TÜREV KONUSUNUN MATEMATİKSEL SİT KAVRAMI ÇERÇEVESİNDE EKOLOJİK ANALİZİ VE KAVRAMSAL İLİŞKİLERİNİN DİDAKTİK YAPILANDIRILMASI

Doktora Tezi

Selim FINDIK

Eskişehir 2019

TÜREV KONUSUNUN MATEMATİKSEL SİT KAVRAMI ÇERÇEVESİNDE EKOLOJİK ANALİZİ VE KAVRAMSAL İLİŞKİLERİNİN DİDAKTİK YAPILANDIRILMASI

Selim FINDIK

DOKTORA TEZİ

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Mayıs 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Selim FINDIK'ın "Türev Konusunun Matematiksel Sit Kavramı Çerçevesinde Ekolojik Analizi ve Kavramsal İlişkilerinin Didaktik Yapılandırılması" başlıklı tezi 03.05.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programında, Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç.Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN	
Üye	: Prof.Dr. Oktay Cem ADIGÜZEL	
Üye	: Doç.Dr. Nilüfer KÖSE	
Üye	: Doç.Dr. Tuba GÖKÇEK	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Emre EV ÇİMEN	

Prof.Dr. Handan DEVECİ
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Müdür Vekili

ÖZET

TÜREV KONUSUNUN MATEMATİKSEL SİT KAVRAMI ÇERÇEVESİNDE EKOLOJİK ANALİZİ VE KAVRAMSAL İLİŞKİLERİNİN DİDAKTİK YAPILANDIRILMASI

Selim FINDIK

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mayıs 2019

Danışman: Doç. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN

Matematiksel sit, çalışma alanı olarak belirlenen matematik konu ve kavramları arasındaki ilişkilerin tarihsel, epistemolojik ve didaktik verilerden yararlanılarak açıklandığı bir ekolojik analiz modeli olarak geliştirilmiştir. Bu modele göre, global ve lokal sit olmak üzere iki farklı matematiksel sitten bahsetmek mümkündür. Global sit, çalışma alanına yönelik kavramsal ilişkilerin bütün olarak değerlendirilmesine olanak sağlayan sit olarak ifade edilebilir. Lokal sitler, çalışma alanına yönelik tipik görevlerin yerine getirilmesine bağlı olarak devreye giren kavramsal ilişkilerin yapılandırıldığı global sit kesitleri olarak tanımlanabilir. Bu çalışmanın amacı türev konularının matematiksel sit kavramı etrafında analizi ve didaktik ilişkilerinin yapılandırılmasıdır. Çalışmada analizin global siti, öğretim programının yaklaşımı göz önünde bulundurularak didaktik, tarihsel ve epistemolojik verilerden yararlanılarak inşa edilmiştir. Çalışmada ayrıca limit, süreklilik ve türev konularına yönelik öğretim programında yer alan kazanımlar göz önünde tutularak görev tipleri belirlenmiş ve bu görev tipleri için lokal sitler oluşturulmuştur. Oluşturulan lokal sitler çerçevesinde ders kitaplarındaki örnek çözümleri analiz edilerek ekolojik sorunlar belirlenmiştir. Analiz global siti, analizin temelinde değişim kavramının olduğunu, reel sayılar ve fonksiyonlardaki değişimlerin incelenmesinde limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarının birer araç olarak işe koşulduğunu ve analiz kavramları arasında öncüllük ardıllık ilişkisi kurulabileceğini göstermiştir. Lokal sitlerden elde edilen sonuçlar ise limit, süreklilik ve türev konularına yönelik görev tiplerinin teknolojilerinin gerçekleştirilmesinde komşuluk, belirsizlik, tanımsızlık gibi kritik kavramların ekolojik ilişkilerinin büyük bir öneme sahip olduğunu, örnek çözümlerinde farklı tekniklere bir arada yer verilmesinin lokal sitleri oluşturan nesneler arasındaki ekolojik bağların güçlendirilmesine katkı sağlayacağını göstermiştir.

Anahtar Sözcükler: Ekolojik analiz, Global sit, Lokal sit, Matematiksel sit, Prakseolojik analiz.

ABSTRACT

ECOLOGICAL ANALYSIS OF DERIVATIVES WITHIN THE CONCEPT OF MATHEMATICAL SITE AND DIDACTIC RESTRUCTURATION OF THEIR CONCEPTUAL RELATIONSHIPS

Selim FINDIK

Department of Mathematics Education,

Anadolu University, Graduate School of Educational Sciences, May 2019

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Emel OZDEMIR ERDOGAN

The mathematical site was developed as an ecological analysis model where the relationships between the mathematical subjects and concepts determined as the study area are described by utilizing historical, epistemological and didactic data. According to this model, it is possible to mention two different mathematical sites as global and local site. The global site can be expressed as a site that enables to evaluate the conceptual relationships for the study area as a whole. Local sites can be defined as global site sections where conceptual relationships are involved depending on the performance of typical tasks for the study area. The purpose of this study is to analyse derivatives around the mathematical site concept and to restructure their didactic relationships. In the study, the global site of the calculus was constructed using didactic, historical and epistemological data while taking the approach of the curriculum into account. Using praxeological analyses, local sites were also established for limit, continuity and derivative tasks which were identified through the acquisitions of the curriculum. On the basis of the local sites, sample questions from the textbooks were analysed and ecological problems were identified. The construction of a global site for calculus has demonstrated that the concept of variation is the main subject of calculus, that the concepts of limit, continuity, derivative and integral are utilized as a tool in the examination of variations in real numbers and functions, and that a hierarchical relationship can be established between the concepts of calculus. On the other hand, the results obtained from the local sites have demonstrated that the ecological relationships of the critical concepts such as neighbourhood, undefined and indeterminate forms are of great importance in the accomplishment of the technologies of the types of tasks for the limits, continuity and derivative, and that the use of different techniques together in the related tasks might contribute to strengthen the ecological connections between the objects forming the local sites.

Keywords: Ecological analysis, Global site, Local site, Mathematical site, Praxeological analysis.

ÖNSÖZ

Mustafa Kemal Atatürk'ün ''Toplumun düşmanı cehalet, cehaletin düşmanı öğretmenlerdir.'' sözü çağdaş bir toplum olmada öğretmenlere büyük görev ve sorumlulukların düştüğünü göstermektedir. Bu kutsal görevi daha başarılı bir şekilde icra edebilmek için lisans eğitiminde öğrendiklerimden fazlasına ihtiyaç duyduğumu hissederek lisansüstü eğitim almaya karar verdim. Matematik alanında yüksek lisans eğitimi yaparak alanıma ilişkin teorik bilgilerimi gözden geçirme ve bu bilgilere yenilerini ekleme fırsatını yakaladım. Doktora eğitimim için matematik eğitimi alanını tercih ettim. Bu alanı tercih etmemdeki en önemli neden, bir öğretmen olarak lisans ve yüksek lisans eğitiminde edinmiş olduğum teorik bilgilerden öğrencilerimin en iyi şekilde faydalanabilmeleri için kendimi pedagojik olarak daha fazla geliştirme isteğim oldu.

Anadolu Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nın değerli öğretim üyelerine, daha başarılı bir öğretmen olabilmem için sahip oldukları bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak kariyerime paha biçilmez katkılar sundukları ve Eğitim Fakültesi'ni kendi evim gibi severek ziyaret etmemi sağladıkları için ayrı ayrı teşekkür ederim. Doktora eğitimim süresince aldığım derslerde engin bilgileri ile donanımlı bir öğretmen olma yolunda bana değerli katkılar sağlayan Doç. Dr. Dilek TANIŞLI, Doç. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN, Doç. Dr. Nilüfer KÖSE ve Doç. Dr. Hüseyin Bahadır YANIK hocalarıma ayrıca teşekkür ederim. Tanıştığım günden itibaren gerek teorik bilgi, gerek pratik bilgisi, gerekse eğitim kariyeri ile kendime örnek aldığım değerli bir hocam olmasının yanında, bazen bir arkadaş, bazen bir ağabey gibi kendime yakın hissederek rehberliğine başvurduğum sayın Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN'a bu zorlu süreçte her zaman yanımda olduğu için sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Doktora eğitim süreci boyunca her ihtiyacım olduğunda yanımda olan ve tez izleme toplantılarındaki tavsiyeleri ile tez çalışmama katkı sağlayan Doç. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN'a ayrıca teşekkür ederim. Uzun yollar katederek tez izleme komitelerine katılan, çalışmalarımı incelemek için vaktini ayıran, verdiği bilgiler ve yaptığı değerlendirmeler ile tez yazım sürecime önemli katkılar sağlayan sayın Doç. Dr. Tuba GÖKÇEK'e ayrıca teşekkür ederim. Eğitim süreci boyunca manevi desteklerini yanımda hisettiğim ve birlikte ders aldığım bütün arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Resmi anlamda öğrencilik hayatım son bulacağı için lisansüstü eğitim sürecimi tamamlamanın buruk mutluluğunu yaşamaktayım. Beni büyüten ve yetiştiren, eğitim hayatım boyunca manevi destek sağlayarak bu günlere gelmemde büyük emeği olan annem Gülsüm FINDIK'a, uzun ve zorlu lisansüstü eğitim süreci boyunca yanımda olan, umutsuz olduğum zamanlarda moral vererek bana destek olan, birlikte mutlu olup birlikte üzüldüğüm eşim H.Burcu FINDIK'a teşekkür ederim. Değerli öğretmen arkadaşım Sündüz GERÇEK'e, doktora eğitimim için yapmış olduğu fedakarlıktan ötürü teşekkür ederim. Maddi destek vererek eğitimime katkı sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Çalışmalarımın sevgili oğlum Kerem Deha FINDIK için örnek olmasını, ülkemizin muasır medeniyetler seviyesine ulaşma hedefine en yüksek katkıyı sağlayabilmesi için eğitimine büyük önem vermesini diliyorum.

Selim FINDIK
Eskişehir 2019

29/05/2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Selim FINDIK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

AY : A Yayınları

BY : B Yayınları

CY : C Yayınları

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

MS : Matematiksel Sit

RDFT : Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Matematik ardışık ve yığılmalı yapıya sahip olan bir bilimdir. Bu durumun ana sebebi matematiğin dışarıdan herhangi bir katkı almadan kendisini üretebilmesidir. Matematikte bir kavram onun oluşmasına katkı sağlayan gerekli kavramlar kazandırılmadan tam olarak öğretilemez ve her kavram kendisinden sonra gelecek kavramların ortaya konulmasına katkı sağlar (Altun, 2010). Matematiksel kavramlar arasındaki bu ilişki canlıların yaşam ilişkisine benzer. Canlıların, yaşamlarını sürdürdükleri ekosistemlerde ekolojik görev ve sorumlukları olduğu gibi matematiksel kavramların da yer aldıkları çalışma alanlarında birtakım görev ve sorumlulukları vardır. Bu görev ve sorumluluklar, canlılar arasında ekolojik ilişkilere benzer bir şekilde, matematiksel kavramlar arasında ekolojik ilişkilerin oluşmasına zemin hazırlar.

Türk Dil Kurumu Matematik Terimleri Sözlüğü'nde analiz, fonksiyonların diferansiyeli, integrali ve bunlarla ilgili kavramlar ve uygulamalarla uğraşan matematik dalı, diferansiyel ve integral hesabı olarak tanımlanmıştır (Hacısalihoğlu vd., 2000). Yüksek matematiğin temeli olan analiz limit, süreklilik, türev ve integral olmak üzere 4 ana konu üzerine inşa edilmiştir. Bu konular analizin tanımında geçen diferansiyel ve integral hesabın temel konularını oluşturur. Bu konulardan süreklilik, türev ve integral limit konusu üzerine inşa edilir. Limit konusunun öğretiminde devreye giren kavramsal ilişkilerin birçoğu diğer analiz konularının öğretiminde de devreye girer. Örneğin, türev kavramı bir değişkene çok küçük bir artış verilmesi durumunda fonksiyonda meydana gelecek değişikliğin, değişkendeki bu artışa oranının limit durumu olarak tanımlanır (Balcı, 2003). Bu tanımdan, türev kavramının gerisinde limit kavramının yer aldığı anlaşılır. Tanımda geçen ‘‘bir değişkene çok küçük bir artış verilmesi’’ durumu limit kavramı ile de yakından ilişkili olan komşuluk kavramı ile açıklanır. Buradan analiz konu ve kavramları arasında, kapsamlı, zengin ve sıkı ardışıklık ilişkilerinin bir araya gelmesiyle oluşan ekolojik bir dengenin olduğu görülür.

Matematikçilerin ürettiği matematik bilginin doğası ile öğretilmek için dönüştürülen matematik bilgisinin doğası birbirinden farklıdır (Chevallard, 1985). Bununla birlikte, öğretimsel olarak neden, niçin ve nasıl sorularına cevap verebilmek için öğretilecek bilginin de belli bir ekolojik denge içinde organize edilmesi gerekir. Öğretilecek konu ve kavramlar arasındaki bu ekolojik denge, analiz gibi kavramlar arası sıkı ilişkilerin gözlendiği bir alanda daha da ön plana çıkmaktadır. Analiz konularının öğretiminde yaşanan öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgıları incelendiğinde, pek çoğunun temelinde analiz konu ve kavramları arasındaki ekolojik ilişkilerde meydana gelen kopuklukların yattığı görülür. Örneğin, yapılan araştırmalar öğrencilerin sonsuzluk kavramını anlamada güçlükler yaşadığını göstermiştir (Sierpinska, 1987; Özmantar, 2013). Bu çalışmalardan elde edilen bulgular, öğrencilerin yaşadıkları sorunların sonsuzluk kavramının ekolojik anlamda ilişkili olduğu komşuluk, tanımsızlık, belirsizlik ve diferansiyel gibi kavramların öğretim programlarındaki yerlerinden kaynaklandığını göstermiştir. Didaktik veriler ekolojik sorunların belirlenmesinin yanı sıra, bu sorunların en aza indirilebilmesi için alınabilecek ekolojik tedbirlerin ortaya konulması açısından da önemlidir. Örneğin, Bergthold (1999), sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının limit alma işlemi ile ilişkilendirilmesine yönelik öğrenme güçlüklerinin aşılmasında öğrencilere fonksiyonların grafiklerini ve tablo değerlerini inceleyebilme imkanı sunulmasının kritik bir öneme sahip olduğunu belirtmiştir. Grafik çiziminde asimptot kavramına, tablo çiziminde ise reel sayıların sıralama ve tamlık özelliğine ihtiyaç duyuluyor olması, bu kavramlara analiz ekosisteminde yer verilmesinin sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarının anlamlandırılmasına önemli katkılar sağlayacağını göstermektedir.

Öğretilecek konu ve kavramlar arası ilişkilerin incelenmesi öğretim sürecinin doğal bir parçası olarak veya bir uzmanın ya da uzmanlar topluluğunun kişisel deneyim ve bilgileri ile üstesinden gelebilecekleri bir durum olarak düşünülmemelidir. Öğretimle ilgili pek çok faktör bu sürecin içinde değerlendirilmeli ve bu ilişkilerin incelenmesi yine öğretimle ilgili teori ve modellere dayandırılmalıdır. Duchet ve Erdoğan (2005), matematiksel bir çalışma alanının oluşumuna katkı sağlayan kavramların belirlenmesine ve bu kavramlar arasındaki ekolojik ilişkilerin yapılandırılmasına olanak sağlayan *Matematiksel Sit* (MS) kavramını öne sürmüşler ve öğretim konularının incelenmesinde kullanılabilen MS kavramı temelli bir model geliştirmişlerdir. Erdoğan (2006) tez çalışmasında bu modelin gerek öğretim programları ve ders kitapları ve gerekse öğretim sürecinin analizinde oldukça etkin bir araç olarak kullanılabileceğini, yaptığı analizler ve elde ettiği bulgularla ortaya koymuştur. MS, arkeolojik sit kavramı ile kurulan bir analojiden hareketle, üzerinde çalışılan araştırma derinliştikçe yeni kavram ve kavramlar arası ilişkilerin keşfedildiği bir alan/saha (çalışma alanı) olarak tanımlanmıştır. MS, öğretmen ile öğrenci arasındaki öğretimsel ilişkinin referans kaynağı olarak öne sürülmüştür. Bu modelde öğretmenin ana görevi, öğrencilerin MS içine girmelerine aracılık ederek kendi bilgilerini inşa etmelerine imkan sağlamak olarak tanımlanmıştır. MS bir analiz modeli olarak öğretim programı çerçevesinde sunulan bir çalışma alanının temel kavramlarının ve bu kavramlar arasındaki hiyerarşik ilişkilerin belirlenmesini ve bu "sit" üzerinden öğretimsel çıkarımlar ve öngörülerde bulunulmasını temel almaktadır. Bu modele göre, cebir veya analiz gibi bir çalışma alanının oluşumuna katkı sağlayan kavramlar arasındaki ilişkiler, bu çalışma alanına yönelik tarihsel, epistemolojik ve didaktik verilerden yararlanılarak belirlenmekte ve bu ekolojik ilişkiler global sit adı verilen bir diyagram yardımıyla bir bütün olarak incelenebilmektedir.

Erdoğan (2006), Fransa'da 2000'li yılların başında lise ikinci sınıf öğretim programında yer alan cebir ve fonksiyon konularının ele alındığı öğrenme alanını matematiksel sitin inşası için bir çalışma alanı olarak seçmiştir. Ardından tarihsel, epistemolojik ve didaktik verilerden yararlanarak cebir ve fonksiyon konuları için global sit diyagramı oluşturmuştur. Erdoğan (2006), öğretim programının amaçlarını ve programda benimsenen öğretim yaklaşımlarını göz önünde tutarak cebir ve fonksiyonlar çalışma alanına ilişkin bazı görev tipleri belirlemiş, Chevallard (2006) tarafından geliştirilen prakseolojik analiz modelini kullanarak bu görev tiplerini analiz etmiştir. Prakseolojik analizler sonucunda elde ettiği verilerden ve global sitteki ekolojik ilişkilerden yararlanarak, her bir görev tipinin gerçekleştirilmesi için kavramlar arasında kurulması gereken ekolojik ilişkilerin yer aldığı diyagramlar oluşturmuştur. Ardından, *lokal sit* adını verdiği bu diyagramlardan yararlanarak, her bir görev tipi için öğretim programında ve öğretim faaliyetlerinde ortaya çıkan ekolojik sorunları tespit etmiş ve bu sorunların giderilmesine yönelik öneriler ileri sürmüştür.

Bu tez çalışmasında matematiksel analiz bir çalışma alanı olarak belirlenmiştir. Bu belirlemede, analiz konularının matematik ve bilim dünyası için önemli bir yer tutuyor olması etkili hususlardan biri olmuştur. Analitik düşünme becerilerinin geliştirilmesinde önemli bir geçiş kapısı olarak nitelendirilen analiz, matematiğin temel taşlarından biri olarak değerlendirilmektedir (Doğan ve Şimşek, 2015). Analiz matematiğin yanı sıra, fizik, mühendislik, mimarlık, ekonomi, kimya ve istatistik gibi birçok bilim dalında da kullanılmaktadır (Ubuz, 1999; Balcı, 2003). Matematikte teğetin eğimi, fizikte hız ve ivmenin, alandaki veya hacimdeki değişim hızının belirlenmesi, kimyada reaksiyon hızının bulunması, ekonomide marjinal gelir ve marjinal fiyat hesabı yapılması, mimarlıkta alan ve hacim hesaplamaları, istatistikte olasılık hesabı yapılması gibi birçok farklı çalışma alanında diferansiyel veya integral analiz bilgisinden yararlanılır (Balcı, 2003). Analiz, insanlığa hesaplamayı etkili bir biçimde kullanma fırsatı sunarak gezegenlerin hareketleri sonucunda ortaya çıkan değişimden, ekonomik değişime ve iklim değişimine varıncaya kadar insanlığın değişimi anlamasına olanak sağlamıştır (Tillmann'dan aktaran Osman, 2017).

Analizin birçok bilim dalı için önemli bir çalışma alanı olması, analiz konularının öğrenimi üzerine pek çok araştırma yapılmasında etkili olmuştur (Tall and Vinner, 1981; Davis and Vinner, 1986; Sierpinska, 1987; Cornu, 1991; Williams, 1991; White and Mitchelmore, 1996; Calvo, 1997; Bezuidenhout, 1998; Szydlik, 2000; Bezuidenhout, 2001; Ubuz, 2001; Delice ve Sevimli, 2010). Bu çalışmaların tamamında öğrencilerin analiz konularını öğrenirken zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Tatar, Okur ve Tuna (2008)'nın 2005–2006 öğretim yılında, Atatürk Üniversitesi ve Gazi Üniversitesi'ne yeni yerleşmiş olan 144 İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümü öğrencisi ile yapmış olduğu çalışma buna örnek olarak gösterilebilir. Tatar, Okur ve Tuna öğretim yılının ilk haftasında çalışmaya katılan öğrencilere lise matematik konularını kapsayan 29 maddelik zorluk indeksi anketi uygulamıştır. Anket verilerine göre zorluk düzeyi en yüksek olan 10 konu Tablo 1.1'de verilmiştir.

Tablo 1.1. *Lise matematik konularının zorluk indeksine göre matematik öğrencileri için zor öğrenilen konular (Tatar, Okur ve Tuna, 2008)*

Zorluk Sırası	Konu	Zorluk İndeksi (%)
1	Matrisler ve Determinantlar	75
2	Diziler ve Seriler	62,2
3	**İntegral ve Uygulamaları**	**59,38**
4	**Limit ve Süreklilik**	**55,56**
5	**Türev ve Uygulamaları**	**54,02**
6	İkinci ve Üçüncü Dereceden Fonksiyonlar ve Grafikleri	48,19
7	Trigonometri	44,7
8	Karmaşık Sayılar	37,4
9	Olasılık	33,09
10	İkinci ve Üçüncü Dereceden Eşitsizlikler	31

Çalışmada zorluk indeksi %50'nin üzerinde olan; matrisler ve determinantlar, diziler ve seriler, integral ve uygulamaları, limit ve süreklilik, türev ve uygulamaları konuları matematik öğrencileri için zor öğrenilen konular olarak belirlenmiştir. Matrisler ve determinantların mevcut lise öğretim programında yer almadığı düşünüldüğünde zorluk indeksi en yüksek olan 4 konudan 3'ünün analiz çalışma alanını oluşturan limit ve süreklilik, türev ve integral konuları olduğu görülmektedir. Bu bağlamda, öğrencilerin analiz konularını öğrenmede zorluk yaşıyor olmaları bu tez çalışmasında MS'si oluşturulmak üzere analiz çalışma alanının seçilmesinde etkili olan diğer önemli husus olmuştur.

Ali Ülger[1], analizi matematiğin sonsuz süreçlerini inceleyen dalı olarak tanımlamaktadır. Tanımda geçen *sonsuz süreç* ifadesi ile limit kavramı yardımıyla tanımlanabilen süreklilik, türev ve integral gibi pek çok kavram kastedilmektedir. Limit kavramı, içerisinde sonsuzu da içeren işlemler barındırması nedeniyle öğrencilere soyut gelmektedir. Öğrencilerin sonsuzluk kavramını anlamada yaşadıkları güçlükler, sonsuzluk kavramının kullanıldığı komşuluk, tanımsızlık, belirsizlik ve diferansiyel gibi kavramların öğrenmelerine de etki etmektedir (Sierpinska, 1987; Özmantar, 2013). Bu durum, analiz çalışma alanı içerisinde yer alan kavramlar arasında ilişkilendirme yapılmasının analiz öğretimi için ne denli önemli olduğunu göstermektedir.

Matematiksel ilişkilendirme kısaca matematiksel kavramlar arasında bağlantı kurulması olarak tanımlanmaktadır (Eli, 2009). İlişkilendirme, matematik eğitimi programında matematik öğrenme ve yapma süreçlerinin en önemli becerilerinden birisi olarak vurgulanmıştır (MEB, 2013). Analiz kavramları arasındaki ardışıklık ilişkileri göz önünde tutulduğunda; komşuluk, yakınsaklık, tanımsızlık, belirsizlik ve diferansiyel gibi sonsuzluk kavramı ile ilişkili olan soyut kavramların birbirleri ile ve analiz çalışma alanında kullanılan diğer kavramlar ile ilişkilendirilmesinin didaktik açıdan oldukça faydalı olacağı anlaşılır. Bu durum, MS'si oluşturulmak üzere analiz çalışma alanının seçilmesinde etkili olan bir diğer önemli husus olmuştur.

Çalışmada MS kavramı ve bu kavram temel alınarak geliştirilen analiz modeli teorik çerçeve olarak benimsenmiş, türev konusu ile ilgili kavramlar arası didaktik ilişkilerin belirlenmesi ve öğretim programlarına yönelik bir yapılandırma modelinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Çalışma iki temel bölümden oluşmaktadır.

---

[1] http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF_eskisayilar/1999_2_9_12_ANALIZ.pdf (Erişim Tarihi:28.06.2018)

İlk bölümde matematiksel analize ilişkin tarihsel, epistemolojik ve didaktik verilerden yararlanılarak, analiz çalışma alanının temel olarak ne ile ilgilendiği; limit, süreklilik, türev ve integral konularının analiz çalışma alanı için ne ifade ettiği; analiz problemlerinin çözümünde hangi tekniklere (problem çözümlerinde baş vurulan farklı yöntemler) ne amaçlarla yer verildiği ve bu problemlerin çözümlerinde hangi kavramların devreye girdiği incelenmiştir. Kavramlar arasında hiyerarşik bir yapı ortaya konularak, bu kavramların analiz çalışma alanı dışındaki başka hangi çalışma alanları ile ekolojik ilişkiler kurduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Yapılan araştırmalar sayesinde analizin global sit diyagramı oluşturularak, bu sit alanına giren kavramlar arasındaki ekolojik ilişkilerin bir bütün olarak incelenmesine olanak sağlanmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, prakseolojik analizlerin desteği ile ve global sitten kesitlenerek oluşturulan lokal sitler aracılığıyla ders kitaplarının analiz siti ile uyumluluğu incelenmiştir. Bu süreç öncesinde, 2013 yılında uygulanmaya başlanan ortaöğretim matematik programının genel amaçları, programın öğrencilere kazandırmayı hedeflediği matematiksel yeterlilik ve beceriler, 12. sınıf öğretim programı ve programın uygulanmasına ilişkin açıklamalar değerlendirilerek öğretim programında analiz öğretimi için benimsenen yaklaşım ortaya konulmuştur. Limit, süreklilik ve türev konularına ilişkin öğretim programında yer alan kazanımlardan yola çıkılarak her bir konu için ayrı ayrı görev tipleri belirlenmiştir. Belirlenen her bir görev tipinin gerçekleştirilmesine bağlı olarak ortaya çıkan kavramlar arası ekolojik ilişkilerin görüldüğü lokal sitler oluşturulmuştur. Oluşturulan lokal sitlerden yararlanılarak, her bir görev tipi için öğretim programında ve 12. sınıf matematik ders kitaplarında ortaya çıkan ekolojik sorunlar tespit edilmiş ve bu sorunların giderilmesine yönelik öneriler sunulmuştur. Çalışmada global sit ve lokal sitlerden ders kitaplarının değerlendirilmesi amacı ile yararlanılmıştır. MS'lerden bu amacın yanı sıra, ders içi öğretim faaliyetlerinin planlanması, öğrenci davranışlarının analiz edilmesi gibi farklı didaktik amaçlar için de yararlanılabilir.

1.2. Teorik Çerçeve: Matematiksel Sit

Bu bölüm iki ana alt başlıktan oluşmaktadır. İlk alt başlıkta MS kavramı açıklanmıştır. İkinci alt başlıkta MS'nin inşa sürecine ilişkin detaylı bilgilendirme yapılmış, global sit ve lokal sit kavramları açıklanmış ve MS modelinin prakseolojik analiz ve ekolojik analiz modeli ile ilişkisine yer verilmiştir.

1.2.1. Matematiksel sit kavramı

MS kavramı Pierre Duchet ve Abdulkadir Erdoğan tarafından ortaya atılmıştır. (Duchet and Erdoğan, 2005). Erdoğan doktora tezi çalışmasında MS kavramını ayrıntılı bir şekilde açıklamış ve MS'yi tezinin temel teorik modeli olarak kullanmıştır (Erdoğan, 2006). MS modeli Erdoğan'ın tez çalışmasından sonra Christian Silvy, Romain Mario, Farah Lynn tarafından tez çalışmalarında ve bilimsel yayınlarda kullanılmıştır (Silvy and Delcroix, 2009; Silvy, 2010; Mario, 2012; Silvy and Delcroix, 2012; Silvy, Delcroix and Mercier, 2013; Farah, 2015).

Öğrencilerin yaptıkları otonom çalışmalarda (beklenen öğrenmelerin gerçekleşmesinde sorumluluğu öğrenciye ait olan ev ödevi, alıştırmalar, sınava hazırlanma v.b. gibi bireysel çalışmalar) hissedilen yardım ihtiyacı ve öğrencilere etkili yardım edebilme sorunu Erdoğan'ın tez çalışmasının çıkış noktası olmuştur. Bu çalışmada, öğrencilerin otonom çalışmalarının onlara ciddi problemler doğurmakta olduğu vurgulanmış, otonom çalışmaların doğası, eğitim-öğretimdeki rolü ve eğitim sistemi içindeki işleyiş şartları üzerine derinlemesine bir araştırma yapma ihtiyacının duyulduğu belirtilmiştir. Çalışmada, öğrencilerin otonom etüt çalışmalarına yardımcı olabilmek amacıyla bir analiz ve yorum modeli ortaya konulması hedeflenmiştir. Kurulan bu model *matematiksel sit* olarak adlandırılmıştır.

Duchet ve Erdoğan MS kavramını şu şekilde tanımlamaktadır:

> Herhangi bir matematik nesnesi N'nin kazanımı için etüdü gerekli olan matematiksel nesnelerin kümesi ve onlar arasındaki ilişkiler bir ağ, yani *N'nin matematiksel siti,* olarak düşünülebilir. Bu nesne ve ilişkilerden bazıları görünür, bazıları ise gizli olabilir. Öğrenen konumundaki her kişi için matematiksel sit N'nin etütü için güvenilir bir referans teşkil edecek şekilde bir anlam, araştırma, inceleme ve deneme alanı, yani kendi ölçeğinde yeterince sağlam ve oturmuş bir alan olarak ortaya çıkar (Duchet and Erdoğan, 2005).

Bu tanımda öncelikle, öğretim veya etüt konusu olabilecek yeterince kapsamlı bir konu veya kavramın (N) belirli bir nesne kümesi ve onlar arasındaki ilişkilerle var olduğu fikri ön plana çıkmaktadır. Bu da sit kavramının ekolojik temelini oluşturmaktadır. Zira ekolojik yaklaşımlarda matematiksel nesneler için besleyen - beslenen nesneler hiyerarşisi ve ilişkisi büyük önem taşımaktadır.

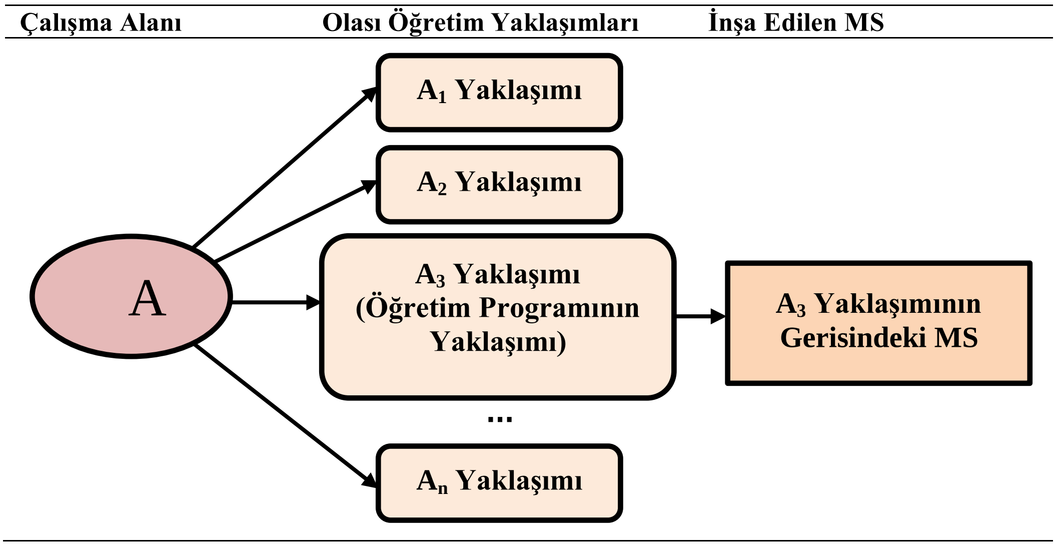
Tanımda ikinci olarak bu nesne ve ilişkilerin bazılarının görünür, bazılarının da gizli olabileceği belirtilmektedir. Bu iddia birkaç açıdan yorumlanabilir. Öncelikle, bir nesnenin matematiksel sitindeki bazı nesnelerin ve ilişkilerin gizli olabileceği düşüncesi, matematiksel nesnelerin anlamlarının ve onlar arasındaki ilişkilerin bir anda görülemeyecek kadar karmaşık ve çoklu olabileceği düşüncesini ön plana çıkarmaktadır. Araştırma ihtiyacı oranında bu nesne ve ilişkiler araştırmacılar tarafından ortaya konulabilir ve tanımlanabilir. Öğrenen boyutunda ise, bu nesne ve ilişkilerle kendi sınıf seviyesi ölçeğinde anlamlı bir ilişki kurmak esastır. Bu iddia diğer yandan, matematiksel nesneler arasındaki ilişkilerin dinamik yapısına vurgu yapmaktadır. Bir kereliğine, bir birey veya araştırmacı tarafından belirlenen ve sürekli aynı kalan bir ilişkiler ağından ziyade, araştırmacının kavram ve ilişkilere bakış açısını da yansıtabilecek bir kavram ve ilişkiler ağı ön plandadır. Bu nedenlerle, MS kavramı arkeolojik sit kavramından esinlenerek önerilmiştir (Erdoğan, 2006). Nasıl ki arkeolojik bir sitte, kazı devam ettikçe yeni nesnelere ulaşma ihtimali vardır ve kazı alanı arkeolojik sitin sadece belirli bir kesitidir, öğretim konusu yapılan MS de gerisinde araştırdıkça ortaya çıkabilecek nesne ve ilişkiler barındırmaktadır. Başka bir ifadeyle, öğretim konusu yapılan nesne ve ilişkiler sadece buzdağının görünen kısmıdır. Kazı çalışmalarında çoğu zaman, alınabilecek her türlü çabaya rağmen, kıymetli tarihi eser vasfı taşıyan nesnelerin toprak altında kalmaları veya kazı sürecinde ortaya çıkan gelişmelere bağlı olarak zarar görmeleri kaçınılmaz olur. Arkeolojik kazılarda olduğu gibi MS inşa edilirken de bazı nesnelerin gözden kaçmış olması, ekolojik olarak uygun olmayan yerde bulunması veya nesneler arasındaki besleme-beslenme ilişkilerinin eksik temsil edilmesi söz konusu olabilir. Burada önemli olan oluşturulacak sitlerde kritik öneme sahip nesnelerin tam olarak belirlenmesi, bu nesnelerin yer aldığı ekolojik ilişkilerin doğru tespit edilmesi ve oluşturulan sitlerin ekolojik analiz yapmada güvenilir veriler elde edilecek şekilde kullanılmasıdır.

Tanımda son olarak, MS'nin öğrenen konumundaki kişinin ve özellikle bireysel öğrenmelerde ve öğrenme görevlerinde güvenilir bir referans olduğu belirtilmiş, bu referansın öğrenen için anlam, araştırma, inceleme ve deneme alanı olduğuna ve yapısının göreceli sağlamlığına vurgu yapılmıştır. Bu vurgular MS kavramının epistemolojik temellerini ve kavramı ortaya atan araştırmacıların öğretme-öğrenme yaklaşılmalarını belirlemeyi sağlamaktadır. Sit kavramının epistemolojik temelleri açıklanırken, matematik içinde bu şekildeki bir yapının (veya yapıların) kendi başına araştırma, inceleme ve deneyim sahası olduğu vurgulanmış ve matematiğin deneyimleme ve keşfetme bilimi olduğu boyutları ön plana çıkarılmıştır. İkinci olarak, bu vurgular araştırmacıların öğretme-öğrenme sürecinin ancak sit odaklı gerçekleşebileceği fikrini savunduklarını göstermektedir. Erdoğan (2006; 2014) bu durumu, öğretmenin öğretmek için öğrencilerin ise gerçek anlamda öğrenebilmek için sit içinde bir yapıya ihtiyacı olduğu şeklinde özetlemekte ve MS'yi matematik öğretme-öğrenme sürecinin çekirdeği/ana maddesi olarak nitelendirmektedir. Öğretmen, öğretimini ilgili MS üzerine inşa edemez, böyle bir siti öğrencileri için anlam dünyası ve referans kaynağı olarak sunamazsa, öğrenci bireysel çalışmalarında başarıya ulaşamaz (Erdoğan, 2006). Erdoğan (2016), bunun bir örneğini lise ikinci sınıf fonksiyonlar konusunun öğretimi için sunmakta ve matematiksel bir sitin eksikliğinde, öğrencilerin öğrenme eylem ve davranışlarının nasıl öğretmenin ağzından dökülecek yöntem ve yönergelere dönüştüğünü göstermektedir.

1.2.2. Matematiksel sitin bir analiz modeli olarak inşası

MS'nin tanımı kadar böyle bir sitin nasıl araştırma ve öğretim amaçlı bir model olarak inşa edilebileceğinin de incelenmesi gerekir. Erdoğan'ın çalışmaları incelendiğinde (Duchet and Erdoğan, 2005; Erdoğan, 2006; Erdoğan, 2014), MS'nin ilgili olduğu öğretim alanındaki konu ve kavramlara göre belirlendiği ve belirlenen kavramlar arasındaki ekolojik ilişkiler yardımıyla inşa edildiği görülür. Erdoğan (2006), bu kavram ve ilişkilerin belirlenmesi için tarihi, epistemolojik ve didaktik analizlerin yapıldığını belirtir. Tarihsel veriler, öğretim alanının tarihsel gelişim süreci boyunca hangi kavramlar ile ekolojik ilişkiler kurduğu, bu kavramların nasıl ortaya çıkıp geliştiği, kavramların gelişim süreci boyunca hangi ekolojik sorunlar ortaya çıktığı gibi sorulara yanıt aranmasını sağlayarak sitin inşasına katkıda bulunur. Epistemolojik veriler, hangi kavramların epistemolojik sorunların ortaya çıkmasına etki ettiği, bu sorunların diğer kavramlarla olan ekolojik ilişkilere nasıl yansıdığı, hangi kavramlar arasında çalışma alanı için kritik besleme-beslenme ilişkilerinin kurulabileceği gibi sorulara yanıt aranmasını sağlayarak sitin inşasına katkıda bulunur. Didaktik veriler, öğrencilerin çalışma alanı ile ilgili hangi öğrenme güçlüklerine sahip oldukları, bu sorunların kaynağında hangi kavramlar arasındaki ekolojik kopuklukların yer aldığı gibi sorulara yanıt aranmasını sağlayarak sit inşasına katkı sağlar. Elde edilen bu verilerden, MS'nin ders programlarındaki kazanımlardan ve konuya özgü öğretim yaklaşımlarından tamamen bağımsız bir şekilde, bir kereliğine, tüm öğretim programlarını ve konu bazlı öğretim yaklaşımlarını kuşatacak şekilde kurulmadığı anlaşılır. Tam tersine, öğretimi hedeflenen bir kavram veya bir öğretim alanı için ilk olarak programın nasıl bir yaklaşım benimsendiğinin tespit edilmesi gerekir. Sonrasında bu yaklaşımın hedeflenen öğrenmelerin gerçekleşmesi için nasıl bir MS'nin kullanılmasını zorunlu kıldığının araştırılması gerekir.

Şekil 1.1'de verilen diyagram MS'nin öğretim programının beklentilerine göre nasıl oluşturulduğunu göstermektedir.

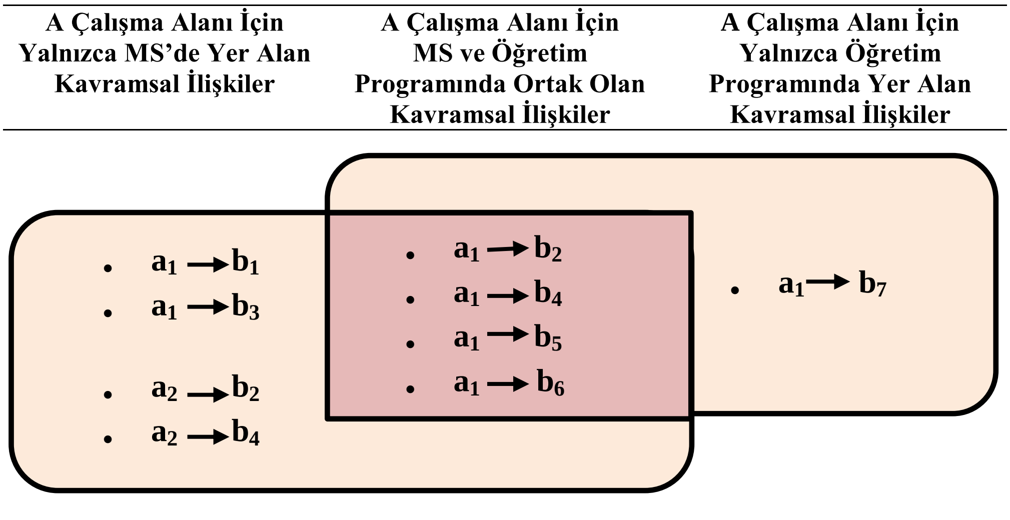


Şekil 1.1. *Öğretim programının yaklaşımı göz önünde tutularak MS'nin inşa edilmesi*

Şekil 1.1'e göre bir A çalışma alanının A_1, A_2, … , A_n gibi birçok farklı yaklaşıma göre öğretimi mümkündür. A çalışma alanı kapsamında öğretim programının yapılandırılması amacıyla MS modelinin kullanılabilmesi için bu model çerçevesinde oluşturulacak sitlerin öğretim programında benimsenen yaklaşım göz önünde tutularak inşa edilmesi gerekir. Bu durumda, öncelikle öğretim programının A çalışma alanının öğretiminde nasıl bir yaklaşım benimsediğinin belirlenmesi, ardından bu yaklaşıma göre MS'lerin oluşturulması gerekmektedir. Şekil 1.1 incelendiğinde, A çalışma alanının öğretimi için programda olası yaklaşımlardan A_3 yaklaşımının benimsendiği ve MS'lerin bu yaklaşıma uygun olarak hazırlandığı görülmektedir.

MS kavramı, öğretim ve öğrenmelerde karşılaşılan sorunlar için programın benimsediği yaklaşım doğrultusunda, programda yer alması gereken nesne ve ilişkiler ile gerçekte yer alan nesne ve ilişkiler arasındaki muhtemel farklılıkları, kopuklukları ve uyuşmazlıkları referans almakta ve bunların öğretme ve öğrenme durumlarına nasıl yansıdıklarının incelenmesine odaklanmaktadır. Başka bir ifadeyle, MS ortaya konulurken bir taraftan belirli bir alana ve belirli bir sınıf seviyesine bağlı kalınırken, diğer taraftan da bu sitin ders programlarında, ders kitaplarında, sınıf içinde gerçekleştirilen çalışmalarda ve öğrencilerden beklenen bireysel çalışmalarda ne şekilde ortaya çıktığı (veya öğretmen tarafından nasıl ortaya çıkarıldığı) ve etüdünün nasıl organize edildiği incelenmektedir.

Şekil 1.2'de bir A çalışma alanı için öğretim programında yer alan bileşenlerin oluşturduğu kavramsal ilişkiler ile MS'nin bileşenlerinin oluşturduğu kavramsal ilişkiler karşılaştırılmıştır.



Şekil 1.2. *A çalışma alanı için öğretim programı ile MS'nin kavramsal ilişkilerinin karşılaştırılması*

Şekil 1.2'ye göre A çalışma alanı için oluşturulan MS a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 ve b_6 olmak üzere 8 bileşenden oluşmaktadır. Bu durum sıralanan bütün bu bileşenlerin öğretim programının yaklaşımına göre A çalışma alanında bazı ekolojik görevler üstlendiğini göstermektedir. Bu bileşenlerden a_1'in bütün b bileşenleri ile; a_2 bileşeninin ise yalnızca b_2 ve b_4 bileşenleri ile ekolojik ilişkisi bulunmaktadır. A çalışma alanı için öğretim programında yer alan bileşenler incelendiğinde, MS'de yer verilen a_2 ve b_3 bileşenlerine programda yer verilmediği görülür. Bu durum A çalışma alanında a_2 ve b_3 bileşenlerinin yoksunluğundan kaynaklanan ekolojik boşlukların oluşacağını göstermektedir. Ayrıca, öğretim programında a_1 bileşeni ile b_1 ve b_3 bileşenleri arasında; a_2 bileşeni ile b_2 ve b_4 bileşenleri arasında ekolojik ilişki kurulmadığı görülmektedir. Bu durum a_1 bileşeninin b_1 ve b_3; a_2 bileşeninin ise b_2 ve b_4 bileşenleri yardımıyla ekolojik olarak beslenmesini engellemektedir. Öte yandan MS'de b_7 nesnesi bulunmadığı ve a_1 ile b_7 nesneleri arasında ekolojik ilişki kurulmadığı halde, öğretim programında bu nesneler arasında ekolojik ilişki kurulduğu anlaşılmaktadır. Ortaya çıkan bu farklılık, öğretim programının kendi iç dinamikleri sonucunda a_1 ile b_7 nesneleri arasında ekolojik bütünlüğü bozacak bir kavramsal ilişkiye yer verilebileceğini göstermektedir. Başka bir ifadeyle, a_1 ile b_7 nesneleri arasında kurulan ekolojik ilişki öğretim programında A çalışma alanı için benimsenen öğretim yaklaşımına göre uygun değildir. Bu durum, a_1 ile b_7 nesneleri arasında kurulan ekolojik ilişkinin sit içerisinde yer alan diğer bileşenler tarafından desteklenmeyeceği şeklinde yorumlanabilir. Bu durumda a_1 ile b_7 nesneleri arasındaki ekolojik ilişkinin A çalışma alanının oluşturduğu ekosistemde varlığını sürdürebilmesi mümkün değildir.

Şekil 1.2'de yer alan ekolojik ilişkileri, diyagramda yer alan nesnelere çalışma alanı ile ilgili kavramlar atayarak açıklamak da mümkündür. Örneğin, diyagramda yer alan a_1, b_1, b_2 ve b_7 nesnelerine, A çalışma alanı ile ilgili olduğu varsayılan sırasıyla sonsuzluk, oran, doğru ve yakınsaklık kavramları atanmış olsun. Şekil 1.2'ye göre öğretim programının yaklaşımı göz önünde tutularak oluşturulan MS, bu kavramlardan sonsuzluğun, oran ve doğru ile ekolojik bağ kurularak beslenmesi gerektiğine işaret etmektedir. Öte yandan, öğretim programında yer alan ekolojik ilişkiler, sonsuzluk ile doğru ve yakınsaklık kavramları arasında ekolojik bağ kurulduğunu göstermektedir. Buna göre, MS'den farklı olarak, sonsuzluk ile oran kavramları arasında ekolojik bağ kurulmamış olması, öğretim programında sonsuzluğun doğru kavramı yardımı ile beslenmesinin engellendiğini göstermektedir. Ayrıca, öğretim programında, MS'de yer almadığı halde, sonsuzluk ile yakınsaklık kavramları arasında ekolojik bağ kuruluyor olması, bu bağın A çalışma alanının oluşturduğu ekosistemde varlığını sağlıklı bir biçimde sürdüremeyeceğini göstermektedir.

1.2.2.1. *Global sit kavramı ve global sitin inşası*

Global sit bir çalışma alanına ait nesneler ve bu nesneler arasındaki ilişkilerin siti olarak adlandırılabilir. Global sitin temel ögesi ilgili çalışma alanıdır. Çalışma alanından kastedilen, belirli bir nesne kümesi ve onlar arasındaki hiyerarşik ilişkilerle inşa edilebilecek kadar kapsamlı bir ekolojik yapı oluşturan öğretim konusu veya konularıdır. Dolayısıyla global sitin inşasından önce, üzerinde araştırma yapılacak konu veya konuların global sit oluşturulabilecek bir çalışma alanı niteliği taşıyıp taşımadığına karar verilmesi gerekir. Ayrıca, global sitin öğretim programlarının yapılandırılmasında bir model olarak kullanılabilmesi için çalışma alanının öğretim programında yer alan ekolojik ilişkiler göz önünde tutularak belirlenmesi de önem taşımaktadır. Erdoğan (2006)'ın tez çalışmasında global sitini inşa edeceği çalışma alanını belirleme süreci, çalışma alanına öğretim programından bağımsız bir şekilde karar verilemeyeceğini göstermektedir.

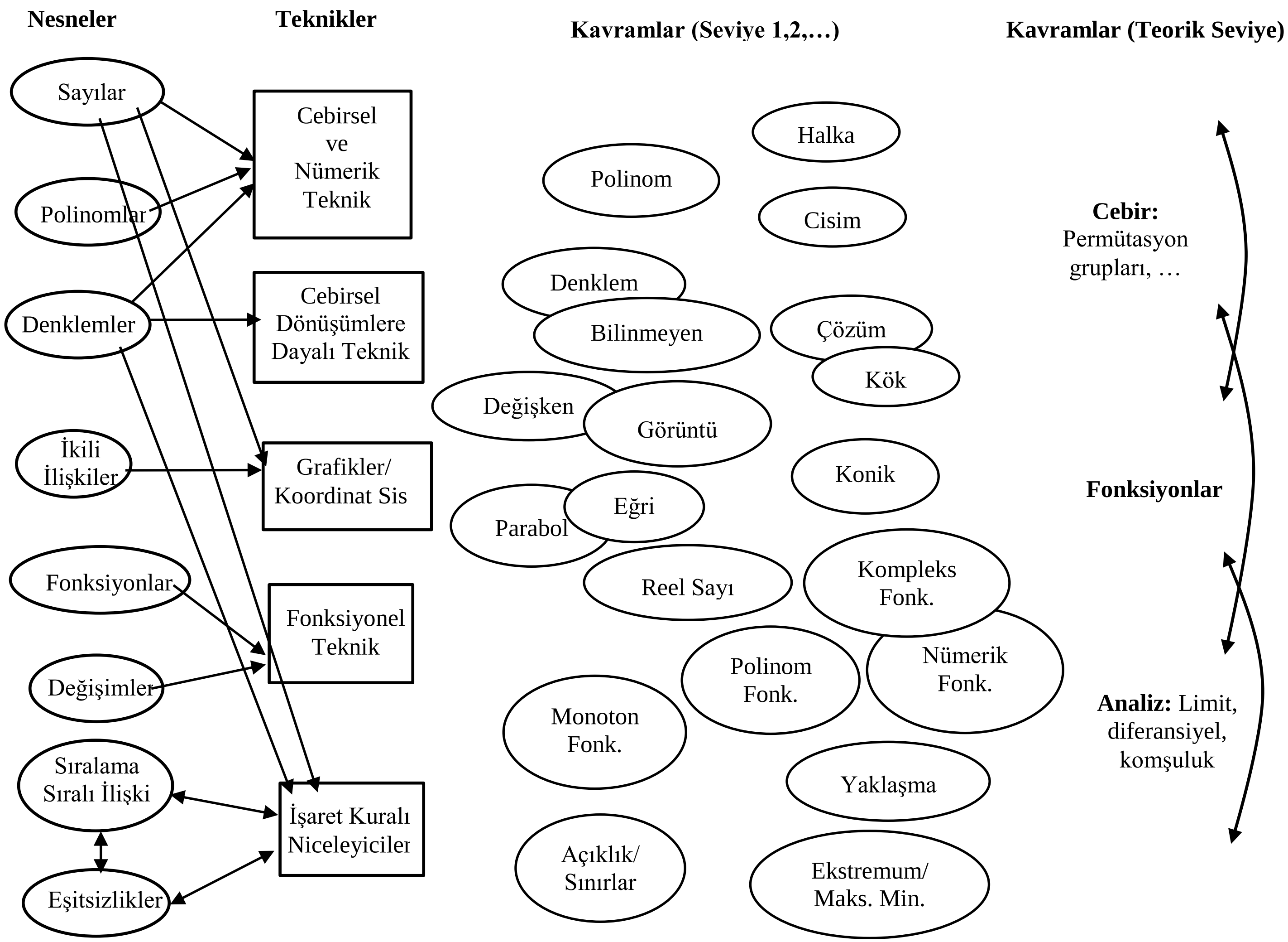
Erdoğan (2006) tez çalışmasında cebir ve fonksiyon konularına yönelik inşa ettiği bir global site odaklanmıştır. Cebir matematiğin bir alt alanı olarak, fonksiyonlarda analizin bir alt bileşeni olarak düşünüldüğünde, ayrı ayrı iki global sitten bahsetmek mümkündür. Oysa Erdoğan çalışmasında bu iki ayrı site odaklanmak yerine, *cebirsel-fonksiyonel sit* olarak isimlendirdiği tek bir sitin varlığından bahsetmektedir. Bu sitin kaynağı öğretim programının hedeflediği ilişkilerdir. Fransa'da uygulanan matematik öğretim programı (2000'li yılların başı) lise 1. sınıf seviyesinde bir yandan cebiri fonksiyonların incelenmesi için bir araç olarak, diğer yandan da fonksiyonları cebir için bir araç olarak işe koşmayı hedeflediği için program iki alanı bir arada "fonksiyonlar ve cebirsel formüller" başlığı altında tek bir öğrenme alanı olarak sunmaktadır. Öğretim programına göre bahsedilen öğrenme alanın temel hedefleri şu şekildedir:

- Cebirsel bir ifadenin biçimini tanıma (toplam, çarpım, kare, iki kare farkı, vb.)
- x 'ten $f(x)$ 'e götüren fonksiyon zincirini belirleme
- Bir ifadenin farklı biçimlerini tanıma ve istenilen çalışmaya en uygun biçimi seçme (sadeleşmiş biçim, çarpanlara ayrılmış biçim vb.)
- Bir ifadeyi belirlenen hedefe göre değiştirme, genişletme, sadeleştirme gibi cebirsel işlemleri yapma

Programda öğrenme alanının hemen altında şu açıklamaya da yer verilmiştir:

- Fonksiyonlarda denklem ve eşitsizliklerle ilişkili etkinlikler, bir ifadenin verilmiş farklı bir biçimindeki bilgileri ön plana çıkarmalı ve amaca uygun bir ifade biçimi arayışını motive etmelidir.

Erdoğan bu açıklamayı, programın geri kalan kısmında öğretilmesi hedeflenen fonksiyonlara yönelik konu ve kazanımlarla birlikte yorumlayarak, programın cebir ile fonksiyonlar arasında bir köprü kurulmasını hedeflediğini belirlemiştir. Erdoğan, programın beklentilerine göre devreye giren kavram ve ilişkilere cebir ve fonksiyon konuları için inşa ettiği cebirsel-fonksiyonel sitte yer vermiştir. Nihai hali daha daha karmaşık kavram ve ilişkiler barındıran bu sitin daha yalın bir diyagramı temel yapıyı tanıtmak amacı ile aşağıda sunulmuştur.



Şekil 1.3. *Cebirsel-fonksiyonel sit taslağı (Erdoğan, 2006)*

Erdoğan (2006) cebirsel-fonksiyonel sitin inşası sürecinde tarihsel, epistemolojik ve didaktik bilgiler yardımıyla ilk olarak sitin temel ögelerini tespit etmiştir. Erdoğan'ın belirlediği temel ögeler sitin ilk sütununu oluşturan sayılar, polinomlar, denklemler, ikili ilişkiler, fonksiyonlar, değişimler, sıralama-sıralı ilişki ve eşitsizlikler nesneleridir. Erdoğan sitin bağlı olduğu öğretim programında cebirin (denklem ve eşitsizlik çözümleri) fonksiyonlar için (fonksiyonun cebirsel temsilini anlama) fonksiyonların da cebir için kullanılmasının (örneğin ikinci dereceden $f(x) = g(x)$ şeklindeki bir denklemin kaç tane kökü olacağı, bu köklerin nerede olacağı hakkında tahmin ve hipotezde bulunma) öngörüldüğünü belirlemiştir. Çalışmada öğretim programının problem çözme odaklı ve öğrencileri analiz konularına etkin bir biçimde hazırlayacağı öngörüsüyle planlandığı ifade edilerek sitin iki temel elemanı denklemler ve fonksiyonlar olarak belirlenmiştir (Erdoğan, 2006). Programın yaklaşımı da göz önünde bulundurularak gerçekleştirilen analizler sonucunda, fonksiyonların değişimler ile doğrudan ilişkili olduğu görülmüş ve bu nesneye de temel ögeler arasında yer verilmiştir. Benzer şekilde, denklem çözümünün (özellikle ikinci dereceden) polinom kavramı ile beraber ele alınması gerektiği tespit edilmiş ve bu bağlamda hem cebir hem de fonksiyonlar için sayı kümesi kavramının (özellikle reel sayıların) büyük bir öneme sahip olduğuna ve sitte diğer temel nesnelerle aynı hiyerarşik konumda olması gerektiğine karar verilmiştir. Son olarak, programın eşitsizlik çözümlerine de yer verdiği ve eşitsizlik kavramının gerisinde aslında sıralama kavramının bulunduğu (sayıların sıralanması, fonksiyonların görüntülerinin sıralanması ve karşılaştırılması, artanlık-azalanlık, vb.) tespit edilerek sıralama ve eşitsizlikler nesnelerinin temel nesneler sütununda yer almasına karar verilmiştir. Her ne kadar programda denklem ve eşitsizlik kavramları beraber verilse de kurulan sitte sıralama ve eşitsizlik kavramları denklem kavramından ayrılmış ve değişim kavramından sonra verilmiştir. Bunun nedeni, tarihsel ve epistemolojik olarak sıralama ve eşitsizlik kavramlarının cebirin nesneleri gibi görünüyor olmalarına rağmen, asıl işlevlerini analiz konularında gerçekleştirmeleridir. Bu durum, MS kavramının belirli bir program ve belirli bir öğretim yaklaşımı temel alınarak oluşturulmaya başlandığını fakat sahip olduğu nesne ve ilişkilerin belirlenmesi noktasında programın değil, tarihsel, epistemolojik ve didaktik analizlerin referans alındığını göstermektedir.

Erdoğan, Chevallard'ın antropolojik teorisini (Chevallard, 1992) benimseyerek, bu matematiksel nesnelerin ancak belirli bağlamlardaki problemlerin işe koşulmasıyla öğretilebileceğini belirtmekte ve bu kavramların ilişkili olduğu teknikleri belirli bir hiyerarşi içinde sit taslağının ikinci sütununda sunmaktadır. Örneğin, ikinci dereceden bir fonksiyonda bağımsız değişkendeki değişime bağlı olarak görüntü değerlerinde ortaya çıkan değişim fonksiyon üzerinde yapılan cebirsel işlemler yardımıyla incelenebildiği için sitte fonksiyonlar ve değişim nesneleri fonksiyonel teknik ile ilişkilendirilmiştir. Bu durumda global sitte yer alan tekniklerin, çalışma alanında karşılaşılan problem türlerinde devreye girerek temel nesnelerin anlamlandırılmasına katkı sağladığı görülmektedir.

Global sit taslağının 3. sütununda yer alan ögeler farklı tekniklerin kullanılmasına bağlı olarak ihtiyaç duyulan kavramlardan oluşmaktadır. 3. sütunda yer alan kavramlar arasında ortaya çıkan ekolojik ilişkiler, bu kavramların farklı hiyerarşik seviyelere göre kategorize edilebileceğini göstermektedir. Örneğin, ikinci dereceden bir fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ikili ilişkiler fonksiyon grafiği yardımıyla incelenirken, koordinat sistemine çizilen parabol grafiğinden yararlanılır. Parabollerin birer eğri oldukları düşünüldüğünde parabol nesnesinin gerisinde eğri nesnesinin olduğu anlaşılır. Bu kavramların gerisinde ise konikler yer alır. Erdoğan bu bağlamda sit diyagramındaki giderek genişleyen kavram ilişkilerinin, bir sonraki kavram bir öncekine anlam verir ve bir önceki kavram bir sonrakinin özel bir durumu/bileşenidir ($a \to b : b$ nesnesi a nesnesine anlam verir veya b, a'nın özel bir halidir) şeklinde yorumlanabileceğini belirtmektedir.

Tez çalışmasında oluşturulan analiz global sitinde, Erdoğan'ın global sit taslağının 3.sütununa karşılık gelen kategoride bulunan nesnelerden bazılarına *kritik nesne* adı verilmiştir. Bu şekilde bir adlandırmaya ihtiyaç duyulmasının nedeni komşuluk, tanımsızlık, belirsizlik, sonsuzluk gibi bazı nesnelerin gerek tarihsel gerek epistemolojik gerekse didaktik açıdan analiz çalışma alanı için kritik bir önem taşıyor olmalarıdır. Sonsuz küçük adı verilen kavramın yüzyıllar boyunca formel olarak tanımlanamamış olması ve buna bağlı olarak türev kavramının tanımının 17. yüzyıla kadar ertelenmiş olması sonsuzluk ve komşuluk kavramlarının analiz çalışma alanı için tarihsel açıdan ne denli kritik olduklarını göstermektedir. Sonsuzluk ve belirsizlik nesnelerinin limit alma işlemlerinde çarpanlara ayırma, paranteze alma veya sadeleştirme yapma gibi stratejilerin uygulanmasına neden olmaları bu nesnelerin epistemolojik açıdan kritik bir öneme sahip olduklarını göstermektedir. Öğrencilerin tanımsızlık, belirsizlik, diferansiyel, sonsuzluk gibi kavramlar ile analiz konularını ilişkilendirmede güçlük yaşıyor olmaları bu nesnelerin didaktik açıdan kritik bir öneme sahip olduklarını göstermektedir. Analiz konularının öğretiminde ekolojik olarak önemli yer tutan nesnelerin vurgulanması amacıyla çalışmada bu nesneler için kritik nesne tanımlamasının yapılması uygun görülmüştür.

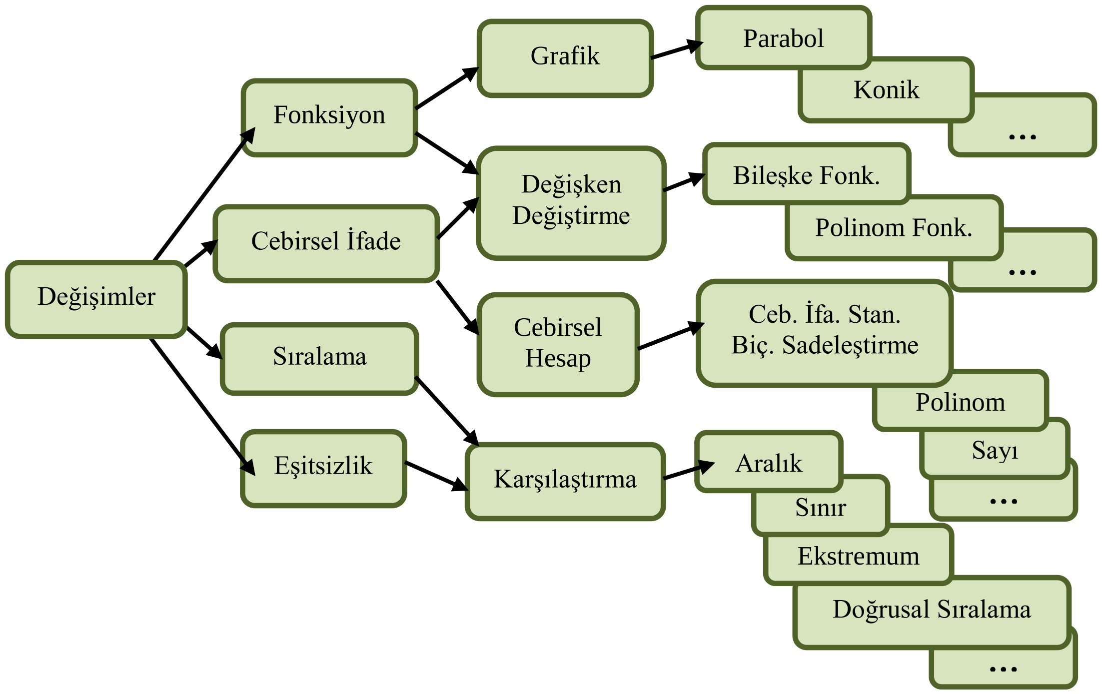
Global sit taslağının son sütununda, 3. sütunda yer alan kavramların gerisinde yer alan teoriler ve çalışma alanları yer almaktadır. Örneğin, cebirsel-fonksiyonel sit taslağının (Bkz. Şekil 1.3) kavramlar kategorisinde yer alan konik nesnesinin gerisinde matematiğin cebirsel çeşitlilik teorisi bulunur. Benzer şekilde yaklaşma nesnesinin, analiz çalışma alanı içerisinde yer alan limit, diferansiyel, türev gibi kavramlar ile ekolojik ilişkileri vardır.

1.2.2.2. ***Lokal sit kavramı ve lokal sitin inşası***

Yukarıda global sit bir çalışma alanının siti olarak inşa edilmiştir. Sit tanımı dikkatli incelendiğinde "bir nesnenin siti" kavramının ön plana çıktığı görülür. Global sit bu nesnenin ait olduğu çalışma alanının temel bileşenleri hakkında bilgiler içermekte, bu çalışma alanını bir bütün olarak değerlendirmekte ve çok yönlü çıkarımlarda bulunma imkanı tanımaktadır. Global sitin içerisinde yer alan ve bu sitin ilişkilerinin, verilen bir nesne etrafında hiyerarşik olarak yer aldığı parçası olan sit, *nesnenin siti* veya *lokal sit* olarak isimlendirilmektedir.

Şekil 1.4'te Erdoğan (2006)'ın reel sayılar kümesinde tanımlı olan bir fonksiyonun monotonluğunu inceleme görev tipi için "değişimler'' kavramı etrafında hazırlamış olduğu lokal sit örneğine yer verilmiştir. Lokal sitte $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$ *fonksiyonunun* $[4, \infty)$ *aralığında monotonluğu inceleme* görevinin gerçekleştirilmesine bağlı olarak hangi kavramların devreye girdiği ve bu kavramlar arasında hangi hiyerarşik ilişkilerin ortaya çıktığı görülmektedir. Bu görevin temelinde fonksiyonlardaki değişimin incelenmesi yer almaktadır. Erdoğan bu durumu dikkate alarak lokal siti değişimler nesnesi etrafında inşa etmiştir. Lokal sit temel nesneler, ilk seviye kavramları ve üst seviye kavramları olmak üzere üç ana bölümden oluşmaktadır. Görevde ikinci dereceden bir polinom fonksiyonun monotonluğu incelendiği için *fonksiyon* ve *cebirsel ifade* nesneleri lokal sitin temel nesneleri olarak belirlenmiştir. Fonksiyondaki değişim incelenirken değişkenlerin almış olduğu değerler arasında küçüklük - büyüklük ilişkisi kurulduğu için lokal sitin diğer iki temel nesnesi *sıralama* ve *eşitsizlik* olarak belirlenmiştir.

Görev Tipi	Reel sayılar kümesinde tanımlı olan bir fonksiyonun monotonluğunu inceleme		
Görev	$f(x)=4-(2x-8)^2$ fonksiyonunun $[4,\ \infty)$ aralığında monotonluğunu inceleme		
Lokal Siti Oluşturulan Nesne	**Temel Nesneler**	**Kavramlar (Seviye 1)**	**Kavramlar (Seviye 2, 3, …)**



Şekil 1.4. *İkinci dereceden bir fonksiyonun monotonluğunun incelenmesine yönelik bir görev için değişimler nesnesi etrafında oluşturulan lokal sit (Erdoğan, 2006)*

Şekil 1.4 incelendiğinde grafik, değişken değiştirme, cebirsel hesap ve karşılaştırma nesnelerinin 1.seviye kavramları olarak belirlendiği görülür. $f(x)$ fonksiyonun monotonluğu koordinat düzlemine çizilen grafiğinden yararlanılarak incelenebileceği için lokal sitte fonksiyon nesnesi ile grafik nesnesi ilişkilendirilmiştir. Monotonluğunun incelenmesi amacıyla bir fonksiyonun grafiği çizilirken $y=x$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$ gibi referans kabul edilen fonksiyonların grafiklerinden yararlanılır. Bu teknikte, referans fonksiyonların değişkenleri değiştirilerek grafiği çizilecek fonksiyonun cebirsel ifadesi elde edilir. Değişken değişimine bağlı olarak referans fonksiyonların grafiklerinde öteleme, yansıma, dönme gibi dönüşüm hareketleri yapılarak monotonluğu incelenecek fonksiyonun grafiği de elde edilmiş olur. Örneğin, $y=\dfrac{1}{x-3}+2$ fonksiyonu $y=\dfrac{1}{x}$ referans fonksiyonunda bağımsız değişken yerine $x-3$ yazılması ve bağımlı değişkene 2 eklenmesi sonucunda elde edilir. Referans fonksiyonda yapılan bu değişiklikler fonksiyon grafiğinin 3 birim sağa ve 2 birim yukarıya ötelenmesine neden olur. Başka bir ifadeyle $y=\dfrac{1}{x}$ referans fonksiyonu grafiğinin 3 birim sağa ve 2 birim yukarıya ötelenmesi sonucunda $y=\dfrac{1}{x-3}+2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir. Benzer şekilde Şekil 1.4'te verilen $f(x)=4-(2x-8)^2$ fonksiyonu $y=x^2$ referans fonksiyonuna değişken değiştirme işlemleri yapılarak elde edilebilir. Böylelikle $f(x)$ fonksiyonunun, $y=x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanılarak çizilebilmesine olanak sağlanır. Erdoğan bu durumu dikkate alarak lokal sit diyagramında fonksiyon ve cebirsel ifade nesneleri ile değişken değiştirme nesnesini ilişkilendirmiştir.

Erdoğan, $f(x)=4-(2x-8)^2$ fonksiyonunun $[4,\infty)$aralığındaki monotonluğunun eşitsizlik ve sıralama nesneleri yardımıyla incelendiği durumda bağımsız değişkenin aldığı değerlere bağlı olarak bağımlı değişkende oluşan değişimin karşılaştırıldığına işaret ederek lokal sit diyagramında karşılaştırma nesnesine yer vermiş ve bu nesneyi sıralama ve eşitsizlik nesneleri ile ilişkilendirmiştir. Buna göre, $x_1\in[4,\infty)$, $x_2\in[4,\infty)$ ve $x_1\prec x_2$ olacak şekilde seçilen x_1 ve x_2 değerleri için;

$$\begin{gathered}
2x_1\prec 2x_2\\
2x_1-8\prec 2x_2-8\\
(2x_1-8)^2\prec(2x_2-8)^2\\
-(2x_1-8)^2\succ-(2x_2-8)^2\\
4-(2x_1-8)^2\succ 4-(2x_2-8)^2\\
f(x_1)\succ f(x_2)
\end{gathered}\tag{1.1}$$

elde edilir. Bu sonuç her $x_1\prec x_2$ değeri için $f(x_1)\succ f(x_2)$ olacak şekilde görüntülerin karşılaştırılabileceğini ve buna bağlı olarak da $f(x)$ fonksiyonunun $[4, \infty)$ aralığında monoton azalan olacağını gösterir. (1.1) eşitsizliklerinin oluşturulması, cebirsel ifadelerde toplama, çıkarma, çarpma işlemleri yapma gibi cebirsel hesaplar yapılmasını gerektirdiği için lokal sitte cebirsel hesap bileşenine de yer verilmiş ve bu bileşen cebirsel ifadeler nesnesi ile ilişkilendirilmiştir.

Lokal sitin son sütununda, 1.seviyede yer alan kavramların ekolojik görevler üstlenmelerine bağlı olarak ortaya çıkan kavramlara hiyerarşik bir düzende yer verilmiştir. Örneğin, $f(x)$ fonksiyonu ikinci dereceden bir fonksiyon olduğu için bu fonksiyonun grafiği bir paraboldür. Bu durumda grafik nesnesi ile parabol nesnesi arasında ekolojik ilişki kurulmuş olur. Analitik geometride paraboller konikler sınıfında yer aldıkları için parabol nesnesinin gerisinde konik nesnesi yer alır. Benzer şekilde eşitsizlik ve sıralama nesneleri yardımıyla $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler karşılaştırılırken, bağımsız değişkenlerin belirli bir aralıkta seçilmesine bağlı olarak aralık nesnesine ihtiyaç duyulur. Aralık nesnesinin gerisinde ise sınır, ekstremum, sıralama gibi kavramlar yer alır.

Silvy (2010) tez çalışmasında lokal sit kavramını temel almış ve lise bitirme (bacalaureat) sınavlarında sorulan soruların lokal sitlerini incelemiştir. Bu bağlamda Silvy bir matematiksel problemin gerisindeki lokal sitin kavramlarının belirlenmesi için "substrat" adını verdiği öğretimsel işaretlerin (problemin ifadesinde belirli bir amaç doğrultusunda yer alan matematiksel kavramlar, vurgular, yönlendirmeler) önemini ortaya koymuş ve bu bağlamda analizler gerçekleştirmiştir. Bu çalışmada, gerek seçilen çalışma alanı olan analizden kaynaklı, gerekse öğretim programları ve ders kitaplarının yaklaşımından kaynaklı olarak öğretimsel göstergelerin aynı rolü üstlenmediği düşünüldüğünden bu kavrama yer verilememiştir.

1.2.2.3. *Prakseoloji kavramı ve sit ile ilişkisi*

Çalışmada, lokal sitlerde yer alacak nesneler arasındaki ekolojik ilişkilerin belirlenmesi sürecinde prakseolojik analizlerden yararlanılmıştır. Prakseoloji, *praksis* ve *logos* kelimelerinden türetilmiş Yunanca bir kelimedir (Chevallard, 2006). Praksis kelimesi; uygulama, eylem, pratiğin önemi; logos kelimesi ise akıl, düşünme, söz, oran, ölçü, teori anlamlarında kullanılır. Prakseoloji kelimesi kısaca eylem analizi olarak tanımlanabilir (Yavuz, 2009). Burada *eylem* kelimesinden, insanların yapmış oldukları bütün davranışlar kastedilmektedir. Kişinin dişlerini fırçalaması, yolda yürümesi gibi günlük eylemleri veya bir matematik problemini çözmek için yerine getirmesi gereken eylemler bu kapsamda değerlendirilebilir. Prakseoloji bilgi için kullanıldığında bireylerin herhangi bir kurum içerisinde gerçekleştirdikleri eylemleri veya kurum içerisinde yapmakla yükümlü oldukları faaliyetleri tanımlar. Bilimsel bir bilginin prakseolojisi, bilgi elde edilirken gerçekleştirilen eylemlerin analizini ifade eder (Chevallard, 2006).

Prakseolojinin dört bileşeni vardır. Bunlar *görev tipi, teknik, teknoloji* ve *teori*dir. Bu bileşenlerden görev tipi ve teknik, prakseolojik yaklaşımın pratik (praksis) bloğunu oluştururken; teknoloji ve teori bileşenleri teorik (logos) bloğunu oluşturur. Görev tipi, gerçekleştirilmesi amaçlanan eylemin ifade edildiği, teknik ise görev tipinin nasıl gerçekleştirileceğinin açıklandığı bileşenlerdir (Chevallard'tan aktaran Erdoğan, Tanışlı ve Fındık, 2015). Örneğin ''Bir fonksiyonun belirsiz olduğu bir noktada limitini alma'' ifadesi bir görev tipini; limitin, cebirsel işlemler yapılarak belirsizliğin kaldırılması sonucunda bulunması ise bu görev tipini gerçekleştirmek için uygulanan tekniği ifade eder. Fonksiyon grafiğinden yararlanarak belirsizliğin olduğu noktada limit değerinin belirlenmesi aynı görev tipinin gerçekleştirilmesi için uygulanabilecek farklı bir tekniktir.

Teknoloji ve teori bileşenleri, pratik blokta yapılan eylemlerin açıklanmasında veya anlamlandırılmasında kullanılır (Arslan, 2016). Bu bileşenlerden teknoloji, kullanılan tekniğin sorgulanmasını sağlar. Bir tekniğin kullanımına bağlı olarak gerçekleştirilen işlemlerin nedenleri teknoloji bileşeninde açıklanır (Chevallard'tan aktaran Erdoğan, Tanışlı ve Fındık, 2015). Teknoloji, bir görev tipinin doğru ve tutarlı bir biçimde gerçekleştirilerek istenilen sonucun elde edildiğini gösterir. Örneğin, ''İki ondalık kesrin toplamını bulma'' görev tipi için uygulanabilecek tekniklerden birisi ondalık kesirleri virgülleri alt alta gelecek biçimde yazarak toplamadır. Bu tekniğin teknolojisinde, ondalık kesirlerin neden alt alta gelecek biçimde yazıldığı, elde edilen toplamda virgülün neden toplanan ondalık kesirlerdeki virgüller ile alt alta gelecek biçimde yerleştirildiği gibi sorulara yanıtlar aranır. Bu durumda teknolojinin, tekniğin ispatı niteliğinde olduğu ve tekniğin anlaşılmasına katkı sağladığı görülür (Chevallard'tan aktaran Yavuz, 2009). Teorik bloğun teori bileşeni, teknoloji bileşeninin açıklanıp doğrulandığı kısımdır. Teknoloji bileşeninde yer verilen ifadeler veya yapılan cebirsel işlemler, teori bileşeninde matematiğin temellerine dayandırılarak açıklanır (Chevallard'tan aktaran Erdoğan, Tanışlı ve Fındık, 2015).

Prakseolojik analizler lokal sitlerin oluşturulması sürecinde kullanışlı bir araç olarak görülmektedir. Prakseolojik analizler sayesinde belirlenen görev tipleri için kullanılabilecek teknikler ve bu teknikleri destekleyen kavramlar (teknolojiler) ortaya konulabilmekte ve lokal sitlerin yapısı daha somut bir şekilde ortaya konulabilmektedir.

1.2.3. Ekolojik analiz modeli olarak matematiksel sit

Türkçe sözlüğünde[2] ekoloji, ''Canlıların hem kendi aralarındaki hem de çevreleriyle olan ilişkilerini tek tek veya birlikte inceleyen bilim dalı"; ekosistem ise "Belirli bir alanda bulunan canlılar ile bunları saran çevrenin karşılıklı ilişkileri ile meydana gelen ve süreklilik gösteren ekolojik sistem" olarak tanımlanmaktadır. Ekolojik analiz modelinde de eğitim sistemi bir ekosistem gibi düşünülerek öğretilecek bilgiler arasındaki ekolojik ilişkilere odaklanılır (Rajoson, 1988; Chevallard vd., 1994; Chevallard, 2002). Bu modelde canlıların kendi aralarında kurdukları yaşam ilişkilerine benzer şekilde bilgiler arasında yaşam ilişkileri kurulmaktadır. Ekolojik analiz modelinde bilgiler ekolojik düzenin birer parçasıdır. Her bilgi yer aldığı ekosistemde varlığını sürdürebilmek için başka bilgilerden beslenerek bu bilgiler üzerine inşa edilmelidir. Benzer şekilde, ekosistemin büyümesi ve daha güçlü bir yapıya sahip olabilmesi için ekosistemdeki her bilginin başka bilgileri besleyerek yeni bilgilerin oluşmasına katkı sağlaması gerekir (Rajoson, 1988; Chevallard, 2002). Daha net bir ifadeyle bir matematik bilgisinin (herhangi bir konu, kavram veya yöntem bilgisi) ders programlarına uyum içinde girerek öğretmen tarafından gerekliliği sorgulanmadan öğretilmesi için bu bilginin oluşturulan ekosistemin bir parçası olması, besleme-beslenme fonksiyonlarının açık ve anlaşılır olması gerekir (Erdoğan, Eşmen ve Fındık, 2015).

Ekolojik analiz modelinde besleme-beslenme prensibinin daha iyi anlaşılması için *habitat* ve *ekolojik niş* kavramları kullanılmaktadır. Bilginin ekolojisinde habitat bir nesnenin (bilgi, kavram v.b.) bulunabildiği farklı yerler, ekolojik niş ise nesnenin bulunduğu habitattaki görevleri veya yaşamını sürdürebilme şekli olarak nitelendirilir. Her bilgi varlığını sürdürebilmek için kendisi ile kavramsal bütünlük sağlayabilecek bir ekolojik çevreye ihtiyaç duyar (Rajoson, 1988). Ekolojik analizde bilginin bulunduğu çevrenin yeterliliği ve bulunduğu habitat ile uyumu sorgulanır. Bu çerçevede cevap

[2] www.tdk.gov.tr

aranan sorulardan bazıları şunlardır: Hangi bilgi, niçin var? Hangi bilgi, niçin yok? Hangi bilgi, hangi şartlar altında var olabilirdi? Hangi bilgi süreklilik arz etmekte veya geçerliliğini yitirmektedir?

MS modelinde global sitler oluşturulurken bir çalışma alanını oluşturan kavramlar ve bu kavramlar arasındaki hiyerarşik ilişkiler belirlenmektedir. Lokal sitler ise global sitin içerisinde yer alan bir nesne etrafında hiyerarşize edilmiş sitlerdir. MS modelinde bir çalışma alanının global siti bir ekosistem, çalışma alanını oluşturan kavramlar ise bu ekosistemin birer ögesi olarak değerlendirilebilir. MS modelindeki lokal sitler ise ekosistemde yer alan ögelerin yaşamlarını sürdürebilecekleri habitatlar olarak ifade edilebilir. Bir nesnenin bulunduğu global sit veya lokal sitlerdeki görevlerini diğer kavramlarla olan besleme-beslenme ilişkileri belirler. Ekolojik analiz modeli ile MS modeli arasında kurulabilen bu ilişkiler MS modelinin aynı zamanda bir ekolojik analiz modeli olarak nitelendirilebileceğini göstermektedir.

MS modelinde, global sit ve lokal sitlerden yararlanılarak bir çalışma alanını oluşturan kavramların öğretim programındaki yerleri ve diğer kavramlar ile ilişkileri sorgulanabilmektedir. Bu bağlamda öğretim programının yaklaşımı göz önünde tutularak; programda hangi kavramlar arasında ekolojik kopuklukların olduğu, bu kopukların giderilebilmesi için hangi kavramlara ihtiyaç duyulduğu ve bu kavramlara hangi konu başlıkları altında yer verilmesinin ekolojik olarak daha uygun olacağı, kavramların programdaki yerlerinin değiştirilmesinin ne tür ekolojik katkılar sunacağı gibi sorulara yanıtlar aranabilir. Böylelikle MS modeli kullanılarak öğretim programının ilgili çalışma alanı kapsamında kendi yaklaşımına uygun bir biçimde didaktik yapılandırılmasına olanak sağlanabilmektedir.

1.3. Araştırmanın Amacı ve Araştırma Soruları

Bu çalışmanın amacı, analiz konularının öğretimindeki ekolojik ilişkileri MS kavramı bağlamında ortaya koyarak bu ilişkilerin öğretimsel açıdan değerlendirilmesi ve sit kavramı aracılığıyla didaktik yapılandırılmasıdır. Çalışmada 2013 yılında yürürlüğe giren lise matematik öğretim programı temel alınmış ve MS'ler bu programın hedefleri ve beklentileri doğrultusunda oluşturulmuştur.

Çalışmada şu sorulara yanıtlar aranmıştır:

- 2013 yılı lise matematik öğretim programının referans alındığı analiz global siti hangi konu ve kavram ilişkilerini barındırmaktadır?

- Matematik öğretim programında ve ders kitaplarında, türev konusu kapsamında analiz sitinin hangi kavram ve ilişkilerine ne şekilde yer verilmiştir?
- Matematik öğretim programında ve ders kitaplarında yer verilen kavram ve ilişkilerle MS'deki kavram ve ilişkiler arasındaki farklılıklar analiz öğretimi açısından hangi ekolojik sorunları doğurmaktadır?

1.4. Araştırmanın Önemi

Matematik öğretim programı bireylere yaşamlarında ihtiyaç duyabilecekleri matematiksel bilgileri ve bu bilgileri yaşamlarının farklı alanlarında kullanabilmelerini sağlayacak temel becerileri kazandırmayı hedeflemektedir (MEB, 2013). Bu hedefe ulaşabilmek için öğrencilerin matematiksel kavramları ve bunlar arasındaki ilişkileri anlamlandırabilme, yorumlayabilme ve yaşamlarında kullanabilme, matematiği farklı alanlarla ve disiplinlerle ilişkilendirebilme becerilerini kazanmaları gerekir (NCTM, 2000; Vale, McAndrew and Krishnan, 2011; Van de Walle, 2013). Matematik öğretim programının geliştirmeyi hedeflediği matematiksel beceri ve yeterlilikler göz önünde tutulduğunda konu ve kavramlar arasında ilişkilendirme yapılmasının öğrencilerin matematiği daha kalıcı ve anlamlı öğrenmelerine katkı sağlayacağı görülür (Mumcu, 2018). Sonsuzluk, komşuluk, tanımsızlık ve belirsizlik gibi öğrencilerin anlamlandırmada güçlük çektikleri birçok kavramın bir arada yer aldığı, konu ve kavramları arasında sıkı ardışıklık ilişkilerinin önemli bir yer tuttuğu analiz çalışma alanı için kavramsal ilişkilendirmenin önemi daha da artmaktadır. Tez çalışmasında, analiz çalışma alanının oluşumana katkı sağlayan kavramlar arasındaki ekolojik ilişkilerin MS modeli çerçevesinde incelenerek olası sorunların ortaya konulacak olması bu bakımdan büyük bir önem taşımaktadır.

MS modeli çerçevesinde oluşturulacak analiz global siti; analizin ne ile ilgilendiği ve temel araçlarının neler olduğu, analiz çalışma alanı içerisinde görev tipleri yerine getirilirken hangi tekniklere başvurulduğu, bu teknikler kullanılırken hangi kavramlara ihtiyaç duyulduğu, bu kavramlardan hangilerinin analiz çalışma alanı için ne gibi kritik önemlere sahip olduğu, kavramlar arasındaki besleme – beslenme ilişkilerinin neler olduğu gibi sorulara, tarihsel, epistemolojik ve didaktik verilerin bir arada değerlendirilmesi sonucunda, kapsamlı, detaylı ve sistematik bir yaklaşım ile yanıtlar verilmesine olanak sağlanması açısından önemli bulunmaktadır.

Çalışmada, öğretim programında yer alan kazanımlar esas alınarak limit, süreklilik ve türev konularına ilişkin görev tipleri belirlenmiş, her bir görev tipi için prakseolojik analizler yapılmış ve bu analizlerden yararlanılarak lokal sitler oluşturulmuştur. Oluşturulan lokal sitlerde yer alan ekolojik ilişkiler temel alınarak ders kitaplarındaki örneklerin çözümlerinde hangi ekolojik boşluk veya kopuklukların olduğunun belirlenmesi amaçlanmıştır. Belirlenen ekolojik sorunların lokal sitlerdeki besleme – beslenme ilişkilerine nasıl etki ettiği tartışılmıştır. Böylelikle analiz çalışma alanı kapsamında yer alan farklı görev tiplerine göre ders kitaplarındaki kavramsal ilişkilerin lokal bağlamda değerlendirilmesine olanak sağlanmıştır. Çalışma bu bağlamda, ders kitaplarının analizi için farklı bir yaklaşım sunmakta ve özgün değer taşımaktadır.

Sonuç itibariyle tez çalışması, global sit ve lokal sitler yardımı ile ortaya konulan kavramsal ilişkiler çerçevesinde öğretim programının kendi yaklaşımına uygun bir biçimde analiz edilerek ekolojik sorunların ortaya çıkarılması ve elde edilen ekolojik veriler çerçevesinde kalıcı ve anlamlı öğrenmelerin gerçekleştirilebilmesi için ders kitapları ve öğretim programının didaktik yapılandırılmasına imkan sağlanması açısından önemli bulunmaktadır.

İKİNCİ BÖLÜM

2.YÖNTEM

Çalışmada, analiz çalışma alanını oluşturan kavramların belirlenmesinde ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerin ortaya konulmasında bir ekolojik analiz modeli olarak geliştirilen MS kullanılmıştır. Analiz çalışma alanına ilişkin MS'ler oluşturulurken ve bu sitler yardımıyla ders kitapları değerlendirilirken, nitel araştırma yöntemlerinden biri olan doküman incelemesi yöntemi kullanılmıştır.

Doküman incelemesi, araştırılması hedeflenen olgu veya olgular hakkında bilgi içeren yazılı materyallerin analizi olarak tanımlanan bir nitel araştırma yöntemidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Doküman incelemesi yönteminde araştırılan konu hakkında bilgi sağlayan her türlü yazılı veya görsel materyale doküman adı verilir (Aktaş, 2014). Çalışmada global sitin oluşurulması sürecinde analiz çalışma alanına katkı sağlayan kavramlar ve bu kavramlar arasındaki ekolojik ilişkiler belirlenirken tarihsel, epistemolojik ve didaktik verilerin yer aldığı dokümanlar incelenmiştir. Lokal sitlerin oluşturulma sürecinde ise prakseolojik analizleri yapılacak görev tipleri, lise matematik öğretim programı incelenip analiz edilerek belirlenmiştir. Oluşturulan MS'lerden yararlanılarak ders kitaplarının değerlendirilmesi sürecinde de yine doküman incelemesi yöntemine başvurulmuştur.

2.1. Verilerin Toplanması ve Analiz Edilmesi

Doküman incelemesi yapılırken; üzerinde çalışılan konuya ilişkin belgelerin bulunması ve incelenmesi, elde edilen verilerden yararlanılarak belirli durum ya da görüşleri ortaya çıkaracak bir senteze varılabilmesini sağlayan düzenlemelerin yapılması önem kazanır (Karasar, 2007; Yıldırım ve Şimşek, 2016). MS modelinde global sitler tarihsel, epistemolojik ve didaktik verilerden yararlanılarak oluşturulmaktadır (Duchet and Erdoğan, 2005). Analiz global sitinin oluşturulma sürecinde tarihsel veriler, detaylı ve kapsamlı içeriğe sahip olan matematik tarihi kaynaklarından; epistemolojik veriler, matematiksel analiz kitaplarından; didaktik veriler ise matematik eğitimi alanına ilişkin, ulusal veya uluslararası literatürde kabul görmüş çalışmalardan yararlanılarak elde edilmiştir.

