widetilde{e \times s}$ lokal kesiti yardımıyla $\omega \times \widetilde{(A, B)}$ konneksiyonunu U üzerine çekebiliriz. Yani

$$\begin{array}{ccc} & TP_{Spin^T(n)} & \xrightarrow{\omega \times \widetilde{(A, B)}} \mathfrak{spin}^T(n) = \mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \\ & \downarrow \Pi_* & \downarrow p_* Id \\ TU & \xrightarrow[(e \times s)_*]{} T(P_{SO(n)} \times P_{S^1 \times S^1}) & \xrightarrow{\omega \times (A, B)} \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \end{array}$$

diyagramları değişmelidir. $\omega \times \widetilde{(A, B)}^{\widetilde{e \times s}} : TU \rightarrow \mathfrak{spin}(\mathfrak{n}) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ lokal konneksiyon formunu düşündüğümüzde değişmeli diyagramdan

$$\begin{aligned} \omega \times \widetilde{(A, B)}^{\widetilde{e \times s}} &= \left(\omega \times \widetilde{(A, B)} \right) \circ (\widetilde{e \times s})_* \\ &= p_{*1}^{-1} \circ \left(\omega \times (A, B) \right) \circ (e \times s)_* \\ &= p_{*1}^{-1} \circ \left(\omega \times (A, B) \right) \circ (e_* \times s_*) \\ &= p_{*1}^{-1} \circ \left((\omega \circ e_*) \times ((A, B) \circ s_*) \right) \\ &= p_{*1}^{-1} \circ \left(\omega^e \times (A, B)^s \right) \\ &= p_{*1}^{-1} \left(\sum_{i < j} g(\nabla e_i, e_j) E_{ij}, A^s, B^s \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \sum_{i < j} g(\nabla e_i, e_j) e_i e_j, \frac{1}{2} A^s, (B^s - \frac{1}{2} A^s) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 8.0.1. Bir $Spin^T$ spinor demedi,

$$\mathbb{S} = P_{Spin^T(n)} \times_{\kappa^T} \Delta_n$$

asosye vektör demedi olarak tanımlanır. Burada $\kappa^T : Spin^T(n) \rightarrow GL(\Delta_n)$, $Spin^T(n)$ nin spinor temsilidir. $n = 2k$ durumunda spinor demedi, $\mathbb{S}^+$ ve $\mathbb{S}^-$ şeklinde iki alt demede ayrılır öyle ki

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^-, \quad \mathbb{S}^\pm = P_{Spin^T(n)} \times_{\kappa^{T^\pm}} \Delta_n^\pm$$

olur.

$\widetilde{e \times s}$ kesiti yardımıyla U üzerindeki $\mathbb{S}$ spinor demedinin $\psi : U \rightarrow \mathbb{S}$ kesitini $\psi : U \rightarrow \Delta_n$ şeklinde bir dönüşüm olarak gösterebiliriz öyle ki bu dönüşüm $\psi(pg) = \kappa^T(g^{-1})\psi(p)$ kuralını sağlar. $\mathbb{S}$ spinor demedi üzerinde $\omega \times \widetilde{(A, B)}$ konneksiyonu

$$\tilde{\nabla} : \Gamma(\mathbb{S}) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{S})$$

kovaryant türevini belirler öyle ki bu kovaryant türev

$$\tilde{\nabla}\psi = d\psi + \kappa_{*1}^T(\omega \times \widetilde{(A, B)})\psi$$

ile verilir. Burada $\kappa_{*1}^T : \mathfrak{spin}^T(n) \rightarrow \text{End}(\Delta_n)$, κ^T nin birimdeki türevidir.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}\psi &= d\psi + \kappa_{*1}^T(\omega \times \widetilde{(A, B)}^{\widetilde{e \times s}})\psi \\ &= d\psi + \kappa_{*1}^T\left(\frac{1}{2}\sum_{i < j} g(\nabla e_i, e_j)e_i e_j, \frac{1}{2}A^s, (B^s - \frac{1}{2}A^s)\right)\psi \\ &= d\psi + \left(\frac{1}{2}\sum_{i < j} g(\nabla e_i, e_j)\kappa(e_i e_j) + 2(\frac{1}{2}A^s) + (B^s - \frac{1}{2}A^s)\right)\psi \\ &= d\psi + \frac{1}{2}\sum_{i < j} g(\nabla e_i, e_j)e_i e_j \cdot \psi + A^s\psi + B^s\psi - \frac{1}{2}A^s\psi \\ &= d\psi + \frac{1}{2}\sum_{i < j} g(\nabla e_i, e_j)e_i e_j \cdot \psi + \frac{1}{2}A^s\psi + B^s\psi \end{aligned}$$

$X \in \chi(U)$ olmak üzere lokal olarak $\mathbb{S}$ spinor demedi üzerinde kovaryant türev

$$\tilde{\nabla}_X\psi = d\psi(X) + \frac{1}{2}\sum_{i < j} g(\nabla_X e_i, e_j)e_i e_j \cdot \psi + \frac{1}{2}A^s\psi + B^s\psi$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 8.0.2. $X, Y \in \chi(M)$ ve $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ olsun. $\mathbb{S}$ spinor demedi üzerinde tanımlanan $\tilde{\nabla}$ kovaryant türevi aşağıdaki özelliği sağlar:

$$\tilde{\nabla}_Y(X \cdot \psi) = X \cdot \tilde{\nabla}_Y\psi + (\nabla_Y X) \cdot \psi$$

