

**KUZEY ANADOLU FAY HATTI ÜZERİNDE GERÇEKLEŞEN  
DEPREMLERİN MEKÂNSAL VE MEKÂN- ZAMANSAL OLARAK  
İNCELENMESİ**

**Doktora Tezi**

**Cenk İÇÖZ**

**Eskişehir 2018**

**KUZEY ANADOLU FAY HATTI ÜZERİNDE GERÇEKLEŞEN  
DEPREMLERİN MEKÂNSAL VE MEKÂN- ZAMANSAL OLARAK  
İNCELENMESİ**

**Cenk İÇÖZ**

**DOKTORA TEZİ**

**İstatistik Anabilim Dalı  
Danışman: Doç. Dr. Kadir Özgür Peker**

**Eskişehir  
Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Haziran 2018**

*Bu tez çalışması BAP Komisyonunca kabul edilen 1601F002 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.*

## ÖZET

### KUZEY ANADOLU FAY HATTI ÜZERİNDE GERÇEKLEŞEN DEPREMLERİN MEKÂNSAL VE MEKÂN- ZAMANSAL OLARAK İNCELENMESİ

Cenk İÇÖZ

İstatistik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Haziran 2018

Danışman: Doç. Dr. Kadir Özgür PEKER

Depremler gerçekleşme sebepleri açısından incelendiğinde birçok faktör tarafından etkilenen karmaşık olaylardır. Gerek ilgilenilen bölgede bulunan fay hattı, gerekse depremlerin öncü şok, ana şok ve artçı şok gibi kendi aralarında yer alan ilişkiler deprem oluşumlarındaki karmaşıklığa sebep olabilmektedir. Deprem riskinin tahmin edilmesi veya deprem yoğunluklarının modellenmesi ileriye dönük yaşanabilecek maddi ve manevi kayıpların en aza indirgenmesi açısından hayati bir önem taşımaktadır. Bu çalışmada Kuzey Anadolu Fay Hattını kapsayan dikdörtgensel bir bölge çalışma alanı olarak seçilmiş ve bu bölgedeki deprem örüntülerinin analizi amaçlanmıştır. Öncelikle, deprem kataloğunda belirli bir zaman aralığında ve çalışma aralığı içerisinde yer alan büyük depremler ( $M > 5$ ) açıklayıcı veri analizi yardımıyla ilgili öznitelikleri açısından görselleştirilmiştir. Ayrıca mekânsal ve mekân-zamansal süreçler yardımı ile mekânsal ve mekân-zamansal örüntü türleri tespit edilmiş ve ilgili çalışma alanı ve ele alınan zaman aralığı içerisinde mekânsal ve mekân-zamansal deprem benzetimleri gerçekleştirilmiştir. Son olarak ise deprem yoğunluklarını arka plan ve tetiklenen olay yoğunlukları olmak üzere iki açıdan inceleyen ve literatürde oldukça sık kullanılan mekân-zamansal epidemik-tip şok sonrası modeli ile ilgili depremler modellenmeye çalışılmıştır. Bu yoğunlukların bölgelere göre farklılık gösterdiği tespit edilmiştir. Depremlerin mekânsal olarak kümelenmiş bir örüntü, mekân-zamansal olarak da düzenli bir örüntüye sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Mekânsal veri, mekânsal nokta örüntüleri, mekân-zamansal nokta örüntüleri, mekânsal süreçler, mekân-zamansal süreçler, depremler

## ABSTRACT

### SPATIAL AND SPATIO-TEMPORAL ANALYSIS OF THE EARTHQUAKES OCCURRED ALONG THE NORTHERN ANATOLIAN FAULT LINE

Cenk İÇÖZ

Department of Statistics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, June 2018

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Kadir Özgür PEKER

Earthquakes are complex phenomena when their occurrence reasons are investigated. Factors such as presence of a fault line and between earthquake relationships like foreshocks, mainshocks and aftershocks may be considered as some of the sources for this complexity. Estimation of the earthquake risk and modelling of the earthquake intensities over a region plays a vital role to minimize future tangible and intangible losses. In this study, a rectangular region including North Anatolian Fault Zone is selected as a study region in order to analyse the earthquake patterns. First of all, attributes of the moderate to major earthquakes with magnitude higher than 5, which is listed in the regarding time interval and space domain in the earthquake catalogue, is visualized owing to exploratory data analysis techniques. Furthermore, spatial and spatio-temporal patterns for the earthquakes are revealed and simulations of the earthquakes are realized with the use of spatial and spatio-temporal processes within the specified time and space domain. Finally, a model which is popular in the literature called spatio-temporal epidemic type aftershock model is employed to model the earthquakes by separating the total earthquake intensity into two parts such as triggered and background event intensities. These intensities are found out to be changing over the region. In addition, earthquakes are fit in a clustered pattern spatially and a spatio-temporal regular pattern.

**Keywords:** Spatial data, spatial point patterns, spatio-temporal point patterns, spatial processes, spatio-temporal processes, earthquakes

## TEŞEKKÜR

Öncelikle tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Kadir Özgür Peker'e teşekkür ve saygılarımı sunarım. Doç. Dr. Harun Sönmez ve Dr. Öğr. Üyesi Alper Bekki'ye tez önerisi ve tez izlemeleri boyunca yapmış oldukları değerli katkı ve yönlendirmeleri için teşekkürlerimi sunarım. Doktora savunma jürisinde yer alan hocalarım Prof. Dr. Fatih TANK ve Doç. Dr. Duygu İÇEN'e çalışmaya yapmış oldukları değerli katkıları ve yapıcı eleştirilerinden dolayı teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca Doç. Dr. Fikret Er, Doç. Dr. Zerrin Aşan Greenacre ve Dr. Öğr. Üyesi Levent Terlemez, Öğr. Gör. Dr. Halil Eryılmaz hocalarıma gerek konu seçimi, gerek R programının kullanımı ve tez yazım süreci ile ilgili bilgi paylaşımlarından ve desteklerinden dolayı teşekkür bir borç bilirim. Sağladığı fiziki imkânlar, basılı ve elektronik kaynaklar ve tezimi proje olarak kabul eden Anadolu Üniversitesi ve Anadolu Üniversitesi Proje Birimi'ne en içten teşekkürlerimi sunarım.

Arkadaşım Araş. Gör. Erdener Özçetin'e bu süreçteki manevi desteklerinden dolayı teşekkür ederim. Yaşamım boyunca beni her zaman destekleyen ve yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Cenk İÇÖZ

Eskişehir

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                        | <u>Sayfa</u> |
|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| BAŞLIK SAYFASI .....                                                                   | i            |
| JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....                                                             | ii           |
| ÖZET .....                                                                             | iii          |
| ABSTRACT.....                                                                          | iv           |
| TEŞEKKÜR .....                                                                         | v            |
| ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....                                       | vi           |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                      | vii          |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....                                                                | x            |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                                                  | xi           |
| 1. GİRİŞ .....                                                                         | 1            |
| 1.1. Literatür Taraması .....                                                          | 2            |
| 2. MEKÂNSAL VERİ TİPLERİ .....                                                         | 6            |
| 2.1. Jeostatistiksel Veriler .....                                                     | 7            |
| 2.2. Örgü Verileri .....                                                               | 10           |
| 2.3. Mekânsal Nokta Örüntüleri .....                                                   | 10           |
| 3. MEKÂNSAL NOKTA ÖRÜNTÜLERİ ve SÜREÇLERİ .....                                        | 12           |
| 3.1. Mekânsal Nokta Örüntülerinin Türleri .....                                        | 12           |
| 3.1.1. Tam mekânsal rassallık (TMR) .....                                              | 15           |
| 3.1.2. Kümelenmiş mekânsal nokta örüntüsü .....                                        | 16           |
| 3.1.3. Düzenli mekânsal nokta örüntüsü .....                                           | 17           |
| 3.2. Mekânsal Nokta Örüntülerinde Merkezi Eğilim Ölçüleri ve<br>Saçılım Ölçüleri ..... | 18           |
| 3.2.1. Ortalama merkez.....                                                            | 18           |
| 3.2.2. Ağırlıklandırılmış ortalama merkez.....                                         | 19           |
| 3.2.3. Medyan merkez .....                                                             | 20           |
| 3.2.4. Standart uzaklık .....                                                          | 21           |
| 3.2.5. Standart elips .....                                                            | 22           |
| 3.3. Mekânsal Nokta Süreçlerinin Özellikleri.....                                      | 22           |

|         |                                                                     |    |
|---------|---------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3.1.  | Sonlu ve sonsuz nokta süreçleri .....                               | 24 |
| 3.3.2.  | Nokta süreçlerinin önemli özellikleri.....                          | 25 |
| 3.3.3.  | İşaretlenmiş nokta süreçleri .....                                  | 27 |
| 3.4.    | Mekânsal Nokta Süreçleri .....                                      | 27 |
| 3.4.1.  | Bernoulli ve binom nokta süreçleri.....                             | 27 |
| 3.4.2.  | Periyodik binom süreci .....                                        | 30 |
| 3.4.3.  | Binom sürecinin benzetimi .....                                     | 31 |
| 3.4.4.  | Tek boyutlu Poisson süreci .....                                    | 33 |
| 3.4.5.  | Homojen Poisson Nokta Süreci (Mekânsal Poisson süreci)..            | 37 |
| 3.4.6.  | Süreç eşitliği .....                                                | 39 |
| 3.4.7.  | Homojen Poisson nokta sürecinin benzetimi .....                     | 40 |
| 3.4.8.  | Homojen olmayan Poisson nokta süreci.....                           | 41 |
| 3.4.9.  | Mekânsal nokta süreçlerinde bazı işlemler .....                     | 43 |
| 3.4.10. | Kümelenmiş süreçler.....                                            | 45 |
| 3.4.11. | Düzenli Süreçler .....                                              | 46 |
| 3.5.    | Tam Mekânsal Rassallık Testleri .....                               | 47 |
| 3.5.1.  | Kuadrat testi .....                                                 | 49 |
| 3.5.2.  | En-yakın komşuluk uzaklıklarına dayalı test (G testi ).....         | 50 |
| 3.5.3.  | Nokta-en yakın komşuluk uzaklık testi (F testi).....                | 51 |
| 3.5.4.  | J fonksiyonu .....                                                  | 52 |
| 3.5.5.  | K fonksiyonu ve nokta örüntülerinin ikinci derece özellikleri ..... | 52 |
| 3.5.6.  | L fonksiyonu .....                                                  | 55 |
| 3.5.7.  | Monte- Carlo benzetimi ve benzetim zarfları.....                    | 55 |
| 3.5.8.  | TMR testlerinin karşılaştırılması.....                              | 56 |
| 3.6.    | Yoğunluk Fonksiyonunun Tahmini.....                                 | 57 |
| 4.      | MEKÂN-ZAMANSAL NOKTA SÜREÇLERİ.....                                 | 61 |

|        |                                                                                  |     |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1.   | Mekân- Zamansal Süreçlerin Birinci ve İkinci Dereceden Özellikleri.....          | 62  |
| 4.2.   | Mekân-zamansal Homojen Olmayan K fonksiyonu ve İkili Korelasyon Fonksiyonu ..... | 64  |
| 4.3.   | Mekân-Zamansal Homojen Poisson Nokta Süreci.....                                 | 65  |
| 4.4.   | Mekân-Zamansal Homojen Olmayan Poisson Nokta Süreci.....                         | 66  |
| 4.5.   | Mekân-Zamansal Poisson Kümelenme Nokta Süreci.....                               | 67  |
| 4.6.   | Mekân-zamansal Engelleme Süreci.....                                             | 68  |
| 4.7.   | Koşullu Yoğunluk Fonksiyonu ve En Çok Olabilirlik.....                           | 69  |
| 5.     | MEKÂN-ZAMANSAL EPİDEMİK TİP ŞOK SONRASI MODELİ.....                              | 71  |
| 5.1.   | İşaretli Hawkes Süreci .....                                                     | 71  |
| 5.2.   | Mekân-Zamansal Epidemik Tip Şok Sonrası Model Formülasyonu .....                 | 72  |
| 5.3.   | Model ile ilgili Teorik ve Teknik Noktalar .....                                 | 75  |
| 5.3.1. | En çok olabilirlik metodu .....                                                  | 75  |
| 5.3.2. | İnceltme metodu .....                                                            | 76  |
| 5.3.3. | Arka plan sıklığının tahmin edilmesi.....                                        | 77  |
| 5.3.4. | İteratif Algoritma .....                                                         | 78  |
| 6.     | UYGULAMA .....                                                                   | 79  |
| 6.1.   | Çalışma Alanı ve Açıklayıcı Veri Analizi.....                                    | 79  |
| 6.2.   | Depremlerin Mekânsal Olarak İncelenmesi.....                                     | 91  |
| 6.3.   | Depremlerin Mekân – Zamansal Olarak İncelenmesi.....                             | 98  |
| 6.4.   | Mekân-zamansal Epidemik Tip Şok Sonrası Model Uygulaması .                       | 103 |
| 6.5.   | Sonuçlar ve Tartışma .....                                                       | 108 |
|        | KAYNAKÇA.....                                                                    | 111 |
|        | ÖZGEÇMİŞ                                                                         |     |



## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                                                                                                                                     | <u>Sayfa</u> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>Çizelge 2.1.</b> Mekânsal verilerin ölçüm düzeylerine ve mekânsal nesne türlerine göre bir sınıflandırma (Haining R., 2003)..... | 8            |
| <b>Çizelge 2.2.</b> Mekânsal veri tipolojisi ( Cressie, 1991) .....                                                                 | 9            |
| <b>Çizelge 6.1.</b> Deprem büyüklüklerine göre gerçekleştirilen bir sınıflandırma (http-1) .....                                    | 79           |
| <b>Çizelge 6.2.</b> Deprem etkileri ve sıklığına göre bir deprem sınıflandırılması (http-2) .....                                   | 80           |
| <b>Çizelge 6.3.</b> Kuzey Anadolu Fay Hattında 1950-2017 yılları arasında gerçekleşen bazı önemli depremler.....                    | 81           |
| <b>Çizelge 6.4.</b> TMR testi için ki kare değerleri .....                                                                          | 95           |
| <b>Çizelge 6.5.</b> Mekân-zamansal Epidemik Tip Şok Sonrası Model Parametreleri                                                     | 103          |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

|                                                                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 3.1. Bir tavşanın retinasında konumlanmış amakrin hücreleri .....                                                                                         | 14 |
| Şekil 3.2. Deprem şiddetine göre işaretlenmiş bir işaretlenmiş mekânsal nokta<br>örüntüsü .....                                                                 | 14 |
| Şekil 3.3. $[0,5] \times [0,5]$ birim karelik bir alanda türetilen 100 olaydan oluşan tam<br>mekânsal rassal örüntü .....                                       | 15 |
| Şekil 3.4. Kümelenmiş bir mekânsal nokta örüntü örneği .....                                                                                                    | 17 |
| Şekil 3.5. Düzenli bir mekânsal nokta örüntüsü örneği .....                                                                                                     | 18 |
| Şekil 3.6. Medyan merkezler (Eryılmaz, 2010) .....                                                                                                              | 21 |
| Şekil 3.7. Periyodik binom sürecine ilişkin bir örnek. (Illian vd., 2008) .....                                                                                 | 31 |
| Şekil 3.8. Binom nokta süreci için kabul-red yöntemi (Illian vd., 2008) .....                                                                                   | 32 |
| Şekil 3.9. Varış zamanları (Baddeley, 2007) .....                                                                                                               | 34 |
| Şekil 3.10. Varış süreleri arasında geçen zamanlar (Baddeley, 2007) .....                                                                                       | 34 |
| Şekil 3.11. Bir nokta sürecine ilişkin $N_t$ sayma süreci (Baddeley, 2007) .....                                                                                | 34 |
| Şekil 3.12. Bir nokta süreci için $N(a,b]$ aralık sayımı (Baddeley, 2007) .....                                                                                 | 35 |
| Şekil 3.13. Bir mekânsal nokta süreci için $N(B)$ sayma süreci (Baddeley, 2007) .....                                                                           | 35 |
| Şekil 3.14. En yakın komşuluk ve nokta- en yakın komşuluk uzaklıkları .....                                                                                     | 51 |
| Şekil 3.15. Bir nokta örüntüsünün kernel tahmini (Gatrell vd., 1996) .....                                                                                      | 60 |
| Şekil 6.1. Kuzey Anadolu Fay hattı ve Kuzey Türkiye topografik haritası<br>(Banhoff vd., 2016) .....                                                            | 81 |
| Şekil 6.2. 1950-2017 yılları arasında kuzey anadolu fay hattında meydana gelen<br>depremler (B.Ü. Kandilli Rasathanesi BDTİM Deprem Sorgulama<br>Sistemi) ..... | 83 |
| Şekil 6.3. 1950-2017 yılları arasında çalışma alanında büyüklüklerine göre<br>meydana gelen depremler .....                                                     | 84 |
| Şekil 6.4. 1950-2017 yılları arasında çalışma alanında büyüklüklerine ve<br>derinliklerine göre meydana gelen depremler .....                                   | 85 |
| Şekil 6.5. Deprem nokta örüntüleri için merkezi eğilim ölçüleri ve saçılım ölçüleri .....                                                                       | 86 |
| Şekil 6.6. Yıllara göre deprem sayıları .....                                                                                                                   | 87 |
| Şekil 6.7. Başlangıç anından itibaren depremlerin zaman içerisindeki<br>büyüklüklerinin gelişimi .....                                                          | 88 |
| Şekil 6.8. Deprem derinliklerine ilişkin histogram .....                                                                                                        | 89 |

|                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Şekil 6.9.</b> İncelenen eğitim periyoduna göre deprem sıklıkları değişimi .....                                                 | 90  |
| <b>Şekil 6.10.</b> Deprem büyüklüklerine ilişkin histogram .....                                                                    | 90  |
| <b>Şekil 6.11.</b> Depremlerin büyüklük ve derinliklerini içeren saçılım grafiği .....                                              | 91  |
| <b>Şekil 6.12.</b> Boş Alan Uzaklıkları .....                                                                                       | 92  |
| <b>Şekil 6.13.</b> Stienen Diyagramı .....                                                                                          | 93  |
| <b>Şekil 6.14.</b> Deprem örüntüsü ve Mekânsal Poisson Süreci Benzetimi.....                                                        | 93  |
| <b>Şekil 6.15.</b> Birim Yoğunluğun Kernel Fonksiyonu ile Tahmini ve Nokta Örüntüsü<br>Üzerinde Çakıştırılması .....                | 94  |
| <b>Şekil 6.16.</b> Kuadrat Sayıları (gözlenen nokta sayısı, beklenen nokta sayısı ve artık<br>değerler) .....                       | 95  |
| <b>Şekil 6.17.</b> Tam Mekânsal Rassallığa İlişkin Uzaklık Testleri ve K Testi Sonuçları.....                                       | 96  |
| <b>Şekil 6.18.</b> TMR testleri için Monte Carlo Benzetimi ve Benzetim Zarfları .....                                               | 97  |
| <b>Şekil 6.19.</b> Deprem Örüntüsü ve Homojen Olmayan Poisson Süreci Benzetimi.....                                                 | 98  |
| <b>Şekil 6.20.</b> Mekân-zamansal K fonksiyonu tahmini ve homojen mekân - zamansal<br>rassal örüntü arasındaki fark .....           | 99  |
| <b>Şekil 6.21.</b> İkili Korelasyon Fonksiyonu kontor ve perspektif grafikleri.....                                                 | 99  |
| <b>Şekil 6.22.</b> Mekân - zamansal süreç benzetimleri .....                                                                        | 100 |
| <b>Şekil 6.23.</b> Kümülatif zaman grafikleri .....                                                                                 | 102 |
| <b>Şekil 6.24.</b> Arka plan olay yoğunluğu .....                                                                                   | 104 |
| <b>Şekil 6.25.</b> Tetiklenen olay birim yoğunluğu .....                                                                            | 105 |
| <b>Şekil 6.26.</b> Model toplam birim yoğunluğu.....                                                                                | 106 |
| <b>Şekil 6.27.</b> Gözlemlenen ve teorik frekanslar arasındaki standartlaştırılmış farklar<br>(Arka Plan birim yoğunluk için) ..... | 107 |
| <b>Şekil 6.28.</b> Gözlemlenen ve teorik farklar arasındaki standartlaştırılmış farklar<br>(Model için) .....                       | 107 |

## 1. GİRİŞ

Günlük yaşıntıda mekânsal verilerle sık olarak karşılaşmakta ve çoğu durumda bu verilerden faydalanılmaktadır. Navigasyon cihazı, bilgisayar ekranı, televizyon, gazete vb. birçok farklı kaynaktan mekânsal veri örnekleriyle karşılaşılır. Araç navigasyon cihazları ile rota planlayarak bilinmeyen bir yere yolculuk gerçekleştirilebilir, hava durumu takip edilerek o gün nasıl giyinilmesi gerektiğine karar verilebilir ya da gazetelerde verilen bir satılık ev ilanındaki adres kolayca bulunabilir.

Mekânsal veri ya da aynı zamanda coğrafi olarak referanslandırılmış veri, koordinat değerleri ve bu değerlere ilişkin bir referans sistemine sahiptir. Mekânsal veriler, gerçekleşen bir olay, olgu ya da durumun harita üzerindeki coğrafi yerini ifade etmede önemli bir rol oynar. Bu nedenle mekânsal indeksleme, ilgili verinin analizinde büyük bir öneme sahiptir.

Genel anlamda *mekânsal analiz*, mekânsal verilere ilişkin birden çok analitik yaklaşımın, astronomi, tarım, biyoloji, istatistik, maden mühendisliği, epidemiyoloji, ekonometri ve coğrafi bilgi sistemleri vb. gibi birçok farklı alanda kullanılmasını içeren teknikler topluluğu olarak tanımlanabilir.

Mekânsal analizin amaçları arasında kartografi yardımı ile haritalar oluşturulması ya da görselleştirilmesi, ilgilenilen olayın matematiksel olarak modellenmesi ve veriye uygun istatistiksel tekniklerin uygulanması yer alır. Bu amaçlar aynı zamanda bir mekânsal analizin üç ana aşamasını oluşturur.

Her olay, kendisine atfedilen zaman ve mekân boyutlarına sahiptir ve herhangi bir zamanda ve herhangi bir yerde gerçekleşebilir. Deneysel bilimlerde deneylerin gerçekleştirildiği kesin mekânsal koordinat, veri tabanına alınmamaktadır. Deneylerin tekrar etkileri ve açıklayıcı değişkenlerin çıktılar üzerinde etkileri bulunmaktadır. Ancak, biyoloji ve çevre bilimi gibi gözlemsel bilimlerde verinin elde edildiği coğrafi konum önem kazanmakta ve elde edilen çıktı üzerinde etkisi bulunmaktadır.

*Mekânsal istatistik*, mekânsal verilerin analizinde kullanılacak istatistiksel yöntemlerle ilgilidir. Mekânsal analizler, mekânsal istatistik ve benzeri analizleri içine alan kapsamlı bir küme olarak düşünülebilir. Mekânsal istatistiğin en önemli özelliği çok geniş bir metodolojik çeşitlilik içermesidir. Bu da mekânsal istatistiğin kökenlerinin klasik istatistiğin dışında, jeoloji, coğrafya, meteoroloji vb. diğer bilim alanlarından gelmesi ve mekânsal istatistiğin bu bilim dalları ile etkileşim içinde bulunmasından kaynaklanmaktadır.

Mekânsal istatistik, uzayda gözlemlerin otokorelasyonlu bir yapıya sahip olması ya da birbirine yakın gözlemlerin uzak olan gözlemlere göre benzer yapıda olması özelliğinden dolayı kendine özgü metotlar içerir. Bununla birlikte, mekânsal istatistik ile ilgili konuların anlaşılabilmesi için doğrusal modeller, stokastik süreçler, regresyon, uygulamalı istatistik, zaman serileri ve matematiksel istatistik gibi temel istatistik konularında bilgi sahibi olmak gereklidir. Dolayısıyla, klasik istatistik ve mekânsal istatistik arasında bir ayrım yapılması söz konusu değildir. Yapılabilecek tek ayrım; kullanılan veri türü ve bu veri türüne özel analizlerin kullanılmasıdır.

Mekânsal veriler, literatürde geçerli olan bir sınıflandırmaya göre; mekânsal nokta örüntüleri, jeostatistiksel veriler ve örgü (lattice) verileri olmak üzere üç kategoride incelenmektedir. Mekânsal nesnelerin ve olayların ortaya çıkış konumlarından oluşan veri setine *mekânsal nokta örüntüleri* adı verilir.

“*Mekân-zamansal veriler*” ise kendisine hem zaman, hem de mekân boyutu eklenmiş verilerdir. Analizlerin çoğunda bu boyutlar ayrı ayrı incelenmekte olup, mekân-zamansal analizde bu iki boyutun birlikte ele alınması daha doğru sonuçlar verebilir.

Çalışmada öncelikle mekânsal veri tipleri, mekânsal nokta örüntüleri ve süreçleri, mekân-zamansal nokta süreçleri ve mekân-zamansal epidemik tip şok sonrası modeli teorik ayrıntıları ile incelenmiştir. Ardından uygulamada Kuzey Anadolu Fay Hattı üzerinde gerçekleşen orta ve büyük ölçekli depremler incelenerek, elde edilen bulgular sunulmuş ve yorumlanmıştır. Dolayısıyla bölgedeki mekânsal ve mekân-zamansal süreçler el alınarak incelenen depremlerin mekân-zamansal bir modelinin oluşturulması amaçlanmıştır. Çalışmada kullanılan modelin salgın biçiminde oluşum gösteren ve tetiklenme mekanizması içeren diğer nokta örüntülerine de uygulanabileceği düşünülmektedir.

## **1.1. Literatür Taraması**

Literatürde mekânsal nokta örüntüleri ile ilgili birçok teorik ve uygulamalı çalışma bulunmaktadır. Yapılan çalışmalar daha çok doğa olaylarını içeren noktasal örüntülerin analizleri, suç olaylarına ilişkin analizler ve bir hastalığın zaman ya da mekân içerisinde gösterdiği gelişimin incelendiği epidemiyolojik analizler olarak karşımıza çıkmaktadır.

Diggle (1975), yoğunluklar için uzaklık tahmincilerinin tam mekânsal rassallık örüntüsü dışında yanlılık içerdiğini ve tahmin edicilerin robust olmadığını vurgulamıştır.

Yaptığı çalışmada yeni tahminciler önermiş ve bu tahmincilerin robustluğunu düzenlilik ve kümelenme örüntüleri uzanan iki stokastik modele karşı analitik olarak sınamıştır.

Diggle (1977), önceki çalışmasındaki analitik sonuçları simülasyonla desteklemiş ve daha çok mekânsal kümelenme (birleşim) gösteren nokta örüntüleri üzerinde durmuştur.

Gatrell vd. (1996), epidemiyolojik nokta örüntülerinin araştırılması ve modellenmesine ilişkin metotlar öne sürmüşlerdir. Epidemiyolojide klasik kuadrat (kare alan) ve yakın-komşuluk metotlarının anakütle yoğunluğundaki mekânsal değişime izin vermediğini ve bu özelliğin, mekânsal kümelenmenin olduğu durumlar ispatlanırken düzeltilmesi gerektiğini savunmuşlardır.

Stock ve Smith (2002), deprem merkezi saçılımlarının belirlenmesi amacı ile sabit bir bant genişliği yerine değişken bir bant genişliğine sahip adaptif kernel tahmini yöntemini kullanmışlardır. Bununla birlikte iki farklı bant genişliğine sahip kernel tahminlerini karşılaştırmışlardır.

Schoenberg (2004), mekân-zamansal işaretli nokta süreçlerinin ayrılabilirliğini parametrik olmayan testler yardımı ile incelemiş ve karşılaştırmalar yapmıştır.

Grillenzoni (2005), deprem verilerinin modellenmesinde parametrik olmayan tekniklerin mekân-zamansal nokta süreçlerine uygunluğundan bahsetmiş fakat bu tekniklerin durağanlık göstermeyen yani zaman ve mekân içinde değişim gösteren depremsel verilere uyarlanması gerektiğinden bahsetmiştir.

Picard ve Bar-Hen (2007), Matern süreçlerine bağlı bir yoğunluk tahmincisi öne sürmüşler ve literatürde bulunan robust tahminciler ile karşılaştırmışlardır.

Grillenzoni (2008) çalışmasında, deprem gibi doğa olaylarına ilişkin mekân-zamansal verilerin yoğunluklarının tahmin edilmesinde parametrik olmayan robust tahmin yöntemlerini ele almıştır.

Naylor vd. (2010), deprem kataloglarına ilişkin açıklayıcı veri analizi tekniklerini ele almışlardır. Çalışmada, deprem verisinin görselleştirilmesi ve veri ile ilgili ilk izlenimlerin elde edilmesi amacıyla deprem kataloglarına ilişkin diğer açıklayıcı veri analizi tekniklerine değinilmiştir.

Aryal (2011) çalışmasında, İngiltere'nin Londra ve York şehrindeki suç olaylarını mekânsal nokta süreçleri ve işaretlenmiş mekânsal nokta süreçleri ile modellemeye çalışmıştır.

Zhuang (2011), mekân-zamansal epidemik tip şok sonrası modelini kullanarak bir günlük deprem tahminleri yapmıştır. Çalışmada deprem gerçekleşme olasılıklarına ilişkin tahminler modele dayalı simülasyonlar yoluyla elde edilmiştir.

Assuncao, Tavares ve Kulldorf (2012), nokta süreçlerinde meydana gelen mekân-zamansal kümelenmeleri incelemek amacıyla yeni bir tarama istatistiği önermişlerdir. Yazarlar 3-boyutlu uzayı taramak amacıyla  $H_0$  hipotezi altında zaman ve mekân açısından ayrılabilen yoğunluklara sahip homojen olmayan bir poisson nokta sürecini baz alan bir skor test istatistiği önermişlerdir. Alternatif hipotez ise bir ya da daha fazla mekân-zaman kümesinin bulunması şeklinde verilmiştir.

Zhuang vd. (2012), depremlerin gerçekleşme olasılıklarını tanımlamak, analiz ve tahmin etmek amacıyla zamansal sismik modellere ilişkin genel bir değerlendirme çalışması yapmışlardır. Çalışmada poisson ve yenilenme süreçleri, mekânsal epidemik tip şok sonrası modeli ve Omari-Utsu formülü gibi modeller ele alınmıştır.

Ceyhan, Ertuğay ve Düzgün (2013), Ankara Çankaya bölgesi yerleşiminde gerçekleşen yangınların mekân-zamansal olarak kümelenmelerini incelemişlerdir. Çalışmada birim yoğunluk grafikleri gibi görsel analizlerin yanı sıra, yangın olaylarına ilişkin mekân-zamansal ilişkiler de ortaya konmaya çalışılmıştır.

Dalelane ve Deutschlander (2013), iki aşamalı parametrik olmayan bir yöntem kullanarak Almanya’da sıcaklık anomalilerini incelemeyi amaçlamışlardır. İlk aşamada iklim biliminde nadir olarak kullanılan robust kernel tahmincilerini, sıcaklık uç değerlerine ilişkin Poisson nokta süreçlerinin birim yoğunluklarının tahminlenmesinde kullanmışlardır. İkinci aşamada ise nokta tabanlı bu birim yoğunluk fonksiyonlarına ilişkin eğrileri fonksiyonel kümeleme analizi yardımıyla kantillerin aşılma olasılıklarının zaman içerisinde benzer seyrettiği bölgeleri oluşturmak amacıyla birleştirmişlerdir.

Diggle, Gabriel ve Rowlingson (2013), açık kaynak olan R programında mekân-zamansal nokta örüntülerini görselleştirmek, benzetimini yapmak ve analiz etmek amacıyla “stpp” adlı bir paket üretmişlerdir.

Wang (2013), mekânsal ve mekân-zamansal süreçler yardımıyla istatistiksel çıkarımlar yapmak amacıyla, Amerika’nın Florida eyaletindeki Juno kumsalı’nda yer alan deniz kaplumbağası yavrusu alanlarındaki örüntüleri incelemiştir. Çalışmada, mekânsal süreçlerin birinci ve ikinci dereceden moment özellikleri, mekân-zaman etkileşimi, parametrik ve parametrik olmayan yöntemler yardımıyla ortaya konulmaya

alışılmıştır. Ayrıca deniz kaplumbağası yavrulama alanlarındaki mekânsal ve zamansal heterojenlikler tespit edilmeye çalışılmıştır.

Couerjolly (2015), durağan mekânsal nokta süreçlerinin yoğunluğu için robust tahminciler kullanmıştır. Çalışmada bu amaçla medyan bazlı bir tahminci kullanılmıştır.



## 2. MEKÂNSAL VERİ TİPLERİ

Mekânsal istatistikte kullanılan yöntemler genellikle analiz edilmekte olan mekânsal verinin türlerine göre üç kategoriye ayrılmaktadır. Mekânsal verinin bu türleri; *mekânsal nokta örüntüleri*, *jeoistatistiksel veri* ve *örgü (lattice) verileri* olarak adlandırılmaktadır. Gözlemlerin konumu noktalar veya alan ölçü birimleri olarak belirlenmiş olabilir. Örneğin, nokta konumları enlem-boylam veya x-y koordinat değerleri ile gösterilebilir. Alansal konumlar ise nüfus sayımı alanları, iller, ilçeler, devletler, eyaletler, v.b... olabilir. (Eryılmaz, 2010)

Mekânsal veriler de ölçüm düzeylerine göre *sınıflayıcı*, *sıralayıcı*, *eşit aralıklı* ve son olarak *oransal* ölçeklerle ölçülebilen değişkenler olarak sınıflandırılmaktadırlar. Haining (2003) coğrafi olayları temsil eden dijital nesneleri dört sınıfta incelemiştir. Bu nesneler nokta, çizgi, alan ve yüzeyler olarak ifade edilmektedir.

Çizelge 2.1’ de mekânsal verilerin ölçüm düzeylerine ve mekânsal nesne türlerine göre bir sınıflandırılma aşağıda verilmiştir.

Tipoloji, aynı katman içinde birbiriyle ilişkili olduğu saptanan buluntuların biçimsel özelliklerine göre sınıflandırılmasıdır. Bu durumda mekânsal veriler bazı özelliklerine göre birbirlerinden farklılık gösterecektir. Mekânsal verilere ilişkin Cressie (1991) tarafından öne sürülen bir tipoloji Çizelge 2.2’de verilmiştir. Mekânsal bir süreç  $d$  boyutlu bir uzayda;

$$\left\{ Z(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^d \right\} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada  $Z$ : Ölçümlenen değişken,  $s$ : ölçümlerin gerçekleştirildiği konumu ifade etmektedir.  $Z(s)$  ise ilgili değişkenin konum  $s$ ’ e göre aldığı değeri (öznitelik) ifade etmektedir. Tanım (2.1)’de  $d=1$  durumunda çizgi nokta süreçlerini,  $d=2$  durumu ise mekânsal nokta süreçlerini ifade edecektir. Ayrıca  $Z(s)$  bir stokastik süreç iken  $d$ ’nin iki ve ikiden büyük olduğu durumlarda rassal alan olarak da adlandırılmaktadır. Cressie (1993) verinin bulunduğu alan  $D$ ’ nin özelliklerine göre mekânsal verileri üç kategoride incelemiştir ve veri tipine göre mekânsal süreçler değişiklik gösterecektir. Uygulanacak olan istatistiksel analizler de bu veri tiplerine göre değişiklik gösterecektir. Aşağıda bu veri tipleri tanımlanacak, özellikleri ve kullanıldığı alanlardan örnekler verilecektir.

## 2.1. Jeostatistiksel Veriler

$D$  alanı sürekli ve sabit bir alandır. Burada süreklilik; ilgili öznelik değeri  $Z(s)$ 'nin  $D$  içerisinde her yerde gözlenebileceği anlamını taşımaktadır. Dolayısıyla  $s_i$  ve  $s_j$  gibi herhangi iki örneklem konumu arasında teorik olarak sonsuz sayıda örneklem konumlandırılabilir. Alanın sabit olması ise  $D$  içerisindeki noktaların stokastik olmamasını ifade etmektedir.  $D$ 'nin sürekliliğinden yola çıkılarak jeostatistiksel veriler aynı zamanda sürekli değişime sahip mekânsal veri olarak da adlandırılmaktadır. Sürekliliğin  $Z$  ölçümlenen değişkeni yerine  $D$  alanı ile ilişkilendirilmesi büyük bir önem taşımaktadır (Schabenberger & Gotway, 2005).

Jeostatistiksel veri kullanılarak yapılan mekânsal analizlerde, bir değişkenin örneklenmiş noktalarından yola çıkılarak ilgili sürekliliğe sahip  $D$  üzerinde örneklenmemiş noktaların tahmin edilmesi amaçlanmaktadır. Bu analizlerde değişkene ait konum noktaları açıklayıcı değişken, ilgili konum noktalarındaki değişken değerleri ise yanıt değişkeni olarak ele alınmaktadır. Bu analizlerde mekânsal verilerin doğası gereği otokorelasyon yapısı varyogram fonksiyonu yardımı ile belirlenir ve tahminler bu doğrultuda yapılır.

Jeostatistik bilim dalı ise 1980'li yılların başında Matheron tarafından maden mühendisliği, jeoloji, matematik ve istatistiğin karışımı bir disiplin olarak ortaya atılmıştır. Jeostatistiksel verilerin sıklıkla kullanıldığı uygulama örnekleri aşağıda verilmektedir:

Bir ülkede bulunan meteoroloji ölçüm istasyonlarından elde edilen sıcaklık değerleri yardımı ile tüm ülke ile ilgili sıcaklık değerleri tahmin edilebilir. Burada sıcaklık değişkeni ilgili  $D$  alanı (ülke) üzerinde her bir noktada ölçümlenebilen bir değişkendir (Schabenberger & Gotway, 2005).

Toprak bilimcilerin herhangi bir alandaki toprak yapısını belirlemede kullanılabılır. Yine tasarlanan örneklemdeki değişken değerlerinden yararlanılarak, örneklenmeyen bölgelerdeki toprak yapısı belirtilen değişken değerleri yardımıyla tahmin edilebilir. Bu değişkenlere örnek olarak, topraktaki ph değeri, toprağın elektriksel geçirgenlik özelliği ya da potasyum oranı vb. gibi değişkenler verilebilir (Cressie, 1993).

Bir bölgede bulunan çeşitli noktalardaki yağış miktarlarının kaydedilmesi sonucu oluşturulmuş bir veri seti, örneklenmeyen bölgeler de dâhil olmak üzere, o bölgenin tamamı üzerindeki yağış miktarını modellemede kullanılabılır (Eryılmaz, 2010). Burada ise yağış miktarı, bölge üzerinde her bir noktada ölçülebilen bir değişkendir.

Yer bilimciler, bir bölgedeki bazı noktalardan maden cevheri örnekleri toplar. Bu örneklerden yararlanılarak bölgenin cevher haritası çıkarılıp örneklenmeyen noktalardaki cevher miktarı tahminlenebilir. (Eryılmaz, 2010). Bu örnek ise jeoistatistiksel analizin kullanıldığı ilk ve temel problemdir.

**Çizelge 2.1. Mekânsal verilerin ölçüm düzeylerine ve mekânsal nesne türlerine göre bir sınıflandırma (Haining R., 2003)**

| Ölçüm Düzeyi                               | Mekânsal Temsil Etme                                                     |                                                           |                                                       |                                                          |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
|                                            | Nokta                                                                    | Çizgi                                                     | Alan                                                  | Yüzey                                                    |
| Sınıflayıcı<br>(=)                         | Ev: Soyulmuş/ ya da soyulmamış                                           | Yol: Bakımda/ ya da değil                                 | Yaşam tarzı tarafından sınıflandırılmış sayım bölgesi | Arazi kullanım tipi                                      |
| Sıralayıcı<br>( $\leq$ ; $\geq$ )          | Yaşam kalitesi açısından bir bölgede bulunan kasabaların tercih sıraları | Yol Sınıflandırılması (otoyol, A, B...)                   | Gelir düzeylerine göre sayım bölgeleri                | Toprak yapısı (kaba taneli, orta kaliteli, iyi kaliteli) |
| Aralıklı<br>( $\leq$ ; $\geq$ ; +; -)      | Kasabalar için townsend indeksi                                          | Greenwich meridyeni referans alınarak elde edilen uzaklık | Bölgeler için townsend indeksi                        | Yüzey sıcaklığı                                          |
| Oransal<br>( $\leq$ ; $\geq$ ; +; -; x; /) | Bir fabrikada yıllık elde edilen çıktı miktarı                           | Yıllık nakliye miktarı                                    | Bölgesel kişi başı ortalama gelir                     | Yağış(cm), kar kalınlığı (cm)                            |

**Çizelge 2.2. Mekânsal veri tipolojisi ( Cressie, 1991)**

| Veri Türleri                                    |                  | Model ya da “Tasarı”                                             |                                                                                                                      | Örnek                                                                                                                          |                                                                                    |
|-------------------------------------------------|------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Coğrafi Bilgi Sistemleri                        |                  | Değişken Değeri                                                  | Mekânsal İndeksi                                                                                                     | Değişken                                                                                                                       | Uzay                                                                               |
| Nokta veya alan nesne veri                      | Örgü             | Değişkenler, (kesikli veya sürekli) rassal değişkenlerdir.       | Değişkenlerin ilişkilendirildiği nokta veya alan nesneler sabittir.                                                  | Suç oranları<br>Toprak kullanımı<br>Hastalık oranları<br>Fiyatlar                                                              | Ülke<br>Şehir alanları<br>Sayım alanları<br>Perakende siteleri                     |
| Sürekli değerli alan veri                       | Jeoistatistiksel | Değişkenler, konum fonksiyonunun sürekli değerleridir.           | Değişken, (iki-boyutlu) araştırma bölgesinin her yerinde tanımlıdır.                                                 | Toprak pHı<br>Yüzey<br>Isı ( $^{\circ}\text{C}$ )                                                                              | İki nehri ayıran araziler<br>Su alanları                                           |
| Rassal olarak konumlandırılmış nokta-nesne veri | Nokta Örtüntü    | (i) verilen nitelik<br>(ii) değişken rassal değişkendir.         | Nokta-nesneler araştırma bölgesinde rassal olarak konumlandırılmışlardır.                                            | (i) ağaçlar<br>(ii) ağaçlar: hastalıklı olanlar ve olmayanlar<br>(i) Hill forts<br>(ii) Hill Forts: türe göre sınıflandırılmış | Orman alanı<br>Orman alanı<br>Arkeolojik kazı alanları<br>Arkeolojik kazı alanları |
| Rassal alan-nesne veri                          | Nesneler         | Her bir alan nesnenin mekânsal büyüklüğü rassal bir değişkendir. | Araştırma bölgesindeki alan nesnelerin konumları (örneğin merkezleri veya orijin noktaları), rassal bir değişkendir. | Liken parçaları<br>Bitki örtüsü kümeleri                                                                                       | Bozkır<br>Tarla, çayır, otlak, mera gibi alanlar                                   |

Bu problem genelleştirilerek, diğer bilim dallarında da jeoistatistiksel tahminleme yöntemleri kullanılmaya başlanmıştır.

## 2.2. Örgü Verileri

Örgü verileri,  $D$  alanının sabit ve kesikli, diğer bir deyişle rassal olmayan ve sayılabilir olduğu mekânsal verilerdir. Konum sayıları sonsuz olabilmekle birlikte, önemli olan bu konumların sayılabilir olmasıdır. Örgü veri tipine sahip olan konumlara genellikle site olarak değinilmekte ve bu siteler çoğunlukla mekânsal noktalar yerine alansal bölgeleri temsil etmektedirler (Schabenberger & Gotway, 2005). Her bir sitenin temsil edilebilmesi amacıyla, bu sitelere kesin bir mekânsal koordinat atanması gerekmektedir. Örneğin Van Gölü incelenirken, Türkiye haritası üzerinde bir poligon, yani bir coğrafi bölge incelenmiş olur. İki şehir arasındaki uzaklığı ölçmek amacıyla da, şehirlere ait kesin bir koordinat (şehir merkezi) belirlenip öklid uzaklığı yardımı ile bu uzaklık ölçülebilir. Bu veri tipine örnekler aşağıda verilmiştir:

- Bir şehir ya da coğrafi bölge içinde gerçekleşen olay sayıları: suç istatistikleri, ölüm sayıları, hastalık oranları, trafik kazaları.
- Seçim ya da nüfus sayımı bölgeleri.
- Tarımsal bir araziden elde edilen tarım ürünü miktarı.
- Uzaktan algılama ile gözlemlenen yüzey alanları ile ilişkilendirilen pikseller.
- Bir ülkede iller üzerinde yapılan mutluluk düzeyi anketleri ve bu illerin yaşanılabilirlik indeksleri.