Tarihsel veriler üç ana kaynaktan yararlanılarak elde edilmiştir. Bu kaynaklardan ilki Cajori'nin *Matematik Tarihi* adlı kitabıdır (Cajori, 2014). Bu kitabın tercih edilmesinde etkili olan hususlardan ilki kaynakçasının zenginliğidir. Cajori bu eserini farklı ülkelerde yayımlanan çok sayıda kitap ve bilimsel makaleyi referans göstererek oluşturmuştur. Bu durum, ilgili kitapta güvenirliği yüksek verilerin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Cajori'nin, matematik tarihinde ortaya çıkan gelişmelerin nedenleri ve sonuçlarına yönelik güvenilir verileri referans gösterek değerlendirmelerde bulunması, bu eserin tercih edilmesinde etkili olan bir diğer önemli husus olmuştur. Cajori'nin yapmış olduğu değerlendirmeler, analiz çalışma alanını oluşturan kavramlar arasında besleme-beslenme ilişkileri kurulmasına katkı sağlamıştır. Böylelikle, hangi matematiksel kavramın diğer hangi kavramların gelişimine katkı sağladığının veya tarihsel süreç boyunca matematiksel kavramların açıklığa kavuşturulamamasından kaynaklanan ekolojik boşluğun hangi ekolojik sorunları da beraberinde getirdiğinin değerlendirilmesine olanak sağlanmıştır. Tarihsel verilerinden yararlanılan ikinci kaynak Dönmez tarafından kaleme alınan *Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi ''Matematiğin Öykü ve Serüveni''* adlı kitap olmuştur (Dönmez, 2002). Bu kitabın tercih edilme nedeni ilk kitap için açıklanan nedenler ile aynıdır. Çalışmada yararlanılan üçüncü tarihsel kaynak *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* adlı kitap olmuştur (Akar, 2013; Arslan ve Çelik, 2013; Aztekin, 2013; Çakıroğlu, 2013; Doğan, 2013; Narlı, 2013; Özmantar ve Bozkurt, 2013; Yavuz, 2013). Kitapta matematiksel kavramların gelişimine yönelik tarihsel bilgilerin yanı sıra, bu kavramlara ilişkin epistemolojik veriler de yer almaktadır. Bu kaynağın tercih edilmesindeki temel neden, analiz çalışma alanına ilişkin tarihsel veriler ile epistemolojik verilerin bir arada değerlendirilmesine imkan tanımasıdır. Böylelikle, epistemolojik gelişmelerin veya engellerin analiz çalışma alanının tarihsel gelişimini nasıl etkilediğinin değerlendirilmesine olanak sağlanmıştır. Bu kitaptan ayrıca epistemolojik verilerin elde edilme sürecinde de yararlanılmıştır.

Epistemolojik verilerin elde edilme sürecinde yararlanılan ana kaynak Thomas, Weir ve Hass tarafından yazılan *Thomas Kalkülüs (1.Cilt)* adlı kitap olmuştur (Thomas, Weir and Hass, 2015). Bu eserin tercih edilmesinde etkili olan nedenlerden ilki, kitapta analiz konularının değişim kavramı temelli açıklamış olmasıdır. Kitap incelendiğinde, elde edilen tarihsel verilere paralel bir biçimde, analiz konularının öğretiminde reel sayılar ve fonksiyonlardaki değişim üzerinde yoğunlaşıldığı görülmüştür. Kitapta limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarının fonksiyonlardaki değişimin incelenmesinde birer araç olarak kullanılmasına yönelik bir yaklaşımın tercih edildiği belirlenmiştir. Bu eserin tercih edilmesinde etkili olan nedenlerden bir diğeri, kitapta yer alan analiz konularına yönelik örneklerin çözümlerinde farklı yaklaşımlara bir arada yer verilmiş olmasıdır. Örnek çözümlerinde analitik, cebirsel veya nümerik gibi farklı yaklaşımlara bir arada yer veriliyor olması, analiz global sitinin (öğretim programının beklentilerine de uygun bir biçimde) nümerik, cebir ve geometri alanları arasındaki ekolojik ilişkilerin etkileşimini yansıtan zengin bir yapı oluşturacak biçimde inşa edilmesine katkı sağlamıştır. Çalışmada, analiz çalışma alanı için kritik öneme sahip olan diferansiyel, komşuluk, tamlık gibi kavramlara yönelik daha ayrıntılı epistemolojik verilerin elde edilmesi amacıyla bilimsel makalelerden de yararlanılmıştır. Analiz çalışma alanı içerisinde yer alan kavramların matematiğin diğer çalışma alanları ile olan ekolojik ilişkilerinin belirlenmesi sürecinde, lisans düzeyinde okutulan reel analiz, soyut matematik, fonksiyonel analiz gibi ders kitaplarından yararlanılmıştır.

Çalışmada didaktik verilerin elde edilme sürecinde temel kaynak olarak *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* adlı kitaptan yararlanılmıştır (Akkoç ve Kurt, 2013; Bingölbali, 2013; Özmantar, 2013; Özmantar ve Yeşildere, 2013). Bu kitabın tercih edilmesinde, öğrencilerin analiz konularına yönelik öğrenme zorluğu çektikleri ve yanılgıya sahip oldukları kavramların, birçok farklı ülkede gerçekleştirilen çok sayıda nitel çalışma referans gösterilerek belirlenmesi etkili olmuştur. Böylelikle, öğrencilerin analiz çalışma alanına yönelik kavramlarda ne tür zorluk yaşadıkları ve hangi yanılgılara sahip olduklarına yönelik güvenirliği yüksek veriler referans alınarak global sitin kritik nitelikte olan nesneleri belirlenmiştir. Çalışmada ayrıca, tanımsızlık, belirsizlik, sonsuzluk gibi analiz öğretimi için kritik ekolojik ilişkiler barındıran kavramlara yönelik daha detaylı didaktik verilerin elde edilebilmesi için ulusal veya uluslararası bilimsel dergilerde yayımlanan makalelerden de yararlanılmıştır.

Çalışmada, oluşturulan lokal sitlere göre ders kitaplarında yer alan örnek ve açıklamaların ekolojik analizleri yapılmıştır. Analiz çalışma alanında yer alan limit, süreklilik, türev ve integral konuları 12. sınıf matematik öğretim programında yer aldığı için ağırlıklı olarak bu sınıf düzeyinde okutulan ders kitapları incelenmiştir. Çalışma boyunca, etik açıdan daha uygun olacağı düşünülerek, bu ders kitaplarının isimleri AY ve BY gibi kodlama yapılarak ifade edilmiştir. AY ders kitabında analiz konularına toplam 167 sayfalık yer ayrıldığı görülmüştür. Bu bölümde türev konusuna 109, integral konusuna 58 sayfa ayrılmıştır. BY ders kitabında analiz konularına toplam 188 sayfalık yer ayrıldığı belirlenmiştir. Bu kitapta türev konusuna ayrılan sayfa sayısı 118, integral konusuna ayrılan sayfa sayısı ise 70'dir. 12. sınıf ders kitaplarında ağırlıklı olarak türev konularının bulunduğu bölümler incelenmiştir. Çalışmada, analiz global sitinde yer alan bazı kavramlara önceki sınıf düzeyinde yer verilip verilmediğinin veya hangi konu içerisinde nasıl yer verildiğinin belirlenebilmesi için 9, 10 veya 11. sınıf düzeyinde okutulan kitapların ilgili bölümleri de incelenmiştir.

MS'lerin inşasında, yararlanılacak kaynakların belirlenmesinin yanı sıra elde edilen verilerin etkili bir biçimde yorumlanması ve sentezlenmesi de büyük önem taşımaktadır. Çalışmada, analizin tarihsel gelişim sürecine ilişkin elde edilen verilerin etkili bir biçimde yorumlanabilmesi için kronolojik sıraya göre düzenlenen tarihsel gelişim tabloları oluşturulmuştur (Bkz EK-1 ve EK-2). Çalışmanın epistemolojik verileri limit, süreklilik, türev ve integral konularına ilişkin tanım, teorem ve açıklamalardan yararlanılarak elde edilmiştir. Tarihsel gelişim tabloları ve analiz konularına ilişkin epistemolojik veriler tez danışmanı ile birlikte yapılan görüşmelerde incelenerek yorumlanmıştır. Yapılan değerlendirmeler sonucunda global sitin kategorileri ve sitte yer alacak nesneler belirlenmiştir. Belirlenen nesneler, aralarındaki besleme-beslenme ilişkilerine göre sitteki uygun kategorilere yerleştirilerek global sitin inşası gerçekleştirilmiştir. Global sitin kritik nesnelerinin belirlenme sürecinde tarihsel ve epistemolojik verilerin yanı sıra didaktik verilerden de yararlanılmıştır. Bu çerçevede ilk olarak analiz konularının öğretimine ilişkin literatür taraması yapılarak çalışmada kullanılacak dokümanlar belirlenmiştir. Bu dokümanlar tez danışmanı ile birlikte incelenip analiz edilerek, öğrencilerde öğrenme güçlüklerinin ve kavram yanılgılarının oluşmasında etkili olan unsurlar ve öğretmenlerin bu öğrenme sorunlarının oluşmasında etkili olan tutumları belirlenmiştir.

Çalışmada gerek global sitin, gerekse lokal sitlerin inşası öğretim programının yaklaşımı göz önünde tutularak yapılmıştır. Sitler oluşturulmadan önce programın genel amaçları, program çerçevesinde öğrencilere kazandırılması hedeflenen matematiksel yeterlilik ve beceriler analiz konularının öğretimi temel alınarak değerlendirilmiştir. 12. sınıf matematik öğretim programında bulunan analiz konularının kazanımları ile bu kazanımlara ilişkin yönergeler göz önünde tutularak limit, süreklilik ve türev konuları için görev tipleri belirlenmiştir. Ardından belirlenen her bir görev tipi için prakseolojik analizler yapılmış ve bu analizlerden yararlanılarak lokal sitler oluşturulmuştur. Oluşturulan lokal sitlerde yer alan ekolojik ilişkiler referans alınarak ortaöğretim kurumlarında okutulan 12. sınıf ileri matematik ders kitaplarındaki örnek çözümleri ve görev tiplerine yönelik açıklamalar incelenerek ekolojik sorunlar tespit edilmiştir. Belirlenen ekolojik sorunların giderilebilmesi için öğretim programı veya ders kitabında yapılması önerilen düzenlemeler ifade edilmiştir.

2.2. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Bilimsel bir çalışmanın geçerliği kullanılan ölçme araçlarının ölçmeyi amaçladığı olguyu doğru ölçmesi ile yakından ilişkilidir. Leung (2015) nitel araştırmalarda geçerliği, araştırmada kullanılan araçların, süreçlerin ve verilerin uygunluğu olarak tanımlamıştır. Bu tanıma göre bir araştırmada elde edilen ölçüm sonuçlarının geçerli olması, uygun ölçme araçlarının kullanılmasını ve gerçeği yansıtan verilerin toplanmasını gerektirir.

Çalışmada, MS'ler ders kitaplarında limit, süreklilik ve türev konularının yer aldığı bölümlerin ekolojik değerlendirilmesinde birer ölçme aracı olarak kullanılmıştır. Bu durum, çalışmanın geçerliğinin MS'lerin oluşturulma süreci ile yakından ilişkili olduğunu göstermektedir. Çalışmanın geçerliğinin sağlanabilmesi için MS'ler oluşturulurken; veri toplama aracı olarak doğru kaynakların seçilmesi, bu kaynakların nesnel bir yaklaşım kullanılarak analiz edilmesi, yapılan analizler sonucunda doğru ve kapsamlı ekolojik ilişkilerin ortaya konulması önem taşımaktadır.

MS'lerin oluşturulmasında yararlanılan tarihsel veriler, değiştirilmesi mümkün olmayan, belirli ülke, kültür veya toplumlarda değil, bütün matematik dünyasında doğruluğu kabul görmüş verilerdir. Epistemolojik veriler, doğruluğu kesin olan teoremler, farklı kaynaklarda yaygın olarak kullanılan matematiksel tanımlar temel alınarak elde edilen bilgilerden ve bilimsel açıklamalardan oluşmaktadır. Didaktik verilerin elde edilme sürecinde ise yararlanılacak kaynakların seçimine ve verilerin farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile desteklenmiş olmasına azami ölçüde dikkat edilmiştir.

Çalışmanın geçerliğinin sağlanmasında MS'lerin inşası için uygun veri kaynaklarının seçilmiş olmasının yanı sıra bu kaynaklardan elde edilen verilerin nesnel bir yaklaşım kullanılıp doğru bir şekilde analiz edilerek ekolojik ilişkilerin ortaya konulmuş olması da önem kazanmaktadır. Çalışmada global sitin inşası sürecinde elde edilen veriler tez danışmanı ile yapılan görüşmeler sonucunda analiz edilerek sitin nesneleri belirlenmiş ve bu nesneler arasındaki ekolojik ilişkiler ortaya konulmuştur.

Ardından belirlenen ekolojik ilişkiler tez izleme komitesinin diğer üyeleri ile paylaşılmıştır. Tez izleme toplantılarında komite üyeleri yapılan analizlere ilişkin görüşlerini dile getirmişlerdir. Örneğin, global sitin inşa edilmesi sürecinde reel sayılar nesnesinin sitin temel nesnesi olarak kabul edilip edilmeyeceği tez izleme komite toplantısında tartışılmıştır. Toplantıda epistemolojik veriler değerlendirilerek reel sayılar nesnesine, global sitin temel nesneleri kategorisinde yer verilmemesi uygun görülmüştür. Benzer şekilde, komşuluk ve yakınsaklık nesnelerinden hangisinin diğerini ekolojik olarak beslediği tez izleme toplantısında tartışılmıştır. Komite üyeleri epistemolojik verilerden yararlanarak, yakınsaklık nesnesinin, komşuluk nesnesinin özel bir aralık olmasına katkı sağlayarak bu nesneyi beslediğine karar vermiştir. Tez izleme toplantılarında görüş birliğine varılamayan durumlarda uygulamalı matematik alanında görev yapan öğretim üyelerinin görüşlerine başvurulmuştur. Global sit tamamlandıktan sonra bu öğretim üyeleri ile tekrar irtibata geçilerek siti bir bütün olarak değerlendirmeleri sağlanmış, elde edilen dönütlerden hareketle oluşturulan sitte gerekli görülen değişiklikler yapılmıştır.

Analiz global siti oluşturulurken, sitin anlaşılır ve sade olmasına özen gösterilmiştir. Bu nedenle ekolojik görevleri hemen herkesçe bilinen, analiz çalışma alanı için özel bir anlam ifade etmeyen veya yoksunluğunun oluşturduğu ekolojik boşluk sitte yer alan diğer nesnelerin devreye girmesi ile kapatılabilen bazı nesnelere global sitte yer verilmemiştir (Örneğin, türev temel aracına ilişkin bazı görev tiplerinde teğet doğrusunun eğimi belirlenirken devreye giren açı nesnesinin yoksunluğundan ortaya çıkan ekolojik boşluk, diferansiyel ve oran nesnelerin devreye girmesi ile kapatılabildiği için sitte bu nesneye yer verilmemiştir). Global sitte yer almasına gerek duyulmayan nesneler tez yazarı, tez danışması ve tez izleme komitesi üyelerinin ortak kararlarına göre belirlenmiştir.

Bilimsel araştırmalarda iç geçerlik ve dış geçerlik olmak üzere iki çeşit geçerlikten bahsedilebilir. İç geçerlik, araştırma süreci boyunca elde edilen bulguların, gerçeklerin ortaya konulması bağlamındaki yeterliği olarak tanımlanabilir (Creswell, 2012). İç geçerliğin sağlanabilmesi için araştırma bulgularının kendi içinde tutarlı, anlamlı ve gerçekçi olması; çalışma kapsamında elde edilen bulguların teyit edilmiş olması; açık olmayan olay veya bulguların belirlenmiş olması gerekir. MS'lerin oluşturulma süreci iç geçerliğin sağlanması açısından kritik bir öneme sahiptir. Lokal sitler analiz konuları kapsamında belirlenen farklı görev tipleri için yapılan prakseolojik analizler yardımıyla global sitten kesitlenerek oluşturulmuştur. Bu durumda, ders kitaplarının ekolojik açıdan değerlendirilmesi sürecinde lokal sitlerin amacına uygun bir biçimde kullanılabilmesi, global sitin gerekli ekolojik ilişkileri içerecek şekilde kapsamlı olmasını ve prakseolojik analizlerin öğretim programına uyumlu bir şekilde yapılmasını gerektirmektedir. Global sitin oluşturulması süreci daha önce ayrıntılı bir şekilde açıklandığı için burada prakseolojik analizlerin yapılması sürecinde geçerliğin arttırılması için yapılan çalışmalar üzerinde durulması yeterli olacaktır.

Tez çalışmasında prakseolojik analizlerin öğretim programının yaklaşım ve beklentilerine uygun bir biçimde yapılabilmesi için analizleri yapılacak görev tipleri programda yer alan kazanım ve yönergelere göre belirlenmiştir. Her bir görev tipi için prakseolojik analizlerin öğretim programının yaklaşımına uygun bir şekilde yapılmasına özen gösterilmiştir. Prakseolojik analizlerin öğretim programı göz önünde tutularak yapılmış olması, bu analizlere bağlı olarak oluşturulan lokal sitlerin amacına uygun bir biçimde hazırlanmasına imkan sağlamıştır. Böylelikle, ölçme amacına uygun hazırlanan lokal sitler yardımıyla ders kitaplarının ekolojik analizleri gerçekleştirilerek tutarlı ve anlamlı verilerin elde edilmesi sağlanmıştır.

Dış geçerlilik ise, araştırma sonuçlarının genellenebilirliğine ilişkin bir durumdur. Buna göre, bir çalışmanın sonucunda elde edilen veriler benzer ortam veya durumlarda kullanılabilecek şekilde genellenebiliyor ise bu durumda yapılan araştırmada dış geçerliğin sağlandığı söylenebilir (Creswell, 2012). Tez çalışmasında oluşturulan analiz global siti ve lokal sitler öğretim programının yapılandırılması ve ders kitaplarının değerlendirilmesi amacıyla kullanılmıştır. Oluşturulan matematiksel sitler bu amaçların yanı sıra, ders içi öğretim faaliyetlerinin planlanması veya değerlendirilmesi, öğrenciler için otonom faaliyetlerin planlanması veya bu faaliyetlerin değerlendirilmesi, öğrenci veya öğretmen davranışlarının değerlendirilmesi gibi farklı amaçlar için de kullanılabilecek bir araçtır. Oluşturulan sitlerin farklı didaktik amaçlar için kullanılabilecek nitelikte olması çalışmanın dış geçerliğinin arttırılmasını sağlamıştır.

Bilimsel araştırmalarda güvenirlik kısaca araştırmada yapılan ölçümlerin tutarlılığı olarak tanımlanır (Fraenkel and Wallen, 2000; Merriam, 2013). Başka bir ifadeyle güvenirlik, bilimsel çalışmada kullanılan ölçeğin tutarlı olarak aynı şeyi ölçüp ölçmediği ile yakından ilgilidir (Öncü, 1994). Nitel araştırmalarda tutarlılığın sağlanabilmesi için araştırmacıya bağlı hata ve yanlılığın araştırma bulgularını etkilemeyecek ölçüye indirgenmesi gerekir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Çalışmada limit, süreklilik ve türev konularına ilişkin işlem tipleri için oluşturulan lokal sitler, ders kitaplarından seçilen örneklerin ekolojik olarak değerlendirilmesinde birer ölçek olarak kullanılmışlardır. Bu durumda çalışmanın güvenirliğinin arttırılmasında, ekolojik analizi yapılacak örneklerin seçilmesi ve bu örneklerin değerlendirilme sürecinde lokal sitlerin araştırmacıya bağlı hata ve yanlılıktan uzak bir şekilde kullanılması önem kazanır.

Matematik ders kitapları incelendiğinde, aynı görev tipine yönelik örneklerin çözümlerinde kavramlar arasındaki ekolojik ilişkilerin zenginliği açısından belirgin farklılıkların olduğu görülmüştür. Aynı görev tipi ile ilgili ilk örneklerin çözümlerinde genellikle birden fazla çözüm tekniği bir arada kullanılıp detaylı açıklamalara yer verilirken, ilerleyen örneklerin çözümlerinde daha az tekniğe yer verildiği ve açıklamaların daha kısa tutulduğu belirlenmiştir. Çalışmanın güvenirliğinin arttırılması amacıyla ders kitaplarında yer alan aynı görev tipi ile ilgili örneklerlerden daha detaylı açıklamaların yer aldığı ilk örneklerin seçilerek oluşturulan lokal site göre değerlendirilmesine özen gösterilmiştir. Ders kitaplarından seçilen örnekler her bir görev tipi için özel olarak oluşturulan lokal sitlerden yararlanılarak değerlendirilmiştir. İncelenen her bir örnek için tez yazarının yapmış olduğu ekolojik analizler önce tez danışmanı tarafından gözden geçirilmiş, ardından tez izleme komitesi üyeleri tarafından incelenmiştir. Araştırmacının elde ettiği veriler tez danışmanı ve komite üyelerinin görüşleri alındıktan sonra çalışma metnine dahil edilmiştir. Böylelikle yazarın çalışma bulgularına yansıyabilecek olası hataları ve subjektif değerlendirmeleri en aza indirilerek güvenirliği yüksek verilerin elde edilmesi sağlanmıştır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. LİSE MATEMATİK ÖĞRETİM PROGRAMININ ANALİZ KONULARININ ÖĞRETİMİ AÇISINDAN DEĞERLENDİRİLMESİ

Çalışmanın bu bölümünde analiz global sitinin öğretim programının amaç, beklenti ve sınırlılıklarına uygun bir yaklaşımla oluşturulabilmesi için lise matematik öğretim programı, analiz konularının öğretimi açısından değerlendirilmiştir. Bu kapsamda, öğretim programının genel amaçları, programın öğrencilere kazandırmayı hedeflediği matematiksel yeterlilik ve beceriler, 12. sınıf lise matematik öğretim programının uygulanmasına ilişkin açıklamalar incelenerek öğretim programında analiz konularının öğretimi için nasıl bir yaklaşımın benimsendiği araştırılmıştır.

3.1. Programın Genel Amaçları

Öğretim programında; öğrencilerin kişisel, sosyal ve mesleki hayata hazırlanmasının ve yüksek öğrenimde gerekli olan temel matematiksel bilgi ve becerilerle donatılmasının hedeflendiği belirtilerek programının dört temel amacı sıralanmıştır. Buna göre matematik öğretim programı öğrencilerin; problem çözme becerisi geliştirmelerini, matematiksel düşünme becerisi kazanmalarını, matematiğin has dilini ve terminolojisini doğru ve etkili bir şekilde kullanabilmelerini ve matematiğe ve matematik öğrenimine değer vermelerini hedeflemektedir (MEB, 2013).

Öğretim programında, öğrencilerde matematiksel düşünme gücünün geliştirilmesi amacıyla, işlemsel ve bilgi odaklı matematik öğretimi yerine, işlemsel ve kavramsal bilginin dengeli olduğu bir yaklaşımın esas alındığı belirtilmiştir. Bu yaklaşım çerçevesinde, öğrencilerin informel bir durumla karşılaştırılmalarının ve bu informel durumdan formel bir matematiksel yapıya ulaştırılmalarının hedeflendiği ifade edilmiştir. Öğretim programında matematik öğrenmenin aktif bir süreç olduğu belirtilerek, öğrencilere araştırma yapma, matematiksel ilişkileri keşfetme ve ispatlama, modelleme ve problem çözme olanakları sunulması gerektiği ifade edilmiştir. Bütün bu beklentiler çerçevesinde benimsenen genel öğrenme döngüsü: ‘‘Problem, keşfetme, hipotez kurma, doğrulama, genelleme, çıkarım’’ olarak belirtilmiştir. Öğretim programında öğrencilerin bilgilerini yapılandırabilmeleri, yapılandırılmış bilgileri yeni durumlara transfer edebilmeleri ve sentez yapabilmelerinin önemsendiği belirtilmiştir. (MEB, 2013). Bu açıklamalardan hareketle, lise matematik öğretim programı ile öğrencilere matematiksel kavram ve özellikleri gerçek yaşam durumları ile ilişkilendirerek keşfetme olanağının sunulmasının, öğrencilerde modelleme ve problem çözme gibi üst düzey bilişsel becerilerin geliştirilmesinin, matematiksel bilginin oluşturulmasında veya oluşturulan matematiksel bilginin kullanılmasında farklı disiplinlerle ilişkilendirme yapılmasının hedeflendiği görülmektedir.

3.2. Programın Öğrencilere Kazandırmayı Hedeflediği Matematiksel Yeterlilik ve Beceriler

Programda öğrencilere kazandırılması hedeflenen matematiksel yeterlilik ve beceriler:

- Matematiksel modelleme ve problem çözme,
- Matematiksel süreç becerileri,
- Matematiğe ve öğrenimine değer verme,
- Psikomotor becerilerde gelişim sağlama,
- Bilgi ve iletişim teknolojilerini yerinde ve etkin kullanma

şeklinde sıralanmıştır. Bu yeterlilik ve beceriler ayrı başlıklar altında açıklanmıştır.

3.2.1. Matematiksel modelleme ve problem çözme

Öğretim programının bu bölümünde matematiksel modellemenin ne olduğu açıklanmış ve matematiksel modellemenin matematik öğretimindeki önemi üzerinde durulmuştur. Öğrencilerde hem modelleme, hem de problem çözme becerilerinin geliştirilebilmesi için problem çözmeye dayalı öğrenme ortamlarının tasarlanmasına büyük önem verildiği ifade edilmiştir. Öğrenme ve öğretme sürecinde kullanılacak problemlerin mümkün olduğunca öğrencilerin günlük hayatında gereksinim duyduğu/duyabileceği konularla ilgili ilginç ve gerçekçi olması gerektiği belirtilmiştir (MEB, 2013).

Öğretim programında matematiksel modelleme ve problem çözme alt başlığında ifade edilen beklentiler göz önünde tutulduğunda; analiz konularının öğretiminde problem çözmeye dayalı öğrenme ortamları hazırlanmasının gerçek yaşam durumlarıyla ilişkilendirilmiş limit, süreklilik, türev ve integral problemlerine yer verilmesinin ve öğretim programının benimsediği genel öğrenme döngüsü ile örtüşen bir öğretim süreci takip edilmesinin uygun olacağı görülmektedir.

3.2.2. Matematiksel süreç becerileri

Öğretim programında matematiksel süreç becerileri şu şekilde sıralandırılmıştır:

- Matematiksel iletişim sağlayabilme
- Matematiksel akıl yürütme ve ispat yapabilme
- Matematiksel ilişkilendirme yapabilme

Matematiksel İletişim Sağlayabilme alt başlığında matematiksel dilin doğru ve etkili bir biçimde kullanılmasının öğrenciler için anlamlı olması ve matematiksel dile ihtiyaç hissetmeleriyle ilişkili olduğu ifade edilmiştir. Öğrencilerin matematiksel iletişim becerilerini geliştirmeleri için matematiksel dili matematiğin kendi içinde, farklı disiplinlerde ve kendi yaşantılarında uygun ve etkili bir biçimde kullanma davranışı göstermeleri gerektiği belirtilmiştir (MEB, 2013).

Analiz konuları içinde yer alan ve yaklaşmayı, değişimi, oranı, sınırları, vb. ifade eden ‘‘$\lim_{x\to a}$, $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\int f(x)dx$ ve $\int_b^a f(x)dx$ ’’ notasyonları üst düzey matematiksel dilin temel ögelerinden sayılabilir. Analiz konuları aracılığıyla iletişim becerilerinin geliştirilerek öğretim programının beklentilerinin karşılanabilmesi için bu notasyonların anlamlarının öğrenciler tarafından kavranması ve farklı disiplinlerdeki kullanımlarının yorumlanabilmesi büyük önem taşımaktadır.

Öğretim programında öğrencilerde matematiksel iletişim becerilerinin geliştirebilmesi için somut model, şekil, resim, grafik, tablo, sembol gibi farklı temsil biçimlerinin kullanılmasının gerektiği belirtilmiştir (MEB, 2013). Bu bağlamda değerlendirildiğinde analiz oldukça elverişli bir alan olarak karşımıza çıkmaktadır. Asimptot, komşuluk, sonsuzluk, belirsizlik, tanımsızlık gibi kavramlar kartezyen koordinat sisteminde çizilen fonksiyon grafikleri yardımıyla açıklanabilir. Anlık değişim hızı, yaklaşma gibi kavramlar fonksiyonda bağımsız değişkene verilen değerlere karşılık elde edilen bağımlı değişken değerlerinin yer aldığı nümerik değerler tablosu yardımı ile açıklanabilir. Çizilen fonksiyon grafikleri ile oluşturulan nümerik değer tabloları arasında güçlü ilişkiler kurularak matematiksel dilin gelişimi ve etkin kullanımı için önemli bir fırsat sağlanmış olur.

Öğretim programında *Matematiksel Akıl Yürütme ve İspat Yapabilme* alt başlığında öğrencilerde akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesine önem verildiği belirtilmiştir. Bu çerçevede öğrencilerde geliştirilmesi hedeflenen davranışlar sıralanırken: ‘‘Farklı stratejiler kullanarak kestirimlerde bulunma ve bunu mantıksal gerekçelerle savunma'' ifadesine yer verilmiştir. Bu ifade ''örneğin fonksiyonun türevinin grafiğinden fonksiyonun grafiğini tahmin etme (MEB, 2013, s.VIII).'' örneği ile desteklenmiştir. Bu açıklamalar, analiz konularının öğretiminde farklı yaklaşımlara (bir problemin cebirsel ve analitik yaklaşımla çözülmesi gibi) bir arada yer verilmesinin beklendiği ve analiz kavramlarının öğretiminin matematiksel akıl yürütme için uygun bir alan olarak görüldüğü şeklinde yorumlanabilir.

Matematiksel İlişkilendirme Yapabilme alt başlığında, öğrencilerde ilişkilendirme becerisinin geliştirilmesi için matematiksel kavram ve kuralların farklı temsil biçimleriyle gösterilmesine; farklı temsil biçimleri arasında ilişki kurulmasına ve farklı temsiller (sayısal, sembolik, geometrik/grafiksel vb.) arasında geçişler yapılmasına önem verildiği belirtilmiştir (MEB, 2013). Analiz konularının bu beklentilerin gerçekleştirilmesi için oldukça uygun bir alan olduğu söylenebilir. Örneğin, bir fonksiyonun bir noktada türevi fonksiyon grafiğine çizilen kiriş ve teğet doğruları yardımıyla grafiksel yaklaşım kullanılarak açıklanabilir. Çizilen kiriş doğrularının eğimlerinin teğet doğrusunun eğim değerine nasıl yakınsadığı eğimlerden elde edilen sayısal değerler yardımıyla incelenebilir. Teğet doğrusunun eğim değerinin daha hızlı ve etkili bir yolla bulunabilmesi için limit ve türev alma kurallarının kullanıldığı cebirsel yaklaşımdan yararlanılabilir. Buna göre analiz konularının öğretimi kapsamında değerlendirildiğinde, öğretim programında geçen sayısal temsil ifadesi ile nümerik yaklaşımın, sembolik temsil ifadesi ile cebirsel yaklaşımın, geometrik ve grafiksel temsil ifadeleri ile sentetik ve analitik yaklaşımın kullanımına işaret edildiği söylenebilir.

3.2.3. Matematiğe ve öğrenimine değer verme

Öğretim programının bu bölümünde öğrencilerin matematiği yararlı, uğraşmaya değer olarak görme, matematiğe özenle çalışma ve kişisel olarak matematiğin faydasını görme konularındaki gelişimlerine önem verilmesinin gereği üzerinde durulmuştur. Matematiğin yararlı ve uğraşmaya değer olduğunun hissettirilmesi için öğrenme-öğretme sürecinde matematiğin bugünkü medeniyetimize ve diğer disiplinlerin gelişimine katkıları ile günlük hayatımızdaki rolünü ortaya koyan etkinliklere yer verilmesi gerektiği ifade edilmiştir (MEB, 2013). Bu açıklamalara göre analiz konularının başta mühendislik olmak üzere kimya, fizik, biyoloji gibi farklı bilimlerdeki gelişimlere sağladığı katkılara değinilmesi ve anlık hız hesabında kullanımı gibi farklı uygulamalara matematik derslerinde yer verilmesi öğrencilerin analiz öğrenimine değer vermeleri için önem taşımaktadır.

Öğretim programında, matematiğin tarihsel gelişimi hakkında bilgi sahibi olmanın öğrencilerin matematiğe ve matematik öğrenmeye karşı olumlu tutum geliştirmelerine olanak sağlayabileceği belirtilmiş, matematik tarihi ile ilgili önemli ayrıntıların öğrencilerle paylaşılmasının desteklendiği ifade edilmiştir (MEB, 2013). Bu açıklamalardan, analizin tarihsel gelişimine ilişkin bilgilendirme yapılmasının öğrencilerin analiz konularını öğrenmeye karşı olumlu tutum geliştirmelerine katkı sağlayabileceği anlaşılmaktadır.

3.2.4. Psikomotor becerilerde gelişim sağlama

Matematik öğretim programında öğrencilerde; grafikleri aslına uygun olarak çizme, geometrik araç-gereçleri temel geometrik çizimlerde kullanma, bilgisayar ve iletişim teknolojilerini amacına uygun kullanabilme becerilerinin geliştirilmesinin hedeflendiği belirtilmiştir (MEB, 2013). Buna göre, analiz problemleri çözülürken analitik yaklaşım kullanılarak bilgisayar ve iletişim teknolojilerinden yararlanılması veya geometrik araç-gereçler kullanılarak fonksiyon grafiklerinin elle çizilmesi öğrencilerde psikomotor becerilerin geliştirilmesine katkı sağlayacaktır.

3.2.5. Bilgisayar ve iletişim teknolojilerinin yerinde ve etkin kullanma

Öğretim programının bu bölümünde, kullanılacak uygun teknolojik araçlar sayesinde öğrencilerin uzun hesaplamalardan kurtarılabileceği ve uzun işlemlerden kazanılan zamanın akıl yürütmede ve yaratıcı düşünmede kullanabileceği ifade edilmiştir. Öğretme-öğrenme sürecinde farklı teknoloji ve yazılımlar kullanılarak çoklu temsillere (sayısal, cebirsel, grafik) yer verildiğinde öğrencilerin farklı düşünme yollarını daha hızlı bir şekilde tecrübe ederek bunların sonuçlarını değerlendirmelerine imkan sağlanacağı ve böylece modelleme ve problem çözme sürecinin desteklenebileceği belirtilmiştir (MEB, 2013). Analiz, bilgisayar ve iletişim teknolojilerinin kullanımına uygun etkinliklerin tasarlanabileceği bir çalışma alanıdır. Örneğin, integral konusunun öğretiminde fonksiyon eğrisi ile koordinat doğrusu arasında oluşturulan kapalı bölgenin alanının alt ve üst dikdörtgenlerin sayısındaki artışa bağlı olarak gerçek alan değerine nasıl yaklaştığı, bilgisayar ve iletişim teknolojileri kullanılarak çizilen fonksiyon grafiğinden veya alan değerleri tablosundan yararlanılarak açıklanabilir. Böylelikle hesap yapma, grafik veya şekil çizmeden kazanılan zamanın öğrencilerin yaratıcı düşünmelerini destekleyecek öğretim faaliyetleri için kullanımına olanak sağlanır.

3.3. 12. Sınıf İleri Düzey Matematik Dersi Öğretim Programı

Öğretim programında, ileri düzey matematik dersi alan öğrencilerde geliştirilmesi hedeflenen beceriler ile 12. sınıf matematik öğretim programının konu ve kazanımlarının ilişkisi Şekil 3.1'den yararlanılarak açıklanmıştır.

Modelleme/Problem çözme		• Türev ve integrali modellemede ve problem çözmede kullanma • Sentetik, analitik ve vektörel yaklaşımları geometri problemlerinin çözü-münde kullanma
Matematiksel Süreç Becerileri	Akıl Yürütme	• Türev ve integralin sahip olduğu özelliklere ilişkin çıkarımlarda bulunma • Uzayda doğru ve düzlemleri inceleyerek uzamsal becerilerini geliştirme
	Matematiksel İletişim	• Türeve, integrale, vektöre, koniklere, uzay geometriye ve sıralamaya özgü terim ve sembolleri matematiksel düşünceleri ifade etmede kullanma
	İlişkilendirme	• Değişim oranı ile türevi, alan ile integrali, integral ile türevi ilişkilendirme • Analitik, sentetik ve vektörel yaklaşımlar arasındaki ilişkileri görme • Teorik olasılık ile deneysel olasılık arasındaki ilişkiyi anlamlandırma
Bilgi ve İletişim Teknolojileri		• Fonksiyonların tablo, grafik, cebirsel gösterimleri yardımıyla limit ve süreklilik uygulamaları gerçekleştirme • Bir fonksiyonun grafiği üzerinde bükeylik ve dönüm noktalarını ve bu noktaların özelliklerini inceleme • Fonksiyonun grafiğiyle x-ekseni arasında kalan sınırlı alanı Riemann top-lamı yardımıyla belirleme • Fonksiyon grafiğini türev yardımı ile çizme • Konikleri oluşturma • Uzayda doğru ve düzlemler arasındaki ilişkileri belirleme amacıyla bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanma

Şekil 3.1. *Öğrencilerde geliştirilmesi hedeflenen beceriler ile 12. sınıf matematik öğretim programı ilişkisi* (MEB, 2013, s.43).

Şekil 3.1'de yer alan *Matematiksel Süreç Becerileri* başlıklı bölümün *Akıl Yürütme* alt başlığında, öğrencilerde türev ve integralin sahip olduğu özelliklere ilişkin çıkarımlarda bulunabilme becerilerinin geliştirilmesinin hedeflendiği ifade edilmiştir. Öğrencilerde bu becerilerin geliştirilmesi, analiz çalışma alanında kritik yer tutan kavramların anlamlandırılması ve analiz kavramları arasında güçlü ekolojik ilişkiler kurulması ile yakından ilişkilidir.

Tablonun *Matematiksel Süreç Becerileri* başlıklı bölümünün *Matematiksel İletişim* alt başlığında ''Türeve, integrale, … özgü terim ve sembolleri matematiksel düşünceleri ifade etmede kullanma'' ifadesine yer verildiği görülmektedir. Bu ifade ile limit, türev, integral almada veya sürekliliğin incelenmesinde kullanılan notasyon veya kavramların açıklanmasının matematiksel düşüncelerin ifade edilmesinde önemli bir rol oynadığına işaret edilmektedir.

Şekil 3.1'deki tablonun *Bilgi ve İletişim Teknolojileri* bölümünde ''Fonksiyonların tablo, grafik, cebirsel gösterimleri yardımıyla limit ve süreklilik uygulamaları gerçekleştirme'' ifadesi ile limit ve süreklilik konuları ile ilgili uygulamalarda nümerik, analitik ve cebirsel yaklaşım kullanılmasının öngörüldüğü anlaşılmaktadır. Tablonun *Bilgi ve İletişim Teknolojileri* bölümünde geçen ''Bir fonksiyonun grafiği üzerinde bükeylik ve dönüm noktalarını ve bu noktaların özelliklerini inceleme'' ifadesi ile türev öğretiminde analitik yaklaşımın kullanımına işaret edilmektedir. Ayrıca, ''Fonksiyon grafiği ile x-ekseni arasında kalan sınırlı alanı Riemann toplamı yardımıyla belirleme'' ve ''Fonksiyon grafiğini türev yardımı ile çizme'' ifadeleri ile analitik ve cebirsel yaklaşım gibi farklı problem çözme yaklaşımlarının birlikte kullanımına işaret edilmektedir.

Öğretim programında 12. sınıf analiz konularının yer aldığı *Sayılar ve Cebir* öğrenme alanı için öğrencilerden beklenen davranışlar şu şekilde sıralanmıştır:

- Türev kavramını değişim oranı ile açıklama, limiti türevi anlamada bir araç olarak kullanma, türevin geometrik yorumu ile maksimum minimum problemlerini ilişkilendirme, türevi kullanarak fonksiyonların grafiklerini çizme.
- Belirli integrali, eğri altında kalan alan ile ilişkilendirme ve uygulamalar yapma, türevle integral arasında ilişki kurma ve belirsiz integral hesaplamaları yapma (MEB, 2013, s.43).

Bu açıklamalar öğretim programında analiz konularının öğretiminde nasıl bir yaklaşımın benimsendiğine yönelik önemli ipuçları içermektedir. İlk cümlede geçen ''Türev kavramını değişim oranı ile açıklama, limiti türevi anlamada bir araç olarak kullanma, …'' ifadesinden, türev kavramının değişim kavramından hareketle limit kavramından yararlanılarak tanımlanacağı anlaşılmaktadır. Ayrıca, ''… limiti türevi anlamada bir araç olarak kullanma'' ifadesinden, öğretim programında limit kavramına türev kavramının tanımlanmasında kullanılmak üzere bir araç olarak yer verildiği anlaşılmaktadır.

İkinci cümlede geçen "Belirli integrali, eğri altında kalan alan ile ilişkilendirme ve uygulamalar yapma …'' ifadesi ile integral kavramına belirli integral ile giriş yapılacağı ve belirli integrale alan hesabında kullanılan bir araç olarak ekolojik görevler verileceği anlaşılmaktadır. Ayrıca "…türevin geometrik yorumu ile maksimum minimum problemlerini ilişkilendirme'' ve ''Belirli integrali, eğri altında kalan alan ile ilişkilendirme ve uygulamalar yapma, …'' ifadeleri, öğretim programında analiz konu ve kavramlarına birer problem çözme aracı olarak yer verilmesinin hedeflendiğine işaret etmektedir. Maksimum minimum problemleri ile türev kavramının ilişkilendirilmesi, bu hedeflerin gerçekleştirilmesinde matematiksel modellemenin işe koşulduğunu göstermektedir.

Belirli integralin eğri altında kalan alan ile ilişkilendirme yapılarak öğretilebilmesi için cebirsel yaklaşımın analitik yaklaşım kullanılarak desteklenmesi gerekmektedir. Ayrıca cümlede geçen ''…türevle integral arasında ilişki kurma…'' ifadesi ile öğretim programında ters türev ile integral kavramı arasında ekolojik ilişki kurulacağı görülmektedir.

12. sınıf matematik öğretim programı incelendiğinde *Sayılar ve Cebir* öğrenme alanı için öğrencilerden beklenen davranışlar ile analiz çalışma alanına ilişkin kazanım ve açıklamaların büyük ölçüde uyumlu olduğu görülmüştür.

Aşağıda limit, süreklilik, türev ve integral konularına yönelik bazı kazanım ve açıklamalara yer verilmiştir.

İD.12.1. Türev

İD.12.1.1. Limit ve Süreklilik

Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, soldan limiti ve sağdan limiti kavramlarını tablo ve grafik kullanarak örneklerle açıklar.

- Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak fonksiyonların tablo ve grafik gösterimleri yardımıyla limit uygulamaları yaptırılır.

Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliğini açıklar.

- Fonksiyon grafiği üzerinde sürekli ve süreksiz noktalar buldurulur.
- Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak fonksiyonların tablo ve grafik gösterimleri yardımıyla süreklilik uygulamaları yaptırılır (MEB, 2013, s.45).

İD.12.1.2. Türev

Fizik ve geometri modellerinden yararlanılarak değişim oranı kavramını açıklar

- Anlık değişim oranı kavramı açıklanarak, anlık değişim oranına türev denildiği belirtilir.
- Verilen bir fonksiyonun bir noktadaki türev değeri ile o noktadaki teğetinin eğimi arasındaki ilişki incelenir.

Bir fonksiyonun bir noktada ve bir aralıkta türevli olmasını inceler.

- Fonksiyonun türevli olmadığı noktalarla grafiği arasında ilişki kurulur -
- **Verilen bir fonksiyonun bir noktadaki teğet ve normalinin denklemlerini bulur.**

Maksimum ve minimum problemlerinin modellenmesi ve çözümünde türevi kullanır.

Fonksiyonların grafiğini çizerken türevi kullanır.

- Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır (MEB, 2013, s.46-47).

İD.12.2. İntegral

Bir fonksiyonun grafiği ile x-ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını Riemann toplamı yardımıyla tahmin eder.

Bir fonksiyonun grafiği altında kalan alanı veren fonksiyonun türevi ile grafiğin temsil ettiği fonksiyon arasındaki ilişkiyi açıklar.

Belirli integrali modellemede ve problem çözmede kullanır.

- İntegral ile alan hesabı, doğrusal hareket problemleri vb. durumlar incelenir.
- İki fonksiyonun grafikleri ve iki düşey doğru arasında kalan sınırlı bölgeni alanınınbulunması verilir .
- Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır (MEB, 2013, s.47-48).

Analiz konularına yönelik kazanımlar incelendiğinde, limit ve süreklilik konularına türev konusu içinde yer verildiği görülmektedir. Bu durum limit ve süreklilik konularına türev kavramını açıklamada bir araç olarak yer verildiğini göstermektedir.

Türev konusuna yönelik ilk kazanımın açıklamasında yer alan ‘‘Anlık değişim oranı kavramı açıklanarak, anlık değişim oranına türev denildiği belirtilir.’’ ifadesi türev konusuna, öğrencilerden beklenen ‘‘...türev kavramını değişim oranı ile açıklama’’ davranışı ile uyumlu bir giriş yapılmasının öngörüldüğünü göstermektedir. Türev konusuna yönelik ‘‘Maksimum ve minimum problemlerinin modellenmesi ve çözümünde türevi kullanır (MEB, 2013, s.46-47).’’ kazanımı ve integral konusuna yönelik kazanımlar değerlendirildiğinde öğretim programında analiz konu ve kavramlarına birer problem çözme aracı olarak yer verilmesinin öngörüldüğünü göstermektedir. Ayrıca limit, süreklilik, türev ve integral konularına yönelik bazı kazanımların açıklamalarında bilgi ve iletişim teknolojilerinin kullanımına vurgu yapılması, analiz öğretiminde analitik teknik ve nümerik tekniğin kullanımının ön planda tutulduğunu göstermektedir.

Öğretim programının genel amaçları, programın öğrencilere kazandırmayı hedeflediği matematiksel beceriler ve 12. sınıf ileri düzey matematik dersi öğretim programı analiz konularının öğretimi açısından değerlendirildiğinde analiz global sitinin inşasına yönelik aşağıda sıralanan sonuçların ön plana çıktığı görülmüşür.

Öğretim programında, öğrencilerin matematiksel düşüncelerini etkili bir biçimde ifade edilebilmelerine, öğrencilerde matematiksel akıl yürütme, problem çözme, matematiksel modelleme yapabilme, farklı stratejiler kullanarak kestirimlerde bulunabilme becerilerinin geliştirilmesine önem verildiği belirtilmiştir. Öğretim programının ana hedeflerine ve programda benimsenen öğretim döngüsüne uygun bir yapı oluşturabilmesi için analiz global sitinin problem çözümlerinde (cebirsel, nümerik, analitik yaklaşım gibi) farklı yaklaşımlara bir arada yer veren ve bu yaklaşımların bir arada kullanılmasına olanak sağlayan çok boyutlu ve dinamik bir yapı oluşturacak şekilde inşa edilmesi gerekmektedir.

Öğrencilerin analiz konularına yönelik matematiksel iletişim becerilerini geliştirebilmeleri için oluşturulacak global sitte analiz öğretimine özgü kavramlara dikkat çekilmesi ve bu kavramların farklı yaklaşımlar yardımıyla açıklanmasına olanak sağlayan besleme-beslenme ilişkilerine yer verilmesi büyük önem taşımaktadır.

Öğretim programında limit kavramına türevi tanımlamada bir araç olarak yer verildiği ve türev kavramı ile integral kavramı arasında ekolojik bağ kurulmasına önem verildiği görülmüştür. Öğretim programının bu beklentilerinin karşılanabilmesi için analiz global sitinde limit ile türev ve türev ile integral kavramları arasında farklı problem çözme yaklaşımlarının bir arada kullanılmasına olanak sağlayan bir ekolojik yapı oluşturulması önem kazanmaktadır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. ANALİZ GLOBAL SİTİNİN OLUŞTURULMASI

Analiz global siti tarihsel, epistemolojik ve didaktik verilerden yararlanılarak ve öğretim programının yaklaşımı göz önünde tutularak aşama aşama oluşturulmuştur. İlk aşamada, analiz çalışma alanı ile ilgili genel bilgilere yer verilmiş ve ‘‘Analiz temel olarak ne ile ilgilenir?’’ sorusuna yanıt aranarak global sitin temel nesnesi belirlenmiştir. Bir sonraki aşamada temel nesnenin incelenmesinde kullanılan sitin temel araçları belirlenmiştir. Daha sonra, temel araçların kullanımına işlevsellik katan global sitin teknikleri belirlenmiştir. Sonraki aşamalarda, teknikler ile ekolojik ilişkisi olan nesneler *kavram – 1, kavram – 2* ve *kavram – 3* olmak üzere hiyerarşik üç kategoriye ayrılmış ve bu nesneler arasındaki ekolojik ilişkilere yer verilmiştir. Son aşamada, *kavram – 3* nesneleri ile ekolojik ilişkileri olan çalışma alanları belirlenerek analiz global siti inşası tamamlanmıştır.

4.1. Analiz Çalışma Alanı

Analizin kökeni milat öncesine, Yunanlıların uzunluk, alan ve teğetlerle ilgili çalışmalarına dayanır. Bu dönemlerde Zenon, günümüzde limit kavramıyla açıklanan bazı paradokslar ortaya atmıştır (Dönmez, 2002). Bu paradokslar Newton (1642-1677) ve Leibniz (1646-1716)’ın limit ve türev kavramını formel tanıma kavuşturmaları ile birlikte ancak 17. yüzyılda açıklığa kavuşmuştur. Yine milattan önceki dönemlerde düzgün çokgenlerin çevre ve alan bilgisine dayanılarak geliştirilen yöntemler ile dairelerin çevre ve alanlarını hesaplamaya yönelik çalışmalar yapılmıştır (Dönmez, 2002). Bir parabolün doğru etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacminin hesaplanması, bir kürenin yüzey alanı ve hacminin bulunmasına yönelik çalışmalar da yine milattan öncesine dayanır (Yavuz, 2013). Milattan önce yapılan bütün bu çalışmalar, günümüzde analizin çalışma alanına girmekte ve limit, süreklilik, türev veya integral kavramları ile açıklanabilmektedir.

1637'de Descartes (1596-1650) ve Fermat (1601-1665)’ın analitik geometriyi keşfetmesi ile limit, türev ve integral hesaplamalarında analitik yöntemlerin kullanımı ağırlık kazanmış ve bu sayede matematiksel analiz çağ atlamıştır. Bu dönemde Cavalieri (1598-1647) bölünmezler yöntemi adı verilen yöntemi geliştirmiştir. Cavalieri bu yöntemi kullanarak bir cismin ya da bir yüzeyin büyüklüğünün, bir dizi düzlem ya da doğrunun toplanması suretiyle elde edilebileceğini göstermiş ve bu sayede kendisinden sonra gelen matematikçilere integral hesabı yapmaları için öncülük etmiştir (Dönmez, 2002; Cajori, 2014).

Analizde ortaya çıkan çığır açıcı gelişmeler Newton'un fizik, Leibniz'ın ise geometri alanında yapmış olduğu çalışmalar ile 17. yüzyılda başlamıştır. Newton, hızı sürekli değişen hareketli cisimlerin belli bir andaki hızlarının ne olduğu, belirli bir zaman aralığında ne kadar yol aldığı gibi problemlerle ilgilenirken; Leibniz, geometrik şekillerin analizinin daha sistematik bir biçimde nasıl yapılabileceği sorusuna yanıt aramıştır. Newton ve Leibniz aynı dönemde birbirlerinden bağımsız olarak bu çalışmaları yaparken *sonsuz küçük* adı verilen kavrama ihtiyaç duymuşlardır. Newton çok küçük olan bu sayılara *değişen – kararsız (fluxions)* adını vermiş, sonsuz küçüklerden yararlanarak türevi tanımlamış ve türev problemleri ile ilgilenmiştir. Bir eğriye çizilen teğetin eğimini hesaplama problemini de ilk defa Newton çözmüştür. Leibniz ise sonsuz küçükleri günümüzde de kullanılan *diferansiyel* kelimesi ile adlandırmıştır. Leibniz'da Newton'ın çalışmalarına benzer çalışmalar yapmış ve türevi diferansiyel kavramından yararlanarak tanımlamıştır (Arslan ve Çelik, 2013; Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013; Cajori, 2014).

Limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı ilk defa 1821 yılında Cauchy (1789-1857)'nin *Cours d'Analyse* adlı eserinde yapılmıştır. Cauchy bu eserinde limitin bugünkü modern tanımını informel olarak vermiştir. Fakat Cauchy'nin bu tanımı, genel olmaması ve gerekli formel bilgileri içermemesi nedeniyle eksik bulunmuştur. Weierstrass (1815-1897)'ın 1841 yılında limitin günümüzde de kullanılan $\varepsilon - \delta$ tanımını yapması ile bu eksiklikler giderilmiş ve sonsuz küçüklerle ilgili belirsizlikler büyük ölçüde ortadan kaldırılmıştır (Stein and Barcellos, 2007). Newton ve Leibniz'ın yaptıkları türev tanımlarının sağlam bir temele oturtulması için Weierstrass'ın yaptığı bu tanımına ihtiyaç duyulmuştur.[3]

Matematiksel analizin tarihsel gelişimi boyunca yapılan çalışmaları limit kavramı üzerine inşa edilen diferansiyel ve integral analiz olmak üzere iki ana başlık altında değerlendirmek mümkündür. Diferansiyel analiz üzerine yapılan çalışmalarda limit ve türev kavramlarından yararlanılarak fonksiyonlardaki değişimin belirlenmesi ile ilgilenilmiştir (Cajori, 2014). Newton ve Leibniz'ın bir hareketlinin belirli bir andaki hızını belirlemeye veya bir fonksiyondaki değişimi hesaplamaya yönelik çalışmalarını

[3] Analizin tarihsel gelişimine ilişkin daha detaylı bilgi için EK-2 incelenebilir.

bu kapsamda değerlendirmek mümkündür. Günümüzde ısı ile genleşen bir cismin belirli bir anda alan veya hacminde meydana gelen değişimin hesaplanması, astronomide gezegenlerin ve uyduların yörüngelerinin belirlenmesi, balistikte bir merminin izleyeceği yolun hesaplanması üzerine yapılan çalışmalar da yine diferansiyel analiz çalışma alanı içerisinde değelendirilebilir.

İntegral analizin temelinde ise limit ve integral kavramları yer alır. Eski Yunanlı matematikçilerin dairenin alanını hesaplamak için yaptıkları çalışmalar integral analizin çıkış noktası olarak kabul edilir (Dönmez, 2002). 17. yüzyılda analitik geometrinin icadı ile birlikte integral analiz problemlerinin çözümünde cebirsel ve geometrik yaklaşımların bir arada kullanılmasına imkan sağlanmıştır. Newton'ın 1665 yılında bu yaklaşımları bir arada kullanarak bir eğrinin altında kalan alanın türevin tersi alınarak hesaplanabileceğini kanıtlaması ile birlikte integral analizdeki gelişmeler hızlanmıştır. Newton'ın analizin temel teoremini açıklaması integral alma kurallarının geliştirilmesini sağlayarak integral hesabında cebirsel yaklaşımın yaygın bir biçimde kullanılmasının önünü açmıştır. İntegral analizin gelişimine yönelik atılan diğer önemli adım Cauchy'nin kendisine ait limit ve süreklilik tanımlarından yararlanarak belirli integrali tanımlaması olmuştur. Belirli integralin bu tanımı Riemann'ın (1826-1866) 1854' te yapmış olduğu küçük değişikliklerle bugünkü halini almıştır (Dönmez, 2002; Yavuz, 2013). 19. yüzyılın ilk yarısına kadar integral daha çok türevin tersi olarak anlaşılmış ve hesaplamalar buna göre yapılmıştır. Bu durum sadece sürekli fonksiyonlar için doğru iken Riemann integrallenebilirlik kavramı ile bu kısıtlı düşüncenin aşılmasını sağlamıştır. Böylelikle belirli integral türevden bağımsız bir temele oturtularak, integral analizin diferansiyel analize olan bağımlılığının önüne geçilmiştir (Cajori, 2014). İntegral analiz tarihsel gelişimi boyunca, alanları veya hacimleri belirli bir formül kullanılarak ifade edilemeyen geometrik nesnelerin alan, hacim veya ağırlıklarının bulunması; bir olayın gerçekleşme olasılığının belirlenmesi; eğrilerin uzunluklarının bulunması gibi pek çok problemin çözümünde kullanılmıştır.

Sonuç olarak, tarihsel ve epistemolojik veriler analiz çalışma alanının iki ana kola ayrıldığını göstermektedir. Global sitte bu veriler göz önünde tutularak analiz çalışma alanı diferansiyel ve integral analiz olmak üzere iki kola ayrılmıştır[4].

---

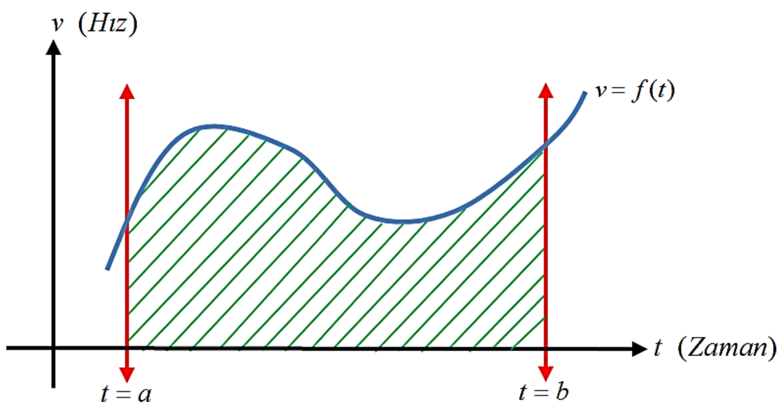
[4] Tez çalışmasında ''analiz'' çalışma alanı ile, geleneksel matematikte ''kalkülüs'' kelimesi ile ifade edilen çalışma alanı kastedilmektedir.

4.2. Global Sitin Temel Nesnesi

Fizikte, bir hareketlinin belirli bir andaki hızının veya ivmesinin bulunması; matematikte bir fonksiyonun tanımlı olduğu değer aralığındaki davranışının incelenmesi, (varsa) alabileceği en büyük veya en küçük sayı değerlerinin bulunması, dönüm noktalarının, artan veya azalan ya da konveks veya konkav olduğu aralıkların belirlenmesi gibi birçok farklı durum fonksiyonlardaki değişim ile ilgilidir. Diferansiyel analizin çalışma alanına giren bütün bu inceleme ve hesaplamalar türev işlemi yapılarak gerçekleştirilir. Türev ise fonksiyonlardaki değişim oranlarının limitleri alınarak bulunur. Çünkü; diferansiyel analiz her ikisi de *neredeyse sıfır* olan değişimlerin oranına dayanır (Arslan ve Çelik, 2013). Bu durum, diferansiyel analizin reel sayılardaki değişimlerle ilgilendiğini göstermektedir.

İntegral analizde, limit ve integral kavramları yardımıyla bir fonksiyonun davranışından hareketle başka bir fonksiyonda oluşan değişim belirlenir. Hız zaman fonksiyonu verilen bir hareketlinin belirli bir zaman aralığı süresince katettiği yolun bulunması bu duruma örnek olarak gösterilebilir.

Şekil 4.1'de bir hareketlinin hız zaman grafiği verilmiştir.



Şekil 4.1. *Bir hareketlinin hız-zaman grafiği*

Hareketlinin $[a,b]$ zaman aralığında aldığı yol, fonksiyonun koordinat düzleminde çizilen grafiği ile t ekseni arasında kalan, $t = a$ ve $t = b$ doğruları ile sınırlandırılmış olan taralı bölgenin alanına eşittir. Bu alan değeri $[a,b]$ zaman aralığının Δt ile ifade edilen küçük zaman aralıklarına bölünmesi ile elde edilen birikimli toplam yardımıyla şu şekilde bulunur:

$\left[a,b\right]$ aralığında sürekli bir $f(t)$ fonksiyonu için, $\left[a,b\right]$'nin bir,

$$a = t_0 \prec t_1 \prec \ldots \prec t_{n-1} \prec t_n = b \tag{4.1}$$

bölüntüsünde, her i'inci kesitte rastgele seçilen bir t_i noktası için oluşturulan,

$$f(t_1)(t_1 - t_0) + f(t_2)(t_2 - t_1) + \ldots + f(t_n)(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i \tag{4.2}$$

toplamına Rimann toplamı adı verilir.

Şekil 4.1'de gösterilen taralı alan, Riemann toplamındaki bölüntü sayısı olan n'nin sonsuza götürülmesine bağlı olarak bölüntü uzunlukları olan Δt_i'lerin sıfıra yakınsaması sonucunda elde edilen alanlar toplamının limiti alınarak,

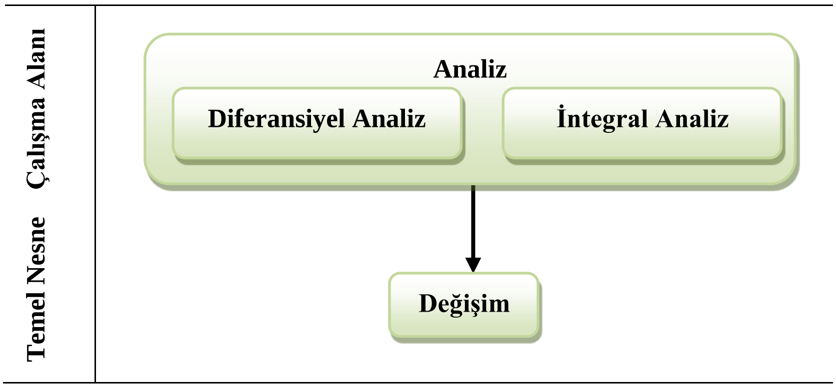
$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t_i \tag{4.3}$$

şeklinde bulunur. Bu değer aynı zamanda $f(t)$ fonksiyonunun b'den a'ya belirli integraline eşittir (Akkoç ve Kurt, 2013).

Yukarıda yapılan alan hesabı integralin temel fikrinin, hesaplanacak büyüklükleri küçük parçalara bölüp her parçanın büyüklüğe katkısını toplayarak büyüklüğü tam olarak hesaplayabilmeye dayandığını göstermektedir. Küçük parçaların sayısı arttıkça, parçaların bir araya gelmesiyle elde edilen toplam büyüklük de değişmektedir. Nihayetinde parça sayısı sonsuza giderken elde edilen toplam büyüklük gerçek alan değerine eşitlenmektedir. Elde edilen büyüklüklerin parça sayısına bağlı olarak değiştiği düşünüldüğünde, diferansiyel hesapta da olduğu gibi, integral hesabın temelinde *değişim* nesnesinin olduğu görülür.

Tillmann (Tillmann'dan aktaran Osman, 2017) analizin insanlığa hesaplamayı iyi bir şekilde kullanma olanağını sunduğunu, gezegenlerin hareketleri sonucunda ortaya çıkan değişimden, ekonomik değişime ve iklim değişimine varıncaya kadar değişimi anlamamızı sağladığını belirtmiştir. Elde edilen veriler, Tillmann'ın da ifade etmiş olduğu gibi, matematiksel analizin temelinde değişim kavramının olduğunu göstermiş ve böylelikle analiz global sitinin temel nesnesi *değişim* olarak belirlenmiştir.

Şekil 4.2'de analiz çalışma alanı ve global sitin temel nesnesi verilmiştir.



Şekil 4.2. *Analiz çalışma alanı ve global sitin temel nesnesi*

4.3. Global Sitin Temel Araçları

Bu bölümde tarihsel ve epistemolojik verilerden yararlanılarak analiz çalışma alanında değişimlerin incelenmesinde hangi kavramlara ihtiyaç duyulduğu değerlendirilmiş ve bu kavramlar limit ve süreklilik, türev, integral olarak belirlenmiştir. Klasik bir *Kalkülüs* kitabını incelediğimizde analizin temel kavramları olarak nitelendirebileceğimiz bu kavramlar, sit kavramı çerçevesinde değişimleri incelemek için birer araç olarak düşünüldüğünden, *analizin temel kavramları* yerine *analizin temel araçları* olarak adlandırılmasının daha uygun olacağına karar verilmiştir.

4.3.1. Limit ve süreklilik

Limit kavramının tarihsel geçmişi milattan önce 450'li yıllarda yaşadığı düşünülen Zenon'a kadar dayanır. Zenon'un günümüzde limit kavramı ile ifade edilebilen meşhur paradokslarından biri ok paradoksudur. Bu paradoksta bir okun atıldığında hedefe varabilmesi için öncelikle hedefle kendisi arasındaki uzaklığın orta noktasına varması gerektiği, orta noktaya varabilmesi için kendisi ile orta noktanın ortasındaki noktaya (yani 2. orta nokta) varması gerektiği belirtilmekte ve bu şekilde sonsuz kez yarılamaya devam edildiği taktirde okun hareketsiz kalacağı sonucuna varılmaktadır. Başka bir ifade ile okun varması gereken noktadaki değişime göre almış olduğu yolun da değişerek sıfıra yaklaşması söz konusudur. Zenon'un bu paradoksu, reel sayılardaki değişimin incelenmesinde limit kavramının bir araç olarak kullanılabileceğine işaret etmektedir.

Tarihsel gelişim sürecinde limit kavramı, günümüzde integral veya türev alma işlemleri yapılarak çözülebilen birçok problemin çözümünde de devreye girmiştir. Örneğin, eski Yunanlı matematikçiler milattan önceki dönemlerde alan hesabında tüketme yöntemini kullanarak günümüzde integral hesabı yapılarak bulunabilen alan hesaplamaları yapmışlardır (Dönmez, 2002). Bu yönteme göre bir dairenin alanı hesaplanırken, dairenin içine köşe noktaları daire üzerinde olacak şekilde düzgün çokgenler çizilmiştir. Düzgün çokgenlerin kenar sayıları arttıkça alanlarının da değişerek dairenin alan değerine yaklaşacağı fikrinden hareketle dairenin alanı tahmin edilmiştir. Bu tür hesaplamalar günümüzde limit alma işlemi yapılarak gerçekleştirilmektedir. Bu durum limit kavramının reel sayılardaki değişimin incelenmesinde araç olarak kullanıldığını göstermektedir.

Newton hızı sürekli değişen hareketli bir cismin belli bir andaki hızını hesaplama problemini çözerken, ortalama hızdan anlık hıza geçişi yine limit kavramından yararlanarak ifade etmiştir (Dönmez, 2002; Cajori, 2014). Buna göre, $f(t)$ konum-zaman fonksiyonuna sahip bir hareketlinin $[t_0, t]$ aralığındaki ortalama hızı $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ olmak üzere bu hareketlinin anlık hızı limit hesabı yapılarak,

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{4. 4}$$

olarak bulunur. Bu ifade, bir hareketlinin anlık hızının belirlemesinde limit kavramının bir hesaplama aracı olarak kullanıldığını göstermektedir.

Diferansiyel ve integral analizin gelişimine yönelik tarihsel ve epistemolojik veriler dikkate alınarak *limit*, analiz global sitinin temel aracı olarak belirlenmiştir.

Süreklilik, limite bağlı olarak açıklanan bir kavramdır (Detaylı bilgi *Limitin süreklilik ile ekolojik ilişkisi* başlığı altında verilmiştir). Bir fonksiyonun bir noktada sürekliliği incelenirken, *limit* temel aracı kullanılarak bağımsız değişkendeki değişime bağlı olarak fonksiyonda ortaya çıkan değişimin süreklilik için gerekli olan şartları sağlayıp sağlamadığı değerlendirilir. Bu durum limit kavramı gibi süreklilik kavramının da fonksiyonlardaki değişimlerin incelenmesinde bir araç olarak kullanıldığını göstermektedir. Değişimin incelenmesindeki rolü dikkate alınarak *süreklilik,* analiz global sitinin bir diğer temel aracı olarak belirlenmiştir.

4.3.2. Türev

Türev kavramına yönelik fikirlerin ilk kez ortaya atılması, polinom fonksiyonların maksimum değerlerini bulma bağlamında ortaya çıkmıştır. Sonrasında, Fermat ve çağdaşları türev kavramını eğrilerde teğetin eğimi anlamında kullanmışlardır. Beaune (1601, 1652) bir eğrinin özelliklerinin, o eğriye teğet olan doğrunun tanjantından elde edilebileceğini görebilen öncü matematikçilerden biri olmuştur (Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013; Cajori, 2014). Bu çalışmalardan, polinom fonksiyonun alabileceği en büyük değerin belirlenmesi, fonksiyonun görüntü değerlerindeki değişimin incelenmesi ile ilişkiliyken; türevin eğrilerdeki teğet ile ilişkilendirilmesi, bağımlı değişkendeki değişim ile bağımsız değişkendeki değişimin karşılaştırılması ile ilgilidir.

Fizik alanında çalışan bilim insanları, hızı sürekli değişen hareketli cisimlerin belirli bir andaki hızlarının ne olduğu, belirli bir zaman aralığında ne kadar yol aldığı gibi problemlerde ilgilenmişlerdir. Matematik alanında çalışan bilim insanları ise fonksiyonlardaki değişimlerin nasıl incelenebileceği ve fonksiyon grafiklerinin sistematik bir şekilde nasıl analiz edilebileceği gibi sorulara cevap aramışlardır. Bu sorulara cevap verilebilmesine yardımcı olacak sistematik yaklaşımların temeli Newton ve Leibniz'ın çalışmaları ile birlikte atılmıştır (Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013). Newton ve Leibniz fonksiyonlardaki değişimlerin incelenmesinde türev kavramına ihtiyaç duymuş ve bu kavramı tanımlamışlardır. Tarihsel ve epistemolojik veriler, türev fikrinin ortaya atılmasında ve geliştirilmesinde reel sayılar ve fonksiyonlardaki değişimin incelenmesi ihtiyacının etkili olduğunu göstermektedir.

Türev kavramı; anlık değişim oranı, ortalama değişim oranlarının limiti, bir fonksiyonun tanımlı olduğu bir noktasındaki teğetinin eğimi gibi ifadeler kullanılarak tanımlanmaktadır. Bu ifadelerden türev kavramının fonksiyonlardaki değişimler ile yakından ilişkili olduğu görülmektedir. Türevi tanımlamada kullanılan *anlık değişim oranı, ortalama değişim oranlarının limiti* gibi ifadelerin ne anlama geldiğinin anlaşılabilmesi için öncelikle ortalama değişimin ne olduğu üzerinde durulması gerekir. Ortalama değişim ve anlık değişimin nasıl hesaplandığı Örnek 4.1. üzerinde açıklanmıştır.

Örnek 4.1. Başlangıçta 50 bakteri bulunan ve t saniyelik süre sonundaki bakteri sayısı $f(t)=2t^3+3t^2-t+50$ fonksiyonu ile belirlenen bir kültür için

a) 3 – 5. saniyeler arasında bakteri sayısındaki ortalama değişimi hesaplama,

b) 5.saniyede bakteri sayısındaki anlık değişimi bulma.

Çözüm a) 3 – 5. saniyeler arasında bakteri sayısındaki ortalama değişimin bulunabilmesi için bu zaman diliminde bakteri sayısındaki değişimin bulunması gerekir. Buna göre, 3. saniyede kültürde bulunan bakteri sayısı,

$$t = 3 \;\; için \;\; f(3) = 2.3^3 + 3.3^2 - 3 + 50 = 128 \tag{4. 5}$$

olarak bulunur. 5. saniyede kültürde bulunan bakteri sayısı ise,

$$t = 5 \;\; için \;\; f(5) = 2.5^3 + 3.5^2 - 5 + 50 = 370 \tag{4. 6}$$

olur. 2 saniyelik sürede bakteri sayısındaki değişim $|370 - 128| = 242$'dir. Bakteri sayısındaki ortalama değişim ise $\dfrac{242}{2} = 121$ olarak bulunur.

Çözülen örnekte ortalama değişimin nasıl hesaplandığı görülmektedir. Fakat türev hesabı ortalama değişimden ziyade anlık değişim ile ilgilidir. Anlık değişimin hesaplanabilmesi için ortalama değişim oranının limiti alınır.

b) 5.saniyede bakteri sayısındaki anlık değişimin hesaplanabilmesi için limit kavramından yararlanılarak, zaman aralığı 5.saniyeye giderek yaklaşacak şekilde daraltılırken ortalamadaki değişimin hangi reel sayıya yaklaştığının belirlenmesi gerekir. Elde edilecek sonuç aynı zamanda $f(t)$ fonksiyonunun $t = 5$ için türevidir ve *limit* temel aracından yararlanılarak,

$$f'(5) = \lim_{t \to 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} \tag{4. 7}$$

şeklinde ifade edilir. Limit alma işlemi yapıldığında sonuç,

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{t \to 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} = \lim_{t \to 5} \frac{\left(2t^3 + 3t^2 - t + 50\right) - 370}{t - 5} = \lim_{t \to 5} \frac{2t^3 + 3t^2 - t - 320}{t - 5} \\ &= \lim_{t \to 5} \frac{(t-5)(2t^2 + 13t + 64)}{t - 5} = \lim_{t \to 5} 2t^2 + 13t + 64 = 179 \end{aligned} \tag{4. 8}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.1'de yapılan işlemler, fonksiyonlardaki değişimin incelenmesinde türev kavramına bir hesaplama aracı olarak ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, tarihsel ve epistemolojik veriler ışığında *türev* nesnesi analiz global sitinin bir diğer temel aracı olarak belirlenmiştir.

4.3.3. İntegral

İntegral kavramının ortaya çıkışı türev kavramının ortaya çıkışından eskiye dayanır. Bunun önemli nedenlerinden biri, alan ve hacim hesaplamalarının hız hesaplamalarından daha önce önem kazanmış olmasıdır. Alan hesaplamalarında geometrik yaklaşım ve grafiklerin kullanımı integral kavramının ortaya çıkmasını hızlandırmış ve bu yaklaşımlar integral hesabının temelini oluşturmuştur (Yavuz, 2013). İntegralin istatistik, mekanik, fizik ve hatta astronomi gibi farklı alanlarda kullanılması bu alanlarda araştırma yapan matematikçiler için bir motivasyon kaynağı haline gelmiştir.

Tarihsel veriler incelendiğinde, integralin gelişim sürecinin üç döneme ayrıldığı görülür (Bkz. EK-2). İlk dönemin başlangıcı milattan öncesine dayanır. Bu dönemde tüketme yöntemi kullanılarak geometrik şekillerin alanları ve hacimleri bulunmaya çalışılmıştır. Antiphon, Eudoxus, Bryson ve Archimedes tüketme yöntemini kullanan dönemin önde gelen matematikçilerinden bazılarıdır. İntegralin gelişim sürecinin 2.döneminin 17. yüzyılın ilk yarısında başladığı kabul edilir. Kepler (1571-1630), Cavalieri, Roberval (1602-1675), Torichelli (1608-1647), Pascal (1623-1662) ve Barrow (1630-1677) integralde 2. dönemin önde gelen matematikçilerindendir. Bu dönemde bölünmezler yöntemi kullanılarak bir eğrinin altında kalan sınırlı bölgenin alanı hesaplanmıştır. Bu yaklaşıma göre bir cismin yüzeyi dikdörtgenlere bölünmekte ve cismin yüzey alanı dikdörtgenlerin alanlarının toplamının limiti gibi düşünülerek hesaplanmaktadır (Dönmez, 2002; Cajori, 2014). Gerek tüketme, gerekse bölünmezler yönteminde geometrik nesnelerin alan veya hacimleri sentetik geometri bilgisi temelli bir yaklaşım ile hesaplandığı için bu yöntemleri kullanan matematikçiler Riemann toplamı yardımı ile yapılan integral hesabının öncüleri olarak değerlendirilebilir. İntegralin tarihsel gelişim sürecinin ilk iki döneminde kullanılan yöntemler zaman alıcı olmalarının yanı sıra, geometrik nesnelerin alan veya hacimlerinin hesaplanmasında kullanılabilecek genel bir yaklaşım niteliğinde değildir. Örneğin, tüketme yöntemi kullanılarak düzgün çokgenler yardımı ile bir dairenin alanı tahmin edilebilirken, koordinat düzleminde grafiği çizilen herhangi bir fonksiyonun eksenler ile arasında kalan kapalı bir bölgenin alanının hesaplanması mümkün değildir. Bu durum, geometrik şekillerin alanlarının hesaplanmasında hızlı ve sistematik çözümler sağlayan bir yaklaşıma ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir. Bu dönemlerde integral kavramı tanımlanmadığı ve integral alma kuralları ortaya konulamadığı için, tüketme yöntemi ve bölünmezler yöntemi gibi yaklaşımlar birer problem çözme aracı olarak kullanılmıştır.

İntegralde 3. dönem 17. yüzyılda Newton'un yaptığı çalışmalarla başlar. Bugün bildiğimiz integral kavramı ve analizin temel teoremi 1665 yılında Newton tarafından ortaya konulmuştur. Newton 1687 yılında yayımlanan *Principia* adlı kitabında integral alma ile ilgili bazı özellikleri (bunlar arasında toplam şeklinde verilen fonksiyonların integrallerini ayrı ayrı integralleri alınarak toplama, bazı üstel fonksiyonların integralleri ile ilgili kurallar bulunmaktadır.) açık bir şekilde genelleştirerek ifade etmiştir (Yavuz, 2013). Newton'a kadarki tarihsel süreçte integral hesaplamalarında genellikle geometrik yaklaşımların kullanıldığı görülür (Bkz. EK-2). İntegral kavramının ve integral alma kurallarının ortaya konulması ile birlikte cebirsel yaklaşım kullanılarak birçok analiz problemi için hızlı ve genellenebilir çözümlerin yapılmasına olanak sağlanmıştır. Bu durum integral kavramının, analiz problemlerinin çözümünde hızlı ve etkili çözümler sağlayan bir araç olarak kullanıldığını göstermektedir. Günümüzde belirli integral tanımının Riemann toplamı yardımı ile yapılıyor olmasına karşılık, analiz problemlerinin çözümünde Riemann toplamı kullanmak yerine integral alma işleminin tercih ediliyor olması bu durumun açık bir göstergesidir.

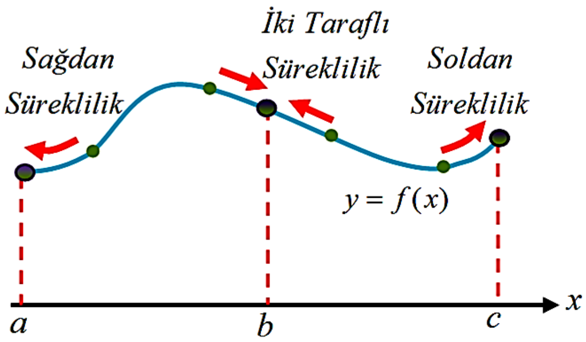
İntegral analizin tarihsel gelişimine yönelik verilerden ve epistemolojik verilerden yararlanılarak *integral* kavramı analiz global sitinin temel araçlarından biri olarak belirlenmiştir.

4.4. Temel Araçlar Arasındaki Ekolojik İlişkiler

Bu bölümde tarihsel ve epistemolojik verilerden yararlanılarak global sitin *limit, süreklilik, türev* ve *integral* temel araçları arasındaki ekolojik ilişkiler ortaya konulmuştur.

4.4.1. Limitin diğer temel araçlar ile ekolojik ilişkileri

Bir fonksiyonun tanım kümesindeki bir nokta için sürekliliği o noktanın özelliğine göre limit alınarak incelenir. Sürekliliğin incelendiği nokta fonksiyonun bir iç noktası ise fonksiyonun bu noktada çift taraflı limitine, bir uç noktası ise tek taraflı limitine bakılır. Şekil 4.3'te verilen fonksiyon grafiğinde bu iki durumu örneklendiren noktalara yer verilmiştir.



Şekil 4.3. *Bir fonksiyonun herhangi bir iç noktasında ve uç noktalarındaki sürekliliği*

Tanım (İç nokta sürekliliği): Bir $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulda tanım kümesinin bir iç noktası olan b 'de süreklidir.

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = f(b) \tag{4. 9}$$

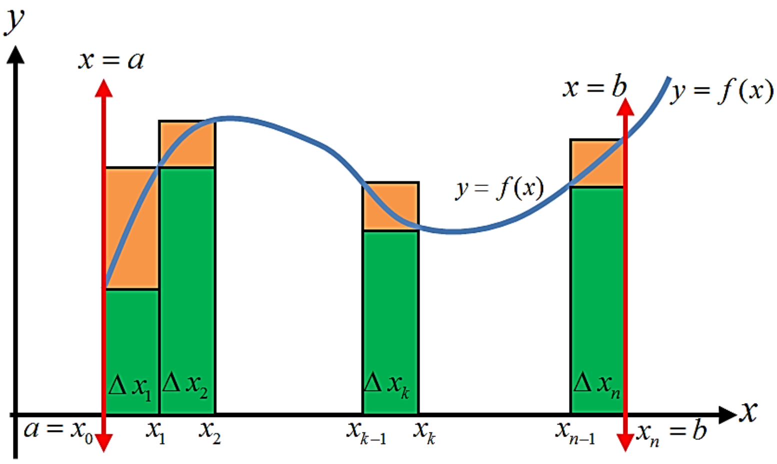
Tanım (Uç nokta sürekliliği): Bir $y = f(x)$ fonksiyonu (4. 9) ile ifade edilen koşullarda tanım kümesinin sırasıyla sol uç noktası olan a 'da veya sağ uç noktası olan c 'de süreklidir.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \textit{veya} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) \tag{4. 10}$$

Süreklilik tanımları değerlendirildiğinde; bir fonksiyonun tanımlı olduğu bir noktadaki sürekliliğine bu noktadaki limitine bağlı olarak karar verildiği görülür. Bu durum global sitin *süreklilik* temel aracının *limit* temel aracından beslendiği göstermektedir.

Türev kavramının günümüzde kullandığımız tanıma yakın tanımı 19. yüzyılın ilk yarısına dayanır. Bu yıllarda Cauchy bir f fonksiyonunun türevini, "… limitin olduğu durumlarda $\lim_{i \to 0} \dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$ limitine eşittir ve f' ile gösterilir.'' şeklinde ifade etmiştir (Cauchy'den aktaran Arslan ve Çelik, 2013). Türev tanımından; bir fonksiyonun belirli bir noktada türevli olabilmesi için bu noktada limitli olmasının bir ön şart olduğu anlaşılmaktadır. Bu durum, türevin ekolojisinde limitin hayati bir yere sahip olduğu ve türev kavramının limit kavramı üzerine inşa edildiğini göstermektedir. Öğretim programında limite türevin anlaşılmasında bir araç olarak yer veriliyor olması (Bkz. Şekil 3.1) limit ile türev arasındaki besleme-beslenme ilişkisi ile örtüşmektedir.

İntegral matematik ve bilim için önemli olan büyüklükleri tanımlamak ve hesaplamakta kullanılan önemli bir ekolojik araçtır. Belirli integrali tam ve doğru bir şekilde tanımlayabilmenin yolu sonlu toplamlar oluşturup, bu sonlu toplamların limitini almaktan geçer.



Şekil 4.4. $y = f(x)$ *fonksiyon eğrisi,* $x = a$, $x = b$ *doğruları ve* x *ekseni arasında kalan bölge*

Şekil 4.4'te, f fonksiyon eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanının sonlu toplamlar yardımıyla bulunabilmesi için taban uzunlukları eşit olacak şekilde n tane dikdörtgene bölünmüştür. Şekle göre, elde edilecek her bir dikdörtgenin taban uzunluğu,

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \textit{için} \quad \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \qquad (4.\ 11)$$

eşitliği ile ifade edilir.

Şekil 4.4'te koyu renkte taranan dikdörtgenlere alt dikdörtgenler denir. Alt dikdörtgenlerin her birinin dikey kenar uzunluğu,

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \textit{için} \quad f\left(x_{k-1}\right) \qquad (4.\ 12)$$

ile ifade edilir. Bu dikdörtgenlerin üzerine açık renkte taranan dikdörtgenlerin eklenmesi ile oluşan dikdörtgenlere üst dikdörtgenler denir. Üst dikdörtgenlerin her birinin dikey kenar uzunluğu,

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \textit{için} \quad f\left(x_k\right) \qquad (4.\ 13)$$

ile ifade edilir. Dikdörtgenlerin alanları toplandığında; alt dikdörtgenlerin alanları toplamı gerçek alan değerinden daha küçük, üst dikdörtgenlerin alanları toplamı ise gerçek alan değerinden daha büyük olacaktır. Kapalı bölgenin alanının daha doğru tahmin edilebilmesi için her bir dikdörtgenin dikey kenar uzunluğu; alt dikdörtgenlerin dikey kenar uzunlukları ile üst dikdörgenlerin dikey kenar uzunluklarının aritmetik ortalaması alınarak,

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\} \quad için \quad f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \tag{4. 14}$$

şeklinde bulunur. Buna göre elde edilen dikdörtgenlerin alanları,

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\} \quad için \quad f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)\Delta x_k \tag{4. 15}$$

olarak ifade edilir. Bu dikdörtgenlerin alanları toplamı Riemann toplamı ile,

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)\Delta x_k \tag{4. 16}$$

şeklinde ifade edilir. Elde edilen bu tahmin değerinin gerçek alan değerine eşit olabilmesi için dikdörtgenlerin sonsuz sayıda olması gerekir. Bu noktada limit kavramı devreye girer. Buna göre gerçek alan değeri sonlu toplamlar limitinden yararlanılarak,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)\Delta x_k \tag{4. 17}$$

eşitliği ile bulunur. Bu eşitlik aynı zamanda $f(x)$ fonksiyonunun b ’den a ’ya belirli integralidir. Buna göre f fonksiyon eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \tag{4. 18}$$

olarak bulunur. Alan hesabı için yapılan işlemler integralin gerisinde limit kavramının var olduğunu göstermektedir. (Yavuz, 2013; Thomas, Weir and Hass, 2015).

Tarihsel ve epistemolojik veriler değerlendirildiğinde, global sitin temel araçlarından biri olarak belirlenen *limit*in; süreklilik, türev ve integralin temelini oluşturduğu anlaşılmaktadır. Bu hususa vurgu yapmak amacıyla global sit diyagramında *limit* nesnesi diğer temel nesnelerin önüne yerleştirilmiştir.

4.4.2. Sürekliliğin diğer temel araçlar ile ekolojik ilişkileri

Sürekliliğin limit ile ekolojik ilişkisine önceki bölümde yer verildiği için bu bölümde sadace sürekliliğin türev ve integral ile ekolojik ilişkisi üzerinde durulmuştur.

Newton *Quadrature of Curves* adlı eserinde, kullandığı türev yöntemi ile ilgili açıklama yaparken türev ile süreklilik arasındaki ilişkiye şu şekilde değinmiştir.

> *Ben burada matematiksel nicelikleri çok küçük parçalardan oluşuyormuş gibi değil, sürekli bir hareketle tarif edilmiş olarak görüyorum. Çizgiler, parçaların yan yana konulmasıyla değil, noktaların sürekli hareketi ile tarif edilir ve oluşur. Alanlar, çizgilerin, cisimler ise alanların sürekli hareketinden elde edilir… Bunlar eşyanın tabiatına uygun olarak meydana gelir ve her gün cisimlerin hareketinde gözlemlenir…*
>
> *Türevler, istediğimiz ölçüde (quam proxime) değişkenlerin zaman içinde oluşturdukları eşit ve mümkün olan en küçük artışlardır…*[5]

Eğer bir fonksiyon tanımlı olduğu bir noktada sıçrama yapmışsa bu nokta için sağdan veya soldan türevlerden en az biri mevcut olamaz. Başka bir ifadeyle, bir foksiyon türevli olduğu her noktada sürekli olmak zorundadır. Buna göre süreklilik türevlenebilirlik için ön şart niteliğindedir.

Aşağıda verilen teorem sürekliliğin türev ile ekolojik ilişkisine yönelik bilgiler içermektedir. Teoremin ispatı incelendiğinde, sürekliliğin türevlenebilirlik için bir ön şart olduğu görülür.

Teorem: Bir f fonksiyonunun $x = c$ noktasında türevi varsa f fonksiyonu $x = c$ noktasında süreklidir.

İspat: $f'(c)$ değeri verilmiş olsun. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ olduğunu ya da buna denk olan $\lim_{h \to 0} f(c+h) = f(c)$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. $h \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.\,h \end{aligned} \tag{4. 19}$$

olur. $h \to 0$ limitler alındığında,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(c+h) &= \lim_{h \to 0} f(c) + \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.\lim_{h \to 0} h \\ &= f(c) + f'(c).0 \\ &= f(c) \end{aligned} \tag{4. 20}$$

elde edilir.

[5] https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Newton/Quadratura/HarrisIQ.pdf

Tek taraflı limit alınırken devreye giren ekolojik ilişkilere benzer nedenlerden dolayı, f fonksiyonunun $x=c$ noktasında tek taraflı türevi varsa fonksiyon $x=c$ noktasında aynı yönde tek taraflı sürekli olmuş olur. Newton'un türevin sezgisel tanımını yaparken süreklilik kavramına ihtiyaç duyması, sürekliliğin türevlenebilirlik için ön şart niteliğinde olması *türev* temel aracının süreklilikten beslendiği göstermektedir.