Kanıt. Önce $(X \cdot \psi)(p)$ ye anlam kazandıralım.

$$\mathbb{S} = P_{Spin^T(n)} \times_{\kappa^T} \Delta_n \xrightarrow{\pi} M$$

olsun. Bu spinor demedindeki kesit

$$\psi : M \rightarrow P_{Spin^T(n)} \times_{\kappa^T} \Delta_n$$

şeklindedir ve

$$\psi(x) := [p, \varphi(p)]$$

olarak tanımlanır öyle ki $\pi(p) = x$ tir. $\psi(x) := [p, \varphi(p)] = [p.g, g^{-1}.\varphi(p)]$ olduğundan biz bu kesitleri aynı zamanda

$$\begin{aligned} \varphi : P_{Spin^T(n)} &\rightarrow \Delta_n \\ p &\mapsto \varphi(p) \end{aligned}$$

ve $\varphi(p.g) = g^{-1}.\varphi(p)$ olacak şekildeki equivariant dönüşümler olarak düşünebiliriz.

$\rho : SO(n) \rightarrow Aut(\mathbb{R}^n)$ standart temsil olmak üzere

$$Spin^T(n) \xrightarrow{\lambda^T} SO(n) \xrightarrow{\rho} Aut(\mathbb{R}^n)$$

dönüşümlerinden elde ettiğimiz $\rho \circ \lambda^T$ temsilini ele aldığımızda aşağıdaki izomorfizm mevcuttur.

$$TM \cong P_{Spin^T(n)} \times_{\rho \circ \lambda^T} \mathbb{R}^n$$

Yani $X \in \chi(M)$ ise $X = [p, X(p)] = [p, v]$ olarak düşünebiliriz. Başka bir deyişle

$X : P_{Spin^T(n)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dir ve

$$\begin{aligned} [p, v] &= [p.g, X(p.g)] = [p.g, \rho \circ \lambda^T(g^{-1})(v)] = \\ &= [p.g, (\lambda^T(g^{-1}))(v)] = [p.g, \lambda^T(g^{-1})(X(p))] \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Tüm bunları göz önüne alırsak $(X \cdot \psi)(p)$ Clifford çarpımı

$$(X \cdot \psi)(p) := X(p) \cdot \psi(p)$$

tanımı ile verilir. Şimdi ise spinor demedimiz üzerindeki kovaryant türevi belirleyen

mutlak diferansiyelimizi kullanarak

$$\widetilde{D}(X \cdot \psi)$$

yi hesaplayalım. Mutlak diferansiyelin tanımından yola çıkarsak

$$\widetilde{D} = d\psi + \kappa_{*1}^T(\omega \times \widetilde{(A, B)}) \cdot$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} \widetilde{D}(X \cdot \psi) &= d(X \cdot \psi) + \kappa_{*1}^T(\omega \times \widetilde{(A, B)}) \cdot (X \cdot \psi) \\ &= dX \cdot + X \cdot d\psi + \kappa_{*1}^T(\omega \times \widetilde{(A, B)}) \cdot (X \cdot \psi) \\ &= dX \cdot + X \cdot d\psi + (y + is + i\rho) \cdot X \cdot \\ &= dX \cdot + X \cdot d\psi + (y + i(s + \rho)) \cdot X \cdot \\ &= dX \cdot + X \cdot d\psi + y \cdot X \cdot \psi + X \cdot (i(s + \rho)\psi) \\ &= dX \cdot + X \cdot d\psi + X \cdot y \cdot \psi + \lambda_*(y)(X) \cdot \psi + X \cdot (i(s + \rho)\psi) \\ &= X \cdot d\psi + X \cdot y \cdot + X \cdot (i(s + \rho)\psi) + dX \cdot \psi + \lambda_*(y)(X) \cdot \\ &= X \left(d\psi + \kappa_{*1}^T(\omega \times \widetilde{(A, B)}) \cdot \right) + dX \cdot \psi + \omega(\Pi_*(t))(X) \cdot \\ &= X \left(d\psi + \kappa_{*1}^T(\omega \times \widetilde{(A, B)}) \cdot \right) + dX \cdot \psi + \lambda_*(\omega)(X) \cdot \\ &= X \cdot \widetilde{D} + (\nabla X) \cdot \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $(y + is + i\rho) \in \mathfrak{spin}^T(n) \oplus i\mathbb{R} + i\mathbb{R}$ ve $y \cdot X = X \cdot y \cdot \psi + \lambda_*(y)(X) \cdot \psi$ eşitliği [2] de gösterilmiştir. Bu da demektir ki bu mutlak diferansiyelin belirlediği kovaryant türev

$$\widetilde{\nabla}_Y(X \cdot \psi) = X \cdot \widetilde{\nabla}_Y \psi + (\nabla_Y X) \cdot$$

özelliğini sağlar.