## 2.3. Mekânsal Nokta Örüntüleri

Jeoistatistiksel ve örgü verilerinin aksine, nokta örüntülerinde  $D$  alanı rassaldır. Bu nokta örüntülerinin indeks kümesi rassal olayların gerçekleştiği konumları veren mekânsal nokta örüntüleridir.  $Z(s)$ , burada  $\forall s \in D$  için olayın gerçekleştiğini belirtmek üzere “1” değerini alabilir ya da rassallığı belirtmek amacıyla ek bilgiler içerebilir (Moraga, 2012).

$D$  alanının rassal olması mekânsal nokta örüntülerinin diğer mekânsal veri türlerinden ayrılmasını sağlayan bir özelliktir. Bir kova kumun masa üzerine döküldüğü bir deneyde,  $D$  alanı masa değişmediği sürece değişmeyecektir. Dolayısıyla sabit kalacaktır. Fakat kumun masa üzerindeki yüksekliği her bir denemeden denemeye değişiklik gösterecektir. Diğer bir deyişle, başka bir rassal süreç gerçekleşecektir. Bu yüksekliğin belirli bir eşik değerinden yüksek olduğu durumla ilgilenildiğinde her bir

denemede farklı bir rassal  $D^*$  kümesi meydana gelecektir. Bu durumda ise istatistiksel analizin amacı  $D^*$  kümesi olacaktır.  $D^*$  içindeki tüm noktaların kümesi nokta örüntüsü olarak adlandırılmaktadır. Eğer ki rassal noktalar kümesi dışında noktalara ilişkin rassal  $Z(s)$  ile de ilgileniliyorsa bu tür nokta örüntüleri işaretlenmiş nokta örüntüleri adını alacaktır. Mekânsal nokta örüntüleri analizlerinde genellikle bu noktaların düzenlilik, tam mekânsal rassallık ya da kümelenme gösterip göstermediği araştırılır. Mekânsal nokta örüntüleri ile ilgili veri ve yapılabilecek analiz örneklerinden birkaçı aşağıda verilmektedir:

Deprem bilimciler, bir bölgede gerçekleşmiş depremlerin dağılımını gösteren verilere sahiptirler. Bu verilerden hareketle, gerçekleşmesi olası depremler hakkında tahminde bulunup depremlerin herhangi bir örüntüye sahip olup olmadığını araştırmada mekânsal istatistik yöntemlerinden yararlanabilirler. (Eryılmaz, 2010)

Bir bölgeye düşen yıldırımların rassallığının ya da ilgili bölge üzerinde belirli bir konumda kümelenmesi araştırılabilir. Belirli bir bölgede yer alan ağaç türlerinin dağılımının incelenebilmektedir. Herhangi bir ilde suç işlenen noktaların ilişkili olup olmamasının araştırılmasında, mekânsal nokta örüntüleri ile ilgili yöntemler uygulanabilir.

Epidemiyoloji uzmanları (salgın bilimciler), hastalıkların olduğu yerlerden veri toplarlar. Hastalığın diğer bireylere nasıl bulaştığını gösterebilecek herhangi bir örüntü olup olmadığını araştırmada mekânsal istatistik yöntemlerden yararlanabilirler (Eryılmaz, 2010).

### 3. MEKÂNSAL NOKTA ÖRÜNTÜLERİ ve SÜREÇLERİ

Mekânsal nokta örüntüleri mekânsal nokta süreçleri sonucunda elde edilen noktaları içermektedir. Arka planda gerçekleşen mekânsal nokta sürecine göre farklı mekânsal nokta örüntüleri oluşmaktadır. Bu bölümde görselliğin kavramların tanımlanmasında önemli bir yer alması ve kavramların anlaşılması daha kolay hale getirmesinden dolayı önce mekânsal nokta örüntüleri ve özelliklerinin anlatılması tercih edilmiştir. Değişik kaynaklarda bu sıralama değişik olarak verilebilmektedir.

Daha sonra ise mekânsal nokta süreçlerine geçmeden önce mekânsal nokta süreçlerinin önemli özellikleri ele alınmıştır. Mekânsal nokta süreçlerinden bahsedildikten sonra ise mekânsal nokta süreçlerinde temel bir hipotez olarak değerlendirilen tam mekânsal rassallığın test edilmesine yer verilecektir.

Bu bölümde son olarak ise birim mekânsal yoğunluğun stokastik süreçler dışında parametrik olmayan bir yöntem olan kernel fonksiyonları ile tahmin edilmesine yer verilecektir.

#### 3.1. Mekânsal Nokta Örüntülerinin Türleri

Çalışılan uzay üzerinde herhangi bir bölge içinde düzensiz noktalar kümesi şeklinde dağılım gösteren veriler günümüzde birçok bağlamda karşımıza çıkmaktadır. Bir ormandaki ağaçların konumları, bir kuş kolonisinin yavrulama konumları veya bir doku içerisindeki çekirdeğin mikroskobik konumu bu veri tipine ilişkin verilebilecek birkaç örnektir. Bu tür veri kümeleri *mekânsal nokta örüntüleri* olarak adlandırılır. Verilerin konumları ise çalışma alanındaki keyfi noktalardan ayırt etmek amacı ile *olay* olarak tanımlanmaktadır. (Diggle, 2013, s. 1)

Eğer olaylar kısmi olarak gözlemlenebiliyor ise kaydedilen örüntü örneklenmiş nokta örüntüsü olarak adlandırılır. Eğer ki bir rassal sürecin gerçekleşmesine ilişkin tüm olaylar kaydedildi ise bu tür nokta örüntülerine eşlenmiş nokta örüntüleri adı verilmektedir.

Mekânsal nokta örüntüleri ilişkili mekânsal nokta süreçlerinin gerçekleşmesi ile meydana gelmektedir. Mekânsal nokta örüntülerinin istatistiksel analizinde önemli amaçlardan biri mekânsal örüntünün türünün çeşitli testler yardımı ile belirlenmesidir. İncelenecek olan mekânsal veriler tam mekânsal rassallık (TMR), düzenlilik ya da kümelenme (toplanma) olmak üzere üç farklı mekânsal örüntü gösterebilirler.

İfade (2.1)' de verilen mekânsal bir nokta süreci  $d=1$  olduğu durumda çizgi süreçleri (zamansal ya da tek boyutlu nokta süreçleri),  $d=2$  olduğunda ise mekânsal nokta süreçleri gerçekleşecektir. Burada unutulmaması gereken en önemli özellik (2.1)'de verilen mekânsal nokta süreçlerinde alan  $D'$  nin yanı sıra  $D$  üzerindeki her bir noktaya ilişkin öznitelik değeri olan  $Z(s)$ 'in de rassal olmasıdır.

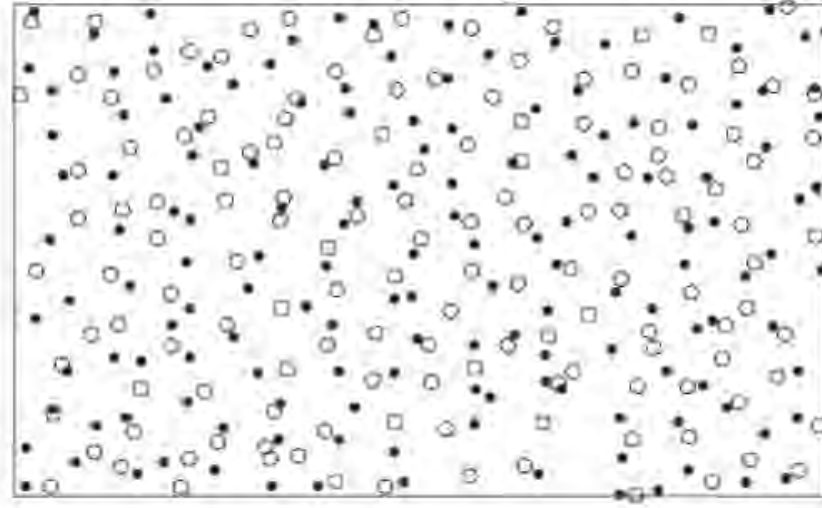
Örneğin, bir bölgede belirli bir zaman aralığında gerçekleşen suç sayısı rassal değişken olarak düşünülebilir. Her bir suç vakası belirli bir zaman noktasında gerçekleşecektir. Dolayısıyla sayı doğrusu üzerinde bir çizgi süreci gerçekleşmiş olacaktır. Eğer ki bu suç olaylarının ilgili bölgedeki gerçekleştiği konum bilgileri mevcut ise ilgili bölge üzerinde rassal olarak dağılmış nokta kümeleri elde edilecektir. Dolayısıyla elde edilen noktalar kümesi de rassal özelliğe sahip olacaktır. Böyle bir durumda suç veri seti iki boyutlu uzayda bir nokta sürecini diğer bir deyişle mekânsal nokta sürecini temsil edecektir. Bu örneklerden yola çıkarak genelleme yapılacak olursa suç olaylarına ilişkin hem zaman hem de mekân boyutunu bir arada ele aldığımız durumda ise mekân-zamansal nokta süreçlerinin gerçekleşmesinden bahsedebilebilir.

Bu bölümde incelenecek mekânsal nokta örüntüleri ve mekânsal nokta örüntülerinin tespit edilmesi amacı ile önerilen testler işaretli mekânsal nokta süreçleri üzerine olacaktır. İşaretli mekânsal nokta örüntüleri, işaretlenmiş mekânsal nokta örüntülerinin bir özel hali olup, ifade (2.1)' de sözü geçen  $Z(s)$ ' in değerinin dejenere olduğu durumda karşımıza çıkmaktadır.  $Z(s)$ ' in dejenere olması bizim için çalışma alanı üzerindeki her bir noktada tek bir değer alması anlamına gelmektedir. Eğer ki mekânsal nokta süreci belirli bir bölgede gerçekleşen deprem merkez üslerini içeriyor ise  $Z(s)$  "1" değerini alacaktır.  $Z(s)$ ' in aldığı bu 1 değeri olayın yani depremin gerçekleştiği anlamına gelmektedir. Eğer ki  $Z(s)$  değişkeni depremlerin gerçekleştiği merkez üssüne ilişkin konumlardaki depremlerin Richter ölçeği ile ölçümlenen büyüklüklerine ilişkin değerler alıyor ise işaretlenmiş mekânsal nokta süreçlerine bir örnek teşkil edecektir.

İki ya da daha fazla nokta türü olduğunda işaretlenmemiş nokta örüntülerinin bir genellemesi olan çok değişkenli nokta örüntülerinden bahsedilebilir. İki değişkenli bir mekânsal nokta örüntüsü örneği (Diggle, 2013, s. 3-5)' de verilmiştir. Örneğe ilişkin veri tavşan retinasında bulunan iki farklı türdeki hücrelerden oluşmaktadır. İlgili veride 294 adet amakrin hücresi bulunmaktadır. Bu hücrelerin ilki ışık ile karşılaşılması durumunda beyine sinyal gönderme görevini üstlenmekte, ikincisi ise ışığın söndüğü durumda beyine sinyal gönderme görevini üstlenmektedir.

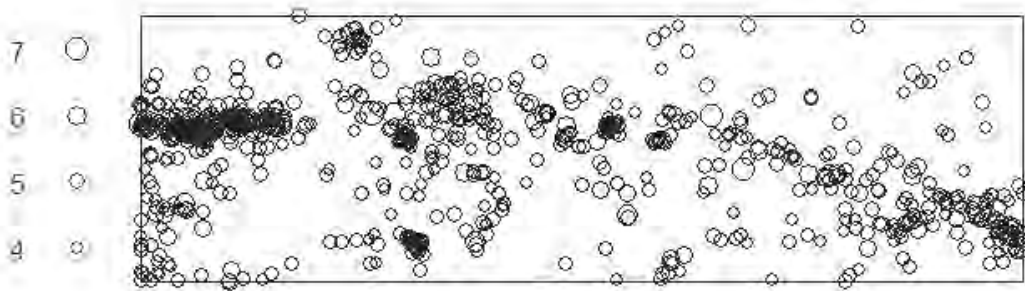


Şekil 3.1’ de iki değişkenli mekânsal nokta örüntüsü örneği verilmiştir. Açık ve kapalı çemberler sırası ile ışık olduğu durumda ve ışıksız durumdaki amakrin hücrelerini temsil etmektedir. Şekil 3.1’ deki örüntü aynı zamanda bazı kaynaklarda kategorik bir işaret değişkenine sahip bir işaretlenmiş mekânsal nokta örüntüsü olarak da tanımlanabilmektedir.



Şekil 3.1. Bir tavşanın retinasında konumlanmış amakrin hücreleri

Şekil 3.2’de ise işaret değişkeni sürekli olan bir işaretlenmiş bir nokta örüntüsü verilmiştir. Depremlerin oluş konumlarını içeren bu örüntüde, gerçekleşen depremlerin Richter ölçeğine göre büyüklükleri işaret değişkeni olarak ele alınmıştır. Gerçekleşen deprem büyüklüklerine göre dairenin de büyüklüğü artarak değişmektedir.



Şekil 3.2. Deprem şiddetine göre işaretlenmiş bir işaretlenmiş mekânsal nokta örüntüsü

Tam mekânsal rassallık (TMR) nokta örüntülerinde ayırt edici örüntü olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla TMR’nin tespiti için yapılan testlerde test

istatistikinden yola çıkarak ulaşılan  $H_0$  hipotezi o tam mekânsal rassallığın varlığının reddi bize diğer nokta örüntülerinin varlığı için yeterli olacaktır. İzleyen bölümlerde tam mekânsal rassallık ve diğer mekânsal nokta örüntüleri detaylı bir şekilde ele alınacaktır.

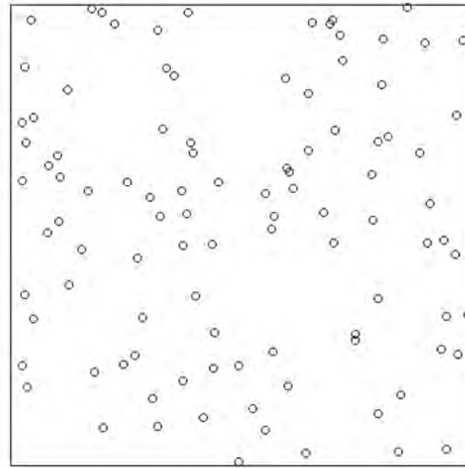
### 3.1.1. Tam mekânsal rassallık (TMR)

Bir nokta örüntüsü aşağıdaki iki özelliği sağladığı takdirde tam mekânsal rassallığa sahip olarak nitelendirilmektedir: (Schabenberger & Gotway, 2005, s. 81)

Her bir birim alanda gerçekleşen ortalama olay sayısı olan yoğunluk  $\lambda(s)$ ,  $D$  alanı üzerinde homojen olmalıdır.

$A_1$  ve  $A_2$ ,  $D$  alanı üzerinde çakışmayan 2 alt bölge olsun. Bu 2 alt bölgedeki olay sayıları birbirinden bağımsız ve herhangi bir alt bölgedeki olay sayıları poisson dağılım göstermelidir.

Böylelikle olaylar ilgili  $D$  alanı üzerinde düzgün ve bağımsız olarak dağılım gösterebileceklerdir. Önceden de belirtildiği üzere her bir mekânsal nokta örüntüsünün gerçekleşmesinin arka planında bir rassal süreç rol alabilmektedir. Tam mekânsal rassallık örüntüsü ise homojen poisson sürecinin gerçekleşmesi ile ortaya çıkmaktadır.



**Şekil 3.3.**  $[0,5] \times [0,5]$  birim karelik bir alanda türetilen 100 olaydan oluşan tam mekânsal rassal örüntü

Şekil 3.3’de 100 birimlik bir nokta örüntüsü  $[0,5] \times [0,5]$  birim karelik bir alan için homojen poisson süreci yardımı ile türetilmiştir. Verilen örüntüde birim kare başına düşen olay sayısı olan yoğunluk 4’e eşittir.

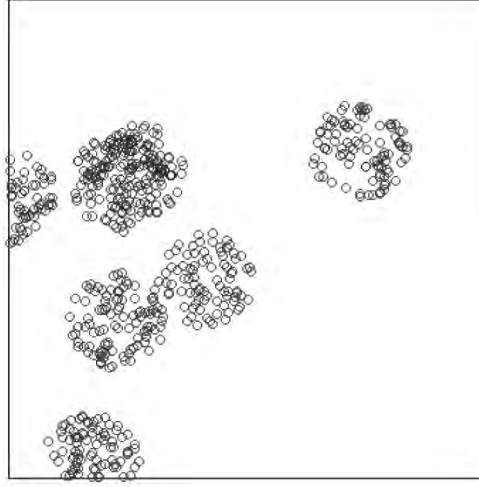
Diggle (2013, s. 10-11)' e göre TMR idealleştirilmiş bir standardı temsil etmektedir. Ayrıca bu standardda ulaşmanın genellikle pratikte oldukça zor olduğunu fakat yine de nokta örüntülerinde kullanılacak ilk yaklaşım olarak TMR'nin ele alınması gerektiğinden bahsetmiştir. Diggle (2013, s. 10-11)'e göre nokta örüntülerinde istatistiksel analizler TMR'nin testi ile başlamalıdır ve nokta örüntülerinde istatistiksel analizlerinin TMR'nin testi ile başlamasına ilişkin iki iyi neden bulunmaktadır. İlk olarak TMR'nin herhangi bir test ile reddedilemediği durumda istatistiksel olarak ileri incelemeye gerek duyulmadığından bahsetmiştir. İkinci neden olarak ise TMR'nin reddinin asıl amaç olmasından çok testlerin eldeki bir veri kümesini araştırmak amacı ile kullanıldığını ifade etmiştir.

Birçok nokta süreci bir şekilde tam mekânsal rassallıktan türemiştir. Olayların çakışmayan alt bölgelerde bağımsız olabileceğini fakat  $D$  alanı üzerinde  $\lambda(s)$  yoğunluklarının homojen olarak gerçekleşmediği durumlar olabilir. Dolayısı ile  $\lambda(s)$ ' in büyük olduğu bölgelerde daha çok olay gözlenirken, yoğunluğun düşük olduğu bölgelerde daha az olay gözlenecektir. Ayrıca olaylar  $D$  alanı üzerinde birbirleri arasında bir etkileşime sahip olabilirler. Bir olayın varlığı komşuluğunda bulunan olayların gerçekleşmesini ya da engellenmesine neden olabilir. Tam mekânsal rassallıktan sapmalar genel olarak “kümelenmiş” ve “düzenli” mekânsal nokta örüntüleri olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. (Schabenberger & Gotway, 2005, s. 81-82)

### 3.1.2. Kümelenmiş mekânsal nokta örüntüsü

Tam mekânsal rassallığın sağlanamadığı durumlarda  $D$  üzerinde incelenen alt kümelerde meydana gelen ortalama olay sayılarının diğer altkümelere göre fazla olması durumunda kümelenmiş mekânsal nokta örüntüsü ortaya çıkmaktadır.

Ayrıntılı olarak açıklamak gerekirse; mekânsal nokta sürecinde yoğunluk  $\lambda(s)$  'in  $D$  alanı üzerinde sabit olarak gerçekleşmediği, bazı alt bölgelerdeki yoğunlukların diğerlerinde fazla olması nedeni ile kümelenmiş örüntü ortaya çıkabilmektedir. Kümelenmiş mekânsal örüntü bir olayın diğer olayları çeken (gerçekleşmesine sebebiyet veren) bir etki yapması ile aynı alt bölgede olayların diğer alt bölgelere kıyasla daha yoğun olarak görülmesi ile de gerçekleşebilmektedir.



**Şekil 3.4.** *Kümelenmiş bir mekânsal nokta örüntü örneği*

Şekil 3.4’ te kümelenmiş bir mekânsal nokta örüntüsü örneği verilmiştir. Şekildeki bazı alt bölgelerde hiçbir olay meydana gelmemiş, bazı alt bölgelerde ise yoğunluğun yüksek olduğu yani çok sayıda olayın meydana geldiği görülmektedir.

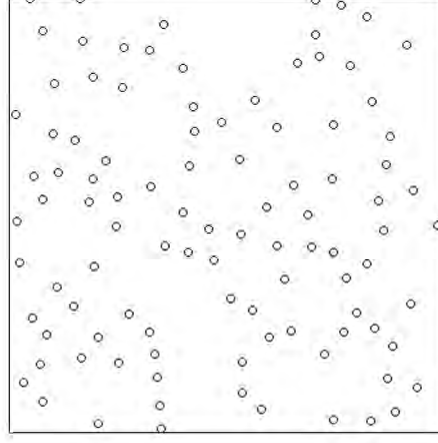
Kümelenmiş bir mekânsal nokta örüntüsünde  $s_i$  olarak gösterilen bir olay ile en yakın komşuluğundaki olay arasındaki ortalama uzaklık tam mekânsal rassallık gösteren bir örüntüye kıyasla daha azdır.

Diggle (2013,s. 1-2)’e göre kümelenmiş mekânsal nokta örüntüleri, bir kümelenme mekanizmasından etkilenmeyerek çevresel çeşitliliğin yol açtığı göreceli olarak yüksek olay yoğunluğuna sahip yerel bölgelerin de var olabileceğinden dolayı “bir araya toplanmış” mekânsal nokta örüntüsü olarak tanımlanmaktadır. Özellikle biyoloji ve ekoloji gibi alanlarda çalışmanın yapıldığı bölge ile ilgili yeterli bilginin bulunmamasının bir istatistiksel analizden elde edilecek sonuçları kısıtlayacağını vurgulamıştır.

### **3.1.3. Düzenli mekânsal nokta örüntüsü**

Düzenli mekânsal nokta örüntüsü belli bir düzeni takip eden,  $s_i$  olarak gösterilen bir olay ile en yakın komşuluğundaki olay arasındaki ortalama uzaklığın tam mekânsal rassallık gösteren bir örüntüye kıyasla daha fazla olan veya bir olayın diğer bir olayın onun yakın komşuluğunda gerçekleşmesini genellikle engellediği durumlarda ortaya çıkan bir mekânsal nokta örüntüsü olarak tanımlanabilir.

Düzenli mekânsal nokta örüntüsüne sahip bir alan olayların simetriğe yakın bir dağılım göstermesi ile karakterize edilebilmektedir.



Şekil 3.5. Düzenli bir mekânsal nokta örüntüsü örneği

Şekil 3.5’de düzenli bir mekânsal nokta örüntüsü örneği verilmiştir. Olaylar arasındaki uzaklıkların kümelenmiş bir mekânsal nokta örüntüsüne göre çok fazla sapma göstermediği görülmektedir.

### 3.2. Mekânsal Nokta Örüntülerinde Merkezi Eğilim Ölçüleri ve Saçılım Ölçüleri

İstatistikte kullanılan aritmetik ortalama ve medyan gibi merkezi eğilim ölçüleri ve standart sapma gibi saçılım ölçülerinin nokta örüntülerinde karşılıkları bulunmaktadır. Merkezi eğilim ve saçılım ölçüleri istatistikte verilen bir seriye ilişkin değerleri özetlemek, değişkenliğini incelemek kısacası karakterize etmek amacı ile kullanılmaktadırlar. Mekânsal nokta örüntülerinde merkezi eğilim ve saçılım ölçüleri klasik istatistiklere oldukça benzer bir şekilde oluşturulup iki boyutlu uzay için uygun hale getirilecektir. Merkezi eğilim ölçüleri olarak ortalama merkez, ağırlıklı ortalama merkez ve medyan merkez; saçılım ölçüleri olarak standart uzaklık ve standart elips bir nokta örüntüsünü özetlemek amacı için kullanılan ölçülerdir.

#### 3.2.1. Ortalama merkez

Ortalama merkez ya da mekânsal ortalama noktalar kümesine ait ortalama konumu ifade etmektedir. İki boyutlu bir koordinat sisteminde bir nokta  $x$  ve  $y$  koordinatlarının

alacağı değere göre değişiklik gösterecektir. Mekânsal istatistiklerin hesaplanmasında kullanılacak bir koordinat sisteminin ön koşulları (Eryılmaz, 2010)'da aşağıdaki gibi verilmiştir:

- Koordinat eksenleri birbirlerine dik açılı olmalıdır, başka bir ifadeyle dik açılı eksenler olmalıdır.
- İki eksen arasındaki ölçümler aynı birime sahip olmalıdır.

Ortalama merkezin hesaplanmasında aritmetik ortalamadan yararlanılır. Tanımlanan bir koordinat sisteminde, ortalama merkez x koordinatlarının orta noktası ve y koordinatlarının orta noktası hesaplanarak kolayca bulunabilir. Bu iki ortalama koordinat ortalama merkezin konumunu oluşturacaktır.

Ortalama merkez  $n$  noktaların sayısı olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\bar{x}_{om}, \bar{y}_{om}) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right) \quad (3.1)$$

Mekânsal olmayan verilerde ortalama verinin ağırlık merkezi olarak da tanımlanmaktadır. Mekânsal verilerde de benzer şekilde ortalama merkez noktaların mekânsal bir dağılımının ağırlık merkezi olarak düşünülebilir (Eryılmaz, 2010).

Bazı durumlarda ortalama merkez verilen nokta örüntüsünü iyi bir şekilde temsil etmemekte ve yerine ağırlıklandırılmış ortalama merkez kullanılmaktadır.

### 3.2.2. Ağırlıklandırılmış ortalama merkez

Bazı durumlarda ortalama merkezin hesaplanmasında noktaların konumunun dışında dikkate alınması gereken kriterler bulunmaktadır. Her bir noktanın mekânsal dağılım içindeki önemi her zaman eşit olmayabilir. Örneğin birkaç şehir için ortalama merkez hesaplanacak olduğunda ortalama merkez şehirlerin nüfuslarına göre ağırlıklandırıldığı zaman merkezi eğilimin daha gerçekçi bir ölçüsü olarak öne sürülebilir. Böylelikle ortalama merkez nüfus yoğunluğunun daha çok olduğu şehirlere yaklaşmış olacaktır. (Lee & Wong, 2001).

Örnekte verilen durumda ağırlıklandırılmış merkezi ortalama kullanılması daha doğru olacaktır. Ağırlıklandırılmış ortalama merkez  $w_i$  bir noktaya verilen ağırlık katsayısı olmak üzere aşağıdaki eşitlik ile tanımlanacaktır:

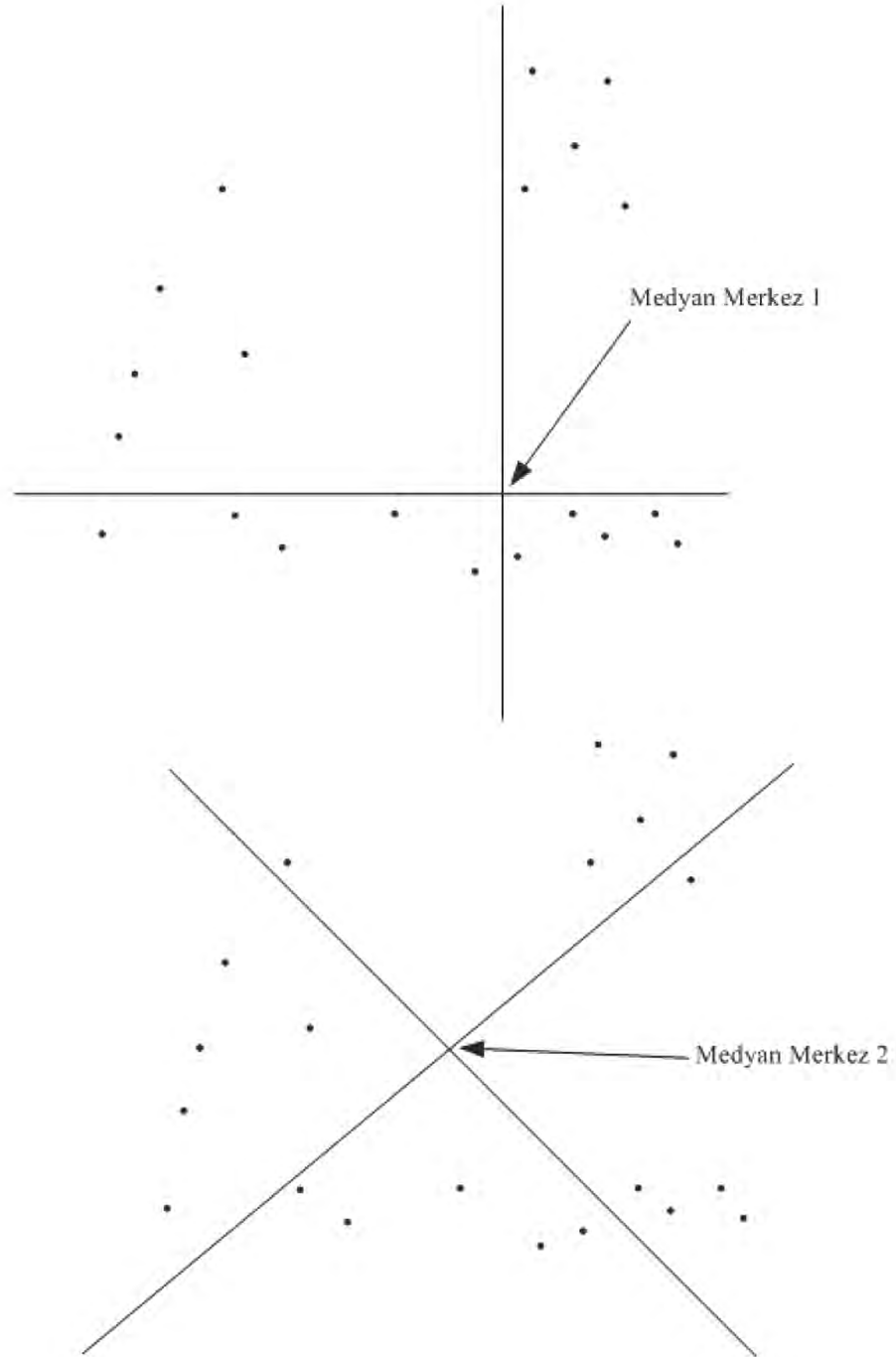
$$(\bar{x}_{aom}, \bar{y}_{aom}) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \right) \quad (3.2)$$

Aritmetik ortalama ile ortalama merkez arasındaki benzerlik ağırlıklı aritmetik ortalama ile ağırlıklandırılmış ortalama merkez arasında bulunmaktadır.

### 3.2.3. Medyan merkez

Medyan merkez farklı görüşler tarafından farklı tanımlara sahip bir kavramdır. Duyarsız bir ortalama olan medyanın iki boyutlu uzaya uyarlanması ile medyan merkez kavramı uyarlanmıştır.

İngiliz kaynaklarına göre verilen noktaların medyan merkezi çalışma alanını 4 adet aynı sayıda nokta içeren bölgeye ayırmaktadır. Fakat bu tanımın bir dezavantajı ise verilen noktalar için çalışma alanını eşit sayıda 4 farklı bölgeye ayıran birden fazla medyan merkez bulunabilmesidir. Amerikan kaynaklarına göre yapılan bir diğer tanıma göre ise medyan merkezden çalışma alanı içerisinde yer alan her bir noktaya olan uzaklıkların toplamı en küçüktür yani minimumdur. Diğer bir deyişle medyan merkez dışındaki bir noktadan çalışma alanı içerisinde yer alan her bir noktaya olan uzaklıkların toplamı medyan merkeze göre daha fazla olacaktır (Lee & Wong, 2001). Bu uzaklık en kısa yol merkez olarak da adlandırılmaktadır. Şekil 3.6' da aynı nokta örüntüsüne ait iki farklı medyan merkez olabileceği gösterilmiştir.



**Şekil 3.6.** Medyan merkezler (Eryılmaz, 2010)

#### 3.2.4. Standart uzaklık

Standart uzaklık klasik istatistikteki standart sapmanın mekânsal nokta örüntüleri için uyarlanmış halidir. Standart sapma gözlemlerin ortalamadan ne kadar saptıklarını belirtirken standart uzaklık ise nokta örüntüsünde yer alan her bir noktanın ortalama merkezden olan sapmasını belirlemektedir. Standart sapma gözlem değerlerinin ölçüm



birimi ile ifade edilirken standart uzaklık uzaklık birimleri ile ifade edilecektir (Lee & Wong, 2001). Eşitlik (3.3)' de standart uzaklığa ait olan formül verilmiştir.

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{om})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_{om})^2}{n}} \quad (3.3)$$

Uygulamada ortalama merkez orijin noktası olarak alınıp bu nokta etrafında standart uzaklık yarıçap olmak üzere bir çember çizilmektedir. Çizilen çember ortalama merkez etrafında nokta örüntüsünün ne kadar sapma gösterdiğinin bir ölçüsü olarak kabul edilir.

### 3.2.5. Standart elips

Standart uzaklık çemberi bir nokta örüntüsünün mekânsal saçılımını göstermek amacı ile kullanılan etkili bir araçtır. Fakat bazen nokta konumları yönsel bir yanlılık içeren coğrafi olayları içerebilmektedir. Örneğin bir otoyol üzerinde gerçekleşen kazalar standart uzaklık çemberi tarafından temsil edilen dairesel bir şekil oluşturmamaktadır. Bunun yerine örüntüdeki sapma otoyolun ilgili bölümünün şekline tarafından belirlenen doğrusal bir yön olarak gerçekleşecektir. Bu koşullar altında standart uzaklık çemberi sürecin yönsel yanlılığını temsil etmemektedir (Lee & Wong, 2001).

Standart uzaklık çemberi bu nedenden dolayı bir nokta örüntüsündeki yönsel yanlılığı da içeren standart elips olarak uyarlanmıştır. Bir standart elips bazı bileşenler tarafından belirlenmektedir. Bu bileşenler döndürme açısı, ana eksen (uzun olan) üzerindeki sapma ve alt eksen (kısa olan) üzerindeki sapmadır. Eğer nokta örüntüsü yönsel bir yanlılık içeriyorsa bu yöndeki noktaların saçılımı maksimum olacaktır. Bu yöne dik olan yöndeki noktaların saçılımı ise minimum olacaktır.

### 3.3. Mekânsal Nokta Süreçlerinin Özellikleri

$\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı bir nokta süreci  $N$ , bir olasılık uzayı  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ' den  $(\mathbb{N}, \mathfrak{N})$  ye tanımlanan ölçümlenebilir bir eşleştirmedir. Burada  $\mathfrak{N}$  bir  $\sigma$ -cebiri ve  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerindeki tüm nokta kolleksiyonlarının bir ailesidir. Bir nokta süreci,  $P(N \in \mathbb{N}_s) = 1$  olduğu durumda basit bir nokta süreci olarak adlandırılmaktadır.

$N$  burada kümeler üzerinde tanımlı bir fonksiyon ya da matematiksel ifade ile  $N$  bir sayma ölçüsüdür.  $\mathbb{R}^d$  'nin bir altkümesi olan  $B$  için  $N(B)$ ,  $B$  kümesi içindeki rassal

noktaların sayısını ifade etmektedir. Tüm sınırlı  $B$  kümelerinde  $N(B) < \infty$  olduğu varsayılır diğer bir deyişle  $N$  yerel olarak sınırlıdır. Açık bir şekilde  $N(B)$ ,  $B$  kümesinin toplanabilirlik özelliğine sahip bir fonksiyonu olarak nitelendirilir.  $N(B_1 \cup B_2) = N(B_1) + N(B_2)$  eşitliği  $B_1$  ve  $B_2$  gibi birçok çakışmayan küme için geçerli olacaktır. Ayrıca  $N$  diğer bir şekilde,  $N = \{x_1, x_2, \dots\}$  süreçteki tüm noktaları içeren bir rassal küme olarak da ifade edilmektedir.

Klasik istatistikte özel bir olayı tanımlamak için genellikle tek değişkenli bir dağılım kullanmaktadır. Bu dağılım tam sayılı bir değişkenin analizi söz konusu iken kesikli, sürekli bir değişkenin analiz söz konusu iken sürekli bir dağılım olmaktadır. Fakat bir nokta süreci sonlu sayıda birçok değişken ile tanımlanabilmektedir.

$$\begin{aligned} P(N(B) = n) \quad n = 0, 1, \dots \\ P(N(B_1) = n_1, \dots, N(B_k) = n_k) \quad n_1 = 0, 1, \dots, n_k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Eşitlik (3.4)'deki ilk ifade  $B$  kümesinde kesin olarak  $n$  noktanın yer aldığı olasılığı ve ikinci ifade de ise  $k$  adet  $B_1, B_2, \dots, B_k$  kümesinde kesin olarak  $n_1, n_2, \dots, n_k$  adet nokta yer alması olasılığını tanımlamaktadır. İlk olasılık tek değişkenli bir dağılım ikinci olasılık ise çok değişkenli bir dağılım tarafından tanımlanmaktadır. İkinci olasılık nokta süreçleri için sonlu boyutlu dağılım olarak da adlandırılmaktadır Burada sonsuz sayıda birçok  $B$  kümesi olabilir ve olay sayılarına ilişkin olasılıklar kümelere göre değişiklik gösterebilirler. Dolayısı ile bir nokta sürecini sonsuz çoklukta sayı dağılımı ile tanımlanabilir.

Bu olasılıkların özel bir türü  $B$  kümesinin herhangi bir alt kümesinde bir noktanın yer almaması ile tanımlanan *boşluk* ya da *yoksunluk* olasılığı adı verilmektedir ve  $P(N(B) = 0)$  şeklinde gösterilmektedir.

Örnek verilecek olursa eğer  $B = b(x, r)$  merkezi  $x$  de bulunan  $r$  yarıçaplı bir küre (disk) iken,  $P(N(b(x, r)) = 0)$  olasılığı verilen disk içerisinde herhangi bir nokta bulunmama olasılığıdır. Bu olasılık aynı zamanda  $N$ 'in  $x$ 'e en yakın noktasının  $x$ 'e olan uzaklığının  $r$ 'den büyük olduğu şeklinde de yorumlanabilmektedir.

Kesikli ya da sürekli dağılımlarda dağılımın karakteristik özelliklerinden birini belirten beklenen değer (ortalama) kavramı nokta süreçleri için de önemli bir kavramdır.

Rassal bir  $B$  küme değişkeni için  $N(B)$  değeri,  $E(N(B))$  beklenen değerinin hesaplanması  $B$ 'nin sınırlı olduğu durumda mantıklı olacaktır.

$E(N(B))$  ,  $B$  kümesindeki  $N$  nokta sürecine ilişkin ortalama nokta sayısını vermektedir. Burada ortalama,  $B$  kümesine bağlı olan ve bu kümeler üzerinde tanımlı deterministik bir fonksiyon (daha uygun olarak bir ölçüm) ile bulunacaktır.

$$\Lambda(B) = E(N(B)) \quad (3.5)$$

Eşitlik (3.5)'deki gösterim bu amaçla kullanılacak ve gösterimdeki  $\Lambda(B)$  ise yoğunluk ölçümü olarak adlandırılacaktır. Çoğu nokta süreci istatistiğine ilişkin uygulamalı çalışmalarda sağlanan bazı süreklilik koşulları altında, bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olan ve yoğunluk fonksiyonu olarak adlandırılan  $\lambda(x)$  aşağıdaki eşitliği sağlayacaktır.

$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(x) dx. \quad (3.6)$$

Bazen yoğunluk fonksiyonu  $\lambda(x)$  düzensiz olabilir. Bu durumda nokta yoğunluk dağılım fonksiyonu olan  $G(t)$  'yi kullanmak yararlı olabilir.

$$G(t) = \frac{v(W_t)}{v(W)} \quad (3.7)$$

Burada  $v$  alan ya da hacim,  $W$  nokta sürecinin gözlemlendiği pencere ve  $W_t$  ise  $W$ 'nin  $W_t = \{x \in W : \lambda(x) < t\}$  şeklinde tanımlanmış bir alt kümesidir.  $G(t)$  ,  $W$  'nin bir yoğunluk fonksiyon  $t$  eşik değerinden küçük olan bir parçasıdır.

### 3.3.1. Sonlu ve sonsuz nokta süreçleri

Gerçek dünyada tüm nokta örüntüleri sonlu olarak karşımıza çıkmaktadır. Yine de nokta örüntüleri sonsuz örüntüler olarak değerlendirilebilir ve sonsuz nokta süreçlerine ilişkin modelleri kullanmak anlamlı olabilmektedir. Sonlu nokta süreçleri ya da sonsuz nokta süreçlerinin kullanımı durumun özelliğine bağlı olarak değişecektir. Bazı nokta örüntüleri kati bir şekilde yerel olarak sınırlandırılmış fenomenleri temsil ettiğinden dolayı sonlu nokta süreçlerinden elde edilen örnekler olarak kabul edilmektedir (Illian vd., 2008).

Aşağıdaki örüntüler bu tür örüntüler için verilebilecek örneklerden birkaçıdır:

- Bir hedefteki ok izleri
- Bir bitki çevresine saçılmış tohumların konumları
- Bir peynir üzerindeki hava gözeneklerinin konumları

Diğer durumlarda bir nokta örüntüsü noktaların gözlem penceresindeki kurallar çerçevesinde dağılım gösteren kendinden daha büyük bir örüntünün parçası olabilirler.

- Bir ormandaki ağaçların konumları
- Bir bitki topluluğu tarafından saçılan tohumların konumları

### 3.3.2. Nokta süreçlerinin önemli özellikleri

Bir nokta süreci  $N$ , eğer  $N$  ve dönüştürülen nokta süreci  $N_x$  tüm dönüşümler için aynı dağılıma sahip ise *durağan (stationary)* olarak adlandırılmaktadır. Durağanlık aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$N \stackrel{d}{=} N_x \quad (3.8)$$

Burada  $N_x$  nokta süreci  $N$  nokta sürecindeki tüm noktaların bir  $x$  vektörü ile ötelenmesi sonucu gerçekleşen nokta sürecidir. Eğer  $N = \{x_1, x_2, \dots\}$  ise  $N_x = \{x_1 + x, x_2 + x, \dots\}$  şeklinde olacaktır.  $N$  ile  $N_x$ 'in aynı olması

$$\begin{aligned} P(N(B_1) = n_1, \dots, N(B_k) = n_k) &= P(N_x(B_1) = n_1, \dots, N_x(B_k) = n_k) \\ &= P(N(B_1 - x) = n_1, \dots, N(B_k - x) = n_k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

anlamına gelmektedir. Eşitlik (3.9)'da 2. satırda verilen ifade eşitliği sağlamaktadır çünkü  $B - x = \{y - x : y \in B\}$ ,  $-x$  vektörü ile ötelenen  $B$  kümesi iken  $N_x(B) = N(B - x)$ 'dir. (3.10) nolu eşitlik

$$N(B) \stackrel{d}{=} N(B_x) \quad (3.10)$$

$B$ 'deki noktaların ve ötelenmiş  $B_x$  kümesindeki noktaların aynı dağılıma sahip olduğunu vurgulamaktadır. Bu özellik nokta süreçlerinin dağılımsal karakteristikleri için önemli bir sonuç içermektedir. Belirtmek gerekirse daha sonraki bölümlerde de bahsedilecek olan yoğunluk ölçüsü bu özellik sayesinde alan ya da hacimin bir çarpanı olarak önemli bir derecede basitleştirecektir.

$$\Lambda(B) = \lambda \cdot \nu(B) \quad (3.11)$$

Eşitlik (3.11)'de sabit  $\lambda$  yoğunluk veya nokta yoğunluk olarak adlandırılmakta ve birim alan ya da hacimde gerçekleşen olay sayısı olarak yorumlanmaktadır.

*Eşyönlülük (isotropy)* durağanlığa benzer bir konsepttir. Burada durağanlıkta yapılan bir vektör ile ötelemeye kıyasla orijin noktası etrafında nokta sürecinin düzlemde  $0^\circ$  ile  $360^\circ$  arasında bir  $\alpha$  açısı ile döndürülmesi işlemi söz konusu olmaktadır.

$x = (\xi, \eta)$ ,  $\mathbb{R}^2$ , de tanımlı  $\xi$  ve  $\eta$  koordinatlarına sahip bir nokta iken döndürülmüş  $R_\alpha x$  noktası  $\xi_\alpha = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$  ve  $\eta_\alpha = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$  koordinatlarına sahiptir.

Bir  $N$  nokta süreci  $N = \{x_1, x_2, \dots\}$  ve  $R_\alpha x = \{R_\alpha x_1, R_\alpha x_2, \dots\}$  tüm  $\alpha$  açıları için aynı dağılıma sahip ise *eşyönlü* bir nokta süreci olarak tanımlanır. Bir nokta süreci hem eşyönlü hem de durağan ise *hareket-değişmez* nokta süreci olarak adlandırılmaktadır. Bu nokta süreçlerinin dağılımı keyfi noktalar etrafında döndürülme karşısında da değişmezlik gösterecektir. Bazı süreçler eşyönlü fakat durağan olmayabilir. Bir ağacın çevresinde bulunan mantarların konumları bu duruma örnek verilebilir.