Riemann integrali belirli bir aralıkta tanımlı olan fonksiyonların integralini hesaplamaya yönelik ilk tanım olarak kabul edilir. Riemann'ın ortaya koymuş olduğu belirli integral tanımı bazı matematikçiler tarafından yeterince genel olmamakla eleştirilmiştir. Eleştirilerin temel nedeni Riemann'in integrali sürekli veya sonlu sayıda süreksizlik içeren fonksiyonlar üzerinde açıklamaya yönelmesi olmuştur (Cajori, 2014). Bu durumu Van Vleck kısaca şu şekilde açıklamıştır:

> *Burada sonlu ancak sadece belirli dar kısıtlamalar altında sonsuz sayıda süreksizlik noktası bulunmakta idi. Her noktada süreksiz olan bir fonksiyonun, örneğin, integral aralığının her yerinde yoğun olan rasyonel noktalarda sıfıra ve aynı şekilde her yerde yoğun olan rasyonel noktalarda 1'e eşit olan bir fonksiyonun, Riemann anlamında integrali alınamaz idi (Van Vleck, 1916).*

Van Vleck bu açıklaması ile analitik düzlemde grafiği çizilen bir fonksiyonun her noktasında süreksiz olabileceğine işaret ederek bu tür fonksiyonlarda integral alma işleminin yapılabilmesine yönelik bir yaklaşıma ihtiyaç duyulduğunu belirtmiştir. Bu sorunun çözümüne yönelik önemli bir gelişme 1902 yılında Lebesgue (1875-1941) tarafından ortaya konulmuştur. Lebesgue, nokta kümeleri teorisi ile sürekli olmayan fonksiyonların da integrallerinin alınabileceğini ortaya koyarak Riemann'ın belirli integral tanımının genelleştirilmesini sağlamıştır (Lebesgue'den aktaran Cajori, 2014).

$[a,b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlardan hangilerinin integrallenebilir olduğunu tam olarak söyleyebilmek için Lebesgue integrali ve ileri matematik analiz bilgisine ihtiyaç duyulur. Özel olarak $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olan her fonksiyon ve $[a,b]$ üzerinde sonlu sayıda sıçramalı süreksizliği bulunan (parçalı sürekli fonksiyonlar) her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir. Bu durum kısaca şu teoremle izah edilebilir:

Teorem: Eğer bir f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ise veya f 'in bu aralıkta sonlu sayıda sıçramalı süreksizliği var ise bu durumda $\int_a^b f(x)dx$ belirli integrali vardır ve f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir (Thomas, Weir and Hass, 2015).

Yukarıda verilen teorem, bir fonksiyonun integrallenebilirliği açıklanırken *süreklilik* nesnesine ihtiyaç duyulduğunu, başka bir ifade ile *integral* nesnesinin *süreklilik* nesnesinden beslendiğini göstermektedir.

4.4.3. Türevin diğer temel araçlar ile ekolojik ilişkileri

Türevin limit ve süreklilik ile ekolojik ilişkisi çalışmanın önceki bölümlerinde açıklandığı için bu alt başlıkta sadece türevin integral ile ekolojik ilişkisi açıklanmıştır.

Türev ile integralin ekolojik ilişkisine yönelik en önemli gelişmelerden birinin Newton ve Leibniz'ın bir eğrinin altında kalan alanın türevin tersi alınarak hesaplanabileceğini kanıtlanmaları olduğu kabul edilir (Cajori, 2014). Kalkülüsün temel teoremi ve net değişim teorisi de integralin türevin tersi olarak tanımlanabileceğini göstermektedir.

Kalkülüsün temel teoremine göre eğer bir f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ise bu durumda,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (4.\ 21)$$

fonksiyonu da $[a,b]$ üzerinde süreklidir. Fonksiyon ayrıca (a,b) üzerinde türevlenebilirdir ve türevi,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (4.\ 22)$$

olarak bulunur. (4. 22) eşitliğine göre f fonksiyonunun önce integre edilip, sonra sonucun türevinin alınması durumunda tekrar f fonksiyonu elde edilir.

Kalkülüsün temel teoremine benzer bir şekilde net değişim teorisi de türev ile integral arasında ekolojik ilişkiden yararlanılarak elde edilir. Bu teoriye göre bir $a \le x \le b$ aralığı üzerinde $F(x)$ fonksiyonunun net değişimi onun değişim oranının integralidir ve

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx \qquad (4.\ 23)$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada b değişkeni x ile x'de t ile değiştirilirse,

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a) \tag{4. 24}$$

elde edilir. Böylelikle F fonksiyonunun önce türevi alınıp sonrasında sonucun integre edilmesiyle tekrar F fonksiyonu elde edilmiş olur.

İntegral alma yöntemlerinden değişken değiştirme ve kısmi integrasyon yöntemi integral ile türev kavramları arasındaki ekolojik ilişkiye yönelik önemli veriler içerir. Aşağıda bu yöntemler hakkında genel bilgilere yer verilmiştir.

f ve g fonksiyonları türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

$$\int f(g(x)).g'(x)dx \tag{4. 25}$$

integrali için,

$$u = g(x) \tag{4. 26}$$

değişken değiştirmesi yapılıp eşitliğin her iki tarafının diferansiyeli alınırken türev bilgisinden yararlanılarak,

$$du = g'(x)dx \tag{4. 27}$$

elde edilir. Ardından u ve du integralde yerine yazıldığında,

$$\int f(u)du \tag{4. 28}$$

şeklinde daha basit bir integral elde edilmiş olur. Bu integral hesaplandıktan sonra u yerine tekrar $g(x)$ fonksiyonu yazılarak işlemin sonucu x değişkenine göre bulunmuş olur.

Kısmi integrasyon yöntemi genellikle,

$$\int f(x)g'(x)dx \tag{4. 29}$$

şeklinde iki farklı türden fonksiyonun çarpımının integrali alınırken başvurulan ve türev bilgisine ihtiyaç duyulan bir yöntemdir. Bu yöntemin kullanımında $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ olmak üzere $u.v$ fonksiyonunun türevi alınarak,

$$\frac{d}{dx}(u.v) = v.\frac{du}{dx} + u.\frac{dv}{dx} \tag{4. 30}$$

elde edilir. Buradan,

$$u.\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}(u.v)-v.\frac{du}{dx} \tag{4. 31}$$

olarak bulunur. Her iki tarafın integrali alındığında,

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du \tag{4. 32}$$

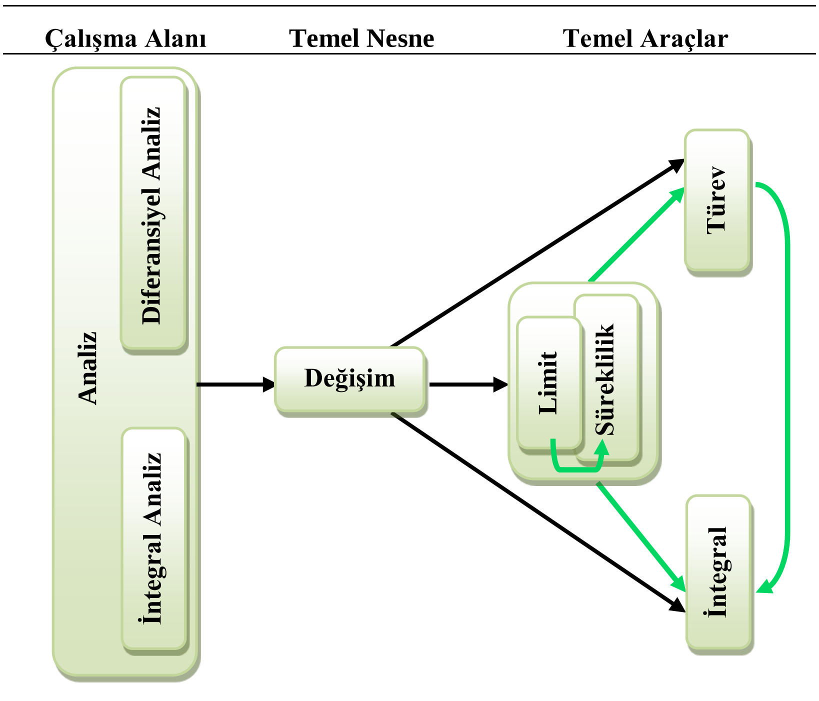
elde edilir.

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = \int u\,dv \tag{4. 33}$$

olduğundan bu eşitliğin sağ tarafı aynı zamanda (4. 29) integralinin de sonucu olur.

Tarihsel ve epistemolojik veriler değerlendirildiğinde, integral alma işleminin türev alma işleminin tersi olduğu ve integral alma yöntemleri kullanılırken türev kavramından yararlanıldığı görülmektedir. Bu durum global sitin *integral* temel aracının *türev* temel aracından beslendiğini göstermektedir. Öğretim programında türev ile integral arasında ilişki kurularak belirsiz integral hesaplamaları yapılmasının öngörülüyor olması (Bkz. Şekil 3.1) elde edilen tarihsel ve epistemolojik veriler ile örtüşmektedir.

Şekil 4.5'te global sitin temel araçları arasındaki ekolojik ilişkiler gösterilmiştir.



Şekil 4.5. *Analiz global sitinin temel araçları arasındaki ekolojik ilişkiler*

4.5. Global Sitin Teknikleri

Analiz global sitinin teknikleri, reel sayılar veya fonksiyonlardaki değişimin incelenmesi amacıyla sitin temel araçlarının işe koşulabilmesi için kullanılabilen yaklaşımlar olarak tanımlanabilir. 12. sınıf matematik öğretim programı değerlendirildiğinde analiz konularının öğretimi için nümerik değerler tablosu oluşturma, fonksiyon grafiklerinden yararlanma, limit, türev veya integral alma kuralları uygulayarak cebirsel hesap yapma gibi farklı yaklaşımların bir arada kullanımına önem verildiği görülmüştür (Çalışmanın *12. Sınıf İleri Düzey Matematik Dersi Öğretim Programı* başlıklı bölüm incelenebilir). Öğretim programının beklentileri göz önünde tutularak global sit analizin tarihsel gelişim süreci boyunca kullanılan farklı tekniklerin bir arada yer aldığı çok yönlü ve etkileşimli bir yapı oluşturabilecek biçimde inşa edilmesi uygun görülmüştür.

Milattan önceki dönemden günümüze kadarki veriler incelendiğinde; limit, türev veya integral hesabında ya da sürekliliğin incelenmesinde tarihsel gelişmelere bağlı olarak farklı yaklaşımların ön plana çıktığı görülür (Bkz. EK-2). Analitik geometrinin keşfinden önce günümüzde limit veya integral hesabı yapılarak çözülebilen problemler sentetik geometri bilgisi veya reel sayıların özellikleri kullanılarak elde edilen nümerik değerlerden yararlanılarak çözülmüştür. Tez çalışmasında bu yaklaşımlar sırasıyla *sentetik* ve *nümerik teknik* olarak adlandırılmıştır. Tüketme yöntemi kullanılarak yapılan alan hesabı bu tekniklerin bir arada kullanıldığı örnek bir durum olarak değerlendirilebilir. 17. yüzyılda analitik geometrinin keşfi ile birlikte cebir ile geometri bilgisinin bir arada kullanımına imkan sağlanmıştır. Newton ve Leibniz ile birlikte limit ve türev alma işlemleri fonksiyonların koordinat düzlemine çizilen grafiklerinden yararlanılarak yapılmaya başlanmıştır. Çalışmada analitik geometri bilgisine dayalı olan bu yaklaşım *analitik teknik* olarak adlandırılmıştır. Analitik tekniğin kullanımı ile birlikte farklı türden fonksiyonların limitlerini, türevlerini ve integrallerini almada kullanılabilen kuralların ortaya konulması sağlanmıştır. Bu kurallar yardımıyla cebirsel hesaplar yapılarak analiz problemlerinin hızlı ve sistematik bir yaklaşımla çözülmesine olanak sağlanmıştır. Çalışmada cebirsel hesaba dayalı olan bu yaklaşım *cebirsel teknik* olarak adlandırılmıştır. 19. yüzyılda limit ve sürekliliğin formel tanımlarının yapılması ile birlikte modern matematikte komşuluk kavramının ön planda olduğu $\varepsilon-\delta$ yaklaşımının kullanımı yaygınlaşmıştır. Çalışmada bu yaklaşım $\varepsilon-\delta$ *tekniği* olarak adlandırılmıştır. 20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile birlikte, cebirsel teknik kullanılarak çözülmesi zor olan problemlerin çözümlerinde nümerik tekniğin kullanımı tekrar popüler hale gelmiştir.

Çalışmanın bu bölümünde analiz problemlerinin çözümünde kullanılan tekniklere ilişkin tarihsel, epistemolojik ve didaktik verilere her bir teknik için ayrı ayrı yer verilmiştir. Her bir tekniğin limit, türev, integral almada veya sürekliliğin incelenmesinde nasıl kullanıldığı örnekler üzerinde açıklanmıştır.

4.5.1. Sentetik teknik

Çalışmada sentetik teknik, geometrik şekillerin uzunluk, alan veya hacimleri yardımıyla günümüzde analiz çalışma alanına giren problemlerin çözümünde kullanılan bir yaklaşım olarak tanımlanmaktadır. Tarihsel veriler incelendiğinde, analiz problemlerinin çözümünde kullanılan en eski yaklaşımlardan birinin sentetik teknik olduğu görülür (Bkz. EK-2). Sentetik teknik milattan önceki dönemlerden 17. yüzyıla kadar kullanılmaya devam etmiştir.

Milattan önceki dönemde günümüzde analiz bilgisi ile açıklanabilen çalışmaların büyük bir bölümü geometrik şekillerin alanlarının hesaplanmasına yönelik olmuştur. Bu çalışmalarda tüketme yöntemi kullanılarak düzgün çokgenlerin çevre veya alanları yardımıyla, çevreleri veya alanları bir formül kullanılarak hesaplanamayan geometrik şekillerin çevreleri veya alanları hesaplanmaya çalışılmıştır.

Tüketme yönteminin etkili bir yöntem olduğu söylenemez. Bunun temel nedenlerinden birisi yöntemin yapay bir yöntem olarak değerlendirilmesidir. Çoğu durumda bu yöntemin kullanılabilmesi için yapılacak hesaplamanın sonucun önceden bilinmesi gerekmektedir. Ayrıca bu yöntem çok fazla hesap yapmayı gerektirdiği için pratik bir yöntem de değildir (Dönmez, 2002). Tüketme yönteminin bu gibi dezavantajlarının olması matematikçileri yeni yöntemler geliştirmeye itmiştir. İlerleyen dönemlerde Oresme (1360) sınırlı bir bölgenin alanının hesaplanmasında dikdörtgenden yararlanma fikrini ortaya atmıştır. Cavalieri, *bölünmezler yöntemi* olarak bilinen bu yöntemi 1635 yılında yayımlanan eserinde detaylı bir şekilde izah etmiş, Roberval ile birlikte bir eğri ile doğru arasında kalan bölgenin alanının sonsuz sayıda dikdörtgenlerin alanları toplamı şeklinde bulunabileceğini ileri sürmüştür (Dönmez, 2002). Bu yöntem Antik Yunanlıların tüketme metodu ile Newton ve Leibniz’in metotları arasında bir yere sahiptir.

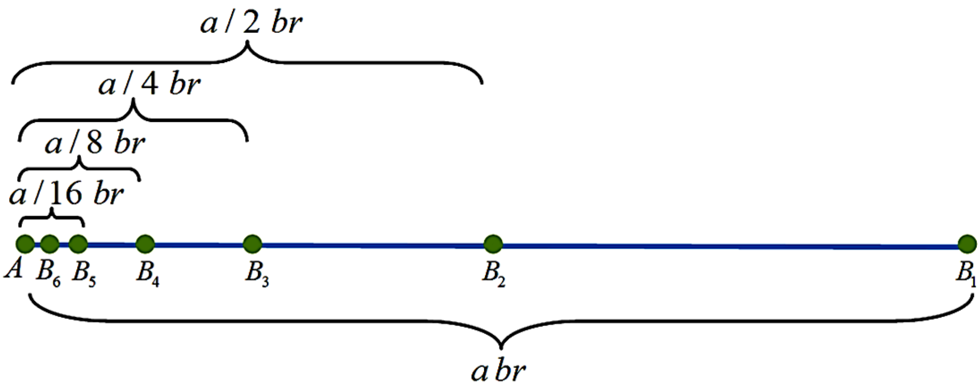
Bölünmezler yöntemine göre bir nokta bir doğrunun, bir doğru bir yüzeyin bölünmezidir. Her bölünmez kendisinden bir sonraki ve bir yüksek mertebedeki sürekliliği oluşturabilmektedir. Örneğin, düz çizgilerin bir araya gelmesi sonsuz küçük dikdörtgen yüzeylerinin oluşmasını sağlamaktadır. Böylece iki cismin ya da yüzeyin büyüklüğü, bir dizi düzlem ya da doğrunun toplanması suretiyle bulunabilmektedir. Başka bir ifadeyle, bu yöntem, bir cismin yüzeyinin dikdörtgenimsi bölgelere bölünerek alanının hesaplanabileceğine işaret etmektedir. Buna göre çizilen dikdörtgenlerin sayısı arttıkça hesaplanacak alan değerine yaklaşılmakta, dikdörtgen sayısının sonsuz olduğu varsayıldığında her bir dikdörtgenin karşılıklı ikişer kenarı birer çizgiye dönüşmektedir. Elde edilen dikdörtgenlerin alanlarının toplamı ile hesaplanacak alan değeri tam olarak bulunabilmektedir. Pascal bölünmezler metodunda geçen düz çizgiler toplamının aslında sonsuz küçük dikdörtgenlerin toplamı anlamına geldiğini belirtmiştir (Cajori, 2014). Pascal'ın bu ifadesinden de anlaşılabileceği gibi, bölünmezler yönteminin temelinde limit kavramı yer alır. Tüketme yöntemine göre daha kullanışlı olsa da, bölünmezler yöntemi bilimsel bir dayanağı olmadığı gerekçesiyle eleştirilmiştir. Bölünmezler yöntemi bu eleştirilere rağmen 50 yıl boyunca analiz hesaplamalarında kullanılmıştır. Cavalieri ve birçok ünlü matematikçi (Roberval, Fermat ve Pascal gibi) bu yöntemi kullanarak uzunluk, alan ve hacim hesaplamaları yapmıştır.

Newton ve Leibniz'e kadarki tarihsel süreçte analiz ile ilgili çalışmalar genel olarak uzunluk, alan ve hacim hesabına bağlı olarak gelişmeye devam etmiştir (Bkz. EK-2). Sentetik geometri bilgisine dayalı olarak kullanılan tüketme yöntemi, bölünmezler yöntemi gibi yöntemler, çizilen geometrik şekiller yardımıyla günümüzde limit ve integral kavramları yardımıyla çözülen problemlerin somutlaştırılarak incelenmesini sağlamıştır.

4.5.1.1. ***Limit hesabında sentetik tekniğin kullanımı***

Zenon'un ok paradoksu bir sayı dizisinin limitinin açıklanması için kullanılabilecek etkili bir örnektir. Bu paradoks Şekil 4.6 yardımıyla sentetik teknik kullanılarak açıklanmıştır.

Bir okun atıldığı nokta A, varacağı nokta B_1 ve A noktası ile B_1 noktası arasındaki uzaklık $|AB_1| = a\,br$ olsun.



$$|AB_2| = |B_2B_1|,\ |AB_3| = |B_3B_2|,\ |AB_4| = |B_4B_3|, ..., |AB_n| = |B_nB_{n-1}| \quad (n \geq 2,\ n \in N^+)$$

Şekil 4.6. *Zenon'un ok paradoksunun sentetik teknik kullanılarak ifade edilmesi*

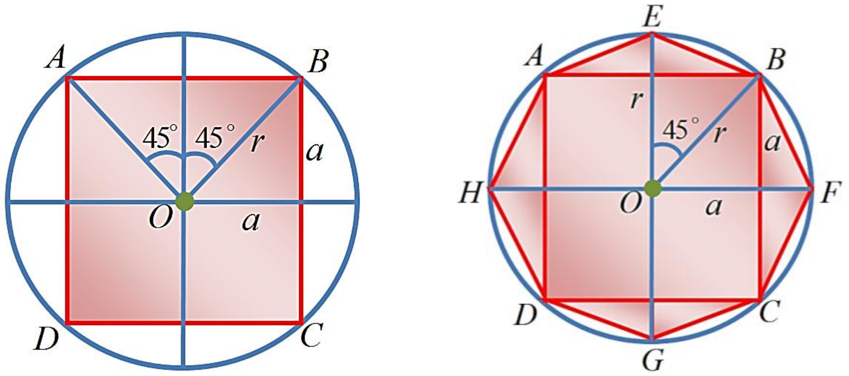
Ok paradoksuna göre, atılan bir okun B noktasına varmadan önce $[AB_1]$'nın orta noktası olan B_2 noktasına; B_2 noktasına varmadan önce $[AB_2]$'nın orta noktası olan B_3 noktasına ulaşması gerekir. Bu şekilde devam edildiğinde okun hareket etmeden A noktasında kalacağı sonucuna varılır. Bu durum okun gidebileceği $|AB_1| = a\,br$ uzaklığına göre değerlendirilecek olursa; okun $a\,br$ yol alabilmesi için öncelikle $\frac{a}{2}br$ yol alması, $\frac{a}{2}br$ yol alabilmesi için öncelikle $\frac{a}{4}br$ yol alması gerekir. Bu silsile sonsuza kadar devam eder ve nihayetinde okun başlangıçta $\frac{a}{\infty}br$ yol alması gerektiği sonucuna varılır ve paradoksa göre ok bulunduğu yerden hareket etmemiş olur.

4.5.1.2. *İntegral hesabında sentetik tekniğin kullanımı*

Antiphon, Archimedes gibi eski Yunanlı matematikçilerin bir dairenin alanını tahmin etmek için kullandıkları tüketme yöntemi integral hesabında sentetik tekniğin kullanımına yönelik iyi bir örnektir. Örnek 4.2'de bu yöntem kullanılarak bir dairenin alanının nasıl hesaplanabileceği açıklanmıştır.

Örnek 4.2. Yarıçapı r birim olan bir dairenin alanını tüketme yöntemini kullanarak tahmin etme.

Çözüm Şekil 4.7'de yarıçap uzunluğu r olan bir dairenin içine köşe noktaları bu daire üzerinde olacak şekilde düzgün çokgenler çizilmiştir.



(a) **(b)**

Şekil 4.7. *Dairenin alanının tüketme yöntemi ile hesaplanması*

Şekil 4.7 (a)'da verilen $ABCD$ karesinin alanı $2.\sin 90^{\circ}.r^2 = 2r^2$ olarak bulunur. Dairenin içine Şekil 4.7 (b)'deki gibi bir düzgün sekizgen çizildiğinde bu çokgenin alanı $4.\sin 45^{\circ}.r^2 = 2\sqrt{2}r^2 \approx 2,8284r^2$ olarak bulunur. Dairenin içine köşeleri daire üzerinde olacak şekilde bir düzgün onaltıgen çizildiğinde bu çokgenin alanı $8.\sin\left(22,5\right)^{\circ}.r^2 \approx 3,0614r^2$ olarak bulunur. Benzer bir şekilde dairenin içine kenar sayıları arttırılarak düzgün çokgenler çizilmeye devam edildiğinde oluşacak çokgenlerin alanları,

$$A = \frac{n}{2}.\sin\left(\frac{360}{n}\right)^{o}.r^2 \quad (n,\ kenar\ sayısı) \tag{4.34}$$

formülü ile hesaplanır. Tablo 4.1'de bu formül yardımıyla tüketme yöntemi kullanılarak r yarıçaplı bir dairenin alanı tahmin edilmiştir.

Tablo 4.1. *Tüketme yöntemi kullanılarak* r *yarıçaplı bir dairenin alanının tahmin edilmesi*

Dairenin İçine Çizilen Düzgün Çokgenin Adı	Düzgün Çokgenin Alan Formülü	Düzgün Çokgenin Alanı
Kare	$2.\sin 90^{\circ}.r^2$	$2r^2$
Düzgün Sekizgen	$4.\sin 45^{\circ}.r^2$	$\approx 2,8284r^2$
Düzgün Onaltıgen	$8.\sin\left(22,5\right)^{\circ}.r^2$	$\approx 3,0614r^2$
Düzgün Otuzikigen	$16.\sin\left(11,25\right)^{\circ}.r^2$	$\approx 3,1214r^2$

Tablo 4.1. (Devam) *Tüketme yöntemi kullanılarak r yarıçaplı bir dairenin alanının tahmin edilmesi*

Dairenin İçine Çizilen Düzgün Çokgenin Adı	Düzgün Çokgenin Alan Formülü	Düzgün Çokgenin Alanı
Düzgün Atmışdörtgen	$32.\sin(5,625)^{\circ}.r^2$	$\approx 3,1365r^2$
Düzgün Yüzyirmisekizgen	$64.\sin(2,8125)^{\circ}.r^2$	$\approx 3,1403r^2$
Düzgün İkiyüzellialtıgen	$128.\sin(1,40625)^{\circ}.r^2$	$\approx 3,1412r^2$
Düzgün Beşyüzonikigen	$256.\sin(0,703125)^{\circ}.r^2$	$\approx 3,141513r^2$
Düzgün Binyirmidörtgen	$512.\sin(0,3515625)^{\circ}.r^2$	$\approx 3,141572r^2$

Görüldüğü gibi dairenin içine çizilen çokgenlerin kenar sayısı arttıkça dairenin gerçek alan değerine gittikçe yaklaşılmaktadır. Fakat çizilen düzgün dörtgenlerin kenar sayıları arttıkça alanlarının hesaplanması güçleşmekte ve bilimsel hesap makinesine ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca sentetik teknik ile dairenin alanının tahmin edilebilmesi mümkün olsa bile bütün geometrik şekillerde uygulanabilecek bir matematiksel genellemeye gidilememektedir. Bütün bu sınırlamalardan dolayı matematikçiler sentetik tekniğe alternatif teknikler geliştirme çabasına girmişlerdir. Analitik ve cebirsel yaklaşımların geliştirilmesi ile sentetik yaklaşımın integral hesabında kullanımı azalmıştır.

4.5.2. Nümerik teknik

Milattan önceki dönemlerde nümerik teknik, günümüzde limit ve integral kavramları ile açıklanabilen problemlerin çözümünde kullanılmıştır. Bilgisayar ve iletişim teknolojilerinin gelişmesi ile birlikte nümerik teknik başta matematik ve mühendislik olmak üzere birçok farklı bilim dalında karşılaşılan problemlerin çözümünde kullanılmaya devam etmektedir.

Nümerik tekniğin analizde kullanımı milattan önceki dönemlere dayanır. Bu dönemlerde yapılan, bir parabol kesmesinin alanının bulunması, bir kürenin yüzey alanı ve hacminin bulunması gibi çalışmalarda nümerik teknik sentetik teknik ile beraber kullanılmıştır (Dönmez, 2002). Nümerik tekniğin bu şekilde yardımcı teknik olarak kullanımına Örnek 4.2 örnek olarak gösterilebilir. Bu örnekte yarıçapı r olan bir dairenin alanı tüketme yöntemi ile tahmin edilirken, daire içine çizilen çokgenlerin alan değerlerinden yararlanılmıştır.

Bazı fonksiyonlar karmaşık cebirsel ifadelere sahiptir. Bu şekildeki fonksiyonlarda cebirsel teknik kullanılarak limit, türev veya integral hesabı yapılması çoğu zaman zordur. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile birlikte günümüzde bu tür fonksiyonlar üzerinde limit, türev veya integral hesabı yapılırken de nümerik tekniğe sıklıkla başvurulmaktadır.

4.5.2.1. *Limit hesabında nümerik tekniğin kullanımı*

Bir fonksiyonun bir reel sayı değeri için limitinin olup olmadığı, bu sayının komşuluğundaki reel sayıların görüntülerinden elde edilen nümerik değerler tablosu yardımıyla incelenebilir. Böylelikle nümerik teknik kullanılarak *limit* temel aracı yardımıyla fonksiyonlardaki değişimin incelenmesine olanak sağlanır.

Örnek 4.3'te $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu bir durumda limit alma işlemi için nümerik tekniğe başvurulmuştur.

Örnek 4.3. $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ olmak üzere $\lim_{x \to 2} f(x)$ limitini nümerik teknik kullanarak bulma.

Çözüm $x = 2$ değeri için $f(x)$ fonksiyonunda $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Nümerik teknik kullanılarak (varsa) limitin bulunabilmesi için $f(x)$ fonksiyonunda x değişkenine 2 sayısının komşuluğunda değerler verilerek elde edilen görüntülerin belirli bir reel sayıya yaklaşıp yaklaşmadığı incelenmelidir.

Tablo 4.2'de $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ fonksiyonunun $x \to 2^-$ ve $x \to 2^+$ aldığı bazı değerler verilmiştir.

Tablo 4.2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ *limiti için nümerik değerler tablosu*

	x	$f(x)$		x	$f(x)$
	1,95	11,7025		2,05	12,3025
$x \to 2^-$	1,96	11,7616	$x \to 2^+$	2,04	12,2416
	1,97	11,8209		2,03	12,1809

Tablo 4.2. (Devam) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$ *limiti için nümerik değerler tablosu*

	x	$f(x)$		x	$f(x)$
	1,98	11,8804		2,02	12,1204
	1,99	11,9401		2,01	12,0601
$x\to 2^-$	1,995	11,970025	$x\to 2^+$	2,005	12,030025
	1,997	11,982009		2,003	12,018009
	1,999	11,994001		2,001	12,006001
	1,9999	11,99940001		2,0001	12,00060001

Tablo 4.2 incelendiğinde, $x\to 2^-$ ve $x\to 2^+$ $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ fonksiyonunun 12 sayısına giderek yaklaşan değerler aldığı görülür. Elde edilen nümerik değerlere göre limit değeri 12 olarak bulunur.

4.5.2.2. *Türev hesabında nümerik tekniğin kullanımı*

Sürekli bir fonksiyonun tanımlı olduğu bir noktada türevinin olabilmesi için bu noktanın sağından ve solundan çizilen kirişlerin eğim değerlerinin belirli bir reel sayıya yakınsaması gerekir. Örnek 4.4'te bir mutlak değer fonksiyonun kritik noktasında türevli olup olmadığı nümerik teknik kullanılarak belirlenmiştir.

Örnek 4.4. $f:R\to R,\quad f(x)=\left|x^2-4x-5\right|$ fonksiyonunun $x=5$ değeri için (varsa) türevini nümerik teknik kullanarak belirleme.

Çözüm f fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x-5, & x\le -1 \;\; veya \;\; x\ge 5 \\ -x^2+4x+5, & -1\prec x\prec 5 \end{cases} \tag{4. 35}$$

Buna göre $f\,'$ fonksiyonu,

$$f\,'(x)=\begin{cases} 2x-4, & x\le -1 \;\; veya \;\; x\ge 5 \\ -2x+4, & -1\prec x\prec 5 \end{cases} \tag{4. 36}$$

olarak yazılır. f fonksiyonunun $x=5$ noktasında türevli olabilmesi için $f\,'(5^+)=f\,'(5^-)$ eşitliğinin sağlanması gerekir. $f'(x)$ fonksiyonunun $x\to 5^-$ ve $x\to 5^+$ almış olduğu bazı değerler Tablo 4.3'te verilmiştir.

Tablo 4.3. *$f: R \to R, \quad f(x) = \left|x^2 - 4x - 5\right|$ fonksiyonunun $x = 5$ noktasındaki türevi için nümerik değerler tablosu*

	x	$f'(x) = -2x + 4$		x	$f'(x) = 2x - 4$
	4,95	-5,9		5,0001	6,0002
	4,96	-5,92		5,001	6,002
	4,97	-5,94		5,003	6,006
	4,98	-5,96		5,005	6,004
$f'(5^-)$	4,99	-5,98	$f'(5^+)$	5,01	6,02
	4,995	-5,99		5,02	6,04
	4,997	-5,994		5,03	6,06
	4,999	-5,998		5,04	6,08
	4,9999	-5,9998		5,05	6,1

Tablo 4.3 incelendiğinde $x \to 5^-$ türev değerlerinin -6'ya, $x \to 5^+$ ise 6'ya yaklaştığı görülür. Bu durumda, $f'(5^+) = f'(5^-)$ eşitliği sağlanamadığı için $f(x) = \left|x^2 - 4x - 5\right|$ fonksiyonunun $x = 5$ için türevi yoktur.

4.5.2.3. *İntegral hesabında nümerik tekniğin kullanımı*

Sonlu yaklaşımların limitleri teorisi 19. yüzyılda Riemann tarafından belirlenmiştir. Riemann, toplam sembolü kullanılarak ifade edilebilen *Riemann Zeta Fonksiyonu*[6] gibi çeşitli fonksiyonlar ortaya koymuş ve bu fonksiyonlar üzerine çalışmalar yaparak matematiğe önemli katkılar sağlamıştır. Genellikle bir fonksiyon eğrisinin altında kalan bölgenin yaklaşık alanının belirlenmesinde kullanılan toplama, bu konuda yapmış olduğu çalışmalarından ötürü Riemann toplamı adı verilmiştir (Cajori, 2014). Toplama işlemi, bölgenin farklı geometrik şekillere bölünüp (dikdörtgen veya yamuk gibi) fonksiyonun ölçülen bölgesine benzer bir alan çıkartılması, ardından da her bir şeklin alanının hesaplanması ve bu alanların toplanması adımlarından oluşur. Bu yaklaşım belirli integrallerin sonuçlarının bulunmasında nümerik bir hesap tekniği olarak da kullanılır. Kullanılan şekillerin sayısı arttıkça elde edilen toplam alan değeri belirli integralin ifade ettiği sayısal değere giderek yaklaşır.

---

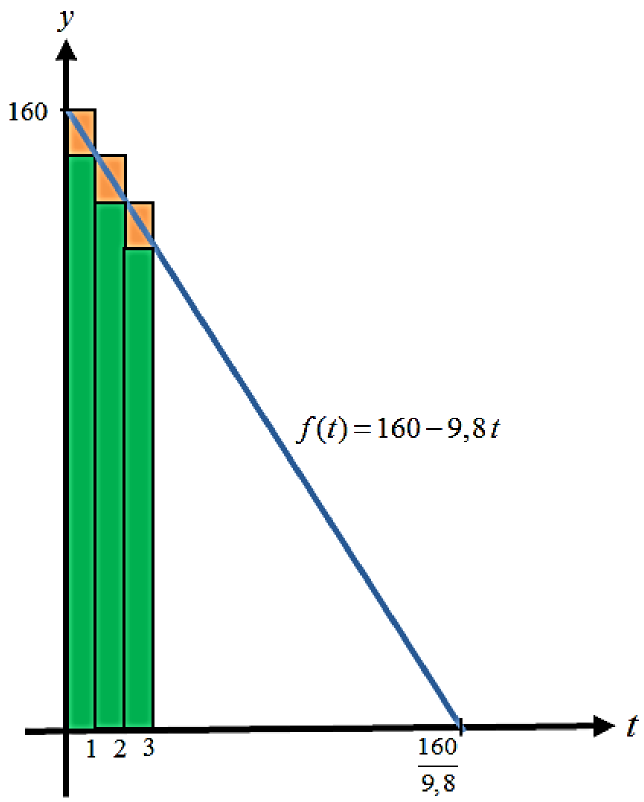
[6] Riemann zeta fonksiyonu asal sayıların sonsuzluğunun ispatı için kullanılabilen bir fonksiyondur.

Riemann Zeta Fonksiyonu : $\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s \succ 1)$

Örnek 4.5'te belirli integral ile ifade edilebilen bir problemin sonucu Riemann toplamı kullanılarak tahmin edilmiştir.

Örnek 4.5. Dik olarak havaya atılan ve zamana bağlı hız fonksiyonu $f(t)=160-9,8t$ m/sn olarak verilen bir merminin 3 saniyelik süre sonunda ne kadar yükseleceğini alt ve üst dikdörtgenlerin alanları toplamından yararlanarak tahmin etme (Kesin sonuç 435,9 m'dir).

Çözüm Hız-zaman fonksiyonun x ekseni ile arasında kalan sınırlandırılmış bölgenin alanı, belirlenen zaman aralığında alınan yolu verir. Alınan yol bu bölgeye çizilen alt ve üst dikdörtgenler yardımıyla bulunabilir. $f(t)=160-9,8t$ fonksiyonu için alt ve üst dikdörtgenlerin nasıl çizilebileceği Şekil 4.8'de gösterilmiştir.



Şekil 4.8. $f(t)=160-9,8t$ *fonksiyonu için alt ve üst dikdörtgenler*

Şekil 4.8 incelendiğinde $f(t)$ azalan bir fonksiyon olduğu için dikdörtgenlerin alanları hesaplanırken sol uç noktalarının seçilmesinin üst toplam tahminini, sağ uç noktalarının seçilmesinin ise alt toplam tahminini vereceği görülür.

Şekil 4.8'de $[0,3]$ aralığı 1 birim uzunluğundaki üç alt aralığa bölünmüştür. Buna göre üst dikdörtgenlerin alanları toplamı,

$$A_1 = 160.1 + (160 - 9,8.1).1 + (160 - 9,8.2).1 = 450,6 \qquad (4.\ 37)$$

olarak bulunur. Alt dikdörtgenlerin alanları toplamı,

$$A_2 = (160 - 9,8.1).1 + (160 - 9,8.2).1 + (160 - 9,8.3).1 = 421,2 \qquad (4.\ 38)$$

olur.

$[0,3]$ aralığı $\frac{1}{2}$ birim uzunluğundaki 6 alt aralığa bölünerek alt ve üst toplamlar hesaplandığında gerçek alan değerine daha yakın sonuçlar elde edilir. Buna göre üst dikdörtgenlerin alanları toplamı,

$$\begin{aligned} A_3 &= (160 - 9,8.0).\frac{1}{2} + (160 - 9,8.\frac{1}{2}).\frac{1}{2} + (160 - 9,8.1).\frac{1}{2} + (160 - 9,8.\frac{3}{2}).\frac{1}{2} \\ &+ (160 - 9,8.2).\frac{1}{2} + (160 - 9,8.\frac{5}{2}).\frac{1}{2} = 443,25 \end{aligned} \qquad (4.\ 39)$$

olarak bulunur. Alt dikdörtgenlerin alanları toplamı,

$$\begin{aligned} A_4 &= (160 - 9,8.\frac{1}{2}).\frac{1}{2} + (160 - 9,8.1).\frac{1}{2} + (160 - 9,8.\frac{3}{2}).\frac{1}{2} + (160 - 9,8.2).\frac{1}{2} \\ &+ (160 - 9,8.\frac{5}{2}).\frac{1}{2} + (160 - 9,8.3).\frac{1}{2} = 428,55 \end{aligned} \qquad (4.\ 40)$$

olur.

Tablo 4.4’te bazı alt aralık sayılarına göre ortaya çıkan bazı alan değerleri verilmiştir.

Tablo 4.4. *Aralık sayılarına göre alt ve üst alan değerleri tablosu (Thomas, Weir and Hass, 2015, s.250)*

Alt Aralıklar Sayısı	Alt Aralık Uzunluğu	Üst Alanlar Toplamı	Alt Alanlar Toplamı
3	1	450,6	421,2
6	1/ 2	443,25	428,55
12	1/ 4	439,58	432,23
24	1/8	437,74	434,06
48	1/16	436,82	434,98
96	1/32	436,36	435,44
192	1/64	436,13	435,67

Tablo 4.4 incelendiğinde, alt aralıkların sayısı arttıkça alt ve üst alanların toplamlarının gittikçe birbirlerine ve gerçek alan değerine yaklaştığı görülür (Thomas, Weir and Hass, 2015). Örneğin, alt aralıkların sayısı 3 iken üst alanlar toplamı ile alt alanlar toplamı arasındaki fark,

$$450,6-421,2=29,4 \tag{4. 41}$$

olmaktadır. Buna göre hata büyüklüğü,

$$|450,6-435,9|=|421,2-435,9|=14,7 \tag{4. 42}$$

olarak hesaplanır. Hata yüzdesi ise,

$$\frac{14,7}{435,9}\approx 0,3372 \tag{4. 43}$$

olarak bulunur.

Alt aralıkların sayısı 192 olduğunda ise üst alanlar toplamı ile alt alanlar toplamı arasındaki fark,

$$436,13-435,67=0,46 \tag{4. 44}$$

olmaktadır. Bu durumda sırasıyla hata büyüklüğü ve hata yüzdesi,

$$|436,13-435,9|=|435,67-435,9|=0,23 \tag{4. 45}$$

$$\frac{0,23}{435,9}\approx 0,0005 \tag{4. 46}$$

olarak bulunur. Böylelikle alt ve üst dikdörtgenlerin alanlarından elde edilen değerler yardımıyla nümerik teknik kullanılarak merminin ilk 3 saniyede ne kadar yükseldiği tahmin edilmiş olur. Riemann toplamı yaklaşımı ile elde edilen sayısal veriler nümerik tekniğin belirli integral hesabı yapılırken kullanılabileceğini göstermektedir.

4.5.3. Analitik teknik

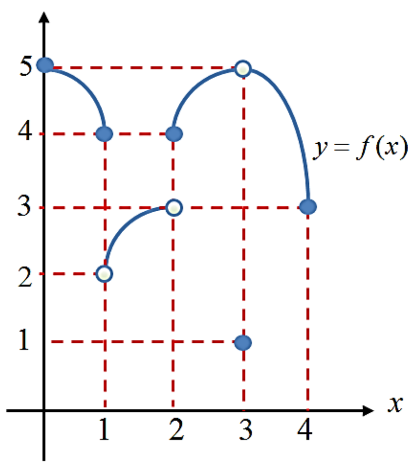
17. yüzyılda Descartes ve Fermat'ın analitik geometrinin temellerini atmasıyla birlikte analizin gelişimi hızlanmıştır. Bunun en önemli nedeni analitik geometrinin cebir ile sentetik geometri bilgisinin bir arada kullanılmasını sağlayarak fonksiyon grafikleri üzerinden limit, türev ve integral kavramlarının tanımlanmasına olanak sağlamış olmasıdır. Analitik geometrinin keşfedilmesi ile bir fonksiyonun bir reel sayı

değeri için limitinin olup olmadığının veya tanımlı olduğu aralıkta sürekliliğinin fonksiyon eğrisi üzerinde incelenmesine olanak sağlanmıştır. Böylelikle analitik geometri bilgisi kullanılarak cebir ile geometri arasında ekolojik bağ güçlendirilmiştir. Bir fonksiyonun artan veya azalan olmasının, yerel ekstremum noktalarının, konveks veya konkav olmasının, dönüm noktalarının ne anlama geldiği ve türev kavramının bütün bu durumlar ile ilişkisinin ne olduğu analitik düzlemde grafiği çizilen fonksiyon eğrisi yardımıyla incelenebilmiştir. Analitik düzlem kullanılarak grafikleri çizilen iki fonksiyon eğrisi arasında kalan sınırlandırılmış bölgenin alanının Riemann toplamı yardımıyla nasıl hesaplanabileceği somut bir biçimde açıklanabilmiş ve belirli integralin düzgün olmayan geometrik şekillerin alanlarını hesaplamadaki rolü ve etkinliği ortaya konulmuştur. Bu sayede tek başına geometrik yaklaşımın kullanımı ile ortaya çıkan kısıtlılığının ve tek başına cebirsel yaklaşımın kullanımı ile ortaya çıkan soyutluğun önüne geçilmiştir. Analitik yaklaşımın kullanımı ile birlikte limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarının anlamlandırılmasının yanı sıra, fonksiyonların karakteristik özelliklerinin neler olduğu ve bu özelliklerin belirlenmesinde limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarından nasıl yararlanılabileceği anlam kazanmıştır (Göker, 1997).

4.5.3.1. *Limit hesabında ve sürekliliğin incelenmesinde analitik tekniğin kullanımı*

Analitik tekniğin limit hesabında ve sürekliliğin incelenmesinde nasıl kullanıldığı Örnek 4.6'da verilen fonksiyon grafiğinden yararlanılarak açıklanmıştır.

Örnek 4.6.



Şekil 4.9. *Parçalı* $y = f(x)$ *fonksiyonunun grafiği*

Şekil 4.9'da verilen foksiyon grafiğinden yararlanarak $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$, $x = 1$ ve $x = 3$ noktalarında (varsa) limitini bulma ve sürekliliğini inceleme.

Çözüm Şekil 4.9 incelendiğinde f fonksiyonunun $[0, 4]$ aralığında tanımlı olduğu görülür. Tanım kümesinin alt sınırı sıfır reel sayısı olduğu için $x = 0$ noktasında limit alınırken x'e sadece sıfır sayısından büyük değerlerle (sağından) yaklaşmak mümkündür. Grafik incelendiğinde sıfır değerine sağdan yaklaşılması $\left(x \to 0^{+}\right)$ durumunda fonksiyonun gittikçe artan değerler alarak 5 değerine yaklaştığı görülür. Bu durumda,

$$\lim_{x \to 0^{+}} f(x) = 5 \tag{4. 47}$$

olup f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sağdan limitlidir. Ayrıca fonksiyon grafiğinden $f(0) = 5$ olduğu görülmektedir. Bu durumda,

$$\lim_{x \to 0^{+}} f(x) = f(0) = 5 \tag{4. 48}$$

olup f fonksiyonu $x = 0$ uç noktası için sağdan süreklidir.

Şekil 4.9'da verilen grafikte x'e birden daha küçük değerlerle (solundan) yaklaşıldığında $\left(x \to 1^{-}\right)$ fonksiyonun giderek azalan değerler alarak 4'e yaklaştığı görülmektedir. Bu durum,

$$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = 4 \tag{4. 49}$$

şeklinde ifade edilir. Grafik incelendiğinde, $x \to 1^{+}$ fonksiyonun giderek azalan değerler alarak 2'ye yaklaştığı görülür. Bu durumda,

$$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = 2 \tag{4. 50}$$

olarak bulunur. $x \to 1^{-}$ ve $x \to 1^{+}$ fonksiyon tek bir reel sayı değerine yaklaşmadığından $\left(\lim_{x \to 1^{-}} f(x) \neq \lim_{x \to 1^{+}} f(x)\right)$ $x = 1$ için fonksiyonun limiti yoktur.

Şekil 4.9 incelendiğinde, $x = 1$ noktasındaki limitsizliğin fonksiyon eğrisinde sıçramaya neden olduğu ve buna bağlı olarak fonksiyonun $x = 1$ noktasında süreksiz olduğu görülmektedir.

Şekil 4.9'da verilen grafiğe göre hem $x \to 3^{-}$ hem de $x \to 3^{+}$ fonksiyon 5'e yaklaşmaktadır. Bu durumda,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 5 \quad (4.51)$$

olup $x \to 5$ fonksiyon limitlidir.

f fonksiyonunun grafiğinden $f(3) = 1$ olduğu görülmektedir. Bu durumda $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$ olup $x = 3$ için limit değeri ile fonksiyon değeri birbirinden farklıdır. Şekil 4.9 incelendiğinde, ortaya çıkan bu eşitsizliğin fonksiyon grafiğinde $x = 3$ noktasında kopukluğun oluşmasına neden olduğu ve buna bağlı olarak fonksiyonun $x = 3$ noktasında süreksiz olduğu görülmektedir.

Örnek 4.6'da analitik tekniğin kullanımı limit alma işlemi yapılırken bir reel sayıya nasıl yaklaşıldığının fonksiyon grafiği üzerinden somut bir biçimde incelenmesine olanak sağlamıştır. Ayrıca, bir noktadaki limitsizliğin veya limit değeri ile fonksiyon değerinin eşit olmayışının sürekliliğe nasıl etki ettiği fonksiyon grafiği üzerinde incelenebilmiştir.

4.5.3.2. *Türev hesabında analitik tekniğin kullanımı*

Fizik alanında çalışan bilim insanları hızı sürekli değişen hareketli cisimlerin belli bir andaki hızının ne olduğu, belirli bir zaman aralığında ne kadar yol aldığı; matematik alanında çalışan bilim insanları ise geometrik şekillerin analizinin daha sistematik bir şekilde nasıl yapılabileceği sorularına cevap aramışlardır. Bu gibi sorulara cevap verilebilmesine yardımcı olacak sistematik yaklaşımların temeli, türev kavramını ortaya atan bilim insanı Newton ve Leibniz tarafından atılmıştır.

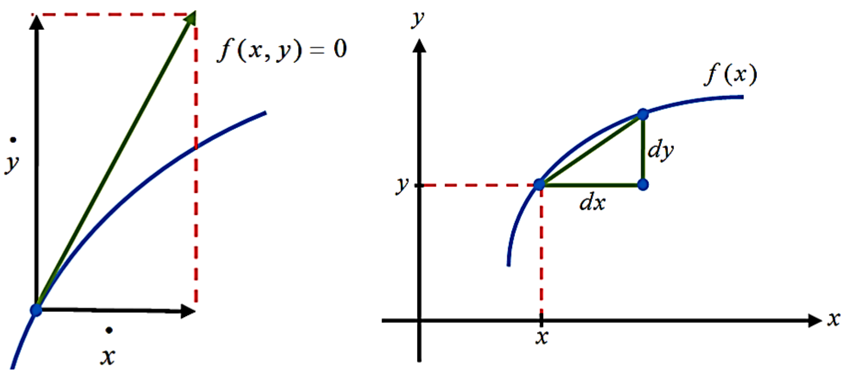
Newton ve Leibniz sonsuz küçükler hesabının bulunmasını sağlayan matematikçiler olarak kabul edilmektedir. Newton 1704 yılında yayımlanan kitabında, Leibniz ise 1684 ve 1686 yıllarında yayımlanan çalışmalarında sonsuz küçük kavramını açıklamıştır. Leibniz yapmış olduğu bu çalışmalarda koordinat düzleminde çizilen eğriyi sonsuz küçüklükte kenarlardan oluşan sonsuz kenarlı bir çokgen olarak ele almış ve ardışık iki x değerinin çok küçük olan farkını *diferansiyel* olarak adlandırmıştır. Fonksiyonda x'teki değişime karşılık gelen y'deki değişimi dy notasyonu ile ifade etmiştir. Leibniz, 1686'da yayımlanan *Acta Eruditorum* adlı bilimsel dergideki çalışmasında dx, dy niceliklerini *sonsuz küçük* olarak nitelendirmiştir (Cajori, 2014).

Leibniz'in yaklaşımında türev, analitik düzlemde çizilen eğri üzerinde bir (x, y) noktasındaki teğetin eğimi olan diferansiyellerin oranı olarak ifade edilmiştir. Bu yaklaşımına benzer bir şekilde, Newton da *Principia* adlı eserinin 1687'deki ilk baskısında türevin tanımını sonsuz küçüklere dayandırmıştır. Newton türevi, herhangi bir fonksiyonun değişkeninde son derece küçük bir değişme (dx) meydana geldiğinde, fonksiyonun kendisinde meydana gelen değişim ($f'(x)$) olarak tanımlamış ve

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \tag{4. 52}$$

şeklinde ifade etmiştir (Arslan ve Çelik, 2013; Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013).

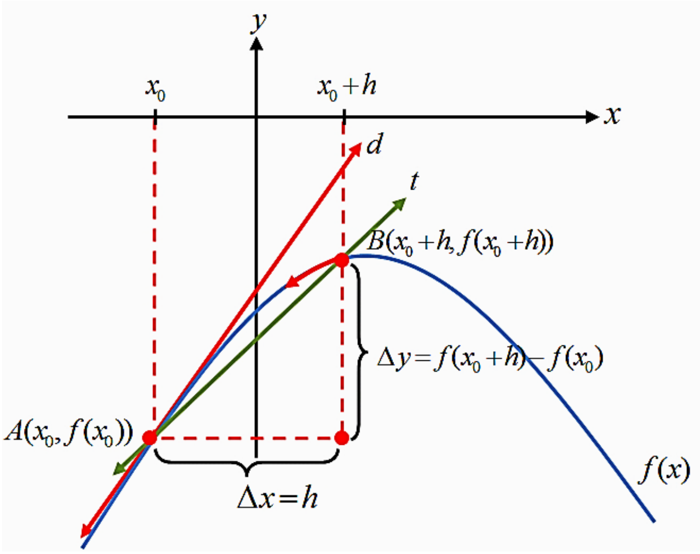
Newton ve Leibniz türev yaklaşımlarını, Şekil 4.10'da görüldüğü gibi, analitik düzlemde çizilen fonksiyon grafiklerinden yararlanarak açıklamışlardır.



Şekil 4.10. *Newton ve Leibniz'ın türev yaklaşımları (Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013).*

Bu yaklaşımlarda türev bir fonksiyon olarak düşünülmemiş, bunun yerine eğri eğiminin değişkenlerine bağlı olarak hesaplanması şeklinde algılanmıştır. Böylelikle, cebirsel özelliklerin ve işlemlerin ağırlıkta olduğu cebirsel yaklaşım yerine; teğet, eğim ve diferansiyel kavramlarının koordinat düzleminde temsil edildiği analitik yaklaşım benimsenmiştir. Newton'un türev yaklaşımında eğri üzerinde kesintisiz hareket fikri ile limit ve süreklilik kavramına, Leibniz'in yaklaşımında ise kesikli sonsuz küçük farklar fikri ile diferansiyel orana vurgu yapılmıştır.

Newton'ın yaklaşımı kullanılarak türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi Şekil 4.11'de incelenmiştir.



Şekil 4.11. *Newton yaklaşımı yardımıyla $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ değeri için türevi*

Şekil 4.11'de A noktası, f fonksiyonunun üzerinde bulunan ve apsisi x_0 olan bir nokta, t doğrusu A noktası ve bu noktaya yakın olan $B(x_0+h, f(x_0+h))$ noktasından geçecek şekilde çizilen bir kiriştir.

t kirişinin eğimi,

$$m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{4. 53}$$

olarak bulunur.

B noktası eğri boyunca hareket ettirilerek A noktasına yaklaştırıldığında h uzunluğu da giderek azalarak sıfıra yaklaşır $(h \to 0)$ ve fonksiyona teğet olan d doğrusunun eğimi,

$$m_d = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{4. 54}$$

olarak ifade edilir.

Elde edilen m_d eğim değeri aynı zamanda $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ değeri için türevi olur ve $f'(x) = m_d$ olarak belirlenir.

4.5.3.3. ***İntegral hesabında analitik tekniğin kullanımı***

Tarihsel veriler incelendiğinde, integral hesabı ile ilgili önemli gelişmelerin analitik geometrinin keşfedilmesinden sonra 17. yüzyılda yaşanmış olduğu görülür. Bu dönemde Newton fiziksel yöntemler, Leibniz ise geometrik yöntemler kullanılarak integral kavramını açıklamışlardır. Newton ve Leibniz, koordinat düzleminde çizilen bir eğrinin altında kalan bölgenin alanının türevin tersi alınarak hesaplanabileceğini kanıtlayarak analiz için oldukça önemli bir gelişmeye imza atmışlardır (Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013). Bu şekilde kolay bir hesaplama tekniği geliştirilerek analizin sentetik geometriden bağımsız bir şekilde gelişmesinin önü açılmıştır. Euler (1707-1783)'in analitik analizi sentetik analizden ayırmaya dönük çalışmalara yoğunlaşması sonucunda integral yardımıyla alan veya hacim hesabı yapılırken analitik yaklaşımın kullanımı yaygınlaşmıştır.

Günümüzde alan veya hacim hesaplamalarında analitik tekniğin kullanımı devam etmektedir. Analitik teknik bazı belirli integral sorularının integral alma işlemi yapmadan pratik bir yaklaşımla çözülmesine olanak sağlar. Örnek 4.7'de bu duruma örnek olabilecek bir belirli integral sorusu analitik teknik kullanılarak çözülmüştür.

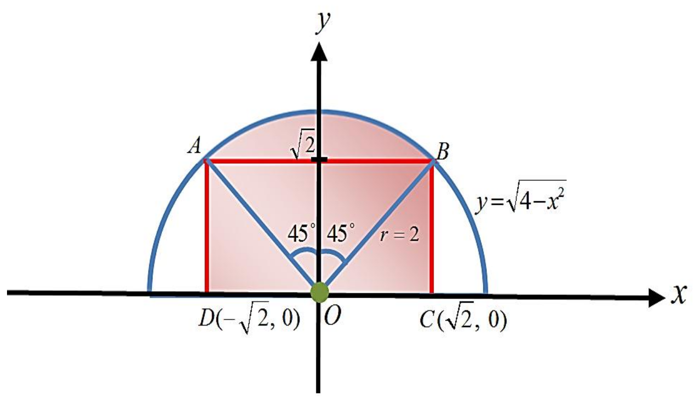
Örnek 4.7. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\, dx$ belirli integralini analitik teknik kullanarak hesaplama.

Çözüm $y=\sqrt{r^2-x^2}$ fonksiyonu geometrik olarak yarıçapı r olan yarım çemberi ifade eder. Buna göre örnekte verilen,

$$y=\sqrt{4-x^2}=\sqrt{2^2-x^2} \qquad (4.\ 55)$$

fonksiyonu yarıçapı $2br$ olan bir yarım çember denklemidir. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\, dx$ belirli integrali analitik düzlemde merkezi orijin olup yarıçapı 2 br olan dairenin içinde yer alan $x=\sqrt{2}$ ve $x=-\sqrt{2}$ doğruları ile sınırlandırılmış bölgenin alanını ifade eder. Bu bölgenin içerisine çizilebilecek ikizkenar dik üçgenler yardımıyla belirli integralin ifade ettiği alan hesaplanabilir

Şekil 4.12'de $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\, dx$ integralinin ifade ettiği bölge gösterilmiştir.



Şekil 4.12. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\, dx$ *integralinin ifade ettiği bölge*

Taralı bölgenin alanı şu şekilde hesaplanır:

Yarım çember içine çizilen $ABCD$ dikdörtgeni yardımıyla taralı alan çeyrek daire ve ikizkenar dik üçgenlere ayrılır. Elde edilen çeyrek dairenin alanı $A_1 = \dfrac{\pi.2^2.90^\circ}{360^\circ} = \pi\ br^2$, ikizkenar üçgenlerden her birinin alanı ise $A_2 = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1\ br^2$ olarak bulunur. Buna göre belirli integralin ifade ettiği bölgenin alanı,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\, dx = A_1 + 2A_2 = \pi + 2\ br^2 \tag{4. 56}$$

olarak bulunur.

4.5.4. Cebirsel teknik

Analitik teknik limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarının grafik üzerinde incelenmesine olanak sağladığı için etkili bir öğrenme tekniği olarak değerlendirilebilir. Fakat, karmaşık bir cebirsel yapıya sahip olan bir fonksiyonun analitik düzlemde grafiğini çizerek işlem yapmak pratik olmayabilir. Bu durumda cebirsel teknik kullanarak limit, türev, integral hesabı yapmak veya sürekliliği incelemek daha etkili bir yaklaşım sağlar. Örneğin, $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu durumda limit alma işlemi yapılırken fonksiyon grafiği çizerek limitin sonucunu belirlemek yerine, fonksiyon çarpanlarına ayrılarak ifade belirsizlik durumundan çıkarılıp limit alma işlemine devam edilebilir ya da türev veya integral alma kuralları kullanılarak farklı türden fonksiyonların (logaritmik, trigonometrik, polinom, üstel fonksiyonlar gibi) türevleri veya integralleri alınabilir.

4.5.4.1. ***Limit hesabında ve sürekliliğin incelenmesinde cebirsel tekniğin kullanımı***

Cebirsel yaklaşım kullanılarak limit hesabı yapılmasına yönelik önemli gelişmeler 17. yüzyılın sonunda yaşanmıştır. Bernoulli (1667-1748) hem pay hem de paydaları sıfıra veya ∞'a giden rasyonel cebirsel ifadelerin limitlerini hesaplamak için türev alma işlemi kullanarak etkili bir kural geliştirmiştir. Bu kural 1696 yılında L'Hôpital (1661-1704)'in yayımladığı analiz konularından oluşan kitabında açıklanmıştır (Özmantar ve Bozkurt, 2013). Bu kurala göre $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinin olduğu durumlarda limit alma işlemi yapılırken belirsizlik kalkıncaya kadar fonksiyonun pay ve paydasının türevi alınmaktadır. Belirsizlik bu şekilde kaldırıldıktan sonra elde edilen limit değeri başlangıçtaki fonksiyonun aynı noktadaki limitine eşit olmaktadır. Günümüzde bu kural *L'Hôpital kuralı* olarak bilinmektedir.

Çarpanlara ayırma işlemi, belirsizliklerin olduğu durumlarda limit alma işlemi yapılırken başvurulan en temel cebirsel işlemlerden biridir. $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ gibi belirsizliklerin olduğu durumlarda limit alma işlemi yapılırken fonksiyon çarpanlarına ayrılarak belirsizlik durumu ortadan kaldırıldıktan sonra limit alma işlemi yapılır. Fakat bazı fonksiyonları çarpanlarına ayırmak uzun cebirsel işlemleri yapmayı gerektirir. Bu tür durumlar için L'Hôpital kuralı hızlı ve etkili çözümler sağlar.

Aşağıda verilen örneklerde çarpanlara ayırma işlemi ve L'Hôpital kuralı uygulanarak limit alma işlemleri yapılmıştır.

Örnek 4.8. $f(x)=\dfrac{2x^3-11x^2+20x-12}{\left(x-2\right)^2}$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ limitini cebirsel teknik kullanarak bulma.

Çözüm $f(x)$ fonksiyonu $x=2$ değeri için $\frac{0}{0}$ belirsizliğine sahiptir. Belirsizliğin kaldırılması için fonksiyonun payı çarpanlarına ayrılıp sadeleştirme işlemi yapıldığında,

$$f(x)=\frac{(2x-3)(x-2)^2}{(x-2)^2}=2x-3 \tag{4. 57}$$

elde edilir. Limit alma işlemi yapıldığında sonuç,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(2x-3)=1 \tag{4. 58}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.9. $f(x)=\dfrac{x^2-\sin x}{x^3}$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ limitini cebirsel teknik kullanarak bulma.

Çözüm $f(x)$ fonksiyonunda $x=0$ değeri için $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Ardışık olarak L'Hôpital kuralı uygulanarak belirsizlik ortadan kaldırıp limit alma işlemi yapıldığında sonuç,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6} \tag{4. 59}$$

olarak bulunur.

4.5.4.2. *Türev hesabında cebirsel tekniğin kullanımı*

Bir $y=f(x)$ eğrisinin $A(x_0,\ y_0)$ noktasındaki türevi limitin olması koşuluyla,

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4. 60}$$

limiti ile bulunur. Cebirsel teknik kullanılarak farklı türden fonksiyonların türevleri alınırken (4. 60)'ta verilen ve limit işlemi yapılarak elde edilen türev alma kurallarından yararlanılır.

Örneğin, $f(x)=\sin ax$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktası için türevi,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin ax-\sin ax_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\dfrac{a(x-x_0)}{2}\cos\dfrac{a(x+x_0)}{2}}{x-x_0}=a\ \cos ax_0 \tag{4. 61}$$

olarak bulunur. Bu sonuç bütün x_0 noktaları için genellendiğinde $f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)=a\ \cos ax$ olarak bulunur.

4.5.4.3. *İntegral hesabında cebirsel tekniğin kullanımı*

17. yüzyılda Newton ve Leibniz'ın analitik teknik kullanarak türev kavramını ortaya atmaları ve integralin türevin tersi olarak nitelendirilebileceğini ifade etmelerinden sonra türev ve integralin genelleştirilmesi üzerine çalışmalar yoğunlaşmıştır. Bu amaç çerçevesinde yapılan çalışmalar sonucunda Gregory (1638-1675) analiz için oldukça önemli olan integralin temel teoremini bulmuştur (Dönmez, 2002). Leibniz 29 Ekim 1675 tarihinde günümüzde de kullanılan yeni integral notasyonunu ''*omn* yerine $\int$ ve *omn.l* yerine de $\int l$ kullanmak daha yararlı olacaktır.'' ifadesi ile açıklamış ve ardından bu notasyonu kullanarak,

$$\int x = \frac{x^2}{2}, \quad \int (x+y) = \int x + \int y \tag{4. 62}$$

gibi basit integralleri vermiştir. Leibniz 11 Haziran 1677 tarihli bir makalede toplam, çarpım, bölüm, kuvvet ve köklerin diferansiyeli için doğru kuralları vermiştir. Newton ise 1664-1690 yılları arasında, toplam şeklinde verilen fonksiyonların integrallerini ayrı ayrı integraller alarak toplama ve bazı üstel fonksiyonların integrallerini alma gibi, bazı integral alma kurallarını açık bir şekilde genelleştirerek ifade etmiştir (Cajori, 2014). İlerleyen dönemlerde integralin ters türev olma özelliğinden yararlanılarak logaritmik, üstel, trigonometrik, ters trigonometrik, polinom fonksiyonlar gibi birçok farklı türden fonksiyon için integrasyon kuralları elde edilmiştir.

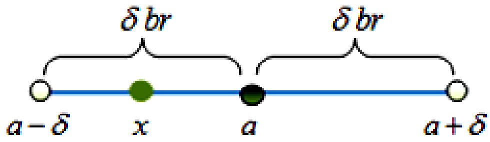
İntegrasyon kuralları yardımıyla cebirsel işlemler yapılarak, sentetik ve nümerik teknik gibi zaman alıcı yaklaşımlara ihtiyaç duyulmadan, fonksiyonların integralleri hızlı ve sistematik bir biçimde alınabilmektedir. Bu durum, cebirsel tekniğin integral hesabında kullanılabilen etkili bir yaklaşım olduğunu göstermektedir.

4.5.5. $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$ tekniği

Epistemolojik veriler incelendiğinde, $\varepsilon - \delta$ tekniğinin limit kavramının ekolojik ilişkilerine yönelik önemli veriler içerdiği görülmüştür. İlk kez Weierstrass tarafından yapılan limitin formel tanımının $\varepsilon - \delta$ tekniğine dayanıyor olması buna örnek olarak gösterilebilir. Analiz kavramları arasındaki ekolojik ilişkilerin ortaya konulmasında üstlendiği görevler dikkate alınarak global sitte $\varepsilon - \delta$ tekniğine de yer verilmiştir.

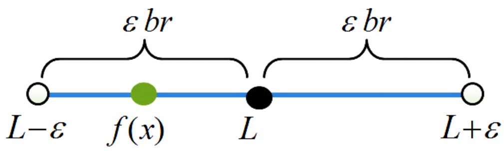
$\varepsilon-\delta$ tekniği, komşuluk kavramına vurgu yapılarak limitin formel yaklaşımla ele alındığı bir tekniktir. Bu yaklaşımda ε ve δ ile ifade edilen uzunlukların komşuluk kavramı ile ilişkisi büyük önem kazanmaktadır. Aşağıda bu ilişkiye yönelik açıklamalar yapılmıştır.

f fonksiyonu a noktasını da içeren bir aralıkta tanımlı olsun (fonksiyon $x=a$'da tanımlı olmak zorunda değildir). δ, a'nın üzerinde çalışılacak komşuluğunu ifade etmek için kullanılır. Buna göre a'nın δ komşuluğu, δ birim solu ile δ birim sağı arasında bulunan reel sayılardan oluşur ve bir uzunluğu ifade ettiği için δ pozitif bir reel sayıdır (Bkz. Şekil 4.13).



Şekil 4.13. *$\varepsilon-\delta$ tekniğinde a reel sayısının δ komşuluğu*

$x=a$'nın δ birim solu ile δ birim sağı arasında yer alan bütün reel sayıların, f fonksiyonuna göre görüntülerinin bir $y=L$ reel sayısının ε birim solu ve ε birim sağı arasındaki reel sayılar olduğu varsayılsın. İşte $y=L$ nin de yer aldığı bu aralık L'nin ε komşuluğu olarak ifade edilir (Bkz. Şekil 4.14). δ gibi ε'da uzunluk ifade ettiği için pozitif bir reel sayıdır.



Şekil 4.14. *$\varepsilon-\delta$ tekniğinde L reel sayısının ε komşuluğu*

Özetlemek gerekirse, $\varepsilon-\delta$ tekniğine göre limit, her $\varepsilon \succ 0$ sayısına karşılık gelen ve her x için,

$$0 \prec |x-a| \prec \delta \Rightarrow |f(x)-L| \prec \varepsilon \tag{4. 63}$$

olacak şekilde $\delta \succ 0$ sayısının olması gerektiğine dayanır (Thomas, Weir and Hass, 2015).

$\varepsilon - \delta$ tekniğine genellikle formel tanımlara dayalı olarak limit alma işleminin yapıldığı ya da sürekliliğin incelendiği durumlarda başvurulur. $\varepsilon - \delta$ tekniğinde komşuluk kavramı, eşitsizlik ve reel sayıların özelliklerine ilişkin formel bilgilerden yararlanılarak açıklandığı için bu teknik limit hesabında kullanılan diğer yaklaşımlara göre daha güç anlaşılır. Bu yüzden $\varepsilon - \delta$ tekniği kullanılırken ε ve δ komşuluğundan ne kastedildiğinin daha iyi anlaşılabilmesi için genellikle limit hesabı yapılacak fonksiyonun analitik düzlemdeki grafiğinden yararlanılır.

4.5.5.1. *Limit hesabında $\varepsilon - \delta$ tekniğinin kullanımı*

Limit kavramı, Newton ve Leibniz'in sonsuz küçük adı verilen kavrama ihtiyaç duymaları ve sonsuz küçükler hesabına yönelik çalışmalar yapmalarıyla beraber 17. yüzyıldan itibaren bugün bilinen anlamda kullanılmaya başlanmıştır. Fakat bu dönemde sonsuz küçükler ile ilgili gerekli ispatlar yapılamadığı için Leibniz'in *diferansiyel* olarak adlandırdığı sonsuz küçük kavramı ile ilgili bazı çelişkiler ortaya çıkmıştır. Örneğin, Berkeley (1685-1753) sonsuz küçükler kullanılırken dx'in sıfırdan farklı sayılarak payda da kullanıldığı, sonrasında ise sıfıra eşitlendiği çelişkisine dikkat çekerek Newton ve Leibniz'in eksiklerini ifade etmiştir (Arslan ve Çelik, 2013: Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013). Bu çelişkilerin giderilebilmesi için limitin formel tanımına ihtiyaç duyulmuş ve bu tanım üzerinde çalışmalar yoğunlaşmıştır. Bu çalışmalar neticesinde ortaya çıkan $\varepsilon - \delta$ tekniği ilk kez Cauchy'nin *Cours d'Analyse* adlı eserinde (1821) kullanılmıştır. Bu eserde, "x in büyüyen değerleri için $f(x+1) - f(x)$ farkı k gibi bir limite yakınsar." şeklinde ifade edilen teoremin ispatında şu ifadelere yer verilmiştir:

> *ε ile seçebileceğimiz en küçük sayıyı ifade edelim. Mademki x in büyüyen değerleri $f(x+1) - f(x)$ farkının k gibi bir değere yakınsamasını sağlıyor, o halde öyle bir h değeri bulunabilir ki x'ler h'den büyük veya eşit olduklarında söz konusu fark her zaman $k-\varepsilon,\ k+\varepsilon$ aralığının içinde kalır (Cauchy, 1821).*

Cauchy'nin, $\varepsilon - \delta$ tanımında bir fonksiyonun noktasal ve düzgün sürekliliğini ve noktasal ve düzgün yakınsaklığını ayırt edemediği ifade edilerek bu tanım eksik bulunmuştur. Weierstrass'ın $\varepsilon - \delta$ yaklaşımını kullanarak limit ve sürekliliğin formel tanımlarını yapması ile birlikte bu eksiklik büyük ölçüde giderilmiştir (Arslan ve Çelik, 2013).

$\varepsilon-\delta$ tekniği sadece limit kavramı tanımlanırken değil, limitle ilgili teoremlerin ispatında da kullanılır. Örnek 4.10'da $\varepsilon-\delta$ tekniği kullanılarak,

$$\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) \tag{4. 64}$$

eşitliğinin nasıl sağlandığı gösterilmiştir.

Örnek 4.10. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=L+M \tag{4. 65}$$

eşitliğinin doğruluğunu $\varepsilon-\delta$ tekniğini kullanarak gösterme.

Çözüm $\varepsilon\succ 0$ değeri verilmiş olsun. $0\prec|x-a|\prec\delta$ eşitsizliğini sağlayan her x reel sayısı için $\left|f(x)+g(x)-\left(L+M\right)\right|\prec\varepsilon$ olacak şekilde bir δ sayısının olduğu bulunmalıdır. Bu terimler bir araya getirildiğinde üçgen eşitsizliğinden;

$$|f(x)+g(x)-(L+M)|=\left|\left(f(x)-L\right)+\left(g(x)-M\right)\right|\le|f(x)-L|+|g(x)-M| \tag{4. 66}$$

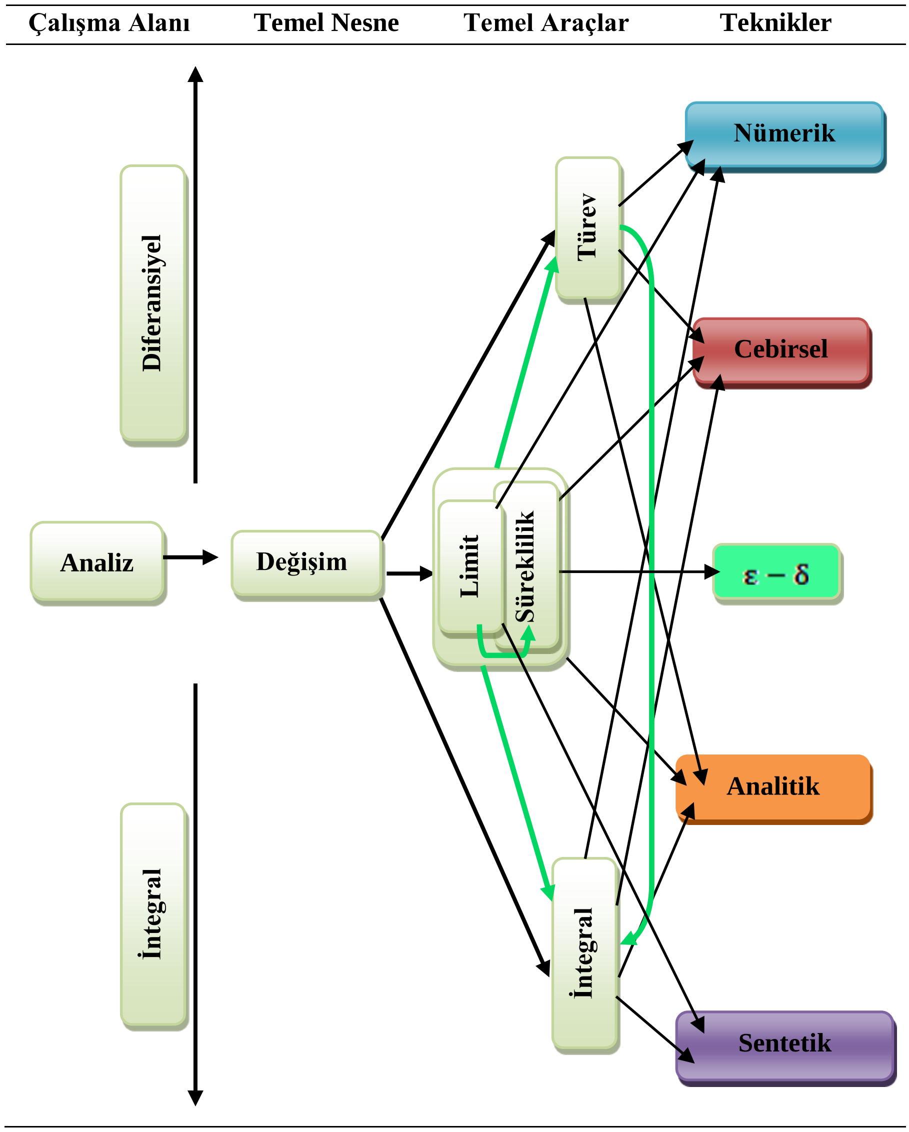
elde edilir. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ olduğundan $0\prec|x-a|\prec\delta_1$ eşitsizliğini sağlayan her x değeri için $|f(x)-L|\prec\frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $\delta_1\succ 0$ sayısı bulunabilir. Benzer bir şekilde $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ olduğundan $0\prec|x-a|\prec\delta_2$ eşitsizliğini sağlayan her x değeri için $|f(x)-M|\prec\frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $\delta_2\succ 0$ sayısı da bulunabilir.

δ, $\delta_1$ve δ_2'nin en küçüğü olsun. Eğer $0\prec|x-a|\prec\delta$ ise $|x-a|\prec\delta_1$, $|f(x)-L|\prec\frac{\varepsilon}{2}$ eşitsizlikleri elde edilir ve $|x-a|\prec\delta_2$ olur. Ayrıca $0\prec|x-a|\prec\delta$ ise $|g(x)-M|\prec\frac{\varepsilon}{2}$ olacaktır. O halde,

$$|f(x)+g(x)-(L+M)|\prec\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \tag{4, 67}$$

olur ve (4. 65) eşitliği elde edilir (Thomas, Weir and Hass, 2015).

Şekil 4.15'te analiz global sitinin; *çalışma alanı, temel nesneler, temel araçlar* ve *teknikler*den oluşan bölümü verilmiştir.



Şekil 4.15. *Analiz global sitinin temel araçları ile teknikleri arasındaki ekolojik ilişkiler*

Şekil 4.15'ten anlaşıldığı üzere nümerik, cebirsel ve analitik teknik analiz global sitinin dört temel aracıyla da kullanılabilen en kapsamlı tekniklerdir. $\varepsilon - \delta$ tekniği limit ve süreklilik özelinde bir teknik olarak ortaya çıkarken, sentetik teknik daha çok integral bağlamında ve belirli bir oranda da limit-süreklilik bağlamında başvurulabilen bir tekniktir.

4.6. Kavram -1 Nesneleri

Global sitin inşasına *kavram-1, kavram-2 ve kavram-3* olmak üzere üç farklı kategoride yer alacak nesnelerin belirlenmesi ve bu nesneler arasındaki ekolojik ilişkilerin değerlendirilmesi ile devam edilmiştir. Bu üç kategoride yer alacak nesnelerin global sitte yer alan tekniklerin kullanımı ile birlikte devreye girerek reel sayılar ve fonksiyonlardaki değişimin incelenmesine hizmet ettikleri varsayılmaktadır. *Kavram – 1* nesneleri bu bağlamda değerlendirilebilecek en özel nesnelerdir. *Kavram-2* nesneleri *kavram-1* nesnelerini, *kavram-3* nesneleri ise *kavram-2* nesnelerini doğrulayan veya anlamlandıran daha genel nesnelerdir. Buna göre, *kavram – 1, kavram – 2* ve *kavram – 3* nesneleri özelden genele ekolojik ilişkiler barındıran nesne grupları olarak da nitelendirilebilir.

Tanımlar matematiksel düşüncelerin temel yapı taşları olarak nitelendirilir. Bir matematiksel kavramın oluşturulmasında, bu kavramın diğer kavramlardan ayırt edici olan özelliklerinin belirlenmesinde veya matematiksel düşüncelerin ifade edilmesinde tanımlar önemli bir rol oynar (Çakıroğlu, 2013). Çalışmanın bu bölümünde limit, türev veya integral alırken ya da süreklilik incelenirken farklı tekniklerin kullanımına bağlı olarak hangi özel nesnelere (*kavram – 1* nesneleri) ihtiyaç duyulacağı, sitin temel araçlarının formel tanımlarından yola çıkılarak belirlenmiştir.

Öğretim programında, öğrencilerin matematiksel iletişim becerilerini geliştirmeleri için matematiksel dili matematiğin kendi içinde, farklı disiplinlerde ve kendi yaşantılarında uygun ve etkili bir biçimde kullanma davranışı göstermeleri gerektiği belirtilmiştir (MEB, 2013). Öğretim programının *Matematiksel İlişkilendirme Yapabilme* alt başlığında, öğrencilerde ilişkilendirme becerisinin geliştirilmesi için matematiksel kavram ve kuralların farklı temsil biçimleriyle gösterilmesine; farklı temsil biçimleri arasında ilişki kurulmasına ve farklı temsiller (sayısal, sembolik, geometrik/grafiksel vb.) arasında geçişler yapılmasına önem verildiği ifade edilmiştir (MEB, 2013). Çalışmada öğretim programının hedef ve beklentileri göz önünde tutularak, öğrencilerin matematiksel iletişim ve ilişkilendirme becerilerini geliştirmelerinde kritik rol oynayan analiz kavramları belirlenmiştir. Global sitin *kavram-1* kategorisinde yer alan bu nesnelere, analiz öğretimindeki didaktik önemlerine vurgu yapmak amacıyla ***kritik nesneler*** adı verilmiştir.

4.6.1. $\varepsilon - \delta$ tekniğinin kullanımına bağlı olarak devreye giren kavram–1 nesneleri

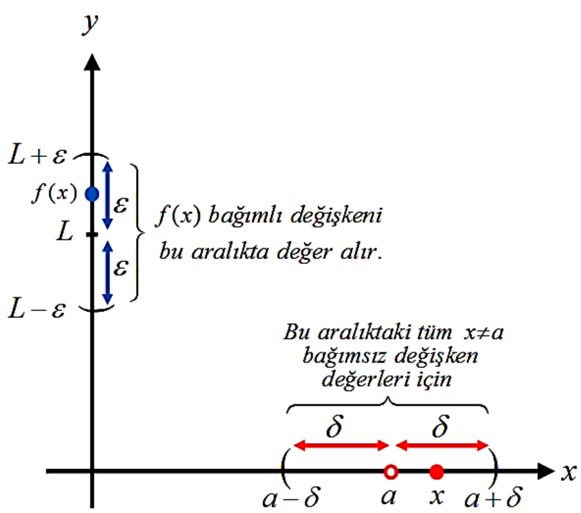
İlk kez Weierstrass tarafından yapılan limitin formel tanımı $\varepsilon - \delta$ tekniğine dayanır. Limit hesabında $\varepsilon - \delta$ tekniğinin kullanımına bağlı olarak devreye giren özel nesnelerin belirlenmesi amacıyla aşağıda limitin formel tanımına yer verilmiştir.

Limitin $\varepsilon - \delta$ Tanımı: $y = f(x)$, a civarındaki bir açık aralıkta tanımlı olan (a'da tanımlı olmayabilir) bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon \succ 0$ değerine karşılık, $0 \prec |x-a| \prec \delta$ eşitsizliğini sağlayan bütün x'ler için $|f(x) - L| \prec \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta \succ 0$ sayısı bulunabilirse, x a'a yaklaşırken, $f(x)$ L limitine yaklaşıyor denir ve bu durum,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad (4.\ 68)$$

şeklinde ifade edilir.

Şekil 4.16'da limitin tanımında geçen $0 \prec |x-a| \prec \delta$ ve $|f(x) - L| \prec \varepsilon$ eşitsizliklerinin ne anlam ifade ettikleri analitik düzlemde gösterilmiştir.



Şekil 4.16. *Limitin tanımında geçen $0 \prec |x-a| \prec \delta$ ve $|f(x) - L| \prec \varepsilon$ eşitsizliklerinin analitik düzlemde gösterilmesi (Thomas, Weir and Hass, 2015, s.58)*

Tanıma göre bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $x \to a$ limiti bulunurken; bağımsız değişken x'in a'nın $(a-\delta, a+\delta)$ komşuluğunda aldığı değerlere karşılık, bağımlı değişken $f(x)$'in L sayısının $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ komşuluğunda aldığı değerler göz önünde tutulur. Buna göre $x \to a$ fonksiyonun limiti L ise L sayısının $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ komşuluğu için a'nın $(a-\delta, a+\delta)$ şeklinde bir delik komşuluğu vardır. Bu delik komşulukta yer alan değerlerin $y = f(x)$ fonksiyonuna göre görüntüsü L'nin seçilen komşuluğunda yer alır.

Örnek 4.11'de limit alma işlemi için $\varepsilon-\delta$ tekniğinin kullanımına yönelik bir örneğe yer verilmiştir.

Örnek 4.11. $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$ eşitliğini $\varepsilon-\delta$ tekniği kullanarak belirleme.

Çözüm Limit tanımına göre $a=2$, $f(x)=2x+1$ ve $L=5$ olarak alınsın. Keyfi $\varepsilon\succ 0$ için öyle uygun bir $\delta\succ 0$ değeri bulunmalıdır ki x, $a=2$'nin komşuluğunda bulunup $x\neq 2$ olsun. Yani,

$$0\prec|x-2|\prec\delta \tag{4. 69}$$

şartını sağlayan her durumda $f(x)$, $L=5$'in ε komşuluğunda olsun. Bu durumda,

$$|f(x)-5|\prec\varepsilon \tag{4. 70}$$

eşitsizliği yazılabilir. (4. 70) eşitsizliği geriye doğru işletilerek elde edilen,

$$\begin{aligned}|(2x+1)-5|=|2x-4|&\prec\varepsilon\\ 2|x-2|&\prec\varepsilon\\ |x-2|&\prec\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{4. 71}$$

eşitsizliğine göre $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ olarak alınabilir. Böylelikle,

$$0\prec|x-2|\prec\delta=\frac{\varepsilon}{2} \tag{4. 72}$$

eşitsizliği elde edilir ve

$$|(2x+1)-5|=|2x-4|=2|x-2|\prec 2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \tag{4. 73}$$

sağlanarak $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$ olduğu ispatlanmış olur.

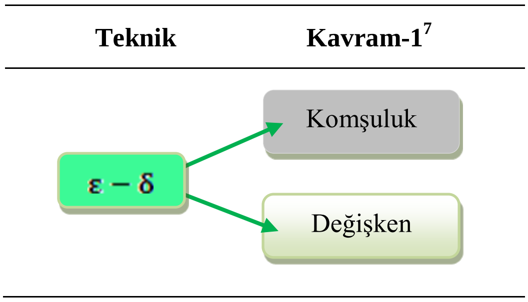
Örnek 4.11'in çözümünde *komşuluk* nesnesinden yararlanılarak bağımlı değişkenin $\varepsilon\succ 0$ komşuluğu için uygun bir $\delta\succ 0$ komşuluğunun bulunabileceği gösterilmiş ve böylece $x\to 2$ limit işleminin sonucunun 5'e eşit olduğu bulunmuştur.

Limitin $\varepsilon-\delta$ tanımı, bu tanıma ilişkin yapılan açıklamalar ve Örnek 4.11 değerlendirildiğinde şu sonuçlara varılmıştır:

- Limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı ve limit alma işlemleri yapılırken bağımlı ve bağımsız değişkenlerdeki değişim ile ilgilenilmiştir. Değişkenlerdeki değişimin limit alma işlemine nasıl etki ettiğinin anlaşılabilmesi için öncelikle değişken kavramının iyi anlaşılmış olması gerekmektedir. Bu husus dikkate alınarak *değişken,* $\varepsilon - \delta$ tekniğinin ilişkili olduğu *kavram-1* nesnelerinden biri olarak belirlenmiştir.
- $\varepsilon - \delta$ tekniği kullanılarak bir fonksiyonun bir noktadaki limiti belirlenirken, fonksiyonun bu noktanın komşuluğundaki davranışı göz önünde tutulmuştur. Bu durum, $\varepsilon - \delta$ tekniği kullanılarak yapılan limit alma işleminin komşuluk kavramı üzerine inşa edildiğini göstermektedir. Bu husus dikkate alınarak *komşuluk,* $\varepsilon - \delta$ tekniğinin ilişkili olduğu *kavram-1* nesnelerinden biri olarak belirlenmiştir.

Limitin öğretilmesi ve öğrenilmesindeki en büyük zorluklardan biri, kavramın bilişsel yönünün matematiksel tanımı yapılırken göz ardı edilmesinden kaynaklanır. Matematiksel anlamda limitin anlaşılabilmesi için bu kavramın tanımında geçen temel kavramların özümsenmesi önem kazanır. Limit tanımında geçen komşuluk kavramı bilişsel yönü ile öğretilmeden limit problemleri çözüldüğünde öğrenciler limitin asıl konseptini tam olarak edinemeden bu kavramı günlük hayatlarından edindikleri tecrübelerle ilişkilendirerek öğrenme eğilimi göstermeye başlayabilir. Bu sonuç, limit kavramı ile ilgili sezgisel bir yaklaşımın hakim olmasına neden olarak öğrencilerin günlük hayatta kullanılan limit konsepti ile matematik eğitiminde karşılaşılan limit kavramı arasındaki farklılıkları algılayamamasına neden olabilir (Cornu, 1991). Limitin fonksiyonun geçemeyeceği bir sayı olarak algılanması, limit değerine asla ulaşılmayacağı algısı, limitin istenildiği kadar kesin yapılabilecek olan bir yaklaştırmayı ifade ettiği yanılgısı, yaklaşılan değer fonksiyonda yerine yazılarak limit değerine ulaşılabileceği düşüncesi bu kapsamda değerlendirilebilecek yanılgılardan bazılarıdır (Özmantar ve Yeşildere, 2013). Ortaya çıkan bu yanılgılar, analiz çalışma alanında öğrencilerin matematiksel iletişim ve ilişkilendirme becerilerini geliştirmelerinde komşuluk kavramına kritik ekolojik görevler düştüğünü göstermektedir. Bu hususa dikkat çekilerek ***komşuluk*** **nesnesi global sitin kritik nesnelerinden birisi** olarak belirlenmiştir.

Şekil 4.17'de $\varepsilon - \delta$ tekniğinin ilişkili olduğu *kavram-1* nesneleri verilmiştir.

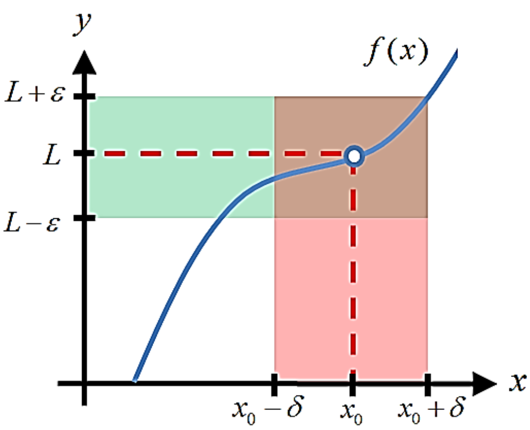


Şekil 4.17. $\boldsymbol{\varepsilon-\delta}$ *tekniğin ilişkili olduğu kavram-1 nesneleri*

4.6.2. Analitik tekniğin kullanımına bağlı olarak devreye giren kavram–1 nesneleri

Analitik teknik kullanılarak bir f fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki (fonksiyon bu noktada tanımlı olmak zorunda değil) limiti incelenirken, fonksiyonun koordinat düzlemine çizilen grafiğinden yararlanlır. f fonksiyonunun x_0 noktasında limitinin olabilmesi için x_0 noktası civarındaki tüm x değerleri için tanımlı olması gerekir. Bu durumda x değerleri x_0'a yeterince yaklaştığında f fonksiyonu da bir L reel sayısına yaklaşıyor ise f fonksiyonunun x_0 noktasında limitinin L sayısı olduğu söylenir. Yukarıda geçen “x_0 noktası civarındaki tüm x değerleri” ve “x, x_1'e yeterince yaklaştığında” gibi ifadelerin matematiksel olarak ne anlam taşıdıklarının açıklanmasında *komşuluk* nesnesi kritik ekolojik görevler üstlenir.