□

Tanım 8.0.3. μ Clifford çarpımı olmak üzere

$$\begin{aligned} D = \mu \circ \tilde{\nabla}: \Gamma(\mathbb{S}) &\xrightarrow{\tilde{\nabla}} \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{S}) \rightarrow \Gamma(TM \otimes \mathbb{S}) \xrightarrow{\mu} \Gamma(\mathbb{S}) \\ \psi &\mapsto \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \mapsto \sum_{i=1}^n e_i \otimes \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \mapsto \sum_{i=1}^n e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan D ye $Spin^T$ Dirac operatörü denir.

D $Spin^T$ Dirac operatörü lokal olarak

$$D\psi = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \quad (8.2)$$

ile ifade edilir ki burada $\{e_1, \dots, e_n\}$, M manifoldu üzerindeki lokal ortonormal çatıdır.

D $Spin^T$ Dirac operatörü aşağıdaki özelliğe sahiptir:

Teorem 8.0.4. f , düzgün bir fonksiyon ve $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$, bir spinor alanı olsun. O zaman,

$$D(f \cdot \psi) = (gradf \cdot \psi) + fD\psi$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. D $Spin^T$ Dirac operatörünün tanımını kullanarak $D(f \cdot \psi)$ yi aşağıdaki gibi hesaplarız:

$$\begin{aligned} D(f \cdot \psi) &= \sum_{i=1}^n e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} (f \cdot \psi) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \cdot (e_i(f) \cdot \psi + f \tilde{\nabla}_{e_i} \psi) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i \cdot \psi + f \sum_{i=1}^n e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \\ &= (gradf) \cdot \psi + fD\psi \end{aligned}$$

□

Önerme 8.0.5.

$$D(X \cdot \psi) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot (\nabla_{e_i} X) \cdot \psi - X \cdot D\psi + 2\tilde{\nabla}_X \psi$$

Kanıt.

$$\begin{aligned}
D(X \cdot \psi) &= \sum_{i=1}^n e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}(X \cdot \psi) \\
&= \sum_{i=1}^n e_i \cdot \left((\nabla_{e_i} X) \cdot \psi + X \cdot (\tilde{\nabla}_{e_i} \psi) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n e_i \cdot (\nabla_{e_i} X) \cdot \psi + \sum_{i=1}^n e_i \cdot X \cdot (\tilde{\nabla}_{e_i} \psi) \\
&= \sum_{i=1}^n e_i \cdot (\nabla_{e_i} X) \cdot \psi - \sum_{i=1}^n X \cdot e_i \cdot (\tilde{\nabla}_{e_i} \psi) + \sum_{i=1}^n 2g(X, e_i) \cdot (\tilde{\nabla}_{e_i} \psi) \\
&= \sum_{i=1}^n e_i \cdot (\nabla_{e_i} X) \cdot \psi - X \cdot D\psi + 2\tilde{\nabla}_X \psi
\end{aligned}$$

□

Şimdi $\mathbb{S}$ spinor demedi üzerindeki Laplace operatörünü tanımlayalım.

Tanım 8.0.6. $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ bir spinor alanı olsun. Spinorlar üzerindeki Δ Laplace operatörü

$$\Delta\psi = -\sum_{i=1}^n \left(\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} \psi + \operatorname{div}(e_i) \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \right) \quad (8.3)$$

ile tanımlanır.

8.1. Schrödinger-Lichnerowicz Tipinde Formül

Dirac operatörünün karesi D^2 ve Laplace operatörü Δ , ikinci mertebeden diferensiyel operatörlerdir. $D^2 - \Delta$ farkını hesaplayarak Schrödinger-Lichnerowicz tipinde formül türeteceğiz .

$\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere $\tilde{\nabla}$ kovaryant türevinin eğriliği $R^{\mathbb{S}}$

$$R^{\mathbb{S}}(X, Y)\psi = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \psi - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \psi - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\psi$$

ile verilen $\operatorname{End}(\mathbb{S})$ değerli 2-formdur. Şimdi R eğrilik tensörüne göre $R^{\mathbb{S}}$ yi tanımlamak istiyoruz. Bunun için aşağıdaki yardımcı teoremi kanıtlayalım.

Yardımcı Teorem 8.1.1. $\rho, SO(n)$ grubunun temsili olmak üzere

$$R^\omega = \rho_*(\Omega^\omega)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. $\psi : P \rightarrow \Delta_n$ spinorunu ve $d\psi : TP \rightarrow \Delta_n$ dönüşümünü düşünelim. Ayrıca $TP_{SO(n)} \xrightarrow{Z} \mathfrak{so}(n)$ konneksiyon bir formu ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere X^*, Y^* sırasıyla X, Y nin Z aracılığıyla yatay kaldırılmışları olsunlar. ρ temsili yardımıyla oluşturulan asosye vektör demedi üzerindeki kovaryant türevin