Nokta süreçlerinin bir diğer önemli özelliği de döngelliktir. Bir nokta süreci *döngel (ergodicity)* ise uygun büyüklükte bir nokta süreci ile çalışmak istatistiksel açıdan anlamlı sonuçlar çıkarmak için yeterli olacaktır. Diğer bir deyişle büyük bir örnek üzerinden elde edilen ortalama birden çok küçük örneklemden elde edilen ortalama ile aynı olacaktır. Örneğin döngel süreçler için eşitlik (3.8) geçerlidir.

$$P\left(\lim_{W \uparrow R^d} \frac{N(W)}{\nu(W)} = \lambda\right) = 1 \quad (3.12)$$

Burada  $\lambda$  nokta süreci  $N$ 'in yoğunluğudur.  $W \uparrow R^d$  ifadesi çalışma penceresi  $W$ 'nin tüm uzayın tamamına yaklaşması anlamına gelmektedir.  $W$ ,  $r$  yarıçapında bir küre içerirken  $r$ 'nin sonsuza yaklaşması bu duruma örnek verilebilir.

Mekânsal bir nokta sürecinin diğer bir önemli özelliği ise düzenlilik özelliğidir. Sürecin düzenli olması ise aynı noktada iki tesadüfi olayın birden gerçekleşmemesi anlamına gelmektedir. Eğer  $|dx| \rightarrow 0$  yaklaşır iken diğer bir deyişle çalışma alanındaki ilgili alan oldukça küçük iken  $E[N(dx)] \sim P(N(dx) = 1)$  olup bu iki ifadenin oranı 1'e yaklaşacaktır.

### 3.3.3. İşaretlenmiş nokta süreçleri

İşaretlenmiş nokta süreçleri nokta süreçlerinin bir genellemesidir ve uygulamalarda sıklıkla kullanılmaktadır. Her bir nokta  $x_i$ 'ye nokta ile temsil edilen nesne hakkında ek bilgi sağlayan bir büyüklük değeri  $m(x_i)$  atanmıştır. Bu büyüklük değeri sürekli ya da kesikli bir değişken olabilmektedir. İşaretlenmiş bir nokta süreci  $M$  ile gösterilir ve  $N$  in tanımında olduğu iki farklı anlamda kullanılabilir.

$M$  küme üzerinde tanımlı bir fonksiyon veya bir rassal sayma ölçüsüdür.  $\mathbb{R}^d$  'nin bir altkümesi olan  $B$  ve  $\mathbb{R}$  'nin alt kümesi olan  $C$  için  $M(B \times C)$ ,  $x \in B$  ve  $m(x) \in C$  olduğu durumda  $[x; m(x)]$  işaretlenmiş noktalarının rassal sayısını gösterecektir. Eğer  $C = \mathbb{R}$  ise  $M$  ölçümü tüm noktaları sayacak ve işaretleri göz ardı edecektir. Bu durumda  $N$ ,  $M$ 'deki noktaların işaretleri hariç bir nokta süreci olacak yani diğer bir deyişle  $M(B \times \mathbb{R}) = N(B)$  olacaktır (Illian vd., 2008).

$M$  ayrıca işaretlenmiş noktalar kümesi anlamına da gelmekte ve  $M = \{[x_i, m(x_i)]\}$  şeklinde gösterilebilmektedir.  $[x; m(x)] \in M$  gösterimi işaretlenmiş  $[x; m(x)]$  noktasının  $M$  sürecinde bir nokta olduğu şeklinde yorumlanacaktır.

### 3.4. Mekânsal Nokta Süreçleri

Mekânsal nokta örüntüleri mekânsal nokta süreçlerinin gerçekleşmeleri sonucu ile ortaya çıkmaktadırlar. Bu örüntülerin arkasındaki stokastik yapıyı oluşturmaktadırlar. Özellikle tam mekânsal rassal örüntü, homojen poisson süreci (ya da mekânsal poisson süreci) gerçekleşmesi sonucu meydana gelecektir. Örüntülerin belirlenmesinde ilk aşamada gözlenen bir nokta örüntüsü tam mekânsal rassal örüntü ile karşılaştırılacaktır. Bu nedenle mekânsal poisson süreci mekânsal nokta örüntülerinin analizinde önemli bir yer edinmiştir. Ayrıca çoğu mekânsal nokta süreci de mekânsal poisson sürecinden türemiştir. Bu bölümde önemli mekânsal nokta süreçlerine değinilecektir.

#### 3.4.1. Bernoulli ve binom nokta süreçleri

$v_d(D)$ ,  $D \in \mathbb{R}^d$  için bir lebesgue ölçümünü ifade etsin. Eğer  $d = 1$  ise  $v_d(D)$  bir aralığın uzunluğunun,  $\mathbb{R}^2$  de  $D$ 'nin alanını ve  $\mathbb{R}^3$  için ise hacminin bir ölçümü olacaktır.

$v(A)$ , burada borel bir kümenin hacmi olarak ele alınacaktır. Eğer  $D$  içerisinde sadece bir tek olay  $s$ , tüm  $A \subset D$  kümeleri için  $P(s \in A) = v(A)/v(D)$  olasılığı ile dağılım gösteriyor ise tek bir noktayı içeren bu süreç Bernoulli Süreci olarak adlandırılacaktır. Bu olasılık aynı zamanda geometrik olasılık olarak da tanımlanmaktadır. Bu süreç pek ilgi çekici bir süreç olmamakla birlikte  $n$  adet Bernoulli süreci aynı  $D$  çalışma alanında çakıştırıldığı durumda  $n$  adet olaydan oluşan Binom nokta süreci meydana gelecektir. Bu oluşan süreç araştırılması açısından daha ilginç bir süreç olacaktır. Binom nokta sürecinin oluşmasında, istatistikte dağılım teorisinde  $n$  adet bağımsız ve eş homojen Bernoulli denemesinin toplamalarının dağılımdan binom dağılımının elde edilmesi ile aynı mantıktan yola çıkılmıştır.

Nokta süreçleri olay konumlarının stokastik özellikleri ile ya da bir sayma ölçüsü ile incelenebilmektedir. Son yaklaşım sezgisel bir yaklaşımdır. İlk yaklaşım ise gerçekleşen nokta süreci modelini ve gerçekleştirilebilecek simülasyonları ele alacaktır.  $D$ 'nin  $A_1, \dots, A_n$  alt bölgeleri için  $n$  noktadan oluşan  $Z(s)$  binom nokta sürecine ilişkin olasılık aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$P(s_1 \in A_1, \dots, s_n \in A_n) = P(s_1 \in A_1) \dots P(s_n \in A_n) = \frac{v(A_1) \cdot \dots \cdot v(A_n)}{v(D)^n} \quad (3.13)$$

Bu olasılık  $n$  adet olayın ilgili  $D$  alanı üzerinde gerçekleşme olasılığını verecektir. Eğer  $s_1, \dots, s_n$  noktaları bir  $D$  alanı üzerinde binom nokta süreci oluşturuyorsa, bu noktalar tarafından oluşturulan rassal örüntü  $N_{D(n)}$  ile gösterilir. Noktaların sıra dizimi göz ardı edilebilir ve  $N_{D(n)}$  rassal bir küme olarak değerlendirilebilir.

Binom nokta süreci TMR modeline yakın bir model olup tam anlamı ile eş bir model değildir. Bağımsızlık varsayımına rağmen  $D$  çalışma alanı üzerindeki nokta sayısının sabit ( $n$ ) olmasından dolayı model kuruluşu gereği mekânsal korelasyon içermektedir (Illian vd., 2008). TMR modeline yalnızca yaklaşımı tüm uzaya genelleyip, rassal sayıda noktalar varsayıldığında ulaşılabilir.

Binom nokta süreci  $N_{D(n)}$  adını dağılımsal özelliklerini taşıdığı binom dağılımından almaktadır. Eğer  $A, D$  çalışma alanının bir alt kümesi ise  $A$  kümesi üzerinde

rassal nokta sayısı  $N_{D^{(n)}}(A)$  ile gösterilecek ve  $N_{D^{(n)}}(A)$  ve  $p = p(A) = v(A)/v(D)$  ile aşağıdaki gibi binom dağılacaktır.

$$P(N_{D^{(n)}}(A) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, \dots, n. \quad (3.14)$$

Binom dağılımının ortalaması (ya da beklenen değeri)  $np$  olduğundan dolayı  $A'$  da bulunan ortalama nokta sayısı  $np = n \frac{v(A)}{v(D)} = \lambda v(A)$  olacaktır. Burada  $\lambda$ , binom nokta sürecinin yoğunluğu olarak adlandırılacak ve birim alan ya da hacimdeki ortalama nokta sayısı  $\lambda = n/v(D)$  ' nı ifade edecektir.

Yoksunluk olasılıkları bir nokta süreci önemli bir karakteristik değer niteliği taşımaktadır. Bu olasılıklar verilen bir  $K$  kümesindeki herhangi bir olayın gerçekleşmeyip olay sayının boş kümeye eşit olduğu durumla ilişkilidir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$P(N_{D^{(n)}}(K) = 0) = \frac{(v(D) - v(K))^n}{(v(D))^n} \quad (3.15)$$

Eşitlik (3.15)'deki  $P(N_{D^{(n)}}(K) = 0)$  olasılığı  $D$ 'nin bir alt kümesi olan  $K$  kümesinde hiçbir olay olmaması anlamına gelecektir.

Ayrıca,  $A_1, \dots, A_n$  kümeleri çalışma penceresi  $D$  ' yi oluşturan ayırık ve bütüne tamamlayan kümeler ( $A_1 \cup \dots \cup A_n = D$ ) ve olay sayıları toplamı  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  'e eşit iken binom nokta sürecine ilişkin sonlu boyutlu dağılımların formülü aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} P(N_{D^{(n)}}(A_1) = n_1, \dots, N_{D^{(n)}}(A_k) = n_k) \\ = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \frac{v(A_1)^{n_1} \dots v(A_k)^{n_k}}{(v(D))^n} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bu dağılım oldukça sık kullanılan  $p_1 = v(A_1)/v(D), \dots, p_n = v(A_n)/v(D)$  ve  $n$  parametreleri ile multinomial dağılımdır.  $A_1, \dots, A_n$  kümeleri kesişen kümeler olduğu durumda Eşitlik (3.13)'te verilen formül karmaşıklaşacaktır.



$D'$  nin alt kümelerinde bulunan nokta sayıları bu kümelerin ayrık olması durumunda dahi bağımsız değildirler. Bu durum kısacası  $N_{D^{(n)}}(A) = m$  iken  $N_{D^{(n)}}(D \setminus A) = n - m$  olduğundan kaynaklanacaktır. Diğer bir deyişle  $D$  üzerinde tanımlanan  $A$  altkümesinde  $m$  adet nokta var ise  $A'$  yı kapsayan  $D$  kümesi ile  $A'$  nın fark kümesinde  $n-m$  adet olay bulunacaktır. Dolayısı ile  $D$  alanının sabit sayıda nokta içermesinden kaynaklanmakta ve bir altkümede bulunan nokta sayısının bir başka altküme üzerindeki nokta sayısını etkilediği anlamına ve tam mekânsal rassallığın engellenmesi anlamına gelecektir. Buradan binom nokta sürecinin tam mekânsal rassallığı sağlayamadığı sonucu çıkartılabilir.

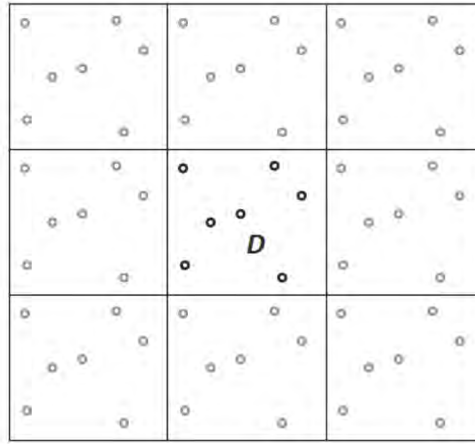
Yine kesikli istatistik dağılımı teorisinde binom dağılımının belirli koşullar altında poisson dağılımına yakınmasından yola çıkılarak elde edilecek olan poisson nokta süreci tam mekânsal rassallık örüntüsünün arka planındaki stokastik süreç olarak rol oynayacaktır. Bilinen Poisson limit teoremi sonucunda  $n$  sonsuza yakınsarken ikinci parametre olan  $p(A)$  nın sıfıra yakınsaması ile çarpım  $n.p(A)$  sabit kalacak  $n.p(A) = \lambda.v(A)$  eşitliği sağlanacaktır. Bu eşitliğin sağlanması sonucunda  $N_{D^{(n)}}(A)$  nokta süreci  $\lambda.v(A)$  ortalaması ile asimptotik poisson dağılımı gösterecektir. Bu limit  $n$  in sonsuza yakınsamasına izin verildiği durumda çalışma alanı olan  $D'$  nin tüm  $\mathbb{R}^d$  'ye yakınsaması ile elde edilir. Eğer  $n/v(D)$  oranı  $n$  artarken ve  $D$  çalışma alanı genişlerken sabit kalırsa, Poisson limiti  $D$  çalışma alanında tanımlanan her sınırlı ve sabit  $A$  altkümeleri için  $N_{D^{(n)}}(A)$  süreci için geçerli olacaktır.

Tam mekânsal rassallığın sağlanması için bir altkümeden gerçekleşen olay sayısının diğer bir altkümede gerçekleşen olay sayısını tahmin edilmesine etki etmeyen uygun bir olasılık dağılımının ele alınması gerekmektedir. (3.16) nolu eşitlikteki verilen sürece ilişkin modelin, limit teoremin sağlanması durumunda  $A_1, \dots, A_n$  kümeleri ayrık kümeler iken her bir kümedeki olay sayıları  $N(A_1), \dots, N(A_k)$  birbirinden bağımsız olduğu durumun tam mekânsal rassallık için doğru bir model olacağı çıkarımı yapılabilir.

### 3.4.2. Periyodik binom süreci

$D$  dikdörtgeninin sol alt köşe noktası orijin  $o$  noktası üzerinde olsun ve kenar uzunlukları  $a$  ve  $b$  olup  $x$  ve  $y$  eksenlerine sırası ile paralel olan bir dikdörtgen olduğu

varsayalım.  $D$  dikdörtgeni birim kareye dönüştürüldüğünde dağılımsal özellikleri çok fazla değişiklik göstermeyecek ve  $x_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$  noktaları  $x_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$  noktalarına dönüşecektir. Birim kare içinde oluşan nokta süreci periyodik olarak düzlem içinde kendini diğer birim kareler içinde de tekrar ettiği düşünülün. Diğer bir deyişle orijinal  $x_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$  noktaları kendi sonsuz kopyalarını tüm  $k$  ve  $l$  tam sayıları için oluşturacaktır. Bu örüntü noktaları tam sayılı koordinatlardan tam sayılı koordinatlara dönüştüren dönüşümleri içeren dönüşümler altında değişim göstermeyecektir.



**Şekil 3.7.** Periyodik binom sürecine ilişkin bir örnek. (Illian vd., 2008)

Periyodik binom sürecine ilişkin bir örüntü Şekil 3.7' de verilmiştir. Şekildeki her bir karedeki örüntü birbiri ile eştir.

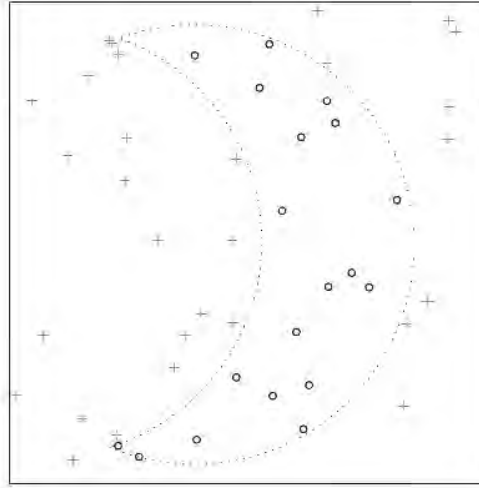
### 3.4.3. Binom sürecinin benzetimi

Benzetim nokta süreçlerinde önemli bir yöntemdir. İstatistiksel çıkarımlar yapabilmek amacı çoğu zaman bir nokta süreci modelinden benzetim yapmak gerekmektedir. Binom nokta sürecinin benzetimi istenilen bölgeye noktaların rassal noktaları birbirinden bağımsız olarak yerleştirilmesi ile kolay bir şekilde gerçekleştirilebilir. Birim karede düzgün dağılım gösteren rassal bir noktanın benzetimini yapmak oldukça basittir.  $\{u_n\}$ ,  $[0,1]$  aralığında düzgün dağılım gösteren bağımsız rassal sayılar dizisi iken  $x_i = (u_{2i-1}, u_{2i})$  noktaları  $i = 1, 2, \dots$ , için birim karede düzgün dağılım gösteren bir diziden üretilmiş olan rassal noktalar olacaktır.

Süreç  $\mathbb{R}^d$  için genellenmek istenirse  $d$  boyutlu  $[0,1]^d$  aralığında hiperküp için düzgün dağılım gösteren rassal noktalar dizisi aynı mekanizma ile  $i=1,2,\dots$  için  $x_i = (u_{(i-1)(d+1)}, \dots, u_{id})$  üretilecektir.

Bazı uygulamalarda yukarıda verilen benzetim sürecinin uygulanması mümkün değildir. Yukarıda bahsedilen süreç dikdörtgensel ya da küp şeklinde verilen düzgün çalışma alanları için geçerlidir. Fakat uygulamalarda oldukça karmaşık çalışma alanları benzetim sürecinin uygulanmasını zorlaştırmaktadır. Düzgün bir rassal noktanın türetilmesi için düzlemsel bir çalışma alanını göz önüne alan 3 adet farklı teknik kullanılmaktadır. Bu teknikler daha büyük boyutlar için genelleştirilebilmektedir.

- a. *Kabul-Red Yöntemi.*  $D$  alanını içine alan bir  $R$  dörtgeni ele alınır ve bağımsız düzgün dağılım gösteren rassal noktalar  $R$  dörtgeni için üretilir. Bu noktalar  $D$  alanı içine düşmediğinde reddedilecek,  $D$  alanı içinde yer aldığı zaman ise bu alanda düzgün dağılım gösteren noktalar üretilmiş olacaktır. Süreç  $n$  adet nokta türetilene kadar devam edecektir. Sürecin etkinliğini arttırmak amacı ile  $R$  dörtgeni olabildiğince küçük seçilmelidir.



Şekil 3.8. Binom nokta süreci için kabul-red yöntemi (Illian vd., 2008)

Şekil 3.8’de  $D$  alanını çevreleyen  $R$  dörtgeni içinde kabul-red yöntemi ile düzgün dağılım gösteren noktalar üretilmiştir. + ile gösterilen noktalar çalışma alanı  $D$  dışında olduğu için reddedilmiştir.

- b. *Yakınsama.*  $D$  alanını eşit ya da farklı boyutlarda  $k$  adet ayırık karelerin alanı toplamı gibi düşünülerek  $D$  için yakınsama yapılır. Bu toplam alanda düzgün

dağılım gösteren bir nokta, herhangi bir karenin alanının toplam alana oranı olasılığı ile seçilen bir kare üzerinde rassal bir noktanın üretilmesi ile türetilir.

Karmaşık çalışma alanları için kesin benzetimler kabul-red tekniği ile bu tekniğin birlikte kullanılması ile elde edilebilir.

- c. *Koordinat dönüşümü.* Eğer çalışma alanı  $D$  simetri gösteriyor ise koordinat dönüşümü yapmak yararlı olabilir. Eğer  $D$ ,  $b(o,1)$  ile bir birim disk iken kutupsal koordinatlarda düzgün bir rassal nokta aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x = (r, \theta) \quad \theta \in (0, 2\pi] \text{ ve } r \in [0, 1] \text{ aralığında} \quad (3.17)$$

$\theta$ ,  $(0, 2\pi]$  aralığında düzgün dağılım gösterdiğinde ve  $r$   $P(r \leq t) = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 1$  eşitliğini sağladığında  $r$  ve  $\theta$  bağımsız olacaklardır. Bu nedenle eğer  $u_1$  ve  $u_2$   $[0, 1]$  aralığında düzgün dağılım gösteren rassal sayılar iken  $r = \sqrt{u_1}$  ve  $\theta = 2\pi u_2$  formülleri  $x = (r, \theta)$  için benzetim yöntemi olarak ele alınabilecektir.

#### 3.4.4. Tek boyutlu Poisson süreci

Sürecin tek boyutlu halinin anlatılması mekânsal poisson sürecinin anlaşılması açısından önem arz ettiğinden dolayı öncelikle tek boyutlu poisson sürecinin anlatımı uygun görülmüştür. Poisson nokta süreci (mekânsal poisson süreci) daha önce de bahsedilen özelliklerinden dolayı mekânsal nokta süreci teorisinde önemli bir yere sahiptir.

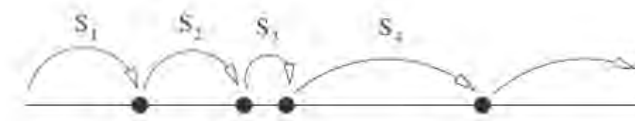
Tek boyutlu nokta süreçleri ile çok boyutlu nokta süreçleri arasında önemli teorik farklılıklar bulunmaktadır. Bu farklılıkların nedeni ise zamanın tek boyutluluğu ve zamanın tek boyutluluğu nedeni ile doğal bir sıralama içermesinden kaynaklanmaktadır. Çok boyutta ise böyle bir sıralama söz konusu değildir. (Baddeley, 2007, s. 3)

Tek boyutlu bir nokta süreci matematiksel açıdan birçok şekilde değerlendirilebilir. Genellikle literatürde  $T_1 < T_2 < \dots$  varış zamanları çalışılmaktadır. Burada  $T_i$ ,  $i$ . noktaya ulaşma zamanı (işlenen suçlar, acil aramalar vb.) olarak tanımlanmaktadır. Bu rassal değişkenlerin kullanımı bir nokta örüntüsünün incelenmesinin en basit yoludur fakat bu rassal değişkenlerin kullanımı büyük ölçüde birbirine bağımlı olduklarından dolayı  $(T_i < T_{i+1})$  karmaşıklaşacaktır.



Şekil 3.9. Varış zamanları (Baddeley, 2007)

Alternatif olarak varış süreleri arasındaki zamanlar  $S_i = T_{i+1} - T_i$  incelenebilir. Varış süreleri arasında geçen zamanların rassal değişken olarak ele alındığı bazı modellerde (poisson ve yenilenme süreçleri gibi)  $S_1, S_2, \dots$  rassal değişkenleri bağımsız olma avantajına sahiptirler.

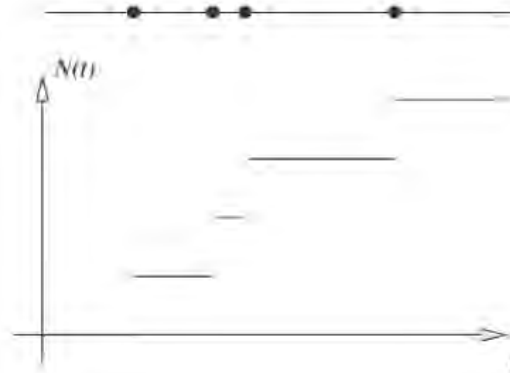


Şekil 3.10. Varış süreleri arasında geçen zamanlar (Baddeley, 2007)

Bir nokta süreci kümülatif olarak bir sayma süreci şeklinde formüle edilebilir.

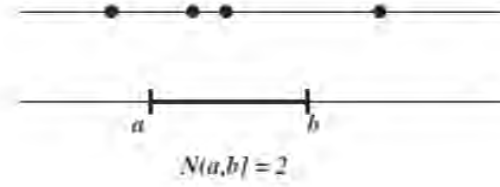
$$N_t = t \text{ zamanına kadar gerçekleşen olay (nokta) sayısı} \\ = \sum_{i=1}^{\infty} 1\{T_i \leq T_{i+1}\} \quad \forall t \geq 0 \quad \text{için} \quad (3.18)$$

Eşitlik (3.18)'deki  $1\{\dots\}$  fonksiyonu, “...” ifade doğru ise 1 değeri, aksi halde 0 değerini alan gösterge fonksiyonudur. Bu yöntem yardımı ile süreç sürekli bir  $t$  zamanının rassal fonksiyonuna dönüştürülebilir. Fakat fonksiyon değişik  $t$  değerleri için alacağı  $N_t$  değerlerinin bağımlı olması dezavantajına sahip olacaktır.



Şekil 3.11. Bir nokta sürecine ilişkin  $N_t$  sayma süreci (Baddeley, 2007)

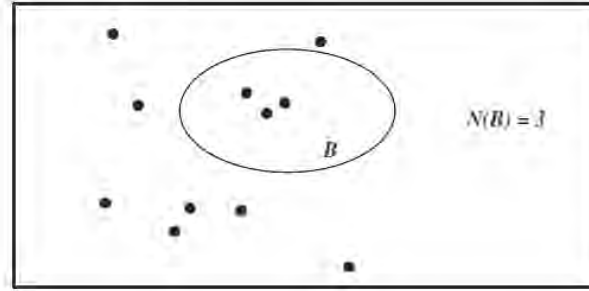
Başka bir seçenek olarak belirli bir aralıkta yer alan olay sayıları sayma sürecine konu olabilir.  $N(a,b] = N_b - N_a$  aralık süreci,  $0 \leq a \leq b$  için  $(a,b]$  aralığındaki nokta sayısını sayacaktır.



Şekil 3.12. Bir nokta süreci için  $N(a,b]$  aralık sayımı (Baddeley, 2007)

Yüksek boyutta noktaların tek boyutlu zaman gibi doğal sıralanması söz konusu değildir. Dolayısı ile gelişler arası zaman  $S_i$  ve sayma süreci  $N_i$  'nin analogları yapılamayacaktır. Bunun yerine mekânsal bir nokta sürecini değerlendirmenin en kullanışlı yolu aralık sayımı  $N(a,b]$  'yi bölge sayımına genelleştirmek olacaktır.

$N(B) = B$  bölgesine düşen nokta sayısı olmak üzere bölge sayımı sınırlı kapalı küme  $B \subset \mathbb{R}^d$  için tanımlanır.



Şekil 3.13. Bir mekânsal nokta süreci için  $N(B)$  sayma süreci (Baddeley, 2007)

Tek boyutlu zamanda poisson nokta süreci aşağıdaki koşulları sağlar.

1. Verilen bir zaman aralığında gerçekleşen olay sayısının beklenen değeri aralığın uzunluğu ile doğru orantılıdır.  $\lambda > 0$ , burada sürecin yoğunluğu ya da sıklığı olarak tanımlanır.  $E(N(a,b]) = \lambda(b-a)$
2. Birbiri ile çakışmayan zaman aralıklarında gerçekleşen olay sayıları birbirinden bağımsızdır: Eğer  $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_m < b_m$  ise  $N(a_1, b_1], \dots, N(a_m, b_m]$  rassal değişkenleri birbirinden bağımsızdır.

3. Bir zaman aralığında iki ya da daha çok olay meydana gelme olasılığı aralık genişliği küçüldükçe “0” a yakınsar.  $P(N(a+h) - N(a) \geq 2) = o(h) \quad h \downarrow 0$
4. Sürecin “0” anında gerçekleşen olay sayısı sıfırdır.  $N(0) = 0$

Bu varsayımlar bir kozmik parçacığın parçacık detektörüne ulaşması ya da büyük bir şehirde gerçekleşen kazalar için gerekli varsayımlardır. Bu varsayımlardan yola çıkılarak belirli bir zaman aralığında ulaşan noktaların (gerçekleşen olay sayılarının) dağılımı Poisson dağılımı olacaktır.

$$N(a, b] \sim \text{Poisson}(\lambda(b-a)) \quad (3.19)$$

Burada  $\text{Poisson}(\lambda)$ , aşağıda olasılık fonksiyonu verilen  $\lambda$  ortalamalı poisson dağılımıdır.

$$P(N = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Bu sonuca  $(a, b]$  aralığını büyük bir sayı olan  $n$  adet parçaya bölünmesi ardından ulaşılabilecektir. Aralığın  $n$  adet parçaya bölünmesi ile oluşan küçük aralıklardaki olay sayıları küçük bir olasılık ile gerçekleşen bazı olayların dışında “0” ya da “1” olacaktır.  $N(a, b]$ ,  $(a, b]$  aralığında olay sayılarının toplamı olduğundan dolayı yaklaşık olarak binom dağılımına sahip olacaktır. İlgili aralık  $n \rightarrow \infty$  sonsuz sayıda parçaya bölündüğü durumda araştırılan dağılım Poisson dağılımına sahip olacaktır.

Sürecin diğer önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. Olayların gerçekleşme süreleri arasındaki zaman (varış süreleri arasındaki zaman)  $S_i$  rassal değişkeni,  $\beta$  parametresi ile üstel dağılıma sahip olacaktır.  
 $P(S_i \leq s) = 1 - e^{-\beta s}, s > 0$
2. Olayların gerçekleşme süreleri arasındaki zaman (varış süreleri arasındaki zaman) birbirinden bağımsız olacaktır.
3. i. varış süresi (i. olayın gerçekleşme süresi)  $T_i$ ,  $\alpha = i$  ve  $\beta$  parametreleri ile Gamma ya da Erlang dağılımına sahiptir.  $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilecektir.

$$f(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} \quad t > 0 \quad (3.21)$$

$$= 0 \quad \text{d.d}$$

Yukarıda verilen 1. ve 2. özellikler  $[0, \infty)$  pozitif reel sayılar üzerinde Poisson sürecinin benzetiminin gerçekleştirilmesinde kolaylık sağlayacaktır. Üstel dağılım gösteren varış süreleri arasındaki zamanların toplamı i. veya daha sonraki varış süresini verecektir. Dolayısı ile öncelikle bağımsız üstel dağılan değişkenler dizisi  $S_1, S_2, \dots$  türetilip varış zamanı  $S_1, S_2, \dots$  değişkenlerinin toplamı olarak  $T_i$ , ( $T_i = \sum_{1 \leq j \leq i} S_j$ ) olarak sürecin benzetimi yapılabilecektir.

### 3.4.5. Homojen Poisson Nokta Süreci ( Mekânsal Poisson süreci )

Homojen bir Poisson nokta süreci  $N, \mathbb{R}^2$ , de aşağıda verilen iki karakteristik özelliğe sahiptir.

1. Nokta sayıları poisson dağılım gösterecektir.  $N$  'deki nokta sayısı,  $D$  çalışma alanının bir alt kümesi olan her sınırlı  $B$  kümesi için  $\lambda$  pozitif bir sabit sayı iken  $\lambda \cdot \nu(B)$  ortalaması ile Poisson dağılımına sahip olacaktır.
2.  $N$  'deki noktalar bağımsız saçılım özelliğine sahiptir.  $N$  'deki nokta sayıları keyfi sayıdaki  $k$  adet ayrık küme için  $k$  adet bağımsız rassal değişken oluşturacaktır.  $B_1, B_2, \dots, B_k$  ayrık kümeler iken  $N(B_1), N(B_2), \dots, N(B_k)$  sırası ile bu kümelerdeki nokta sayıları birbirinden bağımsız olacaktır.

İkinci özellik tam rassallık özelliği olarak bilinmektedir. Buradaki dikkate değer nokta ilk özelliğin sağlanmasının ikinci özelliğin de sağlanması anlamına geleceğidir. Fakat bu önermenin tersi doğru değildir.  $B$  'deki olay sayıları değişen mekânsal yoğunluklar ile poisson dağılımı gösterebilir fakat olay sayıları ayrık kümeler için bağımsız olarak kalabilir. Bu yüzden 1. ve 2. Özelliklerin kombinasyonu tam mekânsal rassallığın tanımı olarak ifade edilmektedir. (Schabenberger & Gotway, 2005)

Bir mekânsal rassal sürecin (birinci derece) yoğunluğu  $\lambda(s)$  ' in birim alan ya da birim küplük hacimde bulunan ortalama nokta sayısı olduğundan bahsedilmişti. Bu yoğunluk alan bazında  $D$  üzerindeki noktaların bir fonksiyonu olarak ele alındığından bir limit şeklinde tanımlanacaktır. “ $ds$ ”  $\mathbb{R}^d$  'de merkezi  $s$  olan son derece küçük bir alan (disk) iken  $\lambda(s)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\lambda(s) = \lim_{\nu(ds) \rightarrow 0} \frac{E[N(ds)]}{\nu(ds)} \quad (3.22)$$



$N$ ,  $\lambda$  yoğunluklu bir homojen poisson süreci iken sürecin dağılımı üstte bahsedilen 1. ve 2. özelliklerden yola çıkarak elde edilebilir. Özellik birden yola çıkarak tek boyutlu dağılımlar için süreç aşağıdaki dağılıma sahip olacaktır.

$$P(N(B) = n) = \frac{\lambda^n (\nu(B))^n}{n!} \exp(-\lambda \nu(B)) \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.23)$$

$A_1, A_2, \dots, A_k$   $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = D$  ayrık sınırlı kümeleri için  $N(B_1), N(B_2), \dots, N(B_k)$  süreçleri sırası ile  $\lambda \nu(B_1), \lambda \nu(B_2), \dots, \lambda \nu(B_k)$  ortalamaya sahip sürece ilişkin sonlu çok boyutlu dağılım 1 ve 2 nolu özelliklerden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikte verilecektir.

$$P(N(B_1) = n_1, \dots, N(B_k) = n_k) = \frac{\lambda^{n_1 + \dots + n_k} (\nu(B_1))^{n_1} \dots (\nu(B_k))^{n_k}}{n_1! \dots n_k!} \exp\left(-\sum_{i=1}^k \lambda \nu(B_i)\right) \quad (3.24)$$

Homojen Poisson süreci daha önce tanımlanan 1. ve 2. özellikler ve spesifikleşmiş  $\lambda$  yoğunluğu ile tanımlanmıştır. Bu özellikler ve  $\lambda$  'nın karakteristiğinden dolayı Homojen Poisson süreci dönüşüm ve döndürmeye karşı değişmezlik gösterecektir. Bu nedenle Homojen Poisson süreci  $N$  eşyönlü ve durağanlık özelliğine sahip olup hareket değişmez bir nokta süreci olarak değerlendirilecektir.

Poisson süreci bu özelliklere ek olarak lineer dönüşümlere karşı “korunum özelliğine” sahiptir. Bu özellik sayesinde sürecin esas özellikleri korunurken sadece  $\lambda$  yoğunluğu değişim gösterecektir. Bu özelliğe verilebilecek en güzel örnek havadan resmi çekilen bir ağaç örüntüsüdür. Resimlerin farklı açıdan ve yükseklikten çekildiği düşünüldüğünde ana örüntünün lineer dönüşümü olan farklı örüntüler meydana gelecektir. Eğer gerçek örüntü bir Poisson süreci ise dönüştürülmüş tüm süreçler de poisson süreci niteliğinde olup değişik yoğunluklara sahip olacaktır.

Yokluk olasılığı bir nokta sürecinin önemli bir karakteristiğidir. Daha sonra değinilecek olan süreçlerin eşitliği konusunda önemli bir role sahiptir. Homojen Poisson nokta süreci için yokluk olasılığı çalışma alanı içinde poisson dağılımına sahip herhangi bir noktanın bulunmamasının (olayın gerçekleşmemesinin) olasılığı olarak tanımlanacaktır. Süreç için yokluk olasılığı aşağıdaki eşitlikte verilmiştir.

$$\nu_K = P(N(K) = 0) = \exp(-\lambda \nu(K)) \quad (3.25)$$

Homojen Poisson süreci ile ilgili diğer önemli konular ise sürecin benzetimi ve binom süreci ile ilişkisidir.

### 3.4.6. Süreç eşitliği

Tanımlanan birinci derece yoğunluk  $\lambda(s)$  ve daha henüz tanımlanmamış olan ikinci derece yoğunluk  $\lambda_2(s_i, s_j)$  bir mekânsal nokta sürecinde sırası ile ortalama ve bağımlılık yapısını (kovaryans) temsil etmektedirler. İki rassal değişken  $X$  ve  $Y$ 'nin birlikte dağılımları için ortalama ve kovaryans tam bir tanım ifade etmediği gibi değinilen iki yoğunluk ölçümü de bir nokta sürecinin tam anlamda tanımı için yeterli değildir. Farklı süreçler aynı yoğunluk ölçümlerine sahip olabilirler. Dolayısı ile iki sürecin eşitliğinin belirlenmesi için bu süreçlerin dağılımsal özellikleri incelenmelidir. (Schabenberger & Gotway, 2005, s. 85)

Cressie (1993, s. 625), iki basit nokta süreci için eşitlik teoremini ispatlamıştır. Teoremden sayma ölçümleri sırası ile  $N_1$  ve  $N_2$  olan iki basit nokta sürecinin ancak ve ancak sonlu boyutlu dağılımlarının  $k$  tam sayısının tüm değerleri ve  $A_1, A_2, \dots, A_k$  kümeleri için aynı olması ve bu süreçlerin yoksunluk (yokluk) olasılıklarının aynı olması durumunda eş dağılıma sahip olacağı ifade edilmiştir.

Eşitlik teoremi  $D$  alanı üzerinde binom nokta süreci ve homojen poisson nokta sürecinin toplam olay sayısına koşullandırıldığı durumda eşitliklerini ispat etmek amacı ile uygulanabilir. Binom nokta süreci  $N(A)$ ,  $n$  ve  $p(A)$  parametreleri ile binom dağılımına sahiptir. Dolayısı ile yokluk olasılığı binom süreci aşağıdaki eşitlikte verilecektir.

$$P(N(A) = 0) = (1 - p(A))^n = \frac{(v(D) - v(A))^n}{(v(D))^n} \quad (3.26)$$

Bir  $M(A)$  süreci homojen poisson nokta süreci olsun. Sürece ilişkin yokluk olasılığı  $P(M(A) = 0) = \exp(-\lambda \cdot v(A))$  şeklinde elde edilir. Yokluk olasılığı  $M(D) = n$  sürecine koşullandırıldığı durumda binom sürecinin yokluk olasılığı elde edilecektir. Dolayısı ile bu koşullu süreç binom sürecine eş olacaktır.

$$\begin{aligned}
P(M(A)=0|M(D)=n) &= \frac{P(M(A)=0)P(M(D \setminus A)=n)}{P(M(D)=n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda v(A)} [\lambda v(D \setminus A)]^n e^{-\lambda v(D \setminus A)}}{[\lambda v(D)]^n e^{-\lambda v(D)}} \\
&= \frac{v(D \setminus A)^n}{v(D)^n} = \left[ \frac{v(D) - v(A)}{v(D)} \right]^n
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Aynı şekilde Eşitlik (3.26) sonlu boyutlu dağılımlar için de geçerlidir. Sonlu boyutlu homojen poisson süreci Eşitlik (3.23)'te verilmişti. Sonlu boyutlu homojen poisson sürecinin  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  ve  $A_1, A_2, \dots, A_k$  ayrık kümeleri  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = D$  iken toplam olay sayısına koşullandırıldığında elde edilen süreç sonlu boyutlu binom sürecine eş olacaktır. Sonlu boyutlu süreç eşitliği eşitlik (3.28)'de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
&P(N(A_1)=n_1, \dots, N(A_k)=n_k | N(D)=n) \\
&= \frac{P(N(A_1)=n_1, \dots, N(A_k)=n_k) \cap P(N(D)=n)}{P(N(D)=n)} \\
&= \frac{P(N(A_1)=n_1, \dots, N(A_k)=n_k)}{P(N(D)=n)} \\
&= \frac{\frac{\lambda^{n_1+\dots+n_k} (v(A_1))^{n_1} \dots (v(A_k))^{n_k} \exp\left(-\sum_{i=1}^k \lambda v(A_i)\right)}{n_1! \dots n_k!}}{\frac{\lambda^n \exp(-\lambda v(A))}{n!}} \\
&= \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \frac{v(A_1)^{n_1} \dots v(A_k)^{n_k}}{(v(D))^n}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

### 3.4.7. Homojen Poisson nokta sürecinin benzetimi

Homojen Poisson nokta sürecinin benzetimi çeşitli nedenlerden dolayı önem taşımaktadır. Poisson süreci birçok karmaşık süreç için temel süreç niteliğini taşımaktadır. Bu süreçler yalnızca benzetim yöntemi ile açıklanabilmektedir. Dolayısı ile bu süreçlerin benzetimi poisson sürecine dayanmaktadır. Bazı durumlarda poisson sürecinin karakteristiklerinin elde edilmesi zor olacaktır. Ayrıca nokta süreçlerinde süreçlere ilişkin benzetimin kullanımını teşvik etmek ve süreçlerin kolay bir şekilde anlaşılmasını sağlamak bu nedenler arasındadır.

Bir homojen poisson nokta sürecinin benzetimi için başlangıç noktası daha önceki süreç eşitliği bölümünde de açıklandığı üzere sınırlı  $D$  çalışma alanı içindeki toplam nokta sayısı biliniyor ise sürecin toplam nokta sayısına koşullandırılması ile binom nokta süreci elde edilecektir. Bu sonuçtan yola çıkarak toplam nokta sayısı belirtildiğinde binom süreci için kullanılan benzetim yöntemleri homojen poisson nokta süreci için de kullanılabilir.

Homojen Poisson nokta sürecinin benzetimi iki aşamadan oluşacaktır. İlk aşamada  $D$  çalışma alanı içindeki nokta sayısı bir Poisson rassal dağılmış değişken tarafından belirlenir. Daha sonra  $D$  çalışma alanı içindeki noktaların konumları ilk aşamada belirlenen sayıda nokta için binom nokta sürecinin benzetimi yapılarak elde edilir

İlk aşamada iki farklı yöntem kullanılabilir. Eğer  $\lambda \nu(D)$  küçük ise tek boyutlu poisson süreci daha önce ifade edildiği gibi üstel dağılmış rassal değişkenler toplamı olarak süreç türetililecektir. Eğer  $\lambda \nu(D)$  büyük ise kabul-red yöntemi kullanılabilir. Bu durumda alternatif bir yöntem olarak merkezi limit teoreminden yararlanılabilir. Merkezi limit teoremi yardımı ile büyük  $\lambda$  değeri için poisson dağılımı  $\lambda$  ortalama ve  $\lambda$  varyansı ile normal dağılıma yakınsar. Buradan yola çıkarak normal dağılım için veri türetme yöntemleri kullanılıp türetilen rassal sayı tam sayı değere yuvarlanabilir.

### 3.4.8. Homojen olmayan Poisson nokta süreci

Homojen Poisson süreci heterojenliğin gerçekleştirilip homojen olmayan Poisson sürecini elde etmek amacıyla genelleştirilebilir. Bunu sağlamak için homojen poisson dağılımına ait çalışma alanı içinde değişmeyen sabit  $\lambda$  yoğunluğu  $\lambda(s)$  gibi değerleri  $s$  konumuna bağlı olarak değişen bir yoğunluk fonksiyonu ile değiştirilmelidir. Dolayısı ile yoğunluğun yüksek olduğu yerde daha çok sayıda olay konumlanırken daha az sayıda olay  $\lambda(s)$  ' in düşük olduğu noktalarda meydana gelecektir. Sonuç olarak kümelenmiş bir örüntü meydana gelecektir. Homojen olmayan poisson süreci Bölüm 3.4.4' de verilen homojen Poisson nokta surecindeki 1. özelliğin değişmesi ile gerçekleşecektir. Homojen olmayan Poisson nokta sürecinin özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. Nokta sayılarının poisson dağılımı: Herhangi bir sınırlı  $D$  kümesinde  $N$  nokta süreci  $\mu(D) = \int_D \lambda(x) dx$  ortalaması ile poisson dağılımına sahip olacaktır.

2. Bağımsız saçılım:  $N$  nokta sürecindeki noktaların rassal sayıları keyfi  $k$  sabit sayısı için  $k$  adet ayrık kümede bağımsız rassal değişkenlerdir.