Şekil 4.18'de *komşuluk* nesnesinin ekolojik desteği ile, analitik teknik kullanılarak $y=f(x)$ fonksiyonunun $x\to x_0$ limiti gösterilmiştir.



Şekil 4.18. $y=f(x)$ *fonksiyonunun* $x\to x_0$ *limiti*

[7] *Kavram-1* kategorisinde koyu renkle boyalı olan hücreler kritik nesnelerdir.

Şekil 4.18 incelendiğinde “ x_0 noktası civarındaki tüm x değerleri’’ ifadesi ile, x_0’ın δ komşuluğu olan $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ şeklindeki bir açık aralıkta bulunan x değerlerinin kastedildiği görülür. Buna göre $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ aralığında bulunan x değerleri x_0 sayısına yaklaştıkça elde edilen görüntüler de L’nin ε komşuluğunda L değerine yaklaştığı için $f(x)$ fonksiyonunun $x \to x_0$ limiti L’dir.

Şekil 4.18’de yapılan limit alma işleminde, x bağımsız değişkenine x_0 sayısına yaklaşan değerler verilmesine karşılık, elde edilen bağımlı değişken değerlerine göre limit değerinin belirlenmesi *değişken* nesnesinin ekolojik katkılarıyla gerçekleşmektedir. Ayrıca fonksiyon grafiği üzerinde bulunan noktaların apsislerinin $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ aralığında x_0 değerine yaklaşmalarına karşılık bu noktaların ordinatlarının $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$ aralığında L değerine yaklaşıyor olması, limit alma işleminde *nokta* nesnesine de ekolojik görevler düştüğünü göstermektedir.

Bir fonksiyonun bir noktada limiti alınırken fonksiyonun bu noktadaki görüntüsüyle değil, o noktanın komşuluğunda yer alan noktaların davranışları ile ilgilenilir. Bu durumda fonksiyonların tanım kümesinde yer almayan noktalarda limitsiz olacaklarını söylemek yanlış olur. Tanımsızlığın olduğu noktalarda limitin olup olmadığına karar verilebilmesi için sağdan ve soldan limit alma işlemlerine başvurulur.

Analitik teknik kullanılarak tanımsızlığın olduğu noktalarda sağdan ve soldan limit alma işlemi yapılırken ortaya çıkan ekolojik ilişkilerin sistemli bir biçimde incelenebilmesi için öncelikle tanımsızlığın olası nedenleri üzerinde durulmasında yarar vardır.

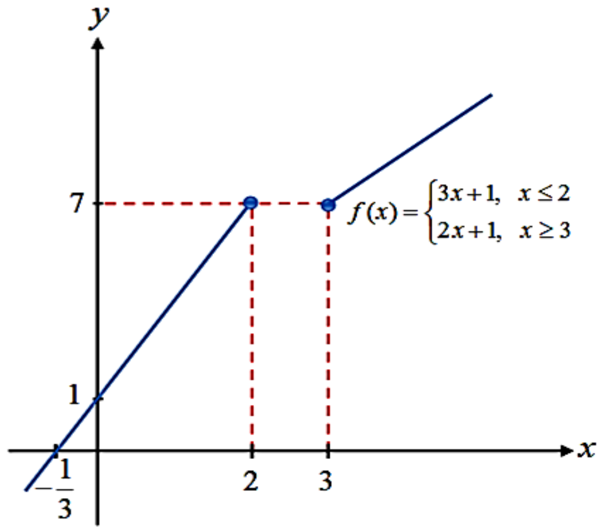
Bir fonksiyonun tanım kümesinde yer verilmeyen elemanlar için aşağıda sıralanan üç farklı sebepten bahsedilebilir.

- Eleman keyfi olarak tanım kümesinin dışında bırakılmış olabilir.
- Kavramsal tutarlılık bazında empoze edilmiş olabilir.
- Kesir şeklinde bir fonksiyon söz konusu olup ifadeyi tanımsız yapan elamanlar için fonksiyon tanımsız olabilir (Özmantar ve Bozkurt, 2013).

Tanım kümesinde yer verilmeyen elemanın dışarıda bırakılma sebepleri sürece dahil olan kavram(lar)ın tanımı ya da tanımsızlık durumuna yol açması gibi sebeplere dayanmıyor ise bu durumda keyfi olarak belirlenen tanımsızlık söz konusudur.

Örnek 4.12'de keyfi tanımsızlığa sahip olan bir fonksiyonun koordinat düzleminde çizilen grafiğinden yararlanılarak limit alma işlemi yapılmıştır.

Örnek 4.12.



Şekil 4.19. $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\le 2\\ 2x+1, & x\ge 3\end{cases}$ *parçalı fonksiyonunun grafiği*

Şekil 4.19'da grafiği verilen f fonksiyonunun $x\to 2^+$ limitini inceleme.

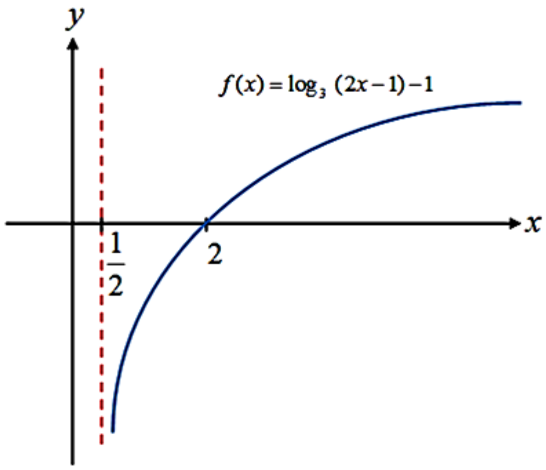
Çözüm Şekil 4.19 incelendiğinde, f parçalı fonksiyonunun $(2,3)$ aralığındaki reel sayı değerleri için keyfi olarak tanımsız bırakıldığı görülmektedir. Buna göre $x=2$ noktasının sağ tarafında kalan f fonksiyonunun tanmlı olabileceği bir komşuluğunun belirlenmesi mümkün değildir. Buna bağlı olarak 2 reel sayısına sağından yaklaşılamadığı için $x\to 2^+$ fonksiyon limitsizdir.

Örnek 4.12'de f parçalı fonksiyonunun analitik teknik kullanılarak $x\to 2$ limiti incelenirken; gerek fonksiyon grafiğinin çizilmesinde, gerekse limit alma işleminin yapılmasında *tanımsızlık* nesnesi devreye girerek ekolojik görevler üstlenmiştir.

Üzerinde çalışılan fonksiyonun veya fonksiyonda yer alan ilişkili kavramların tanımlanma şeklinden kaynaklanarak ortaya çıkan tanımsızlık empoze edilen tanımsızlıktır.

Örnek 4.13'te empoze edilen tanımsızlığa sahip olan bir fonksiyonun koordinat düzleminde çizilen grafiğinden yararlanılarak limiti incelenmiştir.

Örnek 4.13.



Şekil 4.20. $f(x)=\log_3(2x-1)-1$ *fonksiyonunun grafiği*

Şekil 4.20'de grafiği verilen f fonksiyonunun $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$ limitini inceleme.

Çözüm Şekil 4.20 incelendiğinde f fonksiyonunun, logaritmik fonksiyonların tanımı gereği, $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ aralığında tanımsız olduğu görülür. Buna göre $\frac{1}{2}$ sayısına solundaki komşuluğundan yaklaşılması mümkün olmadığı için $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$ fonksiyon limitsizdir.

Örnek 4.12'nin çözümünde de olduğu gibi f fonksiyonunun analitik teknik kullanılarak $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$ limitsiz olduğu belirlenirken *tanımsızlık* nesnesi devreye girerek ekolojik görevler üstlenmiştir.

Analiz çalışma alanında limit alma işlemi gerçekleştirilirken sıklıkla belirsizlik durumları ile karşılaşılır. Buna karşılık belirsizlik kavramı matematikte *belirsiz terim, belirsiz değer* ve *belirsiz form* olmak üzere üç farklı durumu ifade etmek için kullanılır. Aşağıda bu belirsizlik durumları ile ilgili bilgilere yer verilmiştir.

Belirsiz Terim: Cebirsel bir ifadede yer alan ve neye işaret ettiği tam olarak belirlenemeyen nesneler belirsiz terim kapsamına girer. *Nesne* kelimesi ile cebirsel ifadeler yazılırken kullanılan bilinmeyen, değişken veya parametreler kastedilmektedir. Örneğin, $3x-5=x+2$ denkleminde kullanılan x sembolü bir bilinmeyen olup aynı zamanda belirsiz terimdir. Çünkü; x 'in ne olduğunun bulunabilmesi için cebirsel ve aritmetik işlemlerin yapılması gerekir.

Belirsiz Değer: Matematikte farklı olası değerlerden geçerli olanın bilinmediği durumlarda belirsiz değer ile karşılaşılır. Örneğin, x sonlu bir sayı olmak üzere $\frac{0}{0}=x$ eşitliği yazılsın. Bu durumda $0=0.x$ elde edilir ve $\forall x \in R$ için bu eşitlik sağlanır. Fakat reel sayı değerlerinden hangisinin tercih edileceği belli değildir.

Belirsiz Form: Sadece limit alma işlemi esnasında karşılaşılan belirsizlik durumlarıdır. 7 farklı belirsizlik formu vardır. Bunlar: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$, 1^{∞}, 0^{0} ve ∞^{0} belirsizlikleridir (Özmantar ve Bozkurt, 2013). Çalışma boyunca, aksi belirtilmedikçe, belirsizlik kelimesi ile bu türden belirsizlikler kastedilmiştir.

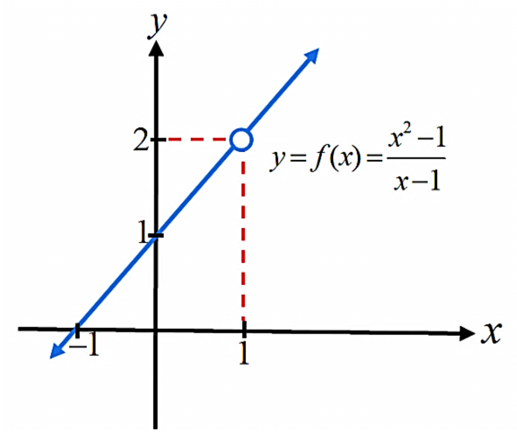
Tablo 4.5'te belirsiz form kapsamına giren belirsizlik türleri ile ilgili örneklere yer verilmiştir.

Tablo 4.5. *Limit alma işlemi yapılırken karşılaşılan belirsizlik formları için örnekler*

Belirsizlik Formu	Örnek
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 7x}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-5}{x^3+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x!}{x^x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x+1}$
$\infty-\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x-3}\right)$
$0.\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^3+4x^2-1}.\frac{x^2-5x+1}{x+1}$
1^{∞}	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+x}{x^3}\right)^x$
0^0	$\lim\limits_{x\to 3}\left(x-3\right)^{2x-6}$
∞^0	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Örnek 4.14'te rasyonel bir fonksiyonun $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu noktadaki limiti analitik düzlemde verilen grafiğinden yararlanılarak incelenmiştir.

Örnek 4.14.



Şekil 4.21. $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ *fonksiyonunun grafiği*

Şekil 4.21'de grafiği verilen f fonksiyonunun $x \to 1$ limitini inceleme.

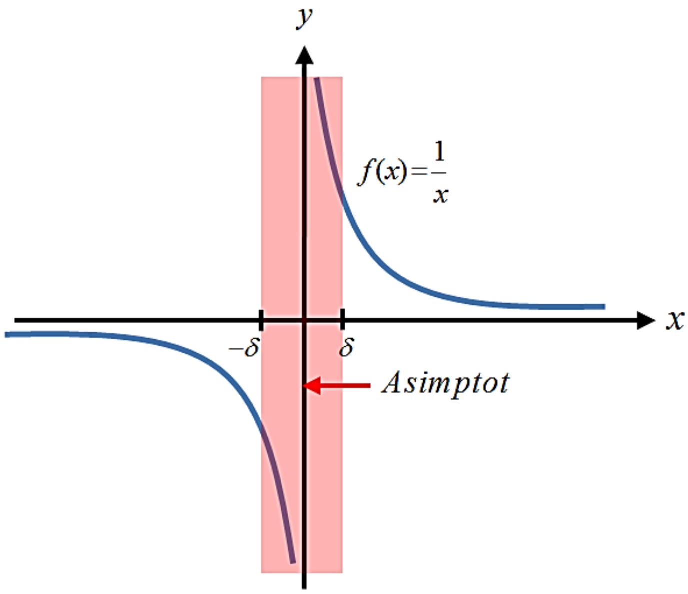
Çözüm Şekil 4.21 incelendiğinde, $x=1$ değeri için ortaya çıkan $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin f fonksiyonunda tanımsızlığa neden olduğu görülür. Grafiğe göre $x \to 1^+$ ve $x \to 1^-$ fonksiyon 2 sayısına yaklaştığı için,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \tag{4. 74}$$

olarak bulunur.

Analitik teknik kullanılarak gerek $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonunun tanımsız olduğu nokta belirlenirken, gerekse $x \to 1$ bu fonksiyonun limiti alınırken *tanımsızlık* ve *belirsizlik* nesneleri devreye girerek ekolojik görevler üstlenmiştir.

Şekil 4.22'de $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun tanımsız olduğu $x=0$ noktasındaki limiti, analitik teknik kullanılarak incelenmiştir.



Şekil 4.22. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *fonksiyonunun tanımsız olduğu noktada limitinin incelenmesi*

Şekil 4.22'de grafiği verilen $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $x=0$ noktasında tanımsızdır. Grafiğe göre x bağımsız değişkeni $(-\delta,\ \delta)$ aralığında 0'a giderek yaklaşan değerler aldığında bağımlı değişken bir reel sayıya yaklaşmak yerine $+\infty$ veya $-\infty$'a ıraksadığı için $x\to 0$ fonksiyonun limiti yoktur. Bu durum *sonsuzluk* nesnesi ile analitik teknik arasında ekolojik ilişkilerin olduğunu göstermektedir. Şekil 4.22 incelendiğinde, *asimptot* nesnesinin bu ekolojik ilişkinin oluşumuna katkı sağladığı görülür. Buna göre, $x=0$ asimptot doğrusu $f(x)$ fonksiyonunun; $x\to 0^{+}$ sürekli artarak $+\infty$'a ıraksadığının ve $x\to 0^{-}$ sürekli azalarak $-\infty$'a ıraksadığının gösterilmesine hizmet etmektedir.

Analitik teknik kullanılarak yapılan limit alma işlemleri değerlendirildiğinde şu sonuçlara varılmıştır:

- Analitik teknik kullanılarak limit alma işlemi yapılırken bağımlı ve bağımsız değişkenlerdeki değişim ile ilgilenilmiştir. Bu bağlamda değerlendirme yapılarak *değişken* nesnesi analitik tekniğin ilişkili olduğu *kavram -1* nesnesi olarak belirlenmiştir.
- Bağımlı ve bağımsız değişkenin aldığı değerler analitik düzlemde gösterilirken geometrik nesne olarak noktalardan yararlanılmıştır. *Nokta* nesnesi böylelikle

değişkenlerdeki değişimin fonksiyon grafiği üzerinde oluşturduğu etkinin incelenmesine ekolojik katkı sağlayan *kavram -1* nesnesi olarak belirlenmiştir.

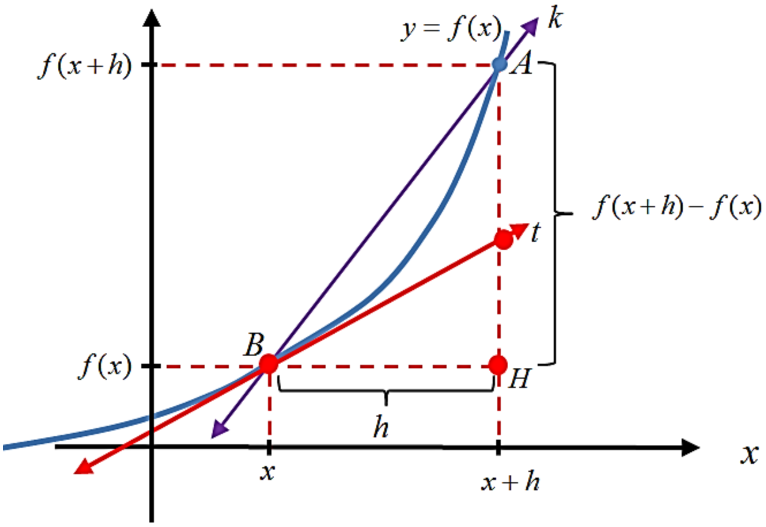
- Analitik teknik kullanılarak bir fonksiyonun belirli bir noktadaki limiti belirlenirken, fonksiyonun bu noktanın komşuluğundaki davranışı değerlendirilmiştir. Bu durum dikkate alınarak komşuluk, analitik tekniğin ilişkili olduğu kritik *kavram -1* nesnesi olarak belirlenmiştir.
- Analitik teknik kullanılarak fonksiyonların tanımsız oldukları noktalarda limitleri alınırken gerek fonksiyon grafiklerinin çizilmesinde, gerekse limitlerin incelenmesinde *tanımsızlık* ve *belirsizlik* nesnelerine ihtiyaç duyulmuştur. Bu durum dikkate alınarak *tanımsızlık* ve *belirsizlik*, analitik tekniğin ilişkili olduğu kritik *kavram -1* nesnesi olarak belirlenmiştir.
- Fonksiyonların tanımsız olduğu noktalarda limitli olup olmadığı analitik teknik kullanılarak belirlenirken *sonsuzluk* ve *asimptot* nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiler devreye girmiştir (Bkz Şekil 4.20 ve Şekil 4.22). Asimptot doğruları, tanımsızlığın olduğu noktaya yaklaşıldığında elde edilen görüntülerin bir reel sayıya yaklaşmadığının ortaya konulmasında ekolojik görevler üstlenmiştir. Bu durum dikkate alınarak *sonsuzluk* ve *asimptot* nesneleri analitik tekniğin ilişkili olduğu *kavram -1* nesneleri olarak belirlenmiştir.

Limit kavramının öğretiminde karşılaşılan ana epistemolojik engellerden birisi kavramın metafiziksel yönüdür. Sonsuzluk, kesin bir tanım içine sokulamadığı için limitin metafiziksel yönünün temel kavramlarından biri olarak değerlendirilir (Özmantar, 2013). Limitin tarihsel gelişim sürecinde sonsuz küçük ve çok büyük kavramları ile ilgili yaşanan teorik zorluklar bu epistemolojik engellerin nedenini açıklamaktadır. Sonsuz küçük niceliklerin varoluşu varsayımı üzerine yapılan tartışmalar bu zorluklara örnek olarak gösterilebilir. "Bir sayının neredeyse sıfır olan küçük bir niceliğe sahip olup da belirli bir büyüklüğe sahip olamaması mümkün müdür?'', "Sonsuz küçük niceliklerden birisi sıfır olduğunda anlık değişim neyi ifade eder?'' gibi felsefi problemlere teorik bir çözüm bulma çabası yüzyıllar boyunca devam etmiştir (Cornu, 1991). Galile paradoksu olarak bilinen paradoks bu tür felsefi tartışmaların bir örneğidir. Bu paradoksun kaynağı Galile'nin sonsuz çoklukları birebir eşleme ilkesine dayandırarak açıklamış olmasıdır. Bu düşünceye göre sonsuz elemana sahip olan doğal sayılar kümesi ile elemanları doğal sayıların karelerinden oluşan başka bir kümenin elemanları arasında birebir eşleme yapılması mümkündür. Bu sonuç iki kümenin aynı sayıda elemana sahip olduğu anlamına gelmektedir. Galile'nin sonsuz çoklukları karşılaştırmada kullandığı bu yöntem, Öklid'in Elementler adlı kitabında ortaya atılan ‘‘Bütün daima kendi parçalarının her birinden daha büyüktür.’’ prensibiyle çelişmektedir (Özmantar, 2013).

Limit konusunun öğretiminde karşılaşılan öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi üzerine yapılan çalışmalar, epistemolojik sorunların birçoğunun temelinde sonsuzluk kavramının yanı sıra tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının yer aldığını göstermektedir (Reys and Grouws, 1975; Baştürk ve Dönmez, 2011; Jaffar and Dindyal, 2011; Aztekin, 2013). Bu kapsamda yapılan çalışmalarda öğrencilerin; limit alma durumlarında karşılaşılan belirsizliklerin ne anlama geldiğini tam olarak anlayamadıkları, tanımsızlık halinde fonksiyonun nasıl hareket ettiğinin belirleyemedikleri, tanımsızlık ve belirsizliğin ifade ettiği anlamları ve aralarındaki farkları anlayamadıkları, sonsuzluk ile belirsizlik kavramını ilişkilendirmede zorluk yaşadıkları görülmüştür (Akbulut ve Işık, 2005; Jordaan, 2005). Bu çalışmalardan birinde Jordaan (2005) öğrencilere belirsizliğinin olduğu bir noktada bir fonksiyonun limiti ve sürekliliği hakkında sorular sormuştur. Öğrencilerin verdiği yanıtlar değerlendirildiğinde, belirsizlik durumunun ne ifade ettiğinin öğretilmesi yerine, sadece cebirsel yollar veya yöntemler kullanılarak limit alma işlemi yapılmasının, öğrencilerde belirsizlik durumunun anlaşılmasına engel oluşturduğu görülmüştür. Bir başka çalışmada Akbulut ve Işık (2005) öğrencilere tanımsızlığın olduğu durumda limit alma işlemine yönelik bir soru sormuşlardır. Bu soruya verilen yanıtlar değerlendirildiğinde, öğrencilerin yarıdan fazlasında sonsuzun bir limit değeri olabileceği anlayışının hakim olduğu görülmüştür. Ayrıca limit değerinin sonsuz için hesaplanması durumunda veya belirsizlik ve tanımsızlık söz konusu olduğunda öğrencilerin bu kavramların limit ile olan ilişkilerini öğrenmede güçlük çektikleri belirlenmiştir. Bu sonuçlar; öğrencilerin sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını anlamlandırmada ve bu kavramlar ile limit kavramı arasında iletişim kurarak ilişkilendirme yapmada zorluklar yaşadığını göstermektedir. Bergthold (1999) bu tür zorlukların aşılmasında öğrencilere fonksiyonların grafiklerini inceleyebilme imkanı sunulmasının kritik bir öneme sahip olduğunu belirtmiştir. Şekil 4.20 ve Şekil 4.22'de analitik teknik kullanılarak yapılan limit işlemleri bu ifadeyi desteklemektedir. Şekil 4.20 ve Şekil 4.22 incelendiğinde, koordinat düzlemine çizilen fonksiyon grafiği yardımıyla limit alma işleminin yapılması durumunda, asimptot doğruları yardımıyla tanımsızlık, belirsizlik veya sonsuzluk kavramları ile limit kavramı arasında ekolojik ilişki kurma fırsatının sağlandığı görülmektedir. Ortaöğretim matematik öğretim programının kavramlar arasında iletişim kurma ve ilişkilendirme becerilerinin geliştirmesine yönelik beklentileri göz önünde tutularak ***sonsuzluk, tanımsızlık, belirsizlik*** **ve** ***asimptot*** **nesneleri analiz çalışma alanının kritik nesneleri** olarak belirlenmiştir.

Aşağıda analitik teknik kullanılarak türev alma işlemi yapılırken devreye giren *kavram-1* nesneleri türev tanımından yola çıkılarak belirlenmiştir.

Türevin Tanımı: Limitin var olması koşulu ile $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin x noktasındaki değeri Şekil 4.23'den yararlanılarak,



Şekil 4.23. *Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun x noktasındaki türevi*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4. 75}$$

olarak tanımlanır (Thomas, Weir and Hass, 2015).

Şekil 4.23 incelendiğinde, $y = f(x)$ fonksiyonunun x noktasındaki türevini ifade eden (4. 75) eşitliğinin oluşturulmasında *diferansiyel* nesnesi ile birlikte; *kiriş, teğet* ve *eğim* nesnelerinin ekolojik işbirliklerinin aktif rol oynadığı görülür. Buna göre eşitlikte yer alan,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4. 76}$$

ifadesi $y = f(x)$ fonksiyonuna çizilen k kirişinin eğimidir. $h \to 0$ fonksiyona çizilebilecek kirişlerin eğimleri t doğrusunun eğim değerine $\left(m_t\right)$ yaklaşır. Bu değer aynı zamanda $y = f(x)$ fonksiyonunun x noktasındaki türevidir ve böylece,

$$f'(x) = m_t = \frac{dy}{dx} \tag{4. 77}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlikte geçen $\frac{dy}{dx}$ diferansiyel oranı t doğrusunun bağımlı değişkeninde meydana gelen değişimin bağımsız değişkenindeki değişime oranı olarak ifade edilir. Bu değer, aynı zamanda t doğrusunun eğimine eşittir.

Türev tanımı ve bu tanıma ilişkin yapılan açıklamalar değerlendirildiğinde şu sonuçlara varılmıştır:

- Türev tanımına göre, x noktasında limitli olan $y = f(x)$ fonksiyonunun bu noktadaki türevi limit kavramına dayalı olarak (4. 75) şeklinde ifade edilmiştir. Türevin *limit* temel aracına bağlı olarak tanımlanabilmesi, türevin temelinde limit kavramının olduğunu göstermektedir. Bu durum limit ile ekolojik ilişkisi olan bütün *kavram-1* nesnelerinin dolaylı olarak türev ile de ekolojik ilişki kurduğunu göstermektedir.
- Analitik düzlemde grafiği çizilen $y = f(x)$ fonksiyonunun x noktasındaki türevi açıklanırken *kiriş, teğet* ve *eğim* nesnelerinin bir tür ekolojik işbirliği yaptıkları ve bu ekolojik işbirliği ile türevin tanımında özel ekolojik görevleri yerine getirdikleri görülmüştür. Bu sonuçlara göre *kiriş, teğet ve eğ*im nesneleri *kavram - 1* nesneleri olarak belirlenmiştir. *Kiriş, teğet* ve *eğim* nesneleri arasındaki ekolojik işbirliğine vurgu yapılması amacıyla global sitte bu nesnelere bir arada yer verilmesi uygun görülmüştür.
- *Diferansiyel* nesnesi teğet doğrusunun eğiminin açıklanmasında ekolojik görevler üstlendiği için analitik tekniğin ilişkili olduğu *kavram – 1* nesnesi olarak belirlenmiştir.

Öğretim programında 12. sınıf ileri düzey matematik dersi alan öğrencilerde geliştirilmesi hedeflenen beceriler sıralanırken "türev kavramını değişim oranı ile açıklama" ifadesine yer verildiği görülmüştür (Bkz. Şekil 3.1). 12. sınıf öğretim programında yer alan kazanımlar incelendiğinde, bu hedefin açık bir biçimde ifade edildiği belirlenmiştir. Türev konusuna yönelik ilk kazanımda, fizik ve geometri modellerinden yararlanılarak türev konusuna değişim oranı kavramı ile giriş yapılacağı ifade edilmiştir (Bkz. EK-3). Programda bu kazanım için yer alan açıklamalardan bazıları şunlardır:

- Anlık değişim oranı kavramı açıklanarak anlık değişim oranına türev denildiği belirtilir.
- Verilen bir fonksiyonun bir noktadaki türev değeri ile o noktadaki teğetinin eğimi arasındaki ilişki incelenir (MEB, 2013).

Öğretim programında yer alan kazanım ve açıklamalar dikkate alındığında, türev kavramının öğretiminde analitik tekniğin kullanımına işaret edildiği ve türevin, *teğet* ve *eğim* nesneleri ile ilişkilendirme yapılarak tanımlanmasının esas alındığı görülmektedir. Ortalama değişimden anlık değişime geçişte fonksiyon grafiğine çizilen kiriş doğrularının eğimlerinden yararlanıldığı düşünüldüğünde, *teğet* ve *eğim* nesnelerinin yanı sıra *kiriş* nesnesine de ekolojik görevler düştüğü görülür. Öğretim programının kavramlar arasında ilişkilendirme becerilerinin geliştirmesine yönelik beklentileri göz önünde tutularak ***teğet, eğim* ve *kiriş* nesneleri analiz çalışma alanının kritik nesneleri** olarak belirlenmiştir**.**

Türev konusunun öğretiminde karşılaşılan kavram yanılgılarının belirlenmesi üzerine yapılan birçok çalışmada öğrencilerin anlık değişim oranı ile *türev* temel aracını ilişkilendirmede zorluk çektiklerini görülmüştür (Orton 1983; Heid 1988; Bezuidenhout, 1998). Yapılan çalışmalar sonucunda, ortalama değişimden yola çıkılarak anlık değişimin açıklanması ve *teğet* ile *eğim* nesnelerinin ekolojik desteğinden yararlanılarak anlık hız ile *türev* temel aracı arasında ilişkilendirme yapılmasının bu konuda yaşanan öğrenme güçlüklerinin azaltılmasına katkı sağladığı görülmüştür (Ostebee and Zorn, 1997; Bingölbali, 2013). Elde edilen bu veriler *kiriş, teğet* ve *eğim* nesneleri ile *türev* temel aracı arasında ilişkilendirme yapılmasının türev öğretimi için kritik bir öneme sahip olduğunu göstermektedir.

Leibniz notasyonu olarak da bilinen $\frac{dy}{dx}$ diferansiyel oranı türev alma işlemlerinin ifade edilmesinde kullanılan en yaygın gösterimlerden biridir. Bu durum matematiksel iletişim becerilerinin geliştirilmesinde *diferansiyel* nesnesine kritik ekolojik görevler düştüğünü göstermektedir. *Diferansiyel* nesnesi bu ekolojik görevinin yanı sıra, türev ile integral arasında ekolojik ilişki kurulmasına da hizmet etmektedir. Aşağıda verilen eşitlik buna örnek olarak gösterilebilir.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{4. 78}$$

(4. 78) eşitliğinde *diferansiyel* nesnesi; hem integral alma işlemi yapılırken, hem de art arda yapılan integral ve türev alma işlemleri sonucunda $f(x)$ fonksiyonunun elde edileceğinin ifade edilmesinde devreye girmektedir. Böylelikle integral türevin tersi olarak ifade edilerek *türev* ile *integral* temel araçları arasında ekolojik bağ kurulmaktadır. Öğretim programının kavramlar arasında iletişim kurma ve ilişkilendirme becerilerinin geliştirmesine yönelik beklentileri göz önünde tutularak ***diferansiyel* nesnesi analiz çalışma alanının kritik nesnelerinden biri olarak belirlenmiştir.**

Aşağıda, analitik teknik kullanılarak integral alma işlemi yapılırken devreye giren *kavram-1* nesneleri integral tanımından yola çıkılarak belirlenmiştir.

Belirli İntegralin Tanımı: $f(x)$ bir $[a,\ b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlandığında, J değeri, f fonksiyonunun $[a,\ b]$ aralığı üzerindeki belirli integrali ve $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ Riemann toplamlarının limitidir.

Her $\varepsilon \succ 0$ değeri için, $[a,\ b]$'nın $\|P\| \prec \delta$ koşulunu sağlayan her $P = \{x_0,\ x_1, ..., x_n\}$ bölünüşü ve c_k 'nın $[x_{k-1},\ x_k]$ aralığındaki her seçimi için,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J \right| \prec \varepsilon \tag{4. 79}$$

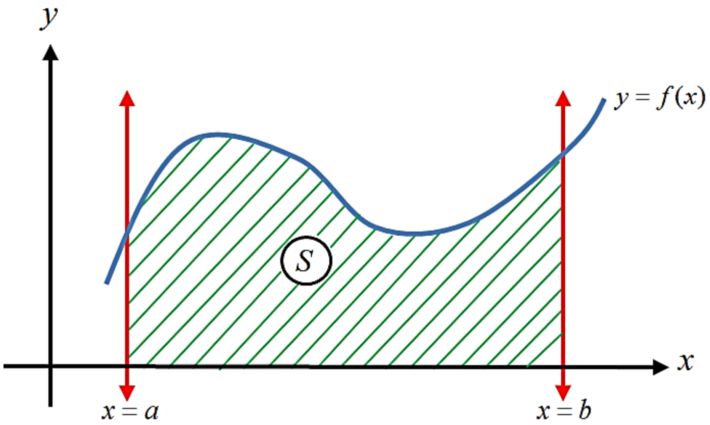
olacak şekilde bir $\delta \succ 0$ sayısı mevcuttur (Thomas, Weir and Hass, 2015).

Belirli integralin tanımı, $[a,\ b]$ aralığında tanımlı olan bir fonksiyonun bu aralıktaki bölünüşlerinin normu sıfıra yaklaşırken, buna karşılık gelen Riemann toplamının bir J limit değerine yaklaştığı fikrini temel alır. Bu limit, bölünüş normunun yeterince küçük olması koşuluyla (böylece alt aralıkların genişlikleri yeteri kadar küçük olur) bir Riemann toplamının J sayısına yakın olacağı anlamına gelir.

Alt aralıkların hepsinin eşit $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ genişliğinin olması durumunda, c_k , Δx_k alt aralığından seçilmek üzere her Riemann toplamı aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\frac{b-a}{n} \tag{4. 80}$$

$n \to \infty$ bu Riemann toplamlarının limiti varsa ve J'ye eşit ise, bu durumda J, f fonksiyonunun $[a,\ b]$ aralığı üzerinde belirli integrali olur ve bu değer aynı zamanda Şekil 4.24'te verilen f fonksiyon eğrisi, $x=a$, $x=b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan taralı bölgenin alanına eşittir.



Şekil 4.24. *f fonksiyon eğrisi; $x=a$, $x=b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölge*

Bu durumda,

$$S = J = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\frac{b-a}{n} \tag{4. 81}$$

elde edilir. Leibniz $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ Riemann toplamlarını, $f(x)$ fonksiyon değerleri ile alt aralıkların sonsuz küçüklükteki dx genişliklerinin çarpımlarının bir sonsuz toplamı olduğunu düşünerek, $\sum$ sembolü yerine $\int$ sembolünü kullanarak ifade etmiştir. Bu notasyona göre $f(c_k)$ fonksiyon değerleri $f(x)$ sürekli seçim değerlerine, Δx_k genişlikleri ise dx diferansiyellerine dönüşür. Böylece a'dan b'ye giderken bütün $f(x)dx$ çarpımlarının toplanıyor olduğu sonucu ortaya çıkar. Buna göre a'dan b'ye kadar $f(x)$'in x'e göre integrali,

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{4. 82}$$

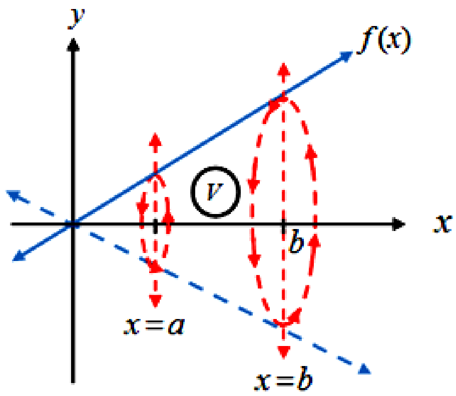
şeklinde ifade edilir (Thomas, Weir and Hass, 2015).

(4. 82) eşitliğindeki b, x ile x ise t ile değiştirilip kalkülüsün temel teoreminden yararlanılarak,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{4. 83}$$

elde edilir. Bu eşitlik, f fonksiyonunun önce integre edilip sonrasında türevinin alınması ile tekrar f fonksiyonunun elde edileceğini gösterir. Başka bir ifadeyle (4. 83) eşitliği integral ile türev alma işlemlerinin birbirinin tersi olduğunu ifade eder.

Belirli integral yardımıyla alan hesabının yanı sıra hacim hesabı da yapılabilir (Bkz Şekil 4.25).



Şekil 4.25. *Analitik düzlemde geometrik cisim oluşturulması*

Şekil 4.25'te grafiği çizilen $y = f(x)$ fonksiyonunun x ekseni etrafında 360^o döndürülüp $x = a$ ve $x = b$ doğrularından geçen düzlemler ile sınırlandırılması sonucunda oluşan dönel cismin hacmi,

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \tag{4. 84}$$

integrali ile hesaplanır.

Belirli integralin tanımı ve bu tanıma yönelik yapılan açıklamalardan yararlanılarak analitik tekniğin kullanımına yönelik şu sonuçlara varılmıştır:

- Belirli integral Riemann toplamlarının limiti alınarak ifade edilebildiği için limit ile ekolojik ilişkisi olan bütün *kavram-1* nesnelerinin dolaylı olarak integral ile de ekolojik ilişkisi olduğu görülmüştür.
- İntegral ve türev alma işlemleri birbirinin tersi olarak nitelendirilebildiği için türev ile ekolojik ilişkisi olan bütün *kavram – 1* nesnelerinin dolaylı olarak integral ile de ekolojik ilişkisi olduğu sonucuna varılmıştır.
- $\int_a^b f(x)dx$ belirli integralinde $f(x)dx$, $f(x)$ fonksiyon değerleri ile alt aralıkların sonsuz küçüklükteki dx genişliklerinin çarpımlarını ifade etmektedir. Bu durum analitik tekniğin kullanımına bağlı olarak *integral* temel aracı ile *diferansiyel* nesnesi arasında ekolojik ilişki kurulabildiğini göstermiştir.
- Belirli integral, analitik düzlemde oluşturulan sınırlandırılmış bir bölgenin alanının veya geometrik cismin hacminin hesaplanmasında kullanılabildiği için analitik tekniğin kullanımı ile birlikte *alan* ve *hacim* nesneleri ile ekolojik ilişkiler kurulabildiği görülmüşür.

20. yüzyılın son dönemleri tüm dünyada lise ve üniversite düzeyindeki analiz konularının öğretiminde ciddi reform hareketlerine sahne olmuştur. Reform öncesi dönemde öğrencilerde işlem becerilerinin kazandırılması esas alınarak analiz kavramlarının tanımları soyut düzeyde verilmekte iken reform hareketleri ile birlikte kavramsal öğrenmeye vurgu yapılmaya başlanmıştır. Reform çalışmaları integral konusunun öğretiminde de bazı değişikliklere gidilmesine neden olmuştur. Reform öncesinde integral konusuna belirsiz integral ve integral alma kuralları ile giriş yapılmaktayken reform hareketleri ile birlikte integral konusuna belirli integral yardımıyla alan veya hacim bulma uygulamaları ile giriş yapılmaya başlanmıştır. Bu yaklaşım sayesinde öğrencilere integral konusu için hem kavramsal hem de işlemsel becerilerini yeterli seviyede geliştirme fırsatı sunulmuştur (Murphy’den aktaran, Akkoç ve Kurt 2013).

Öğretim programında 12. sınıf analiz konularının yer aldığı *Sayılar ve Cebir* öğrenme alanı için öğrencilerden beklenen davranışlar incelendiğinde,

- Belirli integrali, eğri altında kalan alan ile ilişkilendirme ve uygulamalar yapma, türevle integral arasında ilişki kurma ve belirsiz integral hesaplamaları yapma (MEB, 2013, s.43)

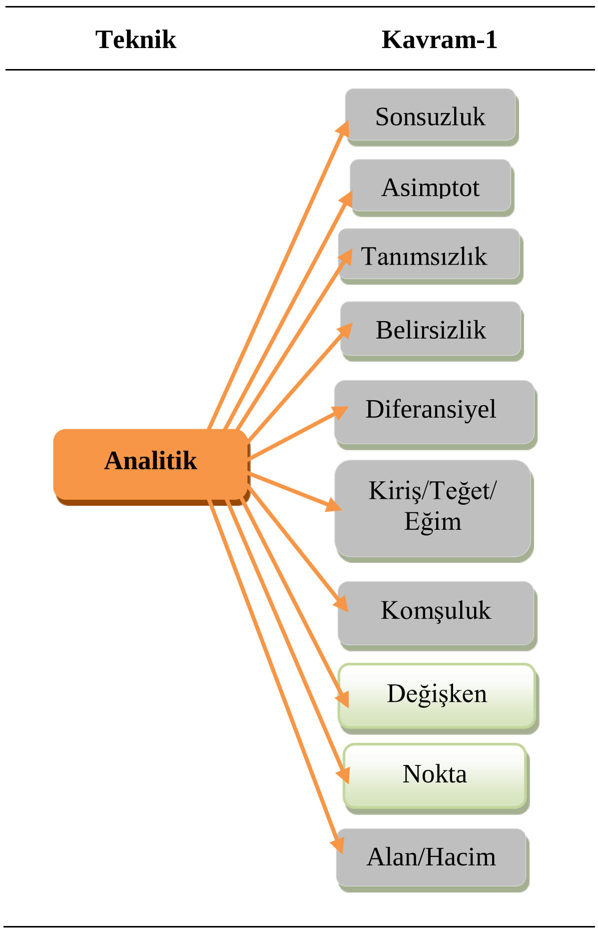
ifadesine yer verildiği görülmüştür (Bkz. Şekil 3.1). Bu ifade öğretim programında integral konusunun öğretiminde reform sonrası uygulanan yaklaşımın esas alındığı göstermektedir. 12. sınıf öğretim programında yer alan kazanımlar incelendiğinde bu yaklaşımın açık bir biçimde ifade edildiği görülmüştür. İntegral konusuna yönelik ilk kazanım ‘‘Bir fonksiyonun grafiği ile x-ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını Riemann toplamı yardımıyla tahmin eder (MEB, 2013, s.47).’’ şeklindedir. Öğretim programında yer alan bu kazanıma yönelik yapılan açıklamalardan bazıları şunlardır:

- Gerçek/gerçekçi hayat durumlarından hareketle bir fonksiyonun grafiği ile x-ekseni ile arasında kalan alanın hesaplanmasına ihtiyaç hissettirilir.
- Bazı basit fonksiyonlar için ($f(x) = ax,\ f(x) = ax^2$ gibi) önce fonksiyonun pozitif olduğu aralıklarda Riemann toplamı yardımıyla alan tahmin edilir, daha sonra fonksiyonun negatif değer aldığı aralıklar için bu yöntem genişletilir (MEB, 2013, s.47)

Öğretim programında yer alan kazanım ve bu kazanıma ilişkin açıklamalar integral kavramının, analitik teknik kullanımına ve alan nesnesi ile ilişkilendirme yapılmasına dayanan bir yaklaşımla açıklanmasının esas alındığını göstermektedir. Öğretim programının kavramlar arasında iletişim kurma ve ilişkilendirme becerilerinin geliştirmesine yönelik beklentileri göz önünde tutularak ***alan* ve *hacim* nesneleri analiz çalışma alanının kritik nesneleri** olarak belirlenmiştir.

Alan ve *hacim* nesneleri integral konusunun öğretiminde kavramsal öğrenmeye ekolojik katkı sağlamanın yanında, kavram yanılgılarına neden olmasıyla da ön plana çıkmaktadır. Bu kapsamda yapılan çalışmalarda öğrencilerin grafiği verilen fonksiyonlar yardımıyla belirli integral hesabı yaparken eğri altında kalan alanı negatif olarak değerlendirmeleri ile sonuçlanan kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür (Rasslan and Tall, 2002; Camacho and Depool, 2003). Bu durum, *alan* ve *hacim* nesneleri ile *integral* temel aracı arasındaki ekojik ilişkinin önemini daha da kritik hale getirmektedir. Çünkü; *alan* ve *hacim* nesnelerinin *integral* temel aracı ile aralarındaki ekolojik ilişkilere etki eden bu tür yanılgılar, alan veya hacim hesabına dayalı olarak yapılarak belirli integral öğretimine olumsuz etki ederek, *integral* temel aracının kavramsal bir yaklaşımla öğretilmesini sekteye uğratmaktadır.

Şekil 4.26’da analitik tekniğin ilişkili olduğu *kavram-1* nesneleri verilmiştir.



Şekil 4.26. *Analitik tekniğin ilişkili olduğu kavram-1 nesneleri*

Tablo 4.6'da kritik nesnelerin temel araçlar ile ekolojik ilişkilerine yer verilmiştir.

Tablo 4.6. *Global sitin kritik nesneleri*

İntegral		
Türev		
Limit/Süreklilik		
Sonsuzluk/Asimptot	Diferansiyel	
Tanımsızlık	Kiriş/Teğet/Eğim	Alan/Hacim
Belirsizlik		
Komşuluk		

Tablo 4.6 incelendiğinde, öğretim programında türev kavramının limit ve süreklilik; integral kavramının ise limit, süreklilik ve türev kavramı ile ilişkilendirilmesine bağlı olarak *sonsuzluk, asimptot* ve *komşuluk* gibi bazı kritik nesnelerin global sitin dört temel aracı için de kritik bir önem taşıdığı görülmektedir.

4.6.3. Cebirsel tekniğin kullanımına bağlı olarak devreye giren kavram–1 nesneleri

Limit alma işlemi yapılırken cebirsel tekniğin kullanımına bağlı olarak devreye giren nesnelerin belirlenebilmesi amacıyla Örnek 4.15'te ilgili teknik kullanılarak limit alma işlemi yapılmıştır.

Örnek 4.15. $f(x)=\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sin x}$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun $x\to 0$ limitini cebirsel teknik kullanarak bulma.

Çözüm $x=0$ için f fonksiyonu tanımsızdır $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

1.Yol Belirsizliğin kaldırılabilmesi için,

$$\sin x.\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right] \tag{4. 85}$$

özdeşliği kullanılarak sadeleştirme işlemi yapıldığında,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin(-x)}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2.\sin x.\cos 2x}{\sin x}=2\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)\end{aligned} \tag{4. 86}$$

elde edilir. Limit alma işlemi yapılarak sonuç,

$$2\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)=2 \tag{4. 87}$$

olarak bulunur.

2.Yol L'Hopital kuralı uygulanarak $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği kaldırıldığında sonuç,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin 3x-\sin x\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-\cos x}{\cos x}=2 \tag{4. 88}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.15’in çözümü incelendiğinde kullanılan her iki yolda da $x \to 0$ ifadesinin sıfıra hangi aralıkta yaklaşıldığına ilişkin gerekli bilgiyi içermediği görülmektedir. Buna bağlı olarak $x \to 0$ elde edilen görüntülerin 2 sayısının da içinde bulunduğu hangi aralıkta yer aldığı da belirli değildir. Sonuç olarak cebirsel tekniğin kullanımında $x \to 0$ ifadesi ile *komşuluk* nesnesine atıf yapılıyor olmasına karşılık, bu nesne ile belirgin ekolojik ilişkiler kurulamamaktadır. Bu duruma dikkat çekmek amacı ile global sitte cebirsel teknik ile *komşuluk* nesnesi arasındaki ekolojik ilişki kesik çizgiler kullanılarak gösterilmiştir.

Bir fonksiyonun tanımsız veya belirsiz olduğu noktalarda limiti alınırken cebirsel tekniğin kullanımına bağlı olarak hangi *kavram –1* nesnelerinin devreye girdiği örnekler üzerinde incelenmiştir.

Örnek 4.16’da cebirsel teknik kullanılarak tanımsızlığın olduğu noktada limit alma işlemi yapılmıştır.

Örnek 4.16. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ fonksiyonunun $x \to 1$ limitini cebirsel teknik kullanarak inceleme.

Çözüm $x = 1$ değeri için f fonksiyonu tanımsızdır. Bu yüzden sağdan ve soldan limit alma işlemi yapılmalıdır.

$x \to 1^+$ için limit alma işlemi yapıldığında,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{5^+}{0^+} = \infty \qquad (4.\ 89)$$

elde edilir. Buna göre $x \to 1^+$ için limit yoktur. Benzer şekilde,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{5^-}{0^-} = -\infty \qquad (4.\ 90)$$

olup $x \to 1^-$ için de limit yoktur.

Örnek 4.16’nın çözümü incelendiğinde, $f(x)$ fonksiyonunun tanımsız olduğu noktada cebirsel teknik kullanılarak limiti alınırken, bağımsız değişkenin aldığı değerlere göre fonksiyonun $+\infty$ veya $-\infty$’a ıraksadığı görülür. Bu durumda cebirsel tekniğin ilişkili olduğu *kavram-1* nesnelerinden üçü *değişken, tanımsızlık* ve *sonsuzluk*tur.

Cebirsel teknik kullanılarak limit alma işlemi yapılırken karşılaşılan belirsizlik durumunun ortadan kaldırılabilmesi için fonksiyona; çarpanlara ayırma, özdeşliklerden yararlanma, paranteze alma, aynı cebirsel ifade ile çarpıp bölme, logaritma alma, L’Hôpital kuralını uygulama gibi cebirsel işlemler uygulanır. Örnek 4.17’de, verilen $f(x)$ fonksiyonuna bu cebirsel işlemlerden bazıları uygulanarak limit alma işlemi yapılmıştır.

Örnek 4.17. $f(x)=\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{2x-1}$ fonksiyonunun $x\to\infty$ limitini cebirsel teknik kullanarak bulma.

Çözüm $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{2x-1}$ ifadesinde 1^{∞} belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{2x-1}=y \tag{4. 91}$$

olmak üzere belirsizliğin kaldırılması için eşitliğin her iki tarafının e tabanında logaritması alındığında,

$$\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{2x-1}\right]=\ln y \tag{4. 92}$$

elde edilir. Bu ifade limit ve logaritmanın cebirsel özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde,

$$\begin{gathered}\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{2x-1}\right]=\ln y\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{2x-1}\right]=\ln y\\ \Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{2x-1}\right]}=y\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2x-1)\ln\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)\right]}=y\end{gathered} \tag{4. 93}$$

olarak bulunur. (4. 93) eşitliğinde yer alan,

$$\lim_{x\to\infty}\left[(2x-1)\ln\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)\right] \tag{4. 94}$$

ifadesinde $0.\infty$ belirsizliği vardır. Düzenleme yapılarak $\frac{0}{0}$ belirsizliği elde edilir.

$$\lim_{x\to\infty}\left[(2x-1)\ln\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)}{\frac{1}{(2x-1)}}\right]\quad\left(\frac{0}{0}\ \textit{belirsizliği}\right) \tag{4. 95}$$

(4. 95) için L'Hôpital kuralı uygulandığında,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)}{\frac{1}{(2x-1)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{(2x-1)}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-15}{25x^2+35x+10}}{\frac{-2}{4x^2-4x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-15\left(4x^2-4x+1\right)}{-2\left(25x^2+35x+10\right)}=\frac{-60}{-50}=\frac{6}{5} \tag{4. 96}$$

bulunur. Elde edilin bu değer yerine yazıldığında limit işleminin sonucu,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{2x-1}=e^{\frac{6}{5}} \tag{4. 97}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.17'nin çözümü incelendiğinde, $f(x)$ fonksiyonun cebirsel teknik kullanılarak $x\to\infty$ limiti alınırken 1^{∞} belirsizliği ile karşılaşıldığı ve belirsizliğin kaldırılması için logaritmanın özelliklerinden yararlanma veya türev alma gibi cebirsel işlemlere başvurulduğu görülmektedir. Bu durum, ortaya çıkan belirsizliğin çözüm için yapılacak cebirsel işlemlerin belirlenmesinde etkili olduğunu göstermektedir. Buna göre, cebirsel tekniğin ilişkili olduğu *kavram-1* nesnelerinden bir diğeri *belirsizlik*tir.

Bir $y=f(x)$ fonksiyonunun x'e göre türevi ifade edilirken ilk kez Leibniz tarafından kullanılmış olan $\frac{dy}{dx}$ notasyonu yaygın olarak kullanılır. Notasyondaki dy ve dx iki farklı değişkendir. Bu değişkenlerden dx bağımsız dy ise bağımlı değişkendir. dy bağımlı değişkeni,

$$f'(x)=\frac{dy}{dx} \tag{4. 98}$$

eşitliğinden yararlanılarak,

$$dy=f'(x)\,dx \tag{4. 99}$$

şeklinde ifade edilir. (4. 99) eşitliği $y=f(x)$ fonksiyonunun diferansiyelini ifade eder.

Örnek 4.18'de bir $y = f(x)$ fonksiyonunun cebirsel teknik kullanılarak diferansiyeli alınmıştır.

Örnek 4.18. $y = \sin x - x^4$ fonksiyonunun $x = \dfrac{\pi}{2}$ ve $dx = 0{,}1$ değerleri için dy diferansiyelini cebirsel teknik kullanarak bulma.

Çözüm $dy = f'(x)\,dx$ eşitliğinden dy diferansiyeli,

$$dy = \left(\sin x - x^4\right)' dx = \left(\cos x - 4x^3\right) dx \qquad (4.\ 100)$$

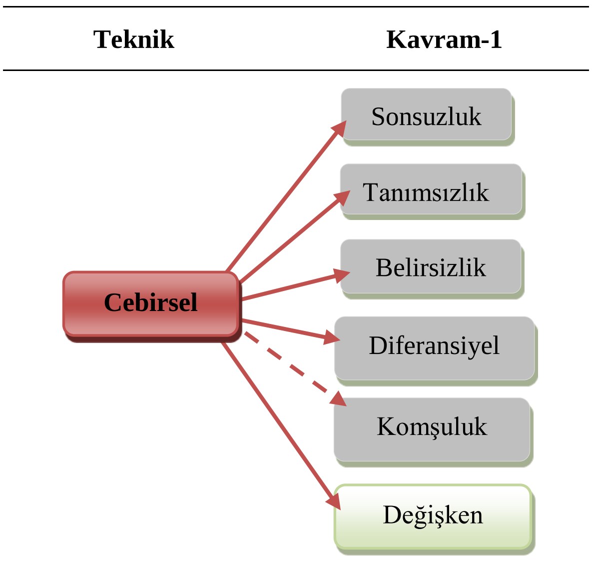
olarak bulunur. $x = \dfrac{\pi}{2}$ ve $dx = 0{,}1$ değerleri yerine yazıldığında,

$$dy = \left(\cos\frac{\pi}{2} - 4\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right).\ 0{,}1 = -\frac{\pi^3}{20} \qquad (4.\ 101)$$

elde edilir.

Örnek 4.18'de $y = f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli alınırken türev alma işlemine başvurulmuştur. Cebirsel teknik kullanılarak değişken değiştirme ve kısmi integrasyon gibi yöntemlerle integral alma işlemi yapılırken de diferansiyel alma işlemi uygulanır. Buna göre *diferansiyel,* cebirsel tekniğin türev ve integral alma işlemlerine bağlı olarak devreye giren *kavram -1* nesnesi olarak belirlenmiştir.

Şekil 4.27'de cebirsel tekniğin ilişkili olduğu *kavram-1* nesneleri verilmiştir.



Şekil 4.27. *Cebirsel tekniğin ilişkili olduğu kavram-1 nesneleri*

Şekil 4.27 incelendiğinde cebirsel tekniğin kritik nesne olarak belirlenen *sonsuzluk, tanımsızlık, belirsizlik, diferansiyel* ve *komşuluk* nesneleri ile ekolojik ilişki kurduğu görülmektedir.

4.6.4.Nümerik tekniğin kullanımına bağlı olarak devreye giren kavram–1 nesneleri

Nümerik teknik yardımıyla bir $y = f(x)$ fonksiyonunda x bağımsız değişkenine x_0'ın komşuluğunda reel sayı değerleri verilerek $x \to x_0$ limit değeri belirlenebilir.

Örnek 4.19'da nümerik tekniğin *kavram-1* nesneleri ile ekolojik ilişkilerinin belirlenmesi amacıyla limit alma işlemi yapılmıştır.

Örnek 4.19. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$ fonksiyonunun $x \to \pm\infty$ limitini nümerik teknik kullanarak belirleme.

Çözüm f fonksiyonunun bağımsız değişkenine giderek azalan ve giderek artan reel sayı değerleri verildiğinde elde edilen görüntü değerleri Tablo 4.7'de verilmiştir.

Tablo 4.7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$ *fonksiyonunun* $x \to -\infty$ *veya* $x \to \infty$ *aldığı değerler*

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1	- 1,5	1	-0,5
-2	$-1,\overline{1}$	2	$0,\overline{6}$
-3	≈-1,03571428	3	≈0,89285714
-4	$-1,\overline{0153846}$	4	$0,\overline{95384615}$
-5	$-1,00\overline{793650}$	5	≈0,97619047
-10	$-1,\overline{000999}$	10	≈0,99700299
-100	≈-1,00000099	100	≈0,99999700
-1000	≈-1	1000	≈0,99999999
...	...	...	...
$x \to -\infty$	-1	$x \to \infty$	1

Tablo 4.7 incelendiğinde, x bağımsız değişkenine giderek azalan değerler verildiğinde -1 sayısının komşuluğunda görüntülerin elde edildiği, x bağımsız

değişkenine giderek artan değerler verildiğinde ise 1 sayısının komşuluğunda görüntülerin elde edildiği görülür. Bu durumda,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \text{ ve } \lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \tag{4. 102}$$

olarak bulunur.

x bağımsız değişkenine $x \to \pm\infty$ reel sayı değerleri verilirken nümerik tekniğin *değişken* ve *sonsuzluk* nesneleri ile ekolojik ilişkileri devreye girmektedir. Bağımsız değişkene verilen değerlere bağlı olarak bir reel sayının komşuluğunda bulunan görüntülerin elde ediliyor olması ise nümerik tekniğin *komşuluk* nesnesi ile ekolojik ilişkisi yardımıyla açıklanır.

Önek 4.20'de nümerik teknik kullanılarak bir fonksiyonun belirsiz olduğu bir noktadaki limiti incelenmiştir.

Örnek 4.20. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonunun $x \to 1$ limitini nümerik teknik kullanarak belirleme.

Çözüm $y = f(x)$ fonksiyonunda x'e $x_0 = 1$'in 0,05 birim komşuluğunda 0,01 birim aralıklarla değerler verildiğinde elde edilen görüntü değerleri Tablo 4.8'de verilmiştir.

Tablo 4.8. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *fonksiyonunun* $x_0 = 1$ *'in 0,05 birim komşuluğunda almış olduğu bazı değerler*

x	$f(x)$
0,95	1,95
0,96	1,96
0,97	1,97
0,98	1,98
0,99	1,99
1	Tanımsız
1,01	2,01
1,02	2,02
1,03	2,03
1,04	2,04
1,05	2,05

Tablo 4.8 incelendiğinde x'e verilen değerler sonucunda elde edilen görüntülerin 2 sayısının 0,05 birim komşuluğu olan $(1{,}95 \; , \; 2{,}05)$ aralığında kaldığı görülmektedir. x'e verilen değerler 1'e yaklaştıkça elde edilen görüntüler 2 sayısına yaklaşmaktadır. Bu durumda nümerik teknik kullanılarak limit değeri,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \tag{4. 103}$$

olarak bulunur.

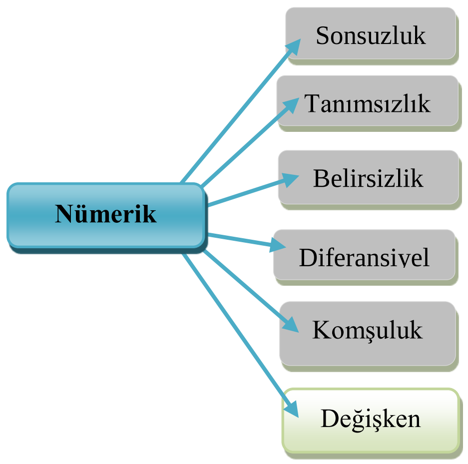
x bağımsız değişkenine $x \to \pm 1$ reel sayı değerleri verilmesi nümerik tekniğin *değişken* nesnesi ile ekolojik ilişkisi yardımıyla açıklanır. Bağımsız değişkene verilen değerlere bağlı olarak 2 sayının komşuluğunda yer alan görüntülerin elde ediliyor olması ise nümerik tekniğin *komşuluk* nesnesi ile ekolojik ilişki kurduğunu göstermektedir. Ayrıca bağımsız değişkene verilen $x = 1$ değerine göre belirsizliğin ortaya çıkması ve buna bağlı olarak fonksiyonun $x = 1$ noktasında tanımsız olması nümerik tekniğin *belirsizlik* ve *tanımsızlık* nesneleri ile ekolojik bağ kurduğunu göstermektedir.

Türev ve integral hesabı yapılırken nümerik tekniğin kullanıldığı durumlarda, limit hesabında da olduğu gibi, *değişken* ve *komşuluk* nesneleri ile ekolojik ilişkiler devreye girer. Buna göre, türev hesabı yapılırken bağımsız değişkene verilen değerlere göre elde edilen görüntülerden hareketle fonksiyona çizilen teğet doğrusunun eğiminin hangi reel sayının komşuluğunda değerler aldığı belirlenir. Elde edilen eğim değeri aynı zamanda diferansiyel oran olarak ifade edilir. Bu durum, nümerik tekniğin *diferansiyel* nesnesi ile ekolojik bağ kurduğunu göstermektedir. Belirli integral hesabı yapılırken de alt veya üst dikdörtgen sayılarındaki değişime göre oluşturulan kapalı bölgenin alanının hangi reel sayının komşuluğunda değerler aldığı belirlenir.

Elde edilen veriler, nümerik tekniğin sonsuzluk, tanımsızlık, belirsizlik, diferansiyel ve komşuluk kritik nesneleri ile ekolojik bağ kurabildiği görülmektedir. Nümerik tekniğin bu kritik nesnelerden *komşuluk* ile güçlü ekolojik bağ kurabilmesi, cebirsel tekniğin *komşuluk* nesnesi ile olan örtük ekolojik ilişkisinin nümerik teknik kullanılarak desteklenebileceğini göstermektedir.

Şekil 4.28'de nümerik tekniğin ilişkili olduğu *kavram-1* nesneleri verilmiştir.

Teknik	Kavram-1



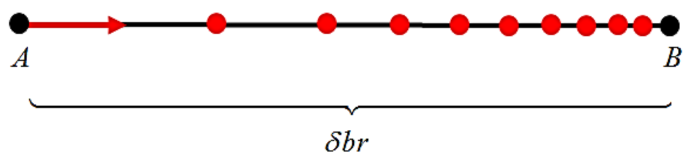
Şekil 4.28. *Nümerik tekniğin ilişkili olduğu kavram-1 nesneleri*

4.6.5. Sentetik tekniğin kullanımına bağlı olarak devreye giren kavram–1 nesneleri

Sentetik teknik milattan önceki dönemlerde sonsuzluk kavramı ile ilgili metafiziksel durumların açıklanmasında veya sonsuzluk kavramıınn devreye girdiği problemlerin çözülmesinde kullanılmıştır. Zenon'un kaplumbağa paradoksu *sonsuzluk* nesnesinin sentetik teknik ile ekolojik ilişkisine yönelik etkili bir örnektir. Kaplumbağa paradoksuna göre doğrusal bir yolda ilerleyen bir kişi önünde bulunan aynı doğrultuda ve aynı yönde ilerleyen bir kaplumbağaya hiçbir zaman yetişemez. Çünkü; bu kişi kaplumbağanın bulunduğu yere varınca kaplumbağa ilk bulunduğu noktadan ayrılmış olur. Bu düşünce sonsuz kez tekrarlanınca kaplumbağa her zaman önde olur. Kaplumbağa ve hareketli kişinin bulunduğu konumlar birer nokta olarak değerlendirildiğinde, sentetik tekniğin *sonsuzluk* ve *nokta* ile bağ kurduğu görülür.

Tüketme yöntemi ile uzunluk, alan veya hacim hesabı yapılırken de *alan* ve *hacim* nesnelerinin yanı sıra *sonsuzluk* nesnesinin sentetik teknik ile ekolojik ilişkisi devreye girer. Örneğin, tüketme yöntemi ile bir çemberin çevre uzunluğu hesaplanırken, köşeleri çember üzerinde olacak şekilde çizilen düzgün çokgenlerin çevre uzunluklarından yararlanılır. Buna göre, düzgün çokgenlerin kenar sayıları arttıkça çevre uzunlukları çemberin çevre uzunluğuna giderek yaklaşır. n, çember içine çizilen düzgün çokgenlerin kenar sayısını ifade etmek üzere $n \to \infty$ düzgün çokgenlerin çevre uzunluklarının limit değeri çemberin çevre uzunluğunu verir.

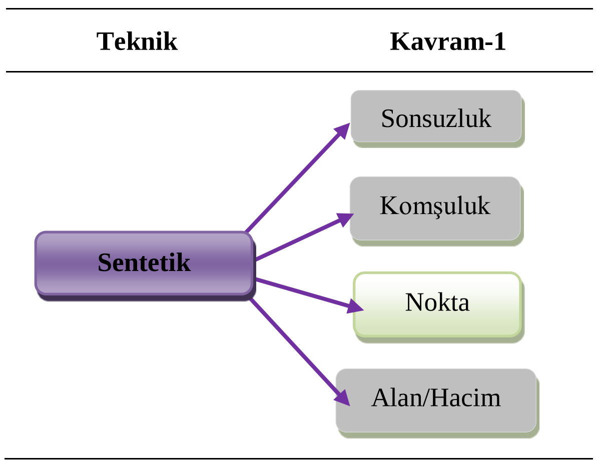
Sentetik teknik ile *komşuluk* nesnesi arasında, *aralık* nesnesi yerine *doğru parçası* veya *düzlem parçası* gibi geometrik nesnelerin kullanılıyor olmasına bağlı olan formel bir ilişki vardır. Doğrusal bir yol izlediği varsayılan bir okun hedefine yaklaşması olayı bu ekolojik ilişkinin açıklanması için örnek olarak kullanılabilir.



Şekil 4.29. *Bir okun* $[AB]$ *yolunu takip ederek* δbr *uzaklıktaki hedefe yaklaşması*

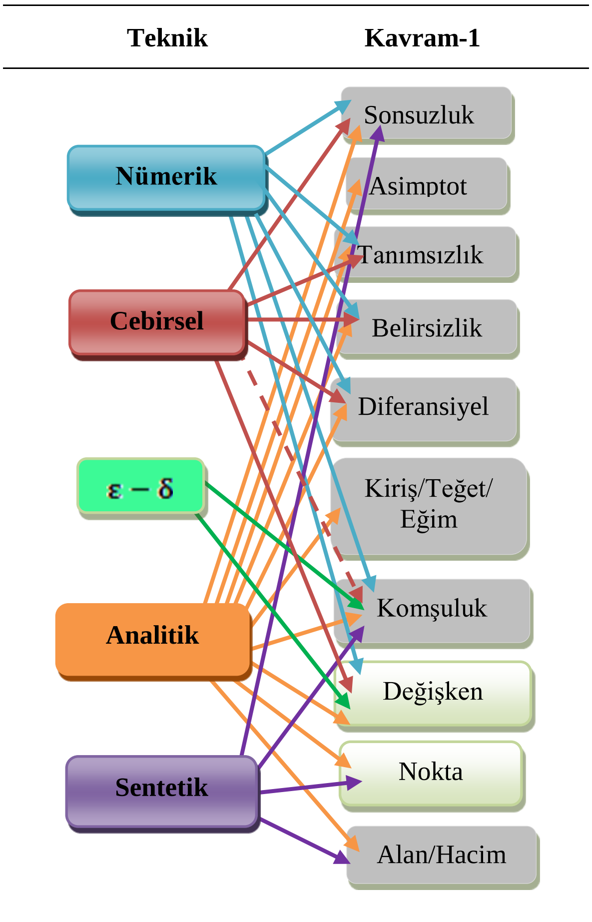
Şekil 4.29'a göre A noktasından atılan bir okun doğrusal bir yol takip ederek $|AB| = \delta\ br$ uzağında bulunan B noktasındaki hedefe ulaşmak için yola çıktığı varsayılsın. Bu olayda, okun atılacağı noktanın hedefe olan uzaklığı, B noktasının $\delta\ br$ komşuluğu olarak değerlendirilebilir. Bu durumda, *komşuluk* nesnesi ile ilişkilendirme yapılarak, okun hedefe doğru hareket etmesi B noktasına soldan yaklaşılması şeklinde yorumlanabilir. Böylelikle, okun doğrusal bir yol izleyerek hedefine yaklaşması olayı ile *komşuluk* nesnesine sezgisel bir bakış açısı kazandırılır.

Şekil 4.30'da sentetik tekniğin ilişkili olduğu *kavram-1* nesneleri verilmiştir.



Şekil 4.30. *Sentetik tekniğin ilişkili olduğu kavram-1 nesneleri*

Şekil 4.31'de global sitin teknikleri ile *kavram-1* nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilere bir bütün halinde yer verilmiştir.



Şekil 4.31. *Tekniklerin kavram-1 nesneleri ile ekolojik ilişkileri*

Şekil 4.31 incelendiğinde analitik tekniğin, diğer tekniklerden farklı olarak, bütün *kavram-1* nesneleri ile ekolojik ilişki kurabildiği görülmektedir. Bu ekolojik özellik, analiz problemlerinin çözümünde analitik tekniğe diğer tekniklere yardımcı bir teknik olarak başvurulabileceğini göstermektedir. Örneğin limit alma işlemi yapılırken cebirsel tekniğin *komşuluk* nesnesi ile ekolojik ilişkisinin pekiştirilmesinde analitik teknikten yararlanılabilir. Böylelikle cebirsel tekniğin *komşuluk* nesnesi ile olan örtük ekolojik ilişkisi limiti alınan fonksiyonun koordinat sisteminde çizilen grafiğinden yararlanılarak açıklanabilir.

4.7. Kavram – 2 Nesneleri

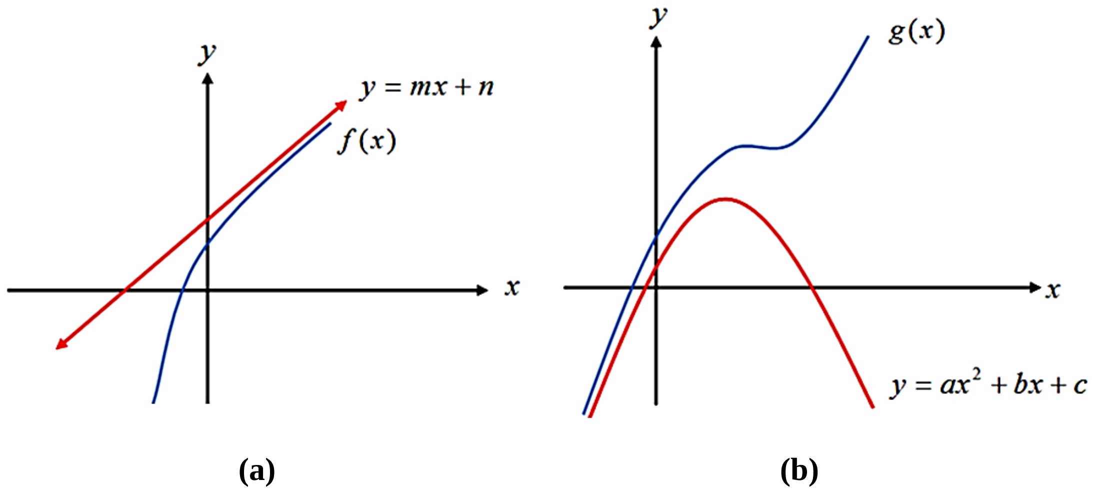
Çalışmanın bu bölümünde *kavram – 1* nesnelerini doğrulayan veya bu nesneleri anlamlandıran nesneler belirlenmiştir. Bunlar *kavram-1* nesnelerinin beslendiği nesneler olarak da adlandırılabilir. Bu nesneler aynı zamanda global sitin *kavram – 2* kategorisini oluşturan nesnelerdir.

4.7.1. Sonsuzluk - asimptot nesnelerinin beslendiği nesneler

Sonsuz sembolü bir reel sayı ifade etmez, bu sembol bir fonksiyonun tanım veya görüntü kümesi bütün sonlu sınırları aştığında fonksiyonun davranışının belirlenmesi için kullanılır. Örneğin, $f(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonu için $a \succ 0$ olsun. x pozitif ve çok büyük değerler aldığında $\frac{a}{x}$ oranı gittikçe azalarak sıfır sayısına yaklaşır. x negatif ve çok küçük değerler aldığı durumda ise $\frac{a}{x}$ oranı gittikçe artarak yine sıfır sayısına yaklaşır. Böylelikle *oran* nesnesi x'in çok büyük veya çok küçük değerler aldığı durumlarda $f(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonunun davranışının incelenmesine olanak sağlayarak sonsuzluk kavramının anlamlandırılmasına ekolojik olarak katkı sağlamış olur.

$f(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonu gibi rasyonel fonksiyonların yatay asimptot doğrularının analitik düzlemde nümerik teknik yardımıyla çizimleri yapılırken de yine *oran* nesnesinden yararlanılır. Buna göre x pozitif ve çok büyük değerler aldığında, $\frac{a}{x}$ oran değerlerinin sıfır sayısına yaklaşmasına bağlı olarak, fonksiyon eğrisinin giderek x eksenine yaklaştığı görülür. Benzer şekilde x negatif ve çok küçük değerler aldığında, $\frac{a}{x}$ oran değerlerinin sıfır sayısına yaklaşmasına bağlı olarak fonksiyon eğrisi giderek x eksenine yaklaşır. Bu sonuçlara göre $y=0$ doğrusu $f(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonunun yatay asimptotu olarak belirlenir. Böylelikle *oran* nesnesi asimptot doğrularının çizilmesine hizmet ederek *asimptot* nesnesinin anlamlandırılmasına ekolojik olarak katkı sağlamış olur.

Analizde dikey, yatay, eğik ve eğri asimptot olmak üzere dört farklı asimptot türü vardır. Şekil 4.32'te bu asimptot türlerinden eğik ve eğri asimptot örnekleri kartezyen koordinat düzleminde çizilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyon grafikleri üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 4.32. *$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının sırasıyla eğik ve eğri asimptotları*

Bu asimptotlardan dikey, yatay ve eğik asimptotlar $y = mx + n$ genel denklemi ile ifade edilebilen doğrulardır. Şekil 4.32 (b)'de verilen eğri asimptotlar ise $y = ax^2 + bx + c$ genel denklemi ile ifade edilebilen eğrilerdir. Bu eğri denkleminde $a = 0$ değeri için $y = bx + c$ genel doğru denklemi elde edilir. Bu durum her doğrunun aynı zamanda özel bir eğri olduğu şeklinde yorumlanabilir. Asimptot doğrularının da özel doğrular olduğu düşünüldüğünde; *asimptot, doğru* ve *eğri* nesnelerinin ekolojik bir ilişki zinciri oluşturduğu görülür. Ayrıca, doğrular her iki ucu da sınırsızca uzayan noktalardan oluştuğu için *doğru* nesnesi *sonsuzluk* nesnesini anlamlandıran bir nesne olarak değerlendirilebilir.

4.7.2. Tanımsızlık nesnesinin beslendiği nesneler

Sıfırdan farklı bir sayının sıfıra bölünmesi ile ortaya çıkan $\frac{a}{0}$ değerinin neden tanımlanamadığı *oran* nesnesi yardımıyla şu şekilde açıklanır:

$a \in R,\ a \neq 0$ olmak üzere, a'nın sıfıra oranının bir reel sayıya eşit olduğu var sayılsın. Bu durum $\frac{a}{0} = b \in R$ eşitliği ile gösterilebilir. İçler dışlar çarpımı yapıldığında,

$$a = b.0 \tag{4. 104}$$

olur. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $a = 0$ olmalıdır. Bu sonuç başlangıçta kabul edilen

a 'nın sıfırdan farklı bir reel sayı olması durumuyla çelişir. $\frac{a}{0} = b \in R$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir a değeri bulunamadığı için $\frac{a}{0}$ oranının tanımsız olduğuna karar verilir. *Oran* nesnesi, *tanımsızlık* nesnesinin anlamlandırılmasına hizmet ettiği için ekolojik olarak *tanımsızlık* nesnesinin üst nesnesidir.

Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan bir fonksiyonun tanımında belirtilen şartları sağlamayan veya belirlenen kısıtlamaların dışında kalan tanımsızlık durumları ifade edilirken *aralık* veya *eşitsizlik* nesnelerinden yararlanılır. Örneğin, $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ fonksiyonu kök içinin negatif olduğu $(-\infty, -3)$ ve $(3, \infty)$ aralığında tanımsızdır. Buna göre *aralık* nesnesi, tanımsızlığın açıklanmasına ekolojik katkı sağladıkları için *tanımsızlık* nesnesinin üst nesnesidir.

Aralık ve *eşitsizlik* nesneleri biri diğerinin yerine kullanılabilecek derecede yakın ekolojik ilişkilere sahip olan iki matematiksel nesnedir. Aşağıda bu nesneler arasındaki ekolojik ilişkilere değinilmiştir.

a ve b iki reel sayı ve $a \prec b$ olsun. $\{x \in R \mid a < x < b\}$ kümesine a başlangıç ve b bitişli açık aralık denir ve (a, b) şeklinde gösterilir. Benzer olarak, $\{x \in R \mid a \le x \le b\}$ kümesine a başlangıçlı b bitişli kapalı aralık denir ve $[a, b]$ şeklinde gösterilir.

$$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \le b\} \tag{4. 105}$$

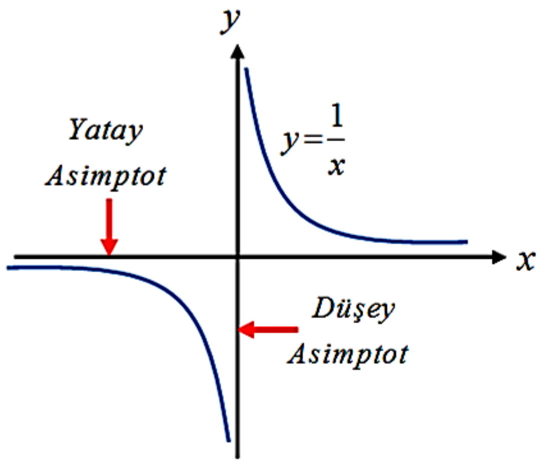
ifadesi, a 'da açık b 'de kapalı olan yarı açık aralık,

$$[a, b) = \{x \in R \mid a \le x < b\} \tag{4. 106}$$

ifadesi ise a 'da kapalı b 'de açık olan yarı açık aralık olarak tanımlanır.

Yukarıda yapılan açıklamalardan ve (4. 105), (4. 106) ifadelerinden, aralıkların eşitsizlikler kullanılarak da ifade edilebileceği görülür. *Aralık* ve *eşitsizlik* nesneleri arasındaki bu yakın ekolojik ilişkiye vurgu yapılması amacıyla global sitte bu iki nesneye bir arada yer verilmiştir.

Şekil 4.33'te *tanımsızlık* nesnesinin *doğru* nesnesi ile ekolojik ilişkisinin açıklanması amacıyla $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Şekil 4.33. $f(x)=\frac{1}{x}$ *fonksiyonunun grafiği*

Şekil 4.33 incelendiğinde fonksiyon grafiği ile $x=0$ düşey asimptot doğrusunun kesişmemesine bağlı olarak $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında tanımsız olduğu görülmektedir. *Doğru* nesnesi böylelikle geometrik olarak *tanımsızlık* nesnesinin açıklanmasına hizmet ederek bu nesneyi beslemektedir.

4.7.3. Belirsizlik nesnesinin beslendiği nesneler

Limit almada karşılaşılan belirsizlik formları $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$, 1^{∞}, 0^{0} ve ∞^{0} belirsizlikleridir. Bu belirsizliklerin tamamı cebirsel işlemler yapılarak $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülebilir. Bu husus dikkate alınarak, bütün belirsizlik formları yerine sadece $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinin *oran* nesnesi ile ekolojik ilişkisi üzerinde durulmuştur.

$\frac{0}{0}$ oranının bir reel sayıya eşit olduğu varsayılsın. Bu durum, $\frac{0}{0}=a\in R$ eşitliği ile ifade edilebilir. Bu eşitlikte içler dışlar çarpımı yapıldığında,

$$0=a.0 \qquad (4.\ 107)$$

bulunur. (4. 107) eşitliğine göre, sıfır ile çarpıldığında sıfır sonucunu veren sonsuz sayıda reel sayı olduğu için a reel sayısının ne olduğu belirli değildir. a değeri belirsiz olduğundan $\frac{0}{0}$ oranı da belirsizlik ifade eder.

Sonsuzun sonsuza oranının bir reel sayıya eşit olduğu varsayılsın. Bu durum,

$$\frac{\infty}{\infty} = a \in R \tag{4. 108}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. (4. 108) eşitliğinden,

$$\infty = a.\infty \tag{4. 109}$$

bulunur. Bu eşitliği sağlayan sonsuz sayıda a reel sayısı bulunabileceği için a değeri belirli değildir. a belirsiz olduğundan $\frac{\infty}{\infty}$ oranı da belirsizlik ifade eder. *Oran* nesnesi, *belirsizlik* nesnesinin anlamlandırılmasına hizmet ettiği için ekolojik olarak belirsizliğin üst nesnesi olarak belirlenmiştir. Ayrıca $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin analitik teknik kullanılarak fonksiyon grafiği üzerinden incelendiği durumlarda yatay asimptot doğrularına ihtiyaç duyulur. *Doğru* nesnesi böylelikle geometrik olarak *belirsizlik* nesnesinin açıklanmasına hizmet ederek bu nesneyi beslemektedir.

4.7.4. Diferansiyel nesnesinin beslendiği nesneler

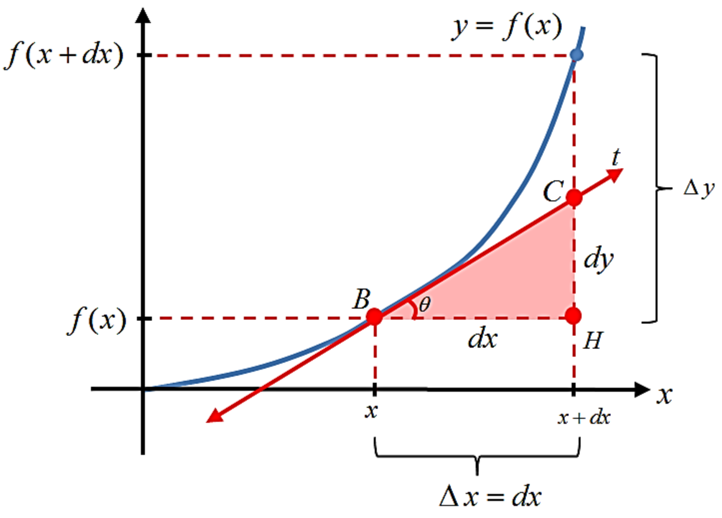
Newton ve Leibniz türevi, bir fonksiyonun bağımsız değişkeninde son derece küçük bir değişim (dx) meydana geldiğinde fonksiyonun kendisinde meydana gelen değişim ($f'(x)$) olarak tanımlamış ve

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \tag{4. 110}$$

şeklinde ifade etmişlerdir (Arslan ve Çelik, 2013). Hem Newton hem de Leibniz'in yaklaşımında türev bir fonksiyon olarak düşünülmek yerine, eğrinin eğiminin bir değişkene bağlı olarak hesaplanması bir diferansiyel oran olarak algılanmıştır. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ şeklinde diferansiyel oran olarak ifade edilebildiği düşünüldüğünde *oran* nesnesinin diferansiyelin anlamlandırılmasına hizmet eden bir üst nesnesi olduğu görülür.

Diferansiyel nesnesi analitik teknik kullanılarak açıklanırken fonksiyonun bağımlı ve bağımsız değişkeninde oluşan değişimin ifade edilebilmesi için fonksiyon grafiğine çizilen teğet doğrusundan ve bu doğrunun altına çizilen dik üçgenden yararlanılır.

Diferansiyel nesnesi ile doğru ve *düzlem parçası (dik üçgen)* nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiler Şekil 4.34'te verilen grafik yardımıyla açıklanmıştır.



Şekil 4.34. dx ve dy *diferansiyellerinin teğet doğrusu yardımıyla gösterilmesi*

Şekil 4.34'te dx ve dy diferansiyelleri analitik düzlemde ifade edilirken $y=f(x)$ fonksiyonuna çizilen t teğet doğrusundan ve $\overset{\Delta}{CBH}$'nden yararlanılmıştır. Buna göre hipotenüsü t doğrusu üzerinde olacak şekilde çizilen $\overset{\Delta}{CBH}$'nin dik kenar uzunlukları dx ve dy diferansiyelleri olarak ifade edilmiştir. $\dfrac{dy}{dx}$ diferansiyel oranı ise teğet doğrusunun eğimi yardımıyla,

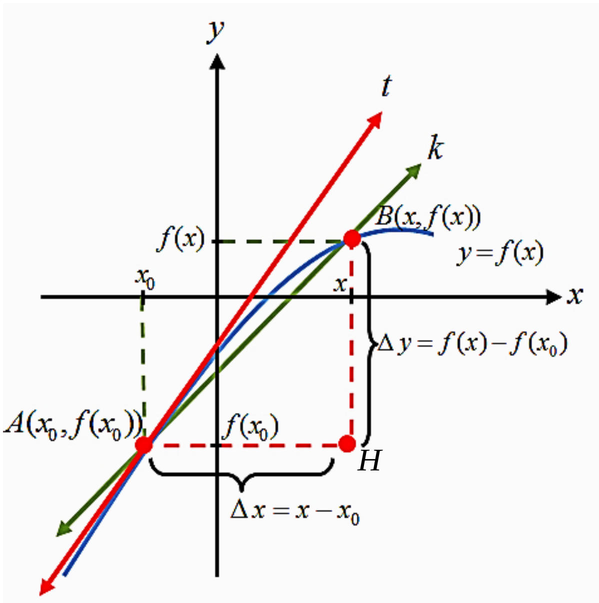
$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} \qquad (4.\ 111)$$

olarak bulunur. Bu durumda *doğru* ve *düzlem parçası* nesneleri *diferansiyel* nesnesinin açıklanmasında ekolojik görevler üstlendikleri için *diferansiyel* nesnesinin üst nesneleri olarak değerlendirilebilir.

Şekil 4.34'te dx ve dy diferansiyelleri ifade edilirken kullanılan Δx ve Δy ifadeleri $f(x)$ fonksiyonundaki bağımsız değişkenin $(x,\ x+dx)$ aralığındaki değişimine karşı bağımlı değişkenin $(f(x),\ f(x+dx))$ aralığındaki değişimini ifade etmektedir. Bu değişimlerin ifade edilmesinde *aralık* nesnesi yerine *eşitsizlik* nesnesi de kullanılabilir. *Aralık* ve *eşitsizlik,* diferansiyel kavramının açıklanmasına ve anlamlandırılmasına ekolojik katkı sağladıkları için *diferansiyel*in üst nesneleri olarak belirlenmiştir.

4.7.5. Kiriş-teğet-eğim nesnelerinin beslendiği nesneler

Kiriş, teğet ve *eğim* nesnelerinin ilişkili oldukları *kavram-1* nesnelerinin belirlenmesi amacıyla Şekil 4.35'te $y = f(x)$ fonksiyonunun analitik düzlemde grafiği çizilmiştir.



Şekil 4.35. $y = f(x)$ *fonksiyonunun* $A(x_0, f(x_0))$ *noktasından geçen kiriş ve teğeti*

Şekil 4.35'te verilenlere göre $y = f(x)$ fonksiyonu ile $A(x_0,\ y_0)$ ve $B(x,\ f(x))$ noktalarında kesişen k kiriş doğrusunun eğimi,

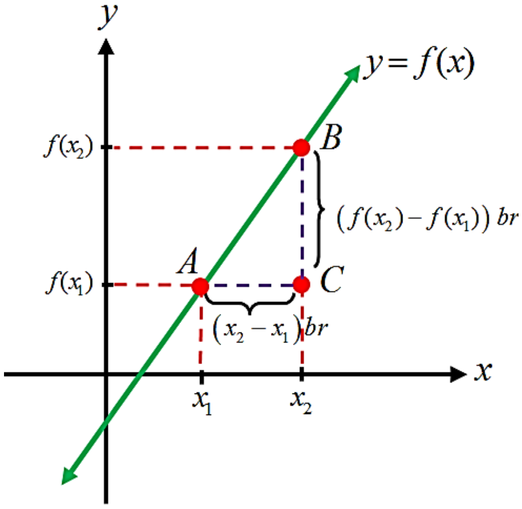
$$m_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4. 112}$$

oranı ile ifade edilir. $y = f(x)$ fonksiyonuna $A(x_0, y_0)$ noktasında teğet olan t doğrunun eğimi ise $m_k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ oranından yararlanılarak,

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4. 113}$$

limiti ile ifade edilir. Elde edilen eğim değerleri yardımıyla fonksiyon eğrisine çizilen teğet ve kiriş doğrularının denklemleri de bulunabilir. *Oran* nesnesi, eğim değerlerinin bulunmasında ve kiriş - teğet denklemlerinin belirlenmesinde ekolojik katkı sağladığı için, *kiriş, teğet ve eğim* nesnelerinin üst nesnesi olarak belirlenmiştir.

Eğim, iki nokta arasındaki dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranı olarak tanımlanır. Bu tanımın geometrik olarak ne ifade ettiği, Şekil 4.36'da analitik düzlemde çizilen doğru grafiği yardımıyla açıklanmıştır.



Şekil 4.36. *Eğimin analitik düzlemde çizilen* d *doğrusunun grafiği yardımıyla ifade edilmesi*

Şekil 4.36'da verilen $y = f(x)$ doğrusunun grafiğine göre A ve B noktaları arasındaki dikey değişim $(f(x_2) - f(x_1))br$, yatay değişim ise $(x_2 - x_1)br$'dir. $y = f(x)$ doğrusunun eğimi bu değişimlerin oranı olarak,

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{4. 114}$$

şeklinde ifade edilir. Böylelikle *doğru* nesnesi eğim kavramının anlamlandırılmasına katkı sağladığı için *eğim* nesnesinin üst nesnesi olur. Kiriş ve teğet doğruları belirli şartları taşıyan özel doğrular oldukları için *doğru* nesnesi aynı zamanda *kiriş* ve *teğet* nesnelerinin de üst nesnesidir.

Analitik teknik kullanılarak bir fonksiyonun bir noktadaki türevi, fonksiyon eğrisine bu noktadan geçecek şekilde çizilen kiriş ve teğet doğrularının eğimleri yardımıyla belirlenir. Teğet ve kiriş doğrularının eğimleri belirlenirken genellikle dik üçgenlerden yararlanılır. Örneğin, Şekil 4.36'da grafiği çizilen $y = f(x)$ fonksiyonun bir teğet doğrusu olduğu varsayılsın. Bu doğrunun eğimi $\overset{\Delta}{ABC}$'nin dik kenar uzunlukları yardımıyla (4. 114) olarak belirlenir. $y = f(x)$ doğrusunun eğimi üçgen yerine bir geometrik cisim yardımı ile de belirlenebilir. *Düzlem parçası* veya *geometrik cisim* nesneleri kiriş ve teğet doğrularının eğimlerinin belirlenmesine katkı sağlayarak bu nesneleri ekolojik olarak besledikleri için *kiriş* ve *teğet* nesnelerinin birer üst nesnesi olarak belirlenmiştir.