$$\nabla_Y^\omega \psi = (D^\omega \psi)(Y^*)$$

şeklinde verildiğini ve

$$D_Y^\omega \psi = d\psi(Y) + Z(Y)\psi$$

tanımını düşündüğümüzde

$$\nabla_Y^\omega \psi = (D^\omega \psi)(Y^*) = d\psi(Y^*) = Y^*(\psi)$$

olur. Şimdi $R^\omega(X, Y)\psi$ yi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} R^\omega(X, Y)\psi &= \nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega \psi - \nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega \psi - \nabla_{[X, Y]}^\omega \psi \\ &= \nabla_X^\omega (Y^*(\psi)) - \nabla_Y^\omega (X^*(\psi)) - [X, Y]^*(\psi) \\ &= d\left(Y^*(\psi)\right)(X^*) - d\left(X^*(\psi)\right)(Y^*) - [X, Y]^*(\psi) \\ &= X^*(Y^*(\psi)) - Y^*(X^*(\psi)) - [X, Y]^*(\psi) \\ &= [X^*, Y^*](\psi) - [X, Y]^*(\psi) \\ &= \left([X^*, Y^*]^{hor}(\psi) + [X^*, Y^*]^\perp(\psi)\right) - [X^*, Y^*]^{hor}(\psi) \\ &= [X^*, Y^*]^\perp(\psi) \\ &= Z([X^*, Y^*]) \end{aligned}$$

olur. Burada $\Omega^\omega = dZ + \frac{1}{2}[Z, Z] = dZ$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Omega^\omega(X^*, Y^*) &= \\ &= dZ(X^*, Y^*) = X^*\left(Z(Y^*)\right) - Y^*\left(Z(X^*)\right) - Z\left([X^*, Y^*]\right) = -Z\left([X^*, Y^*]\right) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz ki $-\Omega^\omega(X^*, Y^*) = Z\left([X^*, Y^*]\right)$ olur. Buradan da

$$R^\omega(X, Y)\psi = -\Omega^\omega(X^*, Y^*)\psi = -\Omega^\omega(\widetilde{X^*, Y^*})$$

ifadesine ulaşırız. Burada $\Omega^\omega(\widetilde{X^*, Y^*})$, $\Omega^\omega(X^*, Y^*)$ ye karşılık gelen temel vektör alanıdır. Hatırlayalım ki $Z(\widetilde{W}) = W$ ise $\widetilde{W}$ ifadesi W ye karşılık gelen temel vektör alanı olarak adlandırılır. Buradan yola devam edecek olursak

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(\psi)(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(p \cdot e^{tW}) - \psi(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(e^{-tW})\psi(p) - \psi(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(e^{-tW}) - 1}{t} \psi(p) \\ &= \rho_*\left(W\right)(\psi(p))\end{aligned}$$

Bu da demek oluyor ki

$$R^\omega(X, Y)\psi = \rho_*\left(\Omega^\omega(X, Y)\right)$$

□

Şimdi $\Omega^\omega : TP_{SO(n)} \times TP_{SO(n)} \rightarrow \mathfrak{so}(n)$, bileşenleri

$$\Omega^\omega = \sum_{i < j} \Omega_{ij} E_{ij}$$

olan Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik formu olsun öyle ki

$\Omega_{ij} : TP_{SO(n)} \times TP_{SO(n)} \rightarrow \mathbb{R}$ dir.

$$\Omega^{\omega \times (A, B)} : T(P_{SO(n)} \times P_{S^1 \times S^1}) \times T(P_{SO(n)} \times P_{S^1 \times S^1}) \rightarrow \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

olur. Yani

$$\Omega^{\omega \times (A, B)} = \sum_{i < j} \Omega_{ij} E_{ij} + dA + dB$$

olur.

$$\Omega^{\omega \times (A, B)} : TP_{Spin^T(n)} \times TP_{Spin^T(n)} \rightarrow \mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega^{\omega \times (\widetilde{A}, B)}(X, Y) = \\
& = p_*^{-1} \left(\sum_{i < j} \Omega_{ij}(\Pi_*(X), \Pi_*(Y)) E_{ij}, dA(\Pi_*(X), \Pi_*(Y)), dB(\Pi_*(X), \Pi_*(Y)) \right) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \Omega_{ij} \left(\Pi_*(X), \Pi_*(Y) \right) e_i e_j \oplus \frac{1}{2} dA(\Pi_*(X), \Pi_*(Y)) \oplus \left(dB - \frac{1}{2} dA \right) (\Pi_*(X), \Pi_*(Y)) \\
& \quad \Omega^{\omega \times (\widetilde{A}, B)} = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \Pi^*(\Omega_{ij}) e_i e_j \oplus \frac{1}{2} \Pi^*(dA) \oplus \Pi^*(dB - \frac{1}{2} dA).
\end{aligned}$$

Buradan $\mathbb{S}$ spinor demedi üzerinde elde ettiğimiz, $\mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ -değerli $R^{\mathbb{S}}$ 2-formu kullanılarak

$$R^{\mathbb{S}}(.,.)\psi = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \Omega_{ij} e_i e_j \cdot \psi + \frac{1}{2} dA \cdot \psi + dB \cdot$$

eşitliği elde edilir.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal çatı alanı olsun, $\Omega_{ij}(X, Y) = g(R(X, Y)e_i, e_j)$

Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik formunun bileşenleri,

$X = \sum_{k=1}^n X^k e_k$ ve $Y = \sum_{l=1}^n Y^l e_l$, M üzerinde vektör alanları olsun. O zaman $\{e^1, \dots, e^n\}$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ e dual olan çatı olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij}(X, Y) &= g(R(X, Y)e_i, e_j) \\
&= \sum_{k, l=1}^n g(R(X^k e_k, Y^l e_l)e_i, e_j) \\
&= \sum_{k, l=1}^n X^k Y^l g(R(e_k, e_l)e_i, e_j) \\
&= \sum_{k, l=1}^n e^k(X) e^l(Y) g(R(e_k, e_l)e_i, e_j) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n e^k(X) e^l(Y) g(R(e_k, e_l)e_i, e_j) + \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n e^l(X) e^k(Y) g(R(e_l, e_k)e_i, e_j) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n e^k(X) e^l(Y) g(R(e_k, e_l)e_i, e_j) - \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n e^l(X) e^k(Y) g(R(e_k, e_l)e_i, e_j) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n g(R(e_k, e_l)e_i, e_j) (e^k(X) e^l(Y) - e^l(X) e^k(Y)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n R_{kl ij} (e^k \wedge e^l)(X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, eğrilik formu için aşağıdaki lokal formülü elde ederiz:

$$\Omega^{\omega \times \widetilde{(A,B)}} = \frac{1}{4} \sum_{i < j} \sum_{k,l=1}^n R_{klij} (e^k \wedge e^l) e_i e_j + \frac{1}{2} dA + dB$$

ve $R^S(.,.)$ 2-formu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$R^S(.,.)\psi = \frac{1}{4} \sum_{i < j} \sum_{k,l=1}^n R_{klij} (e^k \wedge e^l) e_i e_j \cdot \psi + \frac{1}{2} dA \cdot \psi + dB \cdot \psi.$$

$\mathbb{S}$ spinor demedi üzerindeki R^S eğrilik formunun yukarıdaki özelliklerini kullanarak aşağıdaki sonucu çıkartırız:

Önerme 8.1.2. *Ric M üzerindeki Ricci tensörü olsun. O zaman, aşağıdaki ilişki sağlanır:*

$$\sum_{\alpha=1}^n e_\alpha \cdot R^S(X, e_\alpha) \psi = -\frac{1}{2} Ric(X) \cdot \psi + \frac{1}{2} (X \lrcorner dA) \cdot \psi + (X \lrcorner dB) \cdot \psi \quad (8.4)$$

Kanıt. Aşağıdaki eşitliği [2] de verilen eşitliğe benzer şekilde kanıtlayalım:

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{i < j} \sum_{k,l=1}^n R_{klij} \left(e^k \wedge e^l \right) (X, e_\alpha) e_\alpha e_i e_j \cdot \psi = -2 Ric(X) \cdot \psi \quad (8.5)$$

Şimdi bu eşitliği gösterelim:

Tanımdan

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i < j} \sum_{k,l=1}^n R_{klij} \left(e^k \wedge e^l \right) (X, e_\alpha) e_\alpha e_i e_j \cdot \psi = \\ & = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i < j} \sum_{k,l=1}^n R_{klij} \left(e^k(X) \underbrace{e^l(e_\alpha)}_{\delta_{l\alpha}} - e^l(X) \underbrace{e^k(e_\alpha)}_{\delta_{k\alpha}} \right) e_\alpha e_i e_j \cdot \psi \end{aligned}$$

Buradan da $R_{k\alpha ij} = R_{ijk\alpha}$ ve $R_{\alpha lij} = R_{ij\alpha l}$ eşitliklerini kullanırsak

$$= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i < j} \sum_{k=1}^n R_{ijk\alpha} e^k(X) e_\alpha e_i e_j \cdot \psi - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i < j} \sum_{l=1}^n R_{ij\alpha l} e^l(X) e_\alpha e_i e_j \cdot \psi$$

elde edilir. Buradaki ikinci terimde $l = k$ alalım ve $R_{ij\alpha k} = -R_{ijk\alpha}$ eşitliğini kul-

lanalım.

$$= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i < j} \sum_{k=1}^n R_{ijk\alpha} e^k(X) e_\alpha e_i e_j \cdot \psi + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i < j} \sum_{k=1}^n R_{ijk\alpha} e^k(X) e_\alpha e_i e_j \cdot$$

Dolayısıyla

$$= 2 \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i < j} \sum_{k=1}^n R_{ijk\alpha} e^k(X) e_\alpha e_i e_j \cdot$$

olur. Bu ifadede $\alpha = i, \alpha = j$ ve $\alpha \neq i, j$ olması durumlarını inceleyelim:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\alpha=i} \sum_{i < j} \sum_{k=1}^n R_{ijk\alpha} e^k(X) \underbrace{e_i e_i}_{e_i^2 = -1} e_j \cdot \\ & + 2 \sum_{\alpha=j} \sum_{i < j} \sum_{k=1}^n R_{ijk\alpha} e^k(X) \underbrace{e_j e_i e_j}_{-e_j^2 e_i} \cdot \psi \\ & + 2 \sum_{\alpha \neq i, j} \sum_{i < j} \sum_{k=1}^n R_{ijk\alpha} e^k(X) e_\alpha e_i e_j \cdot \end{aligned} \quad (8.6)$$

2. terimde önce i ile j nin rollerini değiştirip $R_{ijkj} = R_{jiki}$ eşitliğini, daha sonra da $R_{jiki} = -R_{ijk\alpha}$ eşitliğini elde ederiz. O halde ilk iki terimi düzenlersek

$$-2 \sum_{\alpha=i} \sum_{i < j} \sum_{k=1}^n R_{ijk\alpha} e^k(X) e_j \cdot \psi - 2 \sum_{\alpha=j} \sum_{j < i} \sum_{k=1}^n R_{ijk\alpha} e^k(X) e_j \cdot$$

elde edilir. Bu iki terimden aşağıdaki bulunur:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i,j,k=1}^n g(R(e_i, e_j) e_k, e_i) e^k(X) e_j \cdot \psi &= -2 \sum_{i,j,k=1}^n g(R(e_i, e_j) X^k e_k, e_i) e_j \cdot \\ &= -2 \sum_{i,j=1}^n g(R(e_i, e_j) X, e_i) e_j \cdot \end{aligned}$$

O halde,

$$= -2 \sum_{i,j=1}^n g(R(X, e_i) e_i, e_j) e_j \cdot \psi = -2 \sum_{j=1}^n g(Ric(X), e_j) e_j \cdot \psi = -2 Ric(X) \cdot$$

eşitliğini elde ederiz.

3. terim olan $2 \sum_{\alpha \neq i, j} \sum_{i < j} \sum_{k=1}^n R_{ijk\alpha} e^k(X) e_\alpha e_i e_j \cdot \psi$ parçasını ele aldığımızda k indisi hariç i, j, α indisleri arasında rolleri değiştirirsek

$$2 \left(R_{ijk\alpha} e^k(X) e_\alpha e_i e_j + R_{jik\alpha} e^k(X) e_\alpha e_j e_i + R_{aikj} e^k(X) e_j e_\alpha e_i + \right. \\ \left. + R_{iakj} e^k(X) e_j e_i e_\alpha + R_{ajki} e^k(X) e_i e_\alpha e_j + R_{jaki} e^k(X) e_i e_j e_\alpha \right).$$

sonucuna varırız. Buradan da

$$\left(R_{ijk\alpha} + R_{aikj} + R_{jaki} \right) e^k(X) e_\alpha e_i e_j \cdot$$

ve

$$- \left(R_{jik\alpha} + R_{ajki} + R_{iakj} \right) e^k(X) e_\alpha e_i e_j \cdot$$

ifadeleri Bianchi eşitliğinden sıfır olarak karşımıza çıkar.

Sonuç olarak

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{i < j} \sum_{k, l=1}^n R_{kl ij} \left(e^k \wedge e^l \right) (X, e_\alpha) e_\alpha e_i e_j \cdot \psi = -2 Ric(X) \cdot$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi

$$\sum_{\alpha=1}^n e_\alpha \cdot dA(X, e_\alpha) \cdot \psi = (X \lrcorner dA) \cdot \quad (8.7)$$

eşitliğini elde edelim.

Hatırlayacak olursak ω bir k -form olmak üzere ω nın bir vektör alanı X ile interior çarpımı

$$i_X \omega := X \lrcorner \omega$$

ile gösterilir ve $i \in I$ ve Y_i ler vektör alanları olmak üzere

$$\left(i_X \omega \right) (Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1}) := \omega(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1})$$

olarak tanımlanır. Burada da

$$\left(X \lrcorner dA \right) (e_\alpha) = dA(X, e_\alpha)$$

olarak düşünebiliriz. $(X \lrcorner dA)$ nın 1-form olduğunu göz önünde bulunduracak olursak,

$$\left(X \lrcorner dA \right) = \sum_{k=1}^n Y^k e^k$$

olarak yazabiliriz. Her iki tarafa da e_α yı uygulayalım. O zaman

$$\left(X \lrcorner dA \right) (e_\alpha) = \sum_{k=1}^n Y^k e^k(e_\alpha) = Y^\alpha$$

olur. Y^k yerine eşitini yazarsak

$$\left(X \lrcorner dA \right) = \sum_{\alpha=1}^n \left(X \lrcorner dA \right) (e_\alpha) e^\alpha = \sum_{\alpha=1}^n dA(X, e_\alpha) e^\alpha$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. Benzer şekilde

$$\sum_{\alpha=1}^n e_\alpha \cdot dB(X, e_\alpha) \cdot \psi = (X \lrcorner dB) \cdot \psi \quad (8.8)$$

eşitliği elde edilir. O zaman, (8.5), (8.7) ve (8.8) yi kullanırsak, iddia edilen eşitliği elde ederiz. $\square$

Şimdi, Schrödinger-Lichnerowicz tipinde formülü aşağıdaki yolla türetebiliriz:

Önerme 8.1.3. *s , M Riemann manifoldunun skaler eğriliği ve $dA = \Omega^A$, $dB = \Omega^B$, $Spin^T$ -yapısı ile ilişkili $(S^1 \times S^1)$ -demedi üzerinde (A, B) konneksiyonunun $i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ -değerli 2-formları olsun. O zaman, aşağıdaki formülü elde edebiliriz:*

$$D^2\psi = \Delta\psi + \frac{s}{4} \psi + \frac{1}{2}dA \cdot \psi + dB \cdot \psi.$$

Kanıt.

$$\begin{aligned}
D^2\psi &= D(D\psi) \\
&= D\left(\sum_{i=1}^n e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n D\left(e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n e_j \cdot \tilde{\nabla}_{e_j}(e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\psi) \\
&= \sum_{i,j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j} e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\psi + e_j e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i}\psi \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n g(\nabla_{e_j} e_i, e_k) e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\psi + \sum_{i,j=1}^n e_j e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i}\psi
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Burada ilk terimde $k = j, k \neq j$ durumlarını ve ikinci terimde $i = j, i \neq j$ durumlarını ele alırsak

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \sum_{k=j}^n g(\nabla_{e_j} e_i, e_j) e_j e_j \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\psi + \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq j}^n g(\nabla_{e_j} e_i, e_k) e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\psi + \\
&\quad + \sum_{i=j} e_i e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i}\psi + \sum_{i \neq j} e_j e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i}\psi
\end{aligned}$$

ifadesini ve buradan da 1. ve 3. terimi beraber düşündüğümüzde

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_j} e_i, e_j) \overbrace{e_j e_j}^{-1} \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\psi + \sum_{i=j} \overbrace{e_i e_i}^{-1} \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i}\psi = \\
&= - \sum_{i=1}^n \left(\operatorname{div}(e_i) \tilde{\nabla}_{e_i}\psi + \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i}\psi \right) = \Delta\psi
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $k \neq j$ durumunda Levi-Civita konneksiyonunun metrik uyumluluk koşulunu kullanalım. O halde

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq k} g(\nabla_{e_j} e_i, e_k) e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\psi = \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq k} e_j g(e_i, e_k) e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\psi - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq k} g(e_i, \nabla_{e_j} e_k) e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i}\psi
\end{aligned}$$

toplamını elde ederiz. İlk terimin eğiti

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq k} e_j (g(e_i, e_k)) e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \psi = 0$$

olur. Şimdi aşağıdaki toplamı hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq k} g(\nabla_{e_j} e_i, e_k) e_j e_k &= - \sum_{j \neq k} g(e_i, \nabla_{e_j} e_k) e_j e_k \\ &= - \left(\sum_{j < k} g(e_i, \nabla_{e_j} e_k) e_j e_k + \sum_{k < j} g(e_i, \nabla_{e_j} e_k) e_j e_k \right) \\ &= - \left(\sum_{j < k} g(e_i, \nabla_{e_j} e_k) e_j e_k + \sum_{j < k} g(e_i, \nabla_{e_k} e_j) e_k e_j \right) \\ &= - \left(\sum_{j < k} g(e_i, \nabla_{e_j} e_k) e_j e_k - \sum_{j < k} g(e_i, \nabla_{e_k} e_j) e_j e_k \right) \\ &= - \sum_{j < k} g \left(e_i, \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_k} e_j \right) e_j e_k \\ &= \sum_{j < k} g(e_i, [e_k, e_j]) e_j e_k \end{aligned}$$

O halde $j \neq k$ durumunda

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq k} g(\nabla_{e_j} e_i, e_k) e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \psi &= \sum_{i=1}^n \sum_{j < k} g(e_i, [e_k, e_j]) e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \\ &= \sum_{i,l=1}^n \sum_{j < k} [e_k, e_j]^l g(e_i, e_l) e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \\ &= \sum_{i,l=1}^n \sum_{j < k} [e_k, e_j]^l \delta_{il} e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j < k} [e_k, e_j]^i e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j < k} e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{[e_k, e_j]^i e_i} \psi \\ &= \sum_{j < k} e_j e_k \cdot \tilde{\nabla}_{[e_k, e_j]} \psi \end{aligned}$$

eğitliğini elde ederiz ki burada j yerine i , k yerine j yazılırsa

$$\sum_{i < j} e_i e_j \cdot \tilde{\nabla}_{[e_j, e_i]} \psi = - \sum_{i < j} e_j e_i \cdot \tilde{\nabla}_{[e_j, e_i]} \psi \quad (8.10)$$

ifadesine eşittir. Son olarak $i \neq j$ durumunu da düşünecek olursak

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} e_j e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i} \psi &= \sum_{i < j} e_j e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i} \psi + \sum_{j < i} e_j e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i} \psi \\
&= \sum_{i < j} e_j e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i} \psi - \sum_{i < j} e_j e_i \cdot \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_j} \psi \\
&= \sum_{i < j} e_j e_i \cdot \left(\tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i} \psi - \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_j} \psi \right)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Son eşitliği ve 8.10 eşitliğini kullanırsak

$$\sum_{i < j} e_j e_i \cdot \left(\tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i} \psi - \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_j} \psi - \tilde{\nabla}_{[e_j, e_i]} \psi \right) = \frac{1}{2} \sum_{i, j} e_j e_i R^S(e_j, e_i) \psi = \frac{1}{2} \sum_{i, j} e_i e_j R^S(e_i, e_j)$$

ifadesini elde ederiz. (8.9) daki eşitlikten

$$\begin{aligned}
D^2 \psi &= \Delta \psi + \sum_{j, i < k} g(e_j, [e_k, e_i]) e_i e_k \tilde{\nabla}_{e_j} \psi + \sum_{i < j} e_i e_j \cdot (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_j} \psi - \tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i} \psi) \\
&= \Delta \psi + \sum_{i < j} e_i e_j (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_j} \psi - \tilde{\nabla}_{e_j} \tilde{\nabla}_{e_i} \psi - \tilde{\nabla}_{[e_i, e_j]} \psi) \\
&= \Delta \psi + \frac{1}{2} \sum_{i, j} e_i e_j R^S(e_i, e_j)
\end{aligned}$$

elde edilir. (8.4) eşitliğini kullanarak ve e_i ile çarparak aşağıdaki sonuca varırız.

$$\begin{aligned}
D^2 \psi &= \Delta \psi - \frac{1}{4} \sum_i e_i Ric(e_i) \cdot \psi + \frac{1}{4} \sum_i e_i \cdot (e_i \lrcorner dA) \cdot \psi + \frac{1}{2} \sum_i e_i \cdot (e_i \lrcorner dB) \cdot \\
&= \Delta \psi + \frac{s}{4} + \frac{1}{2} dA \cdot \psi + dB \cdot \psi.
\end{aligned}$$

□

9. SONUÇ

M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu yardımıyla $Spin$ ve $Spin^c$ spinor demetleri üzerinde kovaryant türev ve Dirac operatörü tanımlanmıştır. $Spin^c(n)$ grubundan hareketle $Spin^T(n)$ grubu tanımlanmıştır. Klasik $Spin^c$ spinor teorisine benzer yaklaşımla M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu yardımıyla $Spin^T$ -yapısı tanımlanmış ve $Spin^T(n)$ grubunun temsili kullanılarak $Spin^T$ spinor demedi inşa edilmiştir. Daha sonra $Spin^T$ spinor demedi üzerinde benzer şekilde kovaryant türev ve $Spin^T$ Dirac operatörü tanımlanmıştır. $Spin^c$ spinor teorisinde geçerli olan bazı formüllerin $Spin^T$ spinor teorisinde geçerli olduğu gösterilmiştir.

$Spin^T$ -yapısına sahip olan manifoldların sağlaması gereken koşulların ne olduğu açık problem olarak kalmıştır. Ayrıca yarı-Riemann manifoldları üzerinde $Spin^T$ yapısının varlığı bir araştırma problemidir. Tanımlanmış olan $Spin^T$ Dirac operatörünün eliptiklik özelliği, self-adjointliği açık problemidir.

KAYNAKÇA

- [1] Thakre, V., Dimensional reduction of non-linear Seiberg-Witten equations, arXiv:1502.01486v1.
- [2] Friedrich, T. (2000). Dirac operators in Riemannian Geometry, AMS.
- [3] Lawson, H. B. (1989). Michelsohn, M.L., Spin Geometry, Princeton Univ.
- [4] Salamon, D.A. (1999). Spin Geometry and Seiberg-Witten invariants.
- [5] Nicolaescu, L. I. (2007). Lectures on the Geometry of Manifolds, World Scientific.
- [6] Naber, G. L. (2010). Topology, Geometry and Gauge fields: Interactions, Drexel Univ.
- [7] Naber, G. L. (2010). Topology, Geometry and Gauge fields: Foundations, Springer-Verlag, Berlin.
- [8] Lee, J. M. (2003). Introduction to Smooth Manifolds, Springer-Verlag.
- [9] Habermann, K., Habermann, L. (2006). Introduction to Symplectic Dirac Operators, Springer-Verlag.
- [10] Brauer, R., Weyl, H. (1935). Spinors in n-dimensions, Amer. J. Math. 57, 425-449.
- [11] Cartan, E. (1937). Theory of Spinors, Hermann, Paris.
- [12] Harvey, F.R. (1990). Spinors and Calibrations, Academic Press.
- [13] O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry, Academic Press.
- [14] Stadtmüller C. (2011). Metric contact manifolds and their Dirac operators, Diplomarbeit. Humboldt Universität zu Berlin, Institut für Mathematik.
- [15] Ikemakhen, A. (2006). Parallel Spinors on pseudo-Riemannian spin^c Manifolds, J. Geo. and Phys., 56(9), 1473-1483.

- [16] Moroianu, A. (1997). Parallel and Killing Spinors on spin^c Manifolds. Commun. Math. Phys. 187, 417-427.
- [17] Dirac P. A. M. (1928). Proc. Roy. Soc. Lond. A117 610.
- [18] Dirac P. A. M. (1928). Proc. Roy. Soc. Lond. A118 351.
- [19] Lounesto P. (1997,2001). Clifford Algebras and Spinors, Cambridge Univ. Press.
- [20] Chevalley C. (1996). The algebraic theory of Spinors and Clifford algebras, Springer.