$D$  çalışma alanı içerisinde gerçekleşen sonlu bir nokta süreci iki şekilde karakterize edilebilir. Bunlardan ilki  $p_n = P(N(D) = n)$  şeklinde kesikli bir olasılık fonksiyonudur. Diğer bir karakterizasyon şekli ise argümanlarında simetrik ve çok değişkenli olasılık fonksiyonları ailesinden bir fonksiyon olan  $f_n(x_1, \dots, x_n)$  konum yoğunluk fonksiyonudur. Bu fonksiyonun argümanlarında simetriklik özelliği bir nokta sürecinde noktaların sıralarının önemli olmaması anlamına gelmektedir. Diğer bir deyişle noktaların sırasından bağımsız olarak konum yoğunluk fonksiyonları aynı değeri alırlar. Konum yoğunluk fonksiyonlarını daha iyi anlaşılması için bir örnek verilebilir.  $n$  adet olabildikçe küçük  $dx_1, \dots, dx_n$  hacimli  $x_1, \dots, x_n$  farklı noktalarda merkezi olan  $b_1, \dots, b_n$  küreleri ele alınsın.  $f_n(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n$  büyüklüğü  $N(D) = n$  koşulu altında yani nokta sürecinde  $n$  nokta olduğu bilindiğinde ilk noktanın  $b_1$  küresinde ve aynı şekilde  $n$ . noktanın  $b_n$  küresi içerisinde yer alması anlamına gelecektir. Diğer bir taraftan  $x_1, \dots, x_n$  noktalarının her birini bir  $b_i$  'de gözlemleme olasılığı  $p_n n! f_n(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n$  olarak gerçekleşecektir.  $p_n$  olasılığı burada nokta sayılarının rassal olduğundan ve faktöriyel ise  $n$  noktaya ilişkin tüm permütasyonların aynı konum yoğunluk fonksiyonu değerini vereceğinden dolayı belirtilen olasılıkta yer almaktadır.  $p_n n! f_n(x_1, \dots, x_n)$  yoğunluk fonksiyonu sonlu nokta sürecine ilişkin benzerlik fonksiyonudur ve  $x_1, \dots, x_n$  nokta örüntüsünün ilişkin model parametrelerinin tahminlenmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

$N$  sürecinde bir  $D$  sınırlı kümesi içindeki noktaların koşullu dağılımı  $N(D) = n$  verildiğinde homojen poisson dağılımı gibi tekdüze değildir.  $n$  noktaya ilişkin konum yoğunluk fonksiyonu

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(x_i)}{\Lambda(D)} \quad x_1, \dots, x_n \in D \quad (3.29)$$

$\Lambda(D) = \int_D \lambda(x) dx$  olmak üzere verilmiştir. Burada  $n$  adet nokta olasılık yoğunluk fonksiyonu  $\lambda(x)$  ile orantılı olarak  $n$  adet bağımsız nokta örnekleme oluşturacaktır.

### 3.4.9. Mekânsal nokta süreçlerinde bazı işlemler

Var olan bir nokta sürecine tanımlanan bazı işlemlerin uygulanması ile yeni bir nokta süreci elde edilebilir. Bu temel işlemlerden en önemli olanları üst üste koyma, inceltme ve kümelenme işlemleridir. Eğer  $Z_1(s), Z_2(s), \dots, Z_k(s)$  nokta süreçleri ise onların üst üste konulmasından elde edilen  $Z(s) = \bigcup_{i=1}^k Z_i(s)$  'de bir nokta sürecidir. Eğer  $Z_i(s)$  'ler  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  yoğunlukları ile karşılıklı bağımsız homojen poisson sürecine sahip ise onların üst üste konulması ile elde edilen  $Z(s)$  'de  $\sum_{i=1}^k \lambda_i$  yoğunluğu ile homojen poisson sürecine sahip olacaktır.

Süreçlerin birleştirilmesinden daha önemli olarak görülen bir diğer işlem ise süreçteki noktalardan bazılarının belirli bir  $p$  olasılığına göre elenmesi işlemi olan inceltme işlemidir. Stoyan, Kendall ve Mecke (1995) inceltme türlerini 3 grupta incelemişlerdir.

- **$p$ - inceltmesi.** Nokta örüntüsündeki her bir nokta  $1-p$  olasılığı ile elenmekte ve  $p$  olasılığı ile süreçte tutulmaktadır. Noktaların tutulmasına ilişkin kararlar başarı olasılığı  $p$  olan  $N(A)$  bağımsız Bernoulli denemesi ile temsil edilebilir.
- **$p(s)$  inceltmesi.** Bu inceltme türünde tutulma olasılıkları  $0 \leq p(s) \leq 1$  eşitsizliği ile verilen deterministik bir fonksiyon yardımı ile verilmektedir.
- **$\pi$  inceltmesi.** Bu inceltme türünde kullanılan fonksiyon stokastik bir fonksiyondur. İnceltme işlemi rassal bir fonksiyon  $\pi(s)$  'den örneklenen  $p(s)$  'e  $p(s)$  inceltmesinin uygulanması ile sağlanır.

İnceltme işlemlerinin sonucunda oluşan süreçler ile inceltme işleminin uygulandığı süreç arasında özellikleri bakımından bir ilişki bulunmaktadır. Dolayısı ile inceltme işlemi mekânsal nokta süreçlerine uygulanan önemli bir süreçtir. Genellikle özellikleri daha iyi anlaşıldığından dolayı inceltme işlemi homojen poisson nokta sürecine uygulanmaktadır.

Örneğin homojen-olmayan bir poisson nokta süreci homojen bir poisson nokta sürecine  $p(s)$  inceltmesi uygulanarak oluşturulabilir. Eğer  $\lambda$  yoğunluğuna sahip bir poisson nokta süreci  $Z(s)$ ,  $p(s)$  inceltmesi ile inceltirirse sonucunda oluşan  $Z^*(s)$

süreci de  $\lambda p(s)$  yoğunluğu ile bir poisson süreci olacaktır.  $D$  alanı üzerinde homojen olmayan bir poisson nokta süreci türetmek için öncelikle  $D$  üzerinde yoğunluğu  $\lambda = \max_A \{\alpha(s)\}$  olan homojen bir poisson nokta sürecinin üretilmesi ile başlanmalıdır.  $p(s) = \alpha(s)/\lambda$  olasılığı ile orijinal süreçteki noktaların tutulması inceltmek kuralı olarak benimsenir. Böylelikle heterojen yoğunlukları sahip bir poisson süreci elde edilmiş olur. Bu şekilde homojen- olmayan poisson nokta sürecinin benzetimi Lewis-Shedler algoritmasının temelini oluşturur. (Lewis & Shedler, 1979)

İnceltilmiş süreçlerin belirli özellikleri maddeler halinde aşağıdaki gibi verilecektir (Schabenberger & Gotway, 2005).

1. Eğer  $\mu(A) = \int \lambda(s) ds$  orijinal sürecin yoğunluğu ve  $\mu^*(A)$  inceltilmiş sürecin yoğunluğu ise  $p(s)$  inceltmesi ile  $\mu^*(A) = \int p(s) \mu(ds)$  olur.
2. Eğer orijinal süreç  $\lambda$  yoğunluğuna sahip ise inceltilmiş sürecin yoğunluğu  $\lambda^*(s) = \lambda p(s)$  olacaktır.  $\lambda$  yoğunluğuna sahip bir sürece  $\pi$  inceltmesi uygulandığında oluşan sürecin yoğunluğu ise  $\lambda E[\pi(s)]$  olacaktır.
3. Eğer  $Z(s)$ ,  $p(s)$  inceltmesine konu olan poisson süreci ise inceltilmiş süreç  $Z^*$  ve silinen noktalardan oluşan  $Z \setminus Z^*$  süreci sırası ile  $\lambda p(s)$  ve  $\lambda(1-p(s))$  yoğunlukları ile bağımsız poisson süreçleridir. (Moller & Waagepetersen, 2003, s. 23)
4. Durağan bir sürece  $p$  inceltmesi yapıldığı takdirde durağanlık özelliğine korunacaktır. Eğer durağan bir süreç  $p(s)$  inceltmesine tabi tutulursa durağanlık özelliği korunmayacaktır. Durağan bir sürece  $\pi$  inceltmesi uygulandığında oluşan poisson süreci  $\pi(s)$  rassal alanı durağan ise durağan kalacaktır.
5. Bir nokta sürecinin  $K$  fonksiyonu  $p$  inceltmesinden etkilenmemektedir. Sürecin yoğunluğu ve keyfi bir olaydan  $h$  kadar uzaklıkta yer alan ekstra olay sayısının beklenen değeri aynı faktör ile küçültülecektir.
6. Bir poisson sürecinden  $\pi$  inceltmesi ile Cox süreci elde edilecektir.

Homojen-olmayan bir poisson sürecinde nokta örüntüsünün kümelenmiş bir görüntüye sahip olması çalışma alanında yoğunluğun düşük olduğu yerlere kıyasla yüksek olduğu yerlerde birim alanda daha fazla olay yer almasından kaynaklanmaktadır.

Bu yüzden stokastik ya da deterministik konuma bağlı bir olasılık fonksiyonu ile inceltme işlemi homojen bir poisson nokta sürecine uygulandığında kümelenmiş örüntülerin oluşmasına yol açmaktadır. Yüksek tutulma olasılığına sahip bölgelerde olayların olasılık yoğunluğu daha fazla olacaktır. İnceltme işlemi ile nokta örüntülerinin kümelenmesi elde edilmekte fakat bir işlem olarak kümelenme tamamı ile farklı bir yöntemdir. Bu yöntemde bir  $s_i$  olayı  $n_i$  adet olay içeren ayrı bir nokta sürecinin gerçekleşişinden oluşan örüntü ile yer değiştirilmektedir. Burada öncelikle bir ana süreçten  $k$  adet ana olay üretilir. Daha sonra her bir ana süreçte türetilen ikincil bir yavru süreç ile  $n_i$  adet yavru olay türetilir. İkincil sürecin her bir gerçekleşişi ile ayrı bir küme oluşmaktadır. En son süreç ise tüm kümelerdeki olayların birleştirilmesinden (üst üste konulması) oluşmaktadır. İkincil süreçte yavru olayların koordinatlarının belirlenmesinde iki değişkenli bir olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılmaktadır. Küçük bir değişkenliğe sahip olan iki değişkenli bir olasılık fonksiyonu yavru olayları ana olaylara daha yakın bir şekilde gruplandırarak farklı kümelerin oluşmasına yol açmaktadır. Cox süreci ve poisson kümelenme süreci bu tür süreçlerdendir. (Schabenberger & Gotway, 2005, s. 125)

#### 3.4.10. Kümelenmiş süreçler

Homojen olmayan bir Poisson süreci kümelenmiş örüntüler oluşturmaktadır. Birim yoğunluk  $\lambda(s)$ 'in az ya da çok olduğu yerler homojen olmayan bir örüntüye sebep olmaktadır. Eğer yoğunluk fonksiyonunun kendisi bir stokastik sürecin gerçekleşişi ise sonuçlanan nokta süreci Cox süreci olarak adlandırılmaktadır. Böyle bir süreçte rassal birim yoğunluk  $\Lambda(s)$  ve onun bir gerçekleşişi ise  $\lambda(s)$  olarak adlandırılmaktadır.  $\Lambda(s) = \lambda(s)$  koşullu olduğundan homojen-olmayan bir poisson nokta süreci elde edilir. Cox sürecinin koşullu gerçekleşişi homojen olmayabilir. Fakat rassal yoğunluk ölçüsünün dağılımına bağlı olarak süreç homojen olabilir.  $\mu(A) = \int_A \Lambda(s) ds$  bir  $A$  alanındaki ortalama olay sayısı olduğunda süreçte  $n$  adet olay gözlenmesi olasılığı Eşitlik (3.30)'da verilmiştir.

$$P(N(A) = n) = E_{\Lambda} \left[ \frac{1}{n!} \mu(A)^n \exp\{-\mu(A)\} \right] \quad (3.30)$$



Buna karşılık olarak homojen-olmayan poisson nokta sürecinde ise  $\mu(A)$  sabittir ve Eşitlik (3.30)'da belirtilen olasılık  $P(N(A)=n) = \frac{1}{n!} \mu(A)^n \exp\{-\mu(A)\}$  olarak hesaplanacaktır. Benzer bir şekilde Cox süreci için birinci ve ikinci derece yoğunluk ölçüleri sırası ile  $\lambda = E(\Lambda(s))$ ,  $\lambda_2(s_1, s_2) = E(\Lambda(s_1)\Lambda(s_2))$  beklenen değerleri olarak hesaplanacaktır. Eğer rassal yoğunluk ölçüsü  $\Lambda(s)$  durağan ise Cox süreci de durağan olacaktır. Aynı durumu eş yönlülük özelliği için de geçerlidir. Örneğin,  $W$  negatif olmayan bir rassal değişken olmak üzere yoğunluk fonksiyonu  $\Lambda(s) = W\lambda$  sürecin birinci dereceden durağanlığını koruyarak kümelenmiş bir örüntünün oluşmasına yol açabilmektedir. Oysaki homojen olmayan poisson nokta süreci durağan olmayan bir süreçtir. Ayrıca Cox sürecindeki olaylar genellikle bağımsız değildirler. Sürecin benzetimi ise iki aşamada yapılabilmektedir. İlgili rassal yoğunluk fonksiyonunun benzetimi yapıldıktan sonra ikinci aşamada rassal yoğunluk fonksiyonuna bağlı olarak homojen olmayan poisson nokta süreci türetilir.

Bir diğer kümelenmiş süreç olan poisson kümelenme süreci ise bir homojen Poisson nokta sürecine kümelenme işlemi uygulanarak elde edilmektedir. Elde edilme mekanizması poisson kümelenme sürecini ana ve yavru olayları içeren süreçlerin incelenmesi için ilgi çekici bir süreç haline getirmiştir.

Orijinal süreç (ana süreç) ve kümelenmiş (yavru süreç) sürecin oluşturulması aşağıdaki adımlar izlenerek sağlanacaktır.

- i. Ana süreç  $\lambda(s)$  yoğunluğuna sahip homojen-olmayan poisson nokta sürecinin bir gerçekleşişidir.
- ii. Her bir ana süreçten rassal  $N$  sayıda yavru süreç oluşturulur.
- iii. Yavruların ebeveynlerine göre konumları iki değişkenli bir dağılım fonksiyonu olan  $f(s)$  'e göre dağılım gösterecektir.
- iv. Sonuçlanan süreç sadece yavru olaylardan oluşacaktır.

#### 3.4.11. Düzenli Süreçler

Hojen poisson nokta sürecindeki olaylara kıyasla daha düzenli bir örüntü elde etmek için gerçekleştirmesi gereken basit bir koşul herhangi iki olayın minimum izin verilen uzaklık  $\delta$  'dan daha yakında olmaması koşuludur. Örneğin homojen bir poisson

nokta süreci  $\delta$  uzaklığı içerisinde bir nokta bulundurmeyen olayları tutma olasılığı ile inceltilir. (Schabenberger & Gotway, 2005, s. 128)

Matern'in model I ve model II ve Diggle'in basit ardışık engelleme süreci bu örneğe benzer süreçlerdir. Matern Model I süreci  $\rho$  yoğunluğuna sahip homojen bir poisson nokta sürecine ( $Z_0$ ) inceltme işlemi uygulanması ile elde edilmektedir.  $Z_0$ 'daki  $\delta$ 'dan küçük uzaklığa sahip olan tüm olay çiftleri inceltir. Dolayısı ile inceltme sonuç kalan olaylardan oluşan  $Z_1$  süreci düzenli bir süreç olacaktır. Matern'in ikinci modeli de yine  $\rho$  yoğunluğuna sahip bir homojen bir poisson nokta süreci  $Z_0$ 'dan yola çıkılarak elde edilebilecektir.  $Z_0$ 'daki her bir  $s$  olayı sürekli bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip  $M(s)$  rassal değişkeni ile bağımsız olarak işaretlenir.  $M(s)$  rassal değişkeni genellikle (0,1) arasında sürekli düzgün dağılmış bir rassal değişken olarak seçilir. Eğer bir  $s$  olayı  $u$  olayına minimum izin verilen  $\delta$  uzaklığından daha yakın bir konumda bulunuyor ve  $s$  olayının işaret değeri  $u$  olayınınkinden küçük ise  $s$  olayı silinecektir. Aksi takdirde minimum izin verilen  $\delta$  uzaklığından daha yakın bir konumda  $M(s)$  işaretinden küçük değerli bir nokta bulunmuyor ise  $s$  olayı süreçte tutulacaktır. (Matern, 1960)

Diggle ve ark. (1976) düzenli bir örüntü üretmek için basit ardışık engelleme adlı süreci önermişlerdir. Bu süreçte  $\delta$  yarıçaplı bir disk rassal olarak çalışma alanına yerleştirilir.  $\delta$  yarıçaplı ikinci bir diskin ilk diskle çakışmaması koşulu ile çalışma alanında kalan diğer noktalar belirlenir. Bu şekilde devam edilerek herhangi bir disk önceki yerleştirilen diskle çakışmamak üzere diskler için rassal yarıçap noktası belirlenir. Süreç önceden belirlenen sayıda disk yerleştirildiğinde ya da çakışmamak koşulu herhangi bir disk yerleştirilemediği durumda sona erecektir. Bu süreç birbirinin oluşmasını engelleyen olaylar barındıran örüntüleri temsil etmektedir.

### 3.5. Tam Mekânsal Rassallık Testleri

Tam mekânsal rassallık hipotezinin testi nokta örüntülerinin açıklayıcı veri analizinde önemli bir yere sahiptir. Eğer TMR hipotezi kabul edilirse verilen nokta örüntüsünün tam mekânsal rassal olduğu varsayılabilir. Hipotezin kabul edilmesi daha karmaşık bir modelin ele alınması engeller. Bu durumda homojen poisson nokta sürecine ilişkin model kullanılabilmektedir. Hipotezin kabul edilmesinin diğer bir sonucu ise gözlemlenen örüntüye ilişkin altta yatan bir süreç belirtilmediği ya da veri hakkında

herhangi bir ek bilgi verilmediği durumda noktalar arasında herhangi ilgi çekici bir etkileşim bulunamamasıdır.

Gerçek örüntüler hiçbir zaman tamamen homojen Poisson nokta süreci değildir, TMR hipotezinin reddedilememesi sadece test edilen örüntünün homojen Poisson nokta sürecine yakın olduğu anlamına gelecektir. TMR hipotezinin reddedilmesi durumunda ise nokta örüntüsü analizinin ilgi çekici kısımlarından biri olan noktalar arası mekânsal korelasyonların tespit edilmesi söz konusu olur. TMR hipotezinin herhangi bir test ile reddi durumu kesin olarak tam mekânsal rassallığın olmadığı sonucunu araştırmacıya sunacaktır. Önceki deneyimlerden tek bir kritere göre uygulanacak testlerden hangisinin en iyi test olduğunun belirlenmesi oldukça zordur. Her bir test TMR'nin belirli bir yönünü ele almaktadır. Hangi testin en uygun olduğu öngörülen alternatif hipoteze bağlı olarak değişebilecektir (Illian vd., 2008).

Bu testlerin birçoğu genellikle benzer şekilde oluşturulur. Veri seti için elde edilen bir istatistik ya da fonksiyon değeri homojen poisson nokta sürecine ait teorik istatistik ya da fonksiyon değeri ile karşılaştırılır. Eğer bu iki istatistik ya da değer arasında büyük farklılıklar var ise veri setinin homojen poisson nokta dağılımına sahip olduğunu öne süren sıfır hipotezi reddedilecektir.

$\hat{M}$  bir  $M$  parametresine ait bir tahminci ve  $M_p$  homojen poisson nokta sürecine ait teorik bir istatistik olsun.

$$\left| \hat{M} - M_p \right| > M_\alpha \quad (3.31)$$

Eşitsizlik (3.31)'deki sağlandığı durumda TMR hipotezi  $M_\alpha$  bir kritik değer iken reddedilir. İlgili test alternatif hipotezler kümelenme ya da düzenlilik vardır şeklinde kurulduğu takdirde daha güçlü bir test olacaktır. Kümelenmeye ilişkin alternatif hipotez  $\hat{M} > M_\alpha$  şeklinde; düzenlilik örüntüsüne ilişkin alternatif hipotez ise  $\hat{M} < M_{1-\alpha}$  şeklinde kurulur.

Aynı şekilde fonksiyonel bir değer için sıfır hipotezi oluşturulacak olsun.  $\hat{S}(r)$  fonksiyonel bir değer olan  $S(r)$  'ın bir tahmincisi ve  $S_p(r)$  ise  $S(r)$  'ın homojen Poisson nokta süreci için teorik karşılığı olsun.

$$\max_{r \leq s} \left| \hat{S}(r) - S_p(r) \right| > S_\alpha^m \quad (3.32)$$

Eşitsizlik (3.32) sağlandığı durumda sıfır hipotezi reddedilecektir. TMR testleri uzaklık ölçümlerinden yararlanılan testler ve kuadrat sayılarına ilişkin testler olmak üzere 2 grupta yer almaktadır. Bu testlerde Monte-Carlo benzetimi ve benzetim zarfları gibi teknikler de kullanılabilir.

### 3.5.1. Kuadrat testi

TMR' ye ilişkin en basit testlerden birisi ilgili çalışma alanı  $D$ 'yi birbirleri ile kesişmeyen alanlara sahip  $k$  adet eş büyüklükte alt alana ayırıp bu alanlardaki olay sayılarını hesaplamaya dayanmaktadır. Bu eş alanlara kuadrat adı verilmektedir. Kuadrlar kare ya da dikdörtgen şeklinde olup birleşimleri ilgili çalışma alanını oluşturacaktır. Bu test ilgili çalışma alanının karesel ya da dikdörtgensel düzenli bir alan olduğu varsayımı altında yapılabilmektedir.

Bu testte ilgili alan  $r$  adet sayıda satır ve  $c$  adet sayıda sütuna bölünür.  $n_{ij}$  kuadrat  $ij$  deki olay sayısı ve  $\bar{n} = n / (rc)$  tam mekânsal rassallığın sağlandığı durumda herhangi bir kuadrattaki beklenen olay sayısı olsun. Bu durumda kullanılacak olan ki-kare istatistiği Eşitlik (3.33)'de verilmiştir.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(n_{ij} - \bar{n})^2}{\bar{n}} \quad (3.33)$$

Verilen ki-kare istatistiği ki-kare uyum iyiliği testine ait olup, kurulan hipotez  $n$  noktanın  $D$  alanı içinde düzgün ve bağımsız olarak dağılıp dağılmadığını incelemektedir. Diğer bir deyişle kuadrat sayılarının ortak ve sabit bir yoğunluk  $\lambda$  poisson dağılıma uygunluğu sınanacaktır. Sınamanın yapılacağı referans dağılım  $(rc - 1)$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  dağılımıdır. Ayrıca nokta örüntüsü eşleştirilmiş bir nokta örüntüsü olup  $n$  bilindiğinden  $\bar{n}$  ' in tahmini için ek bir serbestlik derecesi kaybı olmayacaktır. Eşitlik (3.33)'ün bir alternatifi  $s^2$ ,  $r \times c$  adet kuadrat sayısına ilişkin örnek varyansı iken  $\chi^2 = (rc - 1)s^2 / \bar{n}$  olarak verilebilir. Eğer örüntü tam mekânsal rassal ise örnek varyansı ile örnek ortalaması oranı 1'e yakın olmalıdır.  $\chi^2$  ayrıca saçılım indeksi olarak da ele alınmaktadır.

Bir homojen poisson nokta sürecinde kuadrlardaki olay sayıları belirli kuadrlarda yoğunlaşan olay sayılarını içeren kümelenmiş örüntülere kıyasla düzgün dağılacaktır. Sonuç olarak kuadrat sayıları kümelenmiş örüntülerde homojen Poisson

nokta sürecine kıyasla daha değişken olacaktır. Kümelenmiş örüntüler bu nedenle homojen poisson nokta sürecine kıyasla yüksek ki-kare değerlerine sahip iken buna zıt olarak düzenli örüntüler daha düşük ki kare değerlerine sahip olacaklardır.

### 3.5.2. En-yakın komşuluk uzaklıklarına dayalı test (G testi )

En yakın komşuluk uzaklığı analizi çalışma alanındaki her bir nokta ile ona en yakın olan nokta arasındaki uzaklıkları incelemektedir. Test bu uzaklıkları tam mekânsal rassal örüntüden çekilen rassal örnekteki noktaların beklenen değerleri ile kıyaslar.

$D$  bir küme ve  $r_i$  ;  $D$  üzerinde tanımlanan bir uzaklık ölçüsü olsun.  $r_i$  ,  $D$  üzerindeki nokta çiftlerini ele alan ve negatif olmayan bir sayı döndüren bir fonksiyon ve aynı zamanda bir metriktir.  $D$  üzerinde  $n$  adet olay ve en yakın komşuluk uzaklığı verildiğinde  $\hat{G}(r)$  fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\hat{G}(r) = \frac{1}{n} \#(i : r_i \leq r) \quad (3.34)$$

Eşitlik (3.33)'de  $r_i$  herhangi bir  $x_i$  noktasından  $D$ 'deki kalan diğer noktalara olan en yakın uzaklıktır. Bu eşitlikte  $\#(.)$  ise  $r_i \leq r$  koşulunu sağlayan noktaları sayan fonksiyona ilişkin gösterimdir. Deneysel en yakın uzaklık fonksiyonu olan  $\hat{G}(r)$  bir noktanın en yakın komşuluğunda bulunan noktaya olan uzaklığının verilen bir  $r$  uzaklığı içerisinde yer alması olasılığıdır.

Eşitlik (3.23)'te tam mekânsal rassallık durumundaki teorik dağılım verilmişti. Hedef olay etrafında merkezileştirilen çember alanının  $\pi r^2$  olduğu varsayıldığında Eşitlik (3.19) yardımı ile seçilen rassal bir noktanın etrafındaki merkezi  $d$  yarıçapındaki bir çember içerisinde herhangi bir olay gözlenmemesi olasılığı  $e^{-\lambda \pi r^2}$  olacaktır. En-yakın komşuluk uzaklığının dağılım fonksiyonu, Eşitlik (3.35) ile verilmiştir.

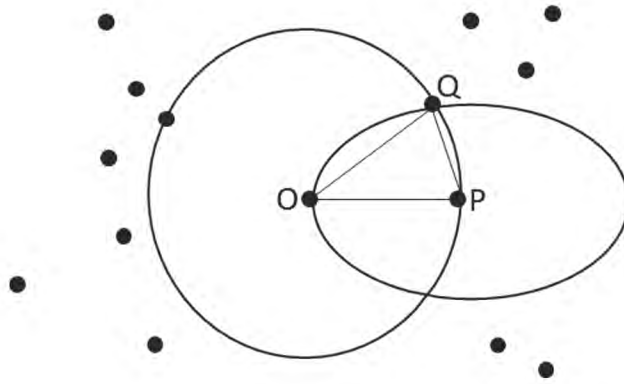
$$G(r) = 1 - e^{-\lambda \pi r^2}, r \geq 0 \quad (3.35)$$

Tam mekânsal rassallık durumuna kıyasla daha yüksek  $\hat{G}(r)$  değerleri kümelenmiş bir örüntüyü işaret ederken daha küçük  $\hat{G}(r)$  değerleri düzenli bir örüntünün varlığına işaret etmektedir.

Uygulamada  $r$  sabit sayısına karşın belirli  $\hat{G}(r)$  fonksiyonunun tahmin değerleri bir grafik üzerinde gösterilip yorum yapılmaktadır.

### 3.5.3. Nokta-en yakın komşuluk uzaklık testi (F testi)

Nokta-en yakın komşuluk uzaklığı çalışma alanı  $D$  içinden seçilen keyfi  $m$  adet örnek noktasından  $n$  adet olay noktasına en yakın uzaklığı ele alır. En yakın komşuluk uzaklığı ise önceden belirtildiği gibi çalışma alan  $D$  içindeki her bir nokta ile ona en yakın olan nokta arasındaki uzaklıkları incelemektedir.



Şekil 3.14. En yakın komşuluk ve nokta- en yakın komşuluk uzaklıkları

Şekil 3.14'de çalışma alanı üzerindeki keyfi nokta  $O$ ' ya en yakın nokta  $Q$  ve çalışma alanı üzerindeki  $P$  olayına en yakın nokta olan  $Q$  noktası gösterilmiştir. İlk uzaklık bir  $F$  fonksiyonu ikinci uzaklık ise bir  $G$  fonksiyonu ile ölçülecektir.

Çalışma alanındaki her bir keyfi nokta için  $F$  değerleri hesaplanır.  $F$  fonksiyonu boş alan fonksiyonu olarak da adlandırılmaktadır ve  $F(r)$  şeklinde gösterilmektedir.  $F(r)$  fonksiyonunun tahmini olan  $\hat{F}(r)$  aşağıdaki gibi formüle edilir.

$$\hat{F}(r) = \frac{1}{m} \#(r_i \leq r) \quad (3.36)$$

Eşitlik (3.36)'da  $r_i$ ,  $m$  adet örnek noktasından ( $i=1,2,...,m$ ) olan  $i$ . keyfi noktadan örüntünün en yakın olayına olan uzaklığıdır. Eşitlik (3.35)' de olduğu gibi tam mekânsal rassallık durumunda boş alan fonksiyonun deneysel dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi verilecektir.

$$F(r) = 1 - e^{-\lambda \pi r^2}, r \geq 0 \quad (3.37)$$

F fonksiyonu verilen bir  $r$  uzaklığında en yakın komşuya sahip olan rassal boş bir konumun olasılığını vermektedir. Fonksiyon kümeler (gruplar) arasındaki boşlukları ifade etmektedir(Aryal, 2011).

Testin yorumlanması ise  $G$  fonksiyonunun tam tersi şeklinde olacaktır. Tam mekânsal rassallık durumuna kıyasla daha yüksek  $\hat{F}(r)$  değerleri düzenli bir örüntünün varlığına işaret ederken daha küçük  $\hat{F}(r)$  değerleri kümelenmiş bir örüntünün varlığına işaret etmektedir.

#### 3.5.4. J fonksiyonu

$G$  ve  $F$  fonksiyonlarından yola çıkılarak elde edilen  $J$  fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır. (Baddeley & van Lieshout, 1996)

$$J(r) = \frac{1 - G(r)}{1 - F(r)} \quad (3.38)$$

Bu eşitlik  $r \geq 0$  ve  $F(r) \neq 1$  için geçerlidir. Tam mekânsal rassallık durumunda  $F(r) = G(r)$  olacağından  $J$  fonksiyonunun 1'e eşit çıkması beklenir. Eğer  $G(r) > F(r)$  ise  $J(r) < 1$  olacak ve örüntü kümelenmiş bir örüntüyü temsil edecektir. Eğer  $G(r) < F(r)$  olduğunda  $J(r) > 1$  olacak ve test edilen örüntünün düzenli bir örüntü olduğu sonucuna ulaşılabilecektir.

#### 3.5.5. K fonksiyonu ve nokta örüntülerinin ikinci derece özellikleri

Eşitlik (3.22)'de verilen  $\lambda(s)$  yoğunluk fonksiyonu nokta örüntüleri için ortalama özelliği taşımaktadır. Mekânsal etkileşimin ortaya konulması için birden çok olay ele alınmalıdır. Noktalar arasındaki korelasyon yapısını nokta örüntülerinin ikinci dereceden özellikleri ortaya koymaktadır Bu amaç ile ikinci  $\lambda_2(s_i, s_j)$  derece yoğunluk fonksiyonu incelenmelidir.

$$\lambda_2(s_i, s_j) = \lim_{|ds_i| |ds_j| \rightarrow 0} \left\{ \frac{E[N(ds_i)N(ds_j)]}{|ds_i| |ds_j|} \right\} \quad (3.39)$$

Eğer ikinci derece yoğunluk sadece olay konumları arasındaki farklara bağlı ise  $\lambda_2(s_i, s_j) = \lambda_2^*(s_i - s_j)$  ilgili nokta süreci durağan olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Eğer

süreç eşyönlü bir süreç ise ikinci derece yoğunluk  $\lambda_2(s_i, s_j) = \lambda_2^*(\|s_i - s_j\|) = \lambda_2^*(h)$  şeklinde gösterilebilir ve sadece uzaklığa bağlı olarak değişecektir (Schabenberger & Gotway, 2005).

G ve F fonksiyonları sadece en yakın komşuluk uzaklıklarını dikkate alan fonksiyonlardır. Özellikle kümelenme gösteren örüntülerde en yakın komşuluk uzaklıkları diğer uzaklıklara kıyasla daha kısa olacaktır. K fonksiyonu durağan ve eş yönlü bir nokta sürecinin ikinci derece özelliklerini inceleyen ve çalışma alanı içerisindeki tüm uzaklıkları dikkate alan bir fonksiyondur.

$$K(r) = \frac{2\pi}{\lambda^2} \int_0^r x \lambda_2(x) dx \quad (3.40)$$

Eşitlik (3.40)'ta Ripley (1976) tanımlamış olduğu K fonksiyonu verilmiştir. Bir nokta örüntüsünün ikinci derece özelliklerini K fonksiyonu yardımı ile incelemek fonksiyonun ilgi çekici özellikleri ve yorumu nedeni ile oldukça yaygındır.

Eğer süreç basit bir süreç ise  $\lambda K(r)$  keyfi bir olaydan  $r$  uzaklığı içerisinde bulunan ekstra olay sayısının beklenen değerini verecektir. Homojen Poisson nokta sürecinde bu beklenen değeri  $\lambda$  yoğunluk olmak üzere  $\lambda \pi r^2$ , ye K fonksiyonu ise  $K(r) = \pi r^2$  olacaktır.

Eğer belirli bir nokta süreci için  $K(r)$  biliniyor ise ikinci derece yoğunluk Eşitlik (3.41) yardımı ile elde edilir.

$$\lambda_2(r) = \frac{\lambda^2}{2\pi r} \frac{dK(r)}{dr} \quad (3.41)$$

Kümelenmiş bir örüntüdeki bir olay aynı küme içinde yer alan diğer olaylar tarafından çevrelenmiş olması muhtemeldir. Dolayısı ile küçük uzaklıklardaki ekstra olay sayısı yüksek olacaktır. Düzenli bir örüntüde ise küçük uzaklıklarda yer alan ekstra olay sayısı düşük olacaktır.

K fonksiyonu durağan ve eşyönlü örüntüler için  $r$  uzaklığı içerisinde gerçekleşen beklenen ekstra olay sayısını  $\lambda K(r) = E(r)$  verecek şekilde tanımlanır. Eğer  $h_{ij}$ ,  $s_i$  ve  $s_j$  olayları arasındaki uzaklık iken  $E(r)$  için basit bir moment tahmincisi, Eşitlik (3.42)'deki gibi verilir.



$$\hat{E}(r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \#(h_{ij} \leq r) \quad (3.42)$$

Eşitlik (3.42)' deki iç toplam  $s_i$  olayına  $r$  uzaklığı içerisinde gözlemlenen ekstra olay sayılarını vermektedir. Dış toplam ise bu olay sayılarına toplam işlemi yapmaktadır. Süreç durağan olduğu için  $K$  fonksiyonu  $\hat{K}(r) = \hat{\lambda}^{-1} \hat{E}(r)$  şeklinde tahmin edilir. Çalışma alanı dışındaki olayların gözlemlenemediğinden dolayı bu tahminci negatif olarak yanlış bir tahminci olacaktır. Çalışma alanının kenar bir bölgesindeki olaya ait ekstra olay sayısı çalışma alanı dışındaki olaylar sayılamayacağından dolayı daha az sayıda olacaktır. Bu kenar etkilerinin düzeltilmesi amacı ile birçok yöntem önerilmiştir.

Ripley tahmincisi (Ripley, 1976) bu amaçla çalışma alanında yer alan her bir gözlem çiftine merkezi  $s_i$  ' de konumlanan  $h_{ij} = \|s_i - s_j\|$  yarıçaplı çemberin çevresi ile orantılı olarak  $w(s_i, s_j)$  ağırlıklarını uygulamıştır.

$$\hat{E}(r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n w(s_i, s_j)^{-1} \#(h_{ij} \leq r) \quad (3.43)$$

Uygulamada  $\hat{K}(r)$  homojen Poisson nokta süreci altındaki  $K$  fonksiyonu ile karşılaştırılır.  $\hat{K}(r) > \pi r^2$  ise test edilen örüntü kümelenmiş bir örüntü,  $\hat{K}(r) < \pi r^2$  ise örüntünün düzenli bir örüntü olduğu yorumu yapılır.

İkili korelasyon fonksiyonu  $K$  fonksiyonunun bir türevi olup daha kolay yorum yapılabilmesinden dolayı uygulamalarda sıklıkla tercih edilmektedir. Fonksiyon  $g$  ile gösterilmektedir ve Eşitlik (3.44) ile tanımlanmaktadır.

$$g(r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{dK(r)}{dr} \quad (3.44)$$

$g(r) = 1$  olduğu durumda incelenen nokta örüntüsünü tam mekânsal bir nokta örüntüsü diğer bir deyiş örüntü homojen Poisson nokta sürecinden elde edilmiş bir örüntü olacaktır.  $g(r) < 1$  olduğu durumda test edilen örüntü düzenli bir nokta örüntüsü  $g(r) > 1$  olduğu durumda ise kümelenmiş bir nokta örüntüsü olduğu yorumu yapılacaktır.

### 3.5.6. L fonksiyonu

Tahmin edilen K fonksiyonunun varyansı  $r$  arttıkça hızlı bir biçimde artacak ve büyük uzaklıklar için yapılan tahminler hatalı olacaktır. Ayrıca deneysel ve teorik ikinci derece davranışa ilişkin sapmaların belirlenmesi  $\hat{K}(r)$  ve  $K(r)$  aynı grafik üzerinde gösterimi yüzünden zor olacaktır. K fonksiyonunun görsel dezavantajı ve varyansının büyük olmasından dolayı onun yardımı ile üretilen L fonksiyonu uygulamada daha çok kullanılmaktadır. Fonksiyon Eşitlik (3.45)'te verilmiştir.

$$\hat{L}(r) = \sqrt{\frac{\hat{K}(r)}{\pi}} \quad (3.45)$$

K fonksiyonu üzerinde yapılan kök dönüşümü tahminin varyansını düzenlemiştir. Ayrıca yapılan dönüşüm L fonksiyonun TMR altında  $\hat{L}_{pois}(r) = r$  olmasını sağlamış teste ilişkin grafiğin yorumlanması daha kolay hale gelmiştir.  $\hat{L}(r) > r$  ise test edilen örüntü kümelenmiş bir örüntü,  $\hat{L}(r) < r$  ise örüntünün düzenli bir örüntü olduğu yorumu yapılır.

### 3.5.7. Monte- Carlo benzetimi ve benzetim zarfları

Monte- Carlo testleri parametrik olmayan istatistikte oldukça sık olarak kullanılan bir testtir. TMR için Monte-Carlo testi özel bir benzetim testidir ve sıfır hipotezinden yani belirli bir parametre ile homojen poisson nokta sürecinden benzetimler yardımı ile test istatistiklerinin elde edilmesine dayanmaktadır. Bir  $Q$  test istatistiği gözlemlenen örüntünün testi için seçilir ve TMR altında benzetimi yapılan istatistik değerleri ile karşılaştırılır. Benzetime ilişkin testin yapılabilmesi için ilgili parametrelili homojen poisson nokta sürecinden  $m$  adet benzetim gerçekleştirilir ve ilgili  $m$  adet  $q$  istatistiğinin  $(q_1, q_2, \dots, q_m)$  değerleri hesaplanır. Örüntüden elde edilen  $q_0$  ve benzetimlerden elde edilen  $q_1, q_2, \dots, q_m$  toplamda  $m + 1$  adet test istatistiği elde edilmiş olur.  $q_0$ 'ın en küçük test istatistiğinden küçük olması ya da en büyük test istatistiğinden büyük olması durumunda sıfır hipotezi reddedilecek ve örüntünün TMR' ye ait olmadığı yorumu yapılacaktır. Bu testin anlam düzeyi ise  $2/(m+1)$  olarak hesaplanacaktır.

Benzetim zarflarında ise Monte-Carlo testlerindeki test istatistiklerinin yerine nokta örüntüleri için belirli fonksiyonlar kullanılmaktadır. Benzetim zarflarının oluşturulması Monte-Carlo benzetiminin gerçekleştirilmesi ile benzerlik gösterir. En-yakın komşuluk

uzaklığına dayalı G fonksiyonu için benzerlik zarfı oluşturmak istensin. İlgili çalışma alanı içinde TMR' den  $m$  adet bağımsız benzetim  $\hat{G}_1(r), \hat{G}_2(r), \dots, \hat{G}_m(r)$  fonksiyonlarını tahmin etmek amacı ile gerçekleştirilir.  $\hat{G}_0(r)$  ise gözlemlenen örüntüden elde edilmiş G fonksiyonunun tahmini olsun. Zarfın oluşturulabilmesi için alt ve üst sınırlar aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$\hat{G}_l(r) = \min_{i=1,2,\dots,m} \{\hat{G}_i(r)\} \quad \text{ve} \quad \hat{G}_u(r) = \max_{i=1,2,\dots,m} \{\hat{G}_i(r)\} \quad (3.46)$$

Son olarak  $\hat{G}_0(r)$ ,  $\hat{G}_l(r)$ ,  $\hat{G}_u(r)$  ve son olarak teorik dağılım fonksiyonu  $G(r)$  bir grafik üzerinde gösterilip yorumlanacaktır. Eğer ki tahmin edilen  $\hat{G}_0(r)$  fonksiyonu  $\hat{G}_l(r)$  ve  $\hat{G}_u(r)$  sınırları içerisinde yer alıyor ise ilgili örüntünün TMR olduğu söylenecektir. Kümelenme ya da düzenliliğe ilişkin yorum ise kullanılan fonksiyona göre değişiklik gösterecektir.

### 3.5.8. TMR testlerinin karşılaştırılması

Uygulamalarda bir önceki bölümde bahsedilen testler oldukça sık kullanılmaktadır. Fakat buna rağmen incelenen her bir testin diğer testlere göre avantaj ya da dezavantajları bulunmaktadır. Maddeler halinde bu avantajlar ve dezavantajlar sıralanacak olursa:

- F, G ve K fonksiyonları bir nokta sürecinin durağan olduğu varsayımı altında tanımlanmış ve tahmin edilmişlerdir.
- Uzaklık fonksiyonları süreçleri tam anlamı ile karakterize etmemektedirler.
- Eğer süreç durağan değilse deneysel ve teorik fonksiyonlar arasındaki farklar noktalar arasındaki etkileşimin sonucu gerçekleşmeyip yoğunluk fonksiyonundaki değişkenlik dolayısı ile gerçekleşebilir.
- Ayrıca noktalar arasındaki uzaklıklara dayalı fonksiyonlar için kenar etkileri göz önüne alınmalı ve bu etkilerden fonksiyon arındırılmalıdır.(Baddeley, 2008)
- Eğer araştırmacının elinde sadece veri olarak kuadrat sayıları var ise ya da araştırmacı çalışma alanında ve bilgisayarla hesaplama yapılamayacak durumda ise kuadrat testini tercih etmelidir.
- Eğer araştırmacı eşleştirilmiş bir örüntüye sahip olduğu durumda ya da benzetim testi uygulamak istediği takdirde L testi kullanılmalıdır.(Illian vd., 2008)

- Benzetim testlerinin bir dezavantajı test istatistiği ve benzetim sayısı vb. önemli kritik seçimlerin araştırmacıya bırakılmasıdır.
- Kuadrat sayılarının belirlenmesinin araştırmacı tarafından yapılması subjektif bir seçim yapılmasına yol açmaktadır. Kuadrat testi kuadrat sayılarından önemli bir şekilde etkilenmektedir.
- Bir çalışma alanında kesişmeyen alt alanlardaki olay sayılarının birbirinden bağımsız ve poisson dağılımına sahip olması yaklaşımları düzenli bir şekle sahip olmayan çalışma alanlarında kenar etkileri ve bazı kuadratlardaki olay sayısının azlığı gibi nedenlerden dolayı iyi performans göstermeyebilir. (Schabenberger & Gotway, 2005)

### 3.6. Yoğunluk Fonksiyonunun Tahmini

Uygulamalarda nokta örüntülerinde yoğunluk fonksiyonu olan  $\lambda(s)$ 'in tahmini için parametrik bir modelin parametrelerinin tahmin edilmesi gereklidir. Örneğin binom sürecinde çalışma alanı  $D$ , nokta sayısı  $n$  ve  $p$  olasılıklarının tahmini yoğunluk fonksiyonunun tahmini için yeterli olacaktır. Bunun dışında kümelenmiş örüntülerde parametrik tahminler çeşitli çok değişkenli dağılımlar yardımı ile yapılabilmektedir (Illian v.d. , 2008).

Durağan süreçlerde dahi olayların yoğunluğunun yerel olarak incelenmesinin faydaları bulunmaktadır. Nokta örüntülerinin ikinci derece özelliklerinin analizine karar vermek için yoğunluğun yerel olarak incelenmesi gerekli olabilir. Uygulamada mekânsal olarak değişkenlik gösteren yoğunluğun  $s$  konumundaki tahmini olan  $\hat{\lambda}(s)$ 'nin tahmini kuadrat sayılarının parametrik olmayan düzgünleştirme yöntemleri ya da olasılık yoğunluğunun kernel fonksiyonları ile tahminine ilişkin yöntemler ile yapılmaktadır (Schabenberger & Gotway, 2005).