4.7.6. Komşuluk nesnesinin beslendiği nesneler

Yakınsaklık nesnesi, *komşuluk* nesnesinin anlamlandırılmasında kritik bir ekolojik etkiye sahiptir. Bu ekolojik etkinin anlaşılabilmesi için *komşuluk* nesnesinin limit alma işlemi için ne ifade ettiğinin açıklanması gerekir. Limitte bir reel sayının komşuluğu, o reel sayıya yaklaşan değerlerin yer aldığı özel bir aralığı ifade eder. *Yakınsaklık* nesnesi, *komşuluk* nesnesini özel bir aralık yaparak anlamlandıran nesne olarak değerlendirilebilir. Çalışmada bu husus dikkate alınarak *yakınsaklık* nesnesi *komşuluk* nesnesinin üst nesnesi olarak belirlenmiştir.

$\varepsilon - \delta$ tanımına ilk kez Cauchy (1821)'nin *Cours d'Analyse* isimli eserinde yer verilmiştir. Bu eserde "x in büyüyen değerleri için $f(x+1) - f(x)$ farkı k gibi bir limite yakınsar." cümlesi ile ifade edilen teoremin ispatı yapılırken şu ifadeye yer verilmiştir:

> *ε ile seçebileceğimiz en küçük sayıyı ifade edelim. Mademki x in büyüyen değerleri $f(x+1) - f(x)$ farkının k gibi bir değere yakınsamasını sağlıyor, o halde öyle bir h değeri bulunabilir ki x'ler h'den büyük veya ona eşit olduğunda söz konusu fark her zaman $k-\varepsilon,\ k+\varepsilon$ aralığının içinde kalır (Cauchy, 1821).*

Cauchy'nin ifadesinde limit bağlamında komşuluk kavramının eşitsizlik ve aralık kavramları ile ilişkilendirildiği görülmektedir. Cauchy'nin ifadesine paralel olarak, $x \to x_0$ bir $f(x)$ fonksiyonunun limitinin bir L reel sayısına eşit olduğunun gösterilebilmesi için, x değeri x_0'a yeterince yakın tutulduğunda $f(x)$ ve L arasındaki aralığın seçilebilecek kadar küçük olabileceğinin gösterilmesi gerekir. $f(x)$ ve L arasındaki aralığın büyüklüğü belirlendiğinde bu durumun komşuluk, *aralık* ve *eşitsizlik* nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiye nasıl yansıdığı Örnek 4.21'de açıklanmıştır.

Örnek 4.21. $y = 2x + 3$ fonksiyonunda x değerlerinin görüntülerinin $\lim\limits_{x \to 2} 2x + 3 = 7$'ye 2 birimden daha yakın olabilmesi için x değerlerinin yer alması gereken aralığı belirleme.

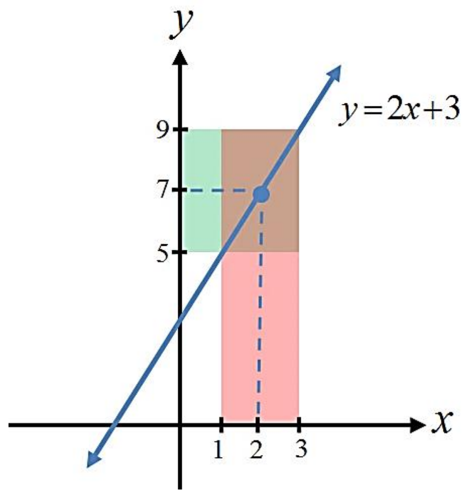
Çözüm x'in hangi aralıktaki değerleri için $\left|(2x+3)-7\right| \prec 2$ eşitsizliğinin sağlanabileceği belirlenmelidir. Bunun için $\left|(2x+3)-7\right| \prec 2$ eşitsizliğinden yola çıkılarak kullanılarak,

$$\begin{gathered} \left|(2x+3)-7\right| \prec 2 \\ \left|2x-4\right| \prec 2 \\ -2 \prec 2x-4 \prec 2 \\ 2 \prec 2x \prec 6 \\ 1 \prec x \prec 3 \end{gathered} \tag{4. 115}$$

elde edilir. Buna göre, x değerleri $x_0 = 2$'in 1 birim uzaklığındaki komşuluğunda tutulduğunda elde edilen y değerleri de $y_0 = 7$'nin 2 birim uzaklığındaki komşuluğunda yer alır.

$y = 2x + 3$ fonksiyonunun y değerleri $(5,9)$ aralığında iken elde edilen x değerlerinin hangi aralıkta yer aldığı Şekil 4.37'deki grafikte gösterilmiştir.

Şekil 4.37 incelendiğinde $x_0 = 2$'nin 1 birim uzaklığındaki komşuluğunun $(1, 3)$ aralığı ile ifade edilebileceği görülmektedir. Bu aralıktaki değerlerin görüntüleri ise $y_0 = 7$ 'nin 2 birim uzaklığındaki komşuluğu olan $(5, 9)$ aralığında yer almaktadır. *Komşuluk* nesnesinin *aralık* veya *eşitsizlik* nesnelerinden yararlanılarak ifade edilebildiği değerlendirilerek, *aralık* ve *eşitsizlik, komşuluk* nesnesinin üst nesneleri olarak belirlenmiştir. Ayrıca $x_0 = 2$ ve $y_0 = 7$ komşuluklarının x ve y eksenleri üzerinde gösteriliyor olması, *doğru* nesnesinin komşuluğun anlamladırılmasına ekolojik katkı sağladığını göstermektedir.



Şekil 4.37. $y = 2x + 3$ *fonksiyonunda* y *değerleri* $(5,9)$ *aralığında iken elde edilen* x *değerleri*

4.7.7. Değişken nesnesinin beslendiği nesneler

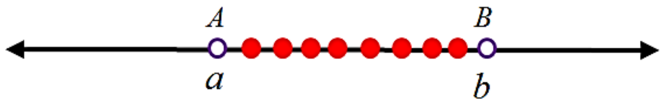
Aralık ve *eşitsizlik* nesneleri, reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı olan fonksiyonlarda, bağımsız değişkene verilebilecek değerlerin belirlenmesinde ekolojik görevler üstlenir. Örneğin,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} \tag{4. 116}$$

fonksiyonu $\forall x \in (-4,\ 4)$ için tanımlıdır. $x \in (-4,\ 4)$ ifadesi x değişkenine $(-4,\ 4)$ aralığı dışında yer alan bir değerin verilemeyeceğini ifade eder. Böylelikle *aralık* nesnesi, bağımsız değişkene verilebilecek değerlerin sınırlandırılması sağlayarak, *değişken* nesnesinin anlamlandırılmasına ekolojik destek sağlamaktadır. x bağımsız değişkeninin alabileceği değerlerin $-4 \prec x \prec 4$ eşitsizliği kullanılarak da ifade edilebileceği değerlendirilerek *aralık* ve *eşitsizlik* nesneleri *değişken* nesnesinin üst nesneleri olarak belirlenmiştir.

4.7.8. Nokta nesnesinin beslendiği nesneler

Sayı doğrusunda her bir noktaya bir reel sayı karşılık gelir ve iki nokta arasındaki reel sayılar aralık veya eşitsizliklerle ifade edilir.



Şekil 4.38. (a, b) *aralığında bulunan noktaların sayı doğrusunda gösterilmesi*

Örneğin, Şekil 4.38'de verilen sayı doğrusunda A ve B noktalarının sırasıyla a ve b reel sayılarına karşılık geldiği varsayıldığında bu noktalar arasında yer alan bütün noktalar (a, b) açık aralığı ile ifade edilir. Birbirinden farklı a ve b sayıları arasında sonsuz sayıda reel sayı olduğu için A ile B noktaları arasında sonsuz sayıda nokta bulunur. Bu durum, noktaların kalınlıklarından bahsetmenin mümkün olamayacağı anlamına gelir. Böylelikle *aralık, nokta* nesnesinin anlamlandırılmasına hizmet etmiş olur. Aralık yerine eşitsizliğin kullanılabileceği göz önünde tutulduğunda, *aralık* ve *eşitsizlik* nesnelerinin *nokta* nesnesinin üst nesneleri olduğu sonucuna varılır.

Öklid geometrisinde doğrunun üç temel özelliği; doğrusal olması, genişliği ve kalınlığının olmaması ve her iki uç yönünde de sonsuza gitmesi şeklinde ifade edilir.

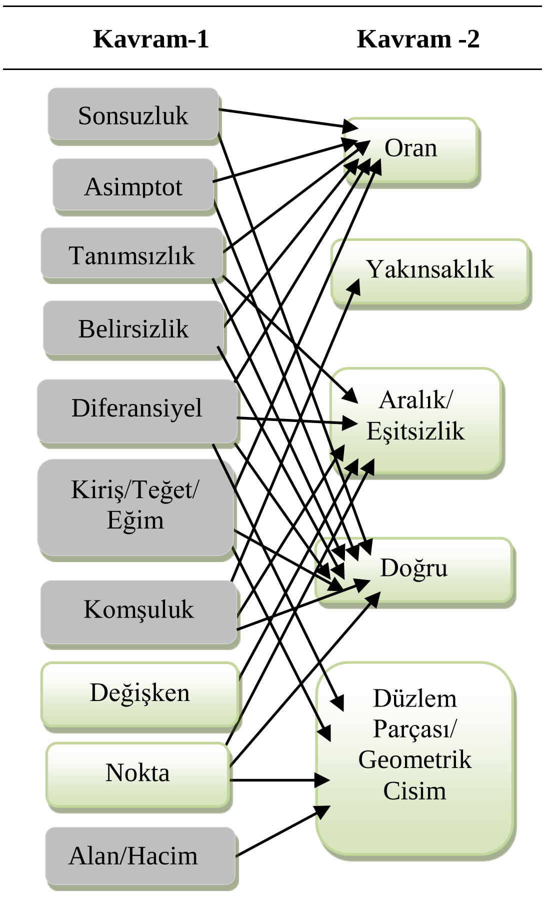
Sezgisel olarak *doğru, düz bir biçimde sonsuz tane nokta koyularak her iki ucundan da uzatıldığı varsayılan bir nesne* olarak tanımlanır. Bu tanım, yukarıda verilen doğruya ait temel özellikleri karşılamaktadır. Çünkü; tanımda doğruyu oluşturan noktaların düz bir biçimde yerleştirildiği belirtildiği için doğrunun birinci temel özelliği sağlanmış olur. Ayrıca, noktanın genişliği ve kalınlığı olmadığı için noktalardan oluşturulan doğrunun da genişliği ve kalınlığı olmayacaktır. Dolayısıyla, yapılan tanım doğrunun ikinci özelliğini de sağlar. Son olarak, yapılan tanıma göre doğru sonsuz tane noktadan oluşturulduğu için her iki uç yönünden de sonsuza doğru gidecektir. Bu durumda son özellik de sağlanmış olur (Doğan, 2013). Sonuç olarak *doğru,* her iki yönde de sonsuza giden noktaların bir araya gelmesi sonucunda oluştuğu (*nokta* nesnesinin genel nesnesi olduğu) için noktanın üst nesnesi olarak belirlenmiştir.

Öklidyen geometride, noktanın farklı özelliklerinden yararlanılarak farklı geometrik durumlar (bir noktadan sonsuz tane doğrunun geçebilmesi gibi), farklı geometrik şekiller veya cisimler elde edilir. Örneğin; sabit bir noktadan belirli bir uzaklıktaki bütün noktaların kümesi çember oluşturur. Üç boyutlu uzayda bir merkezden belli uzaklıktaki bütün noktaların kümesi ise küre oluşturur. Bu gibi örnekler, Öklid geometrisinde düzlem parçası veya geometrik cisimlerin noktaların bir araya gelmesi sonucunda oluştuğunu göstermektedir. Bu durumda *düzlem parçası* veya *geometrik cisim* nesneleri *nokta* nesnesinin bir üst nesnesi olarak değerlendirilebilir.

4.7.9. Alan-hacim nesnelerinin beslendiği nesneler

Düzlem parçalarının alanlarının hesaplanması *alan* nesnesinin; geometrik cisimlerin hacimlerinin hesaplanması ise *hacim* nesnesinin anlamlandırılmasına hizmet etmektedir. Bu ekolojik ilişkiler dikkate alınarak *düzlem parçası* ve *geometrik cisim* nesneleri sırasıyla *alan* ve *hacim* nesnelerinin üst nesneleri olarak belirlenmiştir.

Şekil 4.39'da *kavram-1* ve *kavram-2* grubu nesnelerinin ilişkileri verilmiştir.



Şekil 4.39. *Kavram-1 grubu nesneleri ile kavram-2 grubu nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiler*

4.8. Kavram -3 Nesneleri

Çalışmanın bu bölümünde *kavram – 2* nesnelerini doğrulayan veya anlamlandıran nesneler belirlenmiştir. Bu nesneler aynı zamanda global sitin *kavram – 3* kategorisini oluşturan nesnelerdir.

4.8.1. Oran nesnesinin beslendiği nesneler

Oran kavramı, farklı ölçme uzaylarına ait iki çokluğun çarpımsal olarak karşılaştırılması sonucunda elde edilen ölçüm olarak tanımlanabilir (Akar, 2013). Karşılaştırılan çoklukların $a, b \in R$ ve $b \neq 0$ olduğu düşünüldüğünde, karşılaştırma sonucunda elde edilen $\frac{a}{b}$ oranı bir reel sayıya karşılık gelir. Örneğin, bir hareketlinin alması gereken yol 240 km, bu yolu alması için sahip olduğu zaman 7 saat olsun. Bu şartlarda hareketlinin hedefine tam vaktinde ulaşabilmesi için sahip olması gereken ortalama hız $\frac{240}{7} km / sa$ olur. Elde edilen bu oran değeri, aynı zamanda $\frac{240}{7} = 34,\overline{285714}$ reel sayısına karşılık gelir. Bu durumda *reel sayı* nesnesi oran kavramının açıklanmasına ve anlamlandırılmasına hizmet ettiği için *oran*ın üst nesnesi olarak değerlendirilebilir.

4.8.2 Yakınsaklık nesnesinin beslendiği nesneler

A boş olmayan bir küme olmak üzere her pozitif tam sayıyı A kümesinden bir elemana eşleyen fonksiyona dizi denir. Bu tanımdan dizilerin sayma sayılarında tanımlı özel fonksiyonlar oldukları anlaşılmaktadır. Çalışmada bu hususa dikkat çekmek amacı ile global sit diyagramında *dizi* nesnesi *fonksiyon* nesnesi ile bitişik olacak şekilde konumlandırılmıştır.

Her pozitif tam sayıyı bir reel sayıya eşleyen fonksiyonlar *reel sayı dizisi* olarak adlandırılır. Buna göre, bir (a_n) reel sayı dizisinin terimleri,

$$f : \{1, 2, 3, ..., n, ...\} \rightarrow R$$

.

$$f(n) = a_n \tag{4. 117}$$

şeklinde ifade edilir.

(a_n) reel sayı dizisinde n değeri arttıkça dizinin terimleri belirli bir reel sayı değerine yaklaşıyor ise bu durumda (a_n) dizisi yakınsaktır. Yakınsak olmayan diziler ise ıraksak dizi olarak sınıflandırılır. *Yakınsaklık* ile *dizi* nesnesi arasındaki ekolojik ilişki Örnek 4.22'de incelenmiştir.

Örnek 4.22. $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ dizisinin yakınsaklığını inceleme.

Çözüm $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ dizisinin bazı terimlerinin aldığı reel sayı değerleri Tablo 4.9'da verilmiştir.

Tablo 4.9. n *indisi arttıkça* $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ *dizisinin aldığı değerler*

n	a_n
1	2
2	2
3	$1,\overline{3}$
4	$0,\overline{6}$
5	$0,2\overline{6}$
6	$0,0\overline{8}$
7	$0,0\overline{253968}$
8	$0,0\overline{063492}$
9	$\approx 0,001410$
10	$\approx 0,000282$
11	$\approx 0,000051$
12	$\approx 0,000008$
...	...
$n \to \infty$	0

Tablo 4.9 incelendiğinde, n indisi artan değerler aldıkça a_n dizisinin sıfır sayısına giderek yaklaşan değerler aldığı görülür. Sonuç olarak $n \to \infty$ için a_n dizisi sıfıra yakınsar. Bu durum a_n dizisinin $n \to \infty$ limitinin sıfır olduğu anlamına gelir ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \quad (4.\ 118)$$

şeklinde ifade edilir.

Serilerde de dizilerdekine benzer bir yakınsaklık ilişkisi vardır. Bir a_n dizisinin,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad (4.\ 119)$$

şeklinde terimlerinin toplamı bir seri belirtir.

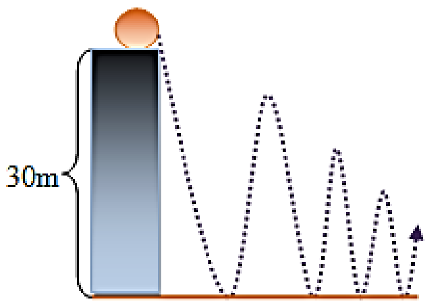
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad (4.\ 120)$$

S_n bu serinin kısmi toplamlar dizisidir. Eğer S_n bir L limitine yakınsıyor ise bu durumda seri yakınsaktır ve

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \quad (4.\ 121)$$

şeklinde yazılır. Eğer S_n bir reel sayı değerine yakınsamıyor ise bu durumda seri ıraksak olur. *Yakınsaklık* ile *seri* nesnesi arasındaki ekolojik ilişki Örnek 4.23'te incelenmiştir.

Örnek 4.23.



Şekil 4.40. *Bir topun belirli bir yükseklikten yere bırakılması*

30 m yükseklikten yere bırakılan ve yere çarptıktan sonra her seferinde bir önceki yüksekliğinin 2/3'ü kadar yukarı zıplayan bir topun durana kadar dikeyde katedeceği toplam mesafeyi bulma.

Çözüm 1.Yol Ortak çarpanı r, olan bir sonsuz serinin n'inci kısmi toplamı,

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
&= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-1} \\
&= a_1\left(r + r^2 + \ldots + r^{n-1}\right) \\
&= a_1 \frac{1-r^n}{1-r}
\end{aligned}
\qquad (4.\ 122)
$$

şeklinde bulunur. Buna göre sonsuz geometrik seri,

$$
a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = L \qquad (4.\ 123)
$$

limiti ile hesaplanır. (4. 123)'ten yararlanılarak topun dikeyde kat ettiği toplam mesafe,

$$
30+2\left[\left(20.\frac{2}{3}\right)+\left(20.\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)+\left(20.\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)+\ldots\right]=30+2\left[\lim_{n\to\infty} 20\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right]=150 \qquad (4.\ 124)
$$

olarak bulunur. Buna göre elde edilen limit değeri bir reel sayıya eşit olduğu için

$$
\left(20.\frac{2}{3}\right)+\left(20.\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)+\left(20.\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)+\ldots \qquad (4.\ 125)
$$

sonsuz serisi yakınsaktır.

2.Yol Problemin nümerik teknik kullanılarak çözülebilmesi için

$$
30+2\left[\left(20.\frac{2}{3}\right)+\left(20.\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)+\left(20.\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)+\ldots\right]=30+2\left[\sum_{n=1}^{\infty} 20\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right] \qquad (4.\ 126)
$$

ifadesinin hangi reel sayı değerine yakınsadığının belirlenmesi gerekir. Buna göre,

$$
\left(20.\frac{2}{3}\right)+\left(20.\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)+\left(20.\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} 20\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \qquad (4.\ 127)
$$

sonsuz serisinin kısmi toplamlar dizisi,

$$S_n = 20\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 60\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \qquad (n \in Z^+) \tag{4. 128}$$

şeklinde hesaplanır. Bu durumda problemin çözümü için,

$$30+2.60\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 30+2.S_n \qquad (n \in Z^+) \tag{4. 129}$$

ifadesinin $n \to \infty$ için hangi değere yakınsadığının belirlenmesi gerekir. $n \in Z^+$ için elde edilen bazı nümerik değerler Tablo 4.10'da verilmiştir.

Tablo 4.10. S_n *kısmi toplamlar dizisi yardımıyla topun dikeyde aldığı mesafenin belirlenmesi*

n	S_n	$30+2.S_n$
1	20	70
2	$33,\overline{3}$	$96,\overline{6}$
3	$42,\overline{2}$	$114,\overline{4}$
4	$48,\overline{148}$	$126,\overline{296}$
5	$\approx 52,0987$	$\approx 134,1975$
10	$\approx 58,9595$	$\approx 147,9190$
15	$\approx 59,8629$	$\approx 149,7259$
20	$\approx 59,9819$	$\approx 149,9639$
25	$\approx 59,9976$	$\approx 149,9952$
30	$\approx 59,9996$	$\approx 149,9993$
...	...	...
$n \to \infty$	60	150

Tablo 4.10 incelendiğinde, n indisinin değeri arttıkça S_n serisinin n'inci kısmi toplamının 60 reel sayısına, buna karşın topun dikeyde katettiği mesafenin 150 sayısına yakınsadığı görülür. Sonuç olarak top durana kadar dikeyde 150 m mesafe kat eder.

Çözülen örnekler değerlendirildiğinde, *dizi* ve *seri* nesnelerinin *yakınsaklık* nesnesinin incelenmesine olanak sağlayarak bu nesneyi anlamlandırdığı görülür. Her dizinin aynı zamanda bir fonksiyon olduğu düşünüldüğünde *dizi* ve *seri* nesnelerinin yanı sıra *fonksiyon* nesnesinin de *yakınsaklık* nesnesini ekolojik olarak beslediği görülür.

Dizilerin ve serilerin yakınsaklığına karar verilirken *reel sayı* nesnesinden yararlanılır. Buna göre, bir dizinin yakınsak olabilmesi için diziyi oluşturan terimlerin belirli bir reel sayı değerine yaklaşması gerekir (Örnek 4.22 incelenebilir). Benzer şekilde, sonsuz bir serinin yakınsaklığına karar verilirken de kısmi toplamlar dizisinin belirli bir reel sayıya yaklaşıp yaklaşmadığı belirlenir (Örnek 4.23 incelenebilir). Ortaya çıkan ekolojik ilişkiler *yakınsaklık* nesnesinin *reel sayı* nesnesinden beslendiği göstermektedir.

Reel sayı nesnesinin *yakınsaklık* nesnesi ile ekolojik ilişkisi analiz çalışma alanı için oldukça önemlidir. Bu ekolojik ilişkide reel sayıların *sıralama* ve *tamlık* özelliklerinin önemli bir rolü vardır. Öyle ki, reel sayıların sıralama ve tamlık özellikleri olmasaydı analizdeki birçok teorem geçersiz olurdu (Thomas, Weir and Hass, 2015). Çalışmada bu hususa dikkat çekmek amacı ile reel sayı, *sıralama* ve *tamlık* nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiye ayrı bir parantez açma ihtiyacı duyulmuştur.

Reel sayılar kümesinin bütün elemanları sıralama bağıntısı için gerekli olan yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağladığı için reel sayılar kümesi sıralama özelliğine sahiptir. Limit alma işleminde bu özellikten yararlanılarak, bir fonksiyonun bağımsız değişkenine limitin alındığı noktaya giderek yaklaşan reel sayı değerleri verilebilmekte ve elde edilen görüntü değerlerinin bir reel sayıya yaklaşma durumu incelenebilmektedir. Bu durum, reel sayıların sıralama özelliğinin limit alma işlemi için olmazsa olmaz nitelikte olduğunu göstermektedir. *Süreklilik, türev* ve *integral* temel araçlarının *limit* temel aracından beslendiği değerlendirildiğinde sıralama özelliğinin gerek diferansiyel gerekse integral analiz için hayati bir önem ifade ettiği anlaşılmaktadır.

Reel sayılar kümesinin tamlık özelliğinin incelenebilmesi için öncelikle *üst sınır, en küçük üst sınır* ve *sıralı tam cisim* kavramlarının tanımlanması gerekir. Bir sayı kümesindeki bütün sayılar bir M sayısından küçük veya eşit ise M sayısına bu sayı kümesinin bir üst sınırı denir. Üst sınırların en küçüğüne ise en küçük üst sınır denir. Örneğin, $M=4$, negatif sayılar için bir üst sınırdır. $M=2$ de öyledir ve bu durum 4 değerinin en küçük üst sınır olmadığını gösterir. Negatif sayılar kümesi için en küçük üst sınır $M=0$ dır. Boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin bir en küçük üst sınırı olan cisim, sıralı tam cisim olarak tanımlanır. Örneğin, rasyonel sayılar kümesi üzerinde değerlendirildiğinde, $\sqrt{2}$ 'den küçük sayılar kümesi üstten sınırlıdır. Fakat, herhangi bir rasyonel M üst sınırı, biraz daha büyük olup $\sqrt{2}$ 'den küçük olan bir rasyonel sayı ile değiştirilebileceği için rasyonel bir en küçük üst sınır yoktur. Dolayısıyla, rasyonel sayılar tam değildir. Reel sayılar içinde üstten sınırlı her kümenin bir en küçük üst sınırı daima olabileceği için reel sayılar, tamlık özelliğine sahip olan sıralı bir tam cisimdir (Thomas, Weir and Hass, 2015).

Tamlık özelliği, reel sayıların sayı doğrusunda hiçbir boşluk kalmayacak biçimde sıralanarak yerleştirilmelerine olanak sağlamaktadır. Böylelikle, limit alma işlemi yapılırken tamlık özelliğinden yararlanılarak belirli bir reel sayıyı içine alan komşuluk oluşturulabilmekte ve bu reel sayıya yaklaşılarak limit alma işlemi yapılabilmektedir.

Reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerinin önemine vurgu yapılması amacıyla global sitte *reel sayı* nesnesi ile *sıralama* ve *tamlık* nesnelerine birbirlerine yakın olacak şekilde konumlandırılmıştır.

4.8.3 Aralık - eşitsizlik nesnelerinin beslendiği nesneler

Analizde üzerinde limit, türev veya integral alma işlemi yapılan fonksiyonlar genellikle reel sayılar kümesinde veya bu kümenin alt kümesi olan aralıklarda tanımlanır. Bu tür fonksiyonların tanım kümelerinden hareketle *aralık* nesnesi açıklanabilmekte ve böylelikle *fonksiyon* nesnesi *aralık* nesnesini anlamlandırmaya hizmet eden ekolojik bir rol üstlenmektedir. Aralıkların eşitsizlikler yardımıyla ifade edilebildiği göz önünde tutularak, *fonksiyon* nesnesi *aralık* ve *eşitsizlik* nesnelerini besleyen bir üst nesne olarak belirlenmiştir.

Reel sayı aralıkları ve bu aralıkları ifade etmede kullanılan eşitsizlikler reel sayılar kümesinin birer alt kümesidir. Örneğin, $[a,b]$ aralığı veya $a \leq x \leq b \ (x \in R)$ eşitsizliği reel sayı doğrusu üzerinde, a ve b sayıları da dahil olmak üzere bu sayılar arasındaki bütün reel sayıları ifade eder. Reel sayılar kümesi aralık ve eşitsizlikleri kapsayan en geniş küme olarak değerlendirilebileceği için *reel sayı* nesnesi *aralık* ve *eşitsizlik* nesnelerinin üst nesnesi olarak belirlenmiştir.

4.8.4. Doğru nesnesinin beslendiği nesneler

$y = f(x) = mx + n \ (m,n \in R, \ m \neq 0)$ fonksiyonu genel doğru denklemi olarak adlandırılır. Doğru denklemleri kullanılarak doğruların grafikleri analitik düzlemde çizilebilir ve diğer geometrik nesnelerle ilişkileri (örneğin iki doğrunun paralelliğinin incelenmesi veya kesişme noktasının belirlenmesi gibi) incelebilir. Böylelikle fonksiyon kavramı bir geometrik nesne olarak *doğru*nun cebir ve analitik geometri ile ilişkilendirilmesine ekolojik katkı sağlamış olur. *Fonksiyon* nesnesi, doğrunun anlamlandırılmasını sağlayan ekolojik katkısından dolayı *doğru* nesnesinin üst nesnesi olarak belirlenmiştir.

Sayı doğrusunda her bir nokta bir reel sayıya karşılık gelir ve birbirinden farklı iki reel sayı arasına sonsuz sayıda reel sayı yazılabilir. Bu durum, bir doğru üzerinde bulunan farklı iki nokta arasında sonsuz sayıda noktanın yer alması şeklinde yorumlanır. *Reel sayı* nesnesi böylelikle noktaların bir araya gelmesi sonucunda doğruların nasıl oluştuğunun anlamlandırılmasına hizmet ederek *doğru* nesnesinin ekolojik olarak beslenmesine katkıda bulunur.

Doğrular, özel eğriler olarak tanımlanabilir. Başka bir ifadeyle, her doğru aynı zamanda bir eğridir. Örneğin, kartezyen koordinat sisteminde grafiği çizilen,

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b.c \in R) \tag{4. 130}$$

fonksiyonlarının grafikleri birer eğri belirtir. Buna karşılık $a = 0$ için elde edilen eğriler aynı zamanda birer doğrudur. Bu durumda *eğri*, daha genel bir kavram olarak, *doğru* nesnesinin üst nesnesidir.

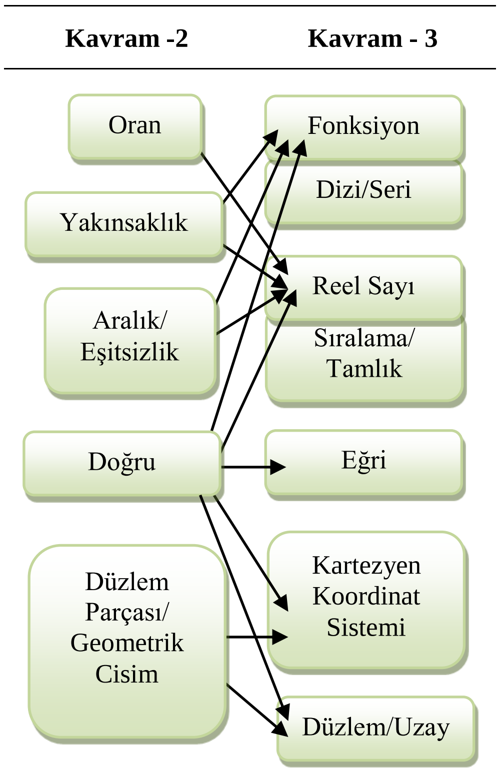
Kartezyen koordinat sistemleri doğru çizimlerinin yapıldığı, bu çizimlerden yararlanılarak doğruların noktalarla, düzlemlerle, geometrik cisimlerle, birbirleriyle ve cebirle olan ekolojik ilişkilerinin incelendiği yapılardır. *Kartezyen koordinat sistemleri*, doğruların açıklanmasına ve anlamlandırılmasına hizmet ettiği için *doğru* nesnesinin üst nesnesi olarak nitelendirilebilir. Ayrıca bu incelemelerin kartezyen koordinat sistemleri aracılığıyla düzlemler veya uzaylar üzerinde yapılıyor olması, *düzlem* ve *uzay* nesnelerinin *doğru* nesnesinin açıklanmasına ekolojik katkı sağladığını göstermektedir.

4.8.5. Düzlem parçası ve geometrik cisim nesnelerinin beslendiği nesneler

Düzlem parçalarının özellikleri incelenirken, düzlem parçalarını ifade eden cebirsel ifadeler belirlenirken, geometrik nesnelere dönüşüm hareketleri yapılarak (öteleme, yansıma veya dönme dönüşümü gibi) düzlem parçaları oluşturulurken kartezyen koordinat sistemlerinden yararlanılır. Geometrik cisimler oluşturulurken, özellikleri belirlenirken veya diğer geometrik nesnelerle olan ilişkileri incelenirken de yine kartezyen koordinat sistemlerinden yararlanılır. *Kartezyen koordinat sistemleri, düzlem parçası* ve *geometrik cisim* nesnelerinin anlamlandırılmasına katkı sağladıkları için ekolojik açıdan bu nesnelerin ortak üst nesnesi olarak nitelendirilebilir.

Düzlemler eni ve boyu sonsuz uzunlukta kabul edildiği için ölçülemeyen iki boyutlu geometrik nesnelerdir. Üçgen, kare, dikdörtgen gibi düzlem parçalarının ise enleri veya boyları ölçülebilir. Gerçek yaşantı durumlarında düzlemler yerine düzlem parçaları kullanılır. Bu nedenle *düzlem parçası* nesnesi için üç boyutlu uzayın gerçek nesneleri ifadesi kullanılabilir. *Düzlem parçası* ile *düzlem* arasındaki ekolojik ilişkiye benzer bir durum, *geometrik cisimler* ile *uzay* nesneleri arasında da vardır. Uzayda en, boy ve derinlik sonsuz kabul edildiği için ölçülemez. Geometrik cisimler ise en, boy ve derinlikleri ölçülebilen üç boyutlu nesnelerdir. Geometrik cisimler, üç boyutlu uzayın gerçek nesneleri olarak tanımlanabilir. *Düzlem* ve *uzay* nesneleri, sırasıyla *düzlem parçası* ve *geometrik cisim* nesnelerini genelleyen nesneler oldukları için ekolojik anlamda bu nesnelerin üst nesneleri olarak nitelendirilebilir.

Şekil 4.41'de *kavram-2* grubu nesneleri ile *kavram-3* grubu nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilere yer verilmiştir.



Şekil 4.41. *Kavram-2 grubu nesneleri ile kavram-3 grubu nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiler*

4.9. Çalışma Alanlarının Belirlenmesi ve Ekolojik İlişkilerinin Değerlendirilmesi

Bu bölümde öncelikle global sitte yer alan çalışma alanları hakkında genel tarihsel ve epistemolojik bilgilere yer verilmiştir. Ardından *kavram-3* nesneleri ile bu çalışma alanları arasındaki ekolojik ilişkiler açıklanmıştır.

4.9.1. Çalışma alanları

Tarihsel ve epistemolojik veriler değerlendirildiğinde *kavram-3* nesnelerinin; *reel analiz, fonksiyonel analiz, kümeler teorisi, analitik geometri* ve *öklidyen geometri* çalışma alanları ile ekolojik ilişkilerinin olduğu görülmüştür. Her bir çalışma alanı için genel tarihsel ve epistemolojik bilgiler ayrı bir başlık altında açıklanmıştır.

4.9.1.1. *Reel Değişkenli fonksiyonlar teorisi (Reel analiz)*

Reel değişkenli fonksiyonlar teorisi (RDFT) matematiğin kapsamlı bir çalışma alanıdır. RDFT'nin çalışma alanına giren konulardan bazıları; fonksiyonların sınıflandırılması, toplanabilir fonksiyonlar ve sınıfları, sonlu salınımlı ve mutlak sürekli fonksiyonlar, fonksiyonların constructive teorisi, fonksiyonların descriptive teorisi, seriler teorisi, ıraksak seriler, fourier serileri ve dönüşümleri, ortogonal sistemler ve seriler, türev kavramı ve uygulamaları, Lebesgue integrali, Stieltjes integralleri, singüler integraller ve uygulamaları, kümelerin yapı ve ölçüm teorisi, fonksiyonların yapı ve ölçüm teorisidir.

Klasik matematik analiz ile RDFT'nin birçok ortak noktası vardır. Örneğin RDFT'de, klasik matematik analizde de olduğu gibi, fonksiyonların özellikleri incelenir, yakınsaklık problemleri çözülür, limit, türev ve integral alma işlemleri yapılır. Birçok ortak noktası olmasına karşın, bu iki çalışma alanı arasında bazı temel farklılıklar da vardır. Bu temel farklılıklardan biri, klasik matematik analizde teorik–kümesel yaklaşımın açık bir şekilde olmayışından kaynaklanır. Analizde fonksiyonlar reel eksen üzerindeki bir parçada, düzlemin veya uzayın bir kısmında tanımlanmışken, fonksiyonlar teorisinde fonksiyonlar kümede tanımlanır. Örneğin; Analizde verilen bir fonksiyonun integrallenebilir olması veya olmaması problemini çözmek için ya integralin hesaplanması veya fonksiyonun integrallenebilir fonksiyonlar sınıfına ait olup olmadığının ispatlanması gerekir. RDFT'de ise bu problemin çözümü kümelerin ölçüm teorisi yardımıyla bulunur. İki çalışma alanı arasındaki diğer önemli fark ise birinin pratiğe diğerinin ise teoriye ağırlık vermesidir. Analizde limit, türev, integral hesaplamalarına ağırlık verilirken RDFT'de teorik çalışmalara ağırlık verilir. Analizde önce diferansiyel hesap, sonra integral hesap anlatılırken, RDFT'de tam tersine bir yöntem uygulanır. Önce integral kavramı tanımlanır, özellikleri öğretilir, bundan sonra diferansiyelleme kavramları tanımlanır. Analizde yalnızca serilerin yakınsaklık-ıraksaklık problemleri incelenmesine karşın, RDFT' de serilerin toplanabilirlik problemleri öne çıkar (Nasibov, 2006). İki çalışma alanı arasındaki ortak yönler ve farklılıklar değerlendirildiğinde *RDFT*'nin analizin daha gelişmiş, daha kapsamlı ve daha soyut bir çalışma alanı olarak nitelendirilebileceği görülür.

Matematik tarihi verileri incelendiğinde RDFT'nin gelişiminin üç aşamada gerçekleştiği görülür. İlk aşamada klasik analiz ile fonksiyonlar teorisine yönelik çalışmalar beraber yürütülmüştür. Bu aşamanın Riemann'ın *Fonksiyonların Trigonometrik Fonksiyonlarla Gösterimi* adlı kitabı ile başladığı kabul edilir. Riemann integralinin ve türevle ilgili temel kavramların tanımlanması, trigonometrik seriler üzerine çalışmaların yapılması, ölçüm teorisi üzerine araştırmaların yapılması bu dönemde olmuştur. Ölçüm teorisinin geliştirilmesi ile birlikte bir fonksiyonun integrallenebilirliğinin incelenmesinin önü açılmıştır. İkinci aşamadaki çalışmalar genellikle n-boyutlu Öklid uzayında noktasal kümeler teorisine dayanan gelişmeler üzerine olmuştur. Bu dönemde integral üzerine yapılan çalışmaların yanı sıra, diferansiyelleme alanındaki çalışmalara da ağırlık verilmiştir. Küme fonksiyonları üzerine yapılan çalışmaların önemli bir kısmı bu dönemde gerçekleştirilmiştir. Son aşamanın ise 20. yüzyılın ikinci çeyreğinde başlayıp günümüze kadar devam ettiği kabul edilir. Bu aşamada ağırlıklı olarak *fonksiyonel analiz* ile *fonksiyonlar teorisi* arasındaki ilişkiler irdelenmiştir. Bu dönemde *fonksiyonların descriptive teorisi*nin temelleri atılmış ve topoloji alanlarında önemli gelişmeler elde edilmiştir (Nasibov, 2006).

4.9.1.2. *Fonksiyonel analiz*

Matematikte farklı alanlardan gelen problemler ilgili alanların yapı ve özelikleriyle yakından ilişkilidir. Bu durum, problemlere belirli bir yönden yaklaşmayı zorunlu kılmakta ve çözüme gidişi kısıtlamaktadır. Fonksiyonel analizin ortaya çıkışı lineer cebir, adi ve kısmi diferansiyel denklemler, varyasyon hesabı, yaklaşım teorisi, lineer integral denklemler teorisi gibi matematiğin farklı çalışma alanlarında karşılaşılan bu tür problemlere dayanır. Fonksiyonel analizde problemler, temel özellikleriyle ilgili olan soyut bir yaklaşımla çözülür. Bu soyut yaklaşımda, elemanları belirli aksiyomları gerçekleyen kümelerden yola çıkılır. Bu durum, teorisi soyut yollarla geliştirilen matematiksel yapıların elde edilmesine olanak sağlar. Bu yolla elde edilen genel teoremler belirli aksiyomları gerçekleyen özel kümelere uygulanarak yukarıda ifade edilen kısıtlamalar ve zorluklar büyük oranda ortadan kaldırılır (Nasibov, 2006). Genelleme yapılacak olursa, fonksiyonel analiz, matematiğin klasik analiz kaynaklı soyut bir dalı olarak tanımlananabilir.

Fonksiyonel analizin temel araştırma objesi fonksiyoneller ve operatörlerdir. Diferansiyelleme veya integralleme gibi işlemler fonksiyonel ve operatörler üzerinde yapılır. Fonksiyonel veya operator serileri üzerinde yapılan çalışmalar da fonksiyonel analizin çalışma alanına girer. (Çakar, 2007). Fonksiyonel analizde soyut yaklaşımlar; metrik uzaylar, normlu uzaylar, iç çarpım uzayları, Banach uzayı, Hilbert uzayı gibi soyut uzaylar ve bu uzayların özellikleri yardımıyla yapılır. Bu uzaylar oluşturulurken ve özellikleri belirlenirken kümeler teorisi bilgisinden yararlanılır.

RDFT ile *fonksiyonel analiz* birbirine yakın çalışma alanları olarak görülseler de iki çalışma alanı arasında bazı temel farklılıklar vardır. Nasibov (2006) bu temel farklılıkları şu şekilde sıralamıştır: RDFT'de esas araştırma objesi fonksiyonlar iken fonksiyonel analizde fonksiyonel ve operatör türleri esas araştırma konularıdır. RDFT'de önce sonlu boyutlu Öklid uzaylarında noktasal kümeler, onlarla ilişkili problemler araştırılırken; fonksiyonel analizde metrik, normlu, topolojik, Banach, Hilbert gibi sonsuz boyutlu uzaylarda bulunan kümeler araştırılır. Diferansiyelleme ve integralleme işlemleri fonksiyonel analizde fonksiyonel ve operatörler üzerinde yapılacak benzeri işlemlere dönüşür. Fonksiyonel analizde fonksiyon serileri alanındaki çalışmalara paralel olarak fonksiyonel ve operatör serileri üzerinde yapılan çalışmalar da vardır. Tüm bu ifadelerden anlaşılabileceği gibi fonksiyonel analizin çalışma alanı RDFT'nin çalışma alanından daha soyut ve geneldir. Fonksiyonlar teorisine analizin genel hali olarak bakılabildiği gibi, fonksiyonel analize de genelleştirilmiş RDFT olarak bakılabilir.

4.9.1.3. ***Kümeler teorisi***

19. yüzyılın ortalarına kadar matematikteki sonsuzluk kavramı ile ilgili anlayışlarda ve düşüncelerde köklü bir değişiklik olmamış, genel matematik uzun süre herhangi bir fiili sonsuz büyüklük kullanılmadan limit işleminin tanımı ile

geliştirilmiştir. Fakat matematikçiler sürekliliğin ya da reel doğrunun tam bir tarifini yapmaya çalıştıkça matematiğin temelindeki sonsuzluk ile karşılaşmışlardır. Sonsuz niceliklerin ilk kez modern matematiğe yerleşmesi kümeler teorisi kullanılarak yapılan çalışmalarla mümkün olabilmiştir (Özmantar, 2013).

Bolzano (1781-1848), sonsuz kümelere ilk el atan matematikçidir. Bolzano, matematiksel olarak sonsuzluğun en uygun şekilde küme kavramı yardımıyla açıklanabileceğini ileri sürerek sonsuz kümeleri ilk karşılaştıran kişi olmuştur. Fakat Cantor gibi elemanlarının özellikleri ne olursa olsun karşılaştırılabilmelerini sağlayan bir metot geliştirmemiştir. Bolzano, 1851 yılında yayımlanan *Sonsuzluğun Paradoksları* adlı kitabı ile sonsuzluk kavramının matematiğin bir çalışma konusu olarak ele alınabileceğine dair tartışmaları başlatmıştır (Aztekin, 2013). Sonsuz kümeler üzerine çalışmış matematikçilerden biri de Dedekind (1831-1916)'dir. Dedekind, reel sayıların sonsuz kümeler ile gösterilebileceğinin farkına varmış ve sonsuzluk kavramının küme kavramı yardımıyla en uygun şekilde açıklanabileceğini ileri sürmüştür. Dedekind böylelikle sonsuzluk ile ilgili çalışmaları farklı bir alana kaydırarak küme teorisinin temellerinin atılması ve geliştirilmesinde önemli katkılar sağlamıştır. Cantor (1845 – 1918) da Dedekind gibi matematiksel olarak sonsuzluğun en uygun şekilde küme kavramı yardımıyla açıklanabileceğini ifade etmiştir. 1800'lerin sonlarına doğru yapmış olduğu çalışmalarla sonsuz kümelerin sonlu kümelerden çok farklı ve olağan dışı sayılan özelliklere sahip olduğunu ortaya koymuştur. Cantor, elemanlarının özellikleri ne olursa olsun sonsuz kümelerin karşılaştırılabilmelerini sağlayan bir metot geliştirmiştir. Cantor'a kadar bütün sonsuz kümeler denk kabul edilirken kümeler teorisi ile sonsuzluğun farklı dereceleri olduğu gösterilmiştir (Aztekin, 2013).

4.9.1.4. *Analitik geometri*

Analitik geometrinin temelleri, bir noktanın aynı düzlemde kesişen iki doğrudan (eksenler ya da koordinatlar eksenleri) uzaklığı ile sıralı gerçek sayı çiftleri arasındaki ilişkinin önemini birbirlerinden bağımsız olarak kavrayan Descartes ve Fermat tarafından 17. yüzyılda Fransa' da atılmıştır. Descartes, bir yandan Eski Yunan'da gelişmiş geometri yöntemlerini, diğer yandan da çağının cebir bilgisini derinlemesine incelemiş ve matematiğin bu iki dalını kendi amaçları açısından yetersiz ve soyut bulmuştur. Descartes, geometrinin biçimlerle uğraşırken kavrayışı geliştirecek yolları ihmal ettiğini; cebirin ise kuralların boyunduruğunda karanlık ve karmaşık bir sanata dönüştüğünü düşünerek analitik geometriyi geliştirmiştir. Analitik geometri, bilgi yolunu tıkayan eksikliklerin giderilmesi amacıyla cebir ve geometrinin birleştirilmesinin bir ürünü olarak da nitelendirilebilir. Descartes bu geometri modeli ile bir düzlemdeki noktaları birbirine dik iki eksene uzaklıklarıyla belirterek geometride cebirsel yöntemlerden, cebirde ise geometriden yararlanma olanağını sağlamıştır (Göker, 1997).

Fermat ve Descartes birbirlerinden bağımsız olarak yaptıkları çalışmalar sonucunda *iki değişkenli denklemler, düzlemsel eğrileri tanımlar* ifadesi ile tanımlanan analitik geometrinin temel ilkesini bulmuşlardır. Fermat'ın çalışmalarının yer aldığı *Düzlemlerin ve Katıların Geometrik Yerlerine Giriş* adlı kitabı ölümünden sonra 1679'da yayımlandığı için, 1637'de Descartes'in *Geometri* adlı yapıtında açıklanan bu buluşa dayalı olarak, analitik geometri, *Descartes'çı geometri* (kartezyen geometri) olarak tanımlanmaktadır. Descartes' ın kurduğu analitik geometri; Greklerin geometri yardımıyla aritmetiği kavramak istemelerinin tam tersine, analitik geometriyi aritmetik ve cebir sistemleri sonucunda ortaya koymuştur (Göker, 1997). Analitik geometri sayesinde, Öklidyen geometri aritmetik ve cebir ile ilişkilendirilerek Newton ve Leibniz'in geliştirdiği matematiksel analizin temelleri atılmıştır.

4.9.1.5. *Öklidyen geometri*

Öklidyen geometrinin geçmişi ünlü matematikçi Öklid'in çalışmalarına dayanır. Öklid, *Öklid'in Elementleri* olarak bilinen kitap setinde; nokta, doğru, düzlem gibi sezgiye dayanan kavramlar kabul etmiş ve bu kavramların ne olduğunu 23 tanım ile açıklamıştır. Öklid, kitaplarında bu tanımların yanı sıra çeşitli kuralların bulunduğu 5 aksiyom ve 5 postulata yer vermiştir. (Çalışmada bu postulatlara *Düzlem - uzay nesnelerinin ilişkili olduğu çalışma alanları* başlıklı bölümde yer verilmiştir.) Öklid, bu postulatlardan çıkardığı sonuçları teorem ve önerme olarak mantıksal bir sırada sunmuş ve düzlem geometrisinin matematiksel temellerini atmıştır. Öklid, aksiyomlarının doğruluğunu kanıtlayamamış olmasına rağmen, kendinden sonraki birçok matematikçiye göre bu aksiyomlar tartışma götürmez gerçekler olarak kabul edilmiştir (Doğan, 2013). Öklid geometrisi, üstünde yaşadığımız dünyayı anlamak için önemli bir araç olmanın yanı sıra bilim ve tekniğin ilerlemesinde önemli bir etken olmaya devam etmektedir.

4.9.2. Kavram-3 nesneleri ile çalışma alanları arasındaki ekolojik ilişkiler

Kavram – 3 nesneleri ile matematiğin çalışma alanları arasındaki ekolojik ilişkilerin incelenmesi başlı başına üzerinde çalışılması gereken bir konudur. Çalışmanın bu bölümünde *kavram – 3* nesneleri ile çalışma alanları arasındaki ekolojik ilişkilerin detaylı bir biçimde açıklanması değil, ekolojik ilişkilere genel hatlarıyla yer verilmesi amaçlanmıştır. Yapılabilecek detaylı ve kapsamlı araştırmalar ile *kavram-3* nesnelerinin farklı çalışma alanları ile bu çalışmada belirlenmemiş olan ekolojik ilişkileri ortaya konulabilir.

4.9.2.1. *Fonksiyon nesnesinin ilişkili olduğu çalışma alanları*

Klasik analizde, reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan fonksiyonlar incelenir. Düzlemde ve üç boyutlu uzayda da durum benzer şekildedir. Fonksiyonel analizde ise, daha genel olan metrik uzaylar ve bunlar üzerinde tanımlanan fonksiyon uzayları incelenir. *Metrik uzay* ve *fonksiyon uzayı*nın tanımları *fonksiyon* nesnesinin fonksiyonel analiz ile ekolojik ilişkisine dair önemli bilgiler içerir.

Tanım (Metrik uzay ve metrik): Bir metrik uzay, X bir küme ve d, X üzerinde bir metrik (ya da bir uzaklık fonksiyonu), yani, $X \times X$ üzerinde her $x, y \in X$ için,

i $d \in R$ ve $d \geq 0$,

ii $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

iii $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği)

iv $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere (X, d) çifti olarak tanımlanır.

X kümesine, (X, d) metrik uzaynın temel kümesi denir ve bu kümenin elemanları noktalarla adlandırılır. Sabit x ve y noktalarına karşılık gelen negatif olmayan $d(x, y)$ sayısı ise x 'ten y 'ye olan uzaklık olarak adlandırılır. i, ii, iii ve iv özelikleri ise metrik aksiyomlarıdır (Çakar, 2007).

Fonksiyon Uzayı: X kümesinin bağımsız reel bir t değişkeninin fonksiyonu olan ve verilen bir $J = [a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli $x, y, \ldots$ fonksiyonlarından oluşan bir küme olduğu varsayılsın. Bu küme üzerinde,

$$d(x,y) = \max\left|x(t) - y(t)\right| \tag{4. 131}$$

ile tanımlanan metrik göz önüne alınırsa, $C[a,b]$ sembolüyle belirtilebilen bir metrik uzay elde edilir. $C[a,b]$'nin her bir noktası bir fonksiyon olduğundan, bu uzay bir fonksiyon uzayıdır (Çakar, 2007).

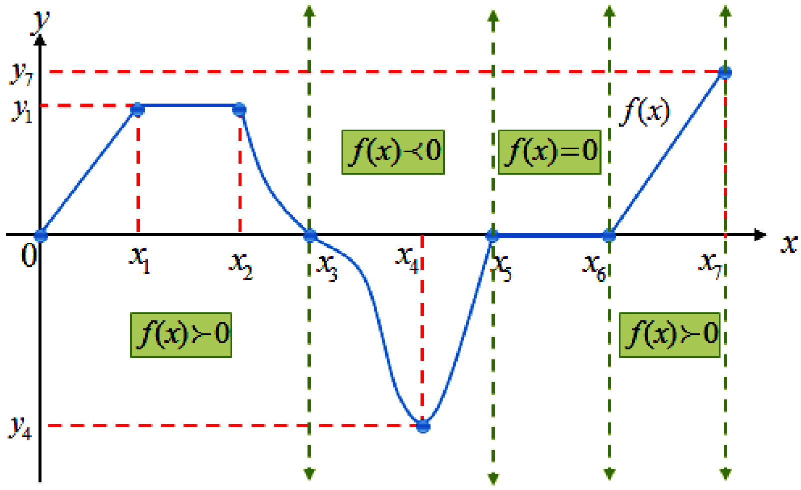
Diferansiyel ve integral hesapta aynı anda yalnızca bir ya da bir kaç fonksiyon gözönüne alınabilirken, fonksiyonel analizde metrik uzay ve fonksiyon uzayları oluşturulurken fonksiyonlar uzayların birer noktası olarak değerlendirilmekte ve böylece *fonksiyon* nesnesi ile ekolojik ilişkiler kurulmaktadır.

Fonksiyonlar ve fonksiyon sınıfları hakkındaki çalışmalar reel analizin önemli bir bölümünü kapsar. Ölçülebilir fonksiyonlar, toplanabilir fonksiyonlar, monoton fonksiyonlar, sürekli ve sürekli olmayan fonksiyonlar, periyodik fonksiyonlar, transandant fonksiyonlar, türevlenebilir ve türevlenebilir olmayan fonksiyonlar bu tür fonksiyon sınıfı örneklerindendir. Fonksiyonlar teorisinde bu tür fonksiyonlar birer küme üzerinde tanımlanır. Dolayısıyla öncelikle kümeler ile ilgili gereken teorinin oluşturuması, sonrasında bu teoriye dayanılarak fonksiyonlar üzerinde yapılacak işlemlerin incelenmesi gerekir. Örneğin, Riemann integrali küme teorisi ile ilişkili olmayan bir şekilde bir integral toplamının limiti olarak tanımlanır. Bu tanım esas alınarak Riemann anlamında integrallenebilecek fonksiyonların sınıflarını belirlemek mümkün olmaz. Klasik analizde verilen bir fonksiyonun integrallenebilir olması veya olmaması problemini çözmek için iki yol vardır. Bu yollardan ilki integralin hesaplanmasıdır. İkinci yol ise söz konusu fonksiyonun kabul edilmiş integral kavramına göre integrallenebilir fonksiyonlar sınıfına ait olduğunun ispatlanmasıdır. Fakat bu yöntem de yine kümeler teorisine dayanır (Nasibov, 2006). Bu durumda *fonksiyon* nesnesinin *reel analiz*in yanı sıra *kümeler teorisi* ile de ekolojik ilişki kurduğu söylenebilir.

Cantor'ın kümeler teorisini ortaya atmasından önceki dönemde fonksiyonun tanımı Dirichlet (1805-1859) tarafından değişkenler arası ilişki mantığı üzerine inşa edilmiştir. Kümeler teorisinin ortaya atılması ile birlikte Bourbaki (1939) fonksiyonu iki kümenin elemanları arasında eşlemeler yapan özel bir bağıntı olarak tanımlayarak fonksiyon kavramına yeni bir bakışaçısı kazandırmıştır (Özmantar, 2013). Bu anlayışla birlikte, değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenmesinin ancak bir fonksiyonun tanımlı olabileceği küme için mümkün olabileceği görüşü hakim olmaya başlayarak *fonksiyon* nesnesi kümeler teorisinin geliştirilmesinde önemli bir ekolojik rol üstlenmiştir.

Bir fonksiyonun; tanım ve değer kümelerinin belirlenmesinde, köklerinin bulunmasında, monotonluğu, cebirsel yapısı, sürekliliği ve türevlenebilirliliği gibi birçok özelliğinin incelenmesinde analitik düzlemde çizilen grafiğinden yararlanılır.

Şekil 4.42'de analitik düzlemde grafiği verilen bir fonksiyonun bazı özellikleri incelenmiştir.



Şekil 4.42. $y = f(x)$ *fonksiyonunun analitik düzlemde çizilen grafiği*

Verilen grafiğe göre $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[0, x_7]$, görüntü kümesi ise $[y_4, y_7]$ aralığıdır.

$\forall x \in [0, x_2] \cup [x_5, x_7]$ için fonksiyon doğrusal olup, bu aralıklarda $f(x) = mx + n \quad (m, n \in R)$ cebirsel yapısına sahiptir.

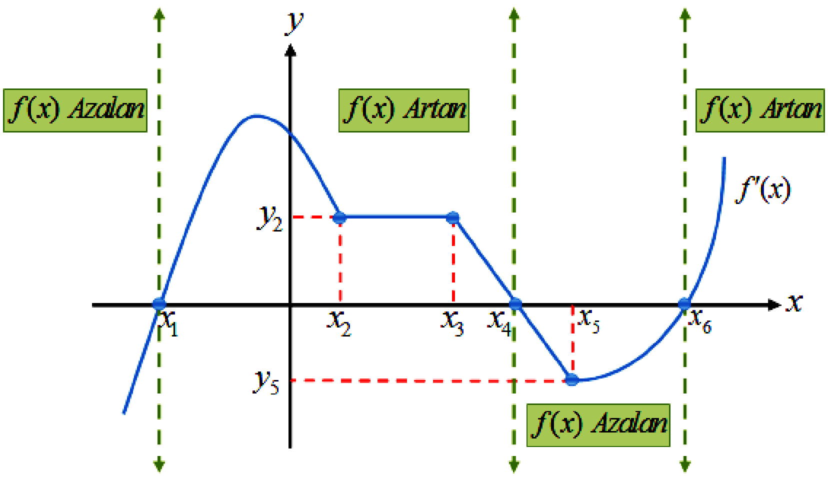
$\forall x \in (0, x_3) \cup (x_6, x_7)$ için $f(x) \succ 0$ olup fonksiyon pozitif değerler almıştır. Buna karşılık $\forall x \in (x_3, x_5)$ için $f(x) \prec 0$ olup fonksiyon negatif değerler almıştır.

Fonksiyon $(0, x_1)$, (x_4, x_5) ve (x_6, x_7) aralıklarında artan, (x_2, x_4) aralığında azalan, (x_1, x_2) ve (x_5, x_6) aralıklarında ise sabittir.

Fonksiyonun mutlak maksimum noktası (x_7, y_7), mutlak minimum noktası ise (x_4, y_4)'tür.

Tanımlanan aralıkta fonksiyon süreklidir fakat türevlenebilir değildir. Çünkü; $f(x)$ fonksiyonu tanımlı olduğu $(0,\, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_5, 0), (x_6, 0)$ ve (x_7, y_7) noktalarında türevsizdir.

Şekil 4.43'te analitik düzlemde grafiği çizilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiğinden yararlanılarak bu fonksiyonun cebirsel yapısı ve özellikleri ile ilgili değerlendirmeler yapılmıştır.



Şekil 4.43. $y = f\,'(x)$ *fonksiyonunun analitik düzlemde çizilen grafiği*

Şekil 4.43'teki grafik incelendiğinde, türev fonksiyonunun reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı olduğu görülmektedir. Bu durumda $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi de reel sayılar kümesidir.

Grafiğe göre $\forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_4, x_6)$ için $f'(x) \prec 0$ olduğundan f fonksiyonu $(-\infty, x_1)$ ve (x_4, x_6) aralıklarında azalandır. $\forall x \in (x_1,\, x_4) \cup (x_6,\, \infty)$ için $f'(x) \succ 0$ olduğundan f fonksiyonu $(x_1,\, x_4)$ ve (x_6, ∞) aralıklarında artandır.

Türev fonksiyonunun kökleri x_1, x_4 ve x_6 reel sayılarıdır. Grafiğe göre $f(x_1)$ ve $f(x_6)$ değerleri $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum değerleridir. $f(x_4)$ değeri ise f fonksiyonunun yerel maksimum değeridir.

Şekil 4.43 incelendiğinde, $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (x_3, x_5) tanım aralığında doğrusal, (x_2, x_3) tanım aralığında ise hem doğrusal hem de x eksenine paralel olduğu görülür. Bu durumda $y = f(x)$ fonksiyonu $\left(x_2, x_3\right)$ tanım aralığında doğrusal ($f(x) = mx + n \;\; (m, n \in R,\;\; m \neq 0)$), $\left(x_3, x_5\right)$ tanım aralığında ise parabolik ($f(x) = ax^2 + bx + c \;\; (a, b, c \in R,\;\; a \neq 0)$) bir cebirsel yapıya sahiptir.

Sonuç olarak *analitik geometri* çalışma alanı, koordinat düzleminde çizilen fonksiyon grafikleri yardımı ile fonksiyonların özelliklerinin somut bir biçimde incelenmesini sağlayarak, fonksiyon kavramının açıklanmasına ve anlamlandırılmasına hizmet eden ekolojik görevler üstlenmektedir.

4.9.2.2. *Reel sayı nesnesinin ilişkili olduğu çalışma alanları*

Fonksiyonel analizde metrik uzayların kurulumu *reel sayı* nesnesi ile fonksiyonel analizin ekolojik ilişkisine yönelik önemli bilgiler içerir. Reel sayılar bazı temel metrik uzayların kurulumunda önemli bir paya sahiptir. Örneğin, R reel ekseni üzerinde tanımlanan,

$$d(x, y) = |x - y| \tag{4. 132}$$

metriği, metrik uzay olma aksiyomlarını yerine getirdiği için, bir metrik uzaydır. Salt değer metriği de denilen bu fonksiyon, iki gerçel sayı arasındaki uzaklığı verir. R^2 metrik uzayı, $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, ... şeklindeki reel sayı çiftlerinden oluşan R^2 Öklid düzlemi; R^3 metrik uzayı ise, $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, ... şeklindeki reel sayı üçlülerinden oluşan R^3 üç boyutlu Öklid uzayı üzerine kuruludur. Genelleme yapılacak olursa R^n metrik uzayı, $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$, ... şeklinde yazılan, tüm sıralı reel sayı n-lilerinden oluşan R^n Öklid uzayı üzerine kuruludur (Çakar, 2007).

Reel analiz, reel sayılar kümesi üzerinde çalışılan bir matematiksel analiz dalıdır. Reel sayıların yakınsaklığının, sürekliliğinin, pürüzsüzlüğünün, reel değerli fonksiyonların özelliklerinin, reel sayı dizilerinin limitlerinin ve analitik özelliklerinin incelenmesi gibi çalışmalar reel analizin kapsamı içine girer.

Reel sayıların, en küçük üst sınır özelliğine sahip olması ile birlikte, tam sıralı olması reel analizde monoton yakınsaklık teoremi, ara değer teoremi ve ortalama değer teoremi gibi birçok önemli teoremin ortaya çıkmasına ekolojik katkı sağlamaktadır. Reel analizdeki topoloji çeşitlerinden biri olan *sıralama topolojisi* tanımlanırken yine *sıralama* nesnesinden yararlanılır. Aşağıda bu bağlamda *sıralama* nesnesinden nasıl yararlanıldığı açıklanmıştır.

X basit sıralı küme olsun. B aşağıdaki ifade edilen türden kümelerin ailesi olsun.

1) X deki tüm açık kümeler (a,b)

2) X deki $[a_0,b)$ formundaki tüm yarı açık kümeler için a_0 X'in en küçük elemanıdır.

3) X deki $[a,b_0)$ formundaki tüm yarı açık kümeler için b_0 X'in en büyük elemanıdır.

B koleksiyonu X üzerinde oluşturulan topolojiye karşılık bir bazdır. B bazının oluşturduğu topolojiye *sıralama topolojisi* denir ve τ_0 ile gösterilir[8].

Sıralama kavramı ile sıralama topolojisi arasındaki ekolojik ilişkinin daha iyi anlaşılabilmesi için tanımda geçen sıralı küme kavramının açıklanmasında yarar vardır. Sıralı küme kısaca şu şekilde tanımlanmaktadır:

X bir küme β'de bu küme üzerinde tanımlı bir sıralama bağıntısı ise (X,β) ikilisine sıralı küme denir.

Bu tanıma göre, sıralı küme kavramı tanımlanırken sıralama bağıntısına ihtiyaç duyulur. Sıralama bağıntısı ise şu şekilde tanımlanır:

X bir küme, β ise X kümesinde tanımlı bir bağıntı olsun. β bağıntısı, yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerinin üçünü birden sağlıyorsa β bağıntısına X kümesinde tanımlı sıralama bağıntısı denir.

Sıralama bağıntısında yansıma özelliği sağlandığı için $\forall x \in X$ için $(x,x) \in \beta$ olmuş olur. Buna göre x elemanı birinci bileşen olarak alındığında her eleman kendisinden küçük, ikinci bileşen olarak alındığında ise her eleman kendisinden büyük olur.

Ters simetri özelliğine göre $x,y \in X$ olduğunda, x elemanı y elemanından küçük iken y elemanı da x elemanından küçük olmamalıdır. Eğer her iki durumu birlikte sağlayan x ve y elemanları varsa x ile y eşit olur. Buna ek olarak; $z \in X$ olmak üzere x elemanı y elemanından küçük iken y elemanı da z elemanından küçük

---

8 http://smh-matuyg.ultimatefreehost.in/Prof.%20Dr.%20%C4%B0smet%20Karaca%20-%20Topoloji/files/downloads/attachments/Prof.%20Dr.%20%C4%B0smet%20Karaca%20-%20Topoloji.pdf?i=1 oluyor ise sıralama gereği x elemanı z elemanından küçük olmalıdır. Bu sonuç sıralama bağıntısının geçişme özelliği ile açıklanır (Narlı, 2013).

Yukarıda yapılan açıklamalarda *reel analiz*in çalışma alanınına giren sıralama topolojisi tanımlanırken *sıralı küme* kavramına ihtiyaç duyulmuştur. Sıralı kümeler, sıralama bağıntısı yardımıyla tanımlanmıştır. Sıralama bağıntısının özünde ise global sitin *sıralama* nesnesinin yer aldığı görülmüştür. Bu silsile, *reel sayı* nesnesi ile *reel analiz* çalışma alanı arasında derin ekolojik ilişkilerin var olduğunu göstermektedir.

Kümeler teorisinde elemanların bir araya gelmesiyle topluluklar oluşturulur. Fakat her topluluk aynı zamanda bir küme değildir. Öyle bir A topluluğu yazılabilir ki; her elemanı bir küme belirtir ama bu küme kendisinin elemanı değildir. Bu durum,

$$A = \{x : x \notin x\} \tag{4. 133}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada x harfi her zaman bir kümeyi ifade etmektedir. Şimdi a'nın bir küme olduğu düşünülsün. Eğer $a \in a$ ise, o zaman $a \notin A$, dolayısıyla $a \neq A$'dır. Eğer $a \notin a$ ise, o zaman $a \in A$, dolayısıyla $a \neq A$'dır. Sonuç olarak, her iki durumda da A topluluğu, a kümesine eşit olmadığı için bu topluluk bir küme belirtmez. Bu teoreme Russell paradoksu denir[9].

Russell paradoksunun daha kolay anlaşılabilmesi için meşhur berber paradoksu türetilmiştir. Paradoks şöyledir:

Köyün birinde bir berber varmış. Bu berber, o köyde kendini tıraş etmeyen herkesi tıraş eder, kendini tıraş edenleriyse tıraş etmezmiş.

Soru: Bu berber kendini tıraş eder mi, etmez mi? Kendini tıraş etmezse, kendini tıraş etmeyen herkesi tıraş ettiğinden, kendini tıraş etmeli. Kendini tıraş ederse, kendini tıraş edenleri tıraş etmediğinden, kendini tıraş etmemeli.

Yanıt: Böyle bir berberden bahsedilemez. Çünkü; böyle bir berberin olması verilen hikayede çelişki oluşmasına neden olur.

Bu durumda, reel sayıların bir araya getirilmesiyle oluşturulan topluluk bir küme belirtir mi? Bu soru reel sayıların özellikleri ve kümeler teorisi bilgisi kullanılarak yanıtlanabilir. Bunun için öncelikle *kuvvet sınıfı* ve *kuvvet kümesi* kavramlarının açıklansı gerekir.

Kuvvet Sınıfı ve Kuvvet Kümesi: Bir a kümesinin tüm altkümeleri, bir sınıf oluşturur. Bu sınıfa, a kümesinin kuvvet sınıfı denir (power class) ve *P(a)* olarak

[9] http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Dersler/Kumeler-kurami/2013/kumeler-kurami-2014-02-12.pdf

yazılır. Kuvvet kümesi aksiyomuna (power set axiom) göre, bir kuvvet aynı zamanda küme belirttiği için kuvvet kümesi olarak adlandırılabilir.

R reel sayılar topluluğunun aynı zamanda bir küme belirttiğinin gösterilmesi için kümeler teorisi bilgisi kullanılarak öncelikle Z tam sayılar topluluğunun bir küme oluşturduğu ifade edilmelidir. Ardından, Z tam sayılar kümesinden yararlanılarak Q rasyonel sayılar topluluğunun da bir küme oluşturduğu gösterilmelidir. Sonrasında, Q rasyonel sayılar kümesinden yararlanılarak R reel sayılar topluluğunun da bir küme oluşturduğu gösterilmelidir. Q rasyonel sayılar kümesinin elde edildiği var sayılarak, R rasyonel sayılar kümesinin nasıl oluşturulduğu aşağıda açıklanmıştır.

Her rasyonel sayı reel sayı olarak düşünülebilir. Ayrıca her iki farklı reel sayının arasında bir rasyonel sayı vardır. O zaman R topluluğundan *P(Q)* kuvvet kümesine giden öyle bir h göndermesi (ikili bağıntısı) vardır ki her a reel sayısı için

$$h(a) = \{x \in Q : x \prec a\} \tag{4. 134}$$

ifadesi yazılabilir ve bu gönderme birebirdir. Öyleyse, a sayısı $h(a)$ kümesi olarak düşünülebilir ve bu durumda R bir kümedir[10].

Yukarıda yapılan açıklamalardan *kümeler teorisi* çalışma alanının, reel sayılar kümesinin nasıl kurulduğuna formel bir yaklaşımla açıklık getirerek, *reel sayı* nesnesinin anlamlandırılmasına ekolojik katkı sağladığı görülmektedir.

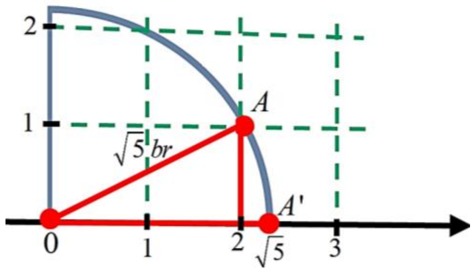
Analitik geometride reel sayılar ile ekolojik ilişkiler önemli bir yer tutar. Kartezyen koordinat sisteminin sayı doğrularının kesiştirilmesi sonucunda oluşturulması reel sayıların analitik geometride ne denli önemli ekolojik görevler üstlendiğini göstermektedir. Analitik düzlemde grafikleri çizilen fonksiyonların limiti, sürekliliği, monotonluğu, bükeyliği, türevlenebilirliği gibi farklı özellikleri ile ilgili değerlendirmeler yapılırken reel sayıların özellikleri devreye girer. Örneğin, reel sayıların *sıralama* özelliği sayesinde fonksiyonların analitik düzlemde çizilen grafikleri incelenerek artan veya azalan oldukları aralıklar belirlenebilmektedir. Reel sayıların *tamlık* özelliği sayesinde fonksiyonların analitik düzlemde çizilen grafikleri incelenerek belirli bir noktada limitli, sürekli veya türevli olup olmadıkları hakkında değerlendirme yapılabilmektedir.

Reel sayıların tarihsel gelişimi incelendiğinde, irrasyonel sayıların keşfinin

---

10 http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Dersler/Kumeler-kurami/2013/kumeler-kurami-2014-02-12.pdf milattan önce ortaya konulan Pisagor teoremine dayandığı görülür. Pisagor teoremi kullanılarak, bir dik üçgenin hipotenüsünün her zaman bir rasyonel sayıya eşit olamayacağının gösterilmesi irrasyonel sayıların ortaya çıkarılmasını sağlayarak reel sayılar kümesinin tanımlanmasında etkili olmuştur (Bkz. EK-1). Reel sayılar kümesinin tanımlanmasında Pisagor teoreminden yararlanılmış olması *Öklidyen geometri* çalışma alanının *reel sayı* nesnesinin açıklanmasına hizmet ettiğini göstermektedir.

Şekil 4.44'te $\sqrt{5}$ reel sayısının sayı doğrusundaki yeri Pisagor teoremi yardımıyla gösterilmiştir.



Şekil 4.44. *Pisagor teoremi kullanılarak* $\sqrt{5}$ *sayısının yerinin sayı doğrusunda belirlenmesi (Sirotic and Zaskis, 2007).*

Şekil 4.44'te sayı doğrusunun başlangıç noktasından itibaren tabanı 2 br, yüksekliği 1 br olan bir dik üçgen çizilmiştir. Dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu pisagor bağıntısı kullanılarak $\sqrt{5}\,br$ olarak bulunur. Merkezi sayı doğrusunun başlangıç noktası, yarı çapı dik üçgenin hipotenüs uzunluğuna eşit olacak şekilde çember çizildiğinde $\sqrt{5}\,br$ sayısının sayı doğrusunda 2 ile 3 arasındaki bir noktaya karşılık geldiği görülür. Geometri bilgisi kullanılarak bir reel sayının sayı doğrusundaki yerinin belirlenebilmesi, *Öklidyen geometri* çalışma alanının *reel sayı* nesnesinin anlamlandırılmasına hizmet ettiğini göstermektedir.

4.9.2.3. *Eğri nesnesinin ilişkili olduğu çalışma alanları*

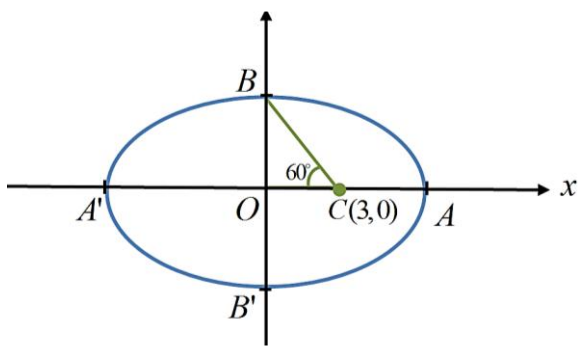
Reel analizin çalışma kollarından biri olan topolojide eğriler önemli bir yer tutar. Topolojide eğrinin tanımı şu şekilde yapılmaktadır (Bozhüyük, 1984):

Tanım: T topoloji uzayında C, $0 \leq u \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan u gerçel sayılarının topolojisi olmak üzere, eğri sürekli bir $\alpha : C \to T$ fonksiyonudur.

Topolojide eğrinin tanımının yapılmasının yanı sıra eğrilerin özellikleri incelenmekte ve özelliklerine göre eğriler kategorize edilmektedir. Örneğin eğri tanımında geçen bir α eğrisi sabit bir fonksiyon (bir noktadan ibaret) ise topolojide bu eğriler sıfır eğri olarak tanımlanır. Topoloji çalışma alanında Jordan eğrisi ve poligonal eğriler gibi bazı özel eğriler incelenmekte ve bu eğrilere ilişkin teoremler ispatlanmaktadır (Bozhüyük, 1984). Böylelikle topoloji, açıklanmasına ve anlamlandırılmasına hizmet ederek *eğri* nesnesini beslemektedir. *Fonksiyonel analiz*in *reel analiz*e göre daha genel bir çalışma alanı olduğu değerlendirildiğinde *fonksiyonel analiz*in de *eğri* nesnesini beslediği sonucu ortaya çıkmaktadır.

Analitik geometri, eğrilerin gerek geometrik gerekse cebirsel özelliklerinin incelenmesine olanak sağlayan bir çalışma alanıdır. Örneğin, analitik düzlemde grafiği çizilen bir çemberden yararlanılarak bu çemberin yarıçap uzunluğu ve merkez noktasının koordinatları belirlenebilir. Elde edilen bu bilgilerden yararlanılarak çemberin denklemi de bulunabilir. Çembere öteleme dönüşümü yapıldığında denkleminin nasıl değiştiğine ilişkin bir genelleme yapılabilir. Örnek 4.24'te, analitik geometri bilgisi kullanılarak bir merkezil elipsin denklemi bulunmuştur.

Örnek 4.24. Analitik düzlemde grafiği çizilmiş olan Şekil 4.45'teki merkezil elipsin denklemini bulma.



Şekil 4.45. *Bir merkezil elipsin analitik düzlemde çizilmesi*

Çözüm Pisagor bağıntısından yararlanılarak $b = |BO| = 3\sqrt{3}\ br$ ve $a = |BC| = 6\ br$ uzunlukları bulunur. $a \succ b$ olduğundan Şekil 4.45'te grafiği verilen basit kapalı eğri bir yatay elipstir.

Elipsin asal ekseninin uzunluğu $2a = 12\ br$, yedek ekseninin uzunluğu ise

$2b = 6\sqrt{3}\ br$ olarak bulunur. Bu bilgilere göre elipsin denklemi,

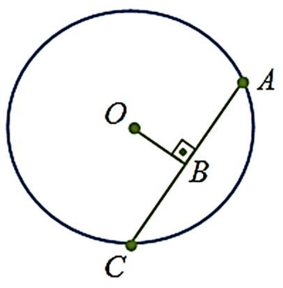
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1 \tag{4. 135}$$

olarak elde edilir.

Eğrilerin genel özellikleri incelinirken Öklidyen geometri bilgisinden yararlanılır. Örneğin, kapalı eğrilerden çemberin; açı, yay, kiriş, kesen, teğet ile ilgili özellikleri Öklidyen geometri bilgisine dayalı ispatlar yapılarak bulunur. Örnek 4.25'te Öklidyen geometri bilgisi kullanılarak bir çemberin merkezinden kirişine indirilen dikmenin kirişi ortalayacağı gösterilmiştir.

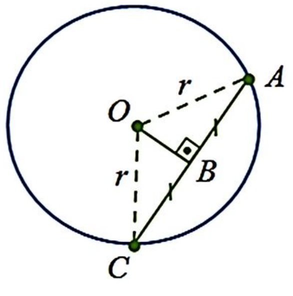
Örnek 4.25. Öklidyen geometri bilgisi kullanarak bir çemberin merkezinden kirişine indirilen dikmenin kirişi ortalayacağını gösterme.

Çözüm Şekil 4.46'da O merkezli çembere $[AC]$ kirişi çizilmiştir. $[OB] \perp [AC]$ olduğunda $|AB| = |AC|$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.



Şekil 4.46. *O merkezli çembere çizilen $[AC]$ kirişi*

O noktası ile A ve C noktaları birleştirildiğinde aşağıdaki AOC ikizkenar üçgeni elde edilir (Bkz. Şekil 4.47).

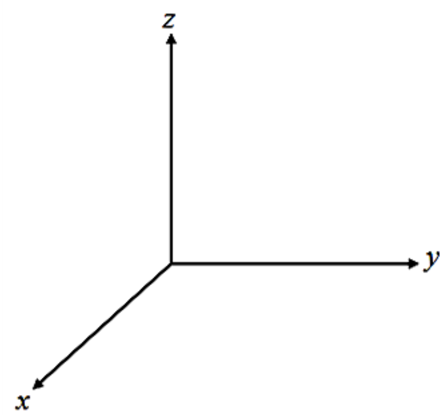


Şekil 5.47. *AOC ikizkenar üçgeninin oluşturulması*

İkizkenar üçgenlerin özelliği gereği, $[OB] \perp [AC]$ olduğu için $[OB]$ aynı zamanda AC kenarına ait kenarortay olmuş olur ve buradan $|AB| = |BC|$ eşitliği elde edilir.

4.9.2.4. ***Kartezyen koordinat sisteminin ilişkili olduğu çalışma alanları***

Analitik geometride nokta, doğru, düzlem, üç boyutlu uzay analitiği gibi çeşitli alt çalışma dallarında kartezyen koordinat sistemlerinden yararlanılır. Örneğin, üç boyutlu uzay analitiğinde Şekil 4.48'de çizilmiş olan kartezyen koordinat sisteminden yararlanılır.



Şekil 4.48. *Üç boyutlu uzayın kartezyen koordinat sistemi ile gösterimi*

Öklid uzayı, Öklid geometrisinin üç boyutlu uzayıdır. Modern matematikte Öklid uzayını ifade etmek için kartezyen koordinat sistemi kullanılır. Öklidyen geometride yapılan uzunluk, alan, hacim bulma; daire, elips gibi geometrik şekiller çizme veya bunların denklemlerini elde edip, özelliklerini ortaya koyma; geometrik dönüşümlerden yararlanarak geometrik şekiller veya geometrik cisimler elde etme gibi işlemler yapılırken kartezyen koordinat sisteminden yararlanılır. *Analitik geometri* çalışma alanı böylelikle, kartezyen koordinat sistemlerinin işsevselliğine katkı sağlayarak bu sistemleri besleyen ekolojik görevler üstlenmektedir.

4.9.2.5. ***Düzlem - uzay nesnelerinin ilişkili olduğu çalışma alanları***

Öklid uzaylarının reel analizin gelişimi için önemi büyüktür. Borel (1871-1956) ve Lebesgue'nun çalışmaları ile başlayan, Banach (1892-1945) 'ın lineer operatörler teorisini, Kaczmarz (1895-1940) ve Steinhaus (1887-1972)'un ortogonal seriler teorisini, Saks (1897-1942)'ın integral teorisini ortaya koyduğu dönemi kapsayan ve 20. yüzyılın ilk yarısında son bulan dönemde reel analiz $n -$ boyutlu Öklid uzayında noktasal kümeler teorisine dayanan özel bir matematiksel teori olarak geliştirilmiştir (Nasibov, 2006). Reel analizin çalışma kollarından biri olan topolojide en çok kullanılan kümelerden biri de R^n veya Öklid uzayıdır.

R^2 Öklid düzlemi, Öklidyen geometrinin iki boyutlu düzlemidir. Tarihsel verilere göre düzlem geometrisinin ilk kez sistemli bir şekilde incelenişi Öklid'in *Elementler* kitabının (M.Ö. 300) birinci cildinde yapılmıştır. Öklid bu kitabında düzlem geometrisini aşağıda yazılan beş postulat üzerine kurmuştur (Doğan, 2013).

1. Bir noktadan bir noktaya bir (tek bir) doğru çizilebilir.

2. Bir doğru içinde bir doğru parçası (tek bir biçimde) genişletilebilir.

3. Merkez noktası ve yarıçapı verilmiş bir (tek bir) çember çizilebilir.

4. Tüm dik açılar birbirlerine eşittir.

5. Bir doğru iki doğruyu kesiyorsa, aynı tarafta oluşan iç açıların toplamının iki dik açıdan küçük olduğu kısımdan devam edildiğinde, bu iki doğru mutlaka kesişir.

Analitik geometrinin icadı ile birlikte Öklid düzleminin sıralı ikililer yardımıyla kartezyen koordinat düzleminde ifade edilmesi yaygınlaşmıştır. R^3 Öklid uzayı ise Öklidyen geometrinin üç boyutlu uzayı olup modern matematikte analitik düzlemde sıralı üçlüler yardımıyla ifade edilir.

Elde edilen veriler, *reel analiz, analitik geometri* ve *sentetik geometri* çalışma alanlarının, *düzlem* ve *uzay* nesnelerinin açıklanmasına veya anlamlandırılmasına hizmet ederek bu nesneleri beslediğini göstermektedir.

Fonksiyonel analizde bir *soyut uzay*, belirli aksiyomları gerçekleyen elemanlardan oluşan bir küme olarak tanımlanır ve farklı aksiyom grupları seçilerek farklı soyut uzaylar elde edilir. Bu soyut uzayların temelinde ise metrik uzaylar yer alır. Buna göre R reel ekseni bütün reel sayılardan oluşan küme üzerinde tanımlanan,

$$d(x,\ y) = |x - y| \tag{4. 136}$$

metriğine göre bir metrik uzaydır. Benzer şekilde R^2 Öklid düzlemini oluşturan $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, ... şeklindeki sıralı ikililer kümesi ve bu küme üzerinde,

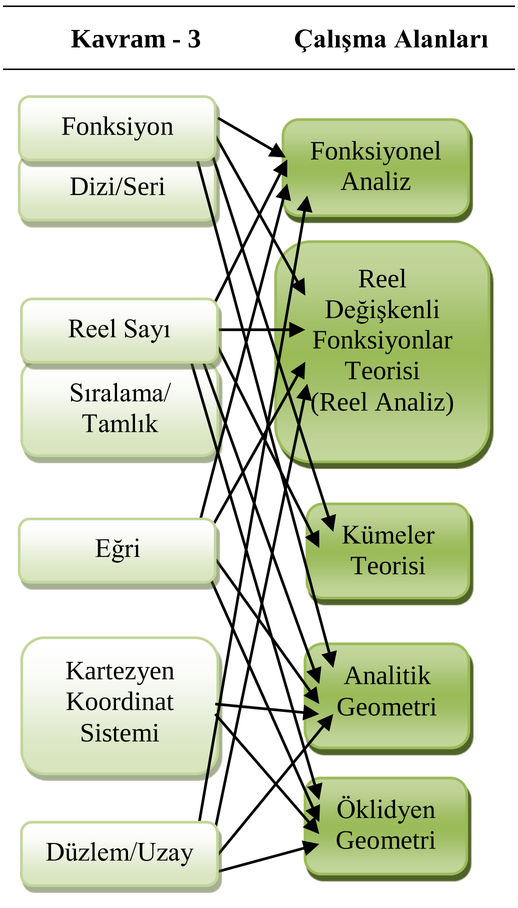
$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2}\geq 0 \qquad (4.\ 137)$$

şeklinde tanımlanan Öklid metriği göz önüne alınırsa, Öklid düzlemi olarak adlandırılan R^2 uzayı elde edilir. Öklid geometrisinin üç boyutlu uzayı ise $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, ... şeklindeki reel sayı üçlülerinin kümesi ve bu küme üzerinde,

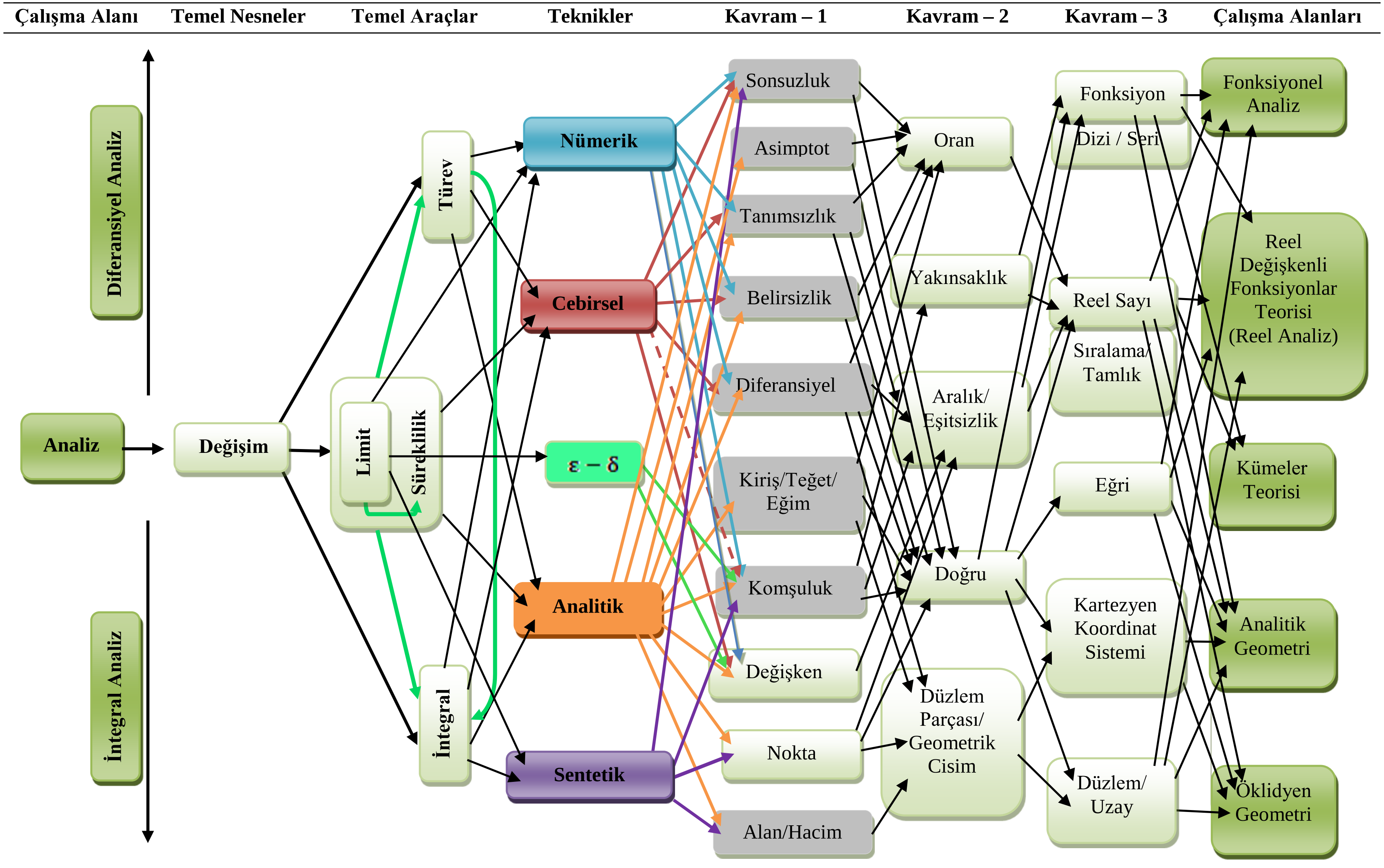
$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2}\geq 0 \qquad (4.\ 138)$$

şeklinde tanımlanan Öklid metriğinden elde edilir (Çakar, 2007). Böylelikle *fonksiyonel analiz* çalışma alanı metrik uzaylar yardımıyla *düzlem* ve *uzay* nesnelerinin açıklanmasına hizmet ederek bu nesnelerin ekolojik olarak beslenmesine katkı sağlamaktadır.

Şekil 4.49'da *kavram-3* grubu nesnelerinin çalışma alanları ile ekolojik ilişkilerine, ardından Şekil 4.50'de analiz global sitine yer verilmiştir.



Şekil 4.49. *Kavram-3 grubu nesnelerinin çalışma alanları ile ekolojik ilişkileri*



Şekil 4.50. *Analiz çalışma alanı için global sit*

Tarihsel, epistemolojik ve didaktik analizler sonucu oluşturulan Şekil 4.50 global sit diyagramı, analiz çalışma alanının matematik öğretim programının çizdiği genel çerçeve etrafında, pek çok durum ve öğretim olgusu hakkında çıkarım ve öngörüde bulunmaya fırsat sunmaktadır.

Öncelikle, söz konusu sit diyagramı analizin matematiğin en eski dönemlerinden günümüze kadar ortaya çıkan kavramlarına kadar kendi içinde nasıl tutarlı ve ilişkili bir alan olduğunu göstermektedir. Diğer yandan söz konusu sit, analizin modern cebir veya geometri gibi aksiyomatik bir yapıya sahip olmasa dahi, kavramlar arasında bazı öncüllük-ardıllık ilişkisinin kurulabileceğine ve bu ilişkilerin analiz öğretim ortamları ve araçları için ne derece önemli olduğuna işaret etmektedir. Örneğin, ortaokulun ilk yıllarında öğretilmeye başlanan oran kavramının lisede analiz kavramlarının öğretiminde kritik bir role sahip olabileceği konusunda bu tarz bir model olmaksızın kestirimde bulunmak oldukça güçtür. Benzer şekilde, çoğunlukla sadece geometrinin bir konusu veya doğrusal fonksiyonların grafiği şeklinde yorumlanabilen doğru nesnesinin tanımsızlık, belirsizlik ve diferansiyel başta olmak üzere pek çok analiz kavramının anlamlandırılmasında üstlendiği rolü bu tarz global bir panorama olmaksızın belirleyebilmek olanaksızdır.

Bu sit diyagramı diğer yandan, analizin temel araçları için kullanılan bazı tekniklerin (örneğin analitik teknik) gerisinde ne derece karmaşık ve zengin bir bilgi (prakeolojik anlamda teknoloji) bloğu olduğunu göstermekte ve bu bilgi bloğunun gerektiği şekilde işe koşulmadan söz konusu tekniklerin öğrenciler tarafından anlamlandırılmasının da ne derece güç olacağına işaret etmektedir. Ayrıca, matematik eğitimi literatüründe sıklıkla yer verilen öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgılarına farklı bir açıdan bakma olanağı sağlamaktadır. Örneğin, analiz global siti limit konusuna yönelik öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgılarının ortaya çıkmasında önemli bir etkiye sahip olan yakınsaklık kavramının (Szydlik 2000; Jordaan 2005; Özmantar ve Yeşildere, 2013); fonksiyon, reel sayı ve sıralama tamlık nesnelerinden beslendiğini ve komşuluk kavramının beslenmesine katkı sağladığını göstermektedir. Bu durum, yakınsaklık kavramının açıklanmasında ve anlamlandırılmasında fonksiyon kavramı ile reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerine önemli ekolojik görevler düştüğünü ve yakınsaklık kavramının anlamlandırılmasının komşuluk kavramının açıklanmasına ekolojik katkı sağlayacağını göstermektedir.

Analiz global siti, kritik kavramlar arasında ilişkilendirme yapılmasında hangi kavramlardan yararlanılabileceğini göstermesi açısından da önemlidir. Örneğin, Şekil 4.50 global sit diyagramı, kritik nesnelerden *sonsuzluk, diferansiyel, kiriş/teğet/eğim* nesnelerinin *kavram-2* grubu nesnelerinden *oran* nesnesi ile ortak ekolojik ilişkilerinin olduğunu göstermektedir. Bu durum *oran* nesnesinin ekolojik ilişkileri yardımıyla bu kritik nesneler arasında ekolojik bağ kurulabileceğini göstermektedir. Buna göre, bir fonksiyonun tanımlı olduğu bir noktadaki türevi belirlenirken fonksiyon grafiğine çizilen kiriş doğrularının eğim değerleri $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ şeklinde ifade edilen birer oran belirtir. Türevin belirleneceği noktaya çizilen teğetin eğimi ise $\frac{dy}{dx}$ şeklinde diferansiyel oran ile ifade edilir. *Oran* nesnesi böylelikle *kiriş/teğet/eğim* nesneleri ile *diferansiyel* nesnesi arasında ekolojik bağ kurulmasına aracılık etmiş olur. Ayrıca, Δx sıfıra giderken Δy 'nin sınırsızca artması durumda $\frac{dy}{dx}$ diferansiyel oranının sonsuza ıraksadığı görülür. *Oran* nesnesi böylelikle *sonsuzluk* nesnesi ile *diferansiyel* ve *teğet* nesneleri arasında ekolojik bağ kurulmasında köprü görevi üstlenmektedir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. DERS KİTAPLARININ MATEMATİKSEL SİT BAĞLAMINDA ANALİZİ

Çalışmanın bu bölümünde türev konusuna yönelik görev tiplerinin belirlenmesi ve bu görev tiplerinin lokal sitlerine göre ders kitaplarının analiz edilmesi amaçlanmıştır. Analiz global sitinin temel araçları arasındaki ekolojik ilişkiler değerlendirildiğinde türevin limit ve süreklilik temel araçlarından beslendiği görülmektedir (Bkz Şekil 4.50). Bu durumda sistematik ve kapsamlı bir ekolojik analiz için ders kitaplarının öncelikle limit ve süreklilik konuları çerçevesinde analizlerinin yapılması gerekmektedir. Bu husus dikkate alınarak ders kitapları sırasıyla limit, süreklilik ve türev konularına ilişkin görev tiplerinin lokal sitlerine göre analiz edilmiştir.

Görev tipleri belirlenirken öğretim programında yer alan limit, süreklilik ve türev konularına ilişkin kazanımlar ve yönergeler değerlendirilmiştir. Ardından belirlenen görev tipleri için prakseolojik analizler yapılmıştır. Sonrasında, prakseolojik analizlerden hareketle görevlerin gerçekleştirilmesinde global sitte yer alan hangi kavramlar arasındaki ekolojik ilişkilerin devreye girdiği belirlenmiştir. Böylelikle her bir görev için bir lokal sit elde edilmiştir. Son aşamada, lokal sitlerdeki ekolojik ilişkiler temel alınarak ders kitapları incelenmiş ve her bir görev tipi için ders kitaplarındaki ekolojik sorunlar ortaya konulmuştur.

Ortaöğretim kurumlarında 12. sınıf ileri düzey matematik dersi için iki farklı yayının ders kitaplarının kullanıldığı belirlenmiştir. Bu ders kitaplarının isimleri çalışma boyunca kısaca AY ve BY matematik ders kitabı şeklinde ifade edilmiştir. AY ders kitabı incelendiğinde analiz konularına *Sayılar ve Cebir* başlıklı ünitenin *Türev* ve *İntegral* ana başlıkları altında yer verildiği görülmüştür. *Türev* ana başlığı altında *Limit ve Süreklilik, Türev* ve *Türevin Uygulamaları, İntegral* ana başlığı altında ise *Belirli ve Belirsiz İntegral* ve *Belirli İntegralin Uygulamaları* alt başlıkları yer almaktadır. Öğretim programında limit ve süreklilik konularına türev konusuna kavramsal altyapı oluşturulması amacı ile yer verildiği değerlendirildiğinde, AY matematik ders kitabında limit ve süreklilik konularına türevin alt başlığı olarak yer veriliyor olmasının öğretim programı ile uyumlu olduğu söylenebilir. AY ders kitabında analiz konularına toplam 167 sayfalık yer ayrıldığı görülmüştür. Türev konusuna ayrılan sayfa sayısı 109, integral konusuna ayrılan sayfa sayısı ise 58'dir. Türev ve integral konusuna ayrılan bölümler incelendiğinde konulara o konuda neler öğrenileceğine yönelik bilgilendirme yapılıp gerçek yaşam durumu ile ilişkili örneklere yer verilerek giriş yapıldığı görülmüştür.

Konulara giriş bölümlerinin ardından konu ile ilgili matematiksel bilgilere yer verilerek örnek çözümlerine geçildiği görülmüştür. Ders kitabında yer alan bazı örneklerin çözümlerinde geometri yazılım programı kullanılarak bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılmıştır. AY ders kitabında *Alıştırmalar* başlığı altında öğrencilere görevler verilerek konuların tamamlandığı görülmüştür.

BY ders kitabı incelendiğinde analiz konu başlıklarının AY ders kitabı ile aynı olduğu görülmüştür. BY ders kitabında analiz konularına toplam 188 sayfalık yer ayrıldığı belirlenmiştir. Türev konusuna ayrılan sayfa sayısı 118, integral konusuna ayrılan sayfa sayısı ise 70'dir. Türev ve integral konusuna ayrılan bölümler genel olarak değerlendirildiğinde konulara gerçek yaşam durumu ile ilişkili açıklamalar yapılarak giriş yapıldığı görülmüştür. Konulara giriş bölümlerinin ardından konu ile ilgili matematiksel bilgilere yer verilerek çözümlü örneklere geçilmiştir. BY kitabında yer alan örneklerin çözümleri incelendiğinde AY ders kitabına göre daha fazla fonksiyon grafiğine yer verildiği görülmüştür. Ayrıca, BY ders kitabında türev ve türevin uygulamaları alt başlıklarında AY ders kitabına göre daha fazla çözümlü örneğe yer verildiği de belirlenmiştir. Bu durumlar, BY ders kitabında analiz konularının daha geniş yer tutmasının temel nedenleri olarak belirlenmiştir. BY ders kitabında, AY ders kitabında da olduğu gibi, bazı örneklerin çözümünde geometri yazılım programı yararlanıldığı ve konu sonlarında alıştırmalara yer verildiği görülmüştür.

5.1. Ders Kitaplarının Limit Konusu Kapsamında Analizi

Çalışmanın bu bölümünde ilk olarak 12. sınıf matematik öğretim programı incelenerek limit konusu kapsamında görev tipleri belirlenmiştir. Ardından, belirlenen görev tipleri için lokal sitler oluşturulmuş ve bu sitler temel alınarak ders kitaplarında bulunan örneklerin çözümleri ekolojik açıdan değerlendirilmiştir.

5.1.1. Limit konusu için görev tiplerinin belirlenmesi

Öğretim program incelendiğinde limit, süreklilik ve türev konularının türev ana başlığı altında toplandığı görülmüştür (Bkz. EK-4). Bu durum öğretim programında limit ve süreklilik kavramlarına türev kavramını açıklamak ve anlamlandırmak amacıyla yer verildiği şeklinde yorumlanabilir.

Öğretim programında limit konusu ile ilgili tek kazanım yer almaktadır. Bu kazanım ve açıklamaları aşağıda verilmiştir.

Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, soldan limiti ve sağdan limiti kavramlarını tablo ve grafik kullanarak örneklerle açıklar .

- Limit kavramı bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasından yola çıkılarak açıklanır.
- Limit alma işlemi aşağıdaki durumlarla sınırlandırılır:

$$c \in R \ için \ \lim_{x \to a} c = c \tag{5. 1}$$

$$\lim_{x \to a} x = a, \ \lim_{x \to a} x^2 = a^2 \tag{5. 2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \tag{5. 3}$$

$$a \in R \ \ için \ \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a \tag{5. 4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{5. 5}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 - 1}{x^2} = 1 \tag{5. 6}$$

- Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak fonksiyonların tablo ve grafik gösterimleerri yardımıyla limit uygulamaları yaptırılır (MEB, 2013, s.45).

Kazanım ve açıklamalar incelendiğinde, bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin yaklaşma kavramından hareketle, tablo ve grafik gibi farklı temsillerin yardımıyla ele alınmasının öngörüldüğü anlaşılmaktadır. Sit modeli bağlamında düşünüldüğünde tablo kullanımının nümerik teknik ve ilgili kavramlarına; grafik kullanımının ise analitik teknik ve ilgili kavramlarına işaret ettiği söylenebilir.

Öğretim programının yer verdiği limit durumları incelendiğinde ise polinom fonksiyonların limiti, sağdan ve soldan limitler, rasyonel fonksiyonların tanımsızlık ve belirsiz olduğu noktalardaki limitler gibi bir dizi görev tipinin incelenmesinin öngörüldüğü anlaşılmaktadır.

Global sit şeması bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile ilgili 5 farklı tekniğin kullanılabileceğini göstermektedir. Bunlar: nümerik, cebirsel, sentetik, analitik ve $\varepsilon - \delta$ tekniğidir. Bu teknikler nokta, değişken, asimptot başta olmak üzere pek çok birinci seviye kavramla; aralık ve eşitsizlik, yakınsaklık, oran, gibi ikinci seviye kavramlarla ve eğri, reel sayı, kartezyen koordinat sistemi gibi üçüncü seviye kavramlarla ilişkilidir. Öğretim programında tablo ve grafik kullanımına atıfta bulunulması ile görev tiplerinin gerçekleştirilmesinde cebirsel tekniğin ön planda tutulmayacağı ve $\varepsilon - \delta$ ve sentetik tekniğe yer verilmeyeceği anlaşılmaktadır. Diğer yandan öğretim programında bilgi ve iletişim teknolojilerinin kullanımına atıfta bulunulması, yine nümerik ve analitik tekniğin ön planda olacağını göstermekte ve bu iki tekniğin iç içe kullanımını destekleme amacı taşıdığı anlaşılmaktadır.

Öğretim programında örneklendirilen limit durumları göz önünde bulundurularak 5 tane görev tipinin öğretim programının amacına yönelik tipik görevler olarak ifade edilebileceği görülmektedir. Bu görev tipleri şunlardır:

1. Polinom fonksiyonlarda limit alma
2. Parçalı fonksiyonlarda limit alma
3. Tek taraflı limit alma
4. $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ tanımsızlığının olduğu noktada limit alma
5. $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu noktada limit alma
6. $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin olduğu durumda limit alma

İlk görev tipi olan *polinom fonksiyonlarda limit alma*, diğer görev tiplerine göre daha yalın ekolojik ilişkiler barındırmaktadır. Polinom fonksiyonların belirli bir noktadaki limiti fonksiyonun bu noktadaki görüntüsüne göre belirlenir. Polinom fonksiyonların kritik noktaları olmadığı için limit alma işlemi yapılırken kavram–1 grubu nesnelerinden tanımsızlık, belirsizlik ve asimptot gibi kritik nesnelere ihtiyaç duyulmamaktadır. Kazanım ifadesinde ve açıklamalarında parçalı fonksiyonlarda limit alma ile ilgili herhangi bir bilgi yer almadığı halde, 9. sınıfta öğretilen ve en temel parçalı fonksiyonlardan birisi olan mutlak değer fonksiyonların limitlerinin ve sürekliliğinin incelendiği durumlar göz önünde bulundurularak parçalı fonksiyonların limitine bir görev tipi olarak yer verilmesi uygun görülmüştür. 3. görev tipi ise uç noktaları bulunan fonksiyonların bu noktalarında limit alma işlemi yapmaya yöneliktir. 4, 5 ve 6. görev tiplerinde ise tanımsızlık ve belirsizlik nesneleri daha zengin ekolojik ilişkilerin ortaya çıkmasını sağlamaktadır.

5.1.2. Limit konusu lokal sitlerine göre ders kitaplarının analizi

Bu bölümde limit konusu kapsamında belirlenen her bir görev tipi için oluşturulan lokal sitlere göre ders kitaplarında yer alan örneklerin ekolojik analizleri yapılmıştır.

5.1.2.1. *Polinom fonksiyonlarda limit alma*

Tablo 5.1'de polinom fonksiyonlarda limit alma görev tipine yönelik cebirsel, analitik ve nümerik tekniğe göre yapılan prakseolojik analizlere yer verilmiştir.

Tablo 5.1. *Polinom fonksiyonlarda limit alma görev tipi için farklı tekniklerein kullanımına yönelik prakseolojik analizler*

Görev	$f(x)=x+3$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ limitini bulma.
Cebirsel Teknik	$x=-1$ değerini fonksiyonda yerine yazarak $x\to -1$ limit değerini belirlemek.
Teknoloji	Kritik noktası bulunmayan bir fonksiyonda limit değeri fonksiyonun bu noktadaki görüntüsüne eşit olur.
Analitik Teknik	$f(x)=x+3$ fonksiyonunun grafiğinde $x=-1$ noktasının görüntüsü olan noktayı $x\to -1$ limit değeri olarak belirlemek
Teknoloji	Limitin tanımı gereği, x ekseni üzerinde x 'in bir komşuluğundaki değerlerin f altındaki görüntüleri y ekseni üzerinde belirli bir değere yaklaşıyor ise bu değer fonksiyonun $x=a$ noktasındaki limitidir. Polinom fonksiyonlarda bu reel sayı $x=a$ noktasının y ekseni üzerinde yer alan f altındaki görüntüsüne eşit olur.
Nümerik Teknik	$x=-1$ değerini fonksiyonda yerine yazarak $x\to -1$ limit değerini belirlemek.
Teknoloji	Limitin tanımı gereği, $x\to a$ elde edilen görüntü değerleri belirli bir reel sayıya yaklaşıyor ise bu sayı fonksiyonun $x=a$ için limitidir. Polinom fonksiyonlarda bu reel sayı fonksiyonun $x=a$ değeri için görüntüsüne eşit olur.

Tablo 5.1'de cebirsel tekniğe dayalı yapılan prakseolojik analizin teknoloji bölümünde ''Kritik noktası bulunmayan bir fonksiyonda limit değeri fonksiyonun bu noktadaki görüntüsüne eşit olur.'' ifadesi ile $f(x)$ fonksiyonunun bağımsız değişkenine $x=-1$ değerinin verilmesi sonucunda limit değerinin,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=-1+3=2 \tag{5. 7}$$

olarak bulunabileceği anlaşılmaktadır. Cebirsel tekniğin kullanımında bağımsız değişkene değer veriliyor olması bu tekniğin değişken nesnesi ile ekolojik bağ kurduğunu göstermektedir. (5. 7) eşitliğinde bağımsız değişkene $x=-1$ değerinin verilebilmesi, bu değerin fonksiyonun tanım aralığında yer aldığını göstermektedir.

Aralık nesnesi böylelikle bağımsız değişkene verilebilecek reel sayı değerlerinin belirlenmesinde devreye girerek değişken nesnesinin anlamlandırılmasına hizmet etmektedir. Tanım aralıkları fonksiyon türlerine göre farklılıklar gösterir. $f(x)$ bir polinom fonksiyon olduğundan, bu fonksiyonun tanım kümesi reel sayılardır. Fonksiyon nesnesi böylelikle tanım aralığının belirlenmesinde devreye girerek aralık nesnesinin anlamlandırılmasına ekolojik destek sağlamaktadır. Aralık ve eşitsizlikler reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerinden yararlanılarak oluşturulur ve her bir aralık ve eşitsizlik reel sayılar kümesinin birer alt kümesidir. Bu durum aralık ve eşitsizlik nesnelerinin reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerinden beslendiğini ve aralık, eşitsizlik nesneleri ile reel sayı nesnesi arasında özelden genele bir ekolojik ilişkinin olduğunu göstermektedir.

Tablo 5.1'de verilen prakseolojik analizlerin teknoloji bölümleri incelendiğinde, yukarıda cebirsel teknik için açıklanan ekolojik ilişkilerin analitik ve nümerik teknikler için de geçerli olduğu anlaşılmaktadır. Analitik tekniğin teknoloji bölümünde geçen ''Limitin tanımı gereği, x ekseni üzerinde x'in bir komşuluğundaki değerlerin f altındaki görüntüleri y ekseni üzerinde belirli bir değere yaklaşıyor ise bu değer fonksiyonun $x=a$ noktasındaki limitidir.'' ifadesi ile analitik teknik kullanılarak $f(x)$ fonksiyonunun $x \to -1$ limiti belirlenirken x ekseni üzerinde $x=-1$'in içinde bulunduğu bir açık aralıkta ($x=-1$'in komşuluğu) $x=-1$ noktasına sağından ve solundan yaklaşılmasına bağlı olarak elde edilen görüntü noktalarının y ekseni üzerinde bir reel sayıya yaklaşma durumunun inceleneceği anlaşılmaktadır. Böylelikle aralık nesnesi bağımsız değişken için verilebilecek reel sayı değerlerinin belirlenmesinde devreye girerek değişken nesnesinin anlamlandırılmasına ekolojik katkı sağlamıştır. Nümerik tekniğin kullanımında ise bu işlem $x=-1$'in içinde bulunduğu bir açık aralıktaki noktalar yerine reel sayı değerleri kullanılarak yapılmaktadır.

Limit alma işlemi bir fonksiyonun bağımsız değişkeni bir reel sayının komşuluğunda değişirken, fonksiyonun aldığı değerlerin hangi reel sayının komşuluğunda değiştiğinin belirlenmesi olarak ifade edilebilir. Bu ifadeden fonksiyonlardaki değişimin incelenmesinde komşuluk nesnesine önemli ekolojik görevler düştüğü anlaşılmaktadır. Cebirsel tekniğin kullanıldığı (5. 7) eşitliğinde yer alan $x \to -1$ gösterimi ile fonksiyonun tanımlı olduğu -1 sayısının komşuluğunda x değişkenine -1'e giderek yaklaşan değerler verildiği ifade edilmektedir. Fakat (5. 7) eşitliğinden yararlanarak bu değerlerin nasıl belirlendiğini açık bir biçimde görmek mümkün değildir. Bu durum, cebirsel teknik kullanılarak limit alma işlemi yapılırken komşuluk nesnesi ile örtük ekolojik ilişki kurulduğunu göstermektedir. Örtük ekolojik ilişkinin pekiştirilerek güçlendirilebilmesi için cebirsel tekniğin yardımcı bir teknik kullanılarak desteklenmesine ihtiyaç vardır.

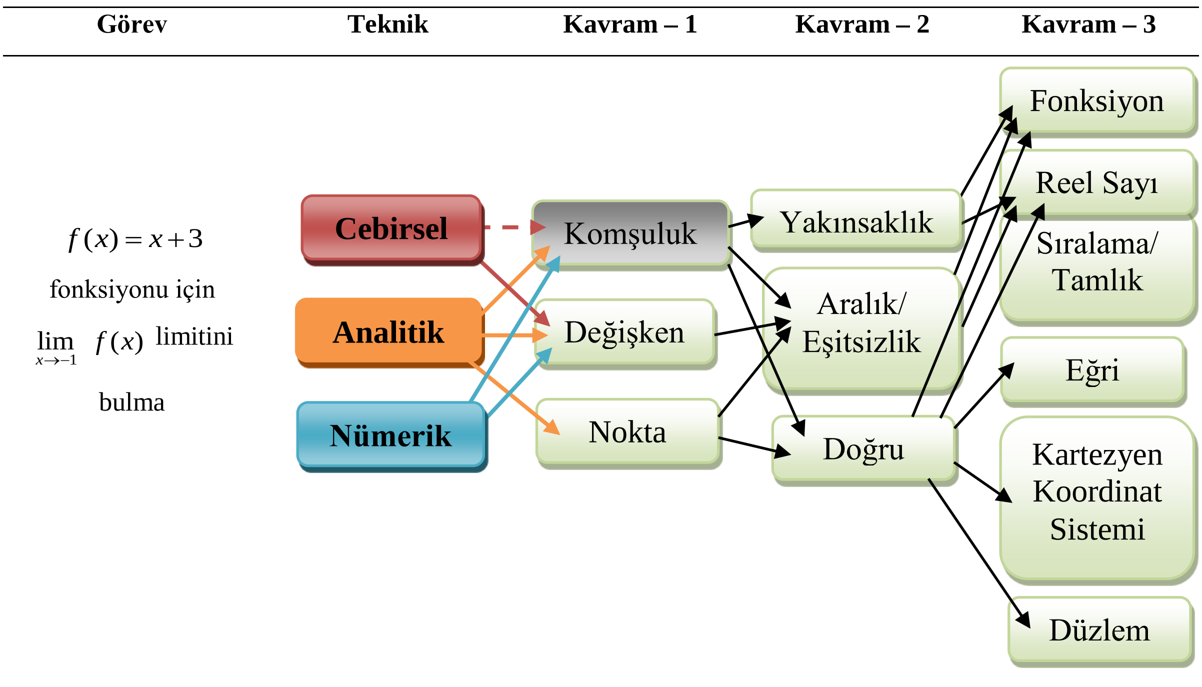
Analitik teknik kullanıldığında limit alma işlemi, koordinat düzleminde $x = -1$ noktasının komşuluğunda yer alan noktalardan hareketle fonksiyon grafiği üzerinde; nümerik tekniğin kullanımında ise $x = -1$ sayısının komşuluğunda bulunan reel sayılardan hareketle nümerik değer tabloları yardımıyla yapılmaktadır. Bu durum, analitik ve nümerik tekniğin komşuluk nesnesi ile açık ekolojik ilişkiler kurabildiğini ve cebirsel tekniğin kullanımına bağlı olarak ortaya çıkan ekolojik boşluğun analitik veya nümerik teknik kullanılarak kapatılabileceğini göstermektedir.

Analitik veya nümerik teknik kullanılarak limit alma işlemi yapılırken $x = -1$'in komşuluğu olarak belirlenen bir aralıkta bu değere sağından ve solundan yaklaşılmasına bağlı olarak elde edilen görüntülerin inceleniyor olması komşuluk nesnesinin aralık ve yakınsaklık nesneleri ile ekolojik ilişkisi yardımıyla açıklanır. Buna göre yakınsaklık ve aralık nesneleri komşuluğun fonksiyonlardaki değişimin incelendiği özel bir aralık olmasına ekolojik katkı sağlayarak bu nesneyi beslemektedir. Analitik tekniğin kullanımında, koordinat doğrusu üzerinde belirlenen komşuluğa göre limit alma işlemi yapılmasına bağlı olarak komşuluk nesnesinin doğru nesnesi ile ekolojik ilişkisi devreye girer. Ayrıca, yakınsaklığın fonksiyon grafiği üzerinde reel sayıların sıralama ve tamlık özelliğinden yararlanılarak inceleniyor olması, fonksiyon ve reel sayı nesnelerinin yakınsaklık nesnesinin anlamlandırılmasına ekolojik katkı sağladığını göstermektedir. Cebirsel tekniğin kullanımında ise komşuluk nesnesi ile olan örtük ekolojik ilişkiye bağlı olarak yakınsaklık nesnesinin fonksiyon ve reel sayı nesneleri ile ekolojik ilişkileri de örtük kalmaktadır.

Analitik tekniğin kullanımında fonksiyonunun koordinat sisteminde çizilen grafiğine ihtiyaç duyulur. Koordinat sistemleri ise nokta ve doğru nesnelerinin ekolojik ilişkileri sonucunda oluşur. Buna göre, noktaların bir araya gelmesi ile doğrular, doğruların bir araya gelmesi ile kartezyen koordinat sistemleri elde edilir. Bu durumda nokta, doğru ve kartezyen koordinat sistemi nesneleri arasında özelden genele bir ekolojik ilişkinin olduğu görülür. Koordinat sistemini oluşturan doğruların aynı zamanda birer sayı doğrusu oldukları değrlendirildiğinde doğru nesnesi ile reel sayı nesnesi arasında ekolojik bağ kurulduğu görülür.

Limiti alınan $f(x) = x + 3$ doğrusal bir fonksiyon olduğu için bu fonksiyonun grafiği doğru şeklindedir. Doğrular ise noktaların bir araya gelmesi sonucunda oluşan özel eğriler olarak tanımlanabilir. Bu durum, nokta, doğru ve eğri nesneleri arasında özelden genele bir ekolojik ilişkinin olduğunu göstermektedir. Ayrıca, doğru grafiklerinin düzlemler üzerine çizilerek inceleniyor olması düzlem nesnesinin doğru nesnesinin anlamlandırılmasına katkı sağladığını göstermektedir. $f(x)$ fonksiyonunun analitik düzlemde çizilen grafiğinden yararlanılarak $y = x + 3$ doğrusunun geometrik ve cebirsel özellikleri incelenebilmektedir. Bu durumda fonksiyon nesnesinin doğru nesnesinin anlamlandırılmasına hizmet ederek bu nesneyi ekolojik olarak beslediği söylenebilir. Ayrıca, $f(x)$ fonksiyonunun $x \to -1$ limiti alınırken $x = -1$ noktasının komşuluğunda bulunan noktaların bu komşuluğu ifade eden aralık veya eşitsizliğin birer elemanı olduğu değerlendirildiğinde, nokta nesnesi ile aralık ve eşitsizlik nesneleri arasında özelden genele bir ekolojik ilişkinin olduğu da görülür.

Şekil 5.1’de $\lim\limits_{x \to -1} (x+3)$ *limitini bulma* görevinin yerine getirilebilmesi için devreye giren ekolojik ilişkilerin yer aldığı lokal sit verilmiştir.

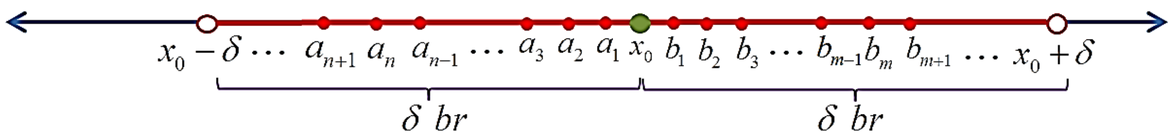


Şekil 5.1. *Polinom fonksiyonlarda limit alma görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Şekil 5.1'de verilen nesnelerin oluşturduğu ekolojik ilişkiler ağı cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin daimi sayılabilecek ekolojik ilişkileri olup çalışma boyunca bu tekniklerin kullanıldığı diğer görev tiplerinde, gerekli görülmediği taktirde, bu ekolojik ilişkilere tekrar değinilmemiştir.

Şekil 5.1 lokal sitinde kritik nesnelerden biri olarak komşuluk nesnesine ihtiyaç duyulduğu görülmektedir. Komşuluk, öğrencilerin önceki sınıf düzeylerinde karşılaşmadıkları bir kavramdır. Bu durumda *polinom fonksiyonlarda limit alma* görev tipinin teknolojilerinin tam olarak yerine getirilebilmesi için limit alma görevi gerçekleştirilmeden önce komşuluk nesnesinin Şekil 5.1'de gösterilen ekolojik ilişkilerden yararlanılarak açıklanmasına ihtiyaç duyulur.

Şekil 5.2'de komşuluk kavramı Şekil 5.1 lokal sitinde verilen ekolojik ilişkilerinden yararlanılarak açıklanmıştır.



Şekil 5.2. *Reel sayılar kümesinde tanımlı olan bir* f *fonksiyonunda* $x_0 \in R$ *'nin* δ *komşuluğu*

Şekil 5.2'de x_0 reel sayısını içinde bulunduran $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ aralığı sayı doğrusunda gösterilmiştir. Bu aralık x_0 sayısının bir komşuluğu olarak adlandırılır. x_0 sayısının komşuluğunda bu sayıya daha küçük değerler ile yaklaşılması soldan yaklaşma, daha büyük değerlerle yaklaşılması ise sağdan yaklaşma olarak ifade edilir.

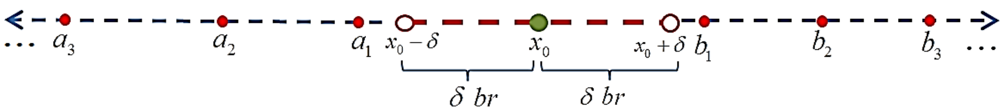
Reel sayıların sıralama ve tamlık özellikleri x_0 sayısının komşuluğunun oluşturulmasında önemli bir role sahiptir. Şekil 5.2'de x_0 reel sayısının δ komşuluğunda bulunan reel sayılar,

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ ... \succ a_{n-1} \succ a_n \succ a_{n+1} \succ ... \text{ ve } b_1 \prec b_2 \prec b_3 \prec ... \prec b_{m-1} \prec b_m \prec b_{m+1} \prec ... \quad (5.\ 8)$$

şeklinde sıralanabildiği için hangi reel sayının x_0 sayısına daha yakın olduğu sayı doğrusu üerinde belirlenebilmektedir.

Tamlık özelliği ise reel sayıların sayı doğrusunu hiç boşluk kalmayacak şekilde doldurabilmesi şeklinde açıklanabilir. Tamlık özelliği olmayan sayı kümelerinde bir sayının komşuluğundan bahsedilemez. Bu durum, bu tür sayı kümelerinde tanımlı olan fonksiyonlarda bir reel sayıya sağından veya solundan yaklaşılamamasına neden olur.

Şekil 5.3 'te tam sayılar sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir.



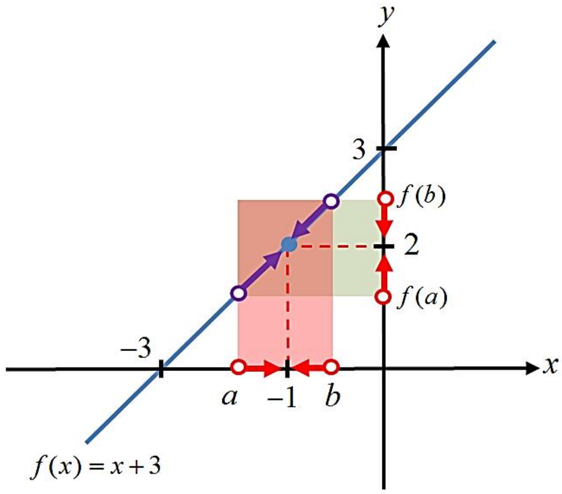
Şekil 5.3. *Tam sayılar kümesinde tanımlı olan bir f fonksiyonunda $x_0 \in Z$ 'nin δ komşuluğu*

Şekil 5.3'e göre $x_0 \in Z$ sayısının $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ komşuluğunda yer alan bir tam sayı bulunmamaktadır. Bu durumda, $x_0 \in Z$ noktasına sağından veya solundan yaklaşılması mümkün olamayacağından tam sayılar kümesinde x_0 sayısının $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ şeklinde bir komşuluğunun oluşturulması mümkün değildir.

Örnek 5.1'de, Şekil 5.1'de verilen ekolojik ilişkilerden yararlanılarak $f(x) = x + 3$ fonksiyonu için cebirsel ve analitik teknik kullanılarak limit alma işlemi yapılmıştır.

Örnek 5.1. $\lim\limits_{x \to -1} x + 3$ işleminin sonucunu bulma.

Çözüm Şekil 5.4'te, Şekil 5.1'de gösterilen ekolojik ilişkilerden yararlanılarak $f(x) = x + 3$ fonksiyonunun $x \to -1$ limiti grafiği üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 5.4. $\lim\limits_{x \to -1} x + 3$ *işleminin analitik teknik kullanılarak gerçekleştirilmesi*

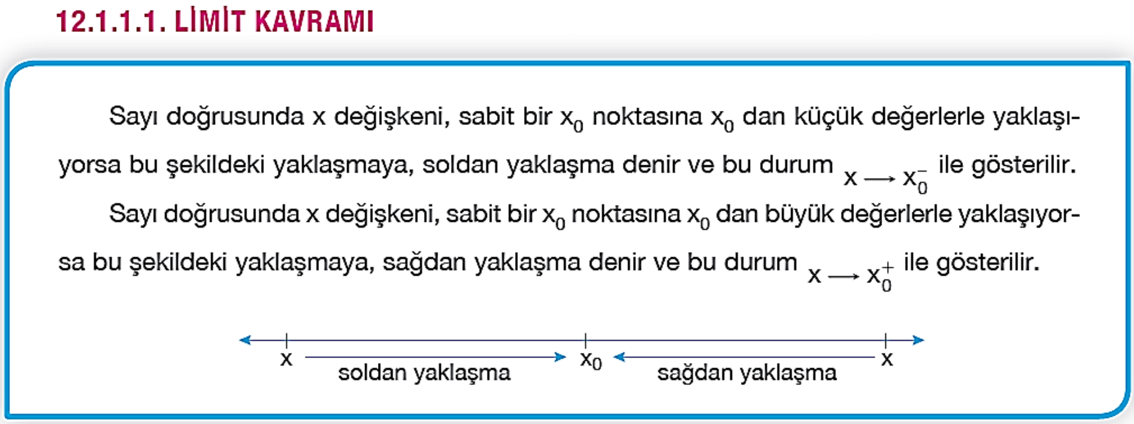
Şekil 5.4’e göre (a, b) aralığında x değişkenine -1’e sağdan ve soldan giderek yaklaşan değerler verildiğinde elde edilen görüntüler de $(f(a), f(b))$ aralığında giderek 2’ye yaklaşmaktadır. Bu durumda $x \to -1$ limit işleminin sonucu,

$$\lim_{x \to -1} x+3 = \lim_{x \to -1^+} x+3 = \lim_{x \to -1^-} x+3 = f(-1) = 2 \qquad (5.\ 9)$$

olarak bulunur.

5.1.2.1.1. ***Ders kitaplarında polinom fonksiyonların limiti***

AY ders kitabı incelendiğinde limit konusuna yaklaşma kavramı açıklanarak giriş yapıldığı görülmüştür. Yaklaşma kavramına yönelik ders kitabında yer alan açıklama Şekil 5.5’te verilmiştir.


12.1.1.1. LİMİT KAVRAMI

Sayı doğrusunda x değişkeni, sabit bir x_0 noktasına x_0 dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa bu şekildeki yaklaşmaya, soldan yaklaşma denir ve bu durum $x \to x_0^-$ ile gösterilir.

Sayı doğrusunda x değişkeni, sabit bir x_0 noktasına x_0 dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa bu şekildeki yaklaşmaya, sağdan yaklaşma denir ve bu durum $x \to x_0^+$ ile gösterilir.

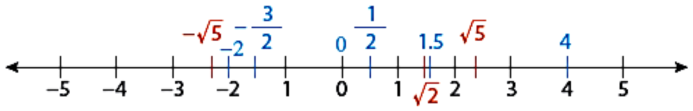
Şekil 5.5. *Yaklaşma kavramı (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.14-15)*

Şekil 5.5’te sayı doğrusu üzerinde x_0 reel sayısına sağından ve solundan nasıl yaklaşıldığı açıklanmıştır. Şekil 5.1 lokal sitinde yakınsaklık nesnesinin ekolojik ilişkileri değerlendirildiğinde, bu nesnenin reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerden beslenerek komşuluk nesnesini beslediği görülmektedir. Şekil 5.5 incelendiğinde x_0 reel sayısına yaklaşılırken reel sayıların sıralama ve tamlık özelliğinden yararlanılmadığı görülmektedir. Şekil 5.1 lokal sitine göre bu durumun x_0 reel sayısına bu sayının yakınındaki reel sayılar ile nasıl yaklaşılabildiğinin açıklanmasına etki edecek bir ekolojik boşluğun ortaya çıkmasına neden olacağı anlaşılmaktadır. Komşuluk nesnesinin yakınsaklık nesnesinden beslendiği değerlendirildiğinde bu ekolojik boşluğun dolaylı olarak komşuluk kavramının öğretimine de etki edeceği görülmektedir.

Çalışmada sıralama ve tamlık nesnelerinin reel sayı nesnesi ile ekolojik ilişkisi göz önünde tutularak önceki sınıf seviyelerinde bu nesnelere yer verilip verilmediğinin araştırılmasına karar verilmiştir. Öğretim programı incelendiğinde reel sayılar ve özelliklerine 9. sınıf seviyesinde yer verildiği görülmüştür. Ortaöğretim kurumlarında 9. sınıf seviyesinde iki farklı yayının kitabının kullanıldığı belirlenmiştir. Aşağıda bu ders kitaplarında reel sayıların tamlık ve sıralama özelliklerine nasıl yer verildiği değerlendirilmiştir.

CY ders kitabında yer alan reel sayıların tamlık özelliği ile ilgili bölüm Şekil 5.6'da görülmektedir.

Gerçek sayılar sayı doğrusunda gösterildiğinde sayı doğrusundaki her bir nokta tek bir gerçek sayıyı temsil eder ve her bir gerçek sayıya sayı doğrusunda tek bir nokta karşılık gelmektedir. Dolayısıyla, sayı doğrusu gerçek sayılar kümesinin bir gösterim şeklidir.



Şekil 5.6. *Reel sayıların tamlık özelliği ile ilgili bölüm (CY 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, 1.Kitap, s.143)*

Şekil 5.6 incelendiğinde reel sayıların tamlık özelliğinin sayı doğrusundaki bütün noktaları karşıladığı ifade edilerek yalnızca sezgisel bir yaklaşım ile açıklandığı görülmektedir.

BY ders kitabında yer alan reel sayıların tamlık özelliği ile ilgili bölüm Şekil 5.7'de verilmiştir.

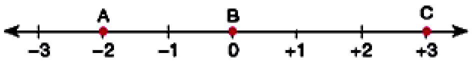
Sayı doğrusunda gerçek sayılar kümesinin her elemanına bir nokta karşılık gelir. Gerçek sayılarla gösterilen herhangi bir sıralı ikili de koordinat sisteminde yine bir noktaya karşılık gelir.

Şekil 5.7. *Reel sayıların tamlık özelliği ile ilgili bölüm (BY 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.42)*

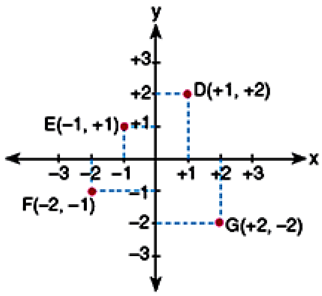
Örnek

A (−2), B(0) ve C(+3) noktalarını sayı doğrusunda;

D(+1, +2), E(−1, +1), F(−2, −1) ve G(+2, −2) noktalarını ise koordinat sisteminde gösterelim.



Gerçek sayılar (ℝ) sayı doğrusunda, ℝ x ℝ ise koordinat sisteminde gösterilir.



Şekil 5.7. (Devam) *Reel sayıların tamlık özelliği ile ilgili bölüm (BY 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.42)*

Şekil 5.7 incelendiğinde reel sayıların tamlık özelliğinin, CY ders kitabında da olduğu gibi, sadece sezgisel bir yaklaşım kullanılarak açıklandığı görülmektedir.

9. sınıf düzeyinde reel sayıların tamlık özelliğine yer veriliyor olmasına karşılık, 12. sınıf düzeyinde reel sayıların tamlık özelliğine yönelik bir hatırlatmaya yer verilmemiş olması AY ders kitabı için belirlenen bir ekolojik eksikliktir. Tamlık özelliğinin, sezgisel bir yaklaşım ile dahi olsa hatırlatılması ve bu özelliğin yaklaşma kavramı için önemi üzerinde durulması ortaya çıkan ekolojik eksikliklerin giderilmesinde etkili olacaktır. Böylelikle reel sayı nesnesi ile yakınsaklık nesnesi arasındaki ekolojik bağ güçlendirilerek yakınsaklık nesnesinin anlamlandırılmasına ekolojik katkı sağlanacaktır.

CY ders kitabında yer alan reel sayıların sıralama özelliği ile ilgili bir bölüm Şekil 5.8'de verilmiştir.

Gerçek Sayılar Kümesinde Eşitsizliklerin Farklı Gösterimleri

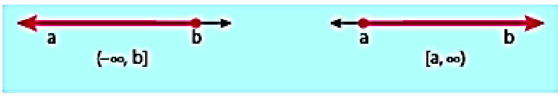
Sayı doğrusunda farklı iki noktanın aralarındaki tüm gerçek sayılardan oluşan alt kümeye aralık denir ve aralıklar verilen kümenin uç noktalarının kümeye dahil olup olmamasına bağlı olarak adlandırılır.

Aralık Adı	Eşitsizlik	Aralık Gösterimi	Sayı doğrusu gösterimi
kapalı aralık	a ≤ x ≤ b	[a, b]	

Şekil 5.8. *Reel sayıların sıralama özelliği ile ilgili bölüm (CY 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, 1.Kitap, s.234)*

açık aralık	a < x < b	(a, b)	
yarı açık aralık	a < x ≤ b veya a ≤ x < b	(a, b] veya [a, b)	

Aralığın sınırlandırılamadığı durumlarda uç nokta sonsuz işareti (∞) ile ifade edilir ve sınırlandırılamayan taraf açık olarak kabul edilir.



(−∞, ∞) aralığı ile gerçek sayılar kümesi ifade edilir. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Şekil 5.8. (Devam) *Reel sayıların sıralama özelliği ile ilgili bölüm (CY 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, 1.Kitap, s.234)*

Şekil 5.8 incelendiğinde, reel sayıların sıralama özelliğinin açıklanmadığı, buna karşılık aralık ve eşitsizliklerin özelliklerinin belirlenmesinde reel sayıların sıralama özelliğinden yararlanıldığı görülmektedir.

BY ders kitabında yer alan reel sayıların sıralama özelliği ile ilgili bir bölüm Şekil 5.9'da verilmiştir.

Eşitsizliğin Özellikleri

Her a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ için,

1. a < b, a = b ve a > b durumundan yalnız biri doğrudur. (Üç durum özelliği)
2. a < b ve b < c ise a < c dir.

Örnek

3 < 6 ve 6 < 9 ise 3 < 9 dur.

3. $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

Eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenir veya her iki taraftan aynı sayı çıkarılırsa eşitsizlik yön değiştirmez.

Örnek

$5 < 9 \Leftrightarrow 5 + 4 < 9 + 4$

9 < 13 tür.

Şekil 5.9. *Reel sayıların sıralama özelliği ile ilgili bölüm (BY 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.44)*

Şekil 5.9'da, CY ders kitabında da olduğu gibi, eşitsizliklerin özellikleri açıklanırken reel sayıların sıralama özelliğine değinilmediği görülmektedir.

Önceki sınıf düzeylerinde reel sayıların sıralama özelliği açıklanmadığı halde, 12. sınıf düzeyinde bu özelliğe yer verilmeden yaklaşma kavramının açıklanmış olması AY matematik ders kitabında belirlenen bir ekolojik eksikliktir. Öğrencilerin daha önceden öğrendiği sayı kümeleri için de sıralama özelliği geçerli oluyor veya bu özellik önceden biliniyor dahi olsa, sıralama özelliği reel sayıların tamlık özelliğinin ayrılmaz bir parçası hatta ön koşuludur. Bu nedenle, reel sayıların sıralama özelliğinin açıklanması ve bu özelliğin yaklaşma kavramı için önemi üzerinde durulması, reel sayı ile yakınsaklık nesneleri arasındaki bağın güçlendirilmesi açısından oldukça önemlidir.

AY ders kitabı incelendiğinde, yaklaşma kavramına yönelik bir örneğin ardından *Polinom fonksiyonlarda limit alma* görev tipine ilişkin 7 tane örneğe yer verildiği görülmüştür. Bu örneklerden 3 tanesinde cebirsel teknik, bir tanesinde nümerik teknik tek başına kullanılmıştır. 3 tane örneğin çözümünde ise cebirsel teknik analitik teknik kullanılarak desteklenmiştir.

Şekil 5.10'da *polinom fonksiyonlarda limit alma* görev tipi için nümerik tekniğin kullanıldığı ilk örnek verilmiştir.

Örnek

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki limitini araştıralım.

Çözüm

$f(x) = x - 2$ fonksiyonu için x değişkenine 4 ten küçük ve 4 ten büyük değerler vererek f(x) in alacağı değerleri bulalım.

Soldan yaklaşma → ← Sağdan yaklaşma

x	3,9	3,95	3,99	3,999	...	4	...	4,001	4,01	4,05	4,1
f(x)	1,9	1,95	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,05	2,1

Tabloda da görüldüğü gibi $x \to 4^-$ için $f(x) \to 2$ ve $x \to 4^+$ için $f(x) \to 2$ dir.

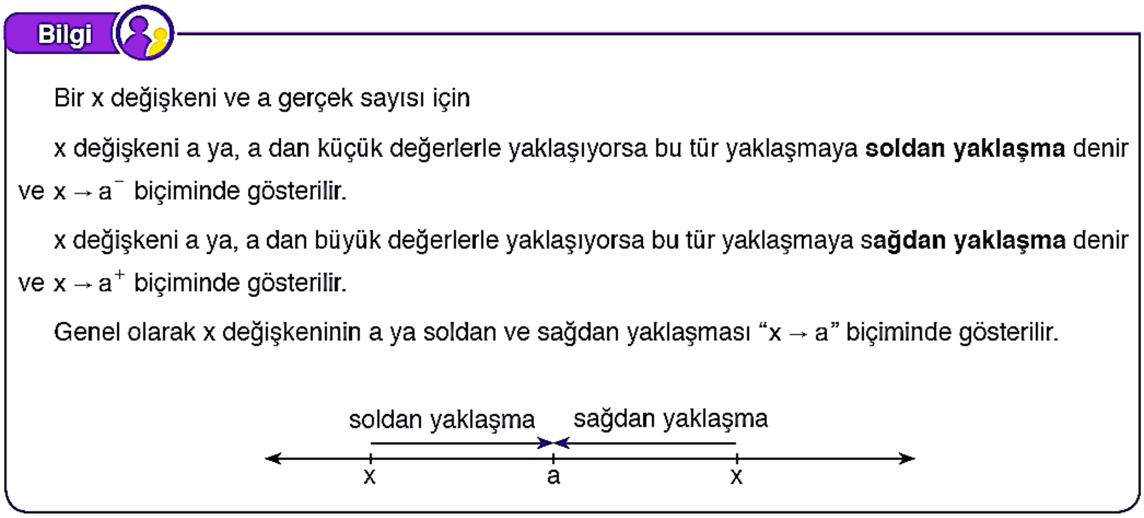
Dolayısıyla $f(x) = x - 2$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki limiti 2 dir.

Bir başka ifadeyle $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$ olur.

Şekil 5.10. *Polinom fonksiyonlarda limit alma işlemi (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.15-16)*

Şekil 5.10'da yer alan tabloda $f(x) = x - 2$ fonksiyondaki bağımsız değişkene $x = 4$ sayısının komşuluğunda bu sayıya yaklaşan değerler verilmesi sonucunda elde edilen görüntülere yer verilmiştir. Elde edilen değerlere göre limit işleminin sonucu $\lim_{x \to 4} f(x) = 2$ olarak belirlenmiştir. Nümerik tekniğin kullanımı ile limit hesabında komşuluk nesnesi ile açık ekolojik ilişki kurulmasına olanak sağlanmıştır. Bu durum limit alma işlemi gerçekleştirilirken komşuluk nesnesi ile yakınsaklık nesnesi arasındaki ekolojik bağın güçlendirilmesini sağlamıştır.

BY ders kitabında limit konusuna, AY ders kitabında da olduğu gibi, yaklaşma kavramı açıklanarak giriş yapıldığı görülmüştür. Yaklaşma kavramına yönelik açıklama Şekil 5.11'de verilmiştir.


Bilgi

Bir x değişkeni ve a gerçek sayısı için

x değişkeni a ya, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya **soldan yaklaşma** denir ve $x \to a^-$ biçiminde gösterilir.

x değişkeni a ya, a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya **sağdan yaklaşma** denir ve $x \to a^+$ biçiminde gösterilir.

Genel olarak x değişkeninin a ya soldan ve sağdan yaklaşması "$x \to a$" biçiminde gösterilir.

Şekil 5.11. *Yaklaşma kavramı (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.12)*

Şekil 5.11 incelendiğinde, AY ders kitabına benzer bir şekilde, yaklaşma kavramı açıklanırken reel sayıların sıralama ve tamlık özelliğine değinilmediği görülmektedir. Yakınsaklık kavramı açıklanmadan önce reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerine yer verilmesi ve bir reel sayıya yaklaşılırken reel sayıların bu özelliklere neden ihtiyaç duyulduğu belirtilerek sıralama ve tamlık nesneleri ile yakınsaklık nesnesi arasında ekolojik bağ kurulması yakınsaklık kavramının anlamlandırılmasına katkı sağlayacaktır.

BY ders kitabı incelendiğinde, yaklaşma kavramına yönelik iki örneğin ardından *Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Limiti* başlığı altında farklı görev tiplerine yönelik örneklere yer verildiği görülmüştür. Bu örneklerden 6 tanesinin *Polinom fonksiyonlarda* *limit alma* görev tipine yönelik olduğu belirlenmiştir. Örneklerin 2 tanesinde cebirsel tekniğin, 2 tanesinde analitik tekniğin tek başına kullanıldığı belirlenmiştir. Geriye kalan 2 örnekten birisinde cebirsel tekniğin analitik teknik kullanılarak desteklendiği, diğer örnekte ise üç tekniğe bir arada yer verildiği görülmüştür. Şekil 5.12'de üç tekniğin bir arada kullanıldığı ilk örnek verilmiştir.

Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ değerini bulalım.

Çözüm

x değişkeni 2 sayısına yaklaşırken aşağıdaki tabloda verilen değerleri alır.

x	...	1,7	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,3	...
$f(x)$	...	6,1	6,7	6,97	6,997	...	7	...	7,003	7,03	7,3	7,9	...

Tabloda görüldüğü gibi $x \to 2^-$ için fonksiyonun aldığı değerler 7 sayısına yaklaşmaktadır. $f(x)$ in $x = 2$ noktasındaki soldan limiti 7 dir.

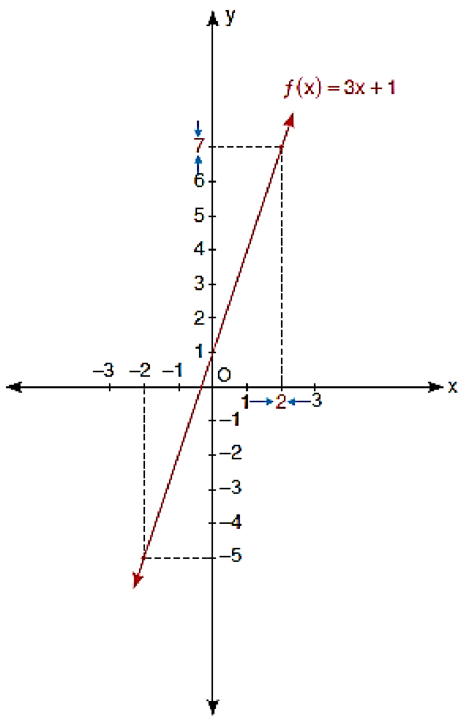
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 7$ olur.

Benzer şekilde $x \to 2^+$ için fonksiyonun aldığı değerler 7 sayısına yaklaştığında, $f(x)$ in $x = 2$ noktasındaki sağdan limiti de 7 dir.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 7$ olur.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 7$ olduğundan $f(x)$ in $x = 2$ noktasında limiti vardır ve bu limit, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$ dir.

Yandaki $f(x) = 3x + 1$ fonksiyonunun grafiğinde de görüldüğü gibi x in değerleri 2 ye yaklaştıkça $f(x)$ değerleri de 7 ye yaklaşmaktadır. Bu fonksiyonun limiti $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 1) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ şeklinde de bulunabilir.



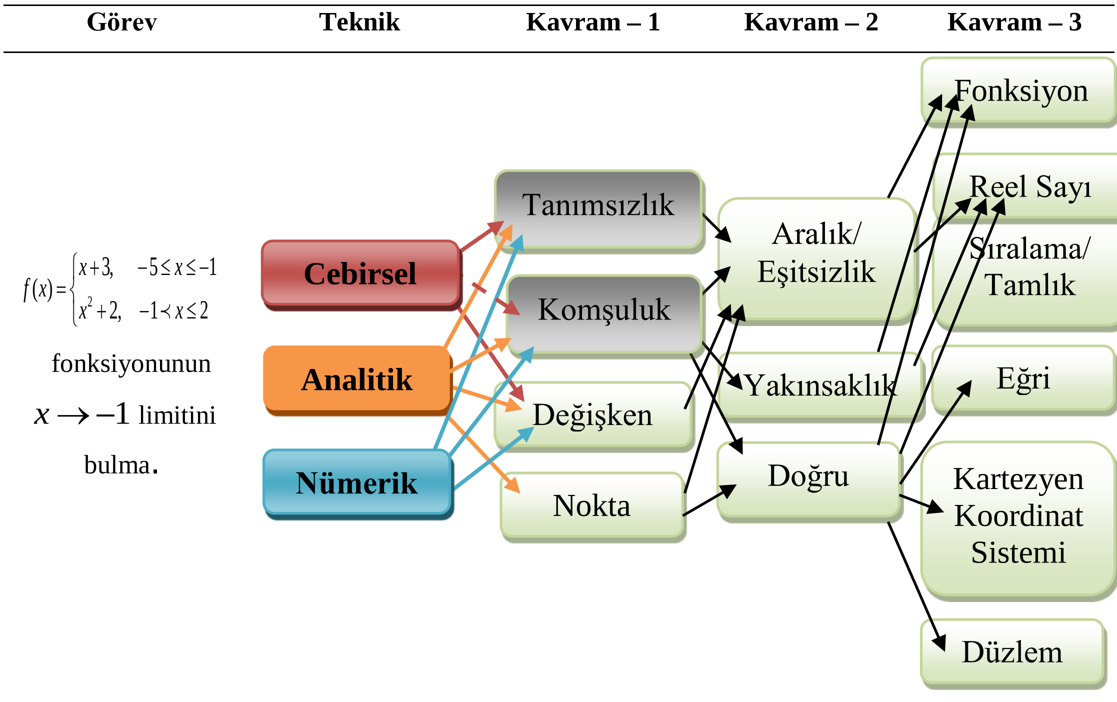
Şekil 5.12. *Polinom fonksiyonlarda limit alma işlemi (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.15)*

BY 12. sınıf matematik ders kitabında yer alan örnekte cebirsel tekniğin hem nümerik, hem de analitik teknik kullanılarak desteklendiği görülmektedir. Nümerik teknik AY ders kitabına benzer bir biçimde nümerik değerler tablosu kullanılarak uygulanmıştır. Analitik teknikte limit alma işlemi fonksiyon grafiği üzerinde gösterilmiştir. Çizilen grafikte, $f(x) = 3x + 1$ fonksiyonunun tanımlı olduğu $x = 4$ noktasının komşuluğunda, bu noktaya sağdan ve soldan yaklaşılmasına bağlı olarak elde edilen görüntülerin $f(2)$ noktasına yaklaştığı gösterilmiştir. Grafikten elde edilen verilere göre limit işleminin sonucu $f(2) = 3.2 + 1 = 7$ olarak belirlenmiştir. Analitik tekniğin kullanımı ile birlikte, komşuluk nesnesinin (geometrik nesnelerle ilişkilendirilerek) fonksiyon grafiği üzerinde somut bir yaklaşımla incelenebilmesine imkan sağlanmıştır. Sonuç olarak, analitik ve nümerik tekniğin komşuluk nesnesi ile açık ekolojik ilişkileri, cebirsel tekniğin bu nesne ile olan örtük ilişkisinin pekiştirilmesine olanak sağlanmıştır.

5.1.2.2. ***Parçalı fonksiyonlarda limit alma***

Parçalı fonksiyonlarda limit alma işlemi yapılırken limitin alınacağı noktanın yeri önem kazanmaktadır. Limitin alınacağı nokta fonksiyonun kritik noktası değil ise bu durumda fonksiyonun bu noktadaki görüntüsü limit değerine eşit olacağı için *polinom fonksiyonlarda limit alma* görev tipi gerçekleştirilirken devreye giren ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur. Limitin alınacağı nokta fonksiyonun kritik noktası ise fonksiyon parçalarının tanımlı oldukları aralıklara göre sağdan veya soldan limit alma işlemleri yapılır. Bu durumda fonksiyon parçalarının hangi aralıklarda tanımlı veya tanımsız oldukları önemli kazanır ve tanımsızlık nesnesinin aralık/eşitsizlik nesneleri ile ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur.

Şekil 5.13'te *parçalı fonksiyonlarda limit alma* görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir. Ardından, Örnek 5.2'de $f(x) = \begin{cases} x+3, & -5 \leq x \leq -1 \\ x^2+2, & -1 \prec x \leq 2 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun kritik noktası için limiti cebirsel ve analitik teknik bir arada kullanılarak incelenmiştir. Şekil 5.13 lokal sit oluşturulurken daha önce limit konusuna yönelik görev tipleri için yapılan prakseolojik analizler sonucunda elde edilmiş olan ekolojik ilişkilerden yararlanılmıştır.

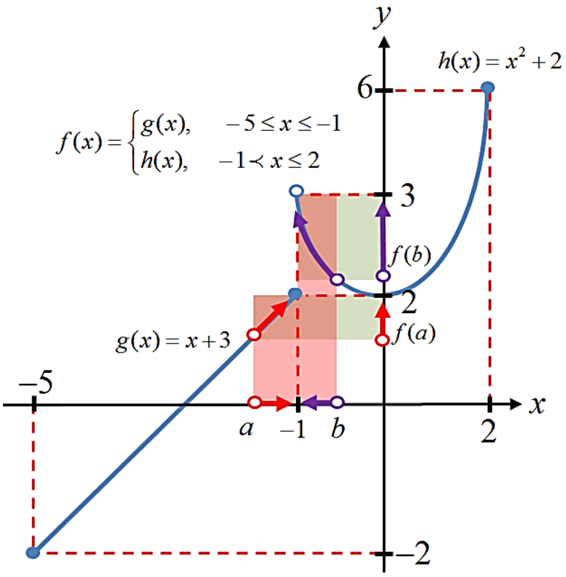


Şekil 5.13. *Parçalı fonksiyonlarda limit alma görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Örnek 5.2. $f(x)=\begin{cases} x+3, & -5\le x\le -1 \\ x^2+2, & -1\prec x\le 2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=-1$ noktasındaki limitini inceleme.

Çözüm Şekil 5.14'te f parçalı fonksiyonunun $x=-1$ noktasındaki limiti fonksiyon grafiği üzerinde incelenmiştir.

Şekil 5.14'te fonksiyonun tanım kümesi içinde $-1\in(a,\, b)$ olacak şekilde bir $(a,\, b)$ aralığı belirlenmiştir. Grafiğe göre $(-1,\, b)$ aralığı için $g(x)=x+3$ fonksiyonu, $(a,\, -1)$ aralığı için $h(x)=x^2+2$ fonksiyonu tanımsızdır. Bu durum kritik noktada limit alma işlemi yapılırken fonksiyonun farklı parçalarına ihtiyaç duyulacağını göstermektedir. Buna göre, $x=-1$ için sağdan limit alma işlemi h, soldan limit alma işlemi g fonksiyonu üzerinden yapılmalıdır. Grafiğe göre h fonksiyonunda $x\to -1^{+}$ görüntü değerleri 3'e yaklaşırken, g fonksiyonunda $x\to -1^{-}$ görüntü değerleri 2'ye yaklaşmaktadır. Sonuç olarak, $x=-1$ için f fonksiyonunun limiti yoktur.



Şekil 5.14. f *parçalı fonksiyonunun kritik noktasında limitinin incelenmesi*

Cebirsel teknik kullanılarak f fonksiyonunda $x \to -1^{+}$ limit değeri,

$$\lim_{x\to -1^{+}} f(x) = \lim_{x\to -1^{+}} x^2+2 = 1+2 = 3 \tag{5. 10}$$

olarak bulunur. Buna karşılık; $x \to -1^{-}$ limit değeri,

$$\lim_{x\to -1^{-}} f(x) = \lim_{x\to -1^{-}} x+3 = -1+3 = 2 \tag{5. 11}$$

olur. $\lim\limits_{x\to -1^{-}} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^{+}} f(x)$ olduğundan f fonksiyonunun $x \to -1$ limitsiz olduğu görülür.

Örnek 5.2'nin çözümünde kritik noktada sağdan veya soldan limit alma işleminin hangi fonksiyon parçası üzerinde yapılacağına karar verilmesi aşamasında tanımsızlık ve komşuluk nesnelerinin aralık/eşitsizlik nesneleri ile ekolojik ilişkilerinin önemli bir rol oynadığı görülmektedir.

Ders kitaplarında parçalı fonksiyonların limiti

AY ders kitabı incelendiğinde *parçalı fonksiyonlarda limit alma* görev tipine *polinom fonksiyonlarda limit alma* görev tipine yönelik örneklerin ardından yer verildiği belirlenmiştir. Bu durum *parçalı fonksiyonlarda limit alma* görev tipinin çalışmada yer aldığı görev sırası ile ders kitabının uyumlu olduğunu göstermektedir.

AY ders kitabında *parçalı fonksiyonlarda limit alma* görev tipine fonksiyonlarda limit alma işleminin nasıl yapıldığına ilişkin Şekil 5.15'te verilen açıklama ile giriş yapılmıştır.

Parçalı ve Mutlak Değerli Fonksiyonların Limitleri

$A, B \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to B$ iken $f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \\ c\ , & x = a \\ h(x), & x > a \end{cases}$ parçalı fonksiyonu verilsin.

1) $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında (kritik noktada) limiti incelenirken $x = a$ nın soldan ve sağdan limitine bakılır. Bu durumda;

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} g(x) = L_1$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} h(x) = L_2$ olur.

Eğer $L_1 = L_2$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vardır.

2) $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasından farklı bir noktadaki limiti incelenirken o noktanın, fonksiyonun hangi parçasına girdiğine bakılır. Yani

$x_0 < a$ ise $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ veya

$x_0 > a$ ise $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ limitleri incelenir.

Şekil 5.15. *Parçalı fonksiyonlarda limit alma görev tipine yönelik açıklama (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.27)*

Şekil 5.15 incelendiğinde, f parçalı fonksiyonunun kritik noktası için soldan ve sağdan limit alma işlemi yapılma gerekçesinin açıklanmadığı görülmektedir. Bu durum komşuluk nesnesi ile aralık ve eşitsizlik nesneleri arasındaki ekolojik bağın kopuk olduğunu göstermektedir. Ayrıca fonksiyon parçalarının tanımlı veya tanımsız oldukları aralıklara göre sağdan veya soldan limit alma işlemleri için nasıl seçileceğine yönelik bir açıklamaya da yer verilmediği görülmektedir. Bu durum tanımsızlık ve değişken nesneleri ile aralık/eşitsizlik nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerin kopukluğuna işaret etmektedir.

AY ders kitabında *Parçalı ve Mutlak Değerli Fonksiyonların Limitleri* başlığı altında 2 tane parçalı, 2 tane mutlak değer fonksiyon olmak üzere toplam 4 tane çözümlü örneğe yer verildiği görülmüştür. Mutlak değerli fonksiyonların parçalı fonksiyon biçiminde yazılabildiği değerlendirildiğinde ders kitabında *parçalı fonksiyonlarda limit alma* görev tipine yönelik toplamda 4 örneğin yer aldığı söylenebilir. Ders kitabında bulunan örneklerin tamamının çözümünde cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı görülmüştür. Bu örneklerden ilki Şekil 5.6'da verilmiştir.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < -1 \\ x^2+1, & x \geq -1 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre varsa aşağıdaki limit değerlerini bulalım.

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

ç) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

Çözüm

a) $-2 < -1$ olduğundan $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (3x+1)$

$= 3(-2) + 1$

$= -6 + 1$

$= -5$ olur.

b) $3 > -1$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2+1)$

$= 3^2 + 1$

$= 9 + 1$

$= 10$ bulunur.

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (3x+1)$

$= 3 \cdot (-1) + 1$

$= -3 + 1$

$= -2$ dir.

ç) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2+1)$

$= (-1)^2 + 1$

$= 1 + 1$

$= 2$ bulunur.

Şekil 5.16. *Parçalı fonksiyonlarda limit alma görev tipine yönelik örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.28)*

d) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -2$ ve $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2$ olduğundan $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ bulunur. O hâlde, $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ yoktur.

Şekil 5.16. (Devam) *Parçalı fonksiyonlarda limit alma görev tipine yönelik örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.28)*

Şekil 5.16'da verilen örneğin c ve ç bölümlerinin çözümleri incelendiğinde fonksiyon parçalarının tanımlı veya tanımsız oldukları aralıklara göre sağdan veya soldan limit alma işlemleri için nasıl seçildiğine yönelik bir açıklamaya yer verilmediği görülmektedir. Bu durum tanımsızlık ve komşuluk nesneleri ile aralık/eşitsizlik nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerde kopukluğa neden olmaktadır. Şekil 5.13 incelendiğinde, öğretim programında da öngörüldüğü şekilde, cebirsel tekniğin yardımcı bir teknik yardımıyla desteklenmesinin bu kopukluğun giderilmesinde etkili olacağı görülmektedir. Böylelikle cebirsel tekniğin komşuluk nesnesi ile örtük ilişkisine ekolojik destek sağlanarak, fonksiyon parçalarının tanımlı veya tanımsız oldukları aralıkların komşuluğun belirlenmesine nasıl etki ettiğinin incelenmesine olanak sağlanır.

BY ders kitabı incelendiğinde *parçalı fonksiyonların limitini alma* görev tipine yönelik 2 örneğe yer verildiği görülmüştür. Bu örneklere, *polinom fonksiyonlarda limit alma* görev tipine yönelik örneğin ardından yer verilmiştir. Örneklerin ilkinde cebirsel ve analitik tekniğin bir arada, diğerinde ise analitik tekniğin tek başına kullanıldığı görülmüştür. Şekil 5.17'de ders kitabında yer alan ilk örnek verilmiştir.

Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \geqslant 3 \\ -x+3, & x < 3 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$, $x = 3$ ve $x = 4$ noktalarındaki limitini bulalım.

Şekil 5.17. *Parçalı fonksiyonlarda limit alma görev tipine yönelik örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.16)*

Çözüm

Verilen parçalı fonksiyonun grafiği yandaki gibidir.

$2 < 3$ olduğundan $f(x) = -x + 3$ alınır.

$x = 3$ noktası fonksiyonun kuralının değiştiği nokta olduğundan kritik noktadır. Dolayısıyla bu noktada soldan ve sağdan limitine bakılmalıdır.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x + 3) = -2 + 3 = 1$ olur.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (-x + 3) = -3 + 3 = 0$

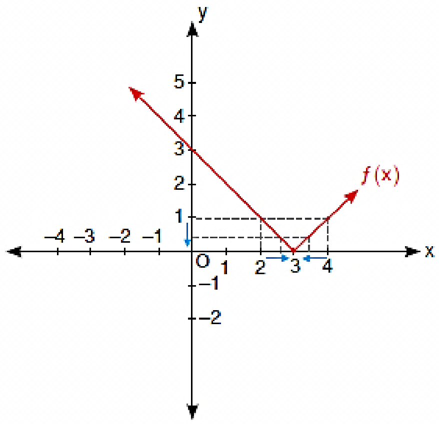
$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 3 - 3 = 0$

Buradan $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 0$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$ olur.

$4 > 3$ olduğundan $f(x) = x - 3$ alınır.

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (x - 3) = 4 - 3 = 1$ bulunur.



Şekil 5.17. (Devam) *Parçalı fonksiyonlarda limit alma görev tipine yönelik örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.16)*

Şekil 5.17 incelendiğinde $x = 3$ noktasında fonksiyonun kuralının değişmesine bağlı olarak bu noktanın kritik nokta olarak belirlendiği ve buna bağlı olarak sağdan ve soldan limit alma işlemlerinin yapıldığı anlaşılmaktadır. Çözümde parçalı fonksiyonun grafiğine yer verilmesi komşuluk nesnesinin ekolojik ilişkilerinin güçlendirilmesini sağlamıştır. Böylelikle, fonksiyon parçalarının tanımlı veya tanımsız oldukları aralıklara bağlı olarak meydana gelen kural değişikliğinin $x = 3$ noktasının komşuluğu üzerindeki etkisi grafik üzerinde somut bir biçimde incelenebilmiştir. Bu durum tanımsızlık nesnesinin ekolojik ilişkileri ile komşuluk nesnesinin ekolojik ilişkileri arasındaki bağın güçlenmesine katkı sağlamıştır.

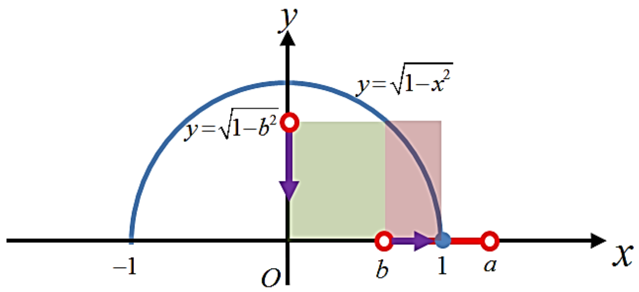
5.1.2.3. *Tek taraflı limit alma*

Tek taraflı limit alma görev tipi, tanım kümelerinin uç noktaları belirli olan fonksiyonların bu noktaları için yapılan limit işlemi olarak değerlendirilebilir. Bu görev tipinde, parçalı fonksiyonların kritik noktalarında limit alma işleminden farklı olarak, fonksiyonun tanımlı olduğu aralığa göre yalnızca sağdan veya yalnızca soldan limit alma işlemi yapılır. Bu durum, limitin hangi yönden alınacağına karar verilmesinde komşuluk ve tanımsızlık nesnelerinin aralık/eşitsizlik nesneleri ile ekolojik ilişkilerinin önem kazanacağını göstermektedir. Aynı ekolojik ilişkilere *parçalı fonksiyonlarda limit alma* görev tipi için de ihtiyaç duyuluyor olması *tek taraflı limit alma* görev tipi için Şekil 5.13 lokal sitinde verilen ekolojik ilişkilerin geçerli olacağını göstermektedir.

Örnek 5.3.'te Şekil 5.13'teki ekolojik ilişkiler yardımıyla bir f fonksiyonunun uç noktasındaki limiti cebirsel ve analitik teknik kullanılarak incelenmiştir.

Örnek 5.3. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun $x\to 1$ limitini inceleme.

Çözüm Şekil 5.18'de $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki limiti grafiği üzerinde incelenmiştir.



Şekil 5.18. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ *fonksiyonunun* $x\to 1$ *limiti*

Şekil 5.18'den $y=\sqrt{1-x^2}$'nin $f:[-1,1]\to[0,1]$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olduğu görülmektedir. f fonksiyonu $(1,a)\subset[-1,1]$ olacak şekilde bir $(1,a)$ aralığı için tanımsız olduğundan $x=1$ fonksiyonun kritik noktasıdır. Bu durumda f fonksiyonunun grafiği üzerinde $x=1$ noktasına $(1,a)$ komşuluğunda yaklaşılması mümkün olmadığı için fonksiyonun $x\to 1^+$ limiti yoktur. Bu durum,

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-1^+} \tag{5. 12}$$

şeklinde ifade edilir. (5. 12) eşitliğinde kök içi negatif olduğundan $x\to 1^+$ fonksiyonun limitsiz olduğu görülmektedir.

Şekil 5.18 incelendiğinde f fonksiyonunun tanım kümesinde $(b,1)\subset[-1,1]$ olacak şekilde bir $(b,1)$ aralığının var olduğu ve bu aralıktaki değerler için görüntülerin $\left(0,\ \sqrt{1-b^2}\right)$ aralığında yer aldığı görülmektedir. Grafiğe göre $(b,1)$ komşuluğunda $x \to 1^-$ elde edilen görüntüler orijine yaklaşmaktadır. Bu durum,

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-1^-} = 0 \qquad (5.\ 13)$$

şeklinde ifade edilir. Bu sonuç f fonksiyonunun $x=1$ noktasında sadece soldan limitinin olduğunu göstermektedir.

Örnek 5.3'ün çözümünde, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun tanımsız olduğu aralığa göre $x \to 1^-$ limitin inceleneceği komşuluk belirlenmiş ve buna göre $x=1$ noktasında sadece soldan limit alma işleminin yapılabileceğine karar verilmiştir. Bu durum f fonksiyonunun $x=1$ noktasında imitinin incelenmesinde tanımsızlık ve komşuluk nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerin kritik bir önem taşıdığını göstermektedir. Şekil 5.13 lokal siti incelendiğinde tanımsızlık ve komşuluk nesnelerinin aralık/eşitsizlik nesneleri ile ortak ekolojik ilişkilerinin olduğu görülmektedir. Bu durum aralık/eşitsizlik nesnelerinin tanımsızlık ile komşuluk nesneleri arasında ekolojik bağ kurulmasına aracılık ettiğini göstermektedir.

5.1.2.3.1. *Ders kitaplarında tek taraflı limit alma*

AY ve BY 12. sınıf matematik ders kitapları incelendiğinde, limit konusunda *tek taraflı limit alma* görev tipine yönelik örneğe yer verilmediği görülmüştür. Buna karşılık ders kitaplarında süreklilik konusunda bu görev tipi ile ilgili bir örnek ve bir etkinliğe yer verildiği belirlenmiştir. Bu örnek ve etkinlik çalışmanın *Uç noktadaki sürekliliğinin incelenmesi* başlığı altında incelenmiştir. Limit ile süreklilik temel araçları arasındaki yakın ekolojik ilişkiler değerlendirildiğinde *tek taraflı limit alma* görev tipine yönelik örneklere süreklilik başlığı altında yer veriliyor olmasının ekolojik sorun oluşturmayacağı söylenebilir.

5.1.2.4. $a/0$ $(a \neq 0)$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma*

$\frac{a}{0}$ $(a \in R-\{0\})$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma*, cebir bilgisi kullanılarak gerçekleştirilebilecek bir görev tipi değildir. Bu nedenle Tablo 5.2'de yapılan prakseolojik analizlerde analitik ve nümerik teknik kullanılmıştır.

Tablo 5.2. $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma görev tipi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik prakseolojik analizler*

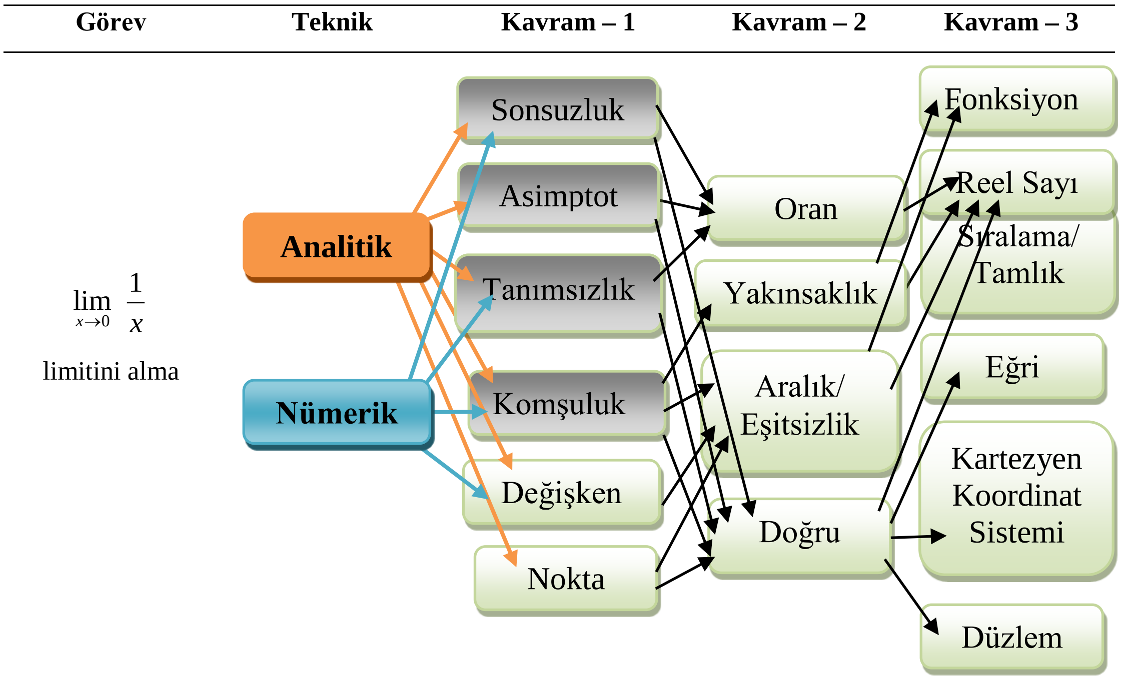
Görev	$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ limitini alma.
Nümerik Teknik	**1.Adım** Fonksiyonun $x = 0$ değeri için tanımlı olmadığını belirlemek **2.Adım** $x = 0$'a sağından ve solundan sayısal değerler ile yaklaşmak **3.Adım** Fonksiyon altında elde edilen sayısal değerlerin $+\infty$ veya $-\infty$'a ıraksamasına bağlı olarak limitin olmadığına karar vermek.
Teknoloji	**1. Adım** $x = a$ için $f(a) = \frac{b}{0}$ $(b \neq 0)$ oluyor ise $\frac{b}{0} = k$ eşitliğini sağlayan bir $k \in R$ değeri bulunmadığı için $x = a$ fonksiyonun kritik noktasıdır. **2. Adım** Limit bir noktanın komşuluğunda tanımlı olduğundan o noktanın komşuluğunda sayısal değerlerin fonksiyon altındaki görüntülerinin hangi değere yaklaştığı incelenir. **3. Adım** Limit tanımı gereği $x = a$ noktasının komşuluğundaki sayısal değerlerin f altındaki görüntüleri aynı bir reel sayı değerine yaklaşmıyor ise $x = a$ noktasında limit yoktur.
Analitik Teknik	**1.Adım** Grafik üzerinden $x = 0$ noktasında fonksiyonun tanımlı olmadığını belirlemek **2.Adım** x ekseni üzerinde $x = 0$ noktasına sağından ve solundan yaklaşmak **3.Adım** Grafikte elde edilen görüntü noktalarının $+\infty$ veya $-\infty$'a ıraksamasına bağlı olarak limitin olmadığına karar vermek.
Teknoloji	**1. Adım** $x = a$ reel sayısı için grafik üzerinde $f(x) = y$ görüntüleri mevcut değil ise $x = a$ noktası tanımsızlık veya belirsizliğin olduğu bir noktadır. Dikey asimptotun olduğu noktada fonksiyon tanımsızdır. **2. Adım** Limit bir noktanın komşuluğunda tanımlı olduğundan o noktanın komşuluğundaki noktaların y eksenindeki görüntülerinin hangi noktaya yaklaştığı incelenir. **3. Adım** Limit tanımı gereği $x = a$ noktasının komşuluğundaki noktaların f altındaki görüntüleri y ekseni üzerindeki aynı bir reel sayı noktasına yaklaşmıyor ise $x = a$ noktasında limit yoktur.

Tablo 5.2'de nümerik teknik kullanılarak yapılan prakseolojik analizin teknoloji bölümü ilk adımında $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında tanımsız olduğu açıklanırken tanımsızlık nesnesinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulmuştur. Buna göre

tanımsızlık $\frac{a}{b}$ biçiminde gösterilebildiği için oran nesnesi tanımsızlığın ifade edilmesine ekolojik destek sağlayarak bu nesneyi beslemektedir. $\frac{b}{0}$ oranının bir reel sayıya eşit olmadığı belirtilirken de reel sayı nesnesi oran nesnesinin anlamlandırılmasına katkı sağlayarak bu nesneyi beslemektedir. Analitik tekniğin kullanımında ise bu ekolojik ilişkilerin yanı sıra tanımsızlık nesnesinin doğru nesnesi ile olan ekolojik ilişkisi de devreye girmektedir. Buna göre fonksiyon eğrisinin asimptot doğrusu ile kesişmemesine bağlı olarak $f(x)$ fonksiyonun $x=0$ noktasında tanımsız olduğu belirtilirken doğru nesnesi tanımsızlık nesnesini beslemektedir. Ayrıca, dikey asimptotun *fonksiyon eğrisi ile kesişmeyen özel bir doğru* şeklinde nitelendirilebilmesi asimptot nesnesinin de doğru nesnesinden beslendiğini göstermektedir.

Nümerik teknik kullanılarak yapılan prakseolojik analizin teknoloji bölümü 2.adımı $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu için değerlendirildiğinde, $x=0$ noktasına yaklaşılması sonucunda elde edilen görüntü değerlerinin $+\infty$ veya $-\infty$'a ıraksayacağı görülür. Bu aşamada nümerik tekniğin sonsuzluk nesnesi ile ekolojik ilişkileri devreye girer. Buna göre, $x=0$ sayısına sağdan ve soldan yaklaşılması sonucunda $\frac{1}{x}$ oran değerlerinin sırasıyla $+\infty$ ve $-\infty$'a ıraksayacağı belirtilirken oran nesnesi sonsuzluk nesnesinin açıklanmasına hizmet ederek bu nesneyi beslemektedir. Analitik tekniğin kullanımında ise bu ekolojik ilişkilerin yanı sıra, limit alma işleminin analitik düzlemde incelenmesine bağlı olarak, asimptot nesnesinin oran nesnesi ile olan ekolojik ilişkisi de devreye girer. Buna göre, $x=0$ noktasına yaklaşılmasına bağlı olarak elde edilen oran değerlerine göre fonksiyon eğrisinin asimptot doğrusuna yaklaşıyor olması, oran nesnesinin asimptotun açıklanmasına ekolojik katkı sağladığını göstermektedir.

Şekil 5.19'da $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma* görev tipi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir. Ardından Örnek 5.4'te lokal sitteki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun tanımsız olduğu noktadaki limiti nümerik ve analitik teknik bir arada kullanılarak incelenmiştir.



Şekil 5.19. $\frac{a}{0}$ $(a \in R - \{0\})$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma görev tipi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Şekil 5.19 lokal sitinde sonsuzluk, asimptot, tanımsızlık ve komşuluk nesnelerinin kritik nesneler olduğu görülmektedir. Tablo 5.2'de prakseolojik analizi yapılan görev tipinin teknolojilerinin yerine getirilebilmesi için öncelikle bu kritik nesnelerin açıklanması, ardından limit alma işlemi için ekolojik katkılarının sağlanması gerekmektedir.

Örnek 5.4. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x \to 0$ limitini nümerik teknik ve analitik teknik yardımıyla inceleme.

Çözüm $x = 0$ için $f(0) = \frac{1}{0} = a$ olsun. Eşitlikte içler dışlar çarpımı yapıldığında,

$$1 = a.0 \tag{5. 14}$$

elde edilir. (5. 14) eşitliğini sağlayan bir reel sayı belirlenemeyeceği için $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ için tanımsızdır. Bu durumda (varsa) limit değerinin bulunabilmesi için sıfırın komşuluğundaki reel sayıların görüntülerinden yararlanılarak $x \to 0$ belirli bir reel sayıya yaklaşma durumunun olup olmadığı incelenmelidir. x değerleri sıfıra sağdan yaklaşırken $f(x)$ 'in aldığı bazı değerler Tablo 5.3'te verilmiştir.

Tablo 5.3. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *fonksiyonunun* $x \to 0^+$ *aldığı bazı değerler*

x	**1**	**0,5**	**0,1**	**0,05**	**0,01**	**0,005**
$f(x)=1/x$	1	2	10	20	100	200
x	**0,0001**	**0,0005**	**0,00001**	**0,00005**	**0,000001**	$x \to 0^+$
$f(x)=1/x$	1000	2000	10000	20000	100000	∞

x değerleri sıfıra soldan yaklaşırken $f(x)$'in aldığı bazı değerler Tablo 5.4'te verilmiştir.

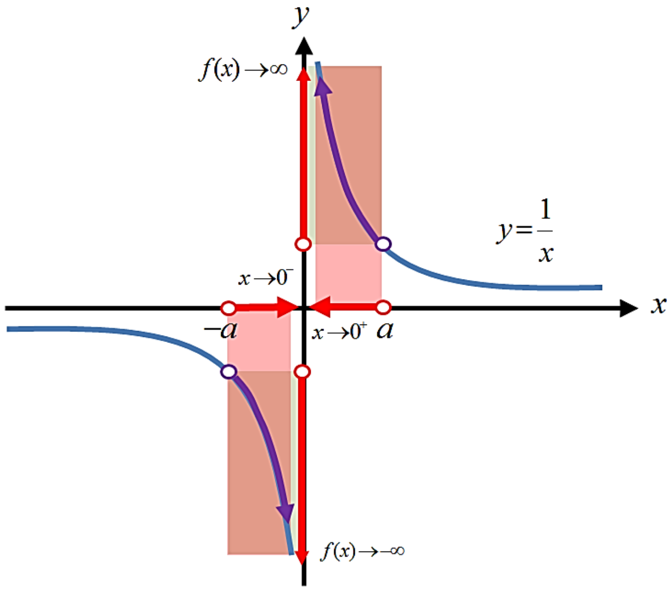
Tablo 5.4. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *fonksiyonunun* $x \to 0^-$ *aldığı bazı değerler*

x	**-1**	**-0,5**	**-0,1**	**-0,05**	**-0,01**	**-0,005**
$f(x)=1/x$	-1	-2	-10	-20	-100	-200
x	**-0,0001**	**-0,0005**	**-0,00001**	**-0,00005**	**-0,000001**	$x \to 0^-$
$f(x)=1/x$	-1000	-2000	-10000	-20000	-100000	$-\infty$

Tablolarda yer alan reel sayı değerlerine göre $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun; x 'in sıfıra sağdan yaklaşması durumunda artarak $+\infty$'a, x 'in sıfıra soldan yaklaşması durumunda ise azalarak $-\infty$'a gittiği görülmektedir. Elde edilen görüntü değerleri belirli bir reel sayıya yaklaşmadığı için $f(x)$ fonksiyonunun $x \to 0$ limiti yoktur.

Limit alma işleminin analitik düzlemde incelenebilmesi için $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğine ihtiyaç duyulmaktadır. $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında tanımsız olduğundan fonksiyon eğrisi $x=0$ doğrusu ile kesişmeyecektir. Bu doğru asimptot doğrusu olarak adlandırılır.

Şekil 5.20'de $f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Şekil 5.20. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *fonksiyonunun tanımsız olduğu noktadaki limitinin analitik teknik kullanılarak incelenmesi*

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinden, bağımsız değişkene $(-a,\, a)$ komşuluğunda sıfıra gittikçe yaklaşan değerler verildiğinde, fonksiyon grafiğinin $x=0$ asimptot doğrusuna giderek yaklaştığı ve buna bağlı olarak elde edilen görüntülerin sınırsızca artarak $+\infty$'a veya sınırsızca azalarak $-\infty$'a gittiği görülmektedir. Elde edilen görüntüler y ekseni üzerinde belirli bir noktaya yaklaşmadığı için f fonksiyonunun $x \to 0$ limiti yoktur.

5.1.2.4.1. *Ders kitaplarında* $a/0$ $(a \neq 0)$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma*

Tablo 5.2'de verilen prakseolojik analizin teknoloji bölümleri incelendiğinde, limit alma işlemini tanımsızlık nesnesinin yönlendirdiği görülmektedir. Bunun nedeni, $\dfrac{1}{0}$ oranının tanımsızlık ifade etmesine bağlı olarak, $x=0$'ın komşuluğunda bulunan ve fonksiyonu tanımsız yapmayan reel sayıların görüntülerinden yararlanılmasıdır. Tablo 5.2'de yapılan prakseolojik analizin teknoloji bölümü 1. adımlarında tanımsızlığın limit alma işlemine nasıl etki ettiğinin değerlendirilebilmesi için öncelikle bu nesnenin açıklanmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu durum dikkate alınarak ders kitaplarında *tanımsızlığın olduğu noktada limit alma* görev tipine ilişkin örneklerin incelenmesine geçilmeden önce öğretim programı ve ders kitaplarında tanımsızlığa nerede ve nasıl yer verildiği araştırılmıştır.

Şekil 5.19 lokal siti incelendiğinde tanımsızlık, oran ve reel sayı nesneleri arasında bir ekolojik ilişki zinciri kurulduğu görülmektedir. Bu durum, oran ve reel sayı nesnelerinin tanımsızlık nesnesini ekolojik olarak beslediğini göstermektedir. Öte yandan Şekil 5.19 lokal sitinde tanımsızlık nesnesi ile doğru ve eğri nesneleri arasında da ekolojik ilişki zinciri kurulduğu görülmektedir. Bu durum fonksiyon eğrisi ile asimptot doğrusu arasındaki ekolojik ilişkinin tanımsızlığın geometrik olarak anlamlandırılmasına hizmet ettiğini göstermektedir. Buna göre öğretim programında tanımsızlık kavramının açıklanması için uygun konular *gerçek sayılar, rasyonel sayılar, oran–orantı, fonksiyonlar* ve *limit* olarak belirlenmiştir.

Ortaöğretim matematik öğretim programı incelendiğinde *reel sayılar, rasyonel sayılar* ve *oran-orantı* konularına 9. sınıfta yer verildiği belirlenmiştir. (MEB, 2013). Bu konulara ilişkin kazanımlar ve yönergelerde tanımsızlık kavramına yönelik bir açıklamaya yer verilmediği görülmüştür. Öğretim programında fonksiyonlar konusuna 9, 10 ve 11. sınıf düzeylerinde alt başlıklar halinde yer verildiği görülmüştür. Öğretim programında yer alan fonksiyon alt başlıklarına ilişkin kazanımlar ve yönergeler incelendiğinde tanımsızlık kavramına yönelik bir açıklamaya yer verilmediği görülmüştür. Öğretim programının tamamı incelendiğinde de benzer bir durumla karşılaşılmıştır. Öğretim programında 12. sınıf düzeyinde $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma* görev tipine yer verildiği halde tanımsızlık kavramının açıklanmasına yönelik bir ifadeye rastlanmamıştır.

Liselerde 9. sınıf matematik ders kitaplarında rasyonel sayılara *gerçek sayılar* başlığı altında yer verildiği görülmüştür. Bu ders kitaplarında *gerçek sayılar, oran ve orantı* konularının olduğu bölümler incelendiğinde tanımsızlık kavramına yönelik herhangi bir açıklamaya rastlanmamıştır. 9, 10. ve 11. sınıflarda okutulan matematik ders kitaplarının fonksiyonlar konusuna yönelik bölümleri incelenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda BY yayınları 9. sınıf matematik ders kitabının *Fonksiyonlar* konu başlığı altında tanımsızlık kavramının geçtiği bir örnek belirlenmiştir. Bu örneğe Şekil 5.21’de yer verilmiştir.

Örnek

$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$f(x) = x^{-1}$ fonksiyonu birinci dereceden olmadığından doğru grafiği belirtmez. Değer tablosu oluşturalım.

$x = 0$ için $f(0) = \frac{1}{0}$, nokta (0, tanımsız)

$x = \frac{1}{2}$ için $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, nokta $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$; $x = \frac{-1}{2}$ için $f\left(\frac{-1}{2}\right) = -2$, nokta $\left(\frac{-1}{2}, -2\right)$

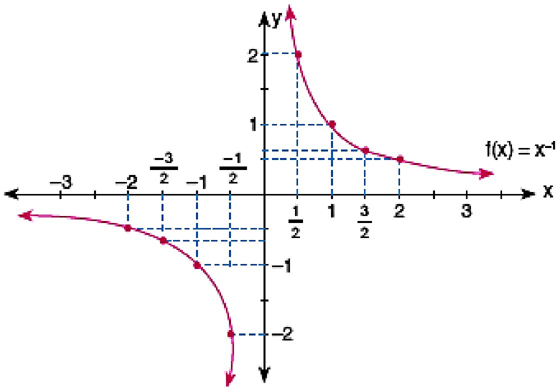
$x = 1$ için $f(1) = 1$, nokta $(1, 1)$; $x = -1$ için $f(-1) = -1$, nokta $(-1, -1)$

$x = \frac{3}{2}$ için $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$, nokta $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$; $x = \frac{-3}{2}$ için $f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{-2}{3}$, nokta $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-2}{3}\right)$

$x = 2$ için $f(2) = \frac{1}{2}$, nokta $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; $x = -2$ için $f(-2) = \frac{-1}{2}$, nokta $\left(-2, \frac{-1}{2}\right)$

Şekil 5.21. *9. sınıf ders kitabında tanımsızlık nesnesinin geçtiği bölüm (BY 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.110)*

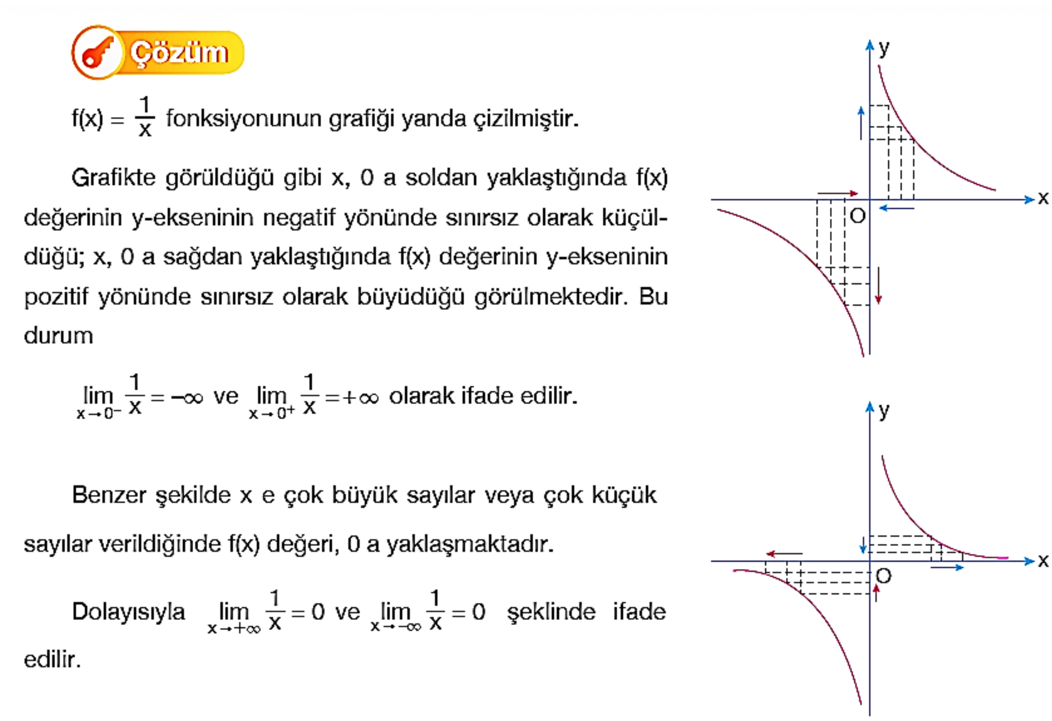
x	-2	$\frac{-3}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-2}{3}$	-1	-2	tanımsız	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$



Şekil 5.21. (Devam) *9. sınıf ders kitabında tanımsızlık nesnesinin geçtiği bölüm (BY 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.110)*

Şekil 5.21 incelendiğinde $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinin çiziminde tanımsızlık kavramının ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulduğu halde kavram ile ilgili herhangi bir açıklamaya yer verilmediği görülmektedir.

AY 12. sınıf matematik ders kitabında $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ *tanımsızlığın olduğu noktada* *limit alma* görev tipine, çalışmada belirlenen görev tipi sırasına uygun bir şekilde, *parçalı fonksiyonlarda limit alma* görev tipine yönelik örneklerin ardından yer verildiği görülmüştür. AY ders kitabında *Genişletilmiş Gerçek Sayılar Kümesinde Limit* başlığı altında tanımsızlık kavramı açıklanmadan $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ *tanımsızlığın olduğu noktada limit alma* görev tipine yönelik örneklerin çözümlerine başlandığı belirlenmiştir. Ders kitabında bu görev tipine yönelik 2 tane örneğe yer verilmiştir. Bu örneklerden ilkinde analitik teknik, ikincisinde nümerik teknik kullanılmıştır. Şekil 5.22'de analitik tekniğin kullanıldığı ilk örneğe yer verilmiştir.



Çözüm

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği yanda çizilmiştir.

Grafikte görüldüğü gibi x, 0 a soldan yaklaştığında f(x) değerinin y-ekseninin negatif yönünde sınırsız olarak küçüldüğü; x, 0 a sağdan yaklaştığında f(x) değerinin y-ekseninin pozitif yönünde sınırsız olarak büyüdüğü görülmektedir. Bu durum

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ve $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ olarak ifade edilir.

Benzer şekilde x e çok büyük sayılar veya çok küçük sayılar verildiğinde f(x) değeri, 0 a yaklaşmaktadır.

Dolayısıyla $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ve $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ şeklinde ifade edilir.

Şekil 5.22. $f(x) = \frac{1}{x}$ *fonksiyonunun* $x \to 0$ *limiti (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.33)*

Şekil 5.19 lokal siti incelendiğinde analitik tekniğin tek başına kavram-1 nesnelerinin tamamıyla ekolojik ilişki kurabildiği görülmektedir. Bu durum $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x \to 0$ limiti incelenirken gerekli ekolojik ilişkilerin kurulmasında bu tekniğin tek başına kullanılabileceğini göstermektedir. Şekil 5.22'de buna uygun bir şekilde limitin incelenmesinde analitik tekniğin tek başına kullanıldığı görülmektedir. Fakat ders kitabında tanımsızlık kavramının açıklanmamış olması bu tekniğin bütün teknolojilerinin yerine getirilmesini engellemektedir. Tablo 5.2'de yapılan prakseolojik analiz incelendiğinde bu durum daha iyi anlaşılmaktadır. Prakseolojik analizde $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x \to 0$ limiti incelenirken limiti alınan noktaya sağdan ve soldan yaklaşılma nedeni, teknoloji bölümünde tanımsızlık nesnesinin ekolojik ilişkileri yardımı ile açıklanmıştır. Bu durumda AY ders kitabında tanımsızlık kavramı açıklanmadan limit alma işleminin yapılıyor olmasının, bu kavramın limit alma işlemine nasıl etki ettiğinin incelenmesini kısıtlayan bir ekolojik boşluğun oluşmasına neden olduğu söylenebilir.

Tablo 5.2'de $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ *limitini bulma* görevi gerçekleştirilirken asimptot nesnesinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulmuştur. Şekil 5.22'de fonksiyon grafiği çizilirken asimptot doğrusundan yararlanılmış olmasına rağmen, örneğin çözümünde asimptot kavramının açıklanmadığı ve bu kavramın ekolojik ilişkilerine değinilmediği görülmektedir.

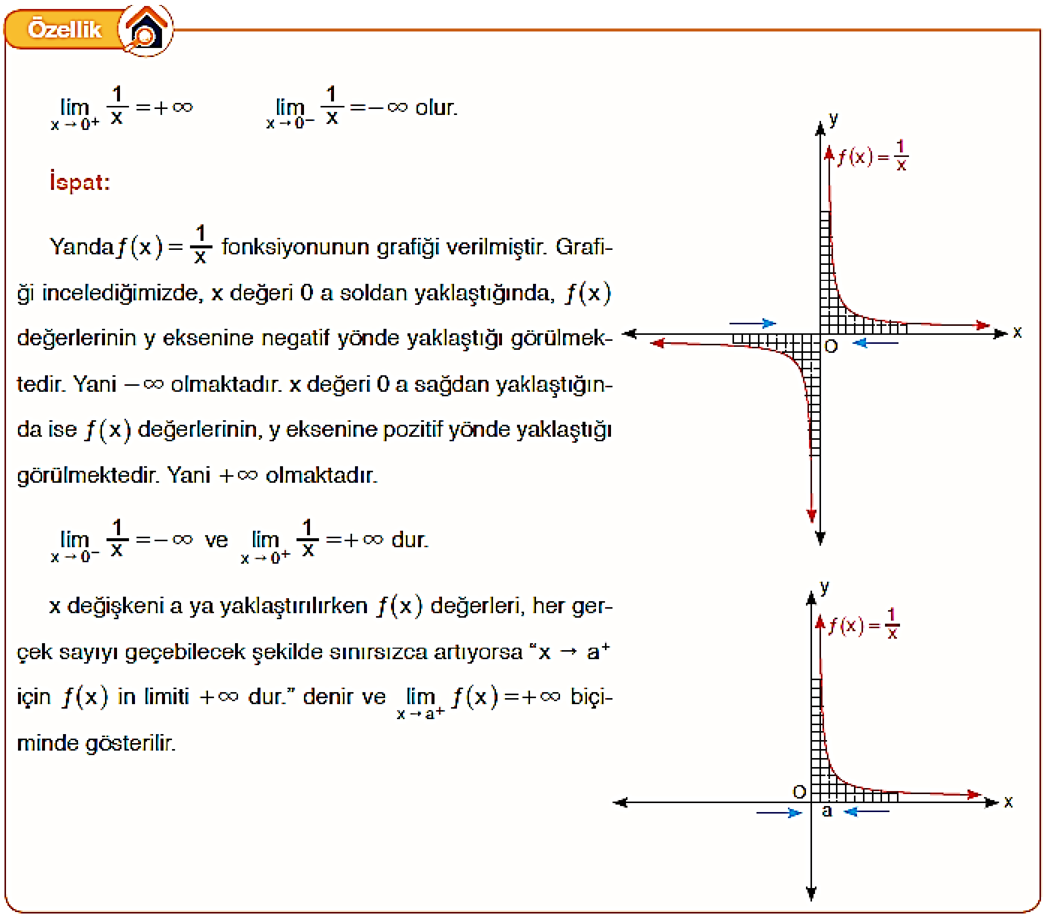
Öğretim programı incelendiğinde asimptot kavramına türevin uygulamaları başlığı altında fonksiyon grafiği çiziminde yararlanılmak üzere yer verildiği görülmüştür. Öğretim programında yer alan asimptot kavramı ile ilgili kazanım ve kazanımın açıklaması şu şekildedir:

> **Fonksiyonun grafiğini çizerken türevi kullanır.**
>
> - Asimptot kavramı açıklanarak sadece düşey asimptot ve yatay asimptot üzerinde durulur. Eğik ve eğri asimptota girilmez (MEB, 2013, s.47).

Kazanımın açıklamasına göre AY ders kitabında limit işlemi yapılırken asimptot kavramına yer verilmiyor olmasının öğretim programı ile uyumlu olduğu söylenebilir. Öte yandan Şekil 5.19 lokal siti değerlendirildiğinde, asimptot nesnesi ile ekolojik ilişki kurulmasında türev bilgisine ihtiyaç duyulmadığı da görülmektedir. Bu durum asimptot nesnesine limit alma işlemi yapılırken yer verilmesinde ekolojik bir engelin bulunmadığını göstermektedir. Ekolojik bir engel olmamasına karşılık Şekil 5.22'de asimptot kavramının açıklanmamış olması, bu nesnenin ekolojik ilişkilerine bağlı olarak limit alma işleminde ekolojik boşlukların oluşmasına neden olmaktadır. Şekil 5.22'de verilen grafiğe göre x'e sıfıra sağdan ve soldan yaklaşıldığında elde edilen görüntülerin neden sınırsızca arttığı veya azaldığının açıklanabilmesi için öncelikle asimptot kavramının açıklanması, ardından $f(x)$ eğrisinin asimptot doğrusu ile kesişmeme durumunun limit işleminin sonucuna nasıl etki ettiğinin grafik üzerinde incelenmesi gerekmektedir.

BY 12. sınıf matematik ders kitabında $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ *tanımsızlığın olduğu noktada limit alma* görev tipine, çalışmada belirlenen görev tipi sırasına uygun bir şekilde, *parçalı fonksiyonlarda limit alma* görev tipine yönelik örneklerin ardından bir özellik olarak yer verildiği görülmüştür. Bu özelliğin öncesindeki bölümler incelendiğinde tanımsızlık kavramına yönelik bir açıklamaya rastlanmamıştır.

BY ders kitabında yer alan $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma* görev tipine yönelik bölüm Şekil 5.23'te verilmiştir.



Özellik

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ olur.

İspat:

Yanda $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafiği incelediğimizde, x değeri 0 a soldan yaklaştığında, $f(x)$ değerlerinin y eksenine negatif yönde yaklaştığı görülmektedir. Yani $-\infty$ olmaktadır. x değeri 0 a sağdan yaklaştığında ise $f(x)$ değerlerinin, y eksenine pozitif yönde yaklaştığı görülmektedir. Yani $+\infty$ olmaktadır.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ve $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ dur.

x değişkeni a ya yaklaştırılırken $f(x)$ değerleri, her gerçek sayıyı geçebilecek şekilde sınırsızca artıyorsa "$x \to a^+$ için $f(x)$ in limiti $+\infty$ dur." denir ve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ biçiminde gösterilir.

Şekil 5.23. $f(x) = \frac{1}{x}$ *fonksiyonunun* $x \to 0$ *limiti (BY 12 .Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.21)*

Şekil 5.23 incelendiğinde, limit alma görevi gerçekleştirilirken analitik tekniğin tek başına kullanıldığı, tanımsızlık nesnesinin açıklanmadığı ve asimptot nesnesi açıklanmadığı halde asimptot doğrusundan yararlanıldığı görülmektedir. Bu durum $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *fonksiyonunun* $x \to 0$ *limitini alma* görevi için BY ders kitabında, AY ders kitabında karşılaşılan ekolojik boşlukların olduğunu göstermektedir.

5.1.2.5. *0/0 belirsizliğinin olduğu noktada limit alma*

Tablo 5.5'te $\dfrac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görev tipi için 3 farklı tekniğin kullanımına yönelik prakseolojik analizler verilmiştir.

Tablo 5.5. $\dfrac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma görev tipi için farklı tekniklerin kullanımına yönelik prakseolojik analizler*

Görev	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$ limitini alma.
Cebirsel Teknik	**1.Adım** $x=1$ için fonksiyonun belirsiz olduğunu belirlemek. **2.Adım** Çarpanlara ayırma işlemini ve sadeleştime yaparak belirsizliği kaldırmak. **3.Adım** $x=1$ değerini elde edilen fonksiyonda yerine yazarak limiti belirlemek.
Teknoloji	**1.Adım** $x=a$ için $f(a)=\dfrac{0}{0}$ oluyor ise $\dfrac{0}{0}=k$ eşitliğini sağlayan belirli bir $k \in R$ değeri bulunmadığı için $x=a$ fonksiyonun kritik noktasıdır. **2.Adım** $f(x)$ fonksiyonu $f(x)=\dfrac{P(x).Q(x)}{Q(x)}$ ($P(x)$ ve $Q(x)$ polinom fonksiyonlar) şeklinde çarpanlarına ayrılabiliyor olsun. Sadeleştirme işlemi sonucunda elde edilen $P(x)$ polinom fonksiyonu $\forall x \in R$ için oluşturulabilecek en az bir komşulukta $f(x)$ fonksiyonu ile aynı görüntü değerlerine sahip olur. Bu durumda $x \to a$ limit alma işlemi için $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} P(x)$ eşitliği elde edilir. **3.Adım** Polinom fonksiyonların kritik noktaları olmadığı için bu tür fonksiyonlarda limit değeri fonksiyonun görüntü değerine eşit olur ve $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$ bulunur.

Tablo 5.5. (Devam) $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma görev tipi için farklı tekniklerin kullanımına yönelik prakseolojik analizler*

Nümerik Teknik	**1.Adım** Fonksiyonun $x=1$ değeri için belirsiz olduğunu belirlemek **2.Adım** $x=1$'e sağından ve solundan sayısal değerler ile yaklaşmak **3.Adım** Fonksiyon altında elde edilen sayısal değerlere göre limit değerini belirlemek
Teknoloji	**1. Adım** $x=a$ için $f(a)=\frac{0}{0}$ oluyor ise $\frac{0}{0}=k$ eşitliğini sağlayan belirli bir $k \in R$ değeri bulunmadığı için $x=a$ fonksiyonun kritik noktasıdır. **2. Adım** Limit bir noktanın komşuluğunda tanımlı olduğundan o noktanın komşuluğunda sayısal değerlerin fonksiyon altındaki görüntülerinin hangi değere yaklaştığı incelenir. **3. Adım** Limit tanımı gereği $x=a$ noktasının komşuluğundaki sayısal değerleerin f altındaki görüntüleri aynı bir reel sayı değerine yaklaşıyor ise $x=a$ noktasında limit bu reel sayı değerine eşittir.
Analitik Teknik	**1.Adım** Grafik üzerinden $x=1$ noktasında fonksiyonun tanımlı olmadığını belirlemek **2.Adım** x ekseni üzerinde $x=1$ noktasına sağından ve solundan yaklaşmak **3.Adım** Grafikte elde edilen görüntü noktalarına göre limit değerini belirlemek
Teknoloji	**1. Adım** $x=a$ reel sayısı için grafik üzerinde $f(x)=y$ görüntüleri mevcut değil ise $x=a$ noktası tanımsızlık veya belirsizliğin olduğu bir noktadır. Dikey asimptotun olduğu noktada fonksiyon tanımsızdır. **2. Adım** Limit bir noktanın komşuluğunda tanımlı olduğundan o noktanın komşuluğundaki noktaların y eksenindeki görüntülerinin hangi noktaya yaklaştığı incelenir. **3. Adım** Limit tanımı gereği $x=a$ noktasının komşuluğundaki noktaların f altındaki görüntüleri y ekseni üzerindeki aynı bir reel sayı noktasına yaklaşıyor ise $x=a$ noktasında limit bu reel sayı değerine eşittir.

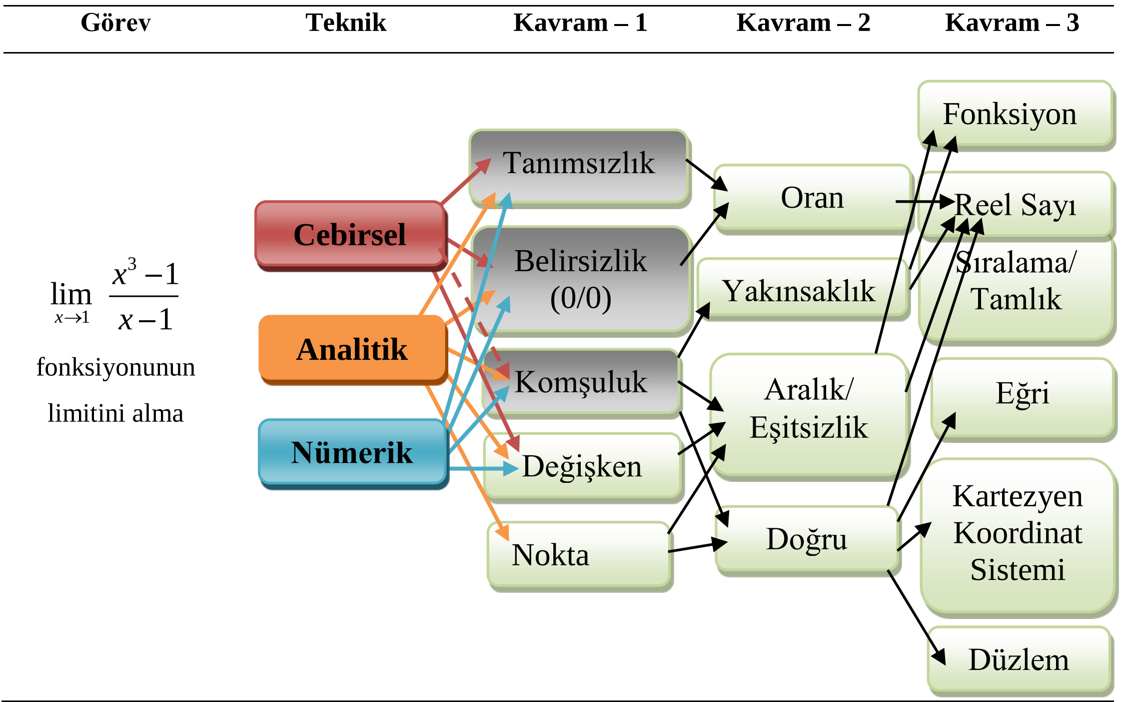
Tablo 5.5'te cebirsel ve nümerik teknik kullanılarak yapılan prakseolojik analizlerin teknoloji bölümü ilk adımlarında, $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki belirsizliği açıklanırken belirsizlik nesnesinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulmuştur. Buna göre belirsizlik $\frac{a}{b}$ biçiminde gösterilebildiği için oran nesnesi belirsizliğin ifade edilmesine ekolojik destek sağlayarak bu nesneyi beslemektedir.

Ayrıca, $\frac{0}{0}$ oranının bir reel sayıya eşit olmadığı belirtilirken reel sayı nesnesi oran nesnesinin anlamlandırılmasına katkı sağlayarak bu nesneyi beslemiştir. $x=1$ değerinin belirsizliğe bağlı olarak $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde yer almaması ise yukarıda açıklanan ekolojik ilişkilerin $x=1$ noktasındaki tanımsızlığın açıklanmasında da devreye gireceğini göstermektedir. Analitik tekniğin kullanımında ise bu ekolojik ilişkilerin yanı sıra nokta nesnesi ile olan ekolojik ilişki devreye girmektedir. Buna göre analitik teknik kullanılarak $f(x)$ fonksiyonunun belirsizliğe bağlı olarak $x=1$ için tanımsızlığı ifade edilirken fonksiyon grafiği üzerinde bu değere karşılık gelen nokta boş bırakılacağı için nokta nesnesine ihtiyaç duyulur.

Cebirsel tekniğin teknoloji bölümü ikinci adımında fonksiyon üzerinde sadeleştirme işlemi yapılmıştır. Bu adım fonksiyon çalışma alanıyla ilgili olup tez çalışmasının kapsamı dışındadır (Sadeleştirme işlemi yapılırken ortaya çıkan ekolojik ilişkilerin incelenebilmesi için Erdoğan (2006)'ın oluşturduğu cebirsel ve fonksiyonel sitten yararlanılabilir). $x=1$ için $f(x)$ fonksiyonunun tanımsız olmasına karşılık sadeleştirme sonucunda elde edilen $P(x)$ polinomunun reel sayılar kümesinde tanımlı olması daha önceki görevlerde de ortaya çıkan değişken, aralık/eşitsizlik, fonksiyon ve reel sayı nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiler yardımıyla açıklanır.

Tablo 5.5'te cebirsel teknik kullanılarak yapılan prakseolojik analizin teknoloji bölümü 2.adımına göre $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ işlemi, limiti alınan $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ fonksiyonunun sadeleştirilmesi sonucunda elde edilen $g(x)=x^2+x+1$ polinom fonksiyonu kullanılarak yapılan $\lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1$ işlemi ile aynı sonucu vermektedir. Cebirsel tekniğin komşuluk nesnesi ile örtük ekolojik ilişkisi, $g(x)$ fonksiyonunun limit almada nasıl referans alınabildiğinin anlaşılmasını güçleştirmektedir. Bu durumda cebirsel tekniğin ekolojik ilişkilerin güçlendirilebilmesi için bu tekniğin yardımcı bir teknik kullanılarak desteklenmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

Limit alma işleminin daimi ekolojik ilişkilerine de yer verilmesi ile birlikte cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik Şekil 5.24 lokal siti elde edilir.



Şekil 5.24. $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma görev tipi için cebirsel , analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Örnek 5.5.'te $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ fonksiyonunun $x\to 1$ limiti cebirsel ve analitik teknik bir arada kullanılarak belirlenmiştir.

Örnek 5.5. $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ fonksiyonunun $x\to 1$ limitini bulma.

Çözüm $x=1$ için $f(1)=\frac{0}{0}=a$ olsun. Eşitlikte içler dışlar çarpımı yapıldığında,

$$0=a.0 \tag{5. 15}$$

elde edilir. (5. 15) eşitliğini sağlayan belirli bir reel sayı bulunamayacağı için $f(x)$ fonksiyonu $x=1$ için belirsizdir. Bu durumda (varsa) limit değerinin bulunabilmesi için $x=1$ noktasındaki belirsizliğin kaldırılması gerekir. Belirsizliğin kaldırılması için x^3-1 ifadesi çarpanlarına ayrılıp sadeleştirme işlemi yapılırsa,

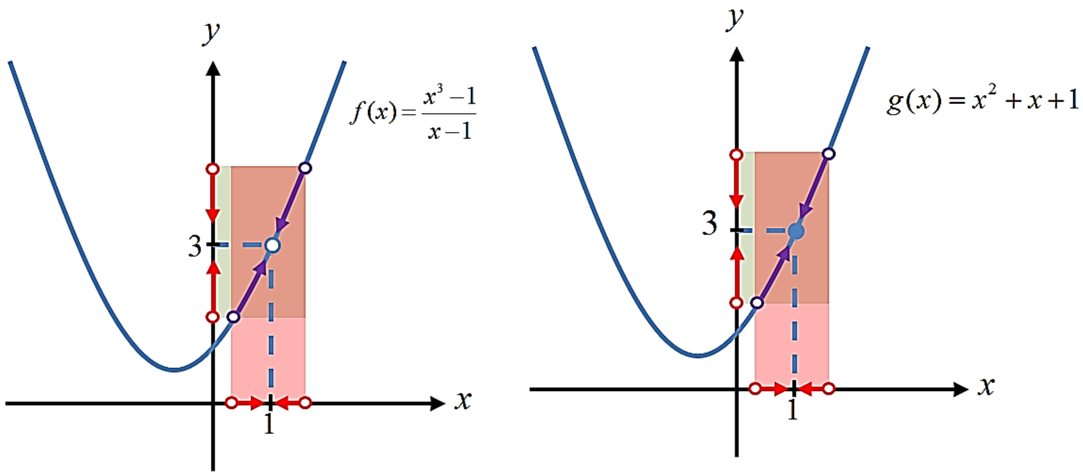
$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1 \tag{5. 16}$$

elde edilir. Elde edilen $g(x) = x^2 + x + 1$ polinom fonksiyonu $x = 1$ için tanımlı olduğundan limit değeri,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3 \tag{5. 17}$$

olarak bulunur.

Şekil 5.25'te cebirsel teknik kullanılarak yapılan limit alma işlemi, analitik teknik kullanılarak f ve g fonksiyonlarının grafikleri üzerinde incelenmiştir.



Şekil 5.25. $\lim_{x \to 1} f(x)$ *ile* $\lim_{x \to 1} g(x)$ *limitlerinin analitik teknik kullanılarak karşılaştırılması*

Şekil 5.25'te verilen grafikler incelendiğinde, komşuluk nesnesinin analitik teknik ile ekolojik ilişkine bağlı olarak, $f(x)$ fonksiyonunda yapılacak limit alma işlemi için $g(x)$ fonksiyonunun nasıl referans alınabileceği açık bir şekilde görülmektedir. Buna göre analitik tekniğin komşuluk nesnesi ile açık ekolojik ilişkisi, bu nesnenin yakınsaklık nesnesi ile ekolojik ilişkisinin devreye girmesini olanak sağlayarak, her iki fonksiyonda limit değerlerinin eşit olacağının görülmesine imkan tanımaktadır.

Analitik teknik $g(x)$ fonksiyonunun nasıl referans alınabileceğinin incelenmesinin yanı sıra komşuluk nesnesi ile belirsizlik nesnesi arasındaki ekolojik ilişkilerin değerlendirilmesine somut bir bakışaçısı kazandırarak $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu durumda limit alma işlemine kavramsal bir boyut kazandırmıştır.

5.1.2.5.1. ***Ders kitaplarında $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu noktada limit alma***

Tablo 5.5’te verilen prakseolojik analizin teknoloji bölümü incelendiğinde, limit alma işlemini belirsizlik nesnesinin yönlendirdiği görülür. Bunun nedeni, $\frac{0}{0}$ oranının belirsizlik ifade etmesine bağlı olarak $f(x)$ fonksiyonunun sadeleştirilip belirsizliğin kaldırılması sonucunda elde edilen $P(x)$ polinom fonksiyonunu üzerinden limit alma işleminin yapılıyor olmasıdır. Tablo 5.5’te yapılan prakseolojik analizin teknoloji bölümü 1. adımlarında, belirsizliğin limit alma işlemine nasıl etki ettiğinin değerlendirilebilmesi için öncelikle bu nesnesinin açıklanmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu durum dikkate alınarak, $\frac{0}{0}$ *belirsizliğin olduğu noktada limit alma* görev tipine ilişkin bölümlerin incelenmesine geçilmeden önce, öğretim programı ve ders kitaplarında $\frac{0}{0}$ belirsizliğine nerede ve nasıl yer verildiği araştırılmıştır.

$\frac{0}{0}$ belirsizliği limit alma işlemi yapılırken karşılaşılan özel bir durumdur. Ayrıca bu belirsizliğin fonksiyonun $x=0$ noktasında görüntüsü olmamasına bağlı olarak ortaya çıktığı değerlendirildiğinde, öğretim programında belirsizlik kavramının açıklanması için uygun olabilecek konuların *fonksiyonlar* ve *limit* olduğu söylenebilir. Öğretim programında 9. 10. ve 11. sınıf düzeyinde yer alan fonksiyonlar konusuna ilişkin kazanımlar ve yönergeler incelendiğinde $\frac{0}{0}$ belirsizliğine yönelik bir açıklamaya yer verilmediği görülmüştür. Öğretim programının tamamı incelendiğinde de benzer bir durumla karşılaşılmıştır. 12. sınıf düzeyinde limit alma işleminde belirsizlik durumlarına yer verildiği halde programda bu kavramın açıklanmasına yönelik bir ifadeye rastlanmamıştır. 9, 10 ve 11. sınıflarda okutulan ders kitaplarının fonksiyonlar konusuna yönelik alt başlıkları incelendiğinde, öğretim programına paralel bir şekilde, $\frac{0}{0}$ belirsizliğine yönelik herhangi bir açıklamaya yer verilmediği görülmüştür.

AY 12. sınıf matematik ders kitabında $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görev tipine *Belirsizlik* başlığı altında yer verildiği görülmüştür. Bu başlık altında ilk olarak $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu durumda limit alma işleminin nasıl yapıldığının açıklandığı bir bölüm yer almaktadır.

$\frac{0}{0}$ Belirsizliği

$y = f(x)$ ve $y = g(x)$ birer fonksiyon, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 0$ ve $\lim_{x \to a} g(x) = g(a) = 0$ olmak üzere $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ifadesinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Bu belirsizliği gidermenin bir yolu aşağıdaki gibidir.

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $(x - a)$ çarpanına sahip ise $f(x) = (x - a)f_1(x)$ ve $g(x) = (x - a)g_1(x)$ yazılabilir.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)g_1(x)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \text{ elde edilir.}$$

Eğer $\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ ifadesinde tekrar $\frac{0}{0}$ belirsizliği oluşursa benzer işlemler tekrarlanır.

Şekil 5.26. $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma işleminin açıklandığı bölüm*

(AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.34)

Şekil 5.26 incelendiğinde, yapılan açıklamaların $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görev tipi için Tablo 5.5’te yapılan prakseolojik analizin teknik boyutunda kaldığı, cebirsel tekniğin teknolojilerine yer verilmediği görülmektedir. Örneğin $x = a$ değeri için $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifadesinde $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu belirtildiği halde $\frac{0}{0}$’ın neden belirsizlik ifade ettiği açıklanmamıştır. Benzer şekilde $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifadesinin sadeleştirilmesi sonucunda belirsizliğin kalkacağı belirtildiği halde $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ ifadesinin $x \to a$ limit alma işlemi yapılırken nasıl referans alınabileceği açıklanmamıştır. Bu durum, Şekil 5.26’da yapılan açıklamaların limit alma işleminin nasıl yapıldığına yönelik bilgi veriyor olmasına karşılık, limit alma işlemi yapılırken atılan adımların gerekçelerinin açıklanmasında yetersiz kaldığını göstermektedir. $\frac{0}{0}$ 'ın neden belirsizlik ifade ettiğinin açıklanmasında belirsizlik nesnesinin Şekil 5.24'te verilen ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulmaktadır. $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ ifadesinin $x \to a$ limit alma işlemi yapılırken nasıl referans alınabileceğinin gösterilebilmesi için cebirsel tekniğin komşuluk nesnesi ile örtük ekolojik ilişkisinin yardımcı bir teknik kullanılarak desteklenmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

AY 12. sınıf matematik ders kitabında Şekil 5.26'da yapılan açıklamanın ardından örneklere geçilmiştir. Ders kitabında $\frac{0}{0}$ *belirsizliğin olduğu noktada limit alma* görev tipi ile ilgili cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı 4 tane örneğin yer aldığı görülmüştür. Bu örneklerden ilki Şekil 5.27'de verilmiştir.

Örnek

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \frac{(-1)^3+1}{-1+1} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Buna göre

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}$$

$$= \lim_{x \to -1} (x^2-x+1)$$

$$= (-1)^2 + 1 + 1 = 3 \text{ elde edilir.}$$

Şekil 5.27. $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma görev tipi için cebirsel tekniğin kullanıldığı bir örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.34)*

Şekil 5.27 incelendiğinde, Şekil 5.26'da karşılaşılan ekolojik sorunların örneğin çözümünde tekrarlandığı görülmektedir. Çözümde belirsizliğin nedenine yönelik bir açıklama yer almamaktadır. Ayrıca, cebirsel teknik yardımcı bir teknik kullanılarak desteklenmediği için $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$ işlemi yapılırken $\frac{x^3+1}{x+1}$ cebirsel ifadesinin sadeleştirilmesi sonucunda elde edilen $\lim\limits_{x \to -1} x^2 - x + 1$ işleminin nasıl referans alındığına ilişkin ekolojik boşluğun ortaya çıktığı görülmektedir.

BY 12. sınıf matematik ders kitabı incelendiğinde, $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görev tipine *Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Limiti* başlığı altında limitin özellikleri arasında yer verildiği görülmüştür. Bu bölümde görev tipine yönelik bir örneğin ardından $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görevi bir özellik olarak açıklanmış ve sonrasında aynı görev tipine yönelik 2 örneğe daha yer verilmiştir. İlk ve son örnekte cebirsel ve analitik teknik bir arada kullanılırken, ikinci örnekte yalnızca cebirsel tekniğin kullanıldığı görülmüştür. Cebirsel ve analitik tekniğin bir arada kullanıldığı ilk örnek Şekil 5.28'de verilmiştir.

Örnek

$f: \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ tür. Buradan paydayı sıfır yapan değer 3 olduğundan $x = 3$ noktası kritik noktadır.

$x \neq 3$ için $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \dfrac{\cancel{(x-3)} \cdot (x+3)}{\cancel{(x-3)}} = x + 3$ tür.

Buna göre $f(x)$ in grafiği (3,6) noktası dışında $y = x + 3$ doğrusunun grafiği ile aynı değeri alır.

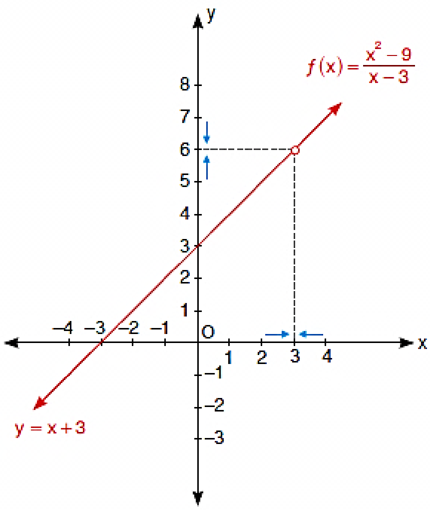
Yandaki grafikte görüldüğü gibi x değişkeni 3 e soldan ve sağdan yaklaştığında $f(x)$ değeri de 6 ya yaklaşmaktadır. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında soldan ve sağdan limitlerini bulalım.

$\lim\limits_{x \to 3^-} \left(\dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = \lim\limits_{x \to 3^+} \left(\dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = 6$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ olur.

Ya da

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$ olarak da bulunabilir.



Şekil 5.28. $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma görev tipine yönelik bir örnek ve özellik (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.19-20)*

Özellik

$a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{(x-a)}} = \lim_{x \to a}(x+a) = a + a = 2a$ dır.

Şekil 5.28. (Devam) $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma görev tipine yönelik bir örnek ve özellik (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.19-20)*

Şekil 5.28 incelendiğinde, BY matematik ders kitabında da olduğu, belirsizlik kavramının açıklanmadığı görülmektedir. Buna karşılık, örneğin çözümünde cebirsel teknik kullanılarak yapılan limit alma işlemi fonksiyon grafiği üzerinde analitik teknik kullanılarak desteklenmiştir. Ayrıca, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ fonksiyonunun $y = x + 3$ doğrusunun grafiğinin $(3, 6)$ noktası dışında aynı olduğu ifade edilmiştir. Çizilen fonksiyon grafiği ve yapılan açıklama komşuluk nesnesinin Şekil 5.24 lokal sitinde verilen ekolojik ilişkilerinin pekiştirilmesini sağlayarak, limit alma işleminde $y = x + 3$ doğru denkleminden yararlanılabileceğinin anlaşılmasına imkan tanımaktadır. Öte yandan Şekil 5.28'de $y = x + 3$ doğrusu ile $f(x)$ fonksiyonu grafiğinin tek grafik olarak çizildiği görülmektedir. Bu durum $f(x)$ fonksiyonu için Şekil 5.24'te verilen lokal sitin belirsizlik ve tanımsızlık nesnelerinin ekolojik ilişkilerinin hatalı yorumlanmasına neden olarak $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ fonksiyonu ile $y = x + 3$ doğru denkleminin eşit olduğu algısını oluşturmaktadır. Buna göre belirsizlik, oran ve reel sayı nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiler gereği $f(x)$ fonksiyonu $x = 3$ noktasında tanımsız olduğu halde fonksiyonun $y = x + 3$ doğru ile aynı grafiğe sahip olması, bu noktada tanımlı olduğu algısını oluşturmaktadır. Bu algının önüne geçilebilmesinde Şekil 5.25'te olduğu gibi iki farklı grafik üzerinde limit alma işlemi yapılmasının faydalı olacağı görülmektedir.

Şekil 5.28'de örneğin çözümünün ardından verilen özellikte $\frac{0}{0}$ belirsizliği kaldırılıp limit değerinin nasıl bulunabileceği ifade edilmiştir. Bu ifade, örneğin çözümünde atılan adımların sadece belirli bir görev için değil, $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görev tipi için genellenebileceğini göstermektedir.

5.1.2.6. *Sıkıştırma (sandviç) teoremi yardımıyla limit alma*

Çalışmada öğretim programının kazanımları da dikkate alınarak,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{5. 18}$$

limitinin belirlenmesinde sıkıştırma teoreminden yararlanılmıştır. Sıkıştırma teoremi $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu durumlarda $\frac{\sin f(x)}{\sin g(x)}$, $\frac{\tan f(x)}{\tan g(x)}$, $\frac{\sin f(x)}{\tan g(x)}$ gibi fonksiyonların limitlerinin belirlenmesinde kullanılabildiği gibi trigonometrik olmayan farklı türden fonksiyonların limitlerinin belirlenmesinde de kullanılabilmektedir. Bu nedenle (5. 18) limit alma görevinin genel görev tipi *sıkıştırma (sandviç) teoremi yardımıyla limit alma* olarak belirlenmiştir.

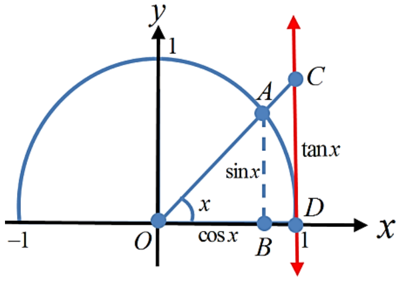
Tablo 5.6'da *sıkıştırma teoremi yardımıyla limit alma* görev tipi için cebirsel tekniğin kullanımına yönelik prakseolojik analiz yapılmıştır.

Tablo 5.6. *Sıkıştırma teoremi yardımıyla limit alma görev tipi için cebirsel tekniğin kullanımına yönelik prakseolojik analiz*

Görev	Sıkıştırma teoremi yardımıyla $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ limitini alma.
Cebirsel Teknik	**1.Adım** $x = 0$ için fonksiyonun belirsiz olduğunu belirlemek. **2.Adım** Limit hesabı için $f(x) = \cos x$ ve $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ fonksiyonlarını referans fonksiyonlar olarak belirlemek. **3.Adım** Referans fonksiyonlar yardımıyla limit değerini bulmak.
Teknoloji	**1.Adım** $x = a$ için $f(a) = \frac{0}{0}$ oluyor ise $\frac{0}{0} = k$ eşitliğini sağlayan belirli bir $k \in R$ değeri bulunmadığı için $x = a$ fonksiyonun kritik noktasıdır.

Tablo 5.6. (Devam) *Sıkıştırma teoremi yardımıyla limit alma görev tipi için cebirsel tekniğin kullanımına yönelik prakseolojik analiz*

2.Adım



$[AB]\perp[OB]$
$[CD]\perp[OD]$
$|OB|=\cos x$
$|AB|=\sin x$
$|CD|=\tan x$

Yukarıdaki birim çembere göre $A\left(\overset{\Delta}{OAB}\right)\prec A\left(\overset{\frown}{OAD}\right)\prec A\left(\overset{\Delta}{OCD}\right)$ olup,

$$\frac{\sin x.\cos x}{2}\prec\frac{x}{2}\prec\frac{\tan x}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizlik $\sin x$ 'e bölünüp pay ve paydalar yer değiştirildiğinde,

$$\cos x\prec\frac{\sin x}{x}\prec\frac{1}{\cos x}$$

elde edilir. $x=0$ için eşitsizliğin sol ve sağ tarafları birbirine eşit olacağı için

$y=\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $y=\cos x$ ve $y=\dfrac{1}{\cos x}$ fonksiyonu arasında sıkışır. Bu

durum $x\to 0$ limit işlemi yapılırken $y=\cos x$, $y=\dfrac{1}{\cos x}$ fonksiyonlarının referans

alınabileceğini gösterir ve

$$\lim_{x\to 0}\cos x\le\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\le\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

eşitsizliği oluşturulur.

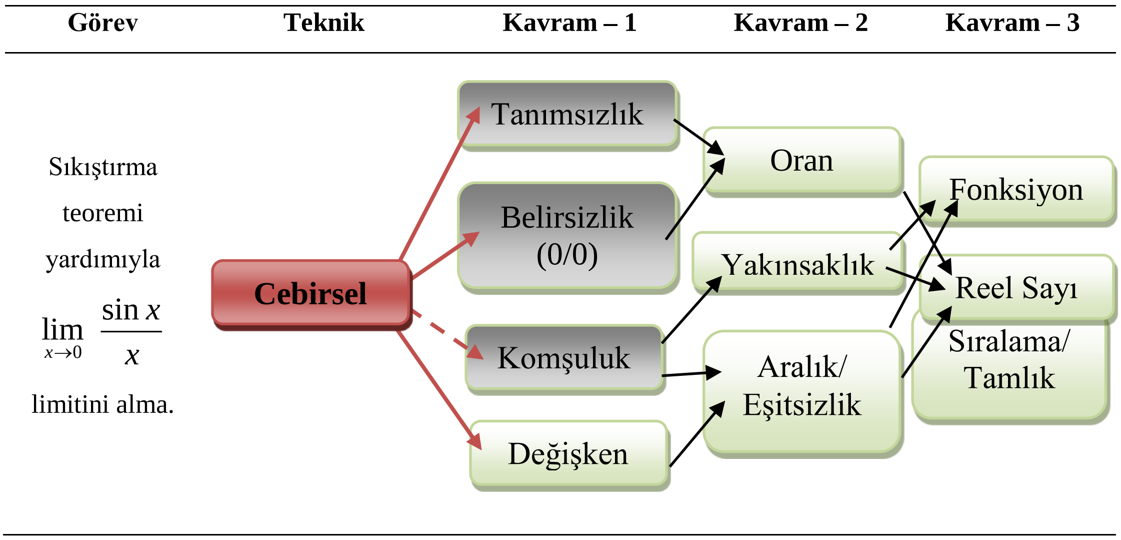
3.Adım Referans fonksiyonlarda limit alma işlemleri sonucunda elde edilen

$1\le\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\le 1$ eşitsizliğine göre $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ olarak bulunur.

Tablo 5.6'da verilen prakseolojik analizin teknoloji bölümü ilk adımı $x=0$ için $y=\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunda $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğinin nasıl ortaya çıktığını açıklamaktadır. Bu ekolojik ilişkiler daha önce $\dfrac{0}{0}$ *belirsizliği olduğu noktada limit alma* görevi için açıklanmıştır (Bkz. Tablo 5.5) Teknoloji bölümünün ikinci adımında, birim çemberde alan hesabının ardından cebirsel işlemler yapılarak $\cos x\prec\dfrac{\sin x}{x}\prec\dfrac{1}{\cos x}$ eşitsizliği elde edilmiş ve $x = 0$ için $y = \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun diğer iki fonksiyon arasında sıkıştığı belirlenmiştir. İkinci adımda bu aşamaya kadar yapılan işlemler cebir ve fonksiyonlar çalışma alanı ile ilgili nesneler arasındaki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak açıklanabilir. (Çalışmanın kapsamı dışına çıkılmaması için burada bu ekolojik ilişkilere değinilmemiştir.) $\cos x \prec \frac{\sin x}{x} \prec \frac{1}{\cos x}$ eşitsizliğindeki $y = \cos x$ ve $y = \frac{1}{\cos x}$ fonksiyonlarına $x \to 0$ limit alma işlemi yapılarak $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ eşitliği elde edilmiştir. $x = 0$, her iki fonksiyonun da kritik noktası olmadığı için limit değerleri $x = 0$ değeri fonksiyonlarda yerine yazılarak belirlenmiştir. Bu aşamada polinom fonksiyonlarda limit alma işlemi gerçekleştirilirken devreye giren cebirsel tekniğin daimi ekolojik ilişkilerinden yararlanılmıştır.

Prakseolojik analizin teknoloji bölümü son adımında, $1 \leq \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$ eşitsizliğine göre $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ limit işleminin sonucu belirlenmiştir. Bu aşamada $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ eşitliği, değişken nesnesi ile aralık/eşitsizlik nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak belirlenmiştir. Analiz çalışma alanı kapsamına giren ekolojik ilişkiler bir bütün olarak değerlendirildiğinde, gerçekleştirilen görevde sıkıştırma teoreminin $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu durumda kullanılmasına bağlı olarak, $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görev tipi için ortaya çıkan ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulduğu söylenebilir.

Şekil 5.29'da *sıkıştırma teoremi yardımıyla* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ *limitini alma* görevi için cebirsel tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir Ardından, sırasıyla analitik teknik ve nümerik tekniğin kullanımına bağlı olarak devreye giren ekolojik ilişkiler değerlendirilmiştir. Elde edilen verilerden yararlanılarak analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit elde edilmiştir. Sonrasında, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ limiti sıkıştırma teoremi yardımıyla analitik teknik kullanılarak belirlenmiştir.



Şekil 5.29. *Sıkıştırma teoremi yardımıyla* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ *limitini alma görevi için cebirsel tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Analitik tekniğin kullanımında $y = \cos x$, $y = \frac{\sin x}{x}$ ve $y = \frac{1}{\cos x}$ fonksiyonlarının analitik düzlemde çizilen grafiklerinden yararlanılarak,

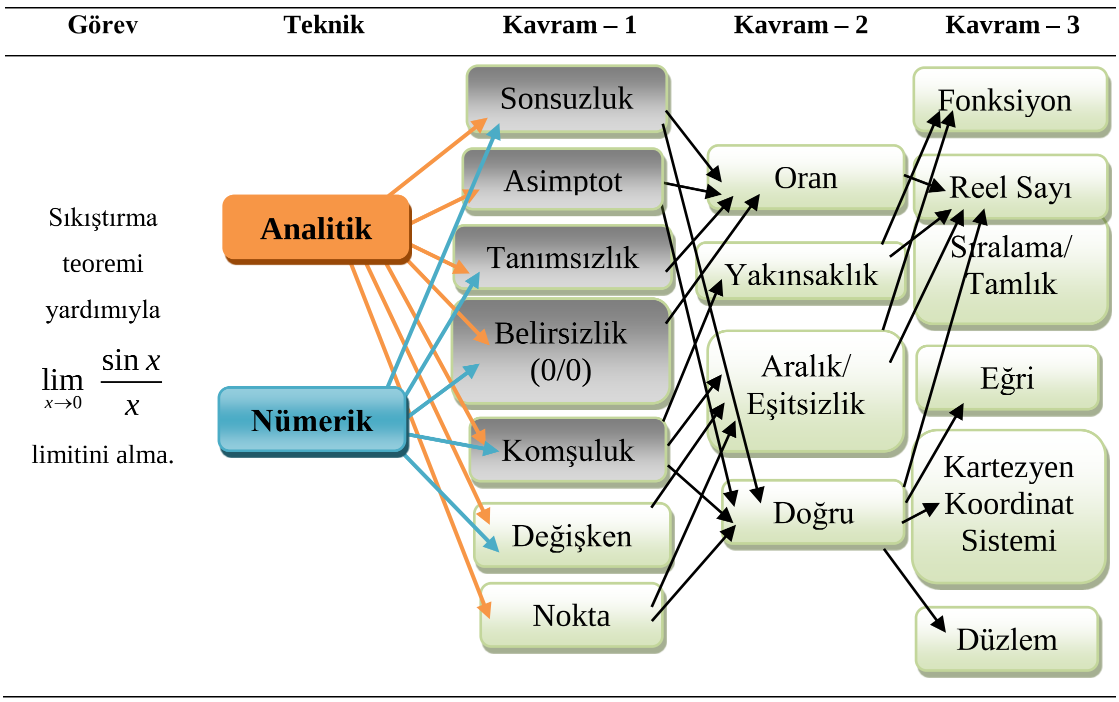
$$\lim_{x \to 0} \cos x \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \tag{5. 19}$$

eşitsizliğinin nasıl ortaya çıktığı belirlenir. $f(x) = \cos x$ fonksiyonunda tanımsızlık veya belirsizliğin olduğu nokta bulunmadığı için bu fonksiyonun grafiği çizilirken *polinom fonksiyonlarda limit alma* görev tipi için analitik tekniğin kullanımıma bağlı olarak ortaya çıkan Şekil 5.1 lokal sitindeki ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur. $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ fonksiyonunun grafiği çizilirken fonksiyonda tanımsızlığın olduğu noktalar bulunduğu için tanımsızlık, asimptot ve sonsuzluk nesnelerinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılır. $y = \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında belirsiz ve tanımsız olduğundan bu fonksiyonun grafiği çizilirken belirsizlik ve tanımsızlık nesnelerinin ekolojik ilişkileri devreye girer.

Nümerik tekniğin kullanımında $x \to 0$ fonksiyonlardan elde edilen görüntü değerlerine göre $\lim_{x \to 0} \cos x \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$ eşitsizliğinin sağlandığı belirlenir.

$y = \dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında belirsiz ve tanımsız olduğundan belirsizlik ve tanımsızlık nesnelerinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur.

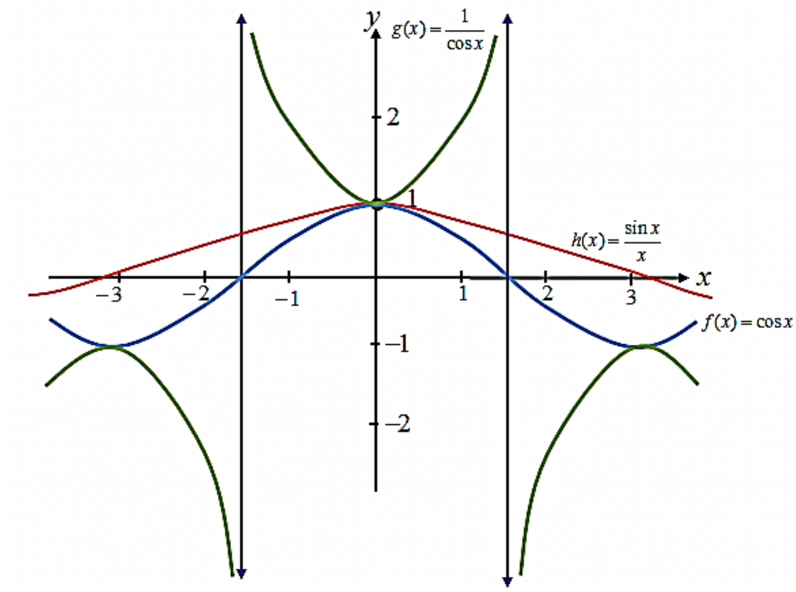
Şekil 5.30'da *sıkıştırma teoremi yardımıyla* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ *limitini alma* görevi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir.



Şekil 5.30. *Sıkıştırma teoremi yardımıyla* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ *limitini alma görevi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

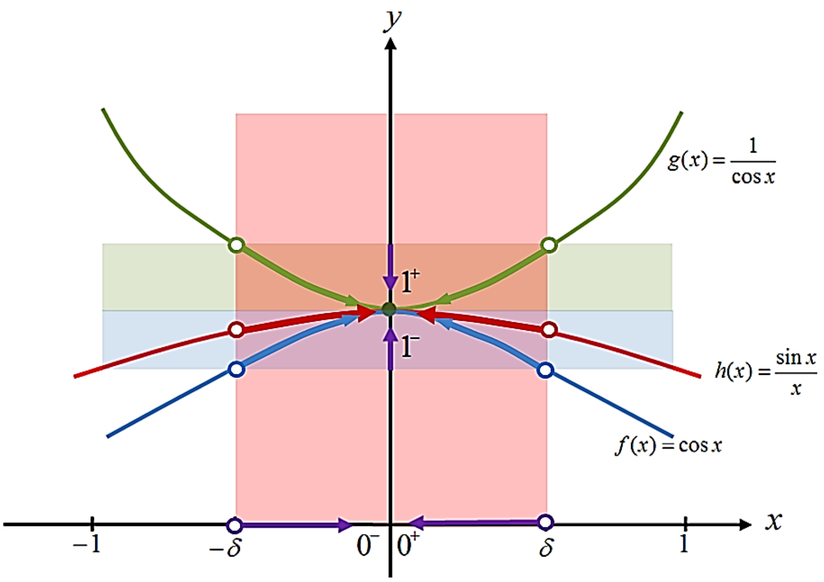
Şekil 5.30 incelendiğinde, analitik tekniğin cebirsel teknikten farklı olarak kritik nesnelerden sonsuzluk ve asimptot nesnesi ile ekolojik bağ kurduğu görülmektedir. Bu durum, sıkıştırma teoremi yardımıyla limit alma işlemi yapılırken analitik tekniğin kullanımına bağlı olarak daha zengin ekolojik ilişkilerin ortaya çıkacağına işaret etmektedir.

Şekil 5.31'de $f(x) = \cos x$, $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ve $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir. Ardından, Şekil 5.31'deki grafiğin kesiti üzerinde sıkıştırma teoremi yardımıyla analitik teknik kullanılarak $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ limiti belirlenmiştir.



Şekil 5.31. $f(x)=\cos x$, $h(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ *ve* $g(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ *fonksiyonlarının grafikleri*

Şekil 5.31'de $x=0$ noktasında h fonksiyon grafiğinin f ve g fonksiyonlarının grafikleri arasında sıkıştığı görülmektedir. Bu durumun $x \to 0$ limit işlemine nasıl yansıdığı, Şekil 5.32'de grafiklerin kesitleri üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 5.32. *Sıkıştırma teoremi yardımıyla, analitik teknik kullanılarak* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ *limitinin bulunması*

Şekil 5.31 incelendiğinde sadece $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ fonksiyon grafiğinin f ve g grafikleri arasında kaldığı görülmektedir. Şekil 5.32 incelendiğinde ise $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ limitinin belirlenmesinde f ve g fonksiyonlarının referans fonksiyonlar olabilmeleri için $0\in(-\delta,\ \delta)$ olacak şekilde en az bir aralıktaki bütün x değerleri için $f(x)\le h(x)\le g(x)$ eşitsizliğinin sağlanmasının yeterli olduğu görülür. Bu durumda $(-\delta,\ \delta)$ aralığında $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun değerleri diğer iki fonksiyonun değerleri arasında kalmakta ve aynı aralıktaki tüm x_0 değerleri için $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} h(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Buna göre, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x=\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}=1$ olduğu için $1\le \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\le 1$ eşitsizliği elde edilip limit işleminin sonucu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ olarak bulunur. Ortaya çıkan ekolojik ilişkiler değerlendirildiğinde, analitik tekniğin komşuluk nesnesi ile aralık eşitsizlik nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerinin grafik üzerinde incelenmesine olanak sağlayarak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} h(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ eşitsizliğinin oluşturulmasına somut bir yaklaşım getirdiği söylenebilir.

5.1.2.6.1. *Ders kitaplarında sıkıştırma teoremi*

AY ders kitabı incelendiğinde sıkıştırma teoremine $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görev tipine yönelik örneklerin ardından yer verildiği görülmüştür. Ders kitabında sıkıştırma teoremi ile ilişkili 3 tane örneğe yer verildiği belirlenmiştir. Bu örneklerden birincisinde Tablo 5.6'da olduğu gibi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ limitinin sıkıştırma teoremi yardımıyla nasıl alınabileceği cebirsel teknik kullanılarak açıklanmıştır. Diğer 2 örnekte ise $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ limit işleminin sonucundan hareketle referans fonksiyonlardan yararlanılmadan,

$$f(a)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{m\,f(x)}{\sin n\,f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\sin m\,f(x)}{n\,f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\tan m\,f(x)}{n\,f(x)}=\frac{m}{n} \quad (m,\ n\in R) \quad (5.\ 20)$$

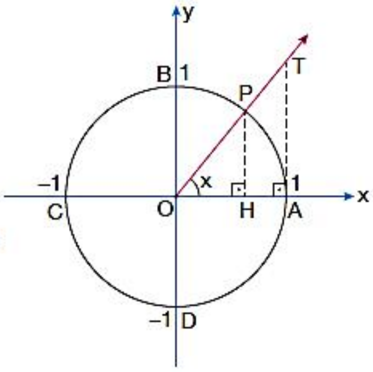
özelliği kullanılarak limit alma işlemlerinin yapıldığı görülmüştür.

Şekil 5.33’te referans fonksiyonlardan yararlanılarak limit alma işleminin yapıldığı ilk örneğe yer verilmiştir.

Örnek

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



Yandaki birim çemberde $m(\widehat{AOP}) = x$ olsun.

Buna göre $|\widehat{PA}| = x$, $|PH| = \sin x$ ve $|TA| = \tan x$ tir.

Dolayısıyla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için $|PH| < |\widehat{PA}| < |TA|$ eşitsizliği vardır.

$|PH| < |\widehat{PA}| < |TA| \Rightarrow \sin x < x < \tan x$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \quad \left(\forall x \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) \text{ için } \sin x > 0 \text{ olduğundan}\right)$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ elde edilir.}$$

Bu eşitsizlikte her üç tarafın $x \to 0$ için limiti alınırsa $\left(\lim\limits_{x \to 0^-} \cos x = \lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1 \text{ ve } \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \text{ olduğundan}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \cos x \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to 0} 1 \Rightarrow 1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla sıkıştırma teoremine göre $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olur. Bu eşitlikten yararlanarak

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ elde edilir.}$$

Şekil 5.33. *Sıkıştırma teoremi yardımıyla limit alma görev tipi için cebirsel tekniğin kullanıldığı bir örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.37)*

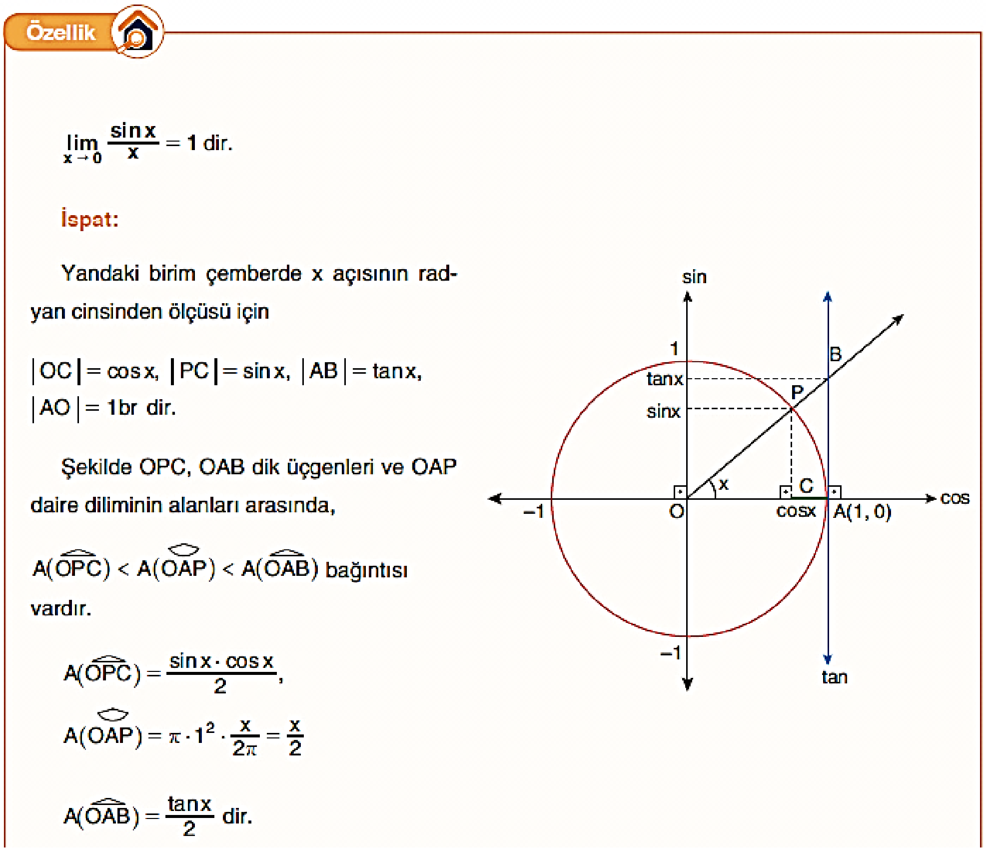
Şekil 5.33’te verilen örneğin çözümünde cebirsel tekniğin komşuluk nesnesi ile örtük ekolojik ilişkisinin,

$$\lim_{x\to 0} \cos x \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \tag{5. 21}$$

eşitsizliğinin ortaya çıkış nedeninin açıklanmasını engellediği görülmektedir. Bu ekolojik sorunun ortadan kaldırılmasında cebirsel tekniğin, komşuluk nesnesi ile açık ekolojik ilişkisi olan, analitik veya nümerik teknik kullanılarak desteklenmesinin etkili olacağı söylenebilir.

BY ders kitabı incelendiğinde sıkıştırma teoremine limit konusuna yönelik son özellikte yer verildiği görülmüştür. Bu bölümde $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ limiti sıkıştırma teoremi yardımıyla alınmıştır. Ardından yapılan limit alma işlemi $y = \dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun grafiği yardımıyla analitik teknik kullanılarak desteklenmiştir.

Şekil 5.34'te BY ders kitabında yer alan örnek ve çizilen fonksiyon grafiği verilmiştir.



Özellik

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ dir.

İspat:

Yandaki birim çemberde x açısının radyan cinsinden ölçüsü için

$|OC| = \cos x$, $|PC| = \sin x$, $|AB| = \tan x$, $|AO| = 1$br dir.

Şekilde OPC, OAB dik üçgenleri ve OAP daire diliminin alanları arasında,

$A(\widehat{OPC}) < A(\overset{\frown}{OAP}) < A(\widehat{OAB})$ bağıntısı vardır.

$A(\widehat{OPC}) = \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{2}$,

$A(\overset{\frown}{OAP}) = \pi \cdot 1^2 \cdot \dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{x}{2}$

$A(\widehat{OAB}) = \dfrac{\tan x}{2}$ dir.

Şekil 5.34. *Sıkıştırma teoremi yardımıyla limit alma görev tipi için cebirsel tekniğin analitik teknik ile desteklendiği bir örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.24-25)*

Buradan $\dfrac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\tan x}{2}$ elde edilir.

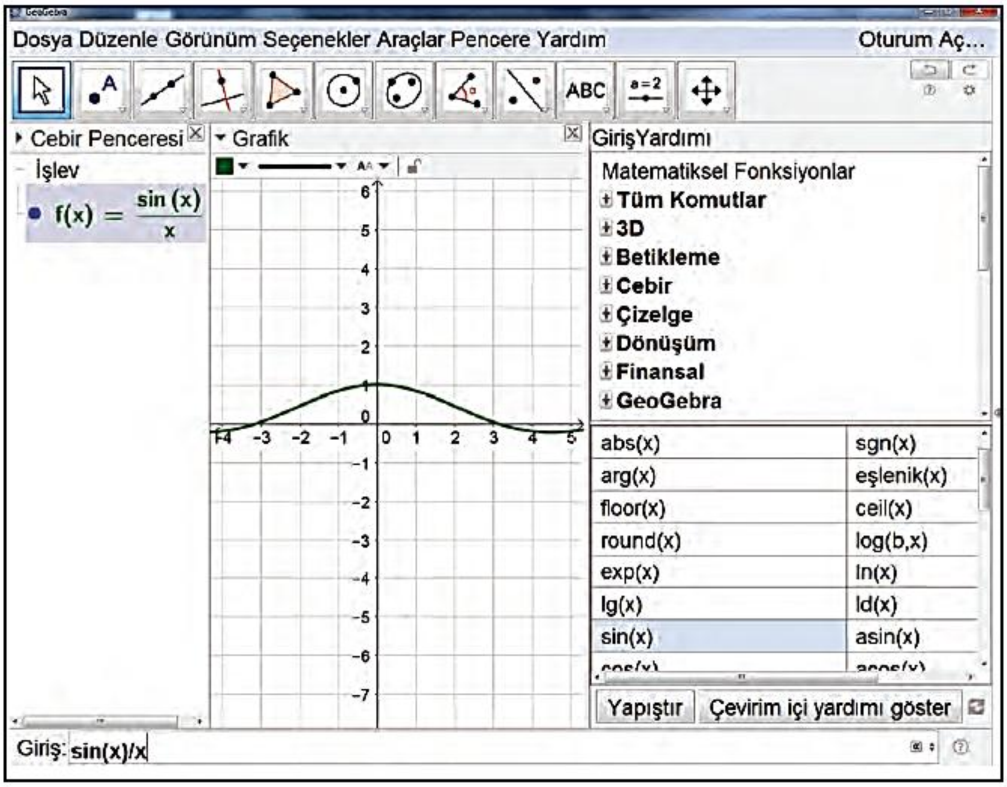
$\sin x \cdot \cos x < x < \tan x$ eşitsizliğinin her iki tarafını $\sin x$ ile bölelim ($\sin x > 0$ olduğuna dikkat edelim.).

$\cos x < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ veya

$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}$ bulunur. Buradan,

$$\lim_{x \to 0} \cos x \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$1 \leq \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ dolayısıyla $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ bulunur.



Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi x değeri sıfıra sağdan ve soldan yaklaşan değerler aldığında $f(x)$ değeri 1 e yaklaşmaktadır. Buradan $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olduğu görülür.

Şekil 5.34. (Devam) *Sıkıştırma teoremi yardımıyla limit alma görev tipi için cebirsel tekniğin analitik teknik ile desteklendiği bir örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.24-25)*

Şekil 5.34 incelediğinde $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ limitinin sıkıştırma teoremi yardımıyla nasıl alınabileceğinin cebirsel teknik kullanılarak AY ders kitabına benzer bir şekilde açıklandığı görülmektedir. Örneğin çözümünde geometri yazılım pogramı kullanılarak çizilen $y=\frac{\sin x}{x}$ fonksiyonun grafiği incelendiğinde $x\to 0$ limit işleminin sonucunun 1 değerine eşit olduğu görülmektedir. Fakat $f(x)=\cos x$ ve $g(x)=\frac{1}{\cos x}$ fonksiyonlarının grafiklerine yer verilmediği için bu fonksiyonların limit alma işleminde nasıl referans alındığı analitik düzlemde incelenememektedir. (5. 21) eşitsizliğinin ortaya çıkış nedeninin açıklanmasında analitik tekniğin komşuluk nesnesi ile olan ekolojik ilişkisinden yararlanılabilmesi için analitik düzlemde çizilen 3 fonksiyonun grafiği üzerinde $x\to 0$ limit incelemesi yapılmasına ihtiyaç duyulmaktadır

5.1.2.7. ∞/∞ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma*

Tablo 5.7'de $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma* görev tipi için cebirsel tekniğin kullanımına yönelik prakseolojik analiz yapılmıştır.

Tablo 5.7. $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma görev tipi için cebirsel tekniğin kullanımına yönelik prakseolojik analiz*

Görev	$f(x)=\frac{2x^3+x^2-x}{x^3+1}$ fonksiyonunun $x\to\infty$ limitini alma.
Cebirsel Teknik	**1.Adım** $x\to\infty$ için belirsizliği belirlemek. **2.Adım** $f(x)$ fonksiyonunun payında ve paydasında bulunan en büyük kuvvete sahip terimleri belirleyip diğer terimleri limit hesabından çıkarmak. **3.Adım** Elde edilen $y=\frac{2x^3}{x^3}$ fonksiyonunda sadeleştirme yapılıp belirsizlik kaldırılarak limit değerini $\lim_{x\to\infty} 2=2$ olarak belirlemek.

Tablo 5.7. (Devam) $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma görev tipi için cebirsel tekniğin kullanımına yönelik prakseolojik analiz*

Teknoloji

1.Adım $f(x)=\dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0}$ $(m,\ n\in N)$ fonksiyonunda x yerine ∞ veya $-\infty$ yazıldığında $\frac{\infty}{\infty}$ veya $-\frac{\infty}{\infty}$ elde edilir. $\pm\frac{\infty}{\infty}=k$ eşitliğini sağlayan belirli bir $k\in R$ bulunmadığı için $x\to\infty$ fonksiyonda belirsizlik vardır.

2.Adım f fonksiyonunun payı ve paydası en büyük kuvvete sahip terimlerine göre

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^m\left(a_m+a_{m-1}\frac{1}{x}+a_{m-2}\frac{1}{x^2}+...+a_0\frac{1}{x^m}\right)}{x^n\left(b_n+b_{n-1}\frac{1}{x}+b_{n-2}\frac{1}{x^2}+...+b_0\frac{1}{x^n}\right)}$$

şeklinde paranteze alındığında, $x\to\pm\infty$ parantez içindeki sabit terimler dışındaki bütün terimler sıfır sayısına yakınsadığı için $x\to\pm\infty$ limit işlemi yapılırken bu terimler ihmal edilebilir.

3.Adım $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_m x^m}{b_n x^n}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Buna göre;

- $m\succ n$ ise sadeleştirme işlemi yapılarak belirsizlik şu şekilde kaldırılır:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m}{b_n x^n}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^n.x^{m-n}}{b_n x^n}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$$

$m-n$ çift ise $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_m}{b_n}x^{m-n}=\dfrac{a_m}{b_n}.(\pm\infty)^{m-n}=+\infty$,

$m-n$ tek ise $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_m}{b_n}x^{m-n}=\dfrac{a_m}{b_n}.(\pm\infty)^{m-n}=\pm\infty$ elde edilir.

- $m=n$ ise sadeleştirme işlemi yapılarak belirsizlik kaldırıldığında limit işleminin sonucu,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m}{b_n x^n}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^n}{b_n x^n}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m}{b_n}=\frac{a_m}{b_n}$$

olarak bulunur.

- $m\prec n$ ise sadeleştirme işlemi yapılarak belirsizlik kaldırıldığında limit işleminin sonucu,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m}{b_n x^n}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m}{b_n x^m x^{n-m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m}{b_n x^{n-m}}=0$$

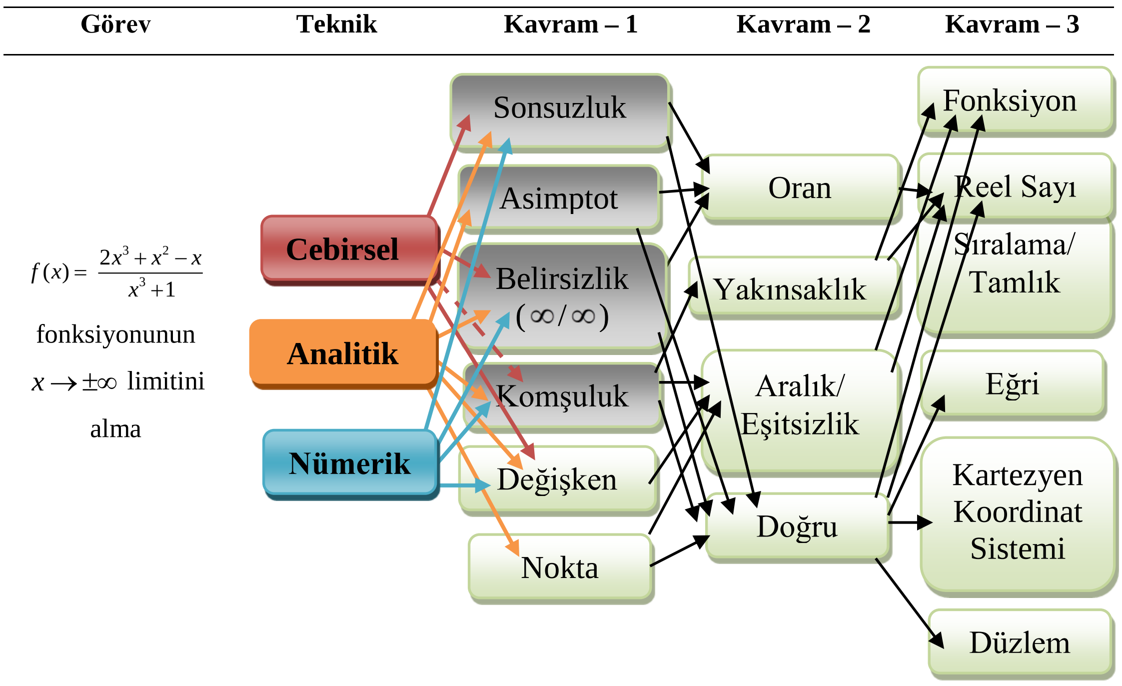
olarak bulunur.

Tablo 5.7'de cebirsel teknik kullanılarak yapılan prakseolojik analizin teknoloji bölümü ilk adımında f fonksiyonunun $x \to \infty$ belirsizliği açıklanırken sonsuzluk ve belirsizlik nesnelerinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulmuştur. Buna göre belirsizlik $\frac{a}{b}$ biçiminde gösterilebildiği için oran nesnesi belirsizliğin ifade edilmesine ekolojik destek sağlayarak bu nesneyi beslemektedir. Oran nesnesi böylelikle $\pm\frac{\infty}{\infty}$'un belirsizlik ifade ettiğinin açıklanmasında devreye girerek sonsuzluk nesnesinin anlamlandırılmasına da katkı sağlamaktadır. Ayrıca $\pm\frac{\infty}{\infty}$ oranının bir reel sayıya eşit olmadığı belirtilirken reel sayı nesnesi oran nesnesinin anlamlandırılmasına katkı sağlayarak bu nesneyi ekolojik olarak beslemiştir. Nümerik tekniğin kullanımında bütün bu ekolojik ilişkiler bağımsız değişkene verilen değerlerin f fonksiyonunun altındaki görüntülerine göre değerlendirilir. Bu durum, cebirsel tekniğin kullanımına bağlı olarak devreye giren ekolojik ilişkilerin nümerik tekniğin kullanımında da geçerli olduğunu göstermektedir. Analitik tekniğin kullanımında ise bu ekolojik ilişkilerin yanı sıra belirsizlik nesnesinin doğru nesnesi ile olan ekolojik ilişkisi de devreye girmektedir. Buna göre, analitik düzlemde çizilen fonksiyon grafiğinin yatay asimptot doğrusu ile kesişmeme durumuna bağlı olarak $f(x)$ fonksiyonunda $\frac{\infty}{\infty}$ belisizliğinin olduğuna karar verilir. Doğru nesnesi böylelikle sonsuzluk nesnesinin anlamlandırılmasına katkı sağlayarak bu nesneyi beslemiş olur. Ayrıca, yatay asimptotun *fonksiyon eğrisi ile kesişmeyen özel bir doğru* şeklinde nitelendirilebilmesi asimptot nesnesinin de doğru nesnesinden beslendiğini göstermektedir.

Tablo 5.7'deki prakseolojik analizin teknoloji bölümü ikinci adımında paranteze alma işlemi yapılırken cebir ve fonksiyon bilgisine ihtiyaç duyulur. Parantez içindeki sabit terimler dışındaki bütün terimler sıfır sayısına yakınsama durumu cebirsel ve nümerik teknik kullanılarak açıklanırken sonsuzluk nesnesinin oran nesnesi ile komşuluk nesnesinin yakınsaklık nesnesi ile ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur. Analitik tekniğin kullanımında ise f fonksiyonu ile bu fonksiyonun bazı terimlerinin çıkarılması sonucunda elde edilen $y = \frac{2x^3}{x^3}$ referans fonksiyonunun grafiklerinin $x \to \infty$ analitik düzlemde karşılaştırılmasına ihtiyaç duyulur. Bu aşamada sonsuzluk ve komşuluk nesnelerinin ekolojik ilişkilerinin yanı sıra asimptot nesnesinin oran nesnesi ile ekolojik ilişkileri devreye girer. Buna göre f fonksiyonu $x \to \infty$ değerler alırken elde edilen oran değerlerine bağlı olarak fonksiyon grafiğinin $y = 2$ asimptot doğrusuna yaklaştığı belirlenir. $y = \dfrac{2x^3}{x^3}$ fonksiyonunun da $x \to \infty$ ikiye yakınsaması bu fonksiyonların $x \to \infty$ limit işlemi için referans alınabileceğini gösterir.

Prakseolojik analizin teknoloji bölümü 3.adımında $y = \dfrac{2x^3}{x^3}$ fonksiyonunun sadeleştirilmesi ile birlikte limitin sonucu $\lim\limits_{x \to \infty} 2 = 2$ olarak bulunmuştur. Bu aşamada limit işleminin sonucunun belirlenmesinde *polinom fonksiyonlarda limit alma* görev tipinin daha önce belirlenmiş olan ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulacağı görülmektedir. Buna göre $y = 2$ polinom fonksiyonunda bağımsız değişken olmadığı için limit işleminin sonucu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$ olarak bulunmuş olur.

Şekil 5.35'te $\dfrac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma* görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir.



Şekil 5.35. $\dfrac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Örnek 5.6'da, Şekil 5.35'te verilen ekolojik ilişkilerden yararlanılarak cebirsel ve nümerik tekniğin bir arada kullanıldığı sonsuzda limit alma işlemi yapılmıştır.

Örnek 5.6. $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2-x}{x^3+1}$ fonksiyonunun $x\to\infty$ limitini bulma.

Çözüm f fonksiyonunda x yerine ∞ yazıldığında $\dfrac{\infty}{\infty}$ elde edilir. $\dfrac{\infty}{\infty}=a$ olduğu varsayılsın. Bu eşitlikte içler dışlar çarpımı yapıldığında,

$$\infty = a.\infty \qquad (5.\ 22)$$

elde edilir. (5. 22) eşitliğini sağlayan belirli bir a reel sayı bulunamayacağı için $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizlik ifade eder. Bu durumda (varsa) limit değerinin bulunabilmesi için belirsizliğin kaldırılması gerekir. Belirsizliğin kaldırılması için f fonksiyonunun pay ve paydası x^3 parantezine alındığında,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)} \qquad (5.\ 23)$$

elde edilir. (5. 23) ifadesinde x yerine ∞ yazıldığında parantezlerin içinde bulunan $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$ ve $\dfrac{1}{x^3}$ terimlerinin sıfıra yakınsadığı görülür. Bu durumda x değerleri sonsuza giderken $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$ ve $\dfrac{1}{x^3}$ terimlerinin limit işleminin sonucuna etki etmeyeceği görülür. (5. 23) ifadesinde bu terimlerin çıkarılması sonucunda,

$$y=\frac{2x^3}{x^3} \qquad (5.\ 24)$$

referans fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon başlangıçtaki f fonksiyonunun payında bulunan $x^2, -x$ terimlerinin ve paydasında bulunan 1 teriminin $x\to\infty$ limit işlemi yapılırken ihmal edilebileceğini göstermektedir. (5. 24) fonksiyonun $x\to\infty$ limit almada nasıl referans kabul edilebileceği Tablo 5.8 ve Tablo 5.9'da oluşturulan nümerik değerler tablosu yardımıyla incelenmiştir.

Tablo 5.8. $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2-x}{x^3+1}$ *fonksiyonunun* $x\to\infty$ *aldığı bazı değerler*

x	**1**	**5**	**10**	**50**	**100**	**500**
$f(x)=\dfrac{2x^3+x^2-x}{x^3+1}$	1	2,142857	2,087912	2,019583	2,009897	2,001995
x	**1000**	**5000**	**10000**	**50000**	**100000**	$x\to\infty$
$f(x)=\dfrac{2x^3+x^2-x}{x^3+1}$	2,000998	2,000199	2,000099	2,000019	2,000009	2

$f(x)=\dfrac{2x^3+x^2-x}{x^3+1}$ fonksiyonunun payındaki $-x$ ve paydasındaki 1 teriminin çıkarılmasıyla elde edilen $y=\dfrac{2x^3+x^2}{x^3}$ fonksiyonunun $x\to\infty$ almış olduğu bazı değerler Tablo 5.9'da verilmiştir.

Tablo 5.9. $y=\dfrac{2x^3+x^2}{x^3}$ *fonksiyonunun* $x\to\infty$ *aldığı bazı değerler*

x	**1**	**5**	**10**	**50**	**100**	**500**
$y=\dfrac{2x^3+x^2}{x^3}$	3	2,2	2,1	2,02	2,01	2,002
x	**1000**	**5000**	**10000**	**50000**	**100000**	$x\to\infty$
$y=\dfrac{2x^3+x^2}{x^3}$	2,001	2,0002	2,0001	2,00002	2,00001	2

Tablo 5.8 ve Tablo 5.9 karşılaştırıldığında, x artan değerler aldıkça her iki fonksiyonunda 2 değerine yakınsadığı görülmektedir. Bu değer aynı zamanda $y=\dfrac{2x^3}{x^3}$ fonksiyonunun sadeleştirilmesi sonucunda elde edilen değere eşittir. Başka bir ifadeyle,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-x}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2 \qquad (5.\ 25)$$

eşitliği elde edilmiştir. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunda $x\to\infty$ limit işlemi yapılırken fonksiyonun payında ve paydasında bulunan en büyük kuvvete sahip terimlerin katsayıları oranına göre limit işleminin sonucu belirlenebilir.

Örnek 5.6’nın çözümünde, f fonksiyonunun pay ve paydasının x^3 parantezine alınması ile elde edilen $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ ve $\frac{1}{x^3}$ terimlerinin $x \to \infty$ sıfır reel sayısına yakınsamasına bağlı olarak $y = \frac{2x^3}{x^3}$ referans fonksiyonu elde edilmiştir. Bu durum $y = \frac{2x^3}{x^3}$’ün f fonksiyonunun $x \to \infty$ limiti için referans fonksiyon olabileceğinin belirlenmesinde yakınsaklık nesnesi ile reel sayı nesnesi arasındaki ekolojik ilişkilerin önem kazandığı göstermektedir.

5.1.2.7.1. ***Ders kitaplarında*** $\frac{\infty}{\infty}$ ***belirsizliğinin olduğu durumda limit alma***

Tablo 5.7’de verilen prakseolojik analizin teknoloji bölümü incelendiğinde, limit alma işlemini belirsizlik kavramının yönlendirdiği görülür. Bunun nedeni, $\frac{\infty}{\infty}$ oranının belirli bir reel sayıya eşit olmamasına bağlı olarak limit almada kullanılacak referans fonksiyon arayışına gidilmiş olmasıdır. Bu nedenle prakseolojik analizin teknoloji bölümü 1.adımında belirsizliğin limit alma işlemine nasıl etki ettiğinin değerlendirilebilmesi için öncelikle bu nesnesinin açıklanmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu durum dikkate alınarak $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma* görev tipine ilişkin bölümlerin incelenmesine geçilmeden önce öğretim programı ve ders kitaplarında $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine nerede ve nasıl yer verildiği araştırılmıştır.

Şekil 5.35 lokal sitinde belirsizlik nesnesi ile doğru ve eğri nesneleri arasında da ekolojik ilişki zinciri kurulduğu görülmektedir. Bu durum fonksiyon eğrisi ile asimptot doğrusu arasındaki ekolojik ilişkinin $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin geometrik olarak anlamlandırılmasına hizmet ettiğini göstermektedir. Buna göre öğretim programında belirsizlik kavramının açıklanması için uygun konular *fonksiyonlar* ve *limit* olarak belirlenmiştir.

Daha önce $\frac{0}{0}$ belirsizliğine nasıl yer verildiğinin değerlendirilmesi amacıyla öğretim programı incelendiğinde fonksiyonlar konusunun alt başlıklarına 9, 10 ve 11.

sınıf düzeylerinde yer verildiği belirlenmişti. Öğretim programında fonksiyonlar konusuna ilişkin kazanımlar ve yönergeler incelendiğinde $\frac{\infty}{\infty}$'un neden belirsizlik ifade ettiğine yönelik bir açıklamaya yer verilmediği görülmüştür. Öğretim programının tamamı incelendiğinde de benzer bir durumla karşılaşılmıştır. Öğretim programında 12. sınıf düzeyinde limit alma işleminde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumuna yer verildiği halde, bu belirsizliğin açıklanmasına yönelik bir ifadeye rastlanmamıştır. 9, 10 ve 11. sınıflarda okutulan matematik ders kitaplarının fonksiyonlar konusuna yönelik alt başlıkları incelendiğinde, öğretim programına paralel bir şekilde, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine yönelik herhangi bir açıklamaya yer verilmediği görülmüştür.

AY 12. sınıf matematik ders kitabında $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma* görev tipine sıkıştırma teoremi yardımıyla limit almaya yönelik örneklerin ardından yer verildiği belirlenmiştir. Bu görev tipi için ilk olarak $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin olduğu durumda limit alma işleminin nasıl yapıldığına ilişkin bir bölüm yer almaktadır.

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

m, n $\in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0}$ ifadesinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

Buna göre

$$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n} \text{ olur.}$$

Şekil 5.36. $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma görev tipi için kuralın yer aldığı bölüm (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.42)*

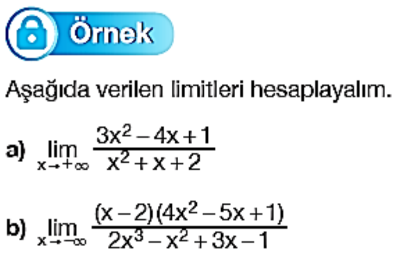
Şekil 5.36 incelendiğinde oran ve reel sayı nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin nasıl ortaya çıktığının açıklanmadığı görülmektedir. Bu durum, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin ne anlama geldiğinin ve limit alma işlemine nasıl etki ettiğinin değerlendirilmesini engelleyen ekolojik boşlukların oluşmasına neden olmaktadır.

Şekil 5.36'da $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin olduğu durumda limit işleminin nasıl yapılacağına,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x^1 + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ...b_1 x^1 + b_0} = \frac{a_n}{b_n} \tag{5. 26}$$

şeklinde bir kural olarak yer verildiği görülmektedir. Tablo 5.7'de yapılan prakseolojik analiz incelendiğinde ders kitabında bu kuralın nasıl ortaya çıktığına yönelik bir açıklamaya yer verilmiş olmasının $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin nasıl kaldırıldığına yönelik 2.teknolojinin açıklanmasında ekolojik boşlukların oluşmasına neden olduğu anlaşılmaktadır. Bu ekolojik boşluğun giderilmesinde, fonksiyonun pay ve paydası x^n parantezine alındıktan sonra, komşuluk yakınsaklık ve reel sayı nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak $x \to \pm\infty$ limit işlemi yapılırken hangi terimlerin ihmal edilebileceğinin belirlenmesi ve elde edilen referans fonksiyon yardımıyla limit alma işlemine devam edilmesinin etkili olacağı söylenebilir.

AY ders kitabında Şekil 5.36'da verilen açıklamanın ardından ∞/∞ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma* görev tipine yönelik cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı 2 tane örnek yer verilmiştir. Şekil 5.37'de ilk örneğe yer verilmiştir.


Örnek

Aşağıda verilen limitleri hesaplayalım.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4x+1}{x^2+x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x-2)(4x^2-5x+1)}{2x^3-x^2+3x-1}$

Şekil 5.37. ∞/∞ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma görev tipi için bir örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.42)*

Çözüm

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 3$

$= 3$ tür.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x-2)(4x^2-5x+1)}{2x^3-x^2+3x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\cdot 4x^2}{2x^3}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3}{2x^3}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 2$

$= 2$ olur.

Şekil 5.37. $\dfrac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma görev tipi için bir örnek*

(AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.42)

Şekil 5.37 incelendiğinde (5. 26)'da verilen kural uygulanarak limit alma işlemlerinin yapıldığı görülmektedir. Örneğin sırasıyla a ve b kısımlarında $x \to \pm\infty$ limit alma işlemi yapılırken $y = \dfrac{3x^2}{x^2}$ ve $y = \dfrac{4x^3}{2x^3}$ fonksiyonlarının nasıl kullanılabildiğine ve neden kullanıldığına yönelik bir açıklamaya yer verilmemiştir. Ayrıca, örneğin çözümü cebirsel tekniğe yardımcı bir teknik kullanılarak desteklenmemiştir. Bu durum Şekil 5.36'da verilen kuralın teknolojilerine yer verilmemesine bağlı olarak ortaya çıkan ekolojik boşlukların yardımcı bir teknik kullanılarak giderilmesini engellemiştir.

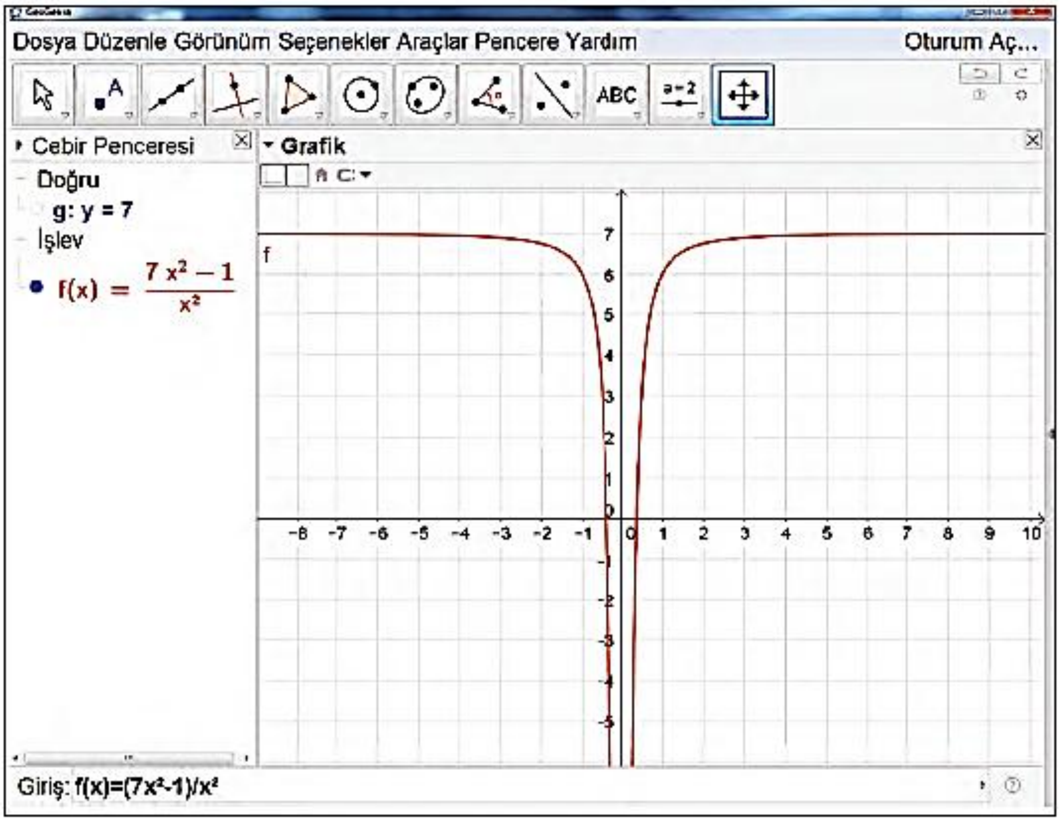
BY 12. sınıf matematik ders kitabında $\dfrac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma* görev tipine $\dfrac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma* görev tipine yönelik bir özellikten sonra yer verildiği belirlenmiştir. Bu bölümde ilk olarak $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin olduğu durumda limit alma işlemi geometri yazılım programından yararlanılarak fonksiyon grafiği üzerinde açıklanmıştır. Şekil 5.38'de analitik tekniğin kullanıldığı bu bölüme yer verilmiştir.

Bilgi İletişim Teknolojisi

Bilgisayar programını kullanarak $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 - 1}{x^2}$ değerini bulalım.

GeoGebra programını çalıştıralım.

Giriş bölümüne $f(x) = (7x^2 - 1)/x^2$ yazalım. Enter tuşuna bastığımızda $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizmiş oluruz.



Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi x değeri $-\infty$ ve $+\infty$ a yaklaşan değerler aldığında $f(x)$ değeri 7 ye yaklaşmaktadır. Buradan $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 - 1}{x^2} = 7$ olduğu görülür.

Şekil 5.38. $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma görev tipi için analitik tekniğin kullanımı (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.22)*

Şekil 5.38 incelendiğinde $f(x) = \frac{7x^2 - 1}{x^2}$ fonksiyonunda $x \to \infty$ limit alma işlemi yapılırken $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin nasıl ortaya çıktığına yönelik bir açıklamaya yer verilmediği görülmektedir. Bu durum, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin limit alma işlemini nasıl yönlendirdiğinin incelenmesini engelleyen ekolojik boşluğun oluşmasına neden olmaktadır.

Şekil 5.38'de yer alan grafiğin $f(x)=\frac{7x^2-1}{x^2}$ fonksiyonunda $x \to \infty$ limit alma işlemi yapılırken fonksiyonun payında yer alan -1 teriminin nasıl ihmal edilebileceğinin açıklanmasına ekolojik katkı sağladığı söylenebilir. Buna karşılık grafikte $y=7$ asimptot doğrusuna yer verilmediği görülmektedir. Şekil 5.35 lokal sitinde yer alan asimptot nesnesinin ekolojik ilişkileri değerlendirildiğinde, f fonksiyonu ile $y=7$ asimptot doğrusunun grafiklerine bir arada yer verilmesinin $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin olduğu durumda yapılan limit alma işlemine önemli ekolojik katkılar sağlayacağı görülmektedir. Şekil 5.35 lokal sitinde sonsuzluk, belirsizlik ve asimptot nesnelerinin doğru nesnesi ile ortak ekolojik ilişkilerinin olduğu görülmektedir. Bu durum fonksiyon eğrisi ile asimptot doğrusu arasındaki ekolojik ilişkinin $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinin ve sonsuzluğun geometrik olarak anlamlandırılmasına hizmet ettiğini göstermektedir. Buna göre Şekil 5.38'de fonksiyon grafiği ile birlikte $y=7$ asimptot doğrusunun grafiğine de yer verilmesi, sonsuzluk ve belirsizlik nesnelerinin ekolojik ilişkilerinin güçlendirilmesine katkı sağlayacaktır. Fakat BY ders kitabında asimptot kavramına türev konusunda yer veriliyor olması asimptot nesnenin $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma* görev tipine ekolojik katkı sağlamasını engellemektdir. Bu durum analitik tekniğin kullanımına bağlı olarak devreye giren teknolojilerin örneğin çözümünde bütünüyle gerçekleştirilmesine engel olmaktadır.

BY ders kitabında Şekil 5.38'de verilen bölümün ardından aynı görev tipinin cebirsel teknik kullanılarak nasıl gerçekleştirilebileceği özellik olarak verilmiştir. Özelliğin hemen ardından cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı bir örneğe yer verilmiştir.

Şekil 5.39'da $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma* görev tipine yönelik özelliğin yer aldığı bölüm ve cebirsel tekniğin kullanıldığı örnek yer almaktadır.

Özellik

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^2 \pm 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{x^2}\left(a \pm \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(a \pm \dfrac{1}{x^2}\right) = a \pm \dfrac{1}{\infty^2} = a \pm 0 = a$ olur. Buradan

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^2 \pm b}{x^2} = a$ dır.

Örnek

Aşağıdaki limit değerlerini bulalım.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12x^2 - 1}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x^2 + 3}{x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 2}{x^2}$

Çözüm

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12x^2 - 1}{x^2} = 12$ **b)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x^2 + 3}{x^2} = -2$ **c)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 2}{x^2} = 4$ bulunur.

Şekil 5.39. $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin olduğu durumda limit alma görev tipi için cebirsel tekniğin kullanımına yönelik özellik ve örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.22-23)*

Şekil 5.39'un *Özellik* bölümünde $y = \dfrac{ax^2 \pm 1}{x^2}$ fonksiyonunun pay ve paydasının x^2 parantezine alınıp sadeleştirilmesi sonucunda limit işlemine $y = a \pm \dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonu ile devam edilmiştir. Böylelikle komşuluk, yakınsaklık ve reel sayı nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak $\dfrac{1}{x^2}$ teriminin limit işleminin sonucuna etki etmeyeceği belirlenmiştir. Yapılan bu işlemler $y = \dfrac{ax^2 \pm 1}{x^2}$ fonksiyonunun $x \to \infty$ limiti alınırken ± 1 teriminin ihmal edilebileceği ve elde edilen $y = \dfrac{ax^2}{x^2}$ referans fonksiyonu yardımıyla limit alma işlemine devam edilebileceğinin açıklanmasına ekolojik destek sağlamıştır. Şekil 5.39'daki örnekte ise verilen özelliğe bağlı olarak limit işlemlerinin sonuçları belirlenmiştir.

5.2. Ders Kitaplarının Süreklilik Konusu Kapsamında Analizi

Çalışmanın bu bölümünde ilk olarak 12. sınıf matematik öğretim programı incelenerek süreklilik konusu kapsamında görev tipleri belirlenmiştir. Ardından, belirlenen görev tipleri için lokal sitler oluşturulmuş ve bu sitler temel alınarak ders kitaplarında bulunan örneklerin çözümleri ekolojik açıdan değerlendirilmiştir.

5.2.1. Süreklilik konusu için görev tiplerinin belirlenmesi

Öğretim programında süreklilik konusu ile ilgili tek kazanım yer almaktadır. Bu kazanım ve açıklamaları aşağıda verilmiştir.

> **Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliğini açıklar.**
>
> - Fonksiyonun sürekliliği ancak tanım kümesindeki noktalarda araştırılır. Örneğin, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki sürekliliğini tartışmak, $x=0$ bu fonksiyonun tanım kümesinde yer almadığından anlamsızdır.
> - Fonksiyon grafiği üzerinde sürekli ve süreksiz noktalar buldurulur.
> - Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak fonksiyonların tablo ve grafik gösterimleri yardımıyla süreklilik uygulamaları yaptırılır (MEB, 2013, s.45).

Buna göre süreklilik ile ilgili üç görev tipinin öğretim programının amacına yönelik tipik görevler olarak ifade edilebileceği görülmektedir. Bu görev tipleri şunlardır:

1. İç noktadaki sürekliliğin incelenmesi
2. Uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi
3. Fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi

Bu görev tiplerinden ilk ikisini birbirinden ayıran neden; uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi görev tipinde tek taraflı limit alma işleminin, iç noktada sürekliliğin incelenmesi görev tipinde ise iki taraflı limit alma işleminin söz konusu olmasıdır. Bu durum, iki görev tipinin teknik ve teknolojilerinde farklıların ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

Gerek iç nokta, gerekse uç noktadaki süreklilik incelenirken 3 farklı durum süreksizliğe neden olabilmektedir. Bu durumlar iç nokta ve uç nokta sürekliliğinin alt görev tipleri olarak belirlenmiştir. Bu görev tipleri şunlardır:

a) Fonksiyonun tanımsız olduğu bir noktadaki sürekliliğini inceleme
b) Fonksiyonun tanımlı ve limitsiz olduğu bir noktadaki sürekliliğini inceleme
c) Fonksiyonun tanımlı ve limitli olduğu bir noktadaki sürekliliğini inceleme

1.alt görev tipinde, sürekliliğin tanımı gereği, fonksiyonun bir noktada tanımsız olduğunun belirlenmesi bu noktada süreksiz olduğuna karar verilmesi için yeterli olduğundan limitin incelenmesine gerek kalmamaktadır. 2. alt görev tipinde fonksiyonun bir noktada süreksiz olduğuna karar verilmesinde bu noktada sağdan veya soldan (uç nokta ise tek taraftan) limitsiz olduğunun veya limitlerin eşit olmadığının belirlenmesi gerekmektedir. 3. alt görev tipinde ise önce fonksiyonun limitinin belirlenmesi, ardından limit değerinin fonksiyonun bu noktadaki değerine eşit olup olmadığının incelenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla bu üç alt görev tipinin teknikleri belirli noktalarda farklı adımlar içermektedir.

3. temel görev tipi, fonksiyonun başta kritik noktaları olmak üzere tanımlı olduğu aralıktaki tüm noktalarında sürekliliğinin değerlendirilmesini gerektirdiği için teknik açıdan daha karmaşık bir görev tipidir. Bu nedenle *fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi* son görev tipi olarak belirlenmiştir.

Süreklilik ile ilgili kazanım incelendiğinde bir noktadaki sürekliliğe vurgu yapıldığı ve fonksiyonun sürekliliğinden bahsedilmediği görülmektedir. Bununla birlikte ikinci açıklamadan, grafik üzerinden fonksiyonun sürekli ve süreksiz olduğu noktalarının incelenmesinin öngörüldüğü anlaşılmaktadır. Bu durumda 3.temel görev tipinin de öğretim programında yer aldığını söylemek mümkündür. Kazanımın ikinci açıklamasından hareketle bir fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesinde analitik teknik kullanımının önerildiği de söylenebilir. Diğer yandan kazanımın ilk açıklamasında bir fonksiyonun sürekliliğinin sadece fonksiyonun tanımlı olduğu noktalarda incelenmesini gerektirdiği belirtilerek 1. alt görev tipi devre dışı bırakılmıştır. Öğretim programında yer alan bu açıklama ‘‘Fonksiyonun tanımsız olduğu noktada neden süreksiz olduğu ve bu noktada fonksiyonun limitinin araştırılmasına neden gerek duyulmayacağı üzerinde durulur.’’ şeklinde yapılsa idi bu alt görev tipine ve onunla beraber gelen teknolojik açıklamalara yer verilmiş olunurdu.

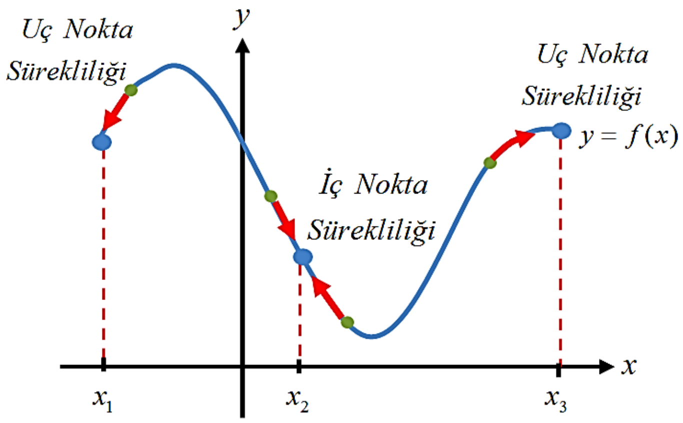
Kazanımın son açıklamasında bilgi ve iletşim teknolojilerinin kullanımına atıfta bulunulması, nümerik ve analitik tekniğin ön planda olacağını göstermekte ve bu iki tekniğin iç içe kullanımını destekleme amacı taşımaktadır.

5.2.2. Süreklilik konusu lokal sitlerine göre ders kitaplarının analizi

Bu bölümde limit alma görev tipleri için belirlenen ekolojik ilişkilerden yararlanılarak, süreklilik konusuna yönelik görev tiplerinin gerçekleştirilmesinde hangi ekolojik ilişkilerin ortaya çıktığı değerlendirilmiştir. Sonrasında elde edilen verilerden yararlanılarak ders kitaplarında süreklilik konusuna yönelik örnek çözümlerinin ekolojik analizleri yapılmıştır.

5.2.2.1. *İç noktadaki sürekliliğin incelenmesi*

Bir fonksiyonun tanım kümesinde yer alan bir noktasındaki sürekliliği, noktanın bulunduğu yere göre iç noktadaki ve uç noktadaki süreklilik olmak üzere iki farklı şekilde incelenir.



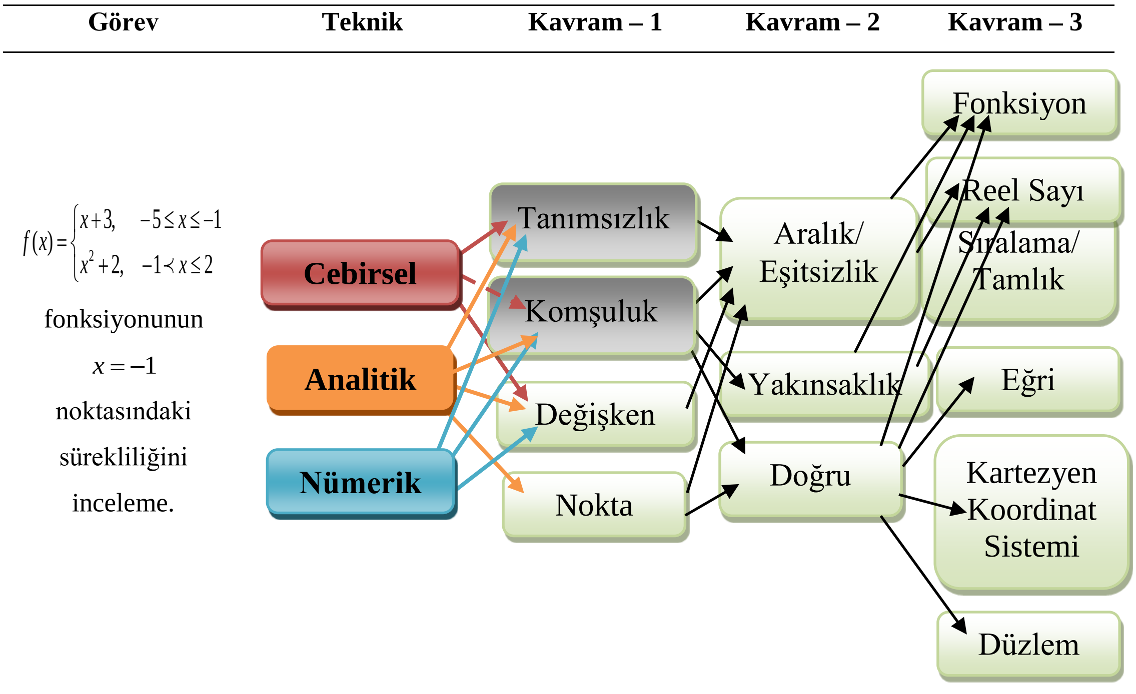
Şekil 5.40. *Uç noktada ve iç noktada süreklilik*

Şekil 5.40'da verilen fonksiyon grafiğinde x_1 ve x_3 apsisli noktalar fonksiyonun uç noktalarıyken $x_2 \in (x_1, x_3)$ apsisli nokta fonksiyonun iç noktasıdır. Sürekliliğin tanımı gereği bu fonksiyonun x_2 noktasında sürekli olabilmesi için bu noktada limitli olması ve limit değerinin fonksiyonun görüntüsüne eşit olması gerekir. Bu durum, bir noktadaki sürekliliğin incelenmesinde limit alma işlemi yapılırken devreye giren ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulacağını göstermektedir. Örneğin bir polinom fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği incelenirken önce bu noktada limitli olup olmadığı değerlendirilir. Bu aşamada *polinom fonksiyonlarda limit alma* görev tipi için devreye giren Şekil 5.1 lokal sitindeki ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur. Ardından fonksiyonun sürekliliğin incelendiği noktadaki değerinin elde edilen limit değerine eşit olup olmadığı belirlenir. Bu aşamada da yine Şekil 5.1 lokal sitinde yer alan nesneler arasındaki ekolojik ilişkiler devreye girer. Buna göre, fonksiyonun değeri cebirsel veya nümerik teknik kullanılarak belirlenirken, fonksiyonun bağımsız değişkenine tanım aralığında yer alan bir reel sayı değeri verileceği için Şekil 5.1 lokal sitinde yer alan değişken, aralık/eşitsizlik, fonksiyon ve reel sayı nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerden yararlanılır. Analitik tekniğin kullanımında ise bu durum fonksiyon grafiği üzerinde inceleneceği için Şekil 5.1 lokal sitinde yer alan geometrik nesnelere de ihtiyaç duyulur.

Bir fonksiyonun bir noktada süreksiz olmasına neden olabilecek üç farklı durumdan biri bu noktada tanımsız olmasıdır. Bu durumda fonksiyonun, limiti incelenmeksizin, sadece tanımsız olduğunun belirlenmesi bu noktada süreksiz olduğunun söylenebilmesi için yeterlidir. Örneğin, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki sürekliliği incelenirken bu noktada tanımsız olduğunun belirlenmesi yeterlidir. Bu durumda daha önce $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *fonksiyonunun* $x=0$ *noktasındaki limitini inceleme* görevi için tanımsızlığın belirlenmesinde devreye giren ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur.

Bir fonksiyonun tanımlı fakat limitsiz olduğu bir noktadaki sürekliliği incelenirken limitsizliğe hangi durumun neden olduğu önem kazanmaktadır. Örneğin bir fonksiyonun, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun kritik noktasında da olduğu gibi, sağdan veya soldan limitinin sonsuza ıraksanmasına bağlı olarak limitsizlik durumu ortaya çıkıyor ise bu durumda $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *fonksiyonunun* $x=0$ *noktasındaki limitini inceleme* görevi için devreye giren ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur. Buna karşılık, $f(x)=\begin{cases} x+3, & -5\le x\le -1 \\ x^2+2, & -1\prec x\le 2 \end{cases}$ parçalı fonksiyonun da olduğu gibi, sağ limit değerinin sol limit değerine eşit olmama durumu var ise bu durumda limitsizliğin belirlenmesinde *parçalı fonksiyonlarda limit alma* görev tipi için devreye giren ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur.

Şekil 5.41'de $f(x)=\begin{cases} x+3, & -5\le x\le -1 \\ x^2+2, & -1\prec x\le 2 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun tanımlı ve limitsiz olduğu kritik noktasında sürekliliğinin incelenmesine bağlı olarak devreye giren ekolojik ilişkiler verilmiştir.



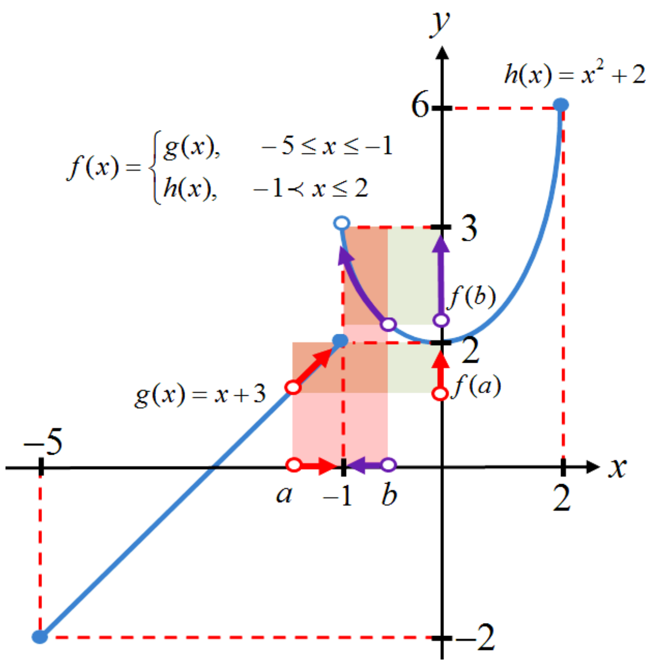
Şekil 5.41. *Fonksiyonun tanımlı ve limitsiz olduğu bir noktadaki sürekliliğini inceleme görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Örnek 5.7'de $f(x)=\begin{cases} x+3, & -5\le x\le -1 \\ x^2+2, & -1\prec x\le 2 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun tanımlı ve limitsiz olduğu kritik noktasındaki sürekliliği cebirsel ve analitik teknik bir arada kullanılarak Şekil 5.41'deki ekolojik ilişkiler yardımıyla incelenmiştir.

Örnek 5.7. $f(x)=\begin{cases} x+3, & -5\le x\le -1 \\ x^2+2, & -1\prec x\le 2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=-1$ noktasında sürekliliğini inceleme.

Çözüm Şekil 5.42'de, f parçalı fonksiyonunun koordinat düzleminde çizilen grafiğinden yararlanılarak $x=-1$ noktasındaki sürekliliği incelenmiştir.

Şekil 5.42'de verilen f parçalı fonksiyonun tanım kümesi $[-5,2]$ kapalı aralığıdır. Grafiğe göre fonksiyonun tanım kümesinde $-1\in(a,\, b)$ olacak şekilde bir $(a,\, b)$ aralığı belirlenebilir. $(a,\, -1)$ aralığı için f fonksiyonunun $g(x)=x+3$ parçası tanımlı olduğundan, $x\to -1^-$ limit değerinin belirlenmesinde g fonksiyonundan yararlanılır. Buna karşılık $(-1,\, b)$ aralığı için fonksiyonun $h(x)=x^2+2$ parçası tanımlı olduğundan $x\to -1^+$ limit değerinin belirlenmesi için h fonksiyonu devreye girer.



Şekil 5.42. *f parçalı fonksiyonunun tanımlı ve limitsiz olduğu bir noktadaki sürekliliğinin incelenmesi*

Cebirsel teknik kullanılarak f fonksiyonunda $x \to -1^-$ limit değeri,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x+3 = -1+3 = 2 \quad (5.27)$$

olarak bulunur. Buna karşılık $x \to -1^+$ limit değeri,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2+2 = 1+2 = 3 \quad (5.28)$$

olur. $\lim_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim_{x \to -1^+} f(x)$ olduğundan f fonksiyonu $x \to -1$ limitsizdir. Bu durum fonksiyon grafiğinin $x=-1$ noktasında kopukluğa neden olmaktadır. Sonuç olarak, f fonksiyonu $x=-1$ noktasında süreksizdir.

Bir fonksiyon bir noktada tanımlı ve limitli olduğu halde, limit değerinin fonksiyon değerine eşit olmamasına bağlı olarak bu noktada süreksiz olabilir. Bu görev tipi gerçekleştirilirken devreye girecek olan ekolojik ilişkilerin belirlenmesinde sürekliliği incelenen kritik noktanın özelliği önem kazanır. Örneğin, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ noktasında limit değerinin fonksiyon değerinden farklı olmasına bağlı olarak süreksizdir. Sürekliliğin incelenmesi amacıyla f fonksiyonunun $x=0$ noktasında limiti alınırken sıkıştırma teoremine ihtiyaç duyulur. Bu durumda $x=0$ noktasındaki sürekliliğin incelenmesinde *sıkıştırma teoremi yardımıyla limit alma* görev tipine bağlı olarak devreye giren Şekil 5.29 ve Şekil 5.30 lokal sitlerindeki ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur.

5.2.2.1.1. ***Ders kitaplarında iç noktadaki sürekliliğin incelenmesi***

AY 12. sınıf matematik ders kitabı incelendiğinde süreklilik konusuna, sürekliliğin tanımı ve süreklilik şartları verilerek giriş yapıldığı görülmüştür.

12.1.1.2. SÜREKLİLİK

y = f(x) fonksiyonunda $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$ ise f fonksiyonuna, x = a noktasında süreklidir denir.

Bu tanıma göre y = f(x) fonksiyonu x = a noktasında sürekli ise;

i) f fonksiyonu x = a noktasında tanımlıdır. $f(a) \in \mathbb{R}$ dır.

ii) f fonksiyonun x = a noktasında limiti vardır. $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ dır.

iii) f fonksiyonun x = a noktasındaki limiti, fonksiyonun x = a noktasındaki değerine eşittir. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ dır.

Şekil 5.43. *Süreklilik konusuna giriş (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.43)*

Şekil 5.43 incelendiğinde bir noktadaki süreklilik için gerekli olan koşulların sıralandığı görülmektedir. Bu koşulların süreklilik için neden gerekli olduğunun değerlendirilmesinde koşulların arkasındaki teknolojiler önem kazanmaktadır. Örneğin, bir fonksiyonun tanımsız ve belirsiz olduğu bir noktadaki sürekliliği açıklanırken; tanımsızlık veya belirsizliğin ne olduğu, fonksiyonun bu noktalarda neden tanımsız veya belirsiz olduğu ve bunun fonksiyon grafiğine nasıl etki ettiğinin değerlendirilmesi önem kazanmaktadır. Bu durum, öğretim programı ve ders kitaplarında açıklanmayan tanımsızlık ve belirsizlik nesnelerinin ekolojik ilişkilerine ve türev konusunda yer verilen asimptot nesnesine süreklilik konusunda ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir.

AY ders kitabında sürekliliğin tanımının ardından *iç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tipine yönelik 4 tane örneğe yer verildiği görülmüştür. Bu örneklerin tamamında cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı belirlenmiştir.

Şekil 5.44’te *fonksiyonun tanımlı ve limitli olduğu bir noktadaki sürekliliğini inceleme* alt görev tipine yönelik cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı bir örneğe yer verilmiştir.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2-3 & , \quad x<1 \\ 2 & , \quad x=1 \\ -2x & , \quad x>1 \end{cases}$ fonksiyonunun x = 1 noktasında sürekli olup olmadığını araştıralım.

Çözüm

i) $f(1) = 2 \in \mathbb{R}$ dır.

ii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ değerini hesaplayalım. x = 1 noktası, verilen parçalı fonksiyonunun kritik noktası olduğundan sağdan ve soldan limiti bulalım.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2-3) = 1^2 - 3 = -2 \text{ dir.}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-2x) = (-2) \cdot 1 = -2 \text{ dir.}$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$ olur.

iii) (i) ve (ii) dikkate alındığında $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ olduğu görülür.

Dolayısıyla f fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli değildir.

Şekil 5.44. *Fonksiyonun tanımlı ve limitli olduğu bir noktadaki sürekliliğini inceleme alt görev tipine yönelik bir örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.44-45)*

Şekil 5.44’te bir f parçalı fonksiyonunun kritik noktasında sürekliliği incelenmiştir. Bu görevin gerçekleştirilmesinde daha önce parçalı bir fonksiyonun kritik noktasında sürekliliğinin incelenmesi amacıyla kullanılan Şekil 5.41 lokal sitindeki ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin çözümünde cebirsel teknik tek başına kullanılarak f fonksiyonunun $x \to 1$ limitinin alındığı ve $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ eşitsizliğine bağlı olarak f fonksiyonunun $x = 1$ noktasında süreksiz olduğuna karar verildiği görülmektedir. Bir fonksiyonun bir noktada limiti incelenirken fonksiyonun bu noktadaki değeri ile değil, bu noktanın komşuluğundaki davranışı ile ilgilenilir. Bu durum, $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ eşitsizliğinin ortaya çıkarılmasında komşuluk ve yakınsaklık nesneleri arasındaki ekolojik ilişkinin kritik bir öneme sahip olduğunu göstermektedir. Örneğin çözümünde cebirsel tekniğin tek başına kullanılmış olması, komşuluk nesnesi ile yakınsaklık nesnesi arasındaki ekolojik ilişkinin örtük kalmasına neden olmaktadır. Bu durum, limit işleminin sürekliliğe nasıl etki ettiğinin değerlendirilmesinde ekolojik boşluğun ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

BY 12. sınıf matematik ders kitabı incelendiğinde bir noktadaki sürekliliğe, AY ders kitabına benzer bir şekilde, sürekliliğin tanımı ve süreklilik şartları verilerek giriş yapıldığı görülmüştür.

Bir Noktada Süreklilik

Bilgi

$A \in \mathbb{R}$ ve $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ bir fonksiyon olsun. $a \in A$ olmak üzere,

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise

f fonksiyonu $x = a$ noktasında **süreklidir** denir. Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu bir noktada sürekli değilse bu noktada fonksiyon **süreksizdir** denir.

!

f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sürekli olması için aşağıdaki üç koşulun sağlanması gerekir:

1. f fonksiyonu $x = a$ noktasında tanımlı olmalıdır. Yani $f(a) \in \mathbb{R}$ olmalıdır.

2. f fonksiyonunun $x = a$ noktasında limiti olmalıdır.

3. f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki limiti, fonksiyonun $x = a$ için aldığı değere eşit olmalıdır. Yani $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ olmalıdır.

Bu koşullardan en az biri sağlanmazsa f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreksiz olur.

Şekil 5.45. *Süreklilik konusuna giriş (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.27)*

BY ders kitabında sürekliliğin tanımının ardından *iç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tipine yönelik 8 tane örneğe yer verildiği görülmüştür. Bu örneklerin 4 tanesinde cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı, kalan 4 tane örneğin çözümünde ise cebirsel tekniğin analitik teknik kullanılarak desteklendiği belirlenmişir.

Şekil 5.46'da *fonksiyonun tanımlı ve limitsiz olduğu bir noktadaki sürekliliğini inceleme* alt görev tipine yönelik cebirsel ve analitik tekniğin bir arada kullanıldığı bir örneğe yer verilmiştir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x+2, & x<1 \\ x-1, & x\geqslant 1 \end{cases}$ fonksiyonun x = 1 noktasında sürekli olup olmadığını grafik üzerinde göstererek bulalım.

Çözüm

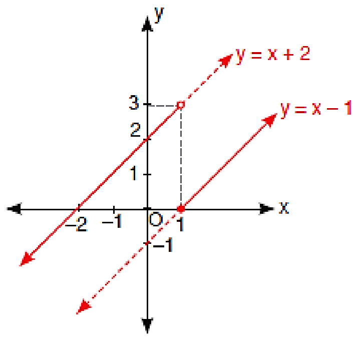
x = 1 kritik noktadır.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+2) = 1+2 = 3$ ve

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 1-1 = 0$ dır.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ yoktur.

Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli değildir.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Grafikten de görüldüğü gibi $f(x)$ fonksiyonunun grafiği x = 1 noktasında kesintiye uğramıştır.

$f(x)$ fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli değildir.

Şekil 5.46. *Fonksiyonun tanımlı ve limitsiz olduğu bir noktadaki sürekliliğini inceleme alt görev tipine yönelik bir örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.29)*

Şekil 5.46'da verilen örneğin çözümünde yer alan fonksiyon grafiği incelendiğinde, cebirsel teknik kullanılarak $x \to 1^+$ ve $x \to 1^-$ elde edilen farklı limit değerlerinin $x=1$ noktasında fonksiyon grafiğinde kopukluğa neden olduğu anlaşılmaktadır. Bu durum, cebirsel tekniğin komşuluk nesnesi ile örtük ekolojik ilişkisine bağlı olarak ortaya çıkabilecek ekolojik boşluğun analitik teknik kullanılarak giderilebileceğini göstermektedir. Böylelikle limitsizliğin sürekliliğe nasıl etki ettiği fonksiyon grafiği üzerinde somut bir biçimde incelenebilmektedir.

5.2.2.2. ***Uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi***

Sürekliliğin tanımı gereği bir fonksiyonun uç noktasında sürekli olabilmesi için bu noktada tanım aralığına göre sağından veya solundan limitli olması ve limit değerinin fonksiyonun görüntüsüne eşit olması gerekir. Bu durum, iç nokta sürekliliğinde de olduğu gibi, uç noktadaki sürekliliğin incelenmesinde limit alma işlemi yapılırken devreye giren ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulacağını göstermektedir.

Daha önce bir fonksiyonun iç noktasında süreksizliğe neden olabilecek üç farklı durum ile karşılaşılabileceği ifade edilmiş ve bu durumlar iç nokta sürekliliğinin incelenmesinde birer alt görev tipi olarak belirlenmişti. Bir fonksiyonun uç noktasında süreksizliğe neden olabilecek durumlar, iç noktada karşılaşılan durumlar ile aynı olduğu için bu alt görev tiplerinin uç nokta sürekliliği için de geçerli olduğunu söylemek mümkündür. Bu durumlardan biri fonksiyonun tek taraflı sürekliliğinin incelendiği noktada tanımsız olmasıdır. İkinci durum fonksiyonun tek taraflı sürekliliğinin incelendiği noktada limitsiz olmasıdır. Üçüncü durum ise fonksiyonun tek taraflı sürekliliğinin incelendiği noktada tanımlı ve tanım aralığına göre sağından veya solundan limitli olmasına karşılık bu noktadaki fonksiyon değerinin limit değerinden farklı olmasıdır.

5.2.2.2.1. *Ders kitaplarında uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi*

AY ders kitabında *uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tipine yönelik cebirsel ve analitik tekniğin bir arada kullanıldığı bir örneğe yer verildiği görülmüştür.

Örnek

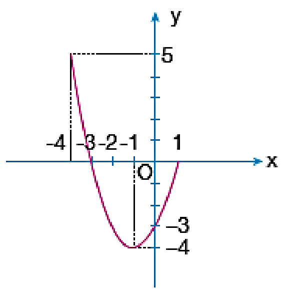
$f: [-4, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonunun $[-4, 1]$ aralığında sürekli olup olmadığını araştıralım.

Çözüm

Verilen fonksiyonun grafiği yandaki gibidir.

Grafikte de görüldüğü gibi $\forall x_0 \in (-4, 1)$ için $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ dır.

Bunun yanında $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = f(-4) = 5$ ve $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 0$ olduğundan $y = f(x)$ fonksiyonu $[-4, 1]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur.



Şekil 5.47. *Uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi görev tipine ilişkin bir örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.46-47)*

Şekil 5.47'de f fonksiyonunun $x=-4$ ve $x=1$ uç noktalarında sürekliliği incelenirken sırasıyla sağdan ve soldan tek taraflı limit alma işlemlerinin yapıldığı görülmektedir. Bu görevin gerçekleştirilmesinde, daha önce *tek taraflı limit alma* görev tipi için de kullanılmış olan, Şekil 5.41 lokal sitindeki ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur. Bir fonksiyonun uç noktası için sürekliliği incelenirken fonksiyonun tanımlı olduğu aralığa göre bu noktanın yalnızca sağından veya yalnızca solundan limit alma işlemi yapılır. Bu durum limitin hangi yönden alınacağına karar verilmesinde komşuluk ve tanımsızlık nesneleri arasında ekolojik ilişki kurulmasının önem kazandığını göstermektedir. Şekil 5.41 lokal siti, bu ekolojik ilişkinin kurulmasında her iki nesnenin de ortak bağ kurdukları aralık/eşitsizlik nesnelerinden yararlanılabileceğini göstermektedir. Şekil 5.47 incelendiğinde f fonksiyonunun $x=-4$ ve $x=1$ uç noktaları için limitin yönüne karar verilmesinde bu ekolojik ilişkiden yararlanılmadığı görülmektedir. Buna göre, " f fonksiyonunun tanım aralığına göre, $x=-4$ noktasının solunda kalan bütün komşuluklar için fonksiyonun tanımsız olduğu anlaşılmaktadır. Bu durum, $x=-4$ noktası için yalnızca sağdan limit alınmasına neden olmaktadır.'' şeklindeki bir açıklamaya yer verilmesinin $x=-4$ noktasında neden tek taraflı limitin alındığına yönelik ekolojik boşluğun giderilmesine katkı sağlayacağı söylenebilir.

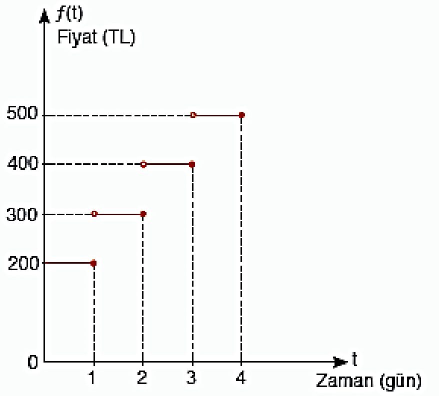
BY 12. sınıf matematik ders kitabında yer alan bir etkinlikte bir fonksiyonun uç noktarındaki sürekliliği incelenmiştir. Şekil 5.48'de bu etkinlik verilmiştir.

- Yandaki grafikte araç kiralama şirketine başvuran kişilerin araçları kiraladıkları gün sayısına göre ödedikleri ücret gösterilmektedir.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(t)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(t)$, $f(1)$ değerlerini bularak karşılaştırınız. Bu değerler arasında nasıl bir ilişki vardır? Benzer ilişki $t=2$, $t=3$ ve $t=4$ için de var mıdır? Açıklayınız.

- f fonksiyonunun grafiğini hangi aralıklarda kalemi kaldırmadan çizebilirsiniz? Yukarıda bulduğunuz limitler ile bu durum arasında nasıl bir ilişki gözlemliyorsunuz? Düşüncelerinizi grafik üzerinde açıklayınız.

Grafik: Araçların kiralandıkları güne göre ödenen ücret



Şekil 5.48. *Uç noktadaki sürekliliğin incelendiği bir etkinlik (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.31)*

• $\lim_{x \to 0^+} f(t) = f(0)$, $\lim_{x \to 1^-} f(t) = f(1)$ ve $\forall t_0 \in [0,1]$ için $\lim_{x \to t_0} f(t) = f(t_0)$ olduğunu gösteriniz. Buna göre "f(t) fonksiyonu [0,1] aralığındaki her noktada süreklidir." diyebilir miyiz? Açıklayınız.

• f(t) fonksiyonunun (1,2], (2,3] ve (3,4] aralıklarında her noktada sürekli midir? Açıklayınız.

Şekil 5.48. (Devam) *Uç noktadaki sürekliliğin incelendiği bir etkinlik (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.31)*

Şekil 5.48'de verilen etkinlikte bir tam değer fonksiyonun grafiği üzerinden sürekliliğinin incelenmesi istenmiştir. Etkinliğin 4. maddesinde fonksiyonun $x = 0$ ve $x = 1$ uç noktaları için sırasıyla sağdan ve soldan limitlerin alınması sonucunda elde edilecek değerlerin fonksiyonun bu noktalardaki değerlerine eşit olacağının gösterilmesi istenmiştir. Ders kitabının önceki bölümlerinde *tek taraflı limit alma* görev tipine yönelik herhangi bir açıklama veya örneğe yer verilmemiş olması, bu görev tipinin arkasındaki ekolojik ilişkiler açıklanmadan öğrenciler tarafından gerçekleştirilmesinin beklendiğini göstermektedir. Ortaya çıkan bu ekolojik sorunun giderilebilmesi için etkinlikten önce *uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tipi için gerekli olan ekolojik ilişkilerin açıklanması gerekmektedir. Ayrıca, Şekil 5.48'de sürekliliği incelenen fonksiyonun denkleminin verilmediği görülmektedir. Bu durum $\lim_{x \to 0^+} f(t) = f(0)$ ve $\lim_{x \to 1^-} f(t) = f(1)$ eşitliklerinin gösterilmesinde cebirsel tekniğin devre dışı bırakılmasına bağlı olarak sezgisel bir yaklaşımdan öteye gidilememesine neden olmaktadır. Bu durumun önüne geçilebilmesi için *uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tipi gerçekleştirilirken cebirsel tekniğe de yer verilmesi gerekmektedir.

5.2.2.3. *Fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi*

Bir fonksiyonun sürekliliği incelenirken, fonksiyonun tanımlı olduğu bütün noktalarda sürekli olup olmadığına bakılır. Bu durumda, süreklilik fonksiyonun sadece tanımlı olduğu noktalarda inceleneceği için fonksiyonda tanımsızlığa neden olan noktaların belirlenmesi önem kazanır. Bu aşamada tanımsızlığın nedenine göre tanımsızlık veya belirsizlik nesnelerinin daha önce limit alma işlemi yaparken de devreye giren ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur. Ardından, fonksiyonun tanımlı olduğu kritik noktalarının olup olmadığı belirlenir ve bu noktalardaki sürekliliği incelenir. Bu aşamada *iç noktadaki* ya da *uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tiplerinde devreye giren ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur.

Örneğin, $f(x)=\frac{1}{x}$ *fonksiyonunun sürekliliğini inceleme* görevi gerçekleşirilirken ilk adımda fonksiyonun tanımsız olduğu nokta belirlenir.

1.Adım: $x=0$ için $f(0)=\frac{1}{0}\notin R$ olup fonksiyon tanımsızdır.

- *Bu adımda yapılan işlem daha önce Tablo 5.2'de* $\frac{a}{0}$ $(a\neq 0)$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma görev tipi için yapılan prakseolojik analizin nümerik teknik 1.adımında yer almaktadır. Bu durumda nümerik teknik kullanılarak* $x=0$ *noktasındaki tanımsızlığın açıklanmasında* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ *limitini alma görevinin lokal sitindeki (Bkz. Şekil 5.19) tanımsızlık nesnesinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur. Analitik tekniğin kullanımında ise tanımsızlığın fonksiyon grafiği ile ilişkilendirilebilmesi için asimptot doğrusuna ihtiyaç duyulur. Bu durumda aynı lokal sitteki asimptot ve sonsuzluk nesnelerinin ekolojik ilişkileri devreye girer.*

Bir sonraki adımda fonksiyonun tanım kümesinde yer alan her noktası için sürekli olduğu belirlenir ve buna bağlı olarak $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun sürekli olduğuna karar verilir.

2.Adım: f fonksiyonunun tanım kümesinde özel olarak sürekliliğin incelenmesini gerektirecek kritik bir nokta yoktur. Bu durumda,

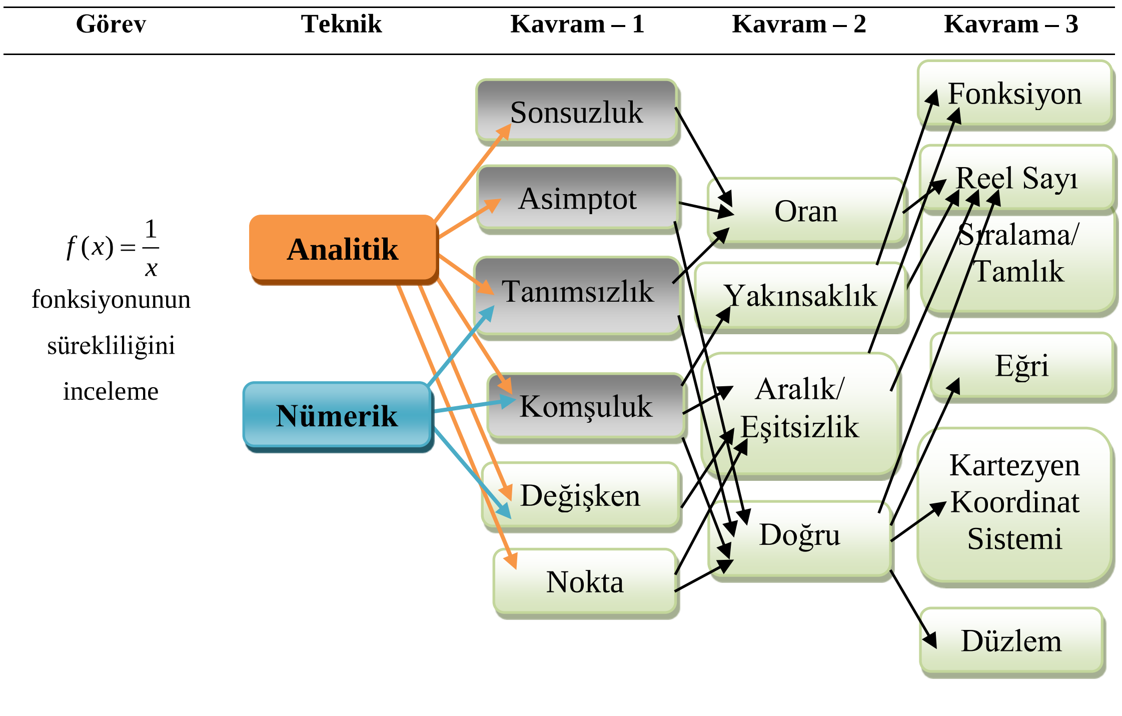
$$\forall x_0 \in R-\{0\} \quad \text{için} \quad f(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0} \tag{5. 29}$$

eşitliği sağlanacağı için $f(x)=\frac{1}{x}$ sürekli bir fonksiyondur.

- *Kritik noktaların belirlenmesi ve bu noktalarda sürekliliğin incelenmesine yönelik ekolojik ilişkiler daha önce iç noktadaki ve uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi görev tiplerinde açıklanmıştır. Bu bilgiler göz önünde tutulduğunda,*

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ *fonksiyonunun tanım kümesinde süreksizliğe neden olabilecek kritik bir noktanın olmadığı görülür. Bu durumda, polinom fonksiyonlarda limit alma görev tipi için ekolojik ilişkilerin yer aldığı Şekil 5.1 lokal siti yardımıyla f fonksiyonun tanım kümesindeki her x_0 elemanı için (5. 29) eşitliğinin sağlandığı belirlenir.*

Şekil 5.49'da $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *fonksiyonunun sürekliliğinin incelenmesi* görevinin gerçekleştirilmesine bağlı olarak ihtiyaç duyulacak ekolojik ilişkilere yer verilmiştir.



Şekil 5.49. *Fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi görev tipi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Şekil 5.49 lokal siti incelendiğinde, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ *limitini alma* görevinin lokal sitinden farklı olarak, nümerik tekniğinin kullanımında sonsuzluk nesnesi ile ekolojik bağ kurulmadığı görülmektedir. Bu farklılığın nedeni $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında tanımsız olmasına bağlı olarak bu noktada süreklilik incelenmesine ihtiyaç duyulmamasıdır.

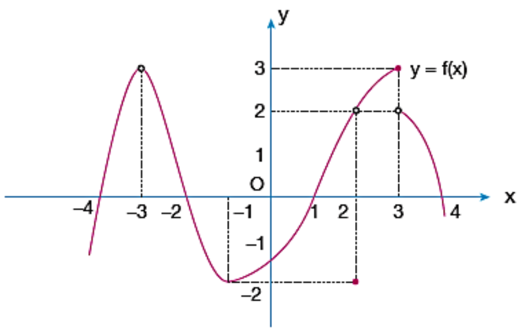
5.2.2.3.1. *Ders kitaplarında bir fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi*

AY ders kitabı incelendiğinde *fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi* görev tipine yönelik örneklere bir noktadaki sürekliliğin incelendiği örneklerin ardından yer verildiği görülmüştür. Bu durumda, süreklilik konusuna yönelik görev tiplerinin kitapta yer alış sırasının çalışmadaki görev tipi sırası ile uyum gösterdiği söylenebilir. AY ders kitabında *fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi* görev tipine yönelik 9 tane örneğe yer verildiği görülmüştür. Bu örneklerden 4 tanesinde nümerik tekniğin, 5 tanesinde ise analitik tekniğin tek başına yer verilmiştir.

Şekil 5.50'de analitik tekniğin tek başına kullanıldığı ilk örnek verilmiştir.

Örnek

Yanda y = f(x) in grafiği verilmiştir. Bu fonksiyonun sürekli olduğu ve olmadığı noktaları inceleyelim.



Çözüm

Verilen fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-3\}$ olduğundan x = –3 te fonksiyonun sürekliliğine bakılmaz.

x = 2 için $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$, $f(2) = -2$ olduğundan $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ dir.

Dolayısıyla y = f(x), x = 2 de sürekli değildir.

x = 3 için $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3$ ve $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$ olduğundan $\lim_{x\to 3} f(x)$ yoktur.

Dolayısıyla y = f(x), x = 3 te sürekli değildir.

Bu noktaların dışında y = f(x) fonksiyonu süreklidir.

Örneğin $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = -2$, $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$ olduğundan y = f(x), x = –1 ve x = 1 noktalarında süreklidir.

Şekil 5.50. *Fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi görev tipine yönelik analitik tekniğin kullanıldığı bir örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.45-46)*

Şekil 5.50'de yer alan örnekte f fonksiyonun sürekliliğinin analitik teknik kullanılarak nasıl incelendiğine yönelik gerekli açıklanmalara yer verilmediği görülmektedir. Örneğin çözümünde $x = 2$ noktasında limit değerinin fonksiyonun görüntüsünden farklı olmasına ve $x=3$ noktasında limitsizliğin nasıl ortaya çıktığına yönelik ekolojik ilişkilere değinilmemiştir. Bu durum, fonksiyonun süreksizliğine karar verilirken grafiğe bağlı olarak sezgisel bir yaklaşım ile sınırlı kalınmasına neden olmaktadır.

BY ders kitabının *Süreklilik* konu başlığı altında *fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi* görev tipine yönelik herhangi bir açıklama veya örneğe yer verilmediği görülmüştür. Analiz global sitinin temel araçları arasındaki ekolojik ilişkiler değerlendirildiğinde türev temel aracının süreklilikten beslendiği görülür. Bu durum, *bir fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi* görev tipine yer verilmemesinin, *bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme* görev tipinin açıklanmasında ekolojik boşlukların oluşmasına neden olabileceğini göstermektedir. Bu bağlamda ortaya çıkan ekolojik boşluklara çalışmanın *Bir fonksiyonun türevlenebilirliğinin incelenmesi* başlıklı bölümünde değinilmiştir.

5.3. Ders Kitaplarının Türev Konusu Kapsamında Analizi

Çalışmanın bu bölümünde ilk olarak 12. sınıf matematik öğretim programı incelenerek türev konusu kapsamında görev tipleri belirlenmiştir. Ardından, belirlenen görev tipleri için lokal sitler oluşturulmuş ve bu sitler temel alınarak ders kitaplarında bulunan örneklerin çözümleri ekolojik açıdan değerlendirilmiştir.

5.3.1. Türev konusu için görev tiplerinin belirlenmesi

Öğretim programında türev konusuna hazırlık yapılmasına yönelik ilk adımın 9. sınıfta fonksiyonlar konusunda atıldığı görülmüştür. Öğretim programında *Fonksiyonlar* konusunun, *Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi* alt başlığında yer alan 2.kazanım ve bu kazanıma yönelik yapılan açıklamalardan biri şu şekildedir:

> **Fonksiyon kavramını açıklar.**
>
> - $f(x)=ax+b$ şeklindeki fonksiyonların grafiği ile ilgili uygulamalar yaptırılır. Değişim hızı ve doğrunun eğimi arasındaki ilişki üzerinde durulur (MEB, 2013, s.7).

Kazanımın açıklamasına göre 9. sınıf düzeyinde değişim hızı ve doğrunun eğimi arasında ilişki kurulmasının, 12. sınıfta anlık değişim oranından hareketle türev kavramının açıklanmasına hazırlık niteliğinde olduğu söylenebilir.

Ortalama değişim ile eğim ilişkisine 10. sınıfta *Fonksiyonlarla İşlemler ve Uygulamaları* başlığının, *Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar* alt başlığında da yer verilmiştir. Bu alt başlıkta yer alan ilk kazanım ve bu kazanıma yönelik açıklamalardan biri şu şekildedir:

> **İki miktar (nicelik) arasındaki ilişkiyi fonksiyon kavramıyla açıklar; problem çözümünde fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanır.**
>
> - Sembolik ifade, grafik veya tablo ile verilen bir fonksiyonun belirli bir aralıktaki ortalama değişim hızı (keseninin eğimi), $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hesaplattırılır (MEB, 2013, s.22).

Açıklamada geçen $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ oranı ile değişim hızı ve doğrunun eğimi arasında ilişki kurulmuş olması, değişim oranından hareketle türev kavramının açıklanmasına hazırlık yapıldığının bir başka göstergesidir.

12. sınıf öğretim programında türev konusu ile ilgili kazanımlar, *Türev* ve *Türevin Uygulamaları* olmak üzere iki başlık altında toplanmıştır. Türev başlığı altında 5 tane kazanıma yer verilmiştir. Türev konusuna yönelik ilk kazanım ve bu kazanıma yönelik açıklamalar şu şekildedir:

> **Fizik ve geometri modellerinden yararlanılarak değişim oranı kavramını açıklar**
>
> - Anlık değişim oranı kavramı açıklanarak, anlık değişim oranına türev denildiği belirtilir.
> - Verilen bir fonksiyonun bir noktadaki türev değeri ile o noktadaki teğetinin eğimi arasındaki ilişki incelenir.
> - $f(x)=c,\ f(x)=x^2$ fonksiyonlarının türevleri, türev tanımı kullanılarak hesaplatılır.
> - $r \in R$ olmak üzere,
>
> $f(x)=x^r,\ f(x)=e^x,\ f(x)=\sqrt{x},\ f(x)=\ln x,\ f(x)=\sin x,\ f(x)=\cos x$
>
>   fonksiyonlarının türevleri kural olarak verilir.
> - Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri verilmez (MEB, 2013, s.46).

Kazanımın ilk iki açıklamasında türev kavramının anlık değişim oranı ve eğim ile ilişkilendirildiği görülmektedir. Bir noktadaki türev değerinin eğimdeki değişim ile ilişkilendirilmesi, türev kavramının açıklanmasında analitik tekniğin kullanımına işaret etmektedir. 3.açıklamada türev tanımından yararlanılarak $f(x)=c$ ve $f(x)=x^2$ fonksiyonlarının türevlerinin türev tanımı kullanılarak hesaplatılması, fonksiyonun iç noktasında türev alma işlemi yapılacağına ve analitik teknikten cebirsel tekniğe geçişin olacağını işaret etmektedir. 4. ve 5. açıklamalarda sırasıyla hangi tür fonksiyonların türevlerinin alınacağı ve hangilerinin kapsam dışında tutulacağı belirtilmiştir.

Öğretim programında türev konusu ilk kazanımına ilişkin açıklamalarda belirtilen türev alma işlemlerinin gerçekleştirilebilmesi için aşağıda verilen görev tiplerinin yerine getirilmesi beklenir.

- Bir hareketlinin anlık hızını bulma
- Fonksiyonun iç noktasında türev alma

Türev konusuna yönelik 2.kazanım ve bu kazanıma yönelik açıklamalar şu şekildedir:

> **Bir fonksiyonun bir noktada ve bir aralıkta türevli olmasını inceler.**
>
> - Tanım kümesi açıkça belirtilmemiş bir fonksiyonun tanım kümesi olarak, fonksiyonun kuralının geçerli olduğu en geniş küme alınır.
> - Fonksiyonun türevli olmadığı noktalarla grafiği arasında ilişki kurulur (MEB, 2013, s.46).

Kazanımdan, fonksiyonların bir noktadaki türevlerinin yanı sıra tanım aralıklarında türevli olup olmadıklarının incelenmesinin öngörüldüğü anlaşılmaktadır. Kazanımın açıklamalarından, türevsizliğe neden olabilecek durumların görev tipi olarak belirleneceği anlaşılmaktadır. Ayrıca, fonksiyonun türevli olmadığı noktaları ile grafiği arasında ilişki kurulması, analitik tekniğin kullanımına işaret etmektedir.

Bir fonksiyonun bir noktada türevinin olması için fonksiyonun o noktada sürekli olması gerekir. Bu durum dikkate alınarak 3.görev tipi,

- Fonksiyonun süreksizliğinin olduğu noktalarda türevini inceleme

olarak belirlenmştir. Bu görev tipine bağlı olan 3 alt görev tipinden bahsedilebilir. Bu alt görev tipleri,

a) Tanımsızlığın olduğu noktada türev
b) Limitin olmadığı noktada türev
c) Limitin olduğu, sürekliliğin olmadığı noktada türev

şeklinde ifade edilmiştir.

Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması o noktada türevli olması için gerekli olduğu halde yeterli değildir. Bu tür durumlara bağlı olarak gerçekleştirilebilecek türev alma işlemleri için temel görev tipi,

- Fonksiyonun sürekli olduğu noktalardaki türevini inceleme

olarak belirlenmiştir. Bu görev tipi için 2 alt görev tipinden bahsedilebilir. Bu alt görev tipleri şunlardır:

a) Köşe noktada türev alma

b) Fonksiyonun uç noktasında türev alma

Türev konusuna yönelik 2.kazanımda bir fonksiyonun bir aralıkta türevli olmasının incelenmesinin öngörüldüğü dikkate alınarak bu kazanıma yönelik son görev tipi,

- Bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme

şeklinde ifade edilmiştir. Bu görev tipi fonksiyonun tanımlı olduğu halde, sürekli olduğu veya olmadığı noktaları fonksiyonun köşe noktalarını ve uç noktalarını kapsadığı için diğer görev tiplerine göre daha genel bir görev tipidir.

Türev konusuna yönelik 3.kazanım ve bu kazanımın açıklaması şu şekildedir:

> **Türevlenebilen iki fonksiyonun toplamının, farkının, çarpımının ve bölümünün türevine ait kuralları açıklar ve bunlarla ilgili uygulamalar yapar.**
>
> - Doğru boyunca hareket eden bir cismin t zamanı içinde aldığı yol ile t anındaki hızı; t anındaki hızı ile t anındaki ivmesi arasındaki ilişki örneklerle incelenir (MEB, 2013, s.46).

Kazanımda geçen kurallar türevin tanımında kullanılan limit alma işlemi sonucunda elde edilebildiği için tez çalışmasında bu kurallar için özel görev tipleri belirlenmesine gerek görülmemiştir. Ayrıca, kazanımın açıklamasında anlık hız ve anlık ivme ile türev kavramının ilişkilendirileceği belirtilmiştir.

Türev konusunda zincir kuralı ile ilişkili olan 4. kazanım şu şekilde ifade edilmiştir:

> - **İki fonksiyonun bileşkesinin türevine ait kuralı (zincir kuralı) oluşturur ve bunu kullanarak türev hesabı yapar** (MEB, 2013, s.46).

Zincir kuralının kullanımı bileşke fonksiyonda türev alma işlemini gerektirdiği için çalışmada bu kazanıma yönelik görev tipi şu şekilde ifade edilmiştir:

- Bileşke fonksiyonun bir noktadaki türevini belirleme

Türev konusunda yüksek mertebeden türev alma ile ilgili olan son kazanım şu şekilde ifade edilmiştir:

> - **Bir fonksiyonun yüksek mertebeden türevini açıklar ve bulur** (MEB, 2013, s.46).

Yüksek mertebeden türev alma, ardışık türev alma işlemi olarak da ifade edilebilir. Türev alma işlemi için gerekli olan ekolojik ilişkiler daha önce belirtilen görev tiplerinde inceleneceği için çalışmada bu kazanıma yönelik özel görev tipi belirlenmesine ihtiyaç görülmemiştir.

5.3.2. Türev konusu lokal sitlerine göre ders kitaplarının analizi

Bu bölümde limit alma ve sürekliliği inceleme görev tipleri için belirlenen ekolojik ilişkilerden de yararlanılarak, türev konusuna yönelik görev tiplerinin gerçekleştirilmesinde hangi ekolojik ilişkilerin ortaya çıktığı belirlenmiştir. Sonrasında elde edilen verilerden yararlanılarak ders kitaplarında türev konusuna yönelik örnek çözümlerinin ekolojik analizleri yapılmıştır.

5.3.2.1. *Bir hareketlinin anlık hızını bulma*

Türev ile anlık değişim hızı arasındaki ilişkinin incelendiği prakseolojik analiz Tablo 5.10'da verilmiştir.

Tablo 5.10. *Bir hareketlinin anlık hızını bulma görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniklerin kullanımına yönelik prakseolojik analizler*

Görev	Başlangıçtaki hızı $0\ m/sn$ olan ve başlangıç noktasına uzaklığı $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ fonksiyonu ile belirlenen bir hareketlinin 1.saniyedeki anlık hızını bulma.
Cebirsel Teknik	**1.Adım** Hareketlinin $[1,\ 1+h]$ zaman aralığındaki ortalama hızını veren fonksiyonu bulmak. **2.Adım** Elde edilen $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ fonksiyonunda $h \to 0$ limit alma işlemi yaparak, hareketlinin 1.saniyedeki anlık hızını $1\ m/sn$ olarak bulmak.
Teknoloji	**1.Adım** Anlık hız, ortalama hız fonksiyonundan elde edilebileceği için ortalama hız fonksiyonunun denklemi bulunur. **2.Adım** $h \to 0$ ortalama hız denklemindeki limit değeri fonksiyonun o noktadaki anlık hızı olarak yorumlanır.
Analitik Teknik	**1.Adım** $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ fonksiyonunun grafiğine, anlık hızın hesaplanacağı noktadan geçecek şekilde $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ oranına bağlı kirişler çizmek. **2.Adım** $\Delta x \to 0$ elde edilen teğet doğrusunun eğim değerini 1 olarak bulmak ve bu değeri anlık hız olarak belirlemek.

Tablo 5.10. (Devam) *Bir hareketlinin anlık hızını bulma görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniklerin kullanımına yönelik prakseolojik analizler*

Teknoloji	**1.Adım** Anlık hız ortalama hızdan yararlanılarak belirlenebilir. Buna göe konum zaman fonksiyonuna $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranına bağlı olarak çizilen kirişlerin eğimleri Δx zaman aralığındaki ortalama hızı verir. **2.Adım** Bir hareketlinin belirli bir andaki hızı, konum zaman fonksiyonuna o noktada çizilen teğet doğrusunun eğimine eşittir. Teğet doğrusunun eğimi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ değişim oranına bağlı olarak $\Delta x \to 0$ limit işlemi yapılarak belirlenebilir.
Nümerik Teknik	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ortalama hız fonksiyonunda h 'a sıfıra gittikçe yaklaşan değerler vererek anlık hızı $1\ m/sn$ olarak belirlemek.
Teknoloji	Anlık hız ortalama hızın $h \to 0$ limit değerine eşittir.

Tablo 5.10'da verilen prakseolojik analizin cebirsel tekniğe yönelik teknolojisinin ilk adımında; $[1,\ 1+h]$ zaman aralığı için ortalama hızı veren fonksiyona ihtiyaç duyulmuştur. Fonksiyondaki bağımsız değişkenin değişime bağlı olarak belirli bir zaman aralığındaki ortalama hızın elde ediliyor olması değişken nesnesinin, aralık/ eşitsizlik nesneleri ile ekolojik ilişkisi yardımıyla açıklanır. Ayrıca, belirli bir zaman aralığındaki ortalama hız değerinin belirlenmesi için ortalama hızı veren fonksiyona ihtiyaç duyuluyor olması aralık/eşitsizlik nesnelerinin fonksiyon ve reel sayı nesneleri ile ekolojik bağ kurduğunu göstermektedir. Konum-zaman fonksiyonuna göre belirli bir zaman aralığında ortalama hız hesaplanırken; bu zaman aralığında yoldaki değişim ile zamandaki değişim oranlanır. Bu aşamada diferansiyel nesnesi ile oran ve aralık/eşitsizlik nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiler devreye girer. Elde edilen oran değerinin bir reel sayıya eşit olduğu düşünüldüğünde; oran nesnesinin reel sayı nesnesi ile ekolojik ilişki kurduğu görülür.

Cebirsel tekniğe yönelik prakseolojik analizin teknoloji bölümü ikinci admında ortalama hızdan anlık hıza nasıl geçilebileceği belirtilmiştir. Buna göre ortalama hızın hesaplandığı zaman aralığının (bağımsız değişken) sıfıra yaklaşmasına bağlı olarak ortaya çıkan,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1 \qquad (5.\ 30)$$

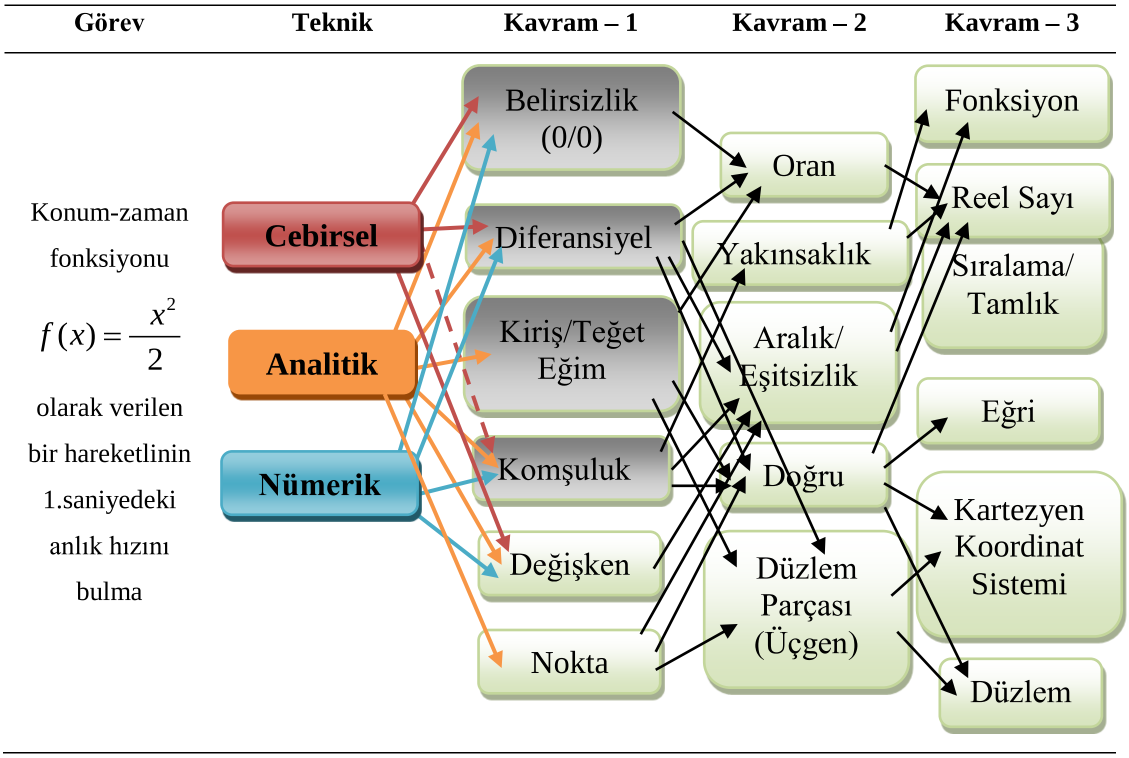
limit değeri hareketlinin 1.saniyedeki anlık hızını vermektedir. Ortalama hız fonksiyonunda $h = 0$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin ortaya çıkıyor olması (5. 30) limit işleminin gerçekleştirilmesinde $\frac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görev tipine bağlı olarak devreye giren ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulacağını göstermektedir.

Tablo 5.10'da verilen prakseolojik analizin cebirsel ve analitik tekniğe yönelik teknolojileri karşılaştırıldığında, cebirsel tekniğin kullanımında anlık hızın belirlenmesi amacıyla yapılan limit alma işleminin, analitik tekniğin kullanımında fonksiyon grafiğine çizilen kiriş ve teğetlerin eğimlerinden yola çıkılarak yapıldığı görülmektedir. Bu durum, analitik tekniğin kullanımında, cebirsel tekniğin kullanımına bağlı olarak devreye giren ekolojik ilişkilerin yanı sıra nokta, kiriş, teğet gibi geometrik nesnelerin ekolojik ilişkilerine de ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir. Analitik tekniğin teknoloji bölümünde, bir hareketlinin anlık hızı belirlenirken, konum-zaman grafiği üzerine anlık hızın hesaplanacağı nokta ile bu noktanın komşuluğunda bulunan noktalardan geçecek şekilde çizilebilecek kirişlerin eğim değerlerinden ve teğetin eğiminden yararlanılabileceği belirtilmiştir. Konum-zaman fonksiyonuna çizilebilecek teğet ve kirişler birer özel doğru oldukları için bu aşamada kiriş ve teğet nesneleri ile doğru nesnesi arasındaki ekolojik ilişkiler devreye girer. Kiriş doğrularının ve teğet doğrusunun çizilebilmesi için fonksiyon üzerinde bu doğruların geçeceği noktaların yerlerinin belirlenmesi gerekir. Bu durum nokta, doğru ve eğri nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiler yardımıyla açıklanır. Kiriş doğruları çizilirken, fonksiyonun tanımlı olduğu ve anlık hızın hesaplanacağı noktanın da içinde yer aldığı bir aralığın belirlenmesine ihtiyaç duyulur. Komşuluğun koordinat doğrusu üzerinde yer alan bir aralık olarak belirlenmesi, bu nesnenin aralık/eşitsizlik ve doğru nesneleri ile ekolojik ilişkileri yardımıyla açıklanır. Anlık hızın hesaplanacağı noktanın koordinat doğrusu üzerinde belirlenen bir aralıkta yer alması ise nokta nesnesinin aralık/eşitsizlik ve doğru nesneleri ile ekolojik ilişkileri yardımıyla açıklanır. Ayrıca, aralığın fonksiyonun tanım kümesine göre belirlenmesi ve reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerinden yararlanılarak oluşturulması, aralık/eşitsizlik nesneleri ile fonksiyon ve reel sayı nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerin devreye girdiğini gösterir.

Kiriş doğrularının eğimlerinin bulunmasında hipotenüsleri kiriş doğrularının üzerinde olacak şekilde çizilen dik üçgenlerden (düzlem parçaları) yararlanılır. Bu aşamada kiriş ve eğim nesnelerinin düzlem parçası nesnesi ile ekolojik ilişkileri devreye girer. Üçgenlerin, noktaların bir araya gelmesi sonucunda çizilebiliyor olması, nokta ile düzlem parçası nesnesi arasında özelden genele bir ekolojik ilişki olduğunu gösterir. Ayrıca, üçgenlerin koordinat düzleminde çiziliyor olması, kartezyen koordinat sistemi ile düzlem nesnelerinin, düzlem parçası (üçgen) nesnesini ekolojik olarak beslediğini gösterir. Çizilen üçgenlerin dik kenarları belirli bir zaman aralığı ve bu zaman aralığında alınan yolu ifade eder. Kirişlerin ve teğet doğrusunun eğimleri, üçgenlerin karşı dik kenar uzunluklarının komşu dik kenar uzunluklarına oranı ile bulunur. Bu aşamada oran nesnesi kiriş, teğet ve eğim nesnelerini ekolojik olarak beslemiş olur. Kiriş doğruları değiştikçe üçgenlerin dik kenar uzunlukları arasındaki oran değeri de değişmekte ve bu değişimle beraber diferansiyel nesnesi devreye girmektedir. Bu durum, oran, doğru ve düzlem parçası (üçgen) nesnelerinin diferansiyel nesnesini ekolojik olarak beslediğini göstermektedir. Buna göre, elde edilen oran değerleri anlık hızın hesaplanacağı noktadan geçen teğetin eğim değerine yaklaşmakta ve böylelikle anlık hız değeri olan reel sayı elde edilmektedir. Ortalama hızın hesaplandığı zaman aralığı daraldıkça çizilen üçgenlerin kenar uzunlukları da kısalır. Zaman aralığı sıfır olduğunda dik üçgenler artık bir noktaya dönüşeceği için eğim değeri hesaplanamaz olur. Bu durum $h=0$ değeri için $g(h)=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ oranında elde edilen belirsizliğin analitik teknikteki karşılığını ifade eder. Böylelikle analitik teknik, cebir bilgisine dayalı ekolojik ilişkiler ile geometri bilgisine dayalı ekolojik ilişkilerin birbirleri ile entegre olmasına olanak sağlamış olur.

Tablo 5.10’da verilen prakseolojik analizin nümerik tekniğe yönelik teknolojisi bölümünde, hareketlinin 1.saniyedeki hızını veren (5. 30) limit değerinin ortalama hız fonksiyonunda bağımsız değişkene $h=0$ sayısının komşuluğunda değerler verilerek belirlenebileceği ifade edilmiştir. Bu durum, anlık hız bulma görevinin nümerik teknik kullanılarak gerçekleştirilmesinde, $\dfrac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görev tipinin gerçekleştirilmesine bağlı olarak devreye giren ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulacağını göstermektedir.

Bir hareketlinin anlık hızını bulma görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına bağlı olarak ortaya çıkan ekolojik ilişkiler Şekil 5.51’de verilmiştir.



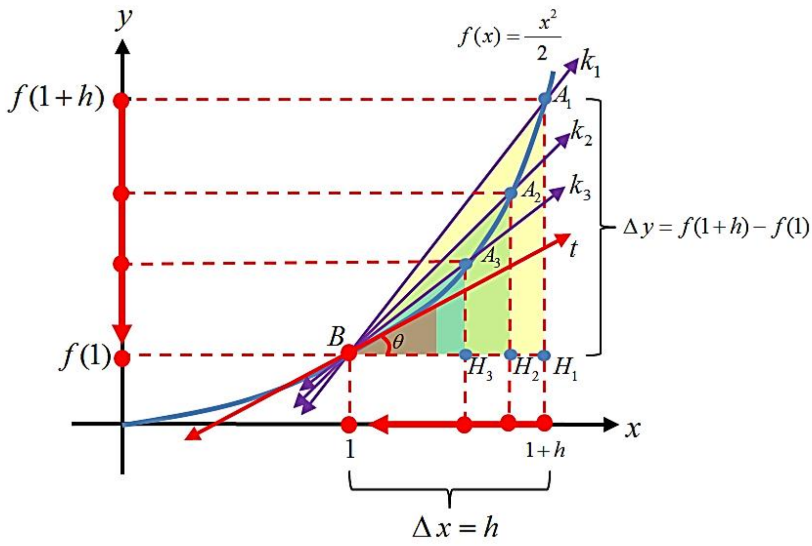
Şekil 5.51. *Bir hareketlinin anlık hızını bulma görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Şekil 5.51 lokal siti incelendiğinde analitik tekniğin cebirsel ve nümerik tekniklerin ekolojik ilişkilerini de kapsayan zengin bir ekolojik yapıya sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca, Şekil 5.51 lokal sitinde yer alan üç farklı teknikten yalnızca analitik tekniğin türev temel aracının kiriş, teğet ve eğim kritik nesneleri ile ekolojik ilişki kurabildiği görülmektedir.

Örnek 5.8'de $f(x)=\frac{x^2}{2}$ konum-zaman fonksiyonuna göre hareket eden bir cismin $x=1$ anındaki hızı Şekil 5.51'de verilen ekolojik ilişkiler yardımıyla cebirsel, analitik ve nümerik teknik bir arada kullanılarak belirlenmiştir.

Örnek 5.8. Başlangıçtaki hızı $0\ m/sn$ olan ve başlangıç noktasına uzaklığı $f(x)=\frac{x^2}{2}$ fonksiyonu ile belirlenen bir hareketlinin 1.saniyedeki anlık hızını bulma.

Çözüm Şekil 5.52'de bu hareketlinin kartezyen koordinat sisteminde çizilen konum-zaman grafiği verilmiştir.



Şekil 5.52. *Analitik teknik kullanılarak bir hareketlinin anlık hızının belirlenmesi*

Şekil 5.52'deki grafikte Δx ortalama hızın hesaplandığı zaman aralıklarındaki değişimi, Δy ise bu zaman aralıklarında alınan yolu ifade etmektedir. Grafiğe göre zaman aralığı 1 değerine yaklaşarak daraldıkça alınan yolda $f(1)$ değerine yaklaşarak kısalmaktadır. $A_1, A_2, A_3, ...A_n, ...$ noktalarından geçen kirişlerin eğimleri, dik üçgenler yardımıyla $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ değişim oranı şeklinde ifade edilir. Elde edilen oran değerleri aynı zamanda hareketlinin belirlenen zaman aralıklarındaki ortalama hızını verir.

Tablo 5.11'de bazı $\Delta x = h$ zaman aralıkları için $k_1, k_2, k_3, ...$ kirişlerinin $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eğim değerleri verilmiştir.

Tablo 5.11. $f(x)=\frac{x^2}{2}$ *fonksiyonun grafiğine çizilen bazı* $k_1, k_2, k_3, ...$ *kirişlerinin eğim değerlerinin* t *teğet doğrusunun eğimine yakınsaması*

h	**1**	**3/4**	**1/2**	**1/4**	**1/8**	**1/16**
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	1,5	1,375	1,25	1,125	1,0625	≈ 1,031
h	**1/32**	**1/64**	**1/128**	**1/256**	**1/512**	$h \to 0$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	≈ 1,015	≈ 1,0078	≈ 1,0039	≈ 1,0019	≈ 1,0009	$m_t = \tan\theta = 1$

Tablo 5.11'e göre $h \to 0$ eğim değerlerinin 1'e yaklaştığı görülmektedir. Bu değer aynı zamanda B noktasında fonksiyona teğet olan doğrunun eğimi olup hareketlinin 1.saniyedeki anlık hızına eşittir. Eğim değeri cebirsel teknik kullanılarak,

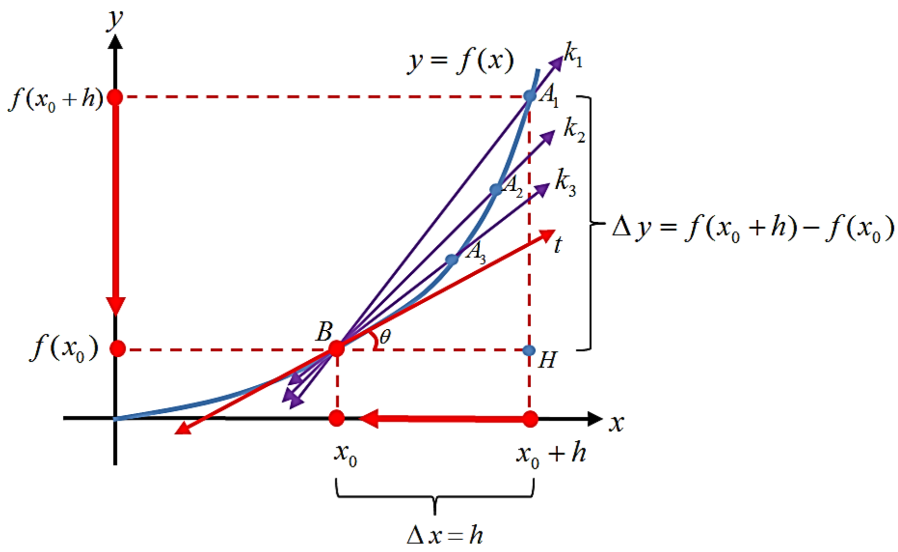
$$\tan\theta = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)^2}{2} - \frac{1^2}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h-1).(1+h+1)}{2.h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h.(2+h)}{2.h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)}{2} = 1\ m/sn \qquad (5.\ 31)$$

şeklinde bulunur.

5.3.2.1.1. *Bir noktadaki türevin genel ifadesi*

Bu bölümde Şekil 5.51 lokal sitindeki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak türevlenebilen bir f fonksiyonunun tanımlı olduğu x_0 noktasındaki türevini veren genel ifade analitik teknik kullanılarak elde edilmiştir.

Şekil 5.53'te $y = f(x)$ konum-zaman fonksiyonuna sahip bir hareketlinin x_0 anındaki hızı, analitik düzlemde x_0 noktasından geçecek şekilde çizilen kiriş doğruları ve teğet doğrusu yardımıyla ifade edilmiştir.



Şekil 5.53. *Bir hareketlinin* $x = x_0$ *anındaki hızının analitik teknik kullanılarak ifade edilmesi*

Şekil 5.53'e göre, hareketlinin $x = x_0$ anındaki hızı, bu noktadan geçen teğet doğrusunun eğimine eşittir. Bu değer aynı zamanda f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevidir ve

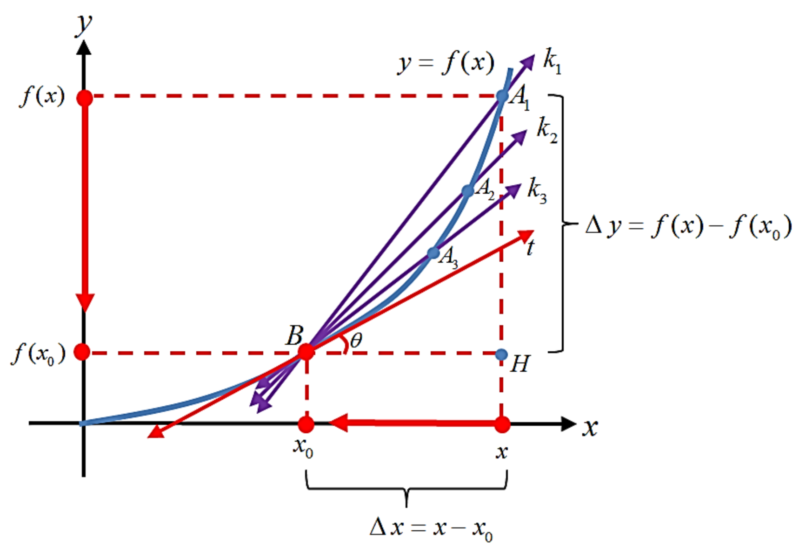
$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5. 32}$$

şeklinde ifade edilir.

5.3.2.1.2. ***Bir noktadaki türevin bulunması için alternatif limit ifadesi***

Bu bölümde Şekil 5.51 lokal sitindeki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak türevlenebilir bir f fonksiyonunun tanımlı olduğu bir x_0 noktasında türevinin bulunması için kullanılan alternatif formül elde edilmiştir.

Şekil 5.54'te, $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi, analitik düzlemde x_0 noktasından geçecek şekilde çizilen kiriş doğruları ve teğet doğrusu yardımıyla ifade edilmiştir.



Şekil 5.54. $y = f(x)$ *fonksiyonunun* $x = x_0$ *noktasındaki türevinin analitik teknik kullanılarak farklı bir alternatif ile gösterilmesi*

Şekil 5.53'te verilen grafikte A_1 noktasının apsisi x olarak değiştirildiğinde; $\Delta x = h$ uzunluğu $x - x_0$, Δy uzunluğu ise $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ olarak değişir. Bu durumda Şekil 5.54'te verilen grafiğe göre $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi,

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{5. 33}$$

olarak ifade edilir.

5.3.2.1.3. ***Türevin farklı notasyonları ve diferansiyel nesnesi***

$y = f(x)$ fonksiyonunun türevlerini ifade etmek için öğretim programında kullanımı öngörülen notasyonlar şunlardır (MEB, 2013, s.46) :

$$f'(x),\ \ f''(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2} \tag{5. 34}$$

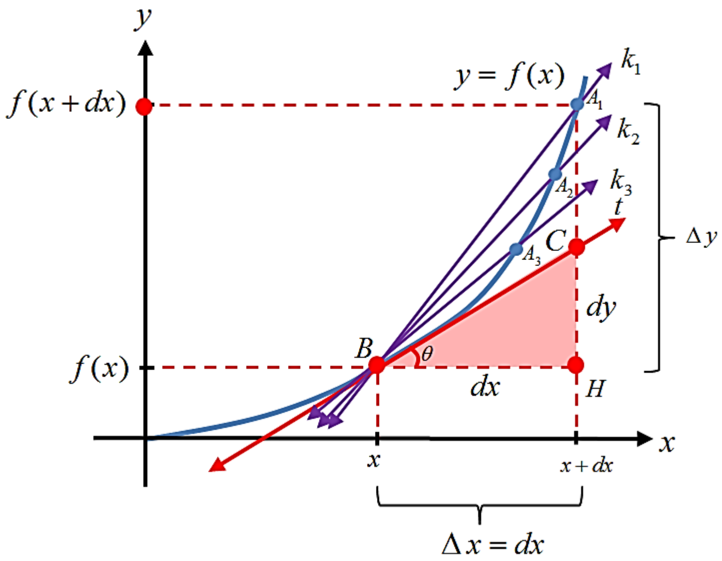
Bu notasyonlarda kullanılan dy ve dx diferansiyeller olarak adlandırılır. $\dfrac{dy}{dx}$ diferansiyel oranı, türevin en sık kullanılan notasyonlarından birisidir. Türev konusunda zincