

**DÖŞEMELERDE BIRAKILAN BOŞLUKLARIN
ÜNİFORM YAYILI YÜKLER ALTINDA
İNCELENMESİ**

Mustafa BOZBEY

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Eşref ÜNLÜOĞLU

✓

Şubat - 1988

Mustafa Bozbey'in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "DÖŞEMELERDE BIRAKILAN BOŞLUKLARIN ÜNİFORM YAYILI YÜKLER ALTINDA İNCELENMESİ" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

25.03./1988

Üye : Yrd.Doç.Dr. Eşref ÜNLÜOĞLU



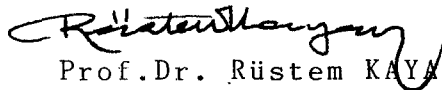
Üye : Doç.Ruhi AYDIN



Üye : Doç.Ahmet TOPÇU



Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun - 6 HAZİRAN 1988
gün ve . 178/2 . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.


Prof.Dr. Rüstem KAYA

Enstitü Müdürü

SUMMARY

In this thesis, plates with rectangular holes and under uniformly distributed load have been analyzed from static point of view.

During this analysis, a Finite Element Computer Program was used. In this program, since the rectangular elements are used, circular holes of the plates couldn't be analyzed, only the effects of rectangular holes in various position were researched.

At the end of this work, obtained moment coefficients of the holes in different ratios were tried to be presented by graphics and charts. These results were compared with the results obtained from the other works and a few examples of plates with rectangular holes were done.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam sırasında bana her zaman yardımcı olan ve yakın desteğini gördüğüm danışman hocam;

Sayın Yard.Doç.Dr. Eşref ÜNLÜOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa BOZBEY

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iii
SUMMARY	iv
TEŞEKKÜR	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. İNCE PLAK TEORİSİ	4
2.1. Plakta Yapılan Kabuller	4
2.2. Plak Geometrik Bağlantıları	6
2.3. Yer ve Şekil Değiştirme Bağlantıları	8
2.4. Gerilme-Şekil Değiştirme Bağlantıları	8
2.5. Gerilmelerin İç Kuvvetlere Dönüştürülmesi	12
2.6. Sınır Şartları	18
2.6.1. Ankastre kenar	18
2.6.2. Basit mesnetli kenar	18

	<u>Sayfa</u>
2.6.3. Serbest kenar	19
2.7. Çözüm Metodları	19
2.7.1. Analitik çözümler	20
2.7.1.1. Basit mesnetli dikdörtgen plaklar için Navier çözümü	20
2.7.1.2. Basit mesnetli dikdörtgen- ler için Levy çözümü	20
2.7.2. Varyasyon metodları	21
2.7.3. Nümerik metodlar	21
3. SONLU ELEMANLAR METODU	23
3.1. Metodun Özellikleri	23
3.2. Plak Elemanındaki Temel Büyüklükler	24
3.3. Toplam Potansiyel Enerji	25
3.4. Toplam Potansiyel Enerjinin Minimum Olma prensibi	27
3.5. Deplasman Fonksiyonu	28
3.6. Eleman ve Sistem Rijitlik Matrisleri	28
3.7. Denge Denkleminin Çözümü	31
3.8. Sonlu Elemanlar Metoduna Göre Egilmeye Çalışan Bir Plâğin Çözümü	32
4. BOŞLUKLU DÖŞEMELERLE İLGİLİ YAPILAN ÇALIŞMALAR	37
5. BOŞLUKLU DÖŞEMELERİN MOMENT DEĞERİNİN ARAŞTI- RILMASI	44
5.1. Dört Kenarı Ankastre Kare Plâkta Boşluğun Ortada Olması Durumu	44

İÇİNDEKİLER (DEVAM)

viii

	<u>Sayfa</u>
5.2. Dört Kenarı Ankastre Kare Plakta Kare Boşluğunun Köşede Olması Durumu	50
5.3. Dört Kenarı Ankastre Kare Plakta Dikdörtgen Boşluğun Ortada Olması Durumu	55
5.4. Kenarlarından Serbest Sonsuz Uzun Bir Plak Ortasında Yarık Olması Durumu	60
6. ELDE EDİLEN SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI VE ÖRNEK PROBLEMLER	65
6.1. Örnek 1	67
6.2. Örnek 2	68
6.3. Örnek 3	69
7. SONUÇLAR	71
KAYNAKLAR DİZİNİ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Plakta boşluk	2
2.1. Plak elemanı planı	4
2.2. Plak elemanına ait deplasmanlar	6
2.3. Plagın deformasyondan sonraki kesiti	7
2.4. Plak elemanındaki gerilmeler	9
2.5. Plak elemanında gerilme dağılımları	12
2.6. Plak elemanında iç kuvvetler	13
2.7. Serbest kenarlı plak	19
3.1. Plak elemanında deplasmanlar	24
3.2. Plak elemanında iç kuvvetler	
3.3. Dört elemanlı plak	33
4.1. Dikdörtgen boşluklu tek doğrultuda çalışılan plak	38
4.2. Boşluklu plakların üç kenarından mesnetli olması durumu	39
4.3. Ankastre kare plakta boşluklar	41
4.4. Sonsuz uzun plakta boşluklar	42
5.1. Ankastre kare plakta kare boşluk planı	45
5.2. Dört kenarından ankastre kare plak ortasında kare boşluklu modelin elemanları	46
5.3. Ankastre kare plak ortasında kare boşluklu modelin m_i katsayıları grafiği	49

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.4. Ankastre kare plak köşesinde kare boşluk planı	50
5.5. Dört kenarından ankastre kare plak ortasında kare boşluk bulunan modelin elemanları	52
5.6. Ankastre kare plak köşesinde kare boşluklu modelin m_i katsayıları grafiği	54
5.7. Ankastre kare plak ortasında dikdörtgen boşluk planı	55
5.8. Dört kenarı ankastre Kare plak ortasında dikdörtgen boşluk bulunan modelin elemanları	57
5.9. Ankastre kare plak ortasında dikdörtgen boşluklu modelin m_i katsayıları grafiği	59
5.10. Sonsuz uzun plakta yarık planı	60
5.11. Kenarlarından serbest sonsuz uzun plak ortasında yarık bulunan modelin elemanları	61
5.12. Sonsuz uzun plak ortasında yarık bulunan modelin m_i katsayıları grafiği	64
6.1. Ortasında kare boşluk bulunan ankastre kare plak	67
6.2. Ortasında dikdörtgen boşluk bulunan kare plak	68
6.3. Ortasında yarık bulunan kenarları serbest uzun plak	70

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
5.1. Ankastre kare plak ortasında bulunan kare boşluklu sistemin m_i moment katsayıları	48
5.2. Ankastre kare plak köşesinde bulunan kare boşluklu sistemin m_i moment katsayıları	53
5.3. Ankastre kare plak ortasında dikdörtgen boşluklu sistemin m_i moment katsayıları	58
5.4. Kenarları serbest uzun plak ortasında yarık bulunan sistemin m_i moment katsayıları	62
6.1. Ankastre kare plak ortasında kare boşluklu sistemlerin karşılaştırılması	65
6.2. Ankastre kare plak köşesinde kare boşluk bulunan sistemin karşılaştırılması	66

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
l_x	: Plak kısa kenarı
l_y	: Plak uzun kenarı
a	: Boşluğun x eksenine yönünde uzunluğu
b	: Boşluğun y eksenine yönünde uzunluğu
v	: y yönündeki deplasman
u	: x yönündeki deplasman
w	: z yönündeki deplasman
h	: Plak kalınlığı
P	: Yayılı yük
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$: Şekil değiştirme bileşenleri
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Normal gerilme bileşenleri
dx, dy, dz	: Plak diferansiyel elemanın x, y, z eksenlerine paralel boyutları
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: Kayma gerilme bileşenleri
μ	: Poisson oranları
G	: Kayma modülü
E	: Elastisite modülü
M_x, M_y	: Plaktaki eğilme momentleri
M_{xy}	: Plaktaki burulma momenti
$M_{x1}, M_{y1}, \dots, M_{x4}, M_{y4}$: Elemanın düğüm noktalarındaki eğilme momentleri

- Q_x, Q_y : Plaktaki kesme kuvvetleri
 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4,$
 Q_4 : Elemanın düğüm noktalarındaki kesme kuvvetleri
 j : Plak atalet momenti.
 f_1, f_2, \dots, f_n : Elastik yüzey ifadesinde kullanılan fonksiyonlar
 Π : Toplam potansiyel enerji
 Π_b : Gerçek denge konumuna komşu konumların toplam potansiyel enerji
 A_i : İç kuvvetlerin işi
 A_a : Dış kuvvetlerin işi
 \underline{E} : Elastisite matrisi
 $\underline{\xi}$: Şekil değiştirme matrisi
 \underline{p} : Elemanın düğüm noktalarına etkiyen dış kuvvetler matrisi
 \underline{P} : sistemin düğüm noktalarına etkiyen dış kuvvetler matrisi
 a_1, a_2, \dots, a_n : Deplasman fonksiyonundaki kat sayılar
 \underline{w} : Eleman düğüm noktalarına ait deplasman matrisi
 \underline{W} : sistemin düğüm noktalarına ait deplasman matrisi
 w_1, w_2, \dots, w_{12} : Eleman düğüm noktalarına ait deplasmanlar
 B^i : Deplasmanları deformasyonlara bağlayan trasformasyon maddesi

S^i : P dış kuvvetlerine eş değer alınan ve elemanın düğüm noktalarına etkiyen kuvvetler matrisi.

k^i : Elemanın rijitlik matrisi.

1. GİRİŞ

Plaklar, düzlemine dik kuvvetleri taşıyan yüzey-sel taşıyıcı sistemlerdir. Uygun bir yaklaşıklıkla hesaplanabilmeleri bakımından plaklar, tek doğrultuda ve çift doğrultuda çalışan plaklar olarak iki biçimde ele alınır-lar.

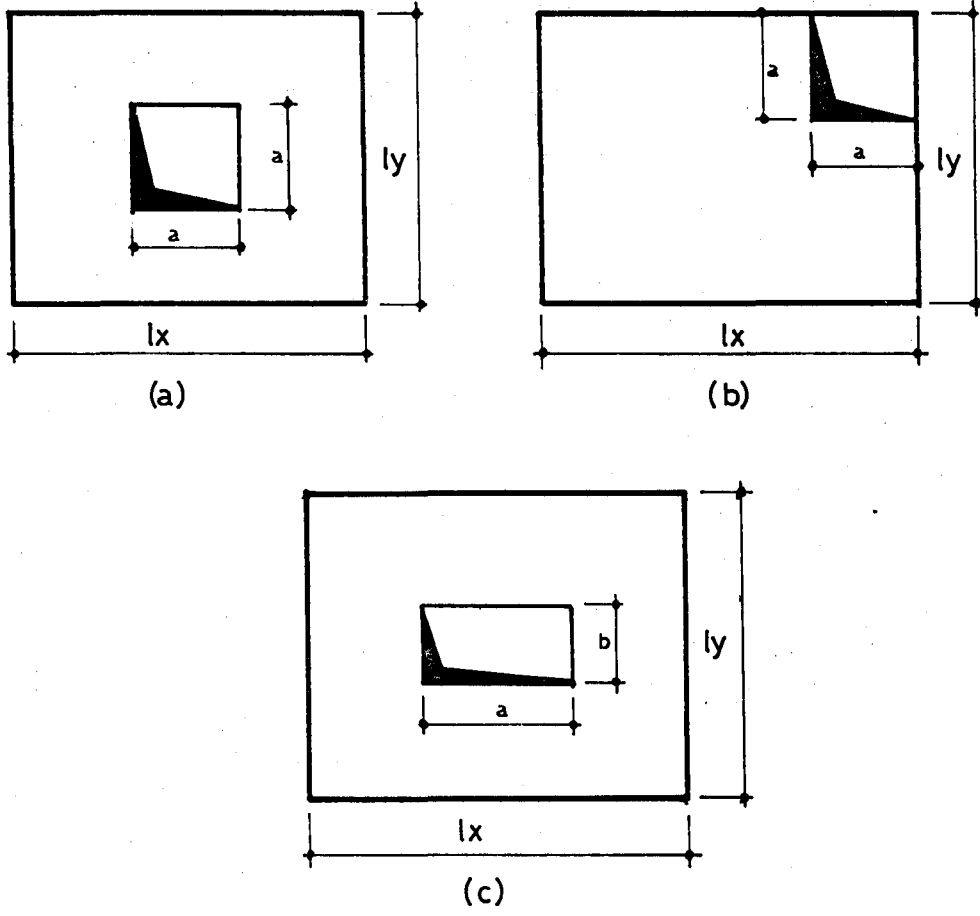
Bir doğrultuda çalışan plaklar yüklerin önemli kısmını bir doğrultuda aktarırlar (Çalışma doğrultusu). (Alman Betonarme Şartnamesi, 1978).

İki doğrultuda çalışan plaklarda her iki doğrultu da yük taşımaya katılır. Büyük kenarı, küçük kenarının iki katından büyük olmayan dört kenarından mesnetli plaklar ile üç kenarından ve komşu iki kenarından mesnetli plak-lar, iki doğrultuda çalışan plak olarak hesaplanır.

Bu çalışmada plaklarda bırakılan boşluklar ve bunların statik açıdan durumları araştırılmıştır. Bu boş-luklar merdiven kovası, asansör boşluğu, işyerlerinde üst katlara malzeme çekmek için bırakılan boşluklar ve hava bacası için döşemede bırakılan boşluklar olarak sı-ralanabilirler.

Plaklarda küçük boşluklar donatılar arasında kalmak şartıyla başkaca bir tedbir olmadan bırakılabilir. Ancak donatının kesilmesini gerektirecek büyüklükte boş-luklar bulunan plağın taşıma gücü ise döşemenin sistemi-

ne, boşluğun yerine, biçimine ve büyüklüğüne bağlı olarak çok değişmektedir.



Şekil 1.1. Plakta boşluk,
a) Ortada kare boşluk,
b) Köşede kare boşluk,
c) Ortada dikdörtgen boşluk.

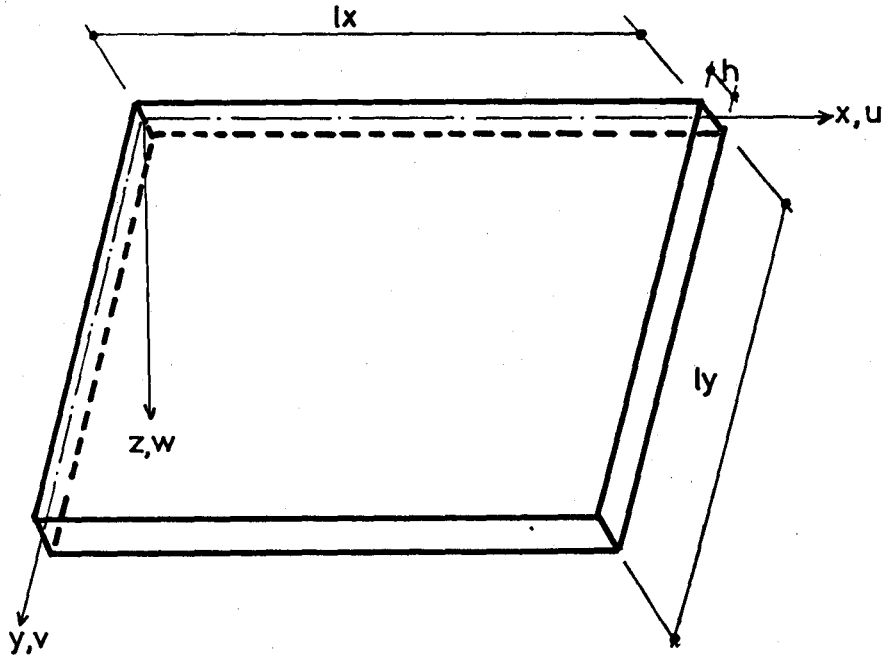
Burada plakta bulunan büyük ve küçük boşlukların plağa olan statik etkileri çeşitli modeller üzerinde araştırılmıştır. Bunun sonucunda da elde edilen statik etkiler çizelgeler ve grafiklerle verilmiştir.

2. İNCE PLAK TEORİSİ

Bu bölümde, plak orta düzleminde bir eğilme meydana gelecek şekilde yüklenmiş olan plakta gerekli kabul-ler yapılarak plak teorisinden bahsedilecek ve bunun sonucunda elde edilecek plak diferansiyel denklemi çıkarılacaktır.

2.1. Plakta Yapılan Kabuller.

Şekil 2.1.'de bir plak elemanına ait eksen takımı, Şekil 2.2.'de ise elemanın deplasmanları gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Plak elemanı planı.

Plak teorisi için yapılan kabulleri aşağıdaki şekilde sıralıyabiliriz. (Timeshenko, 1964; Girkman, 1964)

a) Plak kalınlığı, uzunluğu ve genişliğine nazaran küçüktür. ($h \ll l_x, l_y$).

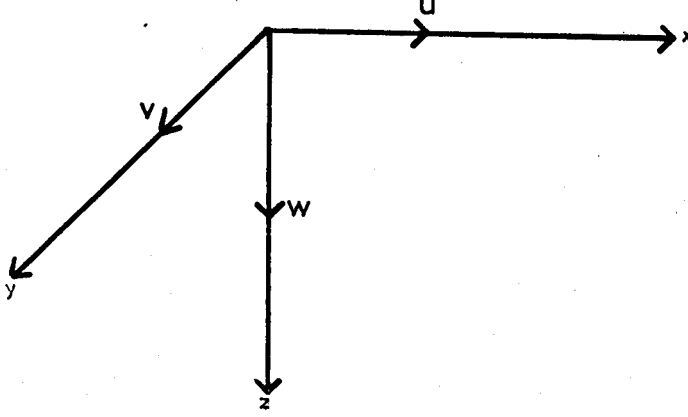
b) Plağa tesir eden kuvvetler plak yüzeyine diktir.

c) Plağın yapmış olduğu sehimler plak kalınlığına göre küçüktür. ($w \ll h$).

d) Plak kenarları plak düzlemi içinde serbestçe hareket eder.

e) Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri düzlemdir.

f) Orta düzleme dik bir doğru üzerinde bulunan noktalar şekil değiştirmeden sonrada deforme olmuş orta düzleme dik doğru üzerinde kalır.

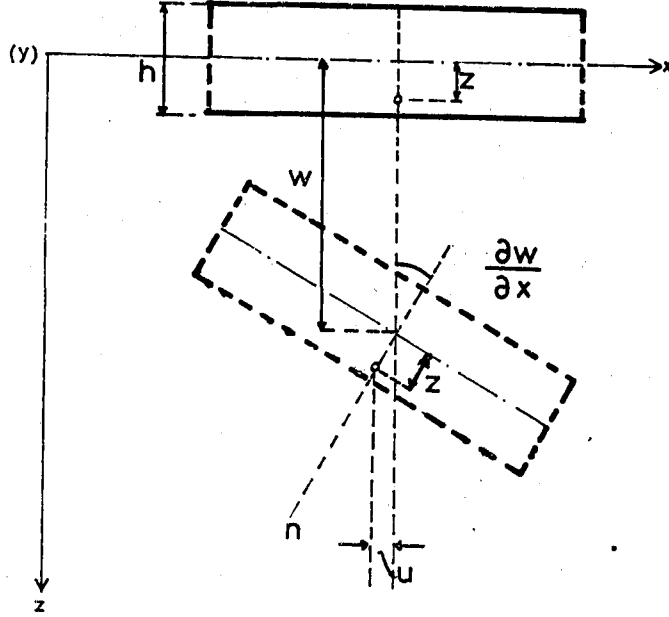


Şekil 2.2. Plak elemanına ait deplasmanlar.

2.2. Plak Geometrik Bağlantıları

Yukarıdaki kabuller içerisinde plak orta düzleminde alınan bir elemanın şekil değiştirme yapmadığı esasına göre hareket edilir. Plak noktaları Şekil 2.1 de görülen koordinat eksen takımına göre ölçülür. Böyle bir plağın deformasyondan önce ve sonra oluşan kesitleri Şekil 2.3'de görülmektedir.

Plağın orta düzlemine ait bir nokta z doğrultusunda bir w yer değişimine maruz kalır. Bu anda, bu noktadan geçen ve orta düzleme dik olan normal, bir miktar eğilir. Bu eğilme $\frac{\partial w}{\partial x}$ ve $\frac{\partial w}{\partial y}$ açıları yardımıyla belirtilir.



Şekil 2.3. Plâğın deformatsiyondan sonraki kesiti.

Plak orta düzleminden z kadar uzakta bulunan bir nokta plâğın şekil değiştirmesi esnasında u, v ve w yer değişimlerine maruz kalır. u yerdeğişimi Şekil 2.3'den de görüleceği gibi, x ekseninin negatif yönünden olduğundan;

$$u = - z \frac{\partial w}{\partial x} \dots\dots\dots (2.1)$$

$$v = - z \frac{\partial w}{\partial y} \dots\dots\dots (2.2)$$

bağıntıları yazılabilir.

2.3. Yer ve Şekil Değiştirme Bağlılıları

Plak orta düzleminde z kadar uzakta bulunan ve oradakine paralel olan bir alan elemanının şekil değiştirme bileşenleri u , v , w yer değiştirme bileşenleri yardımıyla ifade edilir. (2.1) ve (2.2) yer değiştirmelerini dik-kate alarak,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots \dots \dots (2.3)$$

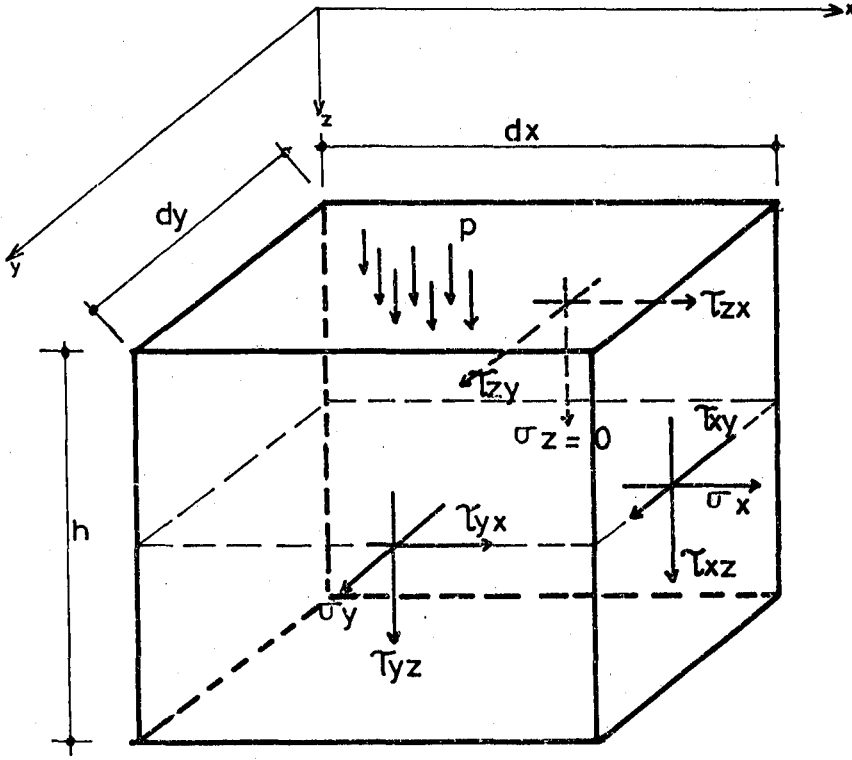
$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots \dots \dots (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots \dots \dots (2.5)$$

bağlılıları elde edilir.

2.4. Gerilme- Şekil Değiştirme Bağlılıları.

Plak orta düzlemine dik olarak plak üst düzeyine $+z$ doğrultusunda yayılı bir yük tesir etdiğinde, plağın alt ve üst yüzleri için aşağıda belirtilen sınır şartları geçerli olacaktır;



Şekil 2.4. Plak elemanındaki gerilmeler.

$$z = -\frac{1}{2} h ; \sigma_z = -p , \tau_{zx}=0, \tau_{zy} = 0 \dots (2.6)$$

$$z = +\frac{1}{2} h ; \sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0 \dots (2.7)$$

Plak içersinde σ_z ; - p ile sıfır arasında değişen değerler alır. Genel olarak σ_z in $z = -\frac{1}{2} h$ yüzünde oluşan değeri

ince plak teorisinde σ_x ve σ_y normal gerilmeleri yanında küçük olduğundan σ_z normal gerilme bileşeni ihmal edilir. Bunun sonucunda ϵ_x , ϵ_y ve τ_{xy} için yazılan gerilme - şekil değiştirme denklemleri;

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \dots\dots\dots (2.8)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) \dots\dots\dots (2.9)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \dots\dots\dots (2.10)$$

şeklinde yazılır. Burada E malzemenin elastisite modülü, G kayma modülü μ ise poisson oranıdır. normal ve kayma gerilmelerinin pozitif yönleri Şekil 2.4'de gösterildiği gibidir.

(2.8), (2.9), (2.10) denklemlerinden faydalanaarak σ ve τ gerilme bileşenleri; şekil değiştirme bileşenlerinin fonksiyonları olarak ifade edilebilir (2.3), (2.4), (2.5) denklemlerini kullanmak suretiyle gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bağıntılar elde edilir.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) = - \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots (2.11)$$

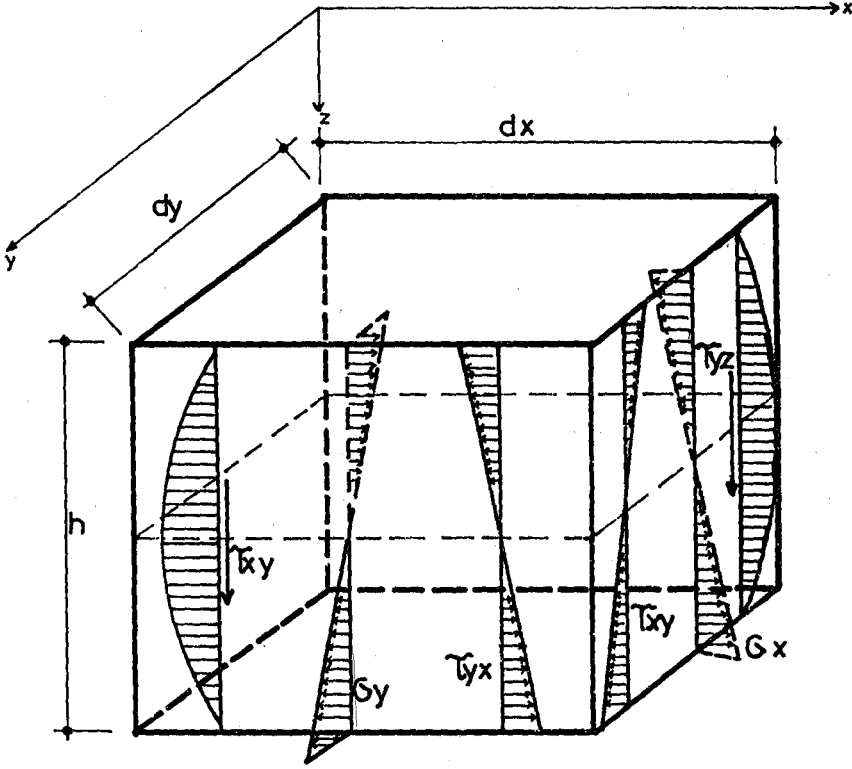
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots (2.12)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots (2.13)$$

Bu gerilme bileşenleri, orta düzlemden olan z mesafesiyle orantılı olup plak kalınlığı boyunca lineer olarak değişirler.

Bir plak elemanına etki eden iç kuvvetler Şekil 2.5'de görülmektedir. Dikkate alınan bu gerilme bileşenlerinden başka τ_{xz} ve τ_{yz} kayma gerilmelerinde oluşur. Aksi halde dx, dy yüzeyine etki eden p kuvveti ile düşey denge sağlanması mümkün değildir. Bu kayma gerilmeleri σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin dağılımına bağlıdır. Burada σ_x ve σ_y normal gerilmeleri plak kalınlığı boyunca lineer olarak dağıldığından τ_{xz} ve τ_{yz} kayma gerilmeleri de eksenli ve dikdörtgen kesitli çubuklarda olduğu gibi yine kalınlık boyunca parabolik dağılım gösterir.

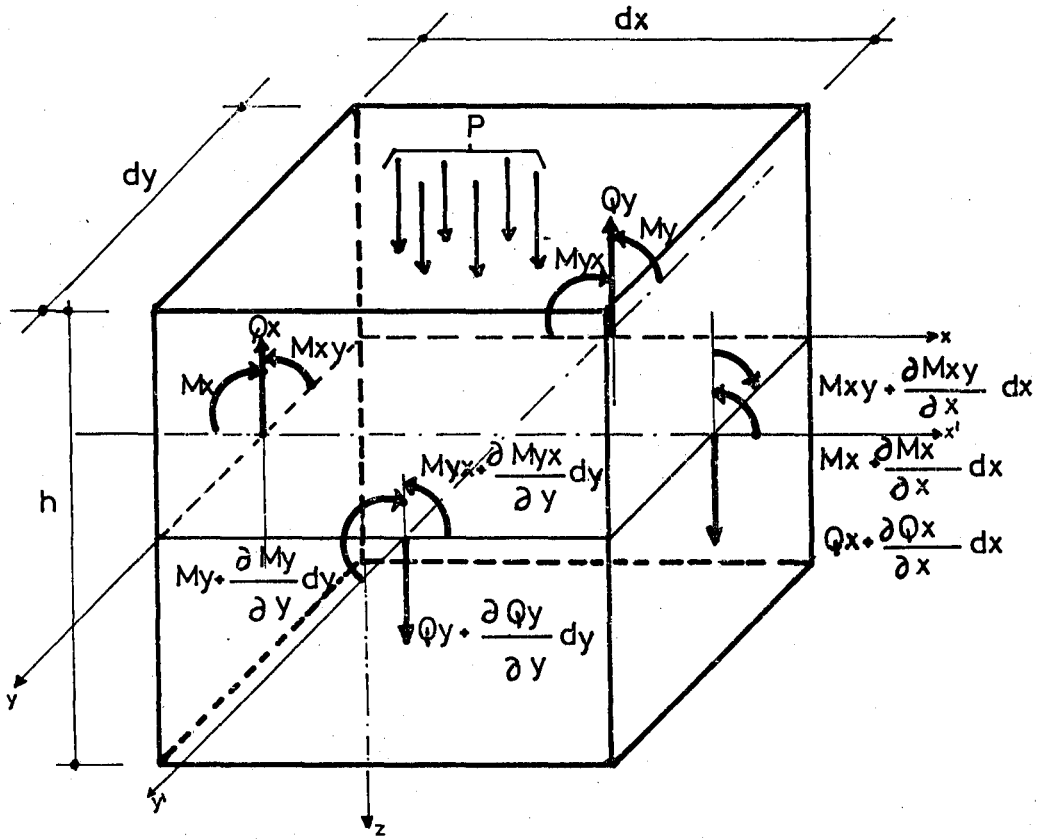
(2.6), (2.7) sınır şartlarına uygun olarak τ_{xz} ve τ_{yz} kayma gerilmeleri de $z = \pm \frac{1}{2} h$ kenarlarında sıfır olur.



Şekil 2.5. Plak elemanında gerilme dağılımları.

2.5. Gerilmelerin İç Kuvvetlere Dönüştürülmesi.

Plak teorisinde, gerilme bileşenleri yerine hesapta kesitin birim boyuna isabet eden kesit momentleri ve kesit kuvvetlerini kullanmak çok daha uygun olmuştur. Gerilme bileşenleri ile bu kesit büyüklükleri.



Şekil 2.6. Plak elemanında iç kuvvetler.

arasında aşağıdaki bağıntılar oluşturulur:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \cdot l \cdot z \cdot dz \dots \dots \dots (2.14)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot l \cdot z \cdot dz \dots \dots \dots (2.15)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot l \cdot z \cdot dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \cdot l \cdot z \cdot dz (2.16)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \cdot l \cdot dz \dots \dots \dots (2.17)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \cdot l \cdot dz \dots \dots \dots (2.18)$$

Burada M_y ve M_x ye eğilme momentleri, M_{xy} ye burulma momenti Q_x , ve Q_y ye de kesme kuvvetleri adı verilir.

Elemana etki eden bütün kuvvetlerin düşey dengelerini yazarsak şu denge denklemini elde ederiz.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + p dx dy = 0 \dots \dots \dots (2.19)$$

buradan,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \dots \dots \dots (2.20)$$

elde edilir.

Aynı elemana etki eden bütün kuvvetlerin x eksenine göre momentini alırsak şu denge denklemini elde edilir.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0 \dots\dots\dots (2.21)$$

Bu denklemde p yükünün momenti ile Q_y kuvvetindeki değişmeden meydana gelen moment ihmal edilmiştir; çünkü bunlar gözönümüze aldıklarımıza nazaran küçük değerlerdir (2.21) denklemini daha basit yazılırsa,

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \dots\dots\dots (2.22)$$

elde ederiz. Benzer şekilde y eksenine göre moment alınır,

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x \dots\dots\dots (2.23)$$

elde edilir.

(2.22) ve (2.23) denklemlerinde elde edilen Q_y ve Q_x kesme kuvvetlerini (2.20) deki denklemde yerine ko

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p \dots\dots\dots (2.24)$$

bulunur. Buradar $M_{yx} = -M_{xy}$ olduğundan (2.24) denklemi;

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p \dots\dots\dots (2.25)$$

şeklinde ifade edilir.

(2.15), (2.16) ve (2.17) moment denklemlerinde σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenlerinin yerine (2.11) (2.12) ve (2.13) ifadeleri ile verilen değerlerini yerine koyar

ve (2.29) ve (2.30) ifadeleri dikkate alınırrsa moment denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (2.26)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots\dots\dots (2.27)$$

$$M_{xy} = -D (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (2.28)$$

Burada D değerine plağın eğilme rijitliği veya plak rijitliği denir. J'ye ise en kesitin birim uzunluğunun atalet momenti denilir.

$$J = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot 1 \cdot dz = \frac{h^3}{12} \dots\dots\dots (2.29)$$

$$D = \frac{E \cdot J}{(1-\mu^2)} = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \dots\dots\dots (2.30)$$

Momentler bu şekilde ifade edildikten sonra Qx ve Qy kesme kuvvetlerini de aynı şekilde w düşey yer değiştirmelerin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Qx ve Qy kesme kuvvetlerini bulabilmek için (2.26), (2.27) ve (2.28) de belirtilen momentlerin (2.22) ve (2.23) de yerine konulmasıyla,

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (2.31)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (2.32)$$

bulunur. Daha sonra (2.31) ve (2.32) denklemleri (2.20) de bulunan denklemlerde yerine konursa plak denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \dots\dots\dots (2.33)$$

2.6. Sınır Şartları

Sınır şartları, dikdörtgen bir plak halinde incelenmiştir.

2.6.1. Ankastre kenar

Plak kenarı ankastre olursa, bu kenar boyunca sehimi sıfır olur. x eksenini ankastre kenar üzerinde olursa, burada;

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (2.34)$$

sınır şartları geçerlidir.

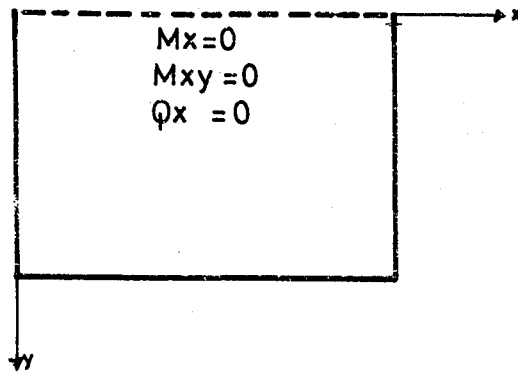
2.6.2. Basit mesnetli kenar

Plakın $y = 0$ kenarı basit mesnetli olursa bu kenar boyunca w sehimi sıfır olur. Ayrıca bu kenar x eksenine göre serbest olarak dönebildiği için bu kenar boyunca M_y eğilme momenti de sıfırdır. Sınır şartları analitik olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$w = 0, M_y = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (2.35)$$

2.6.3. Serbest Kenar

Plağın bir kenarı x sabit kenarının tam serbest bırakılması durumunda bu kenar boyunca eğilme ve burulma momentleriyle düşey kesme kuvvetlerinin bulunması gerekir (Şekil 2.7).



Şekil 2.7. Serbest kenarlı plak.

2.7. Çözüm Metodları

Üzerindeki yükü, şekli ve sınır şartları belli olan bir plak problemini çözmek için (2.33) plak diferansiyel denkleminin sınır şartlarını gerçekleyen $w=w(x,y)$ elastik yüzey ifadesini elde etmek için analitik çözümler dışında yaklaşık çözümler de ortaya konmuştur.

2.7.1. Analitik Çözümler

(2.33) plak diferansiyel denkleminin, verilen bir plak problemi için bütün sınır şartları dikkate alınır. İntegrasyon sonucunda da analitik çözümü elde edilmiş olur.

2.7.1.1. Basit Mesnetli Dikdörtgen Plaklar İçin Navier Çözümü

Şekil 1.10 daki plak üzerine bir p yayılı yük tesir etmektedir. Navier'e göre böyle bir plağın deformasyonları bir çift Fourier serisi yardımıyla x ve y'nin tek fonksiyonu olarak ifade edilir.

$$P = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} \dots \dots \dots (2.36)$$

2.7.1.2. Basit Mesnetli Dikdörtgen Plaklar İçin Levy Çözümü

Levy'e göre karşılıklı iki kenarı basit olarak mesnetlenmiş dikdörtgen plakların çözümü için bir seri verilmiştir.

Bu seri;

$$W_1 = \sum_m Y_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{l_x} \dots \dots \dots (2.37)$$

Burada Y_m , y nin bir fonksiyonudur.

2.7.2. Varyasyon Metodları

Bu metodu iki gurubta toplamak mümkündür. Birinci gurupta $w(x,y)$ elastik yüzeyine uygun olan

$$w = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n \dots\dots\dots (2.38)$$

şeklinde bir ifade mevcuttur. Burada $f_i(x,y)$ fonksiyonları plak diferansiyel denklemini tam, sınır şartlarını ek-sik olarak gerçekler. Bunun için a_1, a_2, \dots, a_n sabitleri sınır şartlarını mümkün olduğunca sağlayacak şekilde belir-lenir. Bunun çözümü için toplam potansiyel enerjinin minimum olma prensibinden ve Castigliano prensibinden yararlanılır.

İkinci grupta ise yine (2.38) ifadesi geçerlidir. Burada $f_i(x,y)$ fonksiyonları sınır şartlarını tam, plak di-feransiyel denklemini eksik olarak gerçekleştirdiği için a_1, a_2, \dots, a_n sabitleri, plak diferansiyel denklemini en uy-gun sağlayacak şekilde belirlenir.

2.7.3. Nümerik Metodlar

Nümerik metodların en önemlileri sonlu farklar metodu ve sonlu elemanlar metodudur. Bu metodlarda plak denklemini ve sınır şartları yerine sonlu farklar metodunda türevleri diferanslarla ifade eden denklemler kullanılır. Sonlu elemanlar metodunda ise plak elemanı sonlu sayıda elemana bölünerek eleman kenarları üzerinde yayılı olan iç kuvvetleri düğüm noktalarına etkileyen fiktif kuvvetler ola-rak kabul edilir. Süreklilik şartları ile bu düğüm noktala-

rında lineer denklem sistemi elde edilir. Bunun çözümünden ise deformasyonlar ve iç kuvvetler hesaplanır.

3. SONLU ELEMANLAR METODU

Burada nümerik çözüm metodlarından olan sonlu elemanlar metodu anlatılacaktır. Ayrıca burada sonlu elemanlar metodu ile yapılan plak çözümü ile ilgili açıklamalar yapılacaktır.

3.1. Metodun Özellikleri

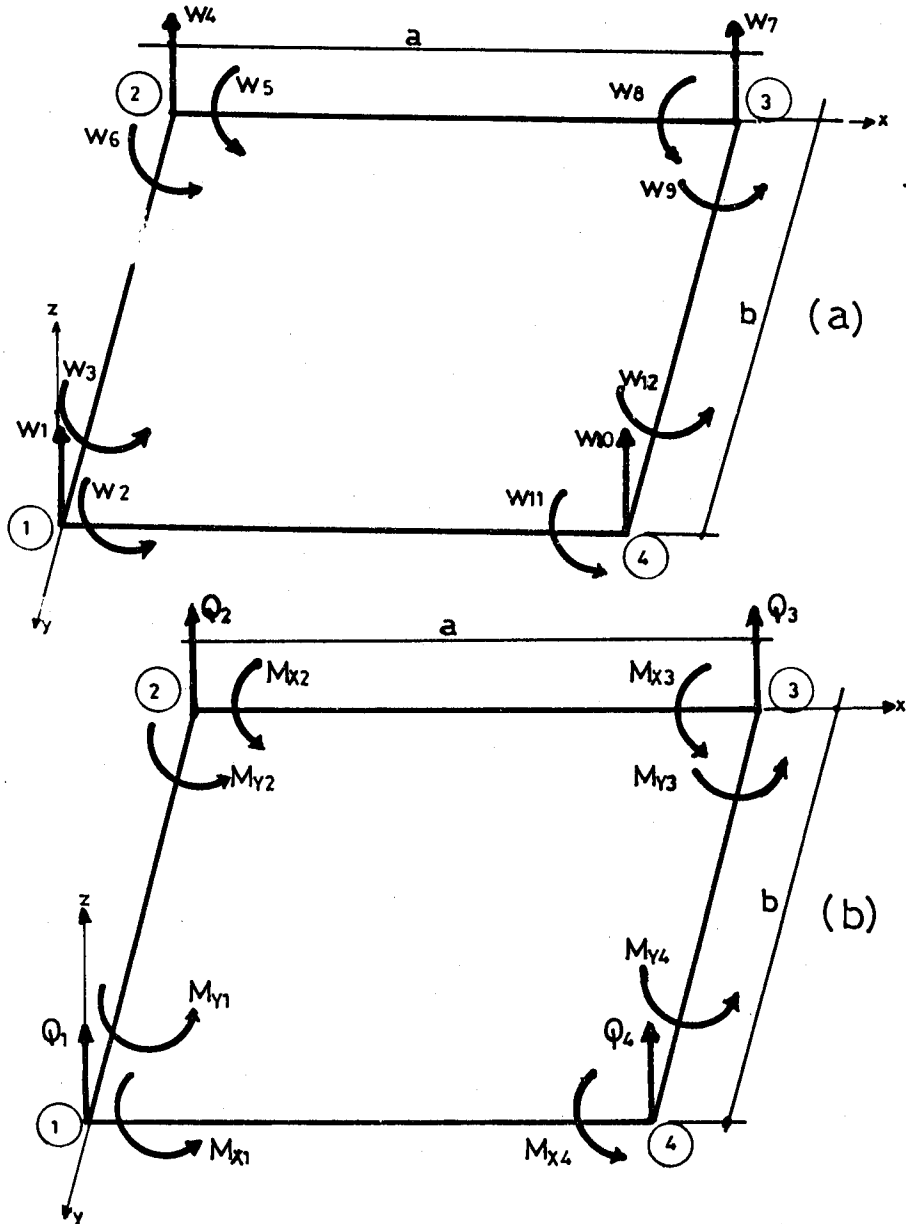
Sonlu elemanlar metodu çubuk, levha, plak veya kabuklardan oluşan yapı sistemlerinin statik veya dinamik yükler altında hesabı için geliştirilmiş olan nümerik bir hesap metodudur.

Bilgisayarların oldukça kısa zamanda kapasite ve hızlarının artmasına paralel olarak sonlu elemanlar metodunda hızla geliştirilmiş ve kullanım alanında büyük ilgi görmüştür. Kullanım alanı çok geniş olan bu metod çubuk sistemlerde kesin sonuç vermesine rağmen sürekli ortam problemlerinin çözümünde yaklaşık sonuçlar vermektedir. Ancak bu yaklaşıklık mühendislikte kabul edilen hata sınırı içersindedir.

Sonlu elemanlar metodu taşıyıcı sistemin sonlu sayıda elemanın düğüm noktası olarak adlandırılan noktalarında birbirleri ile bağlantılı olduğu kabulüne dayanır. Özellikleri bilinen bu elemanlara ait uygunluk ve denge şartlarından yararlanarak düğüm noktalarındaki deplasmanlar ve kuvvetler hesaplanır.

3.2. Plak Elemanındaki Temel Büyüklükler

Sonlu elemanlar metoduna göre plak, genel olarak üçgen veya dikdörtgen elemanlara ayrılabilir. Bu çalışmada kullanılacak olan bilgisayar programında dikdörtgen eleman kullanıldığında dikdörtgen plak üzerine açıklamalar yapılacaktır.



Şekil 3.1. Plak elemanında Statik etkiler,
a) deplasmanlar,
b) iç kuvvetler.

Şekil 3.1 de plaktan alınan dikdörtgen bir eleman eksen takımı, düğüm noktalarının numaraları ve deplasmanları gösterilmiştir.

Düğüm noktasının deplasmanlarının (çökme ve dönmelerinin) pozitif yönleri de yine Şekil 3.1'de belirtilmiştir. Herhangi bir elemanın düğüm noktalarındaki deplasmanlarının toplam sayısı o elemanın serbestlik derecesini verir. Bu deplasmanlara karşılık o düğüm noktalarında M_x , M_y , ve Q iç kuvvetleri meydana gelir (Şekil 3.1). Sonlu elemanlar metodunda bilinmeyenler olarak deplasmanlar ve kuvvetler alınarak iki şekilde çözüm yapılır. Ancak burada bilinmeyenler olarak deplasmanlar seçilmiş, "Sonlu Elemanlar Deplasman Metodu" kullanılmıştır.

3.3. Toplam Potansiyel Enerji

Ritz metodunda olduğu gibi sonlu elemanlar metodunda da toplam potansiyel enerjiden yararlanılır. Ritz metodunda tüm sistem için yazılan toplam potansiyel enerji sonlu elemanlar metodunda her eleman için ayrı, ayrı yazılır, sonunda toplanır.

Bu plağın p yükü altında toplam potansiyel enerjisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} D \iiint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy dz \iiint p \cdot w \cdot dx \cdot dy \cdot dz \dots \dots \dots (3.1) \end{aligned}$$

(3.1) ifadesinin ilk kısmı;

$$A_i = \frac{1}{2} D \iiint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy dz \dots \dots \dots (3.2)$$

plağın iç kuvvetlerinin işini, ikinci kısmı;

$$A_a = - \iiint p \cdot w \cdot dx dy dz \dots \dots \dots (3.3)$$

ise plağın dış yükleri altında yaptığı işi gösterir.

(3.2) şekil değiştirme işinin (2.3), (2.4), (2.5) ifadeleri kullanılarak ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} cinsinden ve matris formunda

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.4)$$

ifadesi yazılırsa;

$$A_i = \frac{1}{2} \iiint \underline{\epsilon}^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{\epsilon} dx dy dz \dots \dots \dots (3.5)$$

olur. Buna benzer olarak dış kuvvetlerin yaptığı işin ters işaretlisi matris formunda ifadesi yazılırsa;

$$A_a = -\iiint \underline{p} \cdot \underline{w} \, dx dy dz \dots \dots \dots (3.6)$$

olur. Burada \underline{E} elastisite matrisi olup, plakta düzlem gerilme hali için;

$$\underline{E} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.7)$$

ifadesi ile verilmiştir. (Ünlüoğlu, 1985)

$$\Pi = A_i - A_a = \frac{1}{2} \iiint \underline{\epsilon}^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{\epsilon} \, dz dx dy - \iiint \underline{p} \cdot \underline{w} \, dx dy dz (3.9)$$

3.4. Toplam Potansiyel Enerjinin Minimum Olma Prensibi

Lineer elastik bir sistemde kinematik olarak uygun ve bütün geometrik sınır şartlarını sağlayan sayısız denge konumları vardır. Gerçek denge konumunda toplam potansiyel enerji minimum olur.

3.5. Deplasman Fonksiyonu

Sonlu elemanlar metodunda hesap yapmak için öncelikle sınır şartlarını sağlayan $w(x,y)$ deplasman fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilir (Ünlüoğlu, 1985)

$$\begin{aligned}
 w(x,y) = & a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x^2 + a_5 \cdot xy + a_6 \cdot y^2 + \\
 & + a_7 \cdot x^3 + a_8 \cdot x^2 y + a_9 \cdot xy^2 + a_{10} \cdot y^3 + a_{11} \cdot x^3 y + \\
 & + a_{12} \cdot xy^3 \dots \dots \dots (3.10)
 \end{aligned}$$

3.6. Eleman ve Sistem Rijitlik Matrisleri

Sonlu elemanlar metodunda sistem elemanlara ayrıldığı için problemler iki aşamada incelenerek çözülür.

Birinci aşamada elemanlar için deplasman fonksiyonu yardımıyla her elemanın ayrı ayrı potansiyel enerjileri hesaplanarak elemanların düğüm noktası deplasmanları ile bunların doğrultusundaki iç kuvvetleri bağlayan rijitlik matrisleri bulunur.

İkinci aşamada ise, sistem tüm elemanların toplamından meydana geldiği için elemanlara ait toplam potansiyel enerjiler toplanarak sisteme ait toplam potansiyel enerji bulunur. Bu işlem elemanların birleştiği düğüm noktalarında uygunluk ve denge şartlarını sağlayacak şekilde yapılarak sistemin rijitlik matrisi elde edilir.

Denklem (3.9)'a göre i. plak elemanının toplam potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir. (Ünlüoğlu, 1985)

$$\Pi^i = -\frac{1}{2} \iiint (\underline{\epsilon}^i)^T \cdot \underline{E}^i \cdot \underline{\epsilon}^i dz dx dy - (\underline{w}^i)^T \cdot \underline{s}^i \dots (3.11)$$

Burada \underline{w}^i , i elemanının düğüm noktalarındaki deplasman vektörünü, \underline{s}^i ise i elemanının p yüzey yüklerine eşdeğer alınarak düğüm noktalarına etki ettirilen ve düğüm noktalarındaki w deplasmanlarına karşılık gelen kuvvet vektörünü gösterir. Buna bağlı olarak $-(\underline{w}^i)^T \cdot \underline{s}^i$ ifadesi i elemanına ait \underline{s}^i kuvvetlerinin potansiyel enerjisini gösterir. \underline{w}^i deplasmanları

$$(\underline{w}^i)^T = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}) \dots (3.12)$$

$$(\underline{s}^i)^T = (M_{x1}, M_{y1}, Q_1, M_{x2}, M_{y2}, Q_2, M_{x3}, M_{y3}, Q_3, M_{x4}, M_{y4}, Q_4) \dots (3.13)$$

(3.12) ile \underline{s}^i kuvvetleri de (3.13) ile belirtilir.

(3.4) ifadesi ile verilen $\underline{\epsilon}^i$ deformasyon matrisi \underline{w}^i deplasman matrisine bağlı olarak;

$$\underline{\epsilon}^i = \underline{B}^i \cdot \underline{w}^i \dots (3.14)$$

ifadesi ile verilebilir. Burada \underline{B}^i deplasmanları deformasyonlara bağlayan transformasyon matrisidir. Buna göre (3.11) denklemi aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\Pi^i = \frac{1}{2} (\underline{w}^i)^T \iiint (\underline{B}^i)^T \cdot \underline{E}^i \cdot \underline{B}^i \, dx dy dz \cdot \underline{w}^i +$$

$$[-(\underline{w}^i)^T \cdot \underline{s}^i] \dots \dots \dots (3.15)$$

Bu şekile getirilen (3.15) toplam potansiyel enerji denkleminin

$$\underline{k}^i = \iiint (\underline{B}^i)^T \cdot \underline{E}^i \cdot \underline{B}^i \, dx dy dz \dots \dots \dots (3.16)$$

ifadesi ile verilen kısmı i elemanına ait rijitlik matrisidir. Bu ifadeden ve gerçek denge konumunda toplam potansiyel enerjinin minimum olma prensibinden yararlanarak i elemanına ait denge denklemi;

$$\underline{k}^i \cdot \underline{w}^i = \underline{s}^i \dots \dots \dots (3.17)$$

elde edilir.

Burada problemin ilk aşaması olan eleman denge denklemi elde edilmiştir. Buna göre problemin ikinci aşaması olarak sistem denge denkleminin kurulabilmesi için, önce sistemde bulunan elemanlara ait potansiyel enerjiler toplanarak sistemin toplam potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi^i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (\underline{w}^i)^T \cdot \underline{k}^i \cdot \underline{w}^i - (\underline{w}^i)^T \cdot \underline{s}^i \right] \dots (3.18)$$

Burada n sistemdeki eleman sayısını gösterir. Elemanlara ait toplam potansiyel enerjiler toplanırken sürekliliğin, yani bir noktada birleşen elemanların o noktadaki deplas-

manlarının eşit olması şartını sağlaması gerekir. Buna göre sistemin toplam potansiyel enerjisi yazılırsa;

$$\Pi = \frac{1}{2} \underline{W}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{W} - \underline{W}^T \cdot \underline{P} \dots\dots\dots (3.19)$$

ifadesi ile elde edilir. Burada, \underline{W} sistemin düğüm noktalarına ait deplasman matrisi, \underline{K} sistemin rijitlik matrisi, \underline{P} ise sistemin düğüm noktalarına etkiyen dış kuvvetlere ait yük matrisidir.

Gerçek denge konumunda toplam potansiyel enerjinin minimum olma prensibinden yararlanarak sisteme ait denge denklemi;

$$\underline{K} \cdot \underline{W} = \underline{P} \dots\dots\dots (3.20)$$

elde edilir.

3.7. Denge Denkleminin Çözümü

Bilinen sınır şartları \underline{W} deplasman matrisine ve buna bağlı olarak \underline{K} rijitlik matrisine işlenerek belirli bazı matris işlemleri ile kolayca yapılır.

Böylece gerekli sınır şartları sisteme işlendikten sonra, (3.20) denklem sisteminin çözümü yapılarak plâğın noktalarına ait deplasmanlar bulunur. Bulunan \underline{W} deplasmanları dikkate alınarak elemanların düğüm noktalarındaki \underline{s} kuvvetleri denklem (3.17) kullanılarak elde edilir.

3.8. Sonlu Elemanlar Metoduna Göre Eğilmeye Çalışan Bir Plağın Çözümü

Bu tezdeki boşluklu döşemelerin çözümleri sonlu elemanlar deplasman metoduna göre hazırlanmış plak, bilgisayar programı ile yapılmıştır. (Ünlüoğlu, 1985)

Bu programda elemanlara ayrılmış plağın özellikleri tarif edildikten sonra eleman rijitlik matrisleri kurulmuş ve Şekil (3.1) deki elemana uygun $w(x,y)$, (3.10) deplasman fonksiyonu çeşitli literatürlerde verildiği gibi alınmıştır.

$$\begin{aligned}
 w(x,y) = & a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x^2 + a_5 \cdot x \cdot y + a_6 \cdot y^2 + \\
 & + a_7 \cdot x^3 + a_8 \cdot x^2 \cdot y + a_9 \cdot x \cdot y^2 + a_{10} \cdot y^3 + a_{11} \cdot x^3 \cdot y + \\
 & + a_{12} \cdot x \cdot y^3 \dots\dots\dots (3.10)
 \end{aligned}$$

Bu fonksiyonun a_1, a_2, \dots, a_{12} katsayıları dikdörtgen elemanın düğüm noktalarındaki sınır şartlarından yararlanarak kurulan denklem sisteminin çözümünden elde edilir.

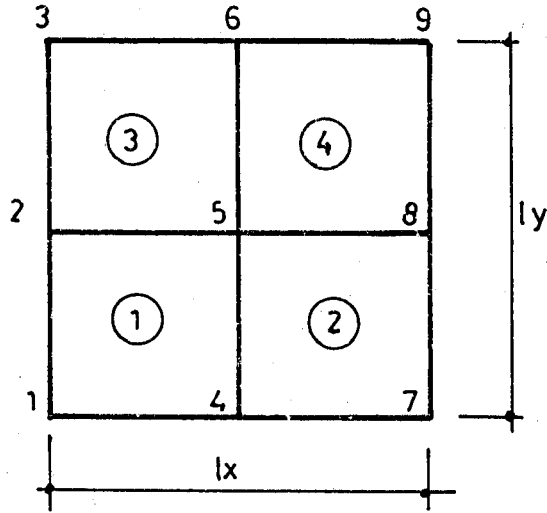
$$\underline{k}^i = \iiint (\underline{B}^i)^T \cdot \underline{E}^i \cdot (\underline{B}^i) \, dx \, dy \, dz \dots\dots\dots (3.16)$$

denkleminde bulunan elastisite matrisi \underline{E} ve transformasyon matrisi \underline{B} yerlerine konur, gerekli matris çarpımları yapılır, bu ifadenin x ve y 'ye göre integrali alınırsa i elemanına ait \underline{k}^i rijitlik matrisi kurulmuş olur.

Bu şekilde elde edilen \underline{k}^i eleman rijitlik matrisi program içinde verilmiştir.

Yukarıda açıklandığı gibi k^i eleman rijitlik matrisleri kurulduktan sonra bu matrisler K sistem rijitlik matrisi üzerine, sistemdeki uygunluk ve denge şartlarını sağlayacak şekilde yerleştirilir.

Bu işlem Şekil 3.3'de eleman ve düğüm noktası numaraları verilen dört elemanlı bir plak sistemi üzerinde açıklanmıştır.



Şekil 3.3. Dört elemanlı plak

Bu elemanlara ait eleman rijitlik matrisleri (3.21), (3.22), (3.23) ve (3.24) ifadeleri ile verilir.

$$k^1 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{k}_{11}^1 & \underline{k}_{12}^1 & \underline{k}_{13}^1 & \underline{k}_{14}^1 \\ \hline \underline{k}_{21}^1 & \underline{k}_{22}^1 & \underline{k}_{23}^1 & \underline{k}_{24}^1 \\ \hline \underline{k}_{31}^1 & \underline{k}_{32}^1 & \underline{k}_{33}^1 & \underline{k}_{34}^1 \\ \hline \underline{k}_{41}^1 & \underline{k}_{42}^1 & \underline{k}_{43}^1 & \underline{k}_{44}^1 \\ \hline \end{array}$$

$$(3.21)k^2 = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 7 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{k}_{11}^2 & \underline{k}_{12}^2 & \underline{k}_{13}^2 & \underline{k}_{14}^2 \\ \hline \underline{k}_{21}^2 & \underline{k}_{22}^2 & \underline{k}_{23}^2 & \underline{k}_{24}^2 \\ \hline \underline{k}_{31}^2 & \underline{k}_{32}^2 & \underline{k}_{33}^2 & \underline{k}_{34}^2 \\ \hline \underline{k}_{41}^2 & \underline{k}_{42}^2 & \underline{k}_{43}^2 & \underline{k}_{44}^2 \\ \hline \end{array} \quad (3.22)$$

$$k^3 = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{k}_{11}^3 & \underline{k}_{12}^3 & \underline{k}_{13}^3 & \underline{k}_{14}^3 \\ \hline \underline{k}_{21}^3 & \underline{k}_{22}^3 & \underline{k}_{23}^3 & \underline{k}_{24}^3 \\ \hline \underline{k}_{31}^3 & \underline{k}_{32}^3 & \underline{k}_{33}^3 & \underline{k}_{34}^3 \\ \hline \underline{k}_{41}^3 & \underline{k}_{42}^3 & \underline{k}_{43}^3 & \underline{k}_{44}^3 \\ \hline \end{array}$$

$$(3.23)k^4 = \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 9 \\ 8 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{k}_{11}^4 & \underline{k}_{12}^4 & \underline{k}_{13}^4 & \underline{k}_{14}^4 \\ \hline \underline{k}_{21}^4 & \underline{k}_{22}^4 & \underline{k}_{23}^4 & \underline{k}_{24}^4 \\ \hline \underline{k}_{31}^4 & \underline{k}_{32}^4 & \underline{k}_{33}^4 & \underline{k}_{34}^4 \\ \hline \underline{k}_{41}^4 & \underline{k}_{42}^4 & \underline{k}_{43}^4 & \underline{k}_{44}^4 \\ \hline \end{array} \quad (3.24)$$

Burada $\underline{k}_{11}^i, \underline{k}_{12}^i, \dots, \underline{k}_{44}^i$ 3 x 3 boyutunda alt matrisleri ifade etmektedir. Bu alt matrisler, sistemdeki uygunluk ve denge şartlarını sağlayacak şekilde \underline{K} sistem rijitlik matrisine (3.25) ifadesinde olduğu gibi yerleştirilir. (Direk rijitlik metodu)

Bu problemdeki gerekli sınır şartları \underline{K} rijitlik matrisi ile \underline{w} deplasman matrisine işlendikten ve sistemin

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	\underline{k}_{11}^1	\underline{k}_{12}^1	0	\underline{k}_{13}^1	\underline{k}_{14}^1	0	0	0	0
2	\underline{k}_{21}^1	$\underline{k}_{22}^1 + \underline{k}_{12}^3$	\underline{k}_{12}^3	\underline{k}_{23}^1	$\underline{k}_{24}^1 + \underline{k}_{13}^3$	\underline{k}_{14}^3	0	0	0
3	0	\underline{k}_{21}^3	\underline{k}_{22}^3	0	\underline{k}_{23}^3	\underline{k}_{24}^3	0	0	0
4	\underline{k}_{31}^1	\underline{k}_{32}^1	0	$\underline{k}_{33}^1 + \underline{k}_{11}^2$	$\underline{k}_{34}^1 + \underline{k}_{12}^2$	0	0	0	0
5	\underline{k}_{41}^1	$\underline{k}_{42}^1 + \underline{k}_{31}^3$	\underline{k}_{32}^3	$\underline{k}_{43}^1 + \underline{k}_{21}^2$	$\underline{k}_{44}^1 + \underline{k}_{22}^2$ $+ \underline{k}_{33}^3 + \underline{k}_{11}^4$	\underline{k}_{34}^3	\underline{k}_{23}^2	\underline{k}_{24}^2	0
6	0	\underline{k}_{41}^3	\underline{k}_{42}^3	0	$\underline{k}_{43}^3 + \underline{k}_{21}^4$	$\underline{k}_{44}^3 + \underline{k}_{22}^4$	0	\underline{k}_{23}^4	\underline{k}_{24}^4
7	0	0	0	\underline{k}_{31}^2	\underline{k}_{32}^2	0	\underline{k}_{33}^2	\underline{k}_{34}^2	0
8	0	0	0	\underline{k}_{41}^2	$\underline{k}_{42}^2 + \underline{k}_{31}^4$	\underline{k}_{32}^4	\underline{k}_{43}^2	$\underline{k}_{44}^2 + \underline{k}_{33}^4$	\underline{k}_{34}^4
9	0	0	0	0	\underline{k}_{41}^4	\underline{k}_{42}^4	0	\underline{k}_{43}^4	\underline{k}_{44}^4

K =

3.25

35

düğüm noktalarına etkiyen dış kuvvetlerin oluşturduğu \underline{P} matrisi de yerine konulduktan sonra;

$$\underline{K} \cdot \underline{W} = \underline{P} \dots\dots\dots (3.26)$$

denklemin sisteminin çözümünden sistemin düğüm noktalarına ait deplasmanları veren \underline{W} matrisi elde edilir.

Elde edilen bu deplasmanlardan yararlanarak her elemanın düğüm noktalarında oluşacak s^i kuvvetleri ifade-

$$s^i = k^i \cdot w^i \dots\dots\dots (3.27)$$

siyle elde edilir. Bu şekilde plak sisteminin çözümü elde edilmiş olur.

4. BOŞLUKLU DÖŞEMELERLE İLGİLİ YAPILAN ÇALIŞMALAR

Boşluklu döşemeler kavramı, adından da anlaşılacağı üzere, boşluk bırakılmış bulunan döşemelerdir.

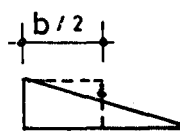
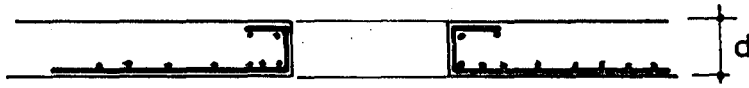
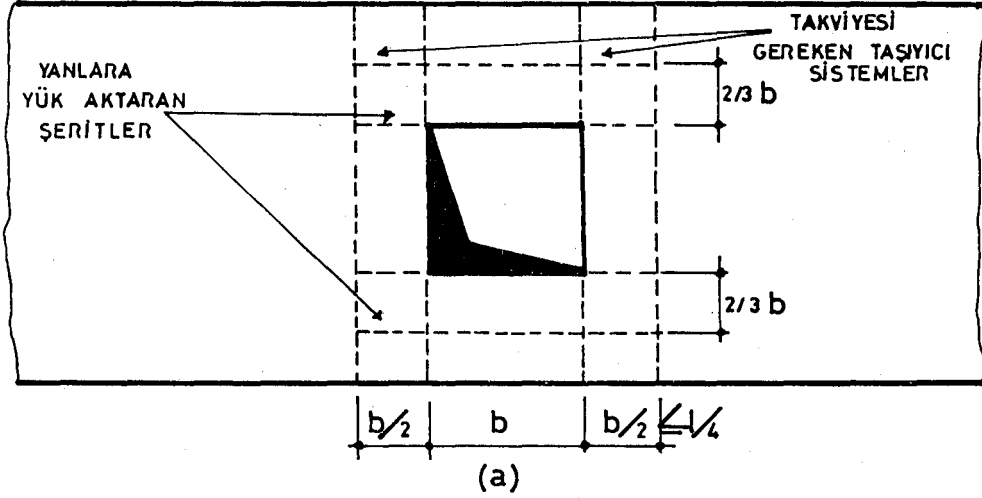
Bu gibi döşemelerde bırakılan boşluklar döşemenin herhangi bir yerinde ve farklı boyutlarda olabilir. Ayrıca döşeme sistemlerinde boşluk, döşeme, boşluğun konumu ve şekli bir bütün olarak düşünülmelidir (Beton Kaleder, 1971).

Boşluklu döşemelerle ilgili bir çalışmada Aka vd., (1980) yaklaşık bir hesap yolu önermiştir. Bu hesap yolu tek doğrultuda ve çift doğrultuda çalışan döşemelerde aşağıdaki gibi açıklanabilir.

Tek doğrultuda çalışan plaklarda boşluğun kestiği şeridin yükünü bunun iki yanında bulunan komşu şeritlerin taşıyacağı düşüncesinden hareket edilir (Şekil 4.1).

Boşluğun enine doğrultuda b genişliğindeki kenarına paralel bulunan şeritler, kesilmiş olan şeritten kalan parçaların yükünü yanda bulunan taşıyıcı şeritlere aktarırlar. Hesap ve donatı kolaylığı bakımından yük aktaran şeritlerin genişliği $2/3 b$ ve yanlarda takviyesi gereken taşıyıcı şeritlerin genişliği ise, plak açıklığının $1/4$ ünden küçük olmak şartı ile $b/2$ olarak alınır.

Burada boşluk yanlarında bulunan şeritlere ilave edilecek donatı miktarı, boşluk bırakmak için kesilen donatılardan az olmamalıdır.



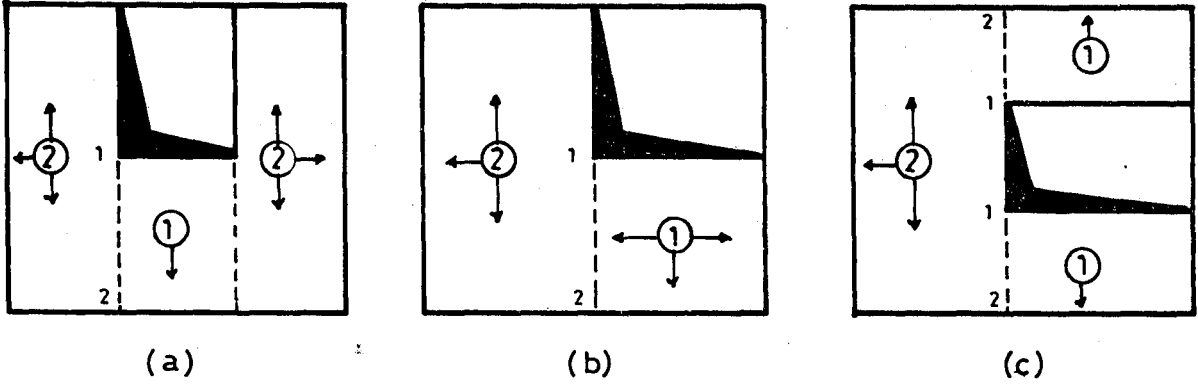
Şekil 4.1. Dikdörtgen boşluklu tek doğrultuda çalışan plak,
 a) Plan,
 b) Kesit,
 c) Taşıyıcı şeritte ek yükün yayılması.

Buna karşılık boşluk kenarında bulunan veya gelebilecek olan yükler'e karşı plak kenarına Şekil 4.1.b'deki gibi özel donatı konmalı ve bu donatı ya alttaki donatı

ucunun üste kıvrılması ya da firkete biçiminde ek donatılarla düzenlenebilir.

İki doğrultuda çalışan plaklar için yaklaşık bir hesap yolu verilememiştir. Ancak, küçük boşluklar bulunan plaklarda, özellikle mesnetlenme şartları etkilenmedikçe, boşluklar gözönüne alınmadan konstrüktif donatılarla boşluğun etkisi giderilebilir.

Boşluklar büyük ve plağın mesnet şartları değişiyorsa, bu plağı daha küçük parçalara ayırarak üç kenarından mesnetli bir kenarı boşta plaklar gibi hesaplanabilir.



Şekil 4.2. Boşluklu plakların üç kenarından mesnetli olması durumu,

- a) Boşluk üstte,
- b) Boşluk köşede,
- c) Boşluk yanda.

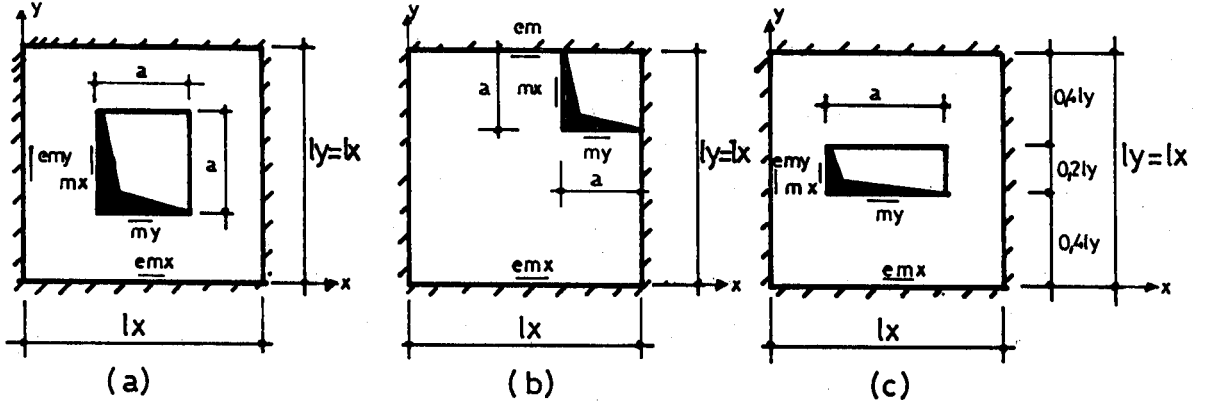
Şekil 4.2 a ve b'de gösterilen örneklerde önce (1) plakları üç kenarından mesnetli olarak hesaplanıp sonra serbest kenarlarında bunların yükleri de gözönüne alınarak (2) plakları yine üç kenarından mesnetli plak olarak hesaplanabilir. Şekil 4.2.c'de verilen örnekte ise (1) plakları konsol ve (2) plakları da üç kenarından mesnetli plak olarak hesaplanabilir.

Boşluk yanlarındaki şeritlerde fazla yük olacağından, boşlukların büyük olması durumunda ek donatının kenarlara kadar uzatılması gerekir. Boşluk kenarlarına dik doğrultuda konacak donatılarda tek doğrultudaki plaklarda verilen kurallar aynen geçerlidir.

Boşluklu döşemelerle ilgili Stiglat et al. (1983)'da bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada boşluklu döşemelerin değişik konum ve boyutlarına bağlı olarak çözümleri tablolar halinde verilmiştir.

Stiglat et al. (1983) genelde kare ve kenarları ankastre plaklar üzerinde çalışmalar yaparak Şekil 4.3'de gösterilen plaklara ait moment katsayıları tablolar halinde yerilmiştir. Bu moment katsayıları tablolardan alınarak verilen formülde yerine konur ve plağın istenen noktadaki momenti bulunur.

Beton Kalender'de (1983) ise boşluklu döşemelerle ilgili çalışmalar, sonsuz uzun plakta belirli bir uzunlukta yarı ve dikdörtgen boşluk üzerinedir. (Şekil 4.4). Burada örnek olarak alınan plak basit mesnetlidir ve sonuçlar grafik üzerinde gösterilmiştir.

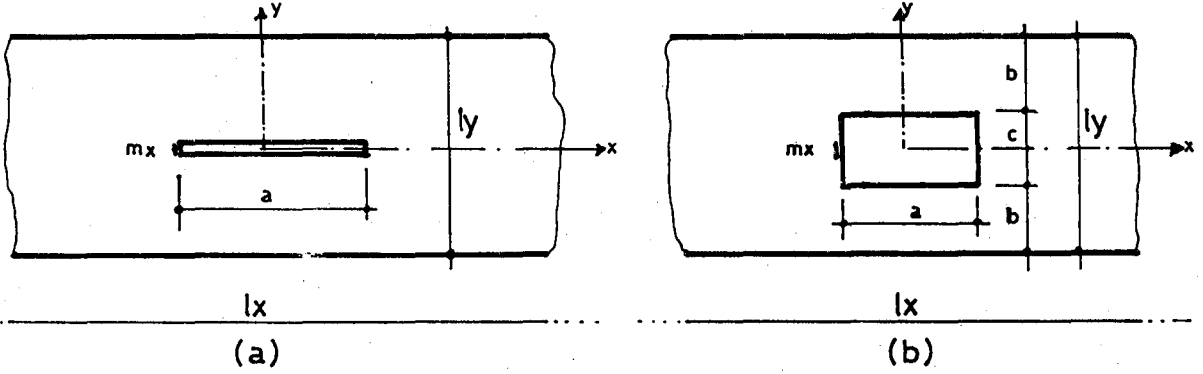


Şekil 4.3. Ankastre kare plakta boşluklar.
 a) Plak ortasında kare boşluk,
 b) Plak köşesinde kare boşluk,
 c) Plak ortasında dikdörtgen boşluk.

Ayrıca Beton Kalender (1983) de de Şekil 4.3. de verilen Stiglat et al.'ın (1983) çalışmasındaki modeller alınmış ve gerekli moment katsayıları tablolar halinde sunulmuştur.

Tablo değerleri Stiglat'ın (1983) verdiği değerlere benzerdir. Fakat Stiglat'ın formülde payda da vermiş olduğu moment katsayıları Beton kalenderde pay kısmında verilmiştir.

Hahn'da (1968) boşluklu döşemeler konusunda çalışma yapmıştır. Bu çalışmalarını Şekil 4.2'de verilen benzer şekiller üzerinde açıklamış ve bu konuda dikkat edilmesi gereken hususları belirtmiştir. Buna göre Şekil



Şekil 4.4. Sonsuz uzun plakta boşluklar.

- a) Plakta ince yarıklık,
- b) Plakta dikdörtgen boşluk.

4.2'de ki (1) ve (2) plaklarının üç kenarından mesnetli plak olarak çözümlenmesinin bazı problemleri getirdiğini gözlemiştir. Bunun içinde Şekil 4.2.b'deki plakta (1)'in (1-2) kenarı önce serbest mesnetli sonrada ankastre mesnetli olarak hesaplanmasını ve enterpolasyon yapılması gerektiğini belirtmektedir.

Buna karşılık (1), üç kenarı serbest mesnetli olarak hesaplanır ve x doğrultusundaki teçhizatın yarısı pliye olarak komşu plağın içine kadar uzatılırsa, hesap ve boyutlandırma emniyetli olarak yapılmış olur. x doğrul-

tusundaki pliye demirleri (1-2) kesitinde meydana gelecek mesnet momentin yeterli gelmektedir.

Ayrıca, kenar kirişlerdeki çökmelerin plak eğilme momentlerine tesiri burada bahis konusudur. Şekil 4.2.b deki 1-2 kenarı, bir taraftan (2) nin yüklerinden diğer taraftan da (1) in mesnet reaksiyonlarından çökecek ve bu sebeple (1) deki kesit tesirleri yine değişecektir.

Yukarıda belirtilen nedenlerden dolayı parça parça hesaplanmış döşemelerdeki gerçek momentlerin bulunması kolay olmamaktadır. Dikdörtgen plaklarda kenar kirişlerin çökmeleri hesaplarda gözönüne alınmadığı için, burada da genel olarak gayrimüsaait durumlar meydana getirmedikleri için kesin çözümlerin aranmasına gerek görmemiştir. Fakat (1) parçasının açıklık momentinin arttırılması durumunda daha emniyetli olunmaktadır. Bu da (1) in mesnetlendiği yerin 1-2 kesiti yerine (2) nin takriben ortasında alınarak daha büyük açıklığa göre hesap yapılmasının uygun olduğunu ifade etmiştir.

Dairesel plaklarda bulunan dairesel boşluklarla da ilgili çalışmalar yapılmıştır. Ancak genelde bu gibi çalışmalar teorik olarak yapılmıştır. Hartog (1952) da yaptığı çalışmada boşluğun etrafında meydana getirdiği gerilme dağılımını vermiştir.

5. BOŞLUKLU DÖŞEMELERİN MOMENT DEĞERLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Burada üçüncü bölümde bahsedilen "Sonlu Elemanlar Metodu"na göre hazırlanan sonlu elemanlar plak programı ile değişik boşluklu plak modelleri alınıp boşlukların plağa olan etkileri tespit edilmiştir. Ayrıca bu çözümlerin sonucunda boşluklu plak modellerinin herbiri için belirli noktalardeki momentlere ait moment katsayıları, tablolar ve grafikler halinde verilmiştir.

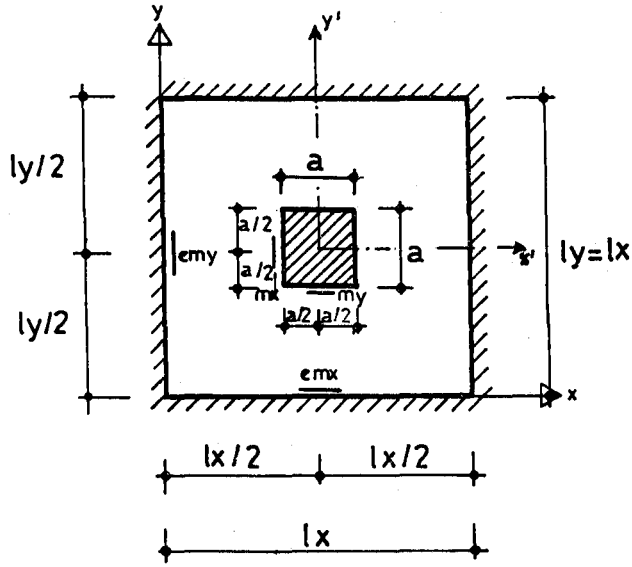
Bu tezde dairesel plaklar konusunda girilmemiştir. Nedeni ise mevcut olan sonlu elemanlar deplasman metoduna göre hazırlanmış plak programı dikdörtgen plaklar için geçerlidir. Dikdörtgen bir plakta bulunan dairesel boşlukların bu çalışmada kullanılan bilgisayar programı ile çözülmesi mümkün olmadığından dairesel boşluklar burada ele alınmamıştır.

Yapılan çalışmalarda ele alınan modellerin tümünde plak kalınlığı (h) 10 cm ve yaylı yük (P) 0.1 kg/cm^2 (1 t/m^2) seçilmiştir. Buna ilave olarak ilk üç modelin kısa kenarı ise 500 cm olarak alınmıştır. Buna göre aşağıdaki modeller üzerinde boşlukların etkileri incelenmiştir.

5.1. Dört Kenarı Ankastre Kare Plakta Boşluğun Ortada Olması Durumu

Kare plak ortasında bulunan kare boşluklu model Şekil 5.1'de gösterilmiştir. Bu model dört kenarından ankastre olarak ele alınıp incelenmiştir.

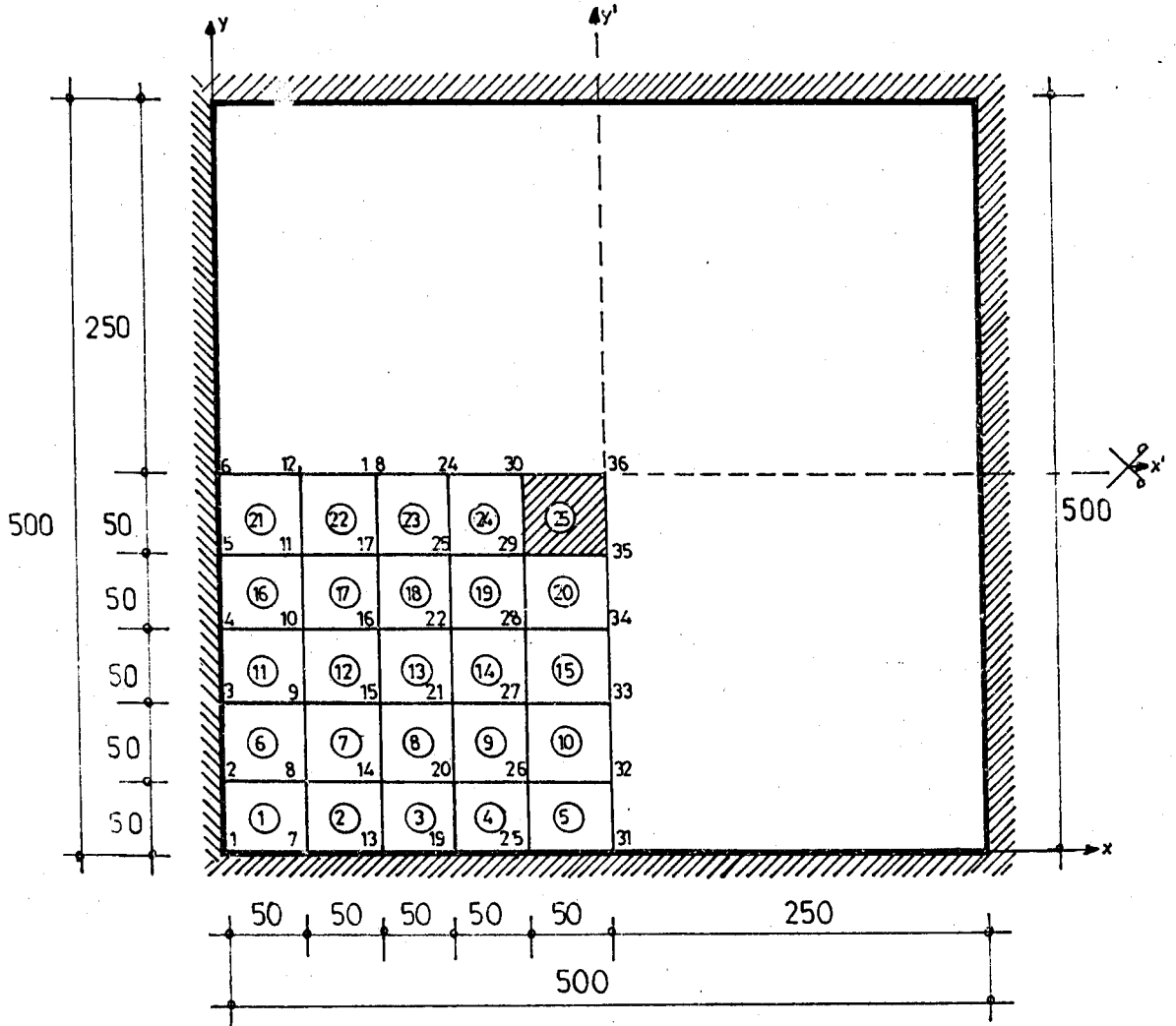
Bu model Şekil 5.1'den de görüldüğü gibi x' eksenine ve y' eksenine göre simetriktir. Modelin her iki ek- sene simetrik olması, onun $1/4$ 'ünün de alınıp hesap yapı- labilmesini sağlamıştır.



Şekil 5.1. Ankastre kare plak ortasında kare boş- luk planı

Böylece modelin $1/4$ 'ü ele alınarak Şekil 5.2.'de görüldüğü gibi 25 elemanlı bir sisteme ayrılmıştır. Hesap- lar a/l_x oranının 0.00, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80 ve 1.0 de- ğerleri için yapılmıştır. Bu oranın sağlanabilmesi için de elemanlar kare ve boyutları 50 cm olarak alınmıştır. Daha sonra tüm düğüm noktalarının sınır şartları belirlenmiştir.

Bu sınır şartları ankastre kenarlarda ψ_x , ψ_y dönmesi ile w çökmesi sıfır, x' simetri ekseninde bulunan 12, 18, 24, 30 düğüm noktalarında ψ_x dönmesi sıfır ve ψ_y dönmesi ile w çökmesi serbest, y' simetri ekseninde bulunan 32, 33, 34, 35 düğüm noktalarında ψ_y dönmesi sıfır ve ψ_x dönmesi ile w çökmesi serbest, 36 düğüm noktasında $\psi_x = \psi_y = 0$ olarak programa verilmiştir.



Şekil 5.2. Dört kenarından ankastre kare plak ortasında kare boşluklu modelin elemanları.

Bu veriler sonucunda a/lx oranları değiştirilerek çözümler yapılmıştır. Bu çözümlere önce $a/lx=0.00$ oranı ile başlanmıştır. Bu durumda, yani $a/lx = 0.00$ olması halinde döşemede hiç boşluk bırakılmamıştır. İkinci olarak $a/lx = 0.20$ oranının çözümü yapılmıştır. Bu durumda 25. eleman boş olarak diğer elemanlar dolu olarak tanımlanmıştır. Üçüncü çözüm ise; $a/lx = 0.40$ oranında 19, 20, 24, 25 elemanları boş, diğer elemanların dolu olarak tanımlanması ile elde edilmiştir. Bir sonraki çözüm $a/lx = 0.60$ oranıdır ki burada da 13, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25 elemanları boş ve diğer tüm elemanlar doludur. Son çözüm ise $a/lx=0.80$ oranında yapılmıştır. Burada 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24 ve 25 elemanları boş, diğer elemanlar dolu olarak çözülmüştür. $a/lx = 1.00$ iken çözüm yapılmamıştır. Çünkü sistemin tamamı boşluk olacağından statik etkiler meydana gelmeyecektir.

Bu çözümler elde edildikten sonra Şekil 5.1'de gösterilen düğüm noktalarındaki moment değerleri hesaplanır. Hesaplanan bu momentlerden yararlanarak, m moment katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir.

Bir döşemede moment formülü;

$$M = m.p.l_k^2 \dots\dots\dots (5.1)$$

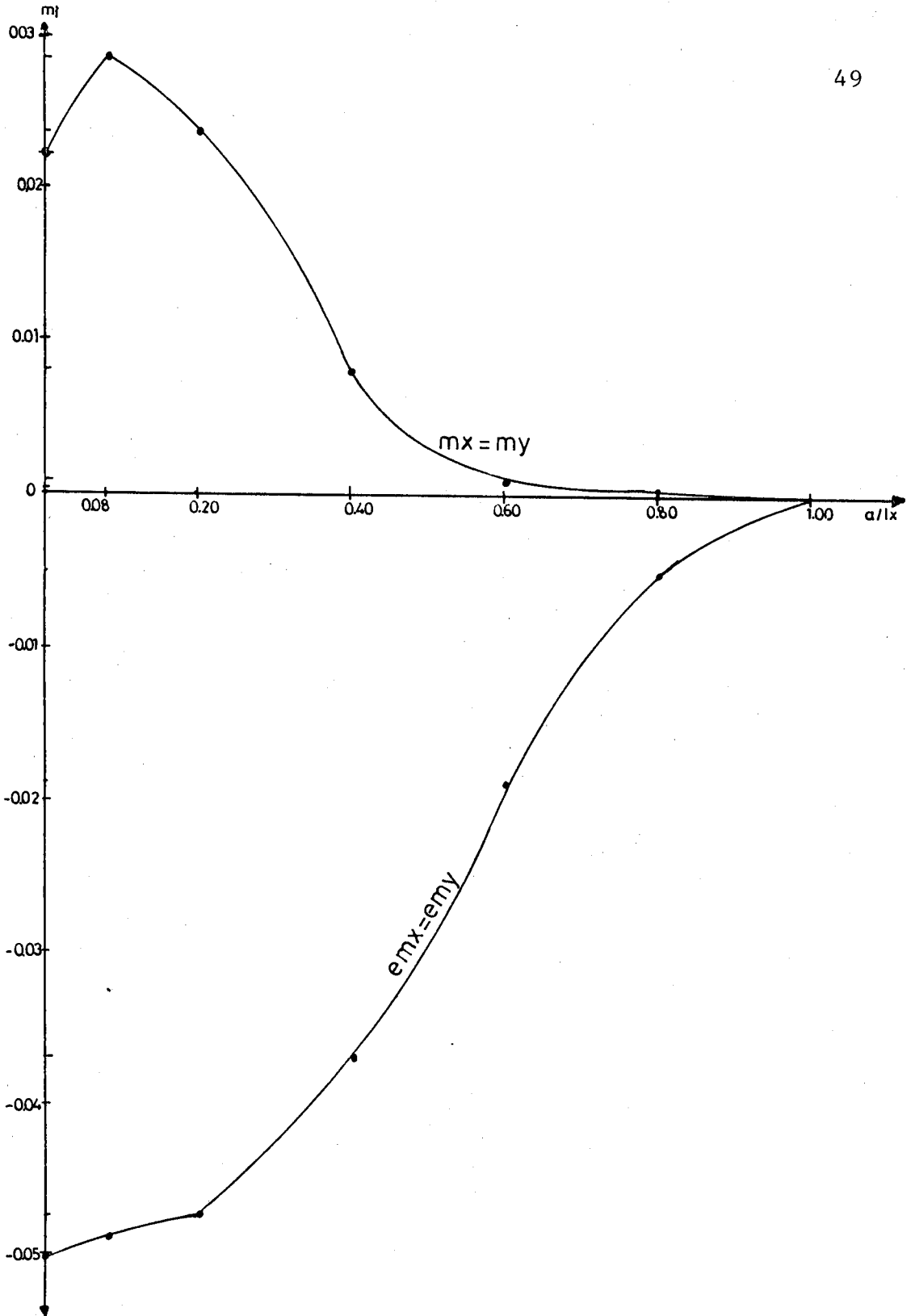
ile verilir. Burada M moment m plağın sınır şartlarına bağlı moment katsayısı, p plak yüzeyine dik gelen üniform yayılı yük ve l_k ise plak kısa kenarıdır. Verilen oranlarla elde edilen çözümlerde M değeri elde edilmiştir. Yayılı yük $P = 0.1 \text{ kg/cm}^2$ ($1t/m^2$) ve plak kısa kenarı ise 500 cm dir. Böylece bu değerler formülde yerine konarak m moment katsayısı elde edilmiş olur. Bu şekilde elde edilen m moment katsayıları da çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Ankastre kare plak ortasında kare boşluklu sistemin m_i moment katsayıları.

a/lx	0,00	0.08	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$m_x=m_y$	-0.0502	-0.0490	-0.0476	-0.0370	-0.0192	-0.005	0
$m_x=m_y$	-0.0222	0.0287	0.0238	0.0081	0.0006	0.0004	0

Çizelge 5.1 de M_{mx} momentinde a/lx boşluk oranının 0.00 - 0.40'ı arasında bir optimum noktanın varlığı görülmektedir. Bu optimum noktanın araştırılması yapılmış ve bu oranın a/lx = 0.08 de olduğu tesbit edilmiştir. Yani bu oranda M_{mx} momenti maksimum değere ulaşmaktadır. Momentin maksimumdan geçtiği a/lx değeri Şekil 5.3 deki grafikte görülmektedir.

a/lx oranının farklı değerleri için, gerek çizelge 5.1 den enterpolasyonla veya Şekil 5.3 deki grafikten yararlanarak istenen momentler hesaplanabilir.



Şekil 5.3. Ankastre kare plak ortasında kare boşluklu modelin m_i katsayıları grafiği.

gidilmiştir. Burada 36 elemanlı ve 49 düğüm noktası olan bir ağ sistemi ele alınmıştır.

Çözümlerin yapılabilmesi için düğüm noktalarına ait sınır şartları bilgisayar programına verilmiştir. Sınır şartları bu modelde ankastre olan tüm kenarlardaki düğüm noktalarında ψ_x , ψ_y dönmeleri ile w çökmesi sıfır olarak verilmiştir.

Bu verilerden sonra a/lx oranının 0.00, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80 ve 1.00 değerleri için çözümler yapılmıştır. Bu oranlar aşağıdaki şekilde tanımlanarak programa işlenmiştir:

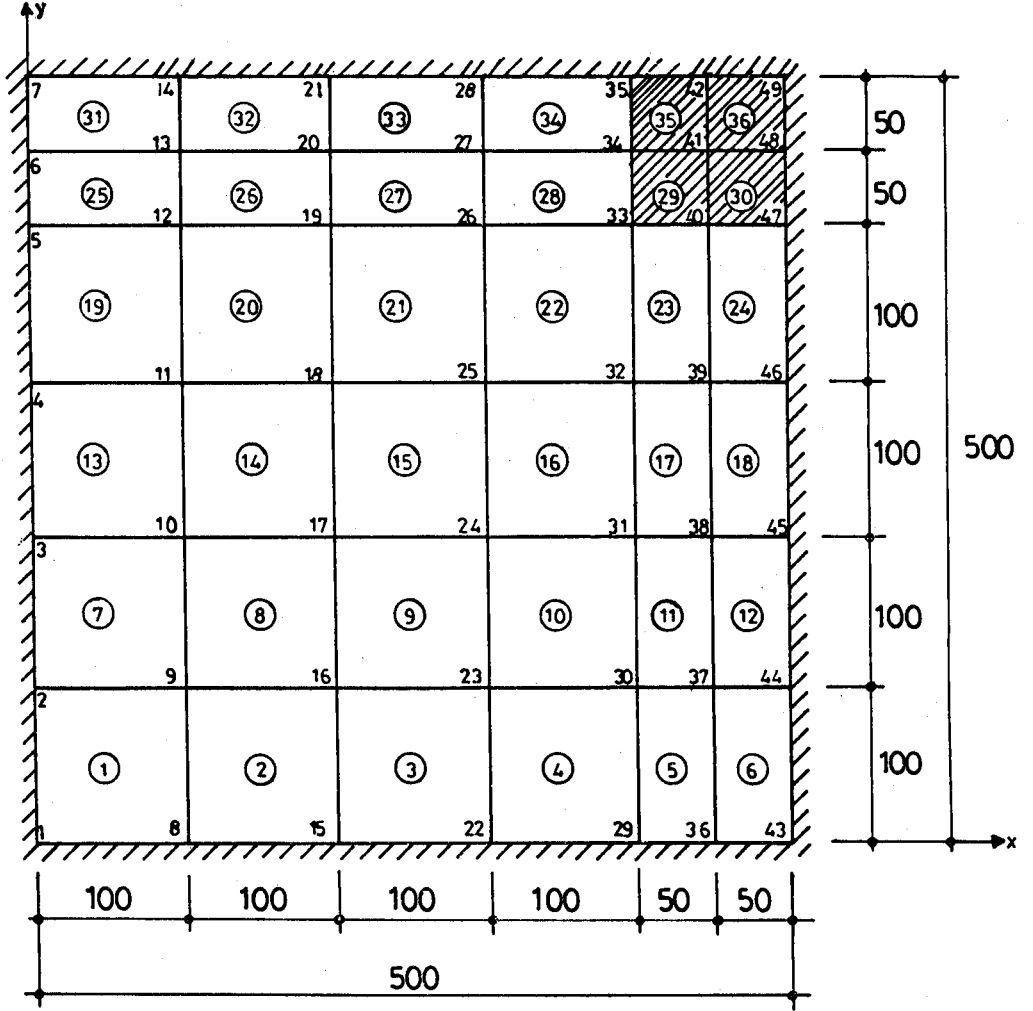
$a/lx = 0.00$ da tüm elemanlar dolu;

$a/lx = 0.20$ de 29, 30, 35 ve 36 elemanları boş diğer elemanlar dolu;

$a/lx = 0.40$ da 22, 23, 24, 28, 29, 30, 34, 35 ve 36 elemanlar boş diğer elemanlar dolu;

$a/lx = 0.60$ da 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 35 ve 36 elemanları boş diğer elemanlar dolu;

$a/lx = 0.80$ de 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35 ve 36 elemanları boş diğer elemanlar dolu olarak tanımlanmıştır.



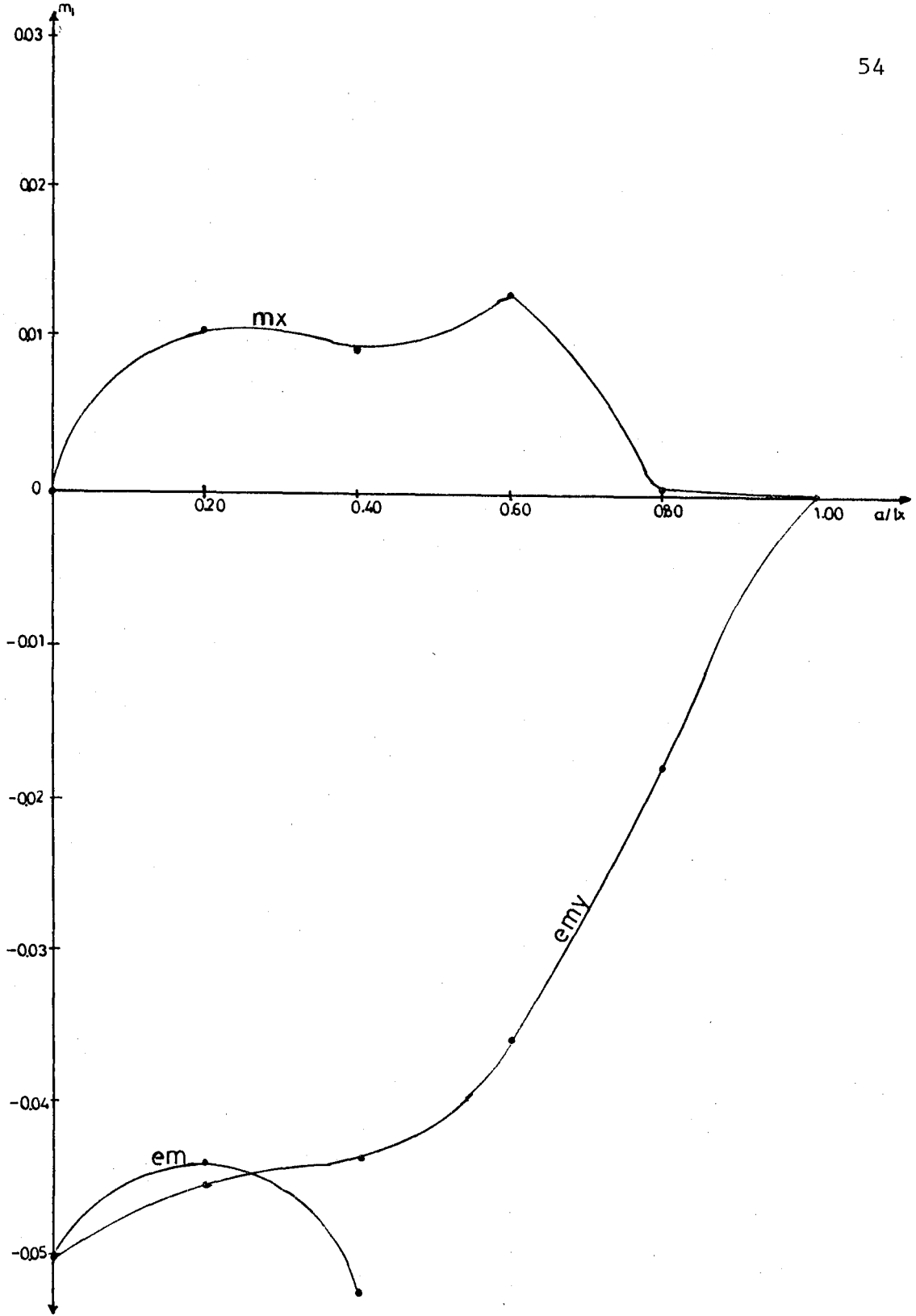
Şekil 5.5. Dört kenarından ankastre kare plak köşesinde kare boşluk bulunan model elemanları

Böylece her oran için her düğüm noktasına ait momentler ve kesme kuvvetleri bulunur. Bulunan bu iç kuvvetlerden momentlerin Şekil 5.4 deki model de belirtilen düğüm noktalarındaki değerler hesaplanır ve bu momentlerden yararlanarak aşağıda çizelge 5.2 de verilen moment katsayıları (5.1) formülünden elde edilir.

Çizelge 5.2. Ankastre kare plak köşesinde kare boşluklu sistemin m_i moment katsayıları

a/ex	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
em _y	-0.0502	-0.0455	-0.0435	-0.0357	-0.0179	0
em	-0.0502	-0.0476	-0.0526	-	-	-
m _x	0	0.0106	0.0095	0.0130	0.0004	0

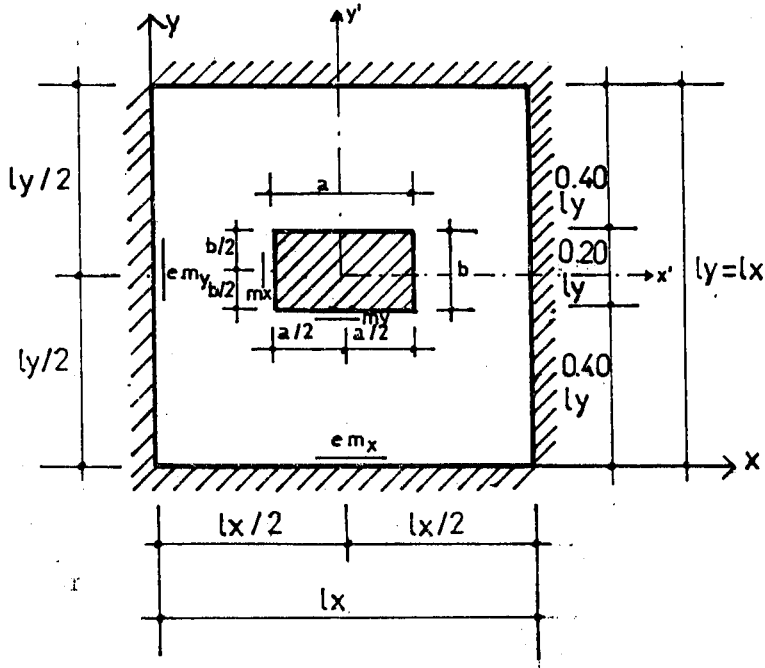
a/lx oranının farklı değerleri için, gerek çizelge 5.2'den interpolasyonla veya Şekil 5.6'daki grafikten yararlanarak istenen momentler hesaplanabilir.



Şekil 5.6. Ankastre kare plak köşesinde boşluklu modelin m_i katsayılar grafiği

5.3. Dört Kenarı Ankastre Kare Plakta Dikdörtgen Boşluğun Ortada Olması Durumu

Kare plak ortasında bulunan dikdörtgen boşluklu model Şekil 5.7'de gösterilmiştir. Seçilen modelde dört kenar ankastre ve l_x uzunluğu yine 500 cm dir.



Şekil 5.7. Ankastre kare plak ortasında dikdörtgen boşluk planı

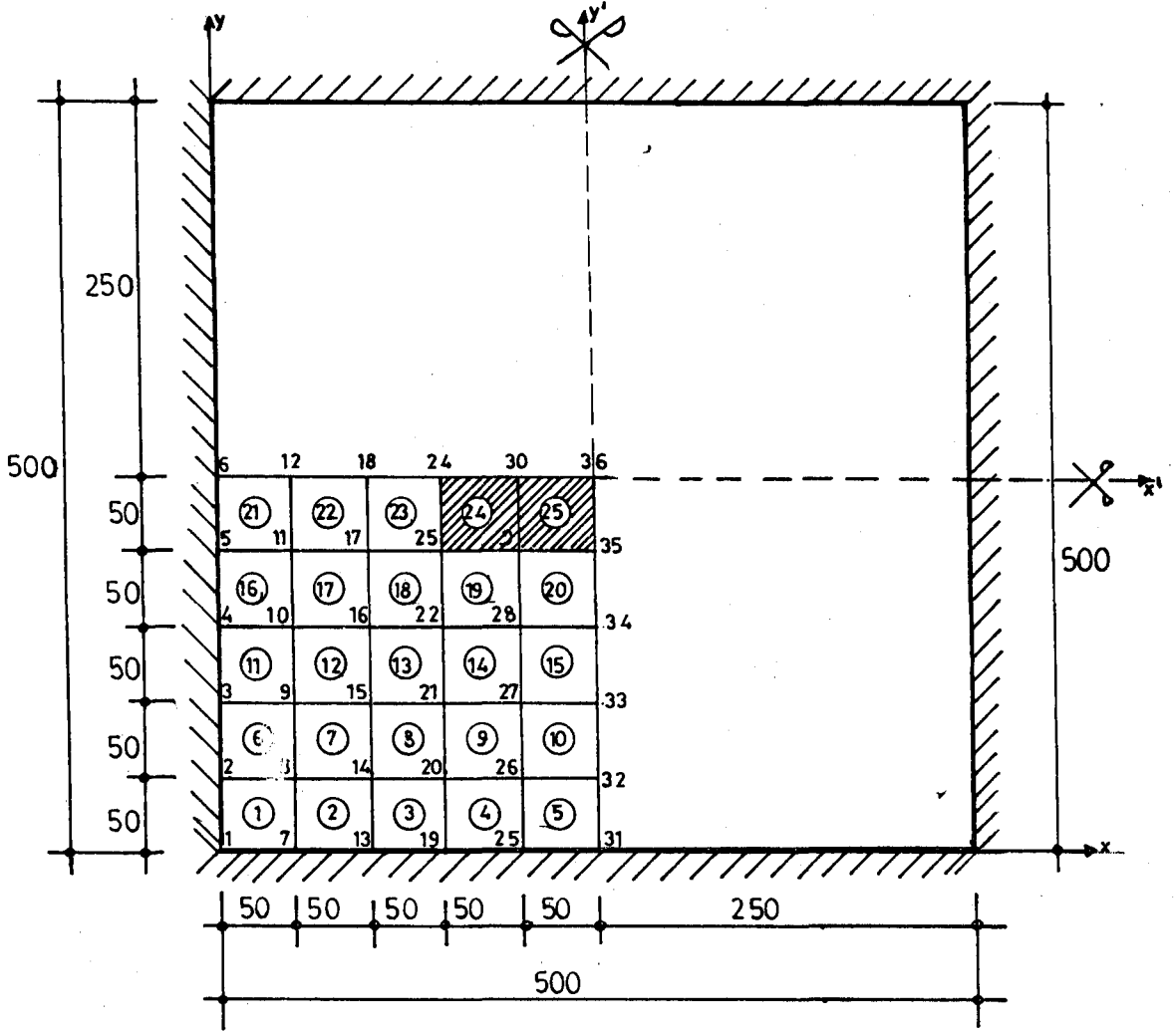
Şekil 5.7'de görüldüğü gibi seçilen modelde boşluğun b kenarı sabit ve değeri $0.20 l_y$, a kenarı ise a/l_x ora-

nının 0.00, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80 ve 1.00 değerlerine bağılı olarak değişmektedir.

Seçilen bu model Şekil 5.8'de de görüldüğü gibi x' ve y' eksenine göre simetriktir. Modelin her iki eksene simetrik olması, onun 1/4'nün ele alınıp hesap yapılabilmesini sağlamıştır. Böylece modelimiz 36 düğüm noktası ve bir kenarı 50 cm olan 25 adet kare elemana ayrılmıştır.

Şekil 5.8 de gösterilen modelin bilgisayar programı ile çözülebilmesi için gerekli sınır şartları verilmiştir. Bu sınır şartları; ankastre kenarlarda ψ_x , ψ_y dönmesi ile w çökmesi sıfır, x' simetri ekseninde bulunan 12, 18, 24, 30 düğüm noktalarında ψ_x dönmesi sıfır ve ψ_y dönmesi ile w çökmesi serbest, y' simetri ekseninde bulunan 32, 33, 34, 35 düğüm noktalarında ψ_y dönmesi sıfır ve ψ_x dönmesi ile w çökmesi serbest, 36 düğüm noktasında $\psi_x = \psi_y = 0$ olarak programa verilmiştir.

Düğüm noktalarının sınır şartları belirlendikten sonra a/lx oranları değiştirilerek, bilgisayar. Programıyla gerekli çözümler yapılmıştır. Çözümlere önce $a/lx = 0.00$ oranı ile başlanmıştır. Bu oranda, sistemin tamamı doludur. İkinci çözüm; $a/lx = 0.20$ oranı için yapılmıştır. Burada 25. eleman boş ve diğer tüm elemanlar dolu olarak tanımlanmıştır. Üçüncü çözüm ise; $a/lx = 0.40$ oranı için yapılmış, burada 24, 25 elemanları boş ve diğer tüm elemanlar dolu tanımlanmıştır. Dördüncü çözümde ise; $a/lx = 0.60$ oranı ele alınmış, 23, 24, 25 elemanları boş ve diğer tüm elemanlar dolu olarak tanımlanmıştır. Beşinci çözümde ise, $a/lx = 0.80$ oranı ele alınmış ve burada da 22, 23, 24, 25 elemanları boş, diğer tüm elemanlar dolu olarak tanımlanmıştır. Son çözüm ise; $a/lx = 1.00$ oranına göre yapılmış ve bu çözüm için de 21, 22, 23, 24, 25 elemanları boş, di-



Şekil 5.8. Dört kenarı ankastre kare plak ortasında dikdörtgen boşluk bulunan modelin elemanları.

ğer tüm elemanlar dolu olarak tanımlanmıştır. Son çözüm ise; $a/lx = 1.00$ oranına göre yapılmış ve bu çözüm için de,

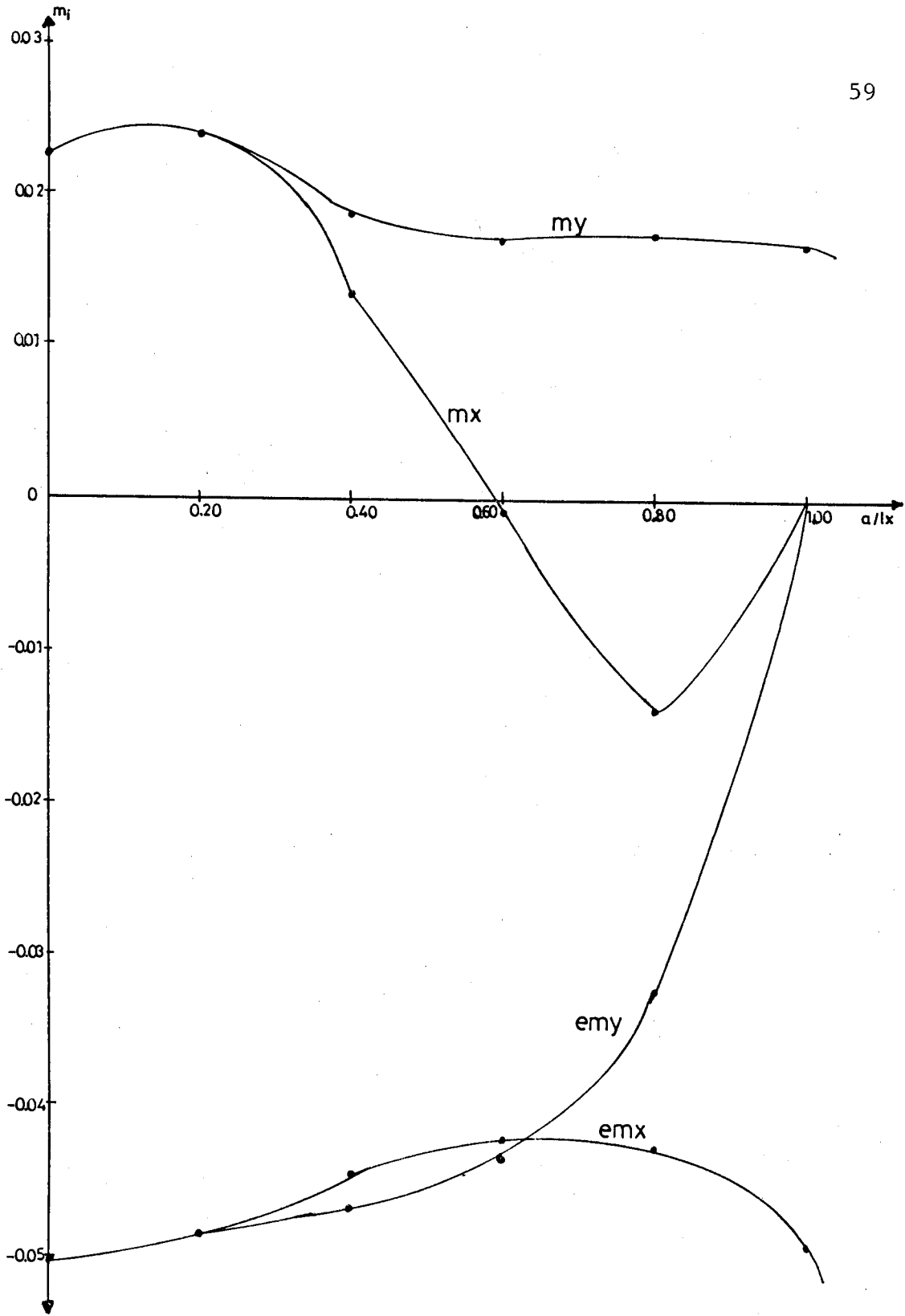
21, 22, 23, 24, 25 elemanları boş, diğer tüm elemanlar dolu olarak tanımlanmıştır.

Tanımlanan tüm a/lx oranları için düğüm noktalarının her birine ait moment ve kesme kuvveti değerleri alınmıştır. Şekil 5.7 de gösterilen noktalar için, elde edilen moment değerlerinden yararlanılarak aynı noktalar için, (5.1) formülü ile m moment katsayıları elde edilmiştir. Bu moment katsayıları çizelge 5.3 de verilmiştir.

Çizelge 5.3. Ankastrre kare plak ortasında dikdörtgen boşluklu sistemin m_i moment katsayıları.

a/lx	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
e_{my}	-0.0502	-0.0483	-0.0466	-0.0434	-0.0322	0
e_{mx}	-0.0502	-0.0483	-0.0447	-0.0422	-0.0425	-0.0491
m_y	0.0225	0.0238	0.0185	0.0173	0.0174	0.0172
m_x	0.0225	0.0238	0.0135	-0.0006	-0.0139	0

Çizelge 5.3 den faydalanarak, elde edilen moment katsayılarına ait grafik Şekil 5.9'da verilmiştir.

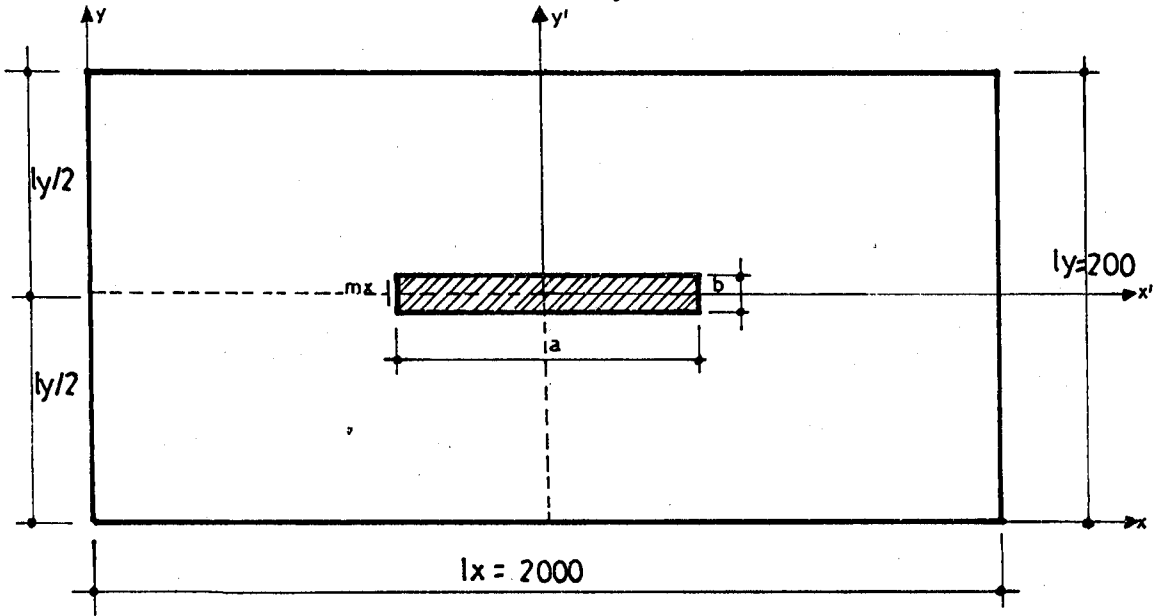


Şekil 5.9. Ankastre kare plak ortasında dikdörtgen boşluklu modelin m_i katsayılar grafiği

a/l_x oranının farklı değerleri için, gerek çizelge 5.3'den enterpolasyonla veya Şekil 5.9'daki grafikten yararlanarak istenen momentler hesaplanabilir.

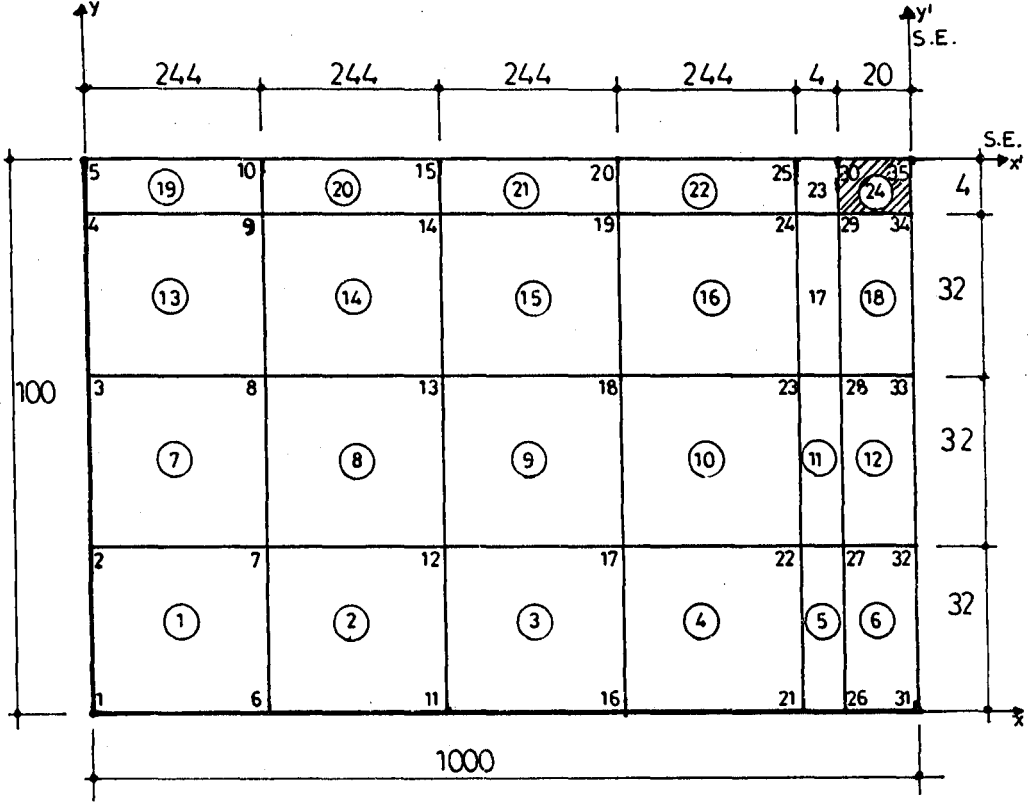
5.4. Kenarlarından Serbest Sonsuz Uzun Bir Plak Ortasında Yarık Olması Durumu

Plak boyu eninin on katı olacak şekilde bir model seçilmiş ve bu model Şekil 5.10 da gösterilmiştir. Alınan model dört kenarından serbest, $l_x = 2000$ cm ve $l_y = 200$ cm olarak seçilmiştir. Yarık bu modelin tam ortasında olup b kenarı sabit ve a kenarı a/l_y in 0.00, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00 değerleri için değişkendir. Yarığın sabit olan b kenarı 8 cm olarak alınmıştır.



Şekil 5.10. Sonsuz uzun plak ortasında yarık planı

Bu model Şekil 5.10'dan da görüldüğü gibi x' ve y' eksenlerine göre simetriktir. Bu simetriklik şartlarından yararlanarak plağın çözümü için modelin $1/4$ 'ünün elemanlara ayrılması daha uygun olmaktadır (Şekil 5.11).



Şekil 5.11. Kenarlarında serbest sonsuz uzun plak ortasında yarık bulunan modelin elemanları.

Şekil 5.11 de görüldüğü gibi model 24 elemana ayrılmış, boşluk kenarındaki moment değerini daha iyi inceleyebilmek için boşluk kenarına 4 cm mesafede y doğrultusunda bir şerit geçirilmiştir.

Elemanların tespitinden sonra plâğın çözümü için düğüm noktalarının sınır şartları bilgisayar programına ve-

rilmiştir. Bu sınır şartları; x' simetri eksenini üzerinde bulunan düğüm noktalarında (10, 15, 20, 25, 30, 35) ψ x dönmesi sıfır, ψ y dönmesi ile w çökmesi serbest, y' simetri eksenini üzerinde bulunan düğüm noktalarında (32, 33, 34, 35) ψ y dönmesi sıfır, ψ x dönmesi ile w çökmesi serbest, x ve y eksenleri üzerindeki mesnetlerde bulunan düğüm noktalarında (1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 16, 21, 26, 31) w çökmesi sıfır, ψ x ve ψ y dönmesi serbestdir.

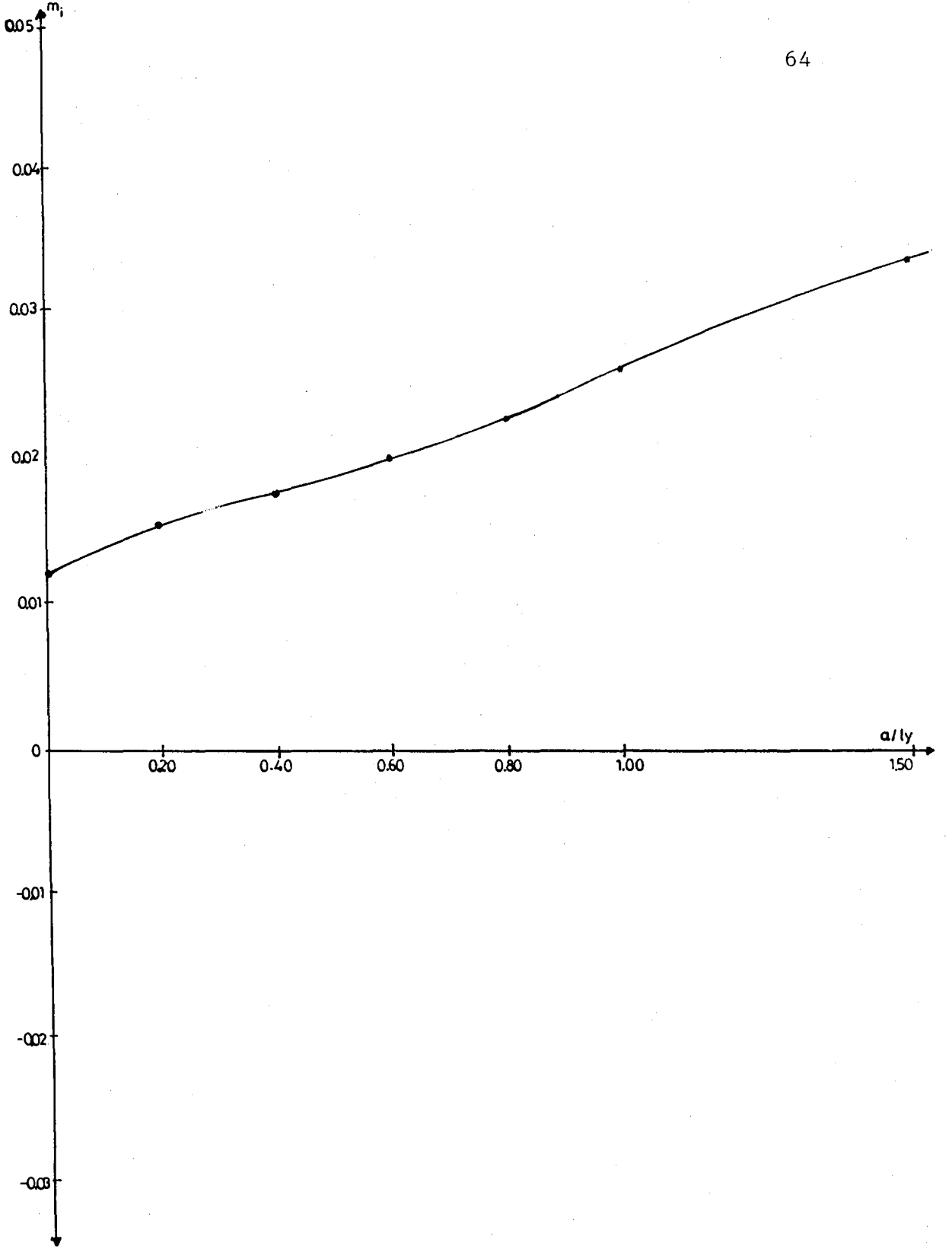
Bu sınır şartlarından sonra a/ly nin 0.00, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00 oranlarında 24 nolu eleman boş, diğer tüm elemanları dolu verilerek, düğüm noktalarına ait iç kuvvetleri hesaplanmıştır. Bu iç kuvvetlerden Şekil 5.10 da gösterilen noktadaki moment değeri a/ly nin tüm oranları için hesaplanmıştır. Bu moment değerlerinden yararlanarak (5.1) denklemi ile Çizelge 5.4'deki moment katsayıları elde edilmiştir.

Çizelge 5.4. Kenarları serbest uzun plak ortasında yarık bulunan sistemin m_i moment katsayıları

a/ly	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.50
m_x	0.0124	0.0156	0.0178	0.0202	0.0229	0.0261	0.0339

Çizelge 5.4 de verilen moment katsayılarının değişimi Şekil 5.12 deki grafik üzerinde gösterilmiştir.

a/lx oranının farklı değerleri için, gerek izelge 5.4'den enterpolasyonla veya Şekil 5.12'deki grafikten yararlanarak istenen momentler hesaplanabilir.



Şekil 5.12. Sonsuz uzun plak ortasında yarık bulunan modelin m_i katsayılar grafiği

6. ELDE EDİLEN SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI VE ÖRNEK PROBLEMLER

Burada bölüm 5'de anlatılan çalışmalar sonrasında elde edilen sonuçlar ile Beton Kalender'de yapılan çalışmalar arasında iki boşluklu plak sistemi üzerinde karşılaştırma yapılmıştır. Bu karşılaştırma önce dört kenarı ankastre kare plak ortasında kare boşluk bulunan sistem üzerinde yapılmış ve bu karşılaştırma Çizelge 6.1 ile verilmiştir. Burada parantez içindeki ifadeler Beton Kalender'den alınan ifadelerdir.

Çizelge 6.1. Ankastre kare plak ortasında kare boşluklu sistemlerin karşılaştırılması

a/lx	0.0	0.08	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$m_x = m_y$	-0.0502 (-0.0502)	-0.0490 -	-0.0476 (-0.0480)	-0.0370 (-0.0360)	-0.0192 (-0.0190)	-0.005 (-0.0050)	0 0
$m_x = m_y$	0.0222 (0.0180)	0.0287 -	0.0238 (0.0220)	0.0081 (0.0100)	0.0006 (0.0040)	0.0004 (0.0010)	0 0

Çizelge 6.1 de görüldüğü gibi Beton Kalender'de bulunan sonuçlar ile sonlu elemanlar metoduna göre yapılan çalışmada elde edilen sonuçlar birbirine çok yakındır. Ancak $a/lx = 0.20$ de boşluk kenarındaki moment değerinde ani bir artış görülmektedir. Bu durum hem Beton Kalenderdeki çalışmada hemde bu tezde yapılan çalışmada gözlenmiştir. Bu tezde sonlu elemanlar metoduna göre yapılan çalışmada momentteki ani değişim incelenmiş ve momentin maksimum olduğu

nokta araştırılarak $a/lx = 0.08$ 'de olduğu saptanmıştır. Maksimum değer ise çizelge 6.1 de verilmiştir.

İkinci karşılaştırma dört kenarı ankastre kare plak köşesinde kare boşluk bulunan plak sistemi ile yapılmıştır. Bu karşılaştırma çizelge üzerinde yapılmış ve bu durum Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.2. Ankastre kare plak köşesinde kare boşluk bulunan sistemin karşılaştırılması.

a/lx	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
emy	-0.0502 (-0.052)	-0.4550 (-0.0500)	-0.0435 (-0.0490)	-0.0357 (-0.0450)	-0.0179 (-0.0170)	0 (0)
em	-0.0502 (-0.0520)	-0.0476 (-0.0520)	-0.0526 (-0.0550)	- -	- -	- -
mx	0 (0)	-0.0106 (0.0100)	0.0095 (0.0220)	0.0130 (0.0180)	0.0004 0.0030	0 (0)

Karşılaştırma sonrasında görülmüştür ki mesnet momentleri birbirlerine yakındır. Ancak boşluk köşesinde bulunan momentler (m_x) farklıdır. Beton Kalenderdeki çalışmada m_x momentleri sıfırdan başlayıp $a/lx = 1.00$ de sıfıra olduğu görülmüştür.

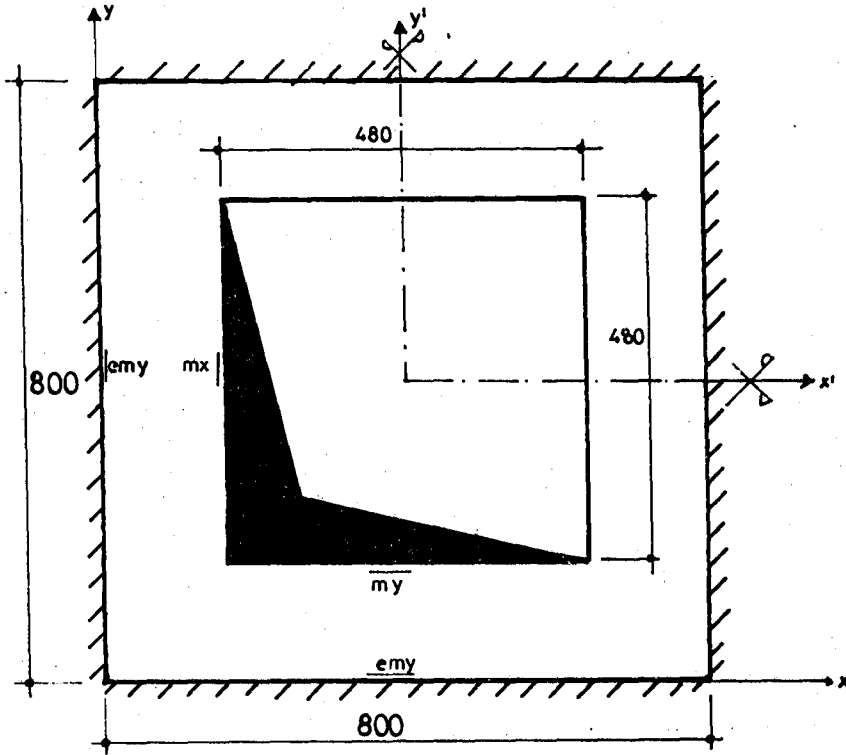
Buna karşılık sonlu elemanlar metoduna göre yapılan bu çalışmada, m_x momentleri $a/lx = 0.20$ de negatif,

$a/lx = 0.40$ 'ta ise pozitif, $a/lx = 0.60$ da da maksimum değere ulaşır daha sonra düşerek $a/lx = 1.0$ de sıfır olmaktadır.

Burada görülmüştür ki a/lx 'in 0.20 oranının civarındaki m_x boşluk kenarı momentleri mesnet momentinin etkisinden kurtulamamış ve bu durum meydana gelmiştir.

6.1. Örnek. 1

Şekil 6.1'de planı görülen ankastre kare plak ele alınmıştır. Bu plak ortasında bırakılan kare boşluk aynı şekil üzerinde görülmektedir. Bu plakta, plak kalınlığı $h = 10$ cm ve üniform yayılı yük $p = 0.5$ t/m² olarak alınmıştır.



Şekil 6.1. Ortasında kare boşluk bulunan ankastre kare plak.

Burada, $a/lx = \frac{4.80}{8.00} = 0.60$ dir. 0.60 oranı için m_i moment katsayıları $m_y = m_x = 0.0006$ ve $e_{mx} = 0.0192$ bulunur. (Bkz. Çizelge 5.1) Böylece (5.1) formülünden yararlanarak;

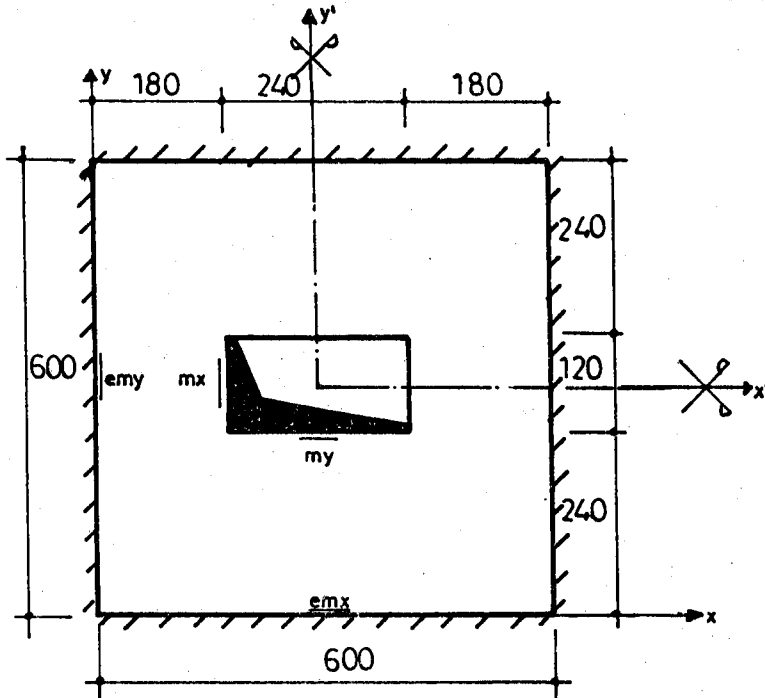
$$M_{mx} = 0.0006 \cdot 0,5 \cdot 8^2 = 0,019 \text{ tm/m,}$$

$$M_{emx} = 0,0192 \cdot 0,5 \cdot 8^2 = -0,614 \text{ tm/m}$$

elde edilir.

6.2. Örnek. 2

Şekil 6.2'de planı verilen ankastre kare plak ele alınmıştır. Bu plak üzerinde dikdörtgen boşluk bırakılmıştır. Burada plak kalınlığı $h = 10$ cm ve yayılı yük $P = 0.4$ t/m² olarak alınmıştır.



Şekil 6.2. Ortasında dikdörtgen boşluk bulunan kare plak

Burada, $a/lx = \frac{2.40}{6.0} = 0,40$ dır. 0.40 oranı için m_i moment katsayıları $m_x = 0,0135$, $m_y = 0.0185$, $e_{mx} = -0.0447$ ve $e_{my} = -0,0466$ bulunur (Bkz. Çizelge 5.3). Böylece (5.1) formülünden yararlanarak

$$M_{mx} = 0.0135 \cdot 0,4 \cdot 6^2 = 0,194 \text{ tm/m,}$$

$$M_{my} = 0.0185 \cdot 0,4 \cdot 6^2 = 0,266 \text{ tm/m,}$$

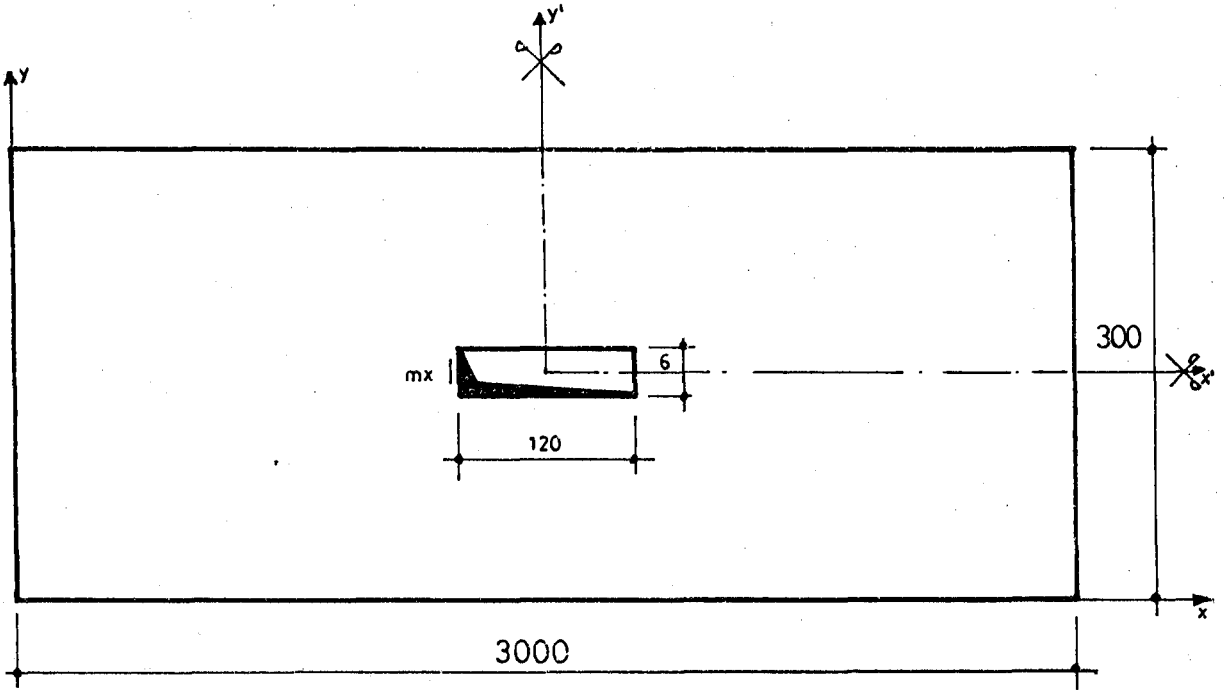
$$M_{emx} = -0.0447 \cdot 0,4 \cdot 6^2 = -0,644 \text{ tm/m,}$$

$$M_{emy} = -0.0466 \cdot 0,4 \cdot 6^2 = -0,671 \text{ tm/m.}$$

elde edilir.

6.3. Örnek. 3

Şekil 6.3'de planı verilen dört kenarı serbest oturan uzun plak ele alınmıştır. Bu plak ortasında 6 cm e-ninde bir yarık bırakılmıştır. Burada plak kalınlığı 10 cm ve yayılı yük $p = 0.6 \text{ t/m}^2$ olarak alınmıştır.



Şekil 6.3. Ortasında yarık bulunan kenarları serbest uzun plak

Burada $a/ly = \frac{1.20}{3.0} = 0,40$ dır. Bu oran için m_i katsayısı $m_x = 0,0178$ bulunur (Bkz. Çizelge 5.4) (5.1) formülünden boşluk kenarındaki moment;

$$M_{mx} = 0,0178 \cdot 0,6 \cdot 3^2 = 0,096 \text{ tm/m}$$

elde edilir.

7. SONUÇLAR

Üniform yayılı yük etkisi altında dikdörtgen boşluklu döşemelerin çeşitli konum ve oranlarda incelenmesi sonucunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Dört tarafından ankastre üniform yayılı yük etkisi altındaki kare döşemelerin çeşitli konumlarında bulunan kare ve dikdörtgen boşlukların çözümünden elde edilen sonuçlara göre; momentler (kare döşeme ve ortada kare boşluk durumu hariç) boşluksuz döşemeninkinden daha az çıkmaktadır. Ancak boşluklar kenara yaklaştıkça boşluk kenarlarına ait momentler mesnetlerin etkisinde kalmakta ve bazı durumlarda da işaret değiştirebilmektedir. Bunlar Bölüm 5 belirtilmiştir.

Elde edilen bu sonuçlara göre de önemli bir nokta bölüm 5.1 deki kare döşeme ve ortada bırakılan kare boşluklu modelde a/lx oranı 0.20 de boşluk kenarındaki momentlerde bir artış görülmüş bunun üzerine bu bölgede bir tarama yapıldığında maksimum açıklık momentinin (boşluk kenarındaki moment) $a/lx = 0,08$ de meydana geldiği görülmüştür. Bu durumun dışında yukarıda da belirtildiği gibi gerek mesnet ve gerekse açıklık momentlerinde boşluksuz döşeme momentlerinden daha elverişsiz bir durum ortaya çıkmamaktadır.

Ayrıca dört kenarından serbest sonsuz uzun döşeme modelinde ortada bırakılan yarık boyunun döşeme genişliğine olan oranı arttıkça açıklığın kenarında meydana gelen momentler de belirli bir oranda artmaktadır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aka, İ., Keskinel, F. ve Arda, S.T., 1980, Betonarme Yapı Elemanları, Birsen Kitabevi, 324 s.
- Alman Betonarme Şartnamesi, Dın 1045, 1978, Teknik Kitaplar Yayınevi, (Çev.E.Çetmeli), 462 s.
- Beton-Kalender, 1971, Verlag von wilhelm ernst und sohn Berlin, München, Teil.II, 816 p.
- Beton-Kalender, 1983, Verlag von wilhelm ernst und sohn Berlin, München, Teil.I, 872 p.
- Girkmann, K., 196-, Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler, (Çev.S. Tameroğlu), İ.T.Ü. Kütüphanesi, 565, 446 s.
- Hahn, J., 1972, Mütemadi Kirişler, Çerçeveler ve Plaklar, (Çev.E.Çetmeli), İ.T.Ü. Kütüphanesi, 733, 399 s.
- Hartog, D.P.J., 1969, İleri Mukavemet, (Çev.O.İzmirli), İ.T.Ü. Kütüphanesi, 392 s.
- Stiglat, K. and Wippel, H. 1983, Platten, Verlag von wilhelm ernst und Berlin, München, 268 p.
- Timoshenko, S., 1964, Plaklar ve Kapuklar Teorisi, (Çev.M.İnan, F.Sönmez), İ.T.Ü. Kütüphanesi, 592,468 s.
- Ünlüoğlu, E., 1985, Kirişsiz Döşemeli Sistemlerde Yatay Kuvvetler Etkisi Altında Rijitlik Değerlerinin Araştırılması, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 136 s.