Parametrik olmayan düzgünleştirme yöntemleri olasılık yoğunluğunu eldeki veri setinden yardım alarak tahmin etmede kullanılmaktadır. Bu yöntemle ait en basit örnek histogramdır. Fakat histogram kullanımının aralıkların başlangıç noktası ve aralık sayısına bağlı olması ve boyutların artması ile aralık sayılarının üstel olarak artması vb. çeşitli dezavantajları bulunmaktadır. Dolayısı ile uygulamada tercih edilen bir yöntem değildir.

Yoğunluk fonksiyonu tahmini ile olasılık yoğunluğunun tahmini arasındaki yakın ilişkinin ortaya konulması için bir rassal değişken  $Y$ 'nin dağılımından elde edilen  $y_1, \dots, y_n$  rassal örnekleri ele alınsın. Olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(y)$  'nin  $y_0$  noktası için tahmini  $y_0$  'dan belirli bir  $h$  uzaklığı içerisindeki örneklerin gerçekleşiş sayısından bulunabilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(y)$  'nin  $y_0$  noktası için tahmini Eşitlik (3.47)'de verilmiştir.

$$\hat{f}(y_0) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{y_i - y_0}{h}\right) \quad (3.47)$$

Eşitlik (3.47)' de verilen  $k(t)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  aralığında tanımlanan (3.48)'da verilen düzgün dağılıma ait yoğunluk fonksiyonudur.

$$k(t) = \begin{cases} 0 & |y_i - y_0| > h \\ 1 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.48)$$

Eğer uzaklık  $h$  küçük ise  $\hat{f}(y_0)$ ,  $f(y_0)$  'ın yansız sayılabilecek bir tahmincisidir fakat büyük değişkenlik gösterecektir. Uzaklık  $h$  arttıkça, yapılan tahmin daha düzgün ve daha az değişken hale gelecek fakat daha yanlı bir tahmin olacaktır. Uzaklık  $h$  ' ın optimum olarak belirlenmesi için çeşitli yöntemler bulunmaktadır (Schabenberger & Gotway, 2005).

Çalışma alanındaki  $y_0 \pm h$  çevresindeki tüm noktalara eşit ağırlık veren düzgün kernel fonksiyonunun dışında uygulamada moda dayalı kuadratik, gauss ve minimum varyans kernel fonksiyonları da kullanılmaktadır. Kernel fonksiyon seçimi uygulamada önem arz etmez iken bant genişliği  $h$ ' ın seçilmesi önemli bir yer almaktadır. Bir  $k(u)$  fonksiyonunun kernel fonksiyonu olabilmesi için  $\int k(u)du = 1$  ve  $\int uk(u) = 0$  şartlarını sağlaması gerekir. Tek boyutlu Gauss kerneli Eşitlik (3.49)'da verilmiştir.

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \quad (3.49)$$

Bir nokta örüntüsü için olasılık yoğunluk tahmini,  $s$  konumu etrafında bir olayın gözlenme olasılığının tahminini oluşturacaktır ve bu tahmini bir  $A$  alanı için integralleyecektir.  $A$  alanı için olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f_A(s)$  ve yoğunluk  $\lambda(s)$  arasındaki ilişki Eşitlik (3.50)' de verilmiştir.

$$\lambda(s) = f_A(s) \int_A \lambda(u) du = f_A(s) \mu(A) \quad (3.50)$$

Dolayısı ile yoğunluk ve olasılık yoğunluğu orantılıdır.  $\mathbb{R}^1$  'de tanımlanmış bir süreç için (3.47)' te verilen olasılık yoğunluk tahmincisi birinci dereceden yoğunluğun kernel tahmincisini elde etmek için (3.51) gibi düzenlenmiştir. (Schabenberger & Gotway, 2005)

$$\hat{\lambda}(s_0) = \frac{1}{v(A)h} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{s_i - s_0}{h}\right) \quad (3.51)$$

Kernel yoğunluk tahmini çalışma alanı içinde küresel etki alanında içerisinde yer alan olayları yoğunluğun ölçüleceği noktadan uzaklığına göre ağırlıklandıran 3 boyutlu bir fonksiyonun (kernel fonksiyonunun) önerilmesine dayanır. Bu yöntemde çalışma alanının kuadrlara ayrılıp incelenmesi ile benzerlik göstermekte kuadrlar yerine kernel fonksiyonları kullanılmaktadır (Gatrell vd., 1996). Bir nokta örüntüsünün yoğunluğunun tahmini iki değişkenli bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun tahminine benzemektedir (Gatrell, 1994).

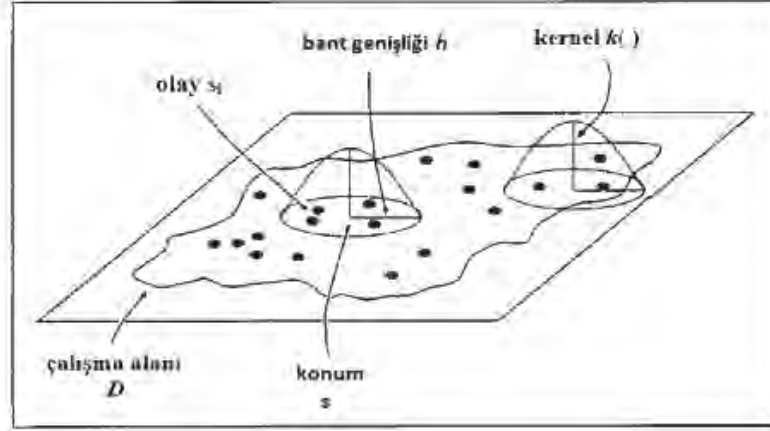
İki boyutlu bir kernel fonksiyonu için tek değişkenli kernel fonksiyonunun iki koordinatı temsil edebilecek bir fonksiyonla değiştirilmesi gerekmektedir. Bu amaçla iki tek değişkenli kernel fonksiyonunun çarpımından elde edilen çarpım kernel fonksiyonundan yararlanılmaktadır.  $s_i$  konumunun koordinatları  $x_i$  ve  $y_i$ ,  $h_x$  ve  $h_y$  sırası ile x ve y koordinatlarına karşılık gelen bant genişlikleri iken çarpım kernel fonksiyonu yaklaşımı sonucu oluşan yoğunluk tahmincisi (3.52) nolu eşitlikte verilmiştir.

$$\hat{\lambda}(s_0) = \frac{1}{v(A)h_x h_y} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x_i - x_0}{h_x}\right) k\left(\frac{y_i - y_0}{h_y}\right) \quad (3.52)$$

Koordinatlar için farklı bant genişlikleri seçilebilir. Uygunluk açısından koordinatlar arasında etkileşim olmadığı düşünülmüştür. İki değişkenli kernel fonksiyonları ise bu sorunun çözümü için kullanılabilir. Örneğin eşit olmayan varyansı iki değişkenli gauss kernel fonksiyonu ile aynı sayıda veri içeren eliptik konturların elde edilmesi mümkündür.

Tek bir bant genişliğine sahip olan küresel bir kernel fonksiyonu (3.52)' de verilmiştir.

$$\hat{\lambda}_h(\mathbf{s}) = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{s}_i}{h}\right) \quad (3.53)$$



**Şekil 3.15.** Bir nokta örüntüsünün kernel tahmini (Gatrell vd., 1996)

Şekil 3.15’ te ise Eşitlik (3.52)’ de verilen 2 boyutlu kernel fonksiyonunun ilgili çalışma alanı  $D$ ’ yi yerel yoğunlukları araştırmak üzere taraması gösterilmiştir. Burada  $\mathbf{s}$  çalışma alanı içindeki herhangi bir noktaya konumlara ait vektör ve  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$  ise çalışma alanı içinde gözlenen noktalara ait konumların vektördür.  $\mathbf{s}$  noktasında merkezileştirilen bir kernel fonksiyonu  $k(\cdot)$  ile  $h$  bant genişliği boyunca ilgili alan taranır. Yapılan tarama daha sonra tüm çalışma alanına genelleştirilerek çalışma alanı  $D$  boyunca tüm  $\mathbf{s}$  noktaları taranmış olur.

#### 4. MEKÂN-ZAMANSAL NOKTA SÜREÇLERİ

Bu bölümden önce ele alınan süreç ve örüntüler sadece mekânsal açıdan incelenmişlerdi. Bu bölümde ise incelenen mekân boyutunun yanına zaman boyutu da eklenerek “mekân-zamansal nokta süreçleri” incelenecektir. Çoğunlukla mekânsal nokta süreçleri gelişmekte olan mekân-zamansal nokta süreçlerinin belirli bir zaman çerçevesinde kesitin alınması ile ortaya çıkmaktadırlar. Eğer mekân dışında ilgilenilen sürecin zamansal boyutu da önem arz ediyor ise ve ilgilenilen sürecin davranışı ayrı ayrı mekân ya da zamansal olarak araştırmacıya gerekli cevapları veremiyor ise süreç mekân-zamansal bir süreç olarak incelenmelidir.

Daha önce mekânsal nokta süreçleri ve nokta örüntülerinde gerçekleşen olayların bir düzlemin sürekli olan bir bölgesinde gerçekleştiği varsayılmıştı. Mekân-zamansal nokta süreçleri ve örüntüleri söz konusu olduğunda ise mekânsal ya da zamansal boyutlardan birinin kesikli bir biçimde değerlendirilmesi yararlı olabilmektedir.

Mekân-zamansal bir nokta sürecinde veri ilgilenilen olayın gerçekleşme zamanı ve olayın gerçekleştiği konum olarak iki farklı bileşen ile gösterilecektir. Bu bileşenlerin kesikli ya da sürekli olması mekân-zamansal süreçlerin çeşitli sınıflara ayrılmasına yol açmaktadır. İlgilenilen verideki her bir olay, olayların gerçekleştiği konum  $x_i$  ve gerçekleşme zamanı  $t_i$  olarak  $\{(x_i, t_i) : i = 1, \dots, n\}$  şeklinde birleştirilir ve  $A$  bir mekânsal bölge  $T$  de bir zamansal bölge olmak üzere  $(x_i, t_i) \in A \times T$  şeklinde gösterilir.  $A$  genellikle  $R^2$ ’de tanımlı bir poligon,  $T$  ise  $T \subset R^+$  olmak üzere kapalı bir aralıktır. Mekân-zamansal süreçler mekân-zamansal sürekli süreçler, zamansal kesikli süreçler ve mekânsal kesikli süreçler olarak 3 farklı şekilde sınıflandırılmaktadır.

Örneğin, Eskişehir ilinde son 5 yıl içerisinde gerçekleşen hırsızlık olaylarına ilişkin mekân-zamansal nokta süreci zaman ve mekân boyutları sürekli olduğu için sürekli bir mekân-zamansal nokta sürecidir. Belirtilen süreçte zaman ölçümü aralık şeklinde verilmediği için zaman boyutu sürekli olacaktır. Yani son 5 yıl içinde herhangi bir ay, herhangi bir gün, herhangi bir saat, herhangi bir dakika içinde olay gerçekleşebilir. Aynı şekilde mekânsal olarak da kesin bir mekân belirtilmemekle beraber Eskişehir sınırı içerisinde merkez ilçeler, ilçeler, köyler yani coğrafi koordinatlar üzerinde herhangi bir nokta olayın gerçekleştirildiği konum olarak ele alınacaktır. Diğer bir deyişle hırsızlık olayı  $A \times T$  içerisinde herhangi bir zaman herhangi bir mekânda gerçekleşebilir.



Diğer bir örnek olarak Eskişehir ili içerisinde 1 Ocak 2014 ile 31 Aralık 2016 inek çiftliklerinde gerçekleşen bir salgın hastalık incelenmek istensin. Bu mekân-zamansal nokta sürecinde mekân boyutu sınırlı sayıda inek çiftliklerinden oluşmaktadır. Dolayısı bu süreç mekânsal kesikli bir süreç olarak sınıflandırılacaktır.

Eskişehir ilindeki hava kirliliğinin belirlenmesi amacı ile bir çalışma yapılmak isteniyor. Bu amaç doğrultusunda il sınırları içerisindeki çeşitli noktalardan aylık bazda hava kirliliğine ilişkin gazların ölçümleri yapılıyor. Sözü geçen çalışmada Eskişehir ili sınırları içerisindeki tüm noktalarda yapılabileceği için mekânsal olarak sürekliliğe sahiptir. Diğer bir yandan zaman bileşeni incelendiğinde mekân-zamansal süreç yapılan ölçümlerin aylık periyotlarda tekrarlanmasından dolayı zamansal kesikli mekân-zamansal nokta sürecine uygun bir örnektir.

#### 4.1. Mekân- Zamansal Süreçlerin Birinci ve İkinci Dereceden Özellikleri

Bu bölümde sürekli ve düzenli  $R^2 \times R^+$  'da tanımlanan mekân-zamansal nokta süreçlerinin birinci ve ikinci derece moment özellikleri incelenecektir. Düzgün bir mekân-zamansal nokta süreci ile ifade edilmek istenen aynı zamanda ve aynı konumda birden fazla olayın meydana gelmemesidir. Yapılacak tanımlar mekânsal nokta süreçlerinde tanımlanan birinci ve ikinci derece moment özelliklerine oldukça benzer olmakla birlikte mekânsal nokta süreçlerinde tanımlanan birinci ve ikinci derece momentlere zaman boyutu da eklenerek güncellenecektir.

Sürekli bir mekân-zamansal nokta sürecinin birinci derece özellikleri eşitlik (4.1)'de verilen mekân-zamansal yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanmaktadır.

$$\lambda(x, t) = \lim_{|dx|, |dt| \rightarrow 0} \left\{ \frac{E[N(dx, dt)]}{|dx| |dt|} \right\}. \quad (4.1)$$

Mekânsal ya da zamansal durağan bir süreç için mekân-zamansal yoğunluk fonksiyonu  $\lambda(x, t)$  'nin fonksiyonu sırası ile x veya t 'den bağımsız olacaktır. Mekân-zamansal bir sürecin birinci dereceden durağan olması için ise  $\lambda(x, t)$  'nin bir birim zaman ve bir birim mekân içerisinde gerçekleşen ortalama olay sayısını veren sabit bir  $\lambda$  değerini alması beklenir. Matematiksel olarak mekân-zamansal durağan bir nokta sürecinin marjinal zamansal ve marjinal mekânsal özelliklerinden bahsetmek mümkün değildir ki her iki marjinal özellikte de ortalama olay sayısı birim zamanda ve birim

alandaki sonsuz sayıda olacaktır. Uygulamada mekân-zamansal nokta süreçleri sadece sonlu bir  $A \times T$  bölgesinde gözlemlenebilmektedir. Dolayısı ile marjinal zamansal ve marjinal mekânsal yoğunluk sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$\lambda_A(t) = \int_A \lambda(x, t) dx \quad ; \quad \lambda_T(x) = \int_T \lambda(x, t) dt \quad (4.2)$$

Bir mekân-zamansal nokta sürecinin ikinci derece özellikleri de yine mekânsal bir nokta sürecine benzer olarak Eşitlik (4.3)'deki gibi tanımlanacak ve ikinci dereceden mekân-zamansal yoğunluk fonksiyonu olarak adlandırılacaktır.

$$\lambda_2((x, s), (y, t)) = \lim_{|dx|, |dy|, |ds|, |dt| \rightarrow 0} \left\{ \frac{E[N(dx \times ds) N(dy \times dt)]}{|dx| |dy| |ds| |dt|} \right\} \quad (4.3)$$

Bir mekan-zamansal nokta süreç için ikinci dereceden koşullu mekan-zamansal yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki gibi verilecektir.

$$\lambda_c(x, s | y, t) = \lambda_2(x, y, s, t) / \lambda(y, t) \quad (4.4)$$

(4.4)'deki eşitlik  $(y, t)$ 'de bir olay verildiğinde  $(x, s)$  noktasındaki yoğunluğa karşılık gelmektedir. Mekân-zamansal ikinci dereceden durağan ve eşyönlü bir süreç için  $\lambda_2(x, y, s, t)$  ikinci dereceden yoğunluk fonksiyonu  $\lambda_2(u, v)$ 'ye indirgenecektir. Burada  $u, u = |x - y|$  iki konum arasındaki fark vektörünün uzunluğunu  $v$  ise  $v = |s - t|$  iki zaman noktası arasındaki pozitif farkı temsil edecektir.

Durağan ve eşyönlü bir mekân-zamansal nokta örüntüsünün  $K$  fonksiyonu  $N_0(u, v)$  keyfi bir olaya  $u$  uzaklığı ve  $v$  zaman dilimi içerisinde gerçekleşen ek olay sayısı olduğunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$K(u, v) = \lambda^{-1} E[N_0(u, v)] \quad (4.5)$$

$K$  fonksiyonu homojen mekân-zamansal poisson süreci olduğunda mekânsal  $K$  fonksiyonuna sadece zaman boyutu fonksiyonun alacağı değere çarpan olarak eklenecektir. Dolayısı ile  $K(u, v) = \pi u^2 v; u \geq 0, v \geq 0$  olacaktır. Mekân-zamansal bir nokta süreci fonksiyonu ile ikinci dereceden mekân-zamansal yoğunluk fonksiyonu arasındaki ilişki Eşitlik (3.40)'da verilen mekânsal bir nokta süreci ile ikinci dereceden yoğunluk fonksiyonu arasındakine benzer şekilde eşitlik (4.6)'da verilmiştir.

$$K(u, v) = 2\pi\lambda^{-2} \int_0^v \int_0^u \lambda_2(x) x dx dt \quad (4.6)$$

Mekân-zamansal nokta süreçleri için K fonksiyonu ve ikinci dereceden momente eş olan diğer ikinci dereceden özellikler ise kovaryans yoğunluğu ve g fonksiyonudur. Kovaryans yoğunluğu eşitlik (4.7)'de verilmiştir.

$$\gamma((x, s), (y, t)) = \lambda_2((x, s), (y, t)) - \lambda(x, s)\lambda(y, t) \quad (4.7)$$

İkili korelasyon fonksiyonu g ise eşitlik (4.8)'de verilmiştir.

$$g((x, s), (y, t)) = \frac{\lambda_2((x, s), (y, t))}{\lambda(x, s)\lambda(y, t)} \quad (4.8)$$

Tam mekân-zamansal rassal bir örüntü için g fonksiyonu 1 değerini almalı ve kovaryans yoğunluğu sıfır olmalıdır. Ayrıca örüntünün birinci dereceden momentini  $\lambda$ , ikinci derece momentini ise  $\lambda^2$ 'ye eşit olmalıdır.

#### 4.2. Mekân-zamansal Homojen Olmayan K fonksiyonu ve İkili Korelasyon Fonksiyonu

Mekan-zamansal homojen olmayan K fonksiyonu ve mekan-zamansal homojen olmayan ikili korelasyon fonksiyonu mekan-zamansal nokta süreçlerinin kümelenme ya da düzenlilik göstermesi ve mekan-zamansal etkileşimin belirlenmesi amacıyla kullanılmaktadır.

Mekânsal bir yoğunlukla yeniden ağırlıklandırılmış durağan bir nokta süreci için homojen olmayan K fonksiyonu eşitlik (4.9)'da verilmiştir.

$$\hat{K}_I(t; \lambda) = |A|^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} w_{ij}^{-1} I_t(u_{ij}) \{ \lambda(x_i) \lambda(x_j) \} \quad (4.9)$$

$\lambda(x, t)$ , alttan sıfır ile sınırlandırılmış birinci dereceden mekân-zamansal yoğunluk fonksiyonu iken yoğunlukla yeniden ağırlıklandırılmış ikinci dereceden mekân-zamansal durağanlık için gerekli koşul sadece  $u = \|x - y\|$  ve  $v = \|s - t\|$  'ye bağlı olmak üzere (4.10)'de verilmiştir.

$$g(u, v) = \lambda_2(x, s, y, t) / \lambda(x, s)\lambda(y, t) \quad (4.10)$$

İkinci dereceden yoğunlukla yeniden ağırlıklandırılmış durağan ve eşyönlü bir mekân-zamansal nokta süreci için mekân-zamansal homojen olmayan  $K$  fonksiyonu Gabriel ve Diggle (2009) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$K_{MZ}(u, v) = 2\pi \int_0^v \int_0^u g(u', v') u' du' dv' \quad (4.11)$$

Mekân-zamansal homojen olmayan  $K$  fonksiyonu için parametrik olmayan bir tahminci aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\hat{K}_{MZ}(u, v) = \frac{1}{|AxT|} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{1}{w_{ij} v_{ij}} \frac{1}{\lambda(x_i, t_i) \lambda(x_j, t_j)} I\{\|x_i - x_j\| \leq u; \|t_i - t_j\| \leq v\} \quad (4.12)$$

Eşitlik (4.12)'te verilen  $w_{ij}$  kenar etkileri için bir düzeltme terimidir. Aynı şekilde  $v_{ij}$  ise zamansal kenar etkileri için verilmiş bir düzeltme terimidir.

Mekân-zamansal homojen olmayan ikili korelasyon fonksiyonu için parametrik olmayan bir tahminci aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\hat{g}(u, v) = \frac{1}{|AxT|} \frac{1}{4\pi u} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{1}{w_{ij} v_{ij}} \frac{k_s(u - \|x_i - x_j\|) k_t(v - \|t_i - t_j\|)}{\lambda(x_i, t_i) \lambda(x_j, t_j)} \quad (4.13)$$

Eşitlik (3.64)'te verilen eşitlikte de  $w_{ij}$  kenar etkileri için bir düzeltme terimi ve  $v_{ij}$  ise zamansal kenar etkileri için verilmiş bir düzeltme terimidir.  $k_s(\cdot)$  ve  $k_t(\cdot)$  ise  $h_s$  ve  $h_t$  bant genişliklerine sahip kernel fonksiyonlarıdır.

### 4.3. Mekân-Zamansal Homojen Poisson Nokta Süreci

Mekân-zamansal homojen poisson nokta süreci mekân-zamansal nokta örüntüsü türetilmesi için kullanılan temel stokastik süreçtir. Mekânsal homojen poisson nokta sürecine benzer bir şekilde elde edilmektedir. Süreç, mekânsal karşılığı olan mekânsal homojen poisson nokta sürecindeki iki boyuta ek olarak bir de zaman boyutunun eklenmesi ile 2+1 boyuttan oluşmaktadır. Tam mekân-zamansal rassal örüntünün arkasındaki stokastik mekanizmayı mekân-zamansal homojen poisson nokta süreci oluşturur. Bu özelliği ile yine mekânsal karşılığı olan mekânsal homojen poisson nokta sürecine benzerliği görülmektedir. Dolayısı ise süreç elde edilen mekân-zamansal örüntülerin tam mekân-zamansal rassallığının incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

Herhangi bir  $A \times T$  mekân-zamansal bölgesinde mekân-zamansal homojen poisson nokta sürecinin gerçekleşmesi ile elde edilen olaylar ilgili bölge  $A \times T$  bölgesinde düzgün bir dağılımdan türetilen bağımsız rassal örnekler olacağı söylenebilir. Kesin bir tanımlama yapılmak istenirse bir sürecin mekân-zamansal homojen poisson nokta süreci olması için iki şart bulunmaktadır.

1. Herhangi bir  $\lambda$  değeri  $\lambda > 0$  olmak üzere  $A \times T$  'de bulunan olayların sayısı  $N(A \times T)$  ,  $|A| \cdot |T|$  iki boyutlu bir bölgeni alanı ya da tek boyutlu bir zaman aralığı iken  $\lambda |A| |T|$  ortalaması ile Poisson dağılımına sahip olmalıdır.
2.  $N(A \times T) = n$  verildiğinde  $A \times T$  'deki n olay  $A \times T$  üzerinde düzgün dağılımdan türetilmiş bağımsız rassal örnekler oluşturacaktır.

Sürecin birinci ve ikinci dereceden yoğunluk fonksiyonları sırası ile  $\lambda(x, t) = \lambda$  ve  $\lambda_2(x, y, s, t) = \lambda^2$  olacaktır. Süreç için ikili korelasyon fonksiyonu 1'e ve homojen olmayan mekan-zamansal  $K$  fonksiyonu ise  $\hat{K}_{MZ}(u, v) = \pi u^2 v$  'ye eşit olacaktır.

Mekan-zamansal bir Poisson nokta örüntüsünün  $A \times T$  bölgesinde benzetimini yapmak için iki aşamalı bir prosedür izlenmelidir.

1. Öncelikle  $A \times T$  'de gerçekleşen  $N(A \times T) = n$  sayıda olayın ortalaması olan  $\lambda |A| |T|$  'nin Poisson dağılımına göre benzetimi yapılır.
2. Her bir  $n$  konum ve  $n$  adet zaman için sırası ile  $A$ 'da ve  $T$ 'de düzgün dağılımdan örnekler çekilir.

#### 4.4. Mekân-Zamansal Homojen Olmayan Poisson Nokta Süreci

Mekân-zamansal homojen olmayan Poisson nokta süreci mekânsal olan eş sürecindeki gibi durağan olmayan bir süreçtir. Süreç homojen mekân-zamansal Poisson sürecindeki sabit olan yoğunluk fonksiyonu değeri  $\lambda$  'nın mekânsal ve/veya zamansal olarak değişim gösteren bir yoğunluk fonksiyonu  $\lambda(x, t)$  ile değiştirilmesi ile elde edilmektedir. Aşağıda belirtilen iki koşulun sağlanması ile süreç tanımlanacaktır.

1.  $A \times T$  'de bulunan olayların sayısı  $N(A \times T)$  ,  $\iint_{A \times T} \lambda(x, t) dt dx$  ortalaması ile Poisson dağılımına sahip olmalıdır.

2.  $N(A \times T) = n$  verildiğinde  $A \times T$  'deki  $n$  adet olay  $A \times T$  üzerinde

$$f(x, t) = \lambda(x, t) / \int \int_A \lambda(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{t} d\tilde{x} \text{ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız}$$

rassal örnekler oluşturacaktır.

$A \times T$  üzerinde bir mekân-zamansal homojen olmayan Poisson nokta sürecinin benzetimi için bir inceltme algoritması uygulanabilir. Algoritmanın adımları aşağıdaki gibi verilecektir.

1. Yoğunluk fonksiyonu  $\lambda(x, t)$  için bir üst sınır  $\lambda_{maks}$  tanımlanır.
2.  $\lambda_{maks}$  yoğunluğuna sahip mekân-zamansal homojen bir Poisson nokta sürecinin benzetimi yapılır.
3. Aşağıdaki prosedüre uygun bir şekilde benzetimi yapılan homojen süreç inceltir.
  - a) Her bir  $(x, t)$  noktası için  $p = \lambda(x, t) / \lambda_{maks}$  hesaplanır.
  - b)  $(0, 1)$  aralığında tanımlı düzgün dağılımdan bir  $u$  örnekleme türetilir.
  - c)  $u \leq p$  koşulunu sağlayan tüm noktalar süreç içinde tutularak homojen olmayan bir sürecin mekan-zamansal bir bölgede benzetimi elde edilir.

#### 4.5. Mekân-Zamansal Poisson Kümelenme Nokta Süreci

Mekân-zamansal Poisson kümelenme süreci mekânsal eş değerine paralel olarak benzer bir şekilde tanımlanmaktadır. Sürecin tanımlanması için gerekli aşamalar aşağıda verilmiştir.

1. Ebeveyn olaylar  $\lambda_p(x, t)$  yoğunluğu ile mekân-zamansal homojen Poisson sürecinden üretilmelidir.
2. Her bir ebeveyn olay başına düşen yavru olay sayısı  $m_c$  ortalamasına sahip bir  $N_c$  rassal değişkenidir ve her bir ebeveyn olay için bağımsız bir şekilde gerçekleşmektedir.
3. Yavru olayların ebeveynlerine göre konumu ve zamanları  $R^2 \times R^+$  'de tanımlı üç değişkenli bir olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(\cdot)$  'e göre bağımsız ve eş bir şekilde dağılacaktır.
4. Sonuçta oluşan süreç sadece yavru olayların birbiri üzerine çakıştırılmasından oluşacaktır.

Sürecin  $A \times T$  için bir benzetimi aşağıda verilen 3 aşamadan oluşan adımlar sırası ile izlenerek yapılır.

1. Kenar etkilerinden kaçınmak ya da kenar etkilerini engellemek amacı ile ebeveyn olaylar  $A' \supset A$  ve  $T' \subset T$  olmak üzere  $A' \times T'$  bölgesinde  $\lambda_p(x, t)$  yoğunluğuna sahip mekân-zamansal homojen bir poisson nokta sürecinden türetilir. Böylelikle  $A$  ve  $T$  sınırlarına yakın ebeveyn olaylardan oluşacak yavru olayların süreçte yer alması sağlanmış olur.
2. Benzetimi yapılan her bir ebeveyn olay için Poisson dağılımından  $m_c$  ortalaması ile yavru olay için  $n_c$  rassal sayısı türetilir.
3. Yavru olayların ebeveyn olaylardan bağımsız olarak üç değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(\cdot)$  ile türetilir.

#### 4.6. Mekân-zamansal Engelleme Süreci

Engelleme süreçleri zaman ve mekânsal olarak birbirine yakın olay çiftlerinin gerçekleşmesini katı bir şekilde engelleyen ya da bu yakın olay çiftlerinin gerçekleşmesini olanaksız hale getiren süreçlerdir (Diggle vd., 2013). Bu sürecin sonunda oluşacak olan örüntü aynı yoğunluğa sahip bir Poisson sürecine kıyasla mekân ve/veya zaman olarak düzenliliğe sahip olacaktır.

Mekân-zamansal basit ardışık engelleme süreci aşağıda verilen algoritma ile tanımlanacaktır.  $A \times T$  'de  $m$  adet  $(x_i, t_i)$  olay dizisi ele alınsın.

1.  $x_1$  ve  $t_1$  sırası ile  $A$  ve  $T$  'de düzgün dağılmış olsun.
2. Algoritmanın  $k$ . adımında  $k = 2, \dots, m$  için  $x_k$ ,  $A$  ile kesişim bölgesinde  $\{x : \|x - x_j\| \geq \delta_x, j = 1, \dots, k-1\}$  koşulunu sağlayarak düzgün dağılımdan türetilmiş ve  $t_k$ ,  $\{t : \|t - t_j\| \geq \delta_t, j = 1, \dots, k-1\}$  koşulunu sağlamakla beraber  $T$  ile kesişim bölgesinde düzgün dağılımdan türetilmelidir.

Algoritmanın ikinci adımında bahsi geçen  $\delta_x$  ve  $\delta_t$  sırası ile izin verilen minimum mekânsal ve zamansal uzaklıklardır. Bir önceki bölümde bahsi geçen mekânsal engelleme sürecine ek olarak mekân-zamansal engelleme sürecinin oluşturulma aşamasında algoritmaya zaman boyuta ilişkin bir minimum izin verilebilir uzaklık da eklenmiştir. Bu uzaklık koşulları birbirine çok yakın zamanda ve konumda olay çiftlerinin

gerçekleşmemesini sağlayarak tam mekân-zamansal rassallık örüntüsüne kıyasla daha düzenli bir mekân-zamansal örüntünün ortaya çıkmasını sağlamaktadır.

#### 4.7. Koşullu Yoğunluk Fonksiyonu ve En Çok Olabilirlik

Bir mekân-zamansal sürecin  $\mathcal{H}_t = \{(x_i, t_i) : t_i < t\}$  olarak ifade edilen  $t$  zamanındaki geçmiş sürecin  $t$  anından önce gerçekleşen tüm  $(x_i, t_i)$  olay çiftlerinin bir araya gelmesinden oluşmaktadır. Sürecin koşullu yoğunluk fonksiyonu ise (4.14) nolu eşitlikte verilmiştir.

$$\lambda_c(x, t | \mathcal{H}_t) = \lim_{|dx|, |dt| \rightarrow 0} \left\{ \frac{E[N(dx, dt) | \mathcal{H}_t]}{|dx| |dt|} \right\}. \quad (4.14)$$

Verilen koşullu yoğunluk fonksiyonu aynı zamanda  $t$  zamanından önce gerçekleşen olaylar  $\mathcal{H}_t$  'ye yani sürecin geçmişine koşullandırılmış birinci dereceden yoğunluk fonksiyonu olarak da nitelendirilebilir. Koşullu yoğunluk fonksiyonu bir başka deyişle  $x$  konumunda ve  $t$  zamanında bir olayın gözlemlenmesinin en çok olabilirliğinin sürecin kısmi gerçekleşişine bağlı olarak nasıl değiştiğini tanımlamaktadır.

Tüm olay çiftleri ele alındığında koşullu yoğunluk fonksiyonu birinci dereceden mekân-zamansal yoğunluk fonksiyonuna ( $\lambda_c(x, t | \mathcal{H}_t) = \lambda(x, t)$ ) eşit olacaktır. Birinci ve ikinci dereceden moment özellikleri mekân-zamansal süreçleri özetleyici özellikleridir. Fakat farklı iki süreç aynı moment özelliklerine sahip olabilir. Koşullu yoğunluk fonksiyonu ise düzgün bir mekân-zamansal süreci eşsiz şekilde karakterize eden bir özetleyici fonksiyondur.

Düzgün bir mekân-zamansal süreç için  $t+U$  ve  $X$  sırası ile  $t$  anından sonraki ilk olayın gerçekleşme zamanı ve konumu iken süreç keyfi bir  $A$  bölgesinde sınırlı olduğunda eşitlik (4.15) ve  $U = u$  verildiğinde  $X$  'in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu  $\lambda_c(x, t+u | \mathcal{H}_{t+u}) : x \in A$  olarak verilen koşullu yoğunluk fonksiyonuna orantılı olacaktır. Eşitlik (4.15)'teki  $[t, t+u]$  zaman aralığında herhangi bir olay gerçekleşmeme olasılığıdır.

$$P(U > u) = \exp \left( - \int_t^{t+u} \int_A \lambda_c(s, t | \mathcal{H}_t) ds dt \right) \quad (4.15)$$



Bu sonuçlardan yola çıkılarak herhangi bir düzgün mekân-zamansal nokta süreci yoğunluğu geçmişine bağlı olarak gelişen zaman endeksli homojen olmayan Poisson süreçleri dizisi olarak ele alınabilir.  $A \times [0, T]$  tanımlı bir mekan-zamansal süreçte  $\{(x_i, t_i) : i = 1, \dots, n\}$  tüm olayların konumlarını ve zamanlarını içeren veri iken log-en çok olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$L = \sum_{i=1}^n \log \lambda_c(x_i, t_i | \mathcal{H}_i) - \int_0^T \int_A \lambda_c(s, t | \mathcal{H}_t) ds dt. \quad (4.16)$$

Koşullu yoğunluk fonksiyonu ile sürecin alt yapısını oluşturan mekanizma ilişkili olduğundan koşullu yoğunluk fonksiyonuna dayalı bir modelin oluşturulması önem taşımaktadır. Koşullu yoğunluk fonksiyonun geçerli olabilmesi için tek katı koşul  $\lambda_c(x, t)$ 'nin sürecin tanımlı olduğu  $A$  bölgesinde olası her bir  $t \leq T$  zamanına karşılık gelen geçmiş değeri için integrallenebilir ve pozitif tanımlı olması gerekmektedir.

En çok olabilirlik fonksiyonuna göre çıkarım yapabilmek ayrıca  $\lambda_c(x, t)$  koşullu yoğunluk fonksiyonunun kapalı bir formu olması gerekmektedir. Ayrıca (4.16) nolu eşitliğin sağ tarafındaki integral zaman ve konum bileşenini içeren hesaplanması zor bir integraldir.

## 5. MEKÂN-ZAMANSAL EPİDEMİK TİP ŞOK SONRASI MODELİ

Ogata (1988) ilk olarak zamansal epidemik tip şok sonrası modeli Omari-Utsu ve Gutenberg - Richter kurallarından yardım alarak önermiştir. Modelin mekân-zamansal versiyonunu ise Ogata (1998) Hawkes sürecinden esinle, koşullu yoğunluk fonksiyonu ile karakterize edilen işaretli bir nokta süreci olarak tanımlamıştır.

### 5.1. İşaretli Hawkes Süreci

Bir işaretli nokta süreci işaret adı verilen bileşene sahip bir stokastik süreçtir. Bu işaretlerin kendileri de stokastik bir yapı ile birlikte stokastik bağımlılık ilişkileri de içerebilen olayların zaman, mekân veya mekân-zaman bileşenleri hakkında bilgiler veren ekstra bir bileşenidir. Hawkes süreci sadece sismolojide kullanılan bir model olmayıp epidemiyoloji vb. birçok alanda uygulaması olan bir kümelenme sürecidir (Vargas, 2012).

$t_i \in \mathbb{R}$  olmak üzere nokta sürecindeki bir olayı temsil ederken,  $m_i \in \mathbb{M}$  ilgili olaya karşılık gelen işareti ve  $\mathbb{M}$  ölçümlenebilir bir işaret uzayı iken  $X = \{(t_i, m_i)\}$  zaman çizgisinde bir işaretli Hawkes nokta süreci olarak tanımlanmıştır (Rasmussen, 2011).

İşaretli bir nokta süreci de koşullu olasılık fonksiyonu yardımı ile tanımlanabilmektedir. Buradaki fark ise koşullandırmanın geçmiş olaylar ve işaret dağılımına göre yapılmasıdır. Sürecin koşullu yoğunluk fonksiyonu eşitlik (4.14)' te verilen mekân-zamansal eşine benzer olarak aşağıdaki eşitlikte verilecektir. Burada tek fark mekân boyutunun yer almamasıdır.

$$\lambda(t) = \frac{E(N(dt) | \mathcal{H}_t)}{dt} \quad (5.1)$$

Eşitlik (5.1)' de  $N$  bir sayma süreci ve  $dt$ ,  $t$  etrafında çok küçük ihmal edilebilir bir zaman aralığını ifade etmektedir. Koşullandırmanın yapıldığı geçmiş  $\mathcal{H}_t$  ise  $\mathcal{H}_t = \{(t_i, m_i)\}_{t_i < t}$  şeklinde sürecin  $t$  anından önceki gerçekleşen olayları ve işaret dağılımını içerir. Sürecin işaret dağılımı  $\gamma^*$ ,  $\mathcal{H}_t$  verildiğinde olasılık yoğunluk  $\gamma$  fonksiyonu tarafından eşitlik (5.2)' deki gibi tanımlanmaktadır.

$$\gamma^*(m|t) = \gamma(m|t, \mathcal{H}_t) \quad (5.2)$$

Hawkes sürecinin koşullu yoğunluk fonksiyonunun (5.3)' daki verilen formda olduğu varsayılmaktadır.

$$\lambda(t) = \mu(t) + \sum_{t_i < t} \alpha(m_i) \beta(t - t_i, m_i) \quad (5.3)$$

Verilen eşitlikte  $\mu(t)$  ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n_\mu})$  parametre vektörü ile  $\mathbb{R}$ ' de tanımlanan göçmen yoğunluk olarak adlandırılan negatif olmayan bir fonksiyondur.  $\alpha(m)$  ve  $\beta(t, m)$  ise sıraları ile  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_\alpha})$  parametre vektörü ile  $\mathbb{M}$  üzerinde tanımlanmış toplam yavru olay yoğunluğu olarak adlandırılan negatif olmayan bir fonksiyon ve  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n_\beta})$  parametre vektörü ile  $[0, \infty)$  yarı açık aralığında tanımlanmış düzeltilmiş yavru olay yoğunluğu olarak adlandırılan bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.  $\beta(t, m)$  aynı zamanda işaret  $m$ ' e de bağlıdır.

İşaretli Hawkes sürecinden bahsedilmesinin sebebi mekân-zamansal epidemik tip şok sonrası modelin işaretli bir Hawkes sürecinin geliştirilmiş hali olmasıdır. Ayrıca bu sürecin eşitlik (5.3)' da verilen yoğunluk fonksiyonu ile bahsedilecek olan mekân-zamansal epidemik tip şok sonrası modelin koşullu yoğunluk fonksiyonu oldukça benzerdir.

## 5.2. Mekân-Zamansal Epidemik Tip Şok Sonrası Model Formülasyonu

Mekân-zamansal epidemik tip şok sonrası model kısa ve orta vadeli deprem oluşumlarının kümelenmesini ele alan, her bir depremin artçı bir depremi tetiklediği varsayılan bir modeldir. Araştırmacıların modeli ele almalarında ufak nüanslar olmakla birlikte model için genel varsayımlar ve ortak olarak benimsenen model formülasyonu aşağıdaki gibi açıklanacaktır. Modelin zamansal olan ilk versiyonu Ogata (1988) tarafından tanımlanmıştır.

- a) Arka plan olayları göçmen olaylar olarak da adlandırılır ve bu olayların gerçekleşme sıklıkları mekânsal konum ve deprem şiddetinin bir fonksiyonu olduğu varsayılır. Dolayısı ile göçmen olayların zaman ile ilişkisi olmadığı görülecektir.
- b) Her bir olay (deprem) diğer olaylardan (depremlerden) bağımsız olarak yavru olayların (artçı depremler) gerçekleşmesine sebebiyet verecektir. Bir olay sonucu

gerçekleşen yavru olayların ortalama sayısı olayın büyüklüğü  $m$ 'e bağlı olduğu varsayılacak ve  $\kappa(m)$  ile gösterilecektir. Aynı zamanda bir olayın yavru olayları tetiklemesine o olayın üretkenliği adı verilecektir.

- c) Bir yavru olayın gerçekleşmesine kadar geçen süreye ilişkin olasılık dağılımı ana olayın şiddetinden bağımsız ve onun zaman gecikmesinin bir fonksiyonu olarak ele alınacaktır. Bu nedenle bir yavru olayın gerçekleşmesine kadar geçen süreye ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $\tau$  ana olayın gerçekleşme zamanı iken  $g(t|\tau) = g(t-\tau)$  formunda olacağı varsayılmaktadır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ayrıca  $\tau$  ve  $t$  zaman aralığında olanlardan bağımsız olacaktır.
- d) Bir olaya ait konum  $(x,y)$  ve deprem şiddeti  $m$ 'e ilişkin olasılık dağılımları ana olayın şiddeti  $m^*$  ve konumu  $(\xi,\eta)$  'e bağlı olacaktır. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonları sıraları ile  $f(x-\xi, y-\eta|m^*)$  ve  $s(m|m^*)$  ile tanımlanacaktır.
- e) Arka plan olayları ve onların tetiklediği yavru olaylar da dâhil olmak üzere tüm olayların şiddetleri aynı olasılık yoğunluğuna sahip  $s(m)$  dağılımından türetilen bağımsız rassal değişkenlerdir.

(Zhuang vd., 2011)

Mekân-zamansal epidemik tip şok sonrası modeli (MZ – ETŞSM) de mekân-zamansal işaretli bir nokta süreci olup, deprem oluşumları koşullu yoğunluk fonksiyonu tarafından temsil edilebilir. MZ – ETŞSM için genel formda koşullu yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilecektir.

$$\begin{aligned} P(\text{bir olayın } [t, t+dt) \times [x, x+dx) \times [m, m+dm) \text{ içinde yer alması} | \mathcal{H}_t) \\ = \lambda(t, x, y, m) dt dx dy dm + o(dt dx dy dm) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Burada  $\mathcal{H}_t$ ,  $t$  zamanına kadar olan uzay-zaman-şiddet deprem oluşumunun geçmişini içerecektir. (a)- (e) arasındaki varsayımlara dayanarak MZ – ETŞSM ilişkin koşullu yoğunluk fonksiyonu eşitlik (5.5)'deki gibi yazılabilir.

$$\lambda(t, x, y, m) = s(m) \left[ \mu(x, y) + \sum_{\{k: t_k < t\}} \kappa(m_k) g(t-t_k) f(x-x_k, y-y_k; m_k) \right] \quad (5.5)$$

Üstteki eşitlikte  $\mu(x, y)$  zamandan bağımsız gerçekleştiği düşünülen arka plan yoğunluk fonksiyonudur.  $g(t)$ ,  $f(x, y; m_k)$  ve  $s(m)$  sıraları ile olayın gerçekleşme

zamanı, konumu ve  $m_k$  şiddetinde bir ana olayın tetiklemesi ile gerçekleşen bir yavru olayın şiddetinin normalleştirilmiş yanıt (olasılık yoğunluk fonksiyonları) fonksiyonlarıdır.

Eşitlik (5.5) ‘teki  $m$  şiddetindeki bir ebeveyn depremin ürettiği artçı şokların beklenen değeri  $\kappa(m)$  aşağıdaki gibi formüle edilecektir.

$$\kappa(m) = Ae^{\alpha(m-m_0)} \quad (5.6)$$

$k$ . olay, yoğunluk fonksiyonu  $\kappa(m_k)g(t-t_k)f(x-x_k, y-y_k; m_k)s(m)$  olan homojen olmayan bir poisson sürecini tetiklemektedir.  $m_k$  şiddetindeki bir ana (ebeveyn) olayın  $\kappa(m_k)$  sayıda ortalama yavru olaya yol açacağı modelin bir varsayımıydı. Dolayısı ile yavru olay sayısının  $\kappa(m_k)$  ortalaması ile poisson rassal bir değişken olduğu çıkarımı yapılacaktır. (5.5) nolu eşitlikte verilen modelde  $t$  zamanı ve  $(x, y)$  konumu için deprem gerçekleşme riskine ait katkılar arka plan olay sıklığı  $\mu$  ‘ nün katkıları ve her bir geçmiş olay  $\xi(t, x, y, t_i, x_i, y_i)$  katkıları olmak üzere iki farklı etkenden oluşacaktır.

Eşitlik (5.5)’ deki koşullu yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bileşenlerine ayrılacaktır.

$$\lambda(t, x, y, m) = s(m)\lambda(t, x, y) \quad (5.7)$$

Eşitlik (5.5)’te  $s(m) = \beta e^{-\beta(m-m_0)}$  ise  $m_0$  şiddetinden büyük depremlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu şeklinde verilecek olan Gutenberg-Richter yasasını temsil etmektedir.  $\beta$  ise  $\beta = b \ln 10$  şeklinde verilecek olup yasada geçen  $b$  değeri ile ilişkilidir.  $\lambda(t, x, y)$  ise Eşitlik (5.5)’te parantez içinde verilen ifadedir. Uygulamalarda kullanılan diğer spesifik fonksiyonlardan biri olan bir yavru olayın gerçekleşmesine kadar geçen süreye ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu Omari- Utsu kuralı ile (Utsu, 1961) eşitlik (5.8)’de verilecektir.

$$g(t) = \frac{p-1}{c} \left( 1 + \frac{t}{c} \right)^{-p} \quad (5.8)$$

Modelin mekânsal bileşeni  $f(x, y, m)$  için birden çok farklı fonksiyon kullanılmaktadır. Sık kullanılan bir örnek fonksiyon ise (5.8)’te verilmiştir.

$$f(x, y|m) = \frac{q-1}{\pi\sigma(m)} \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{\sigma(m)} \right)^{-q} \quad (5.9)$$

Eşitlik (5.9)'da verilen  $\sigma(m)$  ise  $\sigma(m) = De^{-\gamma(m-m_0)}$  şeklinde verilecektir.

Modelin koşullu yoğunluk fonksiyonu farklı bir parametrizasyon ile aşağıdaki şekilde de verilebilmektedir. (Chiodi & Adelfio, 2017)

$$\lambda_{\theta}(x, y, t | \mathcal{H}_t) = \mu f(x, y) + \sum_{t_k < t} \frac{\kappa_0 e^{(\alpha-\gamma)(m_j-m_0)}}{(t-t_k+c)^p} \left\{ \frac{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}{e^{\gamma(m_k-m_0)}} + d \right\}^{-q} \quad (5.10)$$

Bu eşitlik  $(x, y, t)$  noktasında geçmiş  $\mathcal{H}_t$ 'ye koşullandırılmış 8 parametrelilik toplam yoğunluk fonksiyonudur. Eşitlik (5.10)'un sağ tarafına daha önce verilen eşitlik (5.6), (5.8) ve (5.9)'un çarpımları ile ulaşılmaktadır. (5.9)'a ulaşmak için (5.8) ve (5.9) nolu eşitliklerdeki fonksiyonlarda sıraları ile  $t$  yerine  $(t-t_k)$ ,  $x$  yerine  $(x-x_k)$  ve  $y$  yerine  $(y-y_k)$  konulmalı ve  $A$  parametresi (5.11)'daki verilecek eşitlik ile  $\kappa_0$  cinsinden yazılmalıdır.

$$A = \frac{\pi \kappa_0}{(p-1)c^{p-1}(q-1)d^{q-1}} \quad (5.11)$$

Burada  $\kappa_0$  artçı şokların üretkenliğini ölçen bir sabit,  $d$  ve  $q$  ana depremlerin mekânsal etkisi ile ilgili iki parametredir.  $\alpha$  ve  $\gamma$  ise belirli bir büyüklükteki bir olayın artçı şok oluşturmadaki etkinliğini ölçen iki parametredir.  $p$  ise artçı şokların zamanla bozulma hızlarını gösteren bir parametredir.

### 5.3. Model ile ilgili Teorik ve Teknik Noktalar

#### 5.3.1. En çok olabilirlik metodu

$\mu(x, y)$  verilen arka plan olay sıklığı bilindiğinde ve tüm gözlenen olaylar (deprem kataloğu) verildiğinde modelin en çok olabilirlik (EÇO) tahmincileri  $\hat{\theta} = (\hat{A}, \hat{\alpha}, \hat{c}, \hat{p}, \hat{D}, \hat{q}, \hat{\gamma})$  ya da  $\hat{\theta} = (\hat{\kappa}_0, \hat{\alpha}, \hat{c}, \hat{p}, \hat{D}, \hat{q}, \hat{\gamma})$  tahminci vektörü aşağıda verilecek log-benzerlik fonksiyonunun maksimizasyonu ile elde edilecektir.

$$\log L(\theta) = \sum_{i: (t_i, x_i, y_i) \in S \times [0, T]} \ln \lambda_{\theta}(t_i, x_i, y_i) - \int_0^T \int_S \lambda_{\theta}(t, x, y) dx dy dt \quad (5.12)$$

Parametre tahminin yapılabilmesi için hesaplama adımları Ogata (1998)' de yer almaktadır. Burada  $S \times [0, T]$  mekân-zamansal penceresi hedef pencere ve bu pencerenin içinde yer alan olaylar da hedef olaylar olarak adlandırılmaktadır. Hedef olaylardan farklı olarak eşitlik (5.12)' de belirtilen indeks  $k$  deprem kataloğunda yer alan her bir olayı içerecek ve değişim aralığı tamamlayıcı pencere olarak adlandırılmaktadır. Uygulamalarda tamamlayıcı pencere olabildiğince büyük seçilmelidir (Zhuang vd., 2011).

### 5.3.2. İnceltme metodu

Sismik analizlerinde sorulması gereken en önemli sorulardan biri bir depremin kendinden sonra oluşan bir depremi ne derecede tetiklediğidir. Bahsi geçen inceltme prosedürü bu sorunun cevabını verebilmek için uygulanabilecek önemli bir analizdir. Bu analiz yardımı ile ulaşılmak istenen MZ-ETŞSM için arka plan yoğunluğunu tahmin etmek amacı ile deprem çiftlerine bir ebeveynlik derecesi atanmasıdır. Bir  $i$  olayının  $(t_j, x_j, y_j)$  mekân-zamansal noktasındaki olayın gerçekleşmesine oransal katkısı  $j$ . olayın  $i$ . olay tarafından tetiklenmesi olasılığı olarak açıklanabilir. Bu olasılık eşitlik (5.13)' da verilmiştir.

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{\xi(t_j, x_j, y_j; t_i, x_i, y_i)}{\lambda(t_j, x_j, y_j)} & , \quad j > i \quad \text{ise} \\ 0, & \text{d.d} \end{cases} \quad (5.13)$$

Ek olarak  $j$  olayının tetiklenen bir olay olması olasılığı ise  $p_j = \sum_i p_{ij}$  olarak verilebilir. Bu durumda ise bir olayın arka plan olayı olması olasılığı eşitlik (5.14)'te verilecektir.

$$\varphi_j = 1 - p_j = \frac{\mu(x_j, y_j)}{\lambda(t_j, x_j, y_j)} \quad (5.14)$$

Eğer her bir  $j$  olayı  $\varphi_j$ ,  $p_{ij}$ ,  $p_j$  olasılıkları yardımı ile seçilecek olursa  $i$ . olayın tetiklemesini konu alan yeni süreçler meydana gelmiş olur. Bu süreçler modelin iki farklı bileşeni olan arka plan ve kümelenme sürecini içerecektir.

### 5.3.3. Arka plan sıklığının tahmin edilmesi

Belirli bir mekân-zamansal gözlem aralığı içinde gerçekleşen deprem oluşum zamanları, konumları ve şiddetlerini içeren bir veri setinin toplam sismik sıklığının mekânsal dağılımı splaynlar, kernel fonksiyonları, mozaikler ve grid ortalamaları yöntemleri ile bulunabilir (Zhuang, Werner, Hainzl, Harte, & Zhou, 2011).

Çoğu uygulamada genel olarak uyarlanabilir kernel yöntemleri uygulanmaktadır. Bu yöntem uyarlanabilir olmayan kernel yöntemlerine göre bazı avantajlar içermektedir. Mekânsal kümelenmeye sahip bir veri seti için küçük bir bant genişliğinin kullanımı seyrek yoğunluklu bölgeler için hatalı ve değişken tahminler verecek; büyük bir bant genişliği ise yoğun ve seyrek olan bölgelerin sınırlarını birbiri ile karıştıracaktır. Bu yüzden (5.15)'de verilen ilk kernel  $k$  tahmini yerine ikinci verilen değişken bant genişliğine ( $d$ ) sahip kernel tahmini tercih edilmiştir.

$$\begin{aligned}\widehat{m}_1(x, y) &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^N k_d(x - x_j, y - y_j) \\ \widehat{m}_2(x, y) &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^N k_{d_j}(x - x_j, y - y_j)\end{aligned}\tag{5.15}$$

(5.15)'de kullanılan  $k_d(x, y)$  ise  $k_d(x, y) = \frac{1}{2\pi d^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2d^2}}$  ile verilen Gauss kernel fonksiyonudur. İkinci kernel fonksiyonundaki  $d_j$  ise her bir olay  $j$  için her adımda güncellenen değişken bant genişliğidir.

İnceltme yönteminin kullanılması bir arka plan sürecinin elde edilmesi ve arka plan yoğunluğunun tahmin edilebilir olmasını sağlar. İnceltme yöntemini ve kernel tahminini her bir aşamada tekrarlayarak arka plan yoğunluğunun ortalama tahminini yapmak yerine daha basit bir şekilde kernel tahminini arka plan olasılıklarına göre ağırlıklandırma işlemi ile de arka plan yoğunlukları hesaplanır.

$$\widehat{\mu}(x, y) = \frac{1}{T} \sum_i \phi_i k_{d_i}(x - x_i, y - y_i)\tag{5.16}$$

Burada toplamda bulunan  $i$  süreçteki tüm olayları tarayan indeks,  $k_d$   $d$  bant genişliğine sahip Gauss kernel fonksiyonu,  $d_i$  değişken bant genişliği ve  $T$  'de sürecin uzunluğudur. Değişken bant genişliği  $d_i$  her bir olay için şu şekilde hesaplanır: yarıçap değerinden belirli bir eşik değerinden büyük iken  $n_p$  tamsayı olmak üzere  $i$ . olayın



konumunda en az  $n_p$  adet deprem içeren en küçük yarıçaplı disk yerleştirilir. Bu diskin yarıçap değeri değişken bant genişliği olarak seçilir.

#### 5.3.4. İteratif Algoritma

Verilen parametre vektörü  $\theta$ , arka plan sıklığı  $\mu$  ve arka plan olasılıkları  $\phi_i$ ’ den ikisinin bilindiği durumda bir değeri hesaplanabilmektedir. Gerçek veriye modelin uygulanması durumunda ise bu verilenlerden hiçbiri bilinmemektedir. Dolayısı ile konum zaman deprem şiddetini içeren bir deprem kataloğundan eşanlı olarak bilinmeyen parametrelerin ve olasılıkların tahmini aşağıda verilen algoritma adımları izlenerek elde edilebilir.

- 1) Verilen sabit  $n_p$  ve  $d_{\min}$ , sırası ile 5 ve 0.05 derece için (depremlerin konum hatalarına yakın olan ve dünya yüzeyinde yaklaşık 5.56 km’ ye tekabül eden) her bir olay  $(t_j, x_j, M_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  için bant genişliği  $d_j$  hesaplanır.
- 2)  $\ell = 0$  ve  $u^0(x, y) = 1$  olsun.
- 3) En çok olabilirlik yöntemi yardımı ile deprem verisi aşağıda koşullu yoğunluk fonksiyonu verilen modele uydurulur.

$$\lambda(t, x, y) = v u^{(\ell)}(x, y) + \sum_{i: t_i < t} \kappa(M_i) g(t - t_i) f(x - x_i, y - y_i; M_i) \quad (5.17)$$

Burada  $v$  iterasyonların hızlıca sonuca yakınsaması amacı ile kullanılan bir gevşeme katsayısıdır.

- 4) Her bir  $j < i$  ve  $i = 1, 2, \dots, N$  için  $\phi_j$ ,  $p_{ji}$ ,  $p_j$  olasılıkları hesaplanır.
- 5) (5.16) yardımı ile  $\mu(x, y)$  hesaplanır ve  $u^{(\ell+1)}(x, y)$  olarak saklanır.
- 6) Eğer maks  $|u^{(\ell+1)}(x, y) - u^{(\ell)}(x, y)| > \varepsilon$  ise ( $\varepsilon$  çok küçük bir pozitif sayı olmak üzere)  $\ell = \ell + 1$  olarak seçip 3. adıma gere dönülür. Aksi halde  $v u^{(\ell+1)}(x, y)$  arka plan sıklığı ve  $\phi_j$ ,  $p_{ij}$  ve  $p_j$  olasılıkları da çıktı olarak atanır.

## 6. UYGULAMA

### 6.1. Çalışma Alanı ve Açıklayıcı Veri Analizi

Deprem, yer kabuğunun gerilme etkisi sonucu, belirli bir derinlikte kırılması olarak tanımlanabilir. Bir depremin büyüklüğü kırılan yüzeyin büyüklüğü ve deprem sonrası ortaya çıkan enerjinin düzeyi ile belirtilen bir ölçüdür. Depremler sismometre adı verilen oldukça hassas aletlerle ölçülmektedir. Büyük depremlerde oluşan kırıklar yeryüzünde de gözlemlenebilmektedir. Yer kabuğundaki katmanlar, kıvrımlar vb. karmaşık yapılar deprem büyüklüklerinin ölçülmesinde birden fazla sismometrenin kullanılmasına yol açmıştır. (<http://www.koeri.boun.edu.tr/bilgi/buyukluk.htm>)

Bir deprem kataloğunda genelde gözlenen depremlere ilişkin gerçekleşme tarihi (gün, ay, yıl), gerçekleşme zamanı (saat, dakika, saniye), deprem numarası, depremin gerçekleştiği derinlik (km) ve değişik ölçeklere göre ölçülen deprem büyüklükleri (Md, Ml, Ms, Mw vb.) bilgileri yer alır. Bazı ölçekler sadece büyük depremlerin yani belirli bir şiddetten yüksek depremlerin ölçülmesinde kullanılır. Aynı şekilde bazı ölçekler ile de belirli bir büyüklüğün altında, genellikle düşük büyüklükte gerçekleşen depremler için ölçüm yapılabilir. Katalog tamlığı adı verilen deprem kataloğuna ilişkin özellik, ilgili deprem kataloğunda verilen bilgilerde eksik olmaması ve deprem büyüklüklerinin homojen olmasını ifade eder.

Depremler sebep oldukları yıkım ve can kaybı, sıklıkları ya da büyüklüklerine göre sınıflandırılabilir. Deprem büyüklüklerine göre yapılan bir sınıflandırma Çizelge 6.1’de verilmiştir.

**Çizelge 6.1.** Deprem büyüklüklerine göre gerçekleştirilen bir sınıflandırma (<http-1>)

| Büyüklük     | Sınıf         |
|--------------|---------------|
| 3- 3.9 arası | Önemsiz       |
| 4- 4.9 arası | Hafif         |
| 5- 5.9 arası | Orta dereceli |
| 6- 6.9 arası | Kuvvetli      |
| 7- 7.9 arası | Önemli        |
| 8 ve üstü    | Büyük         |

Verilen tabloya göre orta dereceli ve daha büyük depremler, büyüklüğü 5 ve üzerinde olan depremlerdir. Gerçekleşen deprem sıklıkları ya da deprem sonu gerçekleşen hasara göre gerçekleştirilen bir sınıflandırma ise Çizelge 6.2’de verilmiştir.

**Çizelge 6.2.** Deprem etkileri ve sıklığına göre bir deprem sınıflandırılması (<http-2>)

| Büyüklik       | Deprem Etkileri                                                                                | Gerçekleşebilecek tahmini deprem sayısı (yıllık) |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 2.5 ve altı    | Genellikle hissedilmeyen fakat sismograflar tarafından kayıt altına alınan depremler           | 900000                                           |
| 2.5 - 5.4      | Sıkça hissedilen ve az hasara sebebiyet veren depremler                                        | 30000                                            |
| 5.5 – 6.0      | Binalara ve diğer yapılarda az miktarda hasara yol açan depremler                              | 500                                              |
| 6.1 – 6.9      | Nüfus yoğunluğu yüksek olan bölgelerde hasara ve kayıplara yol açabilen depremler              | 100                                              |
| 7- 7.9         | Ciddi hasara yol açan önemli depremler                                                         | 20                                               |
| 8 ve daha üstü | Merkez üstü yakınlarında bulunan toplulukların tamamı ile kaybına yol açabilen büyük depremler | Çok nadir gözlemlenmektedir.                     |

Önceki bölümlerde bahsedilen analiz ve modellerin uygulanması amacı ile Kuzey Anadolu Fay Hattını kapsayan 1950-2017 yılları içerisinde 26°- 42° boylam ve 39°- 42° enlemleri arasında yer alan dikdörtgensel bölgede gerçekleşen, büyüklük olarak 5 ve üzerinde yer alan depremlere ilişkin veriler Boğaziçi Üniversitesi Kandilli Rasathanesi Bölgesel Deprem-Tsunami İzleme ve Değerlendirme Merkezi (BDTİM) Deprem Sorgulama Sisteminin veritabanından çekilmiştir.

(<http://www.koeri.boun.edu.tr/sismo/zeqdb/>)

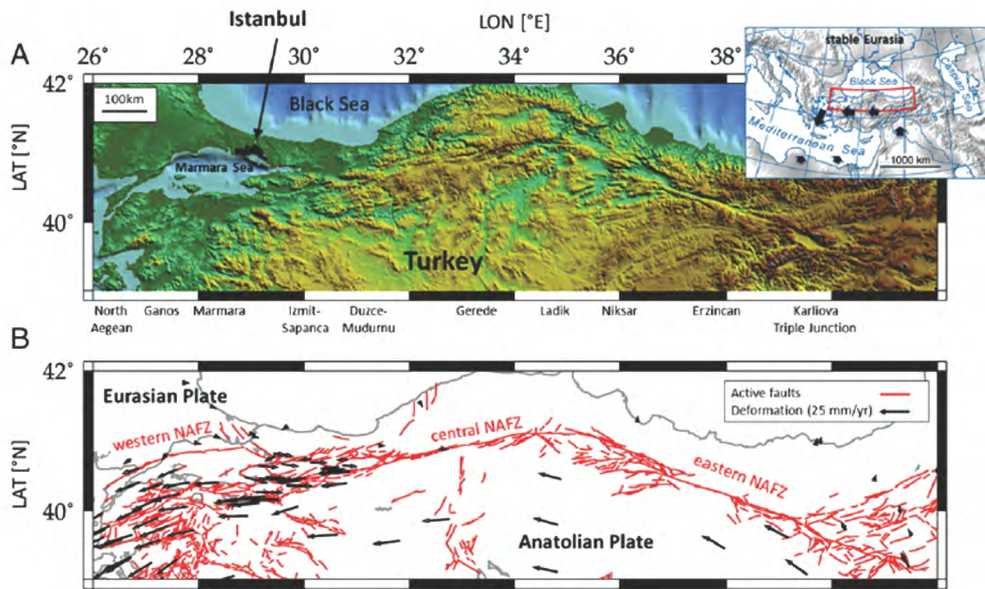
Bohnhoff ve ark. (2016) Kuzey Anadolu Fay Hattı'nın değişik bölgelerini deprem kataloglarından yararlanarak fay aktivitesi ve jeolojik özelliklerine göre büyük deprem yaratma açısından incelemişlerdir. Bu amaçla Kuzey Anadolu Fay Hattı'nı batı, orta ve doğu kesim olmak üzere 3 farklı bölgeye ayırmışlardır. Uygulanan analizler sonucu fay hattının doğu bölümünde 8 civarı büyüklükte depremler gözlenmiştir. Ayrıca fay hattının yeni oluşan ve yoğun nüfus oranına sahip batı bölümünde gerçekleşecek maksimum deprem büyüklüğünün 7.5'ü aşmayacağı tahmin edilmiştir. Katalog ise diğer yabancı kaynaklardan derlenmiş ve milattan önceki yıllardan itibaren gerçekleşen depremler de ele alınmıştır.

Kuzey Anadolu fay hattı üzerinde gerçekleşen 1950 yılından itibaren gerçekleşen önemli depremler Çizelge 6.3'te verilmiştir. Yakın zamanda gerçekleşen büyük ve önemli depremlerin çoğunun hattın batı ve doğu bölgesinde gerçekleştiği görülmektedir.

**Çizelge 6.3.** Kuzey Anadolu Fay Hattında 1950-2017 yılları arasında gerçekleşen bazı önemli depremler

| Deprem            | Büyüklik |
|-------------------|----------|
| 1951 Kurşunlu     | 6.8      |
| 1957 Bolu- Abant  | 6.8      |
| 1966 Varto        | 6.6      |
| 1967 Bolu-Mudurnu | 7.0      |
| 1971 Bingöl       | 6.8      |
| 1992 Erzincan     | 7.0      |
| 1999 İzmit        | 7.4      |
| 1999 Düzce        | 7.2      |
| 2010 Elazığ       | 6.0      |
| 2011 Van          | 7.2      |

Çalışma alanı ve Kuzey Anadolu Fay Hattı Şekil 6.1’de gösterilmiştir. Kuzey Anadolu Fay Hattı Türkiye’nin doğu sınırına yakın bir konumdan başlayarak en batı ucuna doğru yönelmektedir. Ayrıca fay hattındaki yıpranmaların da çoğunlukla doğu-batı yönlü olduğu şekilde görülmektedir. B.Ü. Kandilli Rasathanesi BDTİM Deprem Sorgulama Sistemi’nden belirtilen zaman aralığı ve koordinatlar içerisinde yer alan depremler görselleştirilmeye çalışılmıştır. Öncelikle elde edilen verinin özelliklerinin belirlenmesi ve analizlerin yapılmadan önce belirli örüntülerin ortaya konulması adına açıklayıcı veri analizi tekniklerinden oluşan grafiksel teknikler kullanılmıştır.

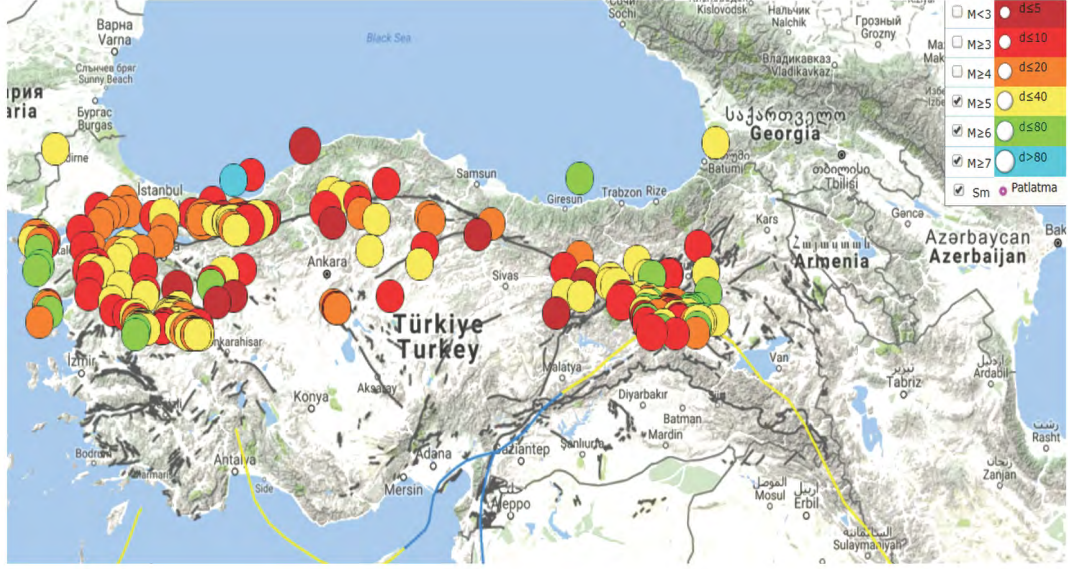


**Şekil 6.1.** Kuzey Anadolu Fay hattı ve Kuzey Türkiye topografik haritası (Bahnhoff vd., 2016)

John W. Tukey (Tukey, 1977) açıklayıcı veri analizini sayısal ya da grafiksel bir dedektiflik işi olarak tanımlamıştır. Bu çalışmada ele alınan deprem kataloğunun ayrı ayrı olmak üzere mekânsal ve zamansal kümelenmeleri ve mekân-zamansal kümelenmelerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultuda istatistiksel analizlerin uygulanmasından önce ilk izlenimler açıklayıcı veri analizi yardımı ile elde edilebilir. Ayrıca kullanılacak grafiksel teknikler ilgili deprem kataloğu hakkında önceden bilgisi olmayan bir araştırmacı için büyük önem arz edecektir. Bu şekilde araştırmacı kendi çıkarımlarını yaparak büyük depremlerin gerçekleştiği yılları, konumları, deprem sıklıklarını vb. birçok konu hakkında veriyi istatistiksel olarak test etmeden bilgi sahibi olabilecektir.

B.Ü. Kandilli Rasathanesi BDTİM Deprem Sorgulama Sistemi'nde, istenen özelliklere göre deprem kataloğunun oluşturulmasının yanı sıra, verinin konum, büyüklük ve derinlik özellikleri görsel olarak harita yardımıyla da araştırmacıya sunulmaktadır.

Şekil 6.2'de B.Ü. Kandilli Rasathanesi BDTİM Deprem Sorgulama Sistemi'nden elde edilen harita verilmektedir. Deprem büyüklükleri dairelerin büyüklükleri ile doğru orantılı olarak gösterilmeye çalışılmış, derinlikleri ise farklı renkler atanarak konum ile birlikte görselleştirilmiştir. Fakat belirli bir büyüklüğün üzerindeki daireler büyüklükler için ayırt edici gözükmemekte ve yakın konumlardaki depremler için harita üzerinde çakışmaktadır. Ayrıca renkler de haritayı karmaşık hale getirmekte ve derinliklerin yorumlanmasını zorlaştırmaktadır. Bu dezavantajlara ek olarak içi dolu daireler ile yapılan gösterim de yakın konumda gerçekleşen depremlerin ayırt edilememesine yol açmaktadır.

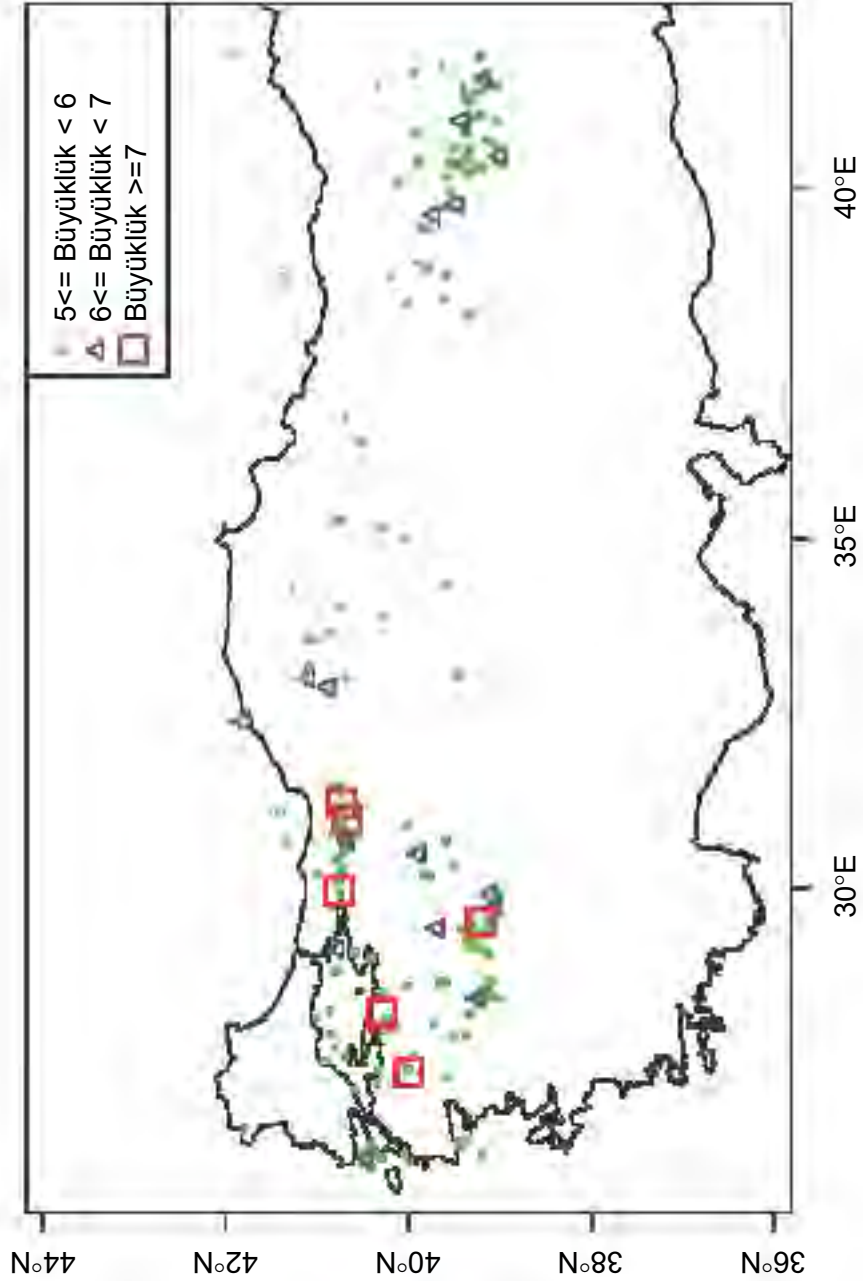


**Şekil 6.2.** 1950-2017 yılları arasında kuzey anadolu fay hattında meydana gelen depremler (B.Ü. Kandilli Rasathanesi BDTİM Deprem Sorgulama Sistemi)

Bu eksikleri gidermek amacı ile R programı ile deprem konumları ile birlikte sadece deprem büyüklüklerini içeren ya da deprem konumları ile birlikte sadece depremlerin gerçekleştiği derinliği gösteren haritalar hazırlanabilmektedir. R programı istatistiksel hesaplamaların yapılabildiği ve grafiksel görselleştirilmelerin yapılabildiği açık kaynak kodlu bir yazılımdır. S dilinin gelişmiş bir hali olan R dili akademisyenler, bilgisayar programcıları ve çeşitli bilim dallarındaki uzmanlar tarafından birçok paketi farklı istatistiksel analizleri gerçekleştirmek amacı ile kullanıcıya sunmaktadır. “aspace”, “ssEDA” ve “ssBase” paketleri bu bölümde kullanılan R paketleridir. (R Core Team, 2016 ; Harte & Brownrigg , 2017; Randy, Buliung and Remmel, 2012)

“aspace” paketi mekansal nokta örüntüleri için merkezi eğilim ve değişkenlik ölçülerinin hesaplanmasında kullanılmaktadır. “ssEDA” ve “ssBase” paketleri ise kapsamlı bir şekilde deprem katalogları için açıklayıcı veri analizi tekniklerini, grafikler ve görselleştirmeleri araştırmacıya sunmaktadır.

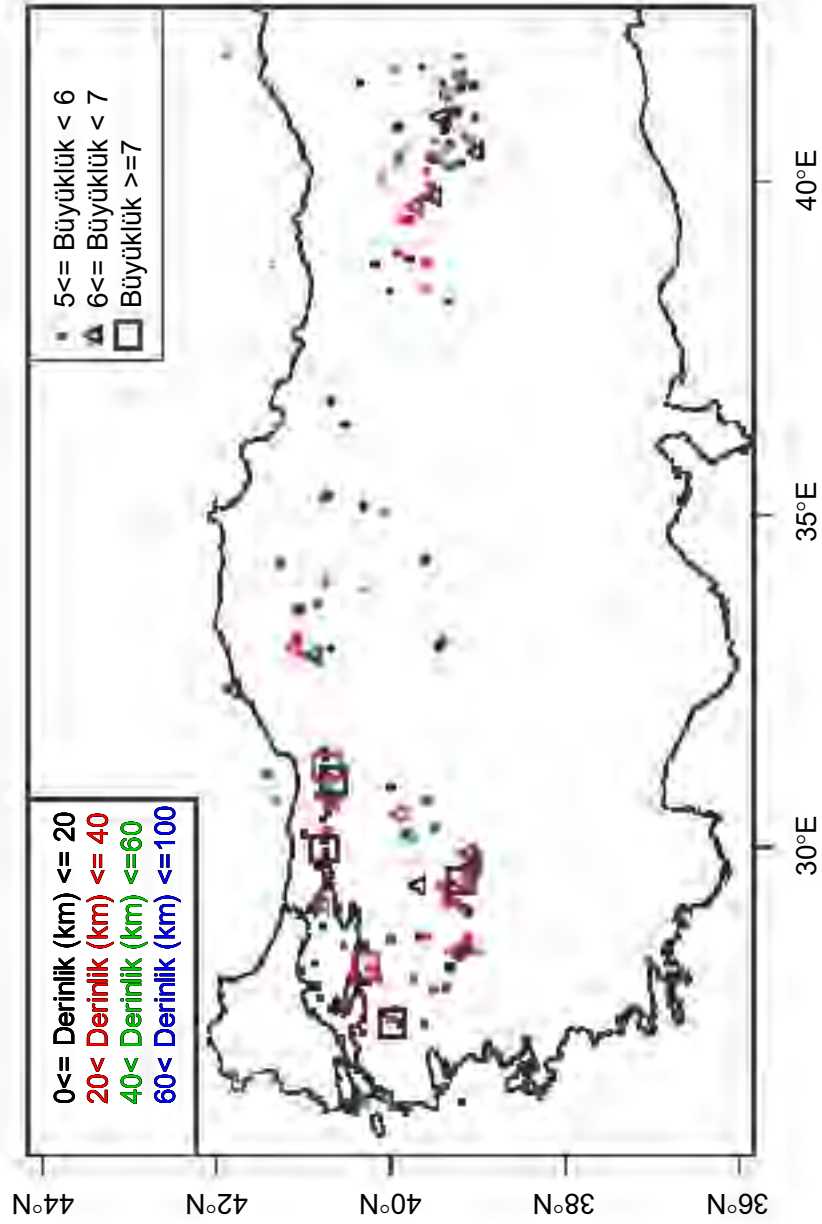
Şekil 6.3’te deprem büyüklükleri ve deprem konumlarını içeren bir harita R programı kullanılarak elde edilmiştir. Bu şekilde depremler büyüklüklerine göre kategorize edilmiş ve her bir kategori ayrı bir karakter ile temsil edilmiştir. Görselliğin artırılması amacı ile 6 ve 7 şiddetinden büyük depremler içi boş karakterler ile sembolize edilmiştir. Örneğin içi boş üçgen karakteri gerçekleşen depremin şiddetinin sol uç değer dahil olmak üzere 6-7 aralığında olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak çalışma bölgesinde gerçekleşen depremler daha iyi bir şekilde görselleştirilmeye çalışılmıştır.



**Şekil 6.3.** 1950-2017 yılları arasında çalışma alanında büyüklüklerine göre meydana gelen depremler

Çalışma alanında gerçekleşen depremlerin hem derinlik hem de büyüklüklerine ilişkin haritası Şekil 6.4'te verilmektedir. Burada renkler farklı derinlik kategorilerini gösterirken deprem büyüklükleri de farklı nokta karakterleri ile sembolize edilmiştir. Böylelikle haritanın karmaşıklığı azaltılmaya ve harita üzerinde seçilen bir depremin özellikleri daha iyi bir şekilde belirtilmeye çalışılmıştır.



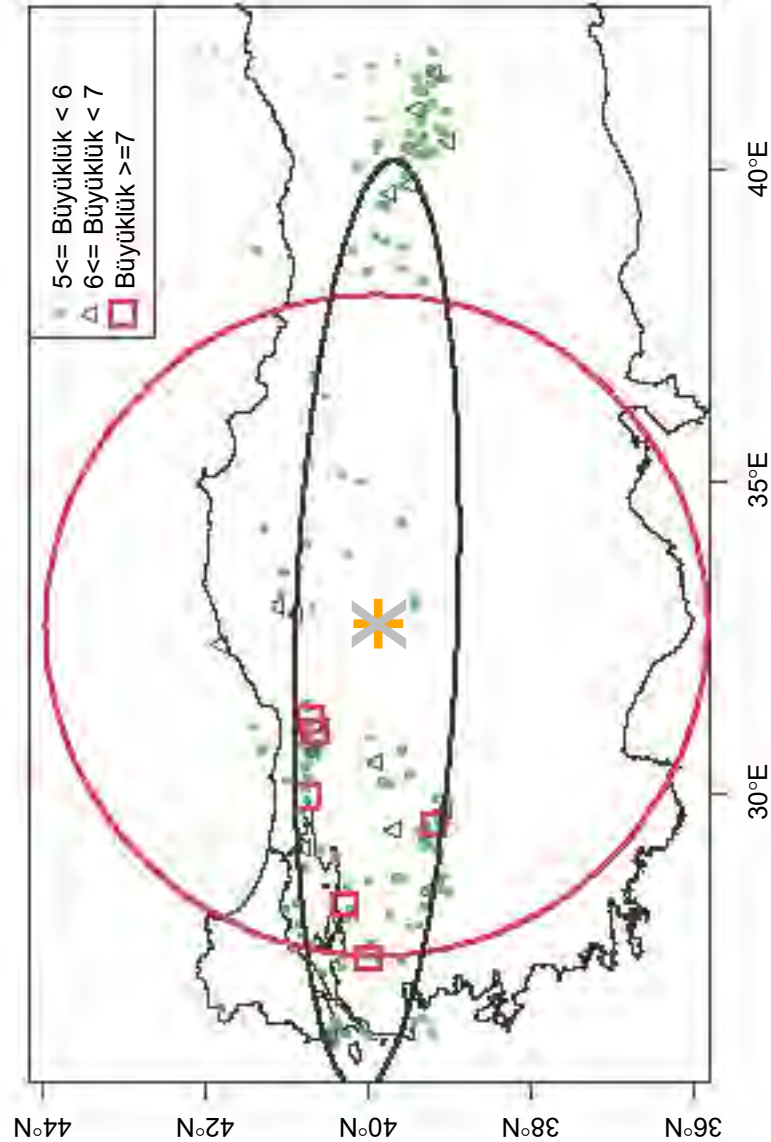


**Şekil 6.4.** 1950-2017 yılları arasında çalışma alanında büyüklüklerine ve derinliklerine göre meydana gelen depremler

Örneğin Şekil 6.4’ te bir depremin büyüklüğü ve derinliğini belirlemek için önce üstte yer alan açıklamadaki sembolüne daha sonra ise altta yer alan açıklamadaki renk sınıfına bakılmalıdır. Şekil 6.4’ teki haritada kare şeklinde ve kırmızı renge sahip bir deprem şiddeti 7’den büyük ve gerçekleştiği derinliğin yer yüzeyinden 20 ile 40 km uzakta gerçekleşen bir deprem olduğu yorumu yapılabilir.



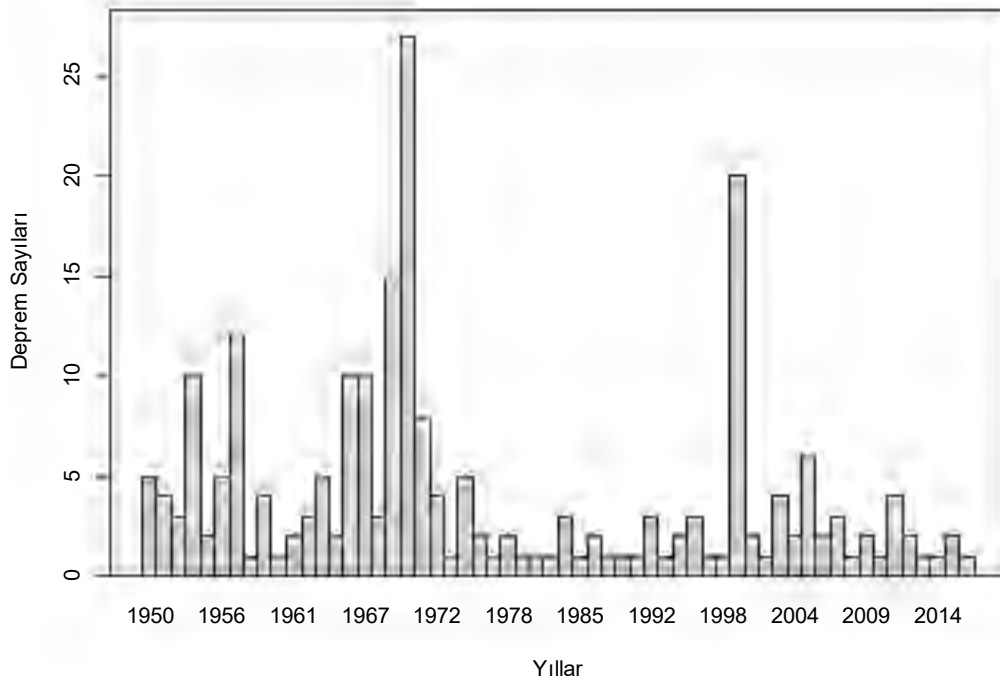
Şekil 6.5'te belirtilen zaman aralığı ve çalışma alanındaki depremlerin oluşturduğu nokta örüntüleri için merkezi eğilim ölçüleri ve değişkenlik ölçüleri verilmiştir.



Şekil 6.5. Deprem nokta örüntüleri için merkezi eğilim ölçüleri ve saçılım ölçüleri

Şekil 6.5'te, + ve × sembolleri ile sırasıyla ortalama merkez ve ağırlıklandırılmış ortalama merkez verilmektedir. Ağırlıklandırma işlemi büyüklük değişkeni kullanılarak yapılmıştır. Gerek büyüklük değişkeninin değişim aralığının çok küçük olması ve gerek 7'den büyük deprem sayısının çok az olması ortalama merkez ve ağırlıklandırılmış ortalama merkez arasında büyük bir farklılık olmamasına yol açmıştır. Ortalama merkez etrafında çizilen büyük daire standart uzaklık çemberidir. Standart uzaklık çemberi enlem

ve boylamlardaki değişkenliği eşit olarak değerlendirdiği için nokta örüntüleri için çoğu zaman belirleyici bir saçılım ölçüsü niteliğinde değildir. Standart elips nokta örüntüsünün ortalama merkez etrafındaki değişkenliğini enlem ve boylamlardaki değişkenliği ayrı ayrı ele aldığı için daha iyi temsil etmektedir. şekilden boylamlardaki değişkenliğin enlemlerdeki değişkenlikten fazla olduğu görülmektedir. Bu aynı zamanda çalışma alanının seçimi ile de ilgilidir. Dolayısıyla standart elips, fay hattının yönsel yanlılığını da gözler önüne sermektedir.

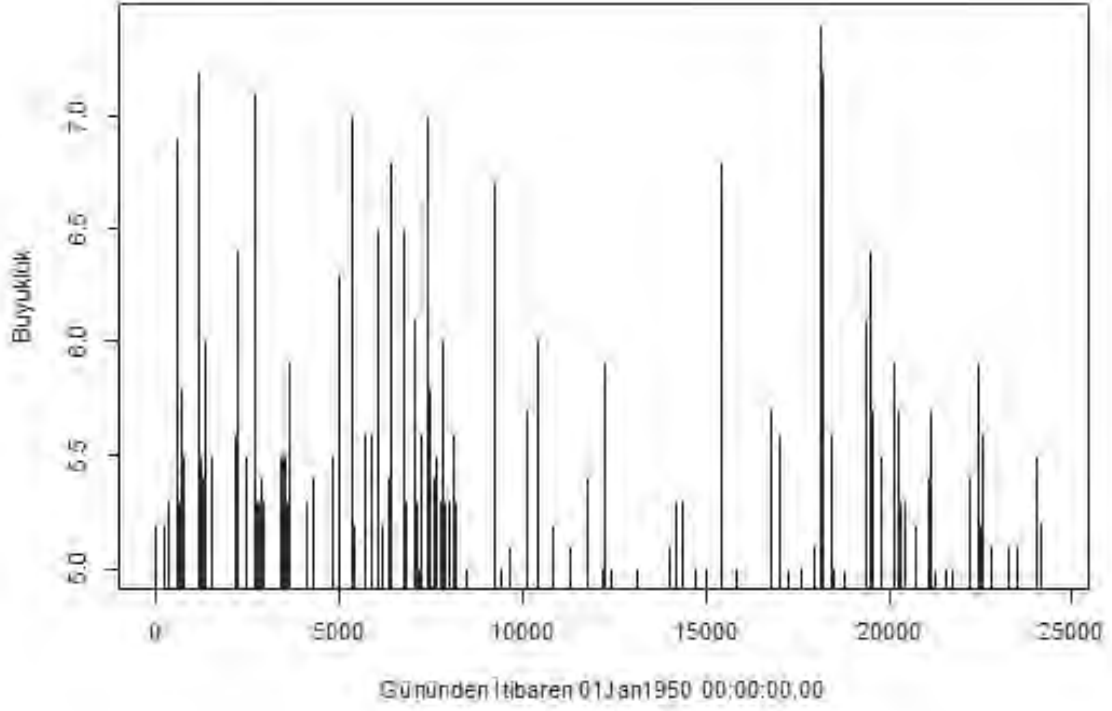


**şekil 6.6.** Yıllara göre deprem sayıları

şekil 6.6’da, yıllara göre gerçekleşen deprem sayıları verilmiştir. Son yıllarda 5 ve üzerindeki büyüklükte daha az deprem gerçekleştiği görülmektedir. Ayrıca 1999 İzmit ve Düzce depremleri ve aynı şekilde 1966 Varto ile 1971 Bingöl depremlerinin gerçekleştiği yıllarda diğer yıllara kıyasla daha fazla sayıda deprem gözlenmiştir. Bu da büyük depremlerin beraberinde artçı şokları da tetiklemesinden kaynaklanabilir.

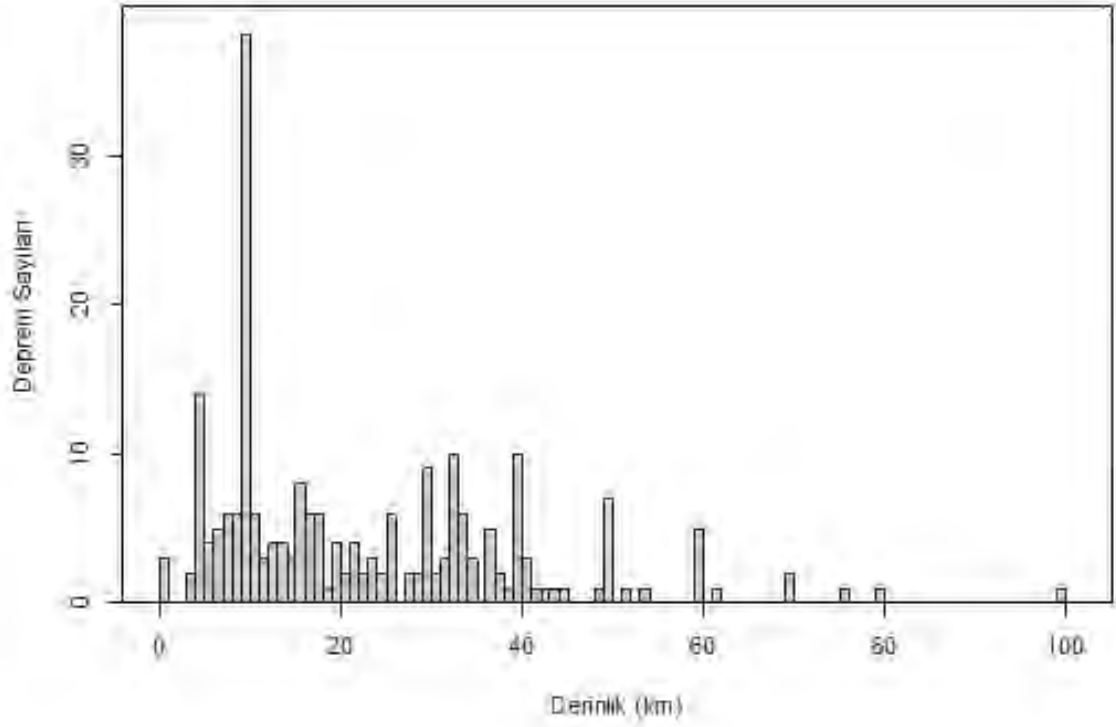
şekil 6.7’de başlangıç anı sıfırın gün olmak üzere deprem büyüklüklerinin gelişimi incelenmiştir. şekilden de görülebileceği üzere 10000 - 15000’nci günler arasında deprem sıklıklarının azaldığı görülmüştür. Burada büyük depremlerin

gerçekleşme zamanları ile birlikte depremlerin ilgili zaman periyodundaki zamanla gelişimleri gözlenebilir.



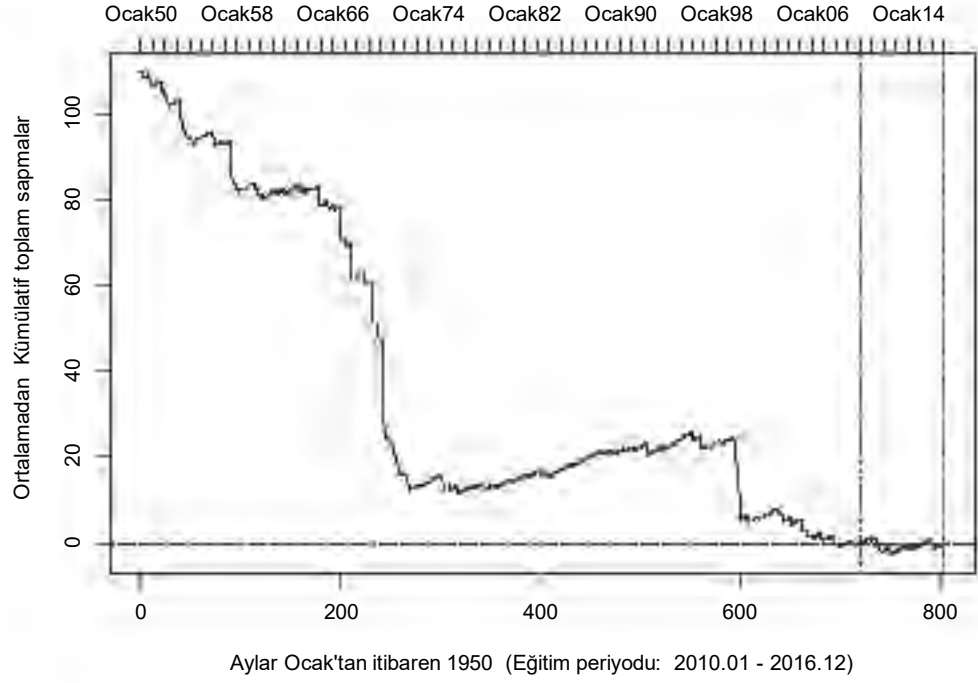
**Şekil 6.7.** Başlangıç anından itibaren depremlerin zaman içerisindeki büyüklüklerinin gelişimi

Şekil 6.8’de depremlerin gerçekleştiği derinliklere ilişkin histogram verilmiştir. Şekle göre, ilgili zaman aralığı ve çalışma alanı içerisindeki bölgede gerçekleşen depremlerin daha çok yerin 0-40 km. altında bir derinlikte gerçekleştiği görülmüştür. Bu derinlik aralığından büyük derinliklerde ise deprem sıklığının oldukça az olduğu görülmektedir.



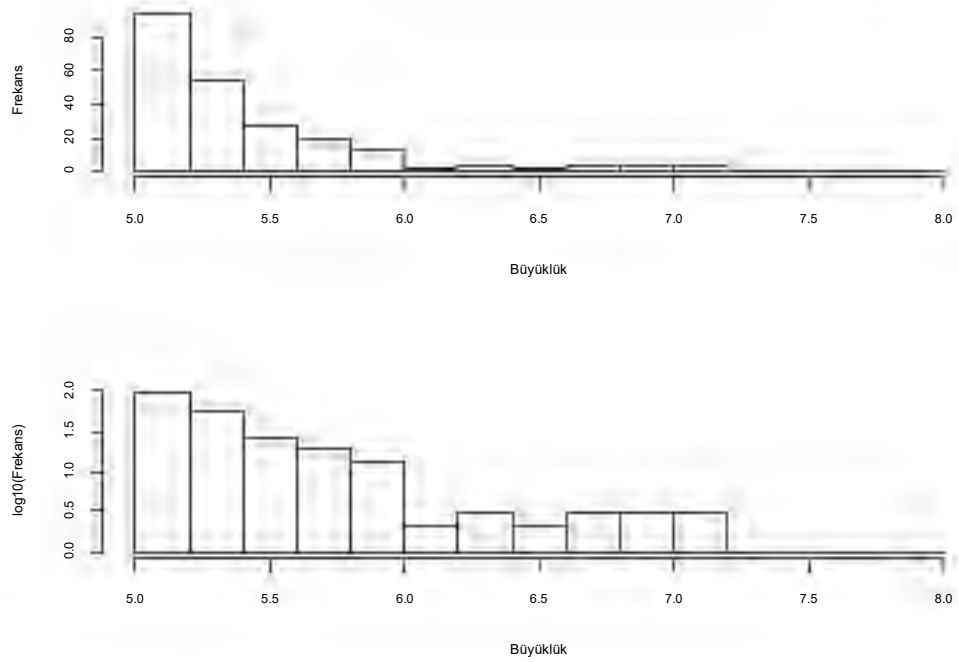
**Şekil 6.8.** Deprem derinliklerine ilişkin histogram

Şekil 6.9’da ortalama deprem sıklığından sapmalar grafiği verilmiştir. Bu grafikte belirli bir eğitim periyodundaki deprem sıklıkları göz önüne alınarak, baz alınan bu dönem ile diğer dönemlerdeki deprem sıklıkları karşılaştırılır. Bu grafik bir zaman serisi grafiği olan kümülatif toplamlar grafiğinin ters grafiğidir. Şekil sağdan sola incelenir ve meydana gelen artışların eğitim periyoduna göre daha fazla sıklıkta deprem gerçekleştiği, azalışların ise eğitim periyoduna göre daha az sıklıkta deprem gerçekleştiği söylenir.



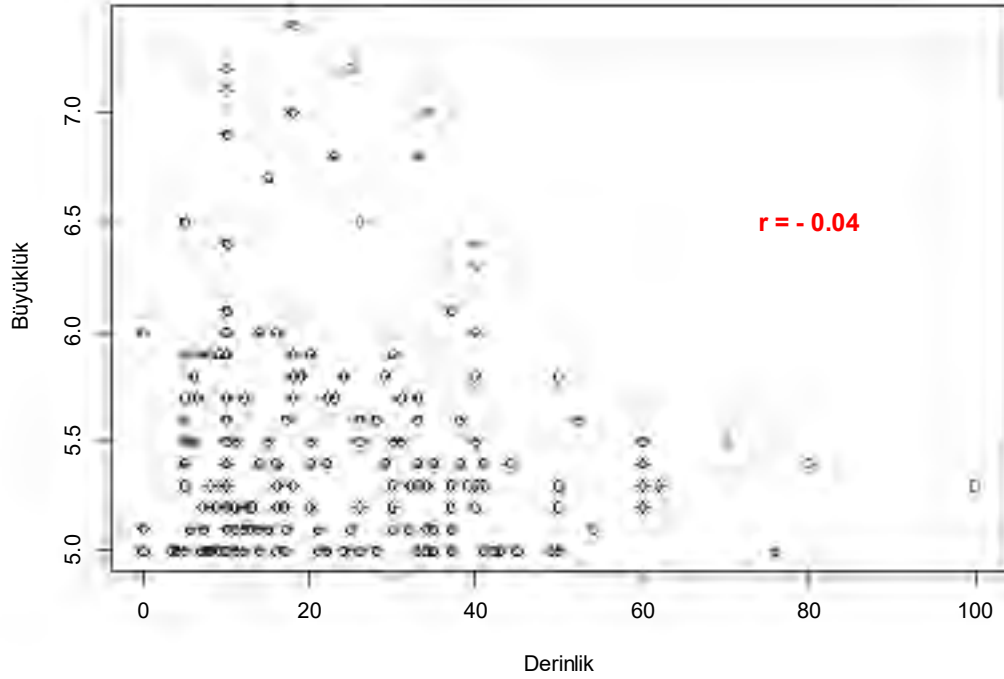
**Şekil 6.9.** *İncelenen eğitim periyoduna göre deprem sıklıkları değişimi*

Deprem büyüklüklerinin histogramı ise Şekil 6.10'da verilmektedir.



**Şekil 6.10.** *Deprem büyüklüklerine ilişkin histogram*

Deprem büyüklüklerinin literatürde verilen Gutenberg- Richter kuralına göre üstel dağılım gösterdiği bilinmektedir. Dolayısıyla çalışma alanı ve verilen zaman aralığında gerçekleşen depremlerin büyüklükleri arttıkça görülme sıklıkları azalacaktır. Deprem sayılarının logaritmik dönüşümü ise üstel dağılıma uygunluğun gösterilmesi amacı ile yapılabilir.



Şekil 6.11. Depremlerin büyüklük ve derinliklerini içeren saçılım grafiği

Ayrıca depremlerin büyüklükleri ve derinlikleri arasındaki ilişki Şekil 6.11’de saçılım grafiğinde incelenmiştir. Bu iki değişken arasındaki korelasyon değeri çok küçük ve negatif olarak hesaplanmıştır. Sonuç olarak depremlerin büyüklükleri ve gerçekleştiği derinlik arasında bir ilişki olmadığı yorumu yapılabilir.

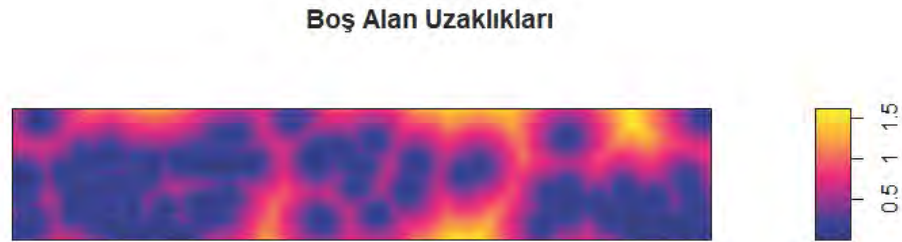
## 6.2. Depremlerin Mekânsal Olarak İncelenmesi

Bir mekânsal nokta örüntüsü olarak depremlerin tam mekânsal rassallığı sağlayıp sağlamadığı araştırmacılar için ilgi çekici bir konudur. Deprem örüntülerinin tam mekânsal rassallığa sahip olup olmaması birçok kritere bağlıdır. Bunlardan birkaçı sıralanmak istenirse: çalışma alanının büyüklüğü, çalışma için seçilen zaman aralığı ve çalışmadaki depremlerin büyüklük aralıkları bunlardan sadece birkaçıdır. Aynı zamanda

depremlerin yapıları da bu duruma katkı sağlamaktadır. Büyük depremlerin kendilerine yakın konumlarda ve daha küçük büyüklükte artçı şokları oluşturması da mekânsal kümelenmenin gerçekleşmesine yol açabilmektedir.

Bir deprem kataloğundaki depremlerin mekânsal rassallık, kümelenme ya da düzenlilik nokta örüntülerinden birine sahip olup olmaması için belirli uzaklık türleri (gözlenen) ve bu uzaklıkların teorik dağılımları (teorik değerleri) arasındaki farklar belirleyici özellikler taşımaktadır. İstatistiksel testlere geçmeden önce bu uzaklıklardan bazılarının görsel olarak incelenmesi faydalı olacaktır.

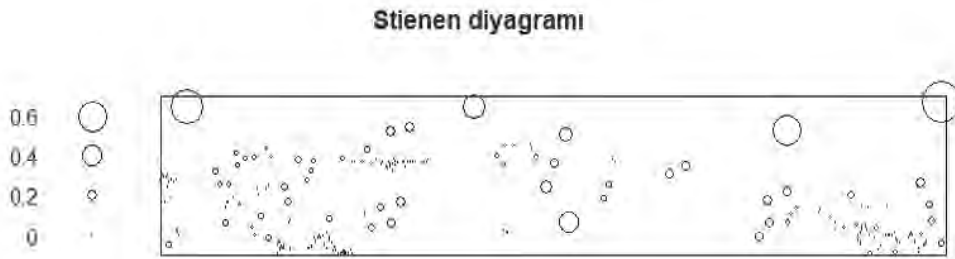
Bu bölümdeki analizler ve görselleştirmeler R programının “spatstat” paketi kullanılarak yapılmıştır (Baddeley, Rubak, & Turner, 2015). “spatstat” paketi kapsamlı bir şekilde mekânsal nokta örüntüleri analizi için kullanılan kapsamlı bir R paketidir. Çok değişkenli nokta örüntüleri, tam mekânsal rassallık testleri, mekânsal nokta örüntülerinin ortalama ve kovaryans özelliklerinin analizi bu paketin içerdiği analizlerden bazılarıdır. Şekil 6.12’de boş alan uzaklıkları verilmiştir. Bu uzaklık önceki bölümlerde değinilen nokta-en yakın komşuluk uzaklığıdır. Şekilde sarı alanlardaki keyfi noktalardan deprem noktalarına olan uzaklıklar daha büyük olup renk koyulaştıkça (mavileştikçe) keyfi noktalardan depremlere olan uzaklıklar daha az olacak, dolayısıyla keyfi noktalar depremlere daha yakın olacaktır.



**Şekil 6.12.** *Boş Alan Uzaklıkları*

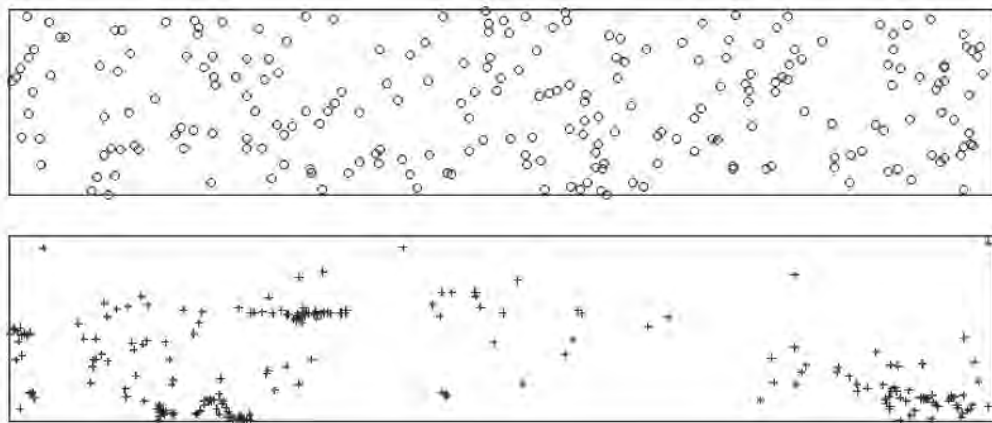
Bir diğer önemli uzaklık ise en yakın komşuluk uzaklığıdır. En yakın komşuluk uzaklığı ve felsefesi mekânsal nokta örüntülerinin yanı sıra istatistikte kümeleme algoritmalarında ve regresyonda da sıklıkla kullanılan bir kavramdır. Nokta örüntülerinde ise tam mekânsal rassallıktan sapmalar için kullanılmaktadır. Bir olayın etrafındaki küçük bir alanda çok fazla olayın yer alması kümelenme olması, aksi ise düzenlilik örüntüsünün gerçekleştiğine işaret eder.

Şekil 6.13'te en yakın komşuluk uzaklıkları Stienen diyagramı ile gösterilmiştir. Stienen diyagramında her bir olayın (deprem) en yakın uzaklığı kendi üzerinde uzaklığa orantılı bir çapı olan daireler şeklinde çizilir. En yakın komşuluk uzaklığı çok küçük olan olaylar şekilde nokta ile gösterilmiştir. Uzaklık arttıkça bu noktalar gittikçe çapı da uzaklıkla doğru orantılı olarak artan daireler haline gelmiştir. Diyagramın sağ üst ve sol üst tarafında bulunan noktaların en yakın komşuluk uzaklıklarının diğerlerinden daha fazla olduğu görülmektedir.



**Şekil 6.13. Stienen Diyagramı**

Tam mekânsal rassallık ile ilgili istatistiksel testlere geçmeden önce kullanılabilecek yararlı bir teknik ise benzetimdir. İlgili çalışma alanında yapılan homojen poisson nokta sürecinin benzetimi sonucu elde edilen tam mekânsal rassal örüntü gözlenen örüntü ile karşılaştırılabilir. Şekil 6.14'de gözlenen deprem örüntüsü (altta) ile benzetim ile elde edilen örüntü verilmiştir.

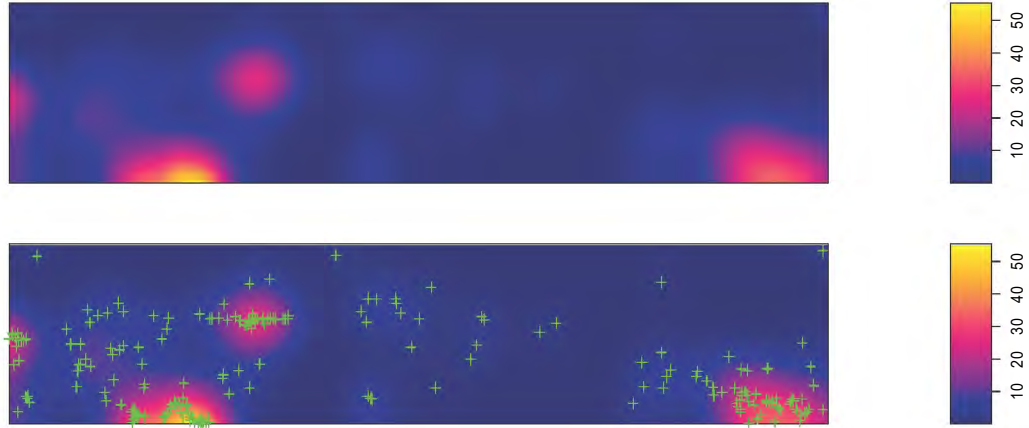


**Şekil 6.14. Deprem örüntüsü ve Mekânsal Poisson Süreci Benzetimi**

Bir nokta örüntüsünde merak edilen ilk konulardan biri birim yoğunluk üzerindeki anomalilerinin tespit edilmesidir. Sıcak nokta ve soğuk nokta kavramları sırasıyla



ortalama birim yoğunluğa göre birim yoğunluktaki artış ve azalışın yer aldığı bölgelerdir. Sıcak noktalar aynı zamanda kümelerin oluştuğu ve kümelenmenin olabileceğine dair bir işaret olarak değerlendirilir. Bunu saptamanın en basit yollarından biri ise kernel fonksiyonları yardımı ile tahmin yapılmasıdır. (Baddeley, Rubak, & Turner, 2015)



**Şekil 6.15.** Birim Yoğunluğun Kernel Fonksiyonu ile Tahmini ve Nokta Örüntüsü Üzerinde Çakıştırılması

Şekil 6.15'te deprem nokta örüntüsüne ilişkin birim yoğunlukların çalışma alanı üzerinde tahmini yapılmıştır. Aynı zamanda alttaki grafikte bu yapılan tahmin üzerine nokta örüntüleri çakıştırılarak birim yoğunluğun yüksek tahmin edildiği alanlar ile örüntünün ne kadar örtüştüğü gözlemlenebilmektedir. Renk skalasında koyu mavilerden kırmızı ve sarıya doğru geçiş birim yoğunluğun arttığı anlamına gelmekte ve soğuk noktalardan sıcak noktalara geçişin olduğu şeklinde yorumlanmaktadır. Aynı zamanda sarı ve kırmızı bölgelerin, kümelenme ve büyük bir deprem varlığı açısından incelenmesi faydalı olacaktır. Eğer Kuzey Anadolu fay hattı 3 bölümde incelenseydi, orta bölümün birim yoğunluğu düşük, batı ve doğu bölümlerinin ise yüksek birim yoğunluğa sahip olduğu şeklinde sınıflandırılabilirdi.

Şekil 6.16' da kuadrat sayıları, ilgili çalışma alanı için verilmiştir. Şekildeki her bir birim karede yer alan değerler, sırasıyla gözlenen olay sayısı, beklenen olay sayısı ve yapılan ki-kare testi için artık değerleridir. Kuadrat testi esasen ki kare testini baz alır. Homojen bir örüntünün olduğu durumda her bir eş alanlı karede yaklaşık olarak eşit sayıda olayın gözlenmesi beklenmektedir. Testin uygulanması aşamasında karşılaşılabilecek önemli bir sorun ise çok sayıda olay gözlenmeyen kuadrat olabilmesi durumudur. Bunu önlemek amacı ile sütunlar (boylamlar) ya da satırlar (enlemler) birleştirilebilir. Bu sorunun önlenmesi için çalışmada sütunlar 16 yerine 8'e bölünmüştür.

Testte bu sayıların belirlenmesi araştırmacıya bırakılmıştır ama bununla birlikte sütun ya da satır sayısının seçimi subjektif hale gelmiştir. Testin gücü toplam kuadrat sayısı ve tek ya da çift taraflı test seçimine bağlıdır.

|                |                 |               |                 |               |               |                 |                |
|----------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|----------------|
| +1 9.4<br>-2.7 | 1 9.4<br>-2.7   | 2 9.4<br>+2.4 | + 5 9.4<br>-1.4 | 1 9.4<br>-2.7 | 0 9.4<br>-3.1 | 1 9.4<br>+2.7   | 1 9.4<br>-2.7  |
| 21 9.4<br>3.8  | 12 9.4<br>+0.86 | 20 9.4<br>6.7 | 4 9.4<br>-1.8   | 5 9.4<br>-1.4 | 2 9.4<br>-2.4 | 2 9.4<br>+2.4   | 2 9.4<br>-2.4  |
| 13 9.4<br>1.2  | 54 9.4<br>1.5   | 6 9.4<br>-1.1 | 4 9.4<br>-1.8   | 1 9.4<br>-2.7 | 0 9.4<br>-3.1 | 11 9.4<br>+0.53 | 46 9.4<br>+1.2 |

**Şekil 6.16.** Kuadrat Sayıları (gözlenen nokta sayısı, beklenen nokta sayısı ve artık değerler)

Ki-kare testi sonuçları Çizelge 6.4’de verilmiştir. Yapılan çift taraflı test sonucunda p değeri sıfıra oldukça yakın küçük bir sayı olarak hesaplanmıştır ve  $H_0$  hipotezi reddedilir. Dolayısıyla örüntünün tam mekânsal rassallığa sahip olmadığı ve sürecin homojen poisson nokta süreci olmadığı sonucuna varılır. Test tek yönlü olarak da gerçekleştirilebilir. Alternatif hipotezin örüntünün kümelenmiş bir örüntü olduğu durumda da p değeri sıfıra oldukça yakın küçük bir sayı olarak hesaplanmıştır ve  $H_0$  hipotezi reddedilir. Bu iki test sonucunda ise deprem örüntüsünün tam mekânsal rassallık göstermediği ve kümelenmiş bir örüntü olduğu şeklinde yorumlanır.

**Çizelge 6.4.** TMR testi için ki kare değerleri

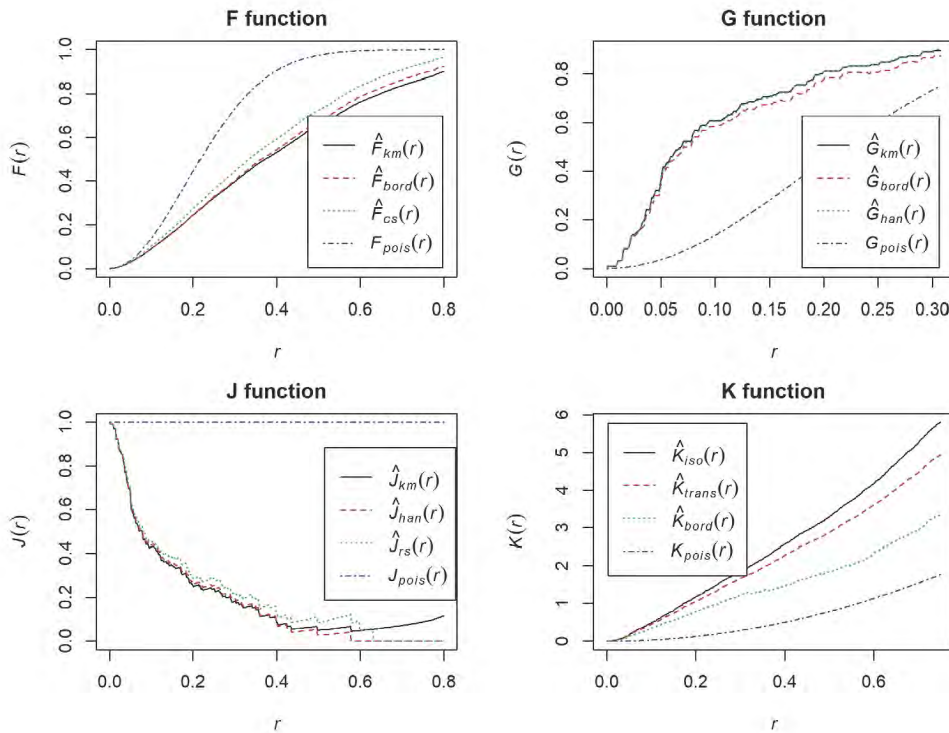
| Alternatif hipotez çift yönlü<br>TMR sınaması    | Serbestlik derecesi | Pearson Ki-kare değeri                           | p değeri |
|--------------------------------------------------|---------------------|--------------------------------------------------|----------|
|                                                  | 23                  | 516.01                                           | 0.0000   |
| Alternatif hipotez tek yönlü<br>kümelenme durumu | Serbestlik derecesi | Koşullu monte-carlo ki kare<br>testi test değeri | p değeri |
|                                                  | 23                  | 516.01                                           | 0.0005   |

Şekil 6.17’ de tam mekânsal rassallığın uzaklıklara ve K fonksiyonuna dayalı test sonuçlarına ilişkin grafikler bir arada verilmiştir. F, G, J, K fonksiyonlarının belirli bir r yarıçapındaki uzaklık değeri verilen fonksiyonların için homojen poisson nokta sürecindeki teorik değerleri ile örüntüden elde edilen tahmin değerleri karşılaştırılır. Testlerin sonucunda yapılan yorum ise kullanılan fonksiyona göre değişiklik gösterecektir. F fonksiyonu boş alan uzaklıklarını ele alan bir fonksiyondur. Kümelenmiş bir örüntüde tam mekânsal rassal bir örüntüye kıyasla fonksiyon değerlerinin daha küçük olması beklenir. Şeklin sol üstünde grafikteki  $F_{pois}(r)$  değerleri gözlenen  $\hat{F}$

değerlerinden büyüktür.  $r$  uzaklığı arttıkça öncelikle teorik değer ile tahmin edilen değer arasındaki fark artmakta; yüksek  $r$  değerlerinde ise bu fark kapanmakta fakat hiçbir zaman  $F_{pois}(r)$  değerinin üzerinde seyretmemektedir. Sonuç olarak test edilen örüntünün kümelenmiş bir örüntü olduğu söylenir.

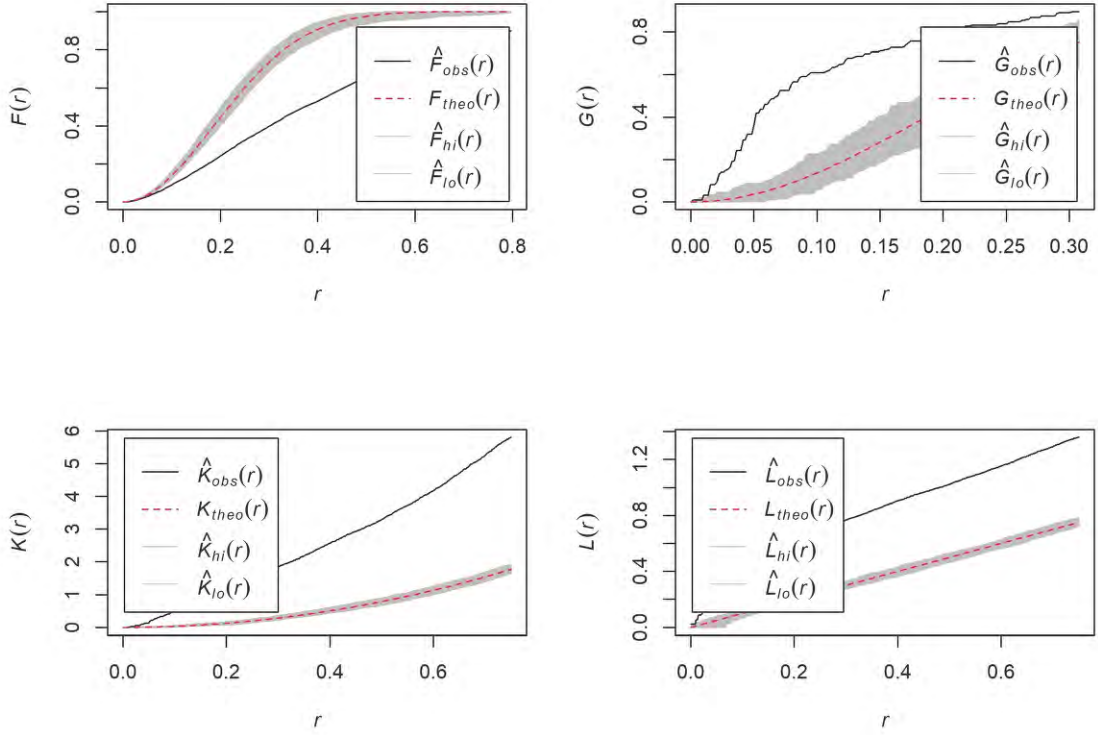
$G$  fonksiyonu en yakın nokta uzaklıklarını ele alan bir fonksiyondur. Kümelenmiş bir örüntüde tam mekânsal rassal bir örüntüye kıyasla fonksiyon değerlerinin daha büyük olması beklenir. Daha küçük  $r$  uzaklığında en yakın komşulukta bulunan nokta sayısının çok olması düşünülecektir. Şeklin üst solundaki grafikteki  $G_{pois}(r)$  değerleri gözlenen  $\hat{G}$  değerlerinden küçüktür.  $r$  uzaklığı arttıkça öncelikle teorik değer ile tahmin edilen değer arasındaki fark artmakta; yüksek  $r$  değerlerinde ise bu fark kapanmakta fakat hiçbir zaman  $G_{pois}(r)$  değerinin altında seyretmemektedir. Dolayısı ile örüntünün kümelenmiş bir örüntü olduğu sonucuna ulaşılır.

Şeklin sol altında yer alan  $J$  fonksiyonu ise  $G$  ve  $F$  fonksiyonlarından yararlanılarak elde edilen bir fonksiyondur. Tam mekânsal rassal bir örüntü için  $F$  ve  $G$  fonksiyonlarının birbirine oldukça yakın çıkması beklenir.  $J$  fonksiyonu 1 değerinin altında ise  $G$  fonksiyonu değeri  $F$  'den büyük olacak ve örüntü kümelenmiş bir örüntü olacaktır. Verilen örüntüdeki  $J$  fonksiyonu değeri 1' in altında yer aldığı için örüntü kümelenmiş bir örüntüdür.



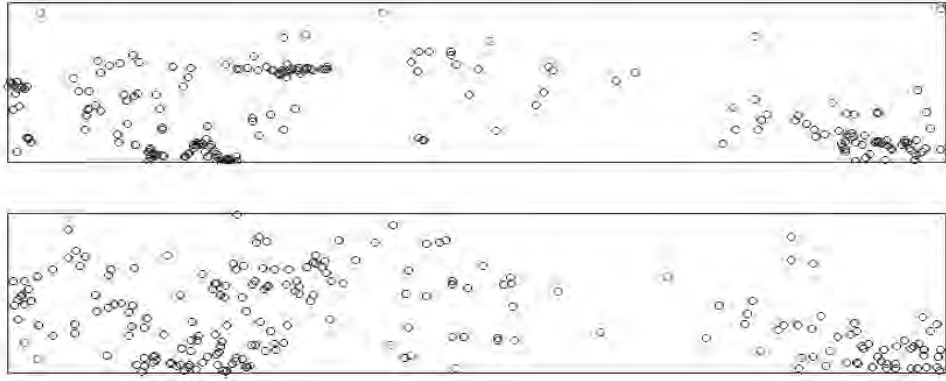
Şekil 6.17. Tam Mekânsal Rassallığa İlişkin Uzaklık Testleri ve K Testi Sonuçları

Şekil 6.17’de,  $\hat{K}(r) > \pi r^2$  olduğundan yani teorik K fonksiyonu değerleri gözlemlenen fonksiyon değerlerinden küçük olduğundan test edilen nokta örüntüsünün kümelenmiş bir örüntü olduğu söylenebilir. Ayrıca K fonksiyonu noktalar arasındaki etkileşimin (korelasyonun) bir ölçüsüdür. Bu bağlamda ise olaylar arasında pozitif bir ilişkinin olduğu söylenebilir.



**Şekil 6.18.** TMR testleri için Monte Carlo Benzetimi ve Benzetim Zarfları

Şekil 6.18’ de benzetim zarfları ile ilgili teorik fonksiyonlar için alt ve üst sınırlar Monte-Carlo benzetimi yardımı ile elde edilmiştir. Tahmin edilen fonksiyon değerleri bu sınır değerlerinden oldukça uzakta kalmaktadır. Böylece daha önce de fonksiyonlar ve diğer testler yardımıyla ulaşılan kümelenmiş örüntü sonucu, benzetim zarfları ile de doğrulanmıştır.



**Şekil 6.19.** Deprem Örüntüsü ve Homojen Olmayan Poisson Süreci Benzetimi

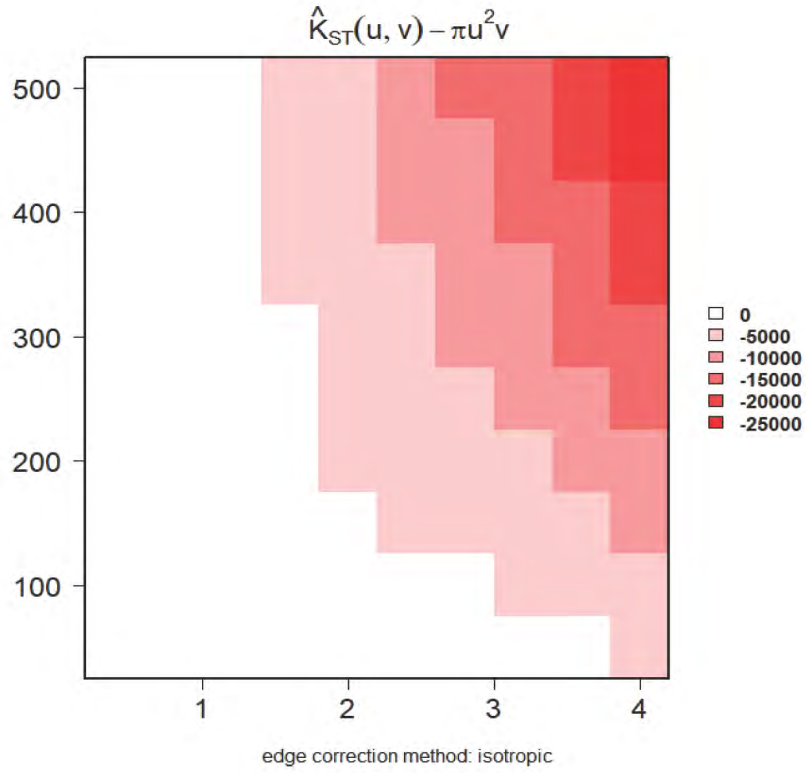
Şekil 6.19’da deprem örüntüsü ve homojen olmayan poisson süreci benzetimi (altta) verilmektedir. Homojen olmayan poisson sürecine ilişkin benzetim, örüntüden elde edilen değişen birim yoğunluklar sayesinde elde edilmiştir. İki örüntü arasındaki benzerlik dikkat çekicidir. Kümelenmiş bir örüntünün oluşması için birden fazla sebep gösterilebilir. Test edilen süreç bir kümelenmiş süreç olabilir. Çalışma alanındaki birim yoğunlukların sabit olmayıp değişken olması bir diğer sebeptir. Burada da birim yoğunluğun değişkenliği kümelenmeye yol açmıştır.

### 6.3. Depremlerin Mekân – Zamansal Olarak İncelenmesi

Önceki bölümlerde çalışma alanı, ilgili açıklayıcı veri analizi teknikleri ile incelenmiş ve mekânsal özellikleri analiz edilmişti. Bu bölümde ise depremler, zaman bileşeni de eklenerek, mekân-zamansal bir süreç olarak incelenecektir.

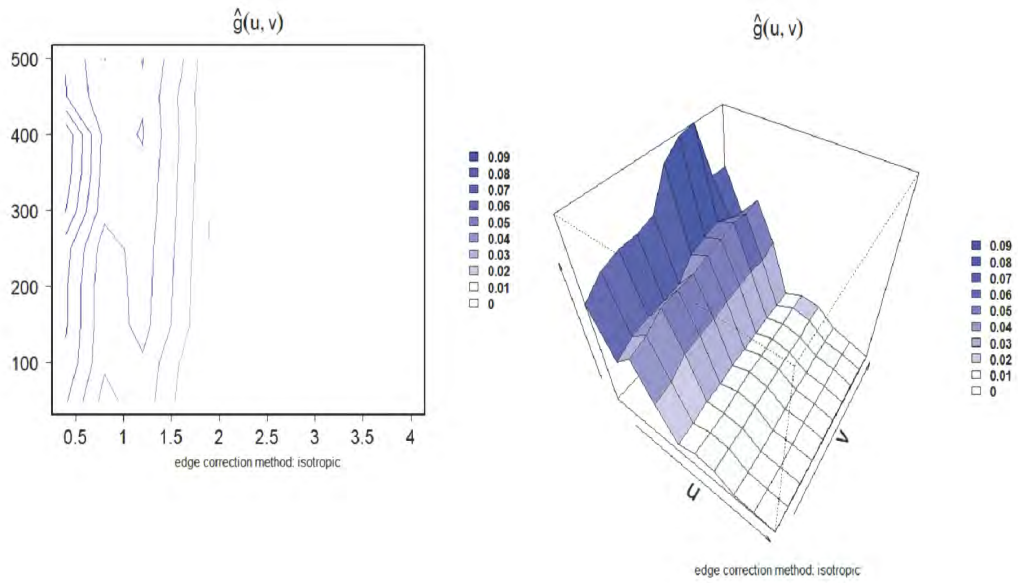
Çalışma alanı içerisindeki depremlerin tam mekân-zamansal rassallık içerip içermediği, homojen olmayan mekân-zamansal  $K$  fonksiyonu ve ikili korelasyon fonksiyonu ( $g$  fonksiyonu) yardımı ile belirlenmiştir. Ayrıca Kuzey Anadolu fay hattında yer alan depremler için mekân-zamansal süreçlerin benzetimleri de haritalar üzerinde elde edilmiş ve elde edilen örüntüler gerçek veri setinin örüntüleri ile karşılaştırılmıştır.

Mekân- zamansal  $k$  fonksiyonu, homojen olmayan mekân-zamansal  $g$  fonksiyonu ve  $K$  fonksiyonları “stpp” R paketinde yer almaktadır ve mekân-zamansal birim yoğunluğun ayrılabilir olması varsayımı altında uygulanabilmektedir. Zamansal ve mekânsal birim yoğunlukların mekân-zamansal birim yoğunluğun çarpanları olduğu durumda, mekân-zamansal birim yoğunluk ayrılabilir olarak adlandırılır.



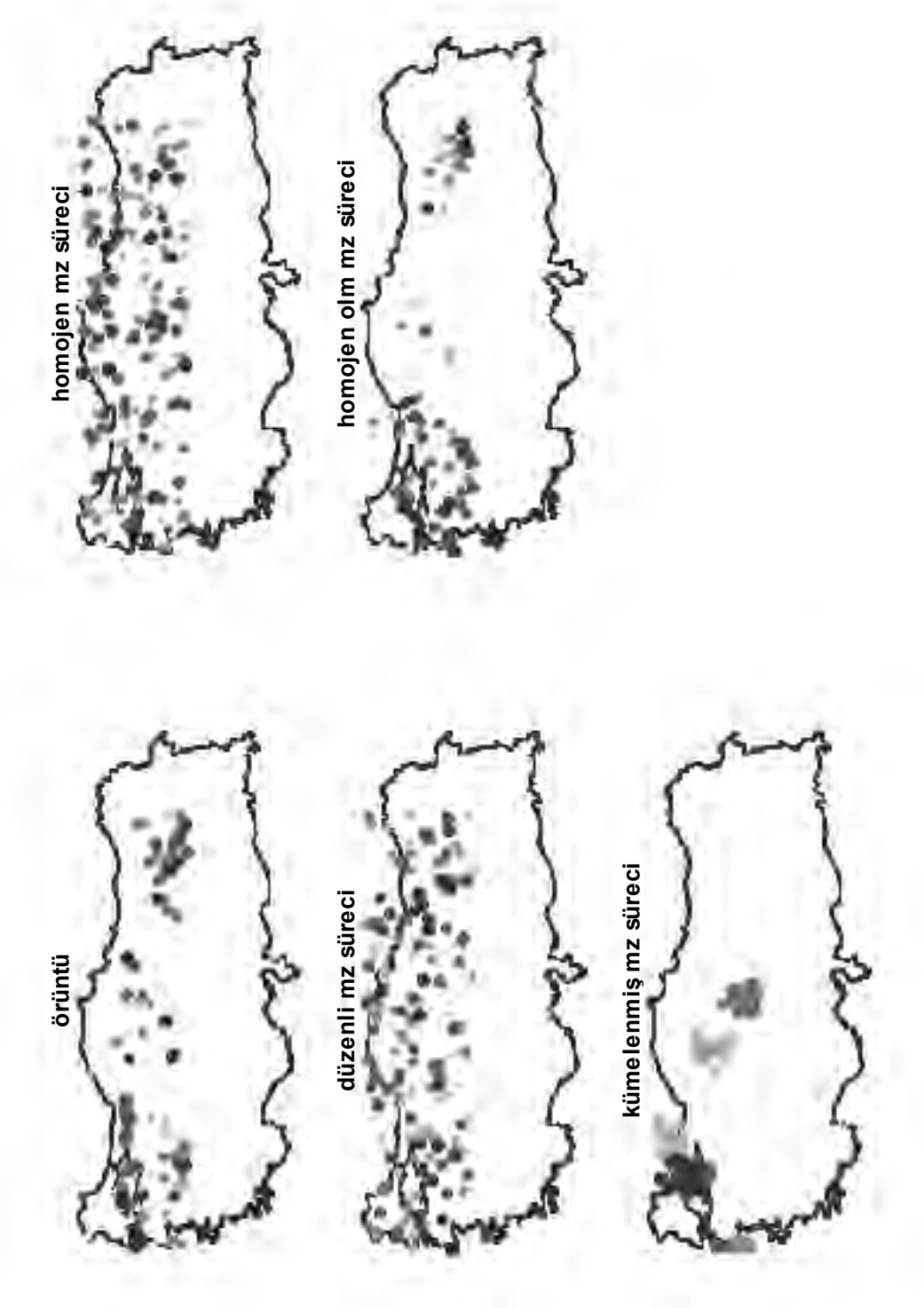
**Şekil 6.20.** Mekân-zamansal  $K$  fonksiyonu tahmini ve homojen mekân - zamansal rassal örüntü arasındaki fark

Şekil 6.20’ da gözlemlenen negatif fark değerleri test edilen mekân-zamansal deprem nokta örüntüsünün düzenli bir örüntü olduğunu göstermektedir.



**Şekil 6.21.** İkili Korelasyon Fonksiyonu kontor ve perspektif grafikleri

Şekil 6.21’ de verilen  $g$  fonksiyonu 1’den küçük değerler almıştır. Özellikle 100 gün ve üzeri zaman dilimi ve 0.5 ve 2 derece uzaklıklar için araştırılan örüntünün mekân-zamansal düzenli bir örüntü olduğu söylenebilir.



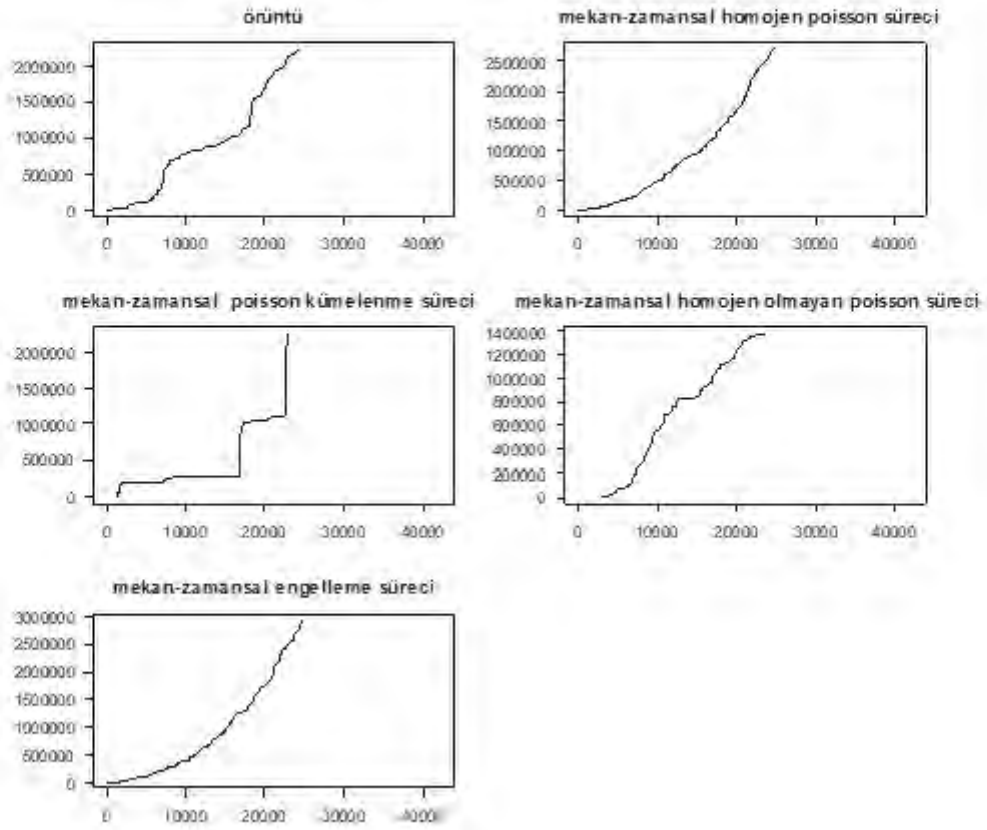
Şekil 6.22. Mekân - zamansal süreç benzetimleri

Şekil 6.22. Mekân - zamansal süreç benzetimlerinde, çalışma alanında gerçekleşen depremleml ile aynı sayıda olay içeren mekân-zamansal süreç benzetimlerinden elde edilen örüntüler ve bu benzetimler, kıyaslama amacıyla deprem verisine ilişkin örüntü Türkiye haritası üzerinde gösterilmiştir. Haritalarda depremlerin gerçekleştiği noktalar gerçekleşme zamanlarına göre renklendirilmiş; koyu renkler yakın zamanda gerçekleşen depremleri, açık renkler ise deprem kataloğunun başlangıcında yer alan eski tarihli depremleri ifade etmektedir.

Daha önce sadece mekânsal örüntü analizlerine tabi tutulan deprem verisinin bu analizler sonucu mekânsal olarak kümelenmiş bir örüntü olduğu sonucuna ulaşılmıştı. Şekil 6.22. Mekân - zamansal süreç benzetimlerindeki homojen olmayan mekân-zamansal bir süreç sonucu elde edilen örüntü ise gerçek deprem verisinin örüntüsüne oldukça benzemektedir. Homojen olmayan mekân-zamansal bir süreç mekânsal ve/veya zamansal olarak değişen birim yoğunluk fonksiyonuna sahiptir ve Şekil 6.22. Mekân - zamansal süreç benzetimlerindeki homojen olmayan mekân-zamansal süreç örüntüsünün mekânsal ve zamansal olarak birim yoğunlukları örnek alınarak, homojen olmayan mekân-zamansal bir süreç türetilmiştir.

Şekil 6.22. Mekân - zamansal süreç benzetimlerindeki düzenli mekân-zamansal nokta süreci sonucu elde edilen örüntüde aynı zaman dilimindeki olaylar yakın bölgelerde meydana gelmemiştir. Bu örüntü mekân-zamansal bir engelleme süreci sonucunda elde edilmiştir. Aynı şekil üzerindeki kümelenmiş bir mekân- zamansal süreç sonucu elde edilen kümelenmiş süreçte aynı zaman dilimindeki olaylar çalışma alanı üzerinde oldukça yakın alt bölgelerde gözlemlenmiştir. Homojen mekân-zamansal örüntü ise mekân-zamansal homojen poisson süreci sonucunda elde edilmiştir. Buradaki örüntüde olaylar tüm çalışma alanı geneline yayılmış ve düzenli mekân-zamansal örüntüye kıyasla aynı zaman diliminde gerçekleşen olaylar birbirine daha yakın konumlarda gerçekleşmiştir.





**Şekil 6.23.** *Kümülatif zaman grafikleri*

Şekil 6.23'te mekân-zamansal süreçlerin benzetimi sonucu elde edilen kümülatif zaman grafikleri, Kuzey Anadolu Fay Hattını içeren deprem kataloğundaki örüntünün kümülatif zaman grafiği ile karşılaştırılması amacıyla verilmiştir. Şekilde x eksenini başlangıç anından itibaren depremlerin gerçekleştiği günleri; y eksenini ise depremlerin gerçekleştiği günlerin kümülatif olarak toplamını ifade etmektedir. Bu grafikler olayların gerçekleşme zamanlarına göre nasıl bir seyir izlediği hakkında bilgi vermektedir. Grafiğin kümülatif toplamı ele alması gerçekleşen olay sayılarının belirli bir zaman aralığında yoğunlaştığı ya da azaldığı hakkında araştırmacıya çıkarım yapma imkanı sağlamaktadır. S şeklindeki bir kümülatif zaman grafiği epidemiyolojik bir sürecin gerçekleştiğine ilişkin bir kanıt olarak yorumlanır. Epidemiyolojide salgın bir hastalığın tam anlamı ile yayılması için belirli bir miktar zaman gerekmektedir. Bu sürede önce hasta sayısı düşük bir artış ile artmaktadır. Dolayısıyla zamana ilişkin kümülatif toplam düşük bir eğime sahiptir ve hafif bir artış göstermektedir. Daha sonra hasta sayısındaki artış salgının yayılması ile birlikte büyük bir artış göstermekte ve kümülatif toplamın eğimi de artmaktadır. Son aşamada ise, alınan ilaç, karantina gibi önlemler sayesinde olay

sayısının azalmasına bağılı olarak kümülatif toplamdaki artış sona ermekte, belirli bir noktada doyuma ulaşarak sabit kalmaktadır.

Şekil 6.23'te deprem örüntüsü incelendiğinde yaklaşık 7000. ve 20000. günler civarında kümülatif zaman grafiğinin eğiminde bir artış gözlenmiştir. Buna sebep olarak bu günler civarında gerçekleşen deprem sayısında artış olması ya da büyük bir deprem sonucu gelişen artçı şokların gerçekleştiği çıkarımı yapılabilir. Aynı zamanda deprem örüntüsüne ilişkin kümülatif zaman grafiği özellikle yaklaşık 20000. gün civarı öncesinde epidemiyolojik bir sürecin belirtisi olan S şeklini andırmaktadır. Mekan-zamansal poisson kümelenme süreci sonucu oluşan örüntüde ise kümülatif toplamın sabit kaldığı zaman aralıkları ve aynı zamanda dik bir şekilde devam ettiği zaman noktaları göze çarpmaktadır. Kümülatif toplamın dik olduğu zaman civarında eşanlı olarak birden fazla depremin meydana geldiği, kümülatif toplamın sabit kaldığı durumda ise bu zaman zarfında deprem gerçekleşmediği çıkarımları yapılabilir.

#### 6.4. Mekân-zamansal Epidemik Tip Şok Sonrası Model Uygulaması

Modele ilişkin algoritma R programı “etasFLP” paketi yardımı ile çözdürülmüştür (Chiodi & Adelfio, 2017). Fit edilen modele ilişkin parametre sonuçları Çizelge 6.5’de verilmiştir.

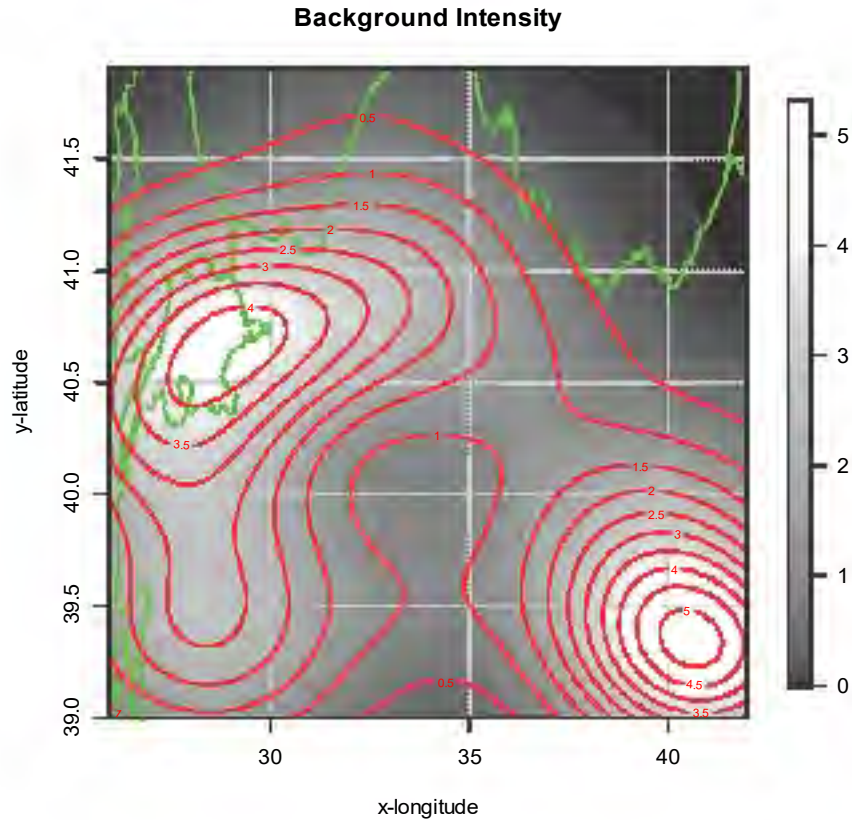
**Çizelge 6.5.** Mekân-zamansal Epidemik Tip Şok Sonrası Model Parametreleri

| Parametreler | Tahminler |
|--------------|-----------|
| $\mu$        | 0.0039    |
| $\kappa_0$   | 0.0025    |
| $c$          | 2.2434    |
| $p$          | 1.0475    |
| $\alpha$     | 0.0068    |
| $\gamma$     | 1.304     |
| $d$          | 0.0021    |
| $q$          | 1.2242    |

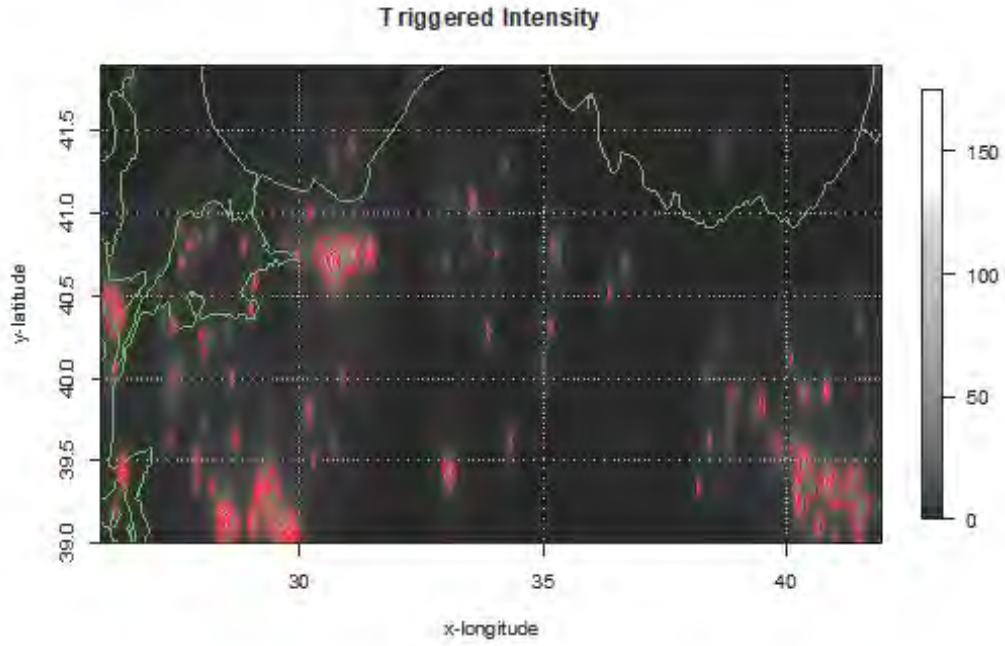
Burada  $\mu$  ve  $\kappa_0$  'ın birimi olay/gün×derece<sup>2</sup>,  $p$  ve  $q$  birimsiz,  $d$  'nin birimi derece  $c$ 'nin birimi gün,  $\alpha$  ve  $\gamma$  parametresinin birimi büyüklük<sup>-1</sup>'dir.  $\alpha$  parametresinin sıfıra yakın çıkması deprem kataloğunda seçilen büyüklük aralığının düşük olması veya ana şok sonrası olayların ya da sürü olayların çok olmasından kaynaklanabilmektedir.  $\mu$

tahmin edilen gün ve derece<sup>2</sup> cinsinden ölçümlenen mekân-zaman kesiti için elde edilen arka plan olay yoğunluğudur ve 1 gün×derece<sup>2</sup>'de 0.0039 olay gerçekleşmektedir şeklinde yorumlanmaktadır. c parametresinin büyük bir değer alması bir olayı takip eden depremselliğin uzun bir sürede bozulması şeklinde yorumlanmaktadır. d parametresinin küçük olması ise bir olayı takip eden depremselliğin mekânsal etkisinin küçük bir alana yayıldığını ifade etmektedir.

Mekân-zamansal epidemik tip şok sonrası modeli, araştırma yapılan bölge ve zaman aralığında depremlerin birim yoğunluğunun arka plan birim yoğunluğu ve tetiklenen olayların birim yoğunluğu olmak üzere iki parçada incelenmesine olanak sağlamaktadır. Arka plan birim yoğunluğu zamandan bağımsız olarak düşünülen depremselliği temsil etmektedir. Buna karşılık tetiklenen birim yoğunluk ise zaman bileşenini de içermektedir. Model sonucu oluşturulan arka plan birim yoğunluğu ve tetiklenen olay birim yoğunlukları sırasıyla Şekil6.24 ve 6.25'te verilmektedir.



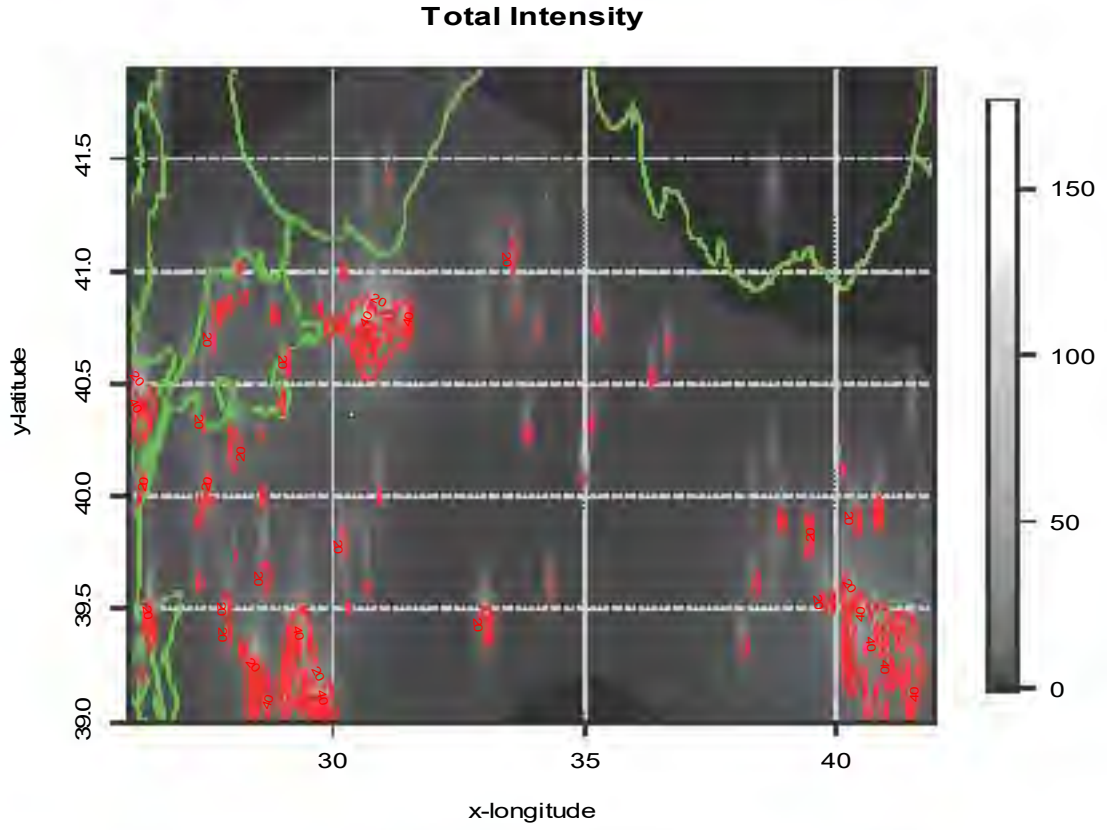
**Şekil 6.24.** Arka plan olay yoğunluğu



**Şekil 6.25.** Tetiklenen olay birim yoğunluğu

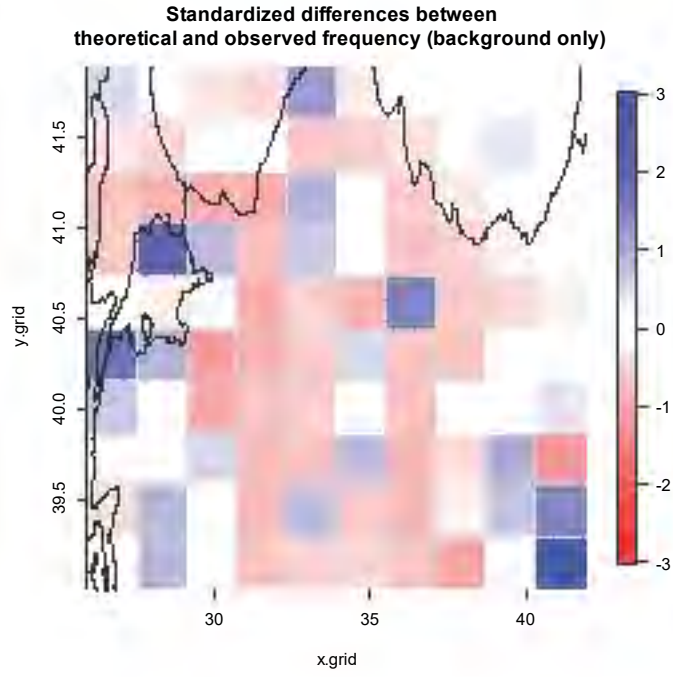
Şekil 6.24’de verilen arka plan olay birim yoğunluklarının Marmara Denizi etrafında ve Doğu Anadolu Bölgesi Erzincan-Erzurum civarlarında en yüksek seviyeye ulaştığı gözlemlenmektedir. Bu bölgelerde analiz edilen deprem kataloğunda büyük ve yıkıcı depremlerin gerçekleştiği görülmektedir. Dolayısıyla arka plan olay birim yoğunlukları büyük depremlerin gerçekleştiği bölgelerde diğer bölgelere kıyasla daha fazladır.

Şekil 6.25’de tetiklenen MZ-ETŞSM sonucu elde edilen tetiklenen olay birim yoğunlukları, bölgesel olarak model sonucu elde edilen arka plan olay birim yoğunluklarıyla benzerlik göstermektedir. Bu iki birim yoğunluk arasındaki fark ise tetiklenen olay birim yoğunluklarının arka plan birim olay yoğunluklarına göre oldukça yüksek olmasıdır. Kuzey Anadolu Fay hattını içeren dikdörtgensel poligon şeklindeki çalışma alanında tetiklenen olay birim yoğunluklarının, Marmara denizi civarı Gölçük yakınları, Erzurum-Erzincan çevreleri ve Ege denizi Manisa-Çanakkale-İzmir çevrelerinde yüksek olduğu gözlemlenmektedir. Fay hattının orta bölümünde ise düşük bir birim yoğunluk gözlenmektedir. Tetiklenen olay birim yoğunluklarının yüksekliği zaman içerisinde gerçekleşen artçı şoklar ya da deprem kümelerinin oluşmasından kaynaklanabilmektedir.

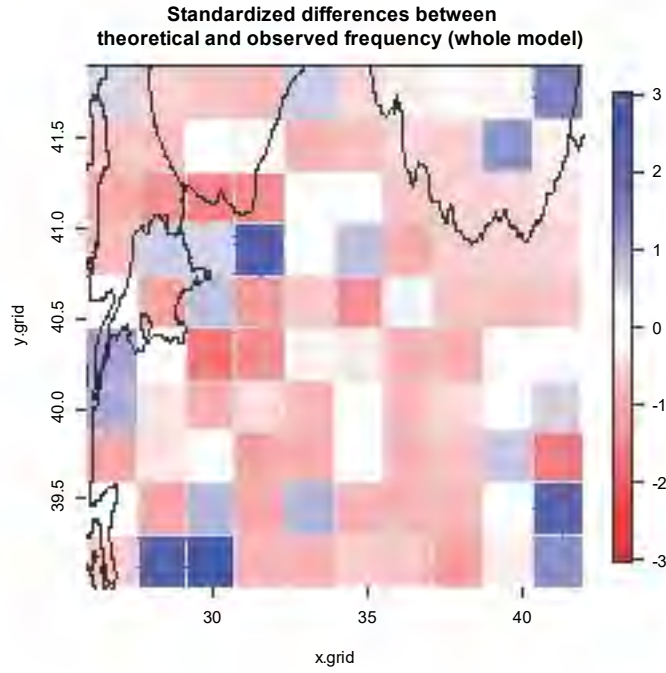


**Şekil 6.26.** *Model toplam birim yoğunluğu*

Şekil 6.26’ da model sonucu elde edilen toplam olay birim yoğunluğu verilmiştir. Tetiklenen olay birim yoğunluğuna oldukça benzer bir görüntü göze çarpmaktadır. Tetiklenen olay birim yoğunluğu ile kıyaslandığında toplam olay birim yoğunluğu aynı bölgelerde, fakat biraz daha geniş bir alana yayıldığı sonucuna ulaşılmaktadır.



**Şekil 6.27.** Gözlemlenen ve teorik frekanslar arasındaki standartlaştırılmış farklar (Arka Plan birim yoğunluk için)



**Şekil 6.28.** Gözlemlenen ve teorik farklar arasındaki standartlaştırılmış farklar (Model için)

Şekil 6.27 ve Şekil 6.28’de, toplam birim yoğunluk ve arka plan birim yoğunluğu için gözlenen ve teorik frekanslar arasındaki standartlaştırılmış farklar verilmiştir. Daha

küçük standartlaştırılmış farklara sahip oluşu için, arka plan birim yoğunluğunun toplam birim yoğunluğa göre daha iyi fit edildiği söylenebilir.

## 6.5. Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmada gerçekleştirmeleri açısından kompleks bir fenomen olan depremlerin mekânsal istatistiksel yöntemler ile analiz edilmesi ve depremle ilgili çalışan farklı dallardaki tüm bilim adamlarına faydalı olması amaçlanmıştır. Jeolojik faktörler, depremlerin başka depremleri tetiklemesi (artçı şokların oluşumu, öncü şoklar vb), deprem fırtınası gibi diğer etkenler deprem oluşumlarını kompleks hale getirmektedir. Çalışmada büyük deprem oluşturma potansiyeline sahip Kuzey Anadolu Fay Hattı'nı içeren 26°- 42° boylam ve 39°- 42° enlemleri arasındaki dikdörtgensel bölge mekânsal çalışma alanı olarak seçilmiş; bu bölge üzerinde 1950-2017 yılları içerisinde 5 ve üzeri büyüklükteki depremler değerlendirmeye alınmıştır.

Çalışmada özel olarak Kuzey Anadolu Fay Hattı incelenmiş ve bu bölgedeki orta ve büyük ölçekli depremler mekân-zamansal olarak analiz edilmiştir. Dolayısıyla Türkiye'de bir fay hattını içeren bölgede gerçekleşen depremlere ilişkin olarak ilk kez mekân-zamansal bir istatistiksel model kurulmuş ve sonuçlar yorumlanmıştır. Depremlerin mekânsal yoğunluklarının yanı sıra uzun zaman ve kısa zaman yoğunlukları belirlenmiş ve ilgili bölgenin bu açıdan deprem riskleri ortaya konulmuştur. Elde edilen model parametreleri yardımıyla gelecekte oluşacak depremlere ilişkin benzetimler yapılabilir. Ayrıca ilgili model, deprem verilerinin yanı sıra salgın biçiminde oluşum gösteren bölgesel salgın hastalıklar, yangınlar vb. verilere de uygulanabilmektedir.

Depremler zaman boyutu dikkate alınmadığı durumda mekânsal bir nokta süreci sonucu olarak gerçekleşen bir mekânsal nokta örüntüsü olarak değerlendirilebilir. Zaman boyutu eklendiğinde ise depremler mekân-zamansal bir süreç sonucu gelişen mekân-zamansal bir nokta örüntüsü olarak ele alınmaktadır. Ek bir bilgi olarak büyüklük değişkeni, deprem konumu ve gerçekleşme zamanı ile birlikte ele alındığı takdirde depremler mekân-zamansal işaretli bir nokta örüntüsü olarak değerlendirilmektedir.

Çalışmada öncelikle mekânsal veri tiplerine değinilmiştir. Böylelikle depremlerin hangi mekânsal veri sınıfına ait olduğu belirlenmiştir. Ayrıca depremler ve nokta örüntüleri ile ilgili diğer çalışmalar hakkında kısa bir literatür de verilmiştir. Daha sonra mekânsal nokta örüntüleri ve süreçlerinden bahsedilmiştir. Mekânsal nokta örüntüleri için merkezi eğilim ve saçılım ölçüleri verilmiştir. Mekânsal nokta örüntüsü analizinde

önemli bir yer tutan tam mekânsal rassallık testleri ve birim yoğunluğun parametrik olmayan bir yöntem olan kernel yoğunluk tahmini ile tahmini ele alınmıştır.

Çalışmanın 4. ve 5. bölümlerinde ise mekân-zamansal nokta süreçleri ve depremlerin modellenmesinde literatürde sıklıkla kullanılan bir model olan mekân-zamansal epidemik tip şok sonrası model anlatılmıştır. Mekânsal ve mekân-zamansal süreçler için benzetim algoritmaları verilmiştir. Bunlara ek olarak bir mekân-zamansal süreci eşsiz bir şekilde karakterize etmekte kullanılan koşullu yoğunluk fonksiyonuna değinilmiştir.

Çalışmada kapsamlı bir uygulama gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada depremler ile ilgili genel bilgiler verilmiş ve çalışmanın yapılacağı mekân-zamansal bölge tanımlanmıştır. Daha sonra deprem verisi ile ilgili mekânsal bölge görselleştirilmeye çalışılmıştır. Ayrıca deprem verisine ilişkin açıklayıcı veri analizi teknikleri de uygulanmıştır. Çalışmada yapılan görselleştirme ile depremlerin özniteliklerinin haritalar üzerinde daha iyi ayırt edilmesi ve gösterimi amaçlanmıştır. Deprem büyüklerinin bulunduğu bir harita üzerinde mekânsal nokta örüntüleri için tanımlanan merkezi eğilim ve değişkenlik ölçüleri de verilmiştir.

Yapılan tam mekânsal rassallık testleri sonucunda, incelenen mekânsal örüntünün mekânsal olarak kümelenmiş bir süreç sonucu elde edilen mekânsal bir nokta örüntüsü olduğu sonucuna ulaşılmıştır. İncelenen büyük depremler için Kuzey Anadolu Fay Hattı'nda özellikle orta bölgedeki deprem sıklığının batı ve doğu bölgesine kıyasla az olduğu gözlemlenmiştir. Kernel yoğunluk tahmini ile elde edilen birim yoğunluk grafiğinden de aynı çıkarım yapılabilmektedir. Çalışma alanında homojen bir poisson süreci benzetimi yapılmış ve deprem örüntüsü ile karşılaştırılmıştır. Homojen olmayan Poisson nokta süreci simülasyonu sonucu elde edilen bir örüntü ile depremlerin yer aldığı mekânsal nokta örüntüsü birbirine oldukça benzemektedir.

Yapılan mekân-zamansal testler sonucunda, incelenen depremlerin mekân-zamansal olarak düzenli bir örüntü olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Mekân-zamansal süreçlerin benzetimi sonucunda elde edilen örüntüler ile analiz edilen deprem verisine ilişkin örüntü karşılaştırılmak suretiyle harita üzerinde gösterilmiştir. Mekân-zamansal epidemik tip şok sonrası model sonucu elde edilen tetiklenen olay birim yoğunluğunun arka plan olay birim yoğunluğundan oldukça fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Arka plan olay birim yoğunluklarının fazla olduğu bölgelerin, depremlerin zamandan bağımsız olarak sıklıkla gözlemlenen bölgeler olduğu çıkarımı yapılabilmektedir. Çalışma



alanındaki diğer bölgelere kıyasla birim yoğunlukların, arka plan olayları için doğuda ve batıda olmak üzere iki bölgede, tetiklenen olay birim yoğunlukları için ise batıda 2 bölgede, doğuda ise tek bölgede olmak üzere 3 bölgede fazla olduğu gözlemlenmiştir.

Yapılan çalışmada MZ-ETŞSM'in oldukça ağır hesaplamalar sonucunda elde edilen bir model olmasının zorlukları ile karşılaşmıştır. Modelin çözümlenmesi için kullanılan log-benzerlik fonksiyonu oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. R programında hazır paketler yardımı ile çözdürülen modelin algoritmasının yakınsaması için bir ilk parametre seti verilmesi gerekmektedir. Modelin çözümlenmesi ve algoritmanın yakınsaması için bu parametre seti çok önemlidir. İlgili pakette bununla ilgili bilgi ve hatta ilk parametre setini belirlemek için bir fonksiyon da bulunmasına rağmen, elde edilen parametre seti algoritmanın çözümü için sadece bir yaklaşım olarak değerlendirilmektedir. Ayrıca modelin çözümü, birim sayısı, çalışma alanındaki depremlerin seçimi (büyüklük aralığı vb.) gibi faktörlerden de etkilenmektedir.

Bazı R paketlerinde yer alan fonksiyonların yeniden düzenlenmesi zorunluluğu ortaya çıkmıştır. Örneğin Türkiye haritası düzenli bir poligon olmayıp, çalışılan paketlerdeki fonksiyonlarda haritaların çizimi düzgün poligonlar için ele alınmıştır. Bunun gibi karşılaşılan kodlama zorluklarının üstesinden gelinmeye çalışılmıştır. Uygulamanın ilk bölümünde verilen haritalar için R kodları yazılmıştır. Bu haritaların, depremleri ve ilgili çalışma alanını daha iyi görselleştirmesi de karşılaşılan bir diğer zorluk olmuştur. Bu amaçla depremlerin şiddetlerine ve derinliklerine göre sınıflandırılması yapılmıştır. Harita çiziminde bu sınıflandırmalar için farklı renkler ve farklı nokta karakterleri seçilmiştir.

Çalışmada deprem oluşumlarının zamansal süreçler ile incelenmesine değinilmemiştir. Amaç olarak mekânsal ve mekân-zamansal istatistiksel analizlere odaklanmaya çalışılmıştır. Depremlerin zamansal olarak incelenmesi ve çalışmada değinilmeyen mekân-zamansal birim yoğunluğun mekân-zaman kernel yoğunluk tahmini ile tahminlenmesi daha sonra yapılabilecek çalışmalar arasındadır.

Elde edilen mekânsal birim yoğunluklar ve MZ-ETŞSM sonrası elde edilen toplam birim yoğunluğun parçaları olan arka plan olay birim yoğunluğu ve tetiklenen olay birim yoğunluğu, ilgili bölge için deprem riskini yansıtabilir. Ayrıca bu birim yoğunluk tahminleri çalışma alanındaki deprem bölgelerinin risklerine göre derecelendirilmesi amacıyla da kullanılabilir.

## KAYNAKÇA

- Aryal, N. R. (2011). Point Pattern Analysis, (August), 1–61.
- Assuncao, R., Tavares, A., & Kulldorf, M. (2012). Space-time cluster identification in point processes. *Canadian Journal of Statistics*, 35(1), 9-25.
- Baddeley, A. J., & van Lieshout, M. N. (1996). A nonparametric measure of spatial interaction in point patterns. *Statistica Neerlandica*, 344-361.
- Baddeley, A. (2007). Stochastic Geometry. *Lecture Notes in Mathematics 1892*, 3, 1–75. <http://doi.org/10.1007/3-540-38174-0>
- Baddeley, A. (2008). Analysing spatial point patterns in R. *Workshop Notes*, 12(6), 1–199. <http://doi.org/10.1007/s00415-011-6369-2>
- Baddeley, A., Rubak, E., & Turner, R. (2015). *Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R*. Chapman and Hall/CRC .
- Banhoff, M., Martínez-Garzón, P., Bulut, F., Stierle, E., & Ben-Zion, Y. (2016). Maximum earthquake magnitudes along different sections of the North. *Tectonophysics*(674 ), 147-165.
- Ceyhan, E., Ertuğay, K., & Düzgün, Ş. (2013). Exploratory and inferential methods for spatio-temporal analysis of residential fire clustering in urban areas. *Fire Safety Journal*, 58, 226-239.
- Chiodi, M., & Adelfio, G. (2017). Mixed Non-Parametric and Parametric Estimation Techniques in R Package etasFLP for Earthquakes' Description. *Journal of Statistical Software*, 76(3), 1-28. doi:10.18637/jss.v076.i03
- Coeurjolly, J. F. (2015). Median-based estimation of the intensity of a spatial point process. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 1-29.
- Cressie N. A. C. (1991). *Statistics for Spatial Data*. New York: Joh Wiley & Sons.
- Cressie N. A. C. (1993). *Statistics for Spatial Data Revised Edition*. Wiley.
- Delalane, C., & Deutschlander, T. (2013). A robust estimator for the intensity of the Poisson point process of extreme weather events. *I*, 69-76.
- Diggle, P. J. (1975). Robust density estimation using distance methods. *Biometrika*, 62(1).
- Diggle, P. J. (1977). A note on robust density estimation for spatial point patterns. *Biometrika*, 64(1), 91-95.
- Diggle, P. J. (2013). *Statistical Analysis of Spatial and Spatio-Temporal Point Patterns* (3 b.). CRC Press.

- Diggle, P. J., Gabriel, E., & Rowlingson, B. (2013). stpp: An R Package for Plotting, Simulating and Analysing Spatio-Temporal Point Patterns. *Journal of Statistical Software*, 53(2), 1-29.
- Diggle, P., Besag, J. E., & Gleaves, J. T. (1976). Statistical analysis of spatial patterns by means of distance methods. *Biometrics*, 32, 659-667.
- Eryılmaz, H. (2010). Mekansal İstatistikte Nokta Örüntü Teknikleri. *Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir*.
- Gabriel, E., & Diggle, P. J. (2009). Second-Order Analysis of Inhomogenous Spatio-Temporal Point Process Data. *Statistica Neerlandica*, 63(1), 43-51.
- Gatrell, A. C. (1994). Density estimation and the visualization of point patterns. (H. J. Hearnshaw, & D. J. Unwin, Eds.) *Visualization in geographical information systems*, 65-75.
- Gatrell, A. C., Bailey, T. C., Diggle, P. J., & Rowlingson, B. S. (1996). Spatial point pattern analysis and its application in geographical epidemiology. *JSTOR: Transactions of the Institute of British Geographers*, 256-274.
- Grillenzoni, C. (2005). Non-parametric smoothing of spatio-temporal point processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 128(1), 61-78.
- Grillenzoni, C. (2008). Robust nonparametric estimation of the intensity function of point data. *Advances in Statistical Analysis*, 92(2), 117-134.
- Haining R. (2003). *Spatial Data Analysis Theory and Practice*. Cambridge University Press.
- Harte, David; Brownrigg, Ray. (2017). ssBase: Base Functions for SSLib. R package version 2.3-6. Statistics Research Associates, Wellington. URL:<ftp://ftp.gns.cri.nz/pub/davidh/sslib/r-repo>
- Illian, J., Penttinen, A., Stoyan, H., & Stoyan, D. (2008). *Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns*. *International Statistical Review* (Vol. 76). <http://doi.org/10.1002/9780470725160>
- Lee, J., & Wong, D. W. (2001). *Statistical Analysis with Arcview GIS*. Wiley.
- Lewis, P. A., & Shedler, G. S. (1979). Simulation of non-homogenous Poisson processes by thinning. *Naval Research Logistics Quarterly*, 26, 403-413.
- Matern, B. (1960). Spatial Variation. *Meddelanden fran Skogsforskningsinstitut*, 49(5).
- Moller, J., & Waagepetersen, P. R. (2003). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. Florida: Chapman & Hall/ CRC.

- Moraga, P. (2012). Spatial and spatio-temporal methods for public health surveillance. *PhD dissertation, Universidad de Valencia*.
- Naylor, M., Orfanogiannaki, K., & Harte, D. (2010). Exploratory data analysis: magnitude, space and time. *Community Online Resource for Statistical Seismicity Analysis*. doi:10.5078/corssa-92330203
- Ogata, Y. (1988). Statistical Models for Earthquake Occurrences and Residual Analysis for point Processes. *Journal of American Statistical Association*, 83(401), 9-27.
- Ogata, Y. (1998). Space-Time point Processes Models for Earthquake Occurrences. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 50(2), 379-402.
- Picard, N., & Bar-Hen, A. (2007). Estimation of the density of a clustered point pattern using a distance method. *Environmental and Ecological Statistics*.
- R Core Team (2016). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- Randy, B., Buliung, R. N. and Remmel, T. K. (2012). aspace: A collection of functions for estimating centrographic statistics and computational geometries for spatial point patterns. R package version 3.2. <https://CRAN.R-project.org/package=aspace>
- Rasmussen, J. G. (2011). Bayesian inference for Hawkes processes. *Methodology and Computing in applied Probability*, 1-20.
- Ripley, B. D. (1976). the second-order analysis of stationary point processes. *Journal of Applied Probability*, 13, 255-266.
- Schoenberg, F. P. (2004). Testing separability in spatial-temporal marked point processes. *Biometrics*.
- Schabenberger, O., & Gotway, A. C. (2005). *Statistical Methods for Spatial Data Analysis*. Chapman & Hall/ CRC.
- Stock, G., & Smith, E. G. (2002). Adaptive Kernel Estimation and Continuous Probability Representation of Historical Earthquake Catalogs. *Bulletin of Seismological Society of America*, 92(3), 904-912.
- Stoyan, D., Kendall, W. S., & Mecke, J. (1995). *Stochastic geometry and its Applications* (2nd b.). New York: John Wiley & Sons.
- Tukey, J. W. (1977). *Exploratory Data Analysis* (Cilt 2).

- Utsu, T. A. (1961). Statistical study on the occurrence of aftershocks, *Geophys. Mag.*, 30, 521- 605
- Vargas, N. A. (2012). *Bayesian Point Process Modelling of Earthquake Occurrences*.
- Wang, M. (2013). *Spatial and spatio-temporal point process analysis*. Doctoral Dissertation Emory University.
- Zhuang, J. (2011). Next-day earthquake forecasts for the Japan region generated by the ETAS model. *Earth Planets Space*, 63, 207-216.
- Zhuang, J., Harte, D., Werner, M. J., Hainzl, S., & Zhou, S. (2012). Basic Models of seismicity: Temporal Models. *Community Online Resource for Statistical Seismicity Analysis*. doi:10.5078/corssa-79905851
- Zhuang, J., Werner, M., Hainzl, S., Harte, D., & Zhou, S. (2011). Basic models of seismicity: spatiotemporal models. *Community Online Resource for Statistical Seismicity Analysis*. doi:10.5078/corssa-07487583
- http-1: <http://www.koeri.boun.edu.tr/bilgi/buyukluk.htm> (Erişim tarihi: 12.06.2018)
- http-2: <http://www.geo.mtu.edu/UPSeis/magnitude.html> (Erişim tarihi: 12.06.2018)
- http-3: <http://www.koeri.boun.edu.tr/sismo/zeqdb/> (Erişim tarihi: 12.06.2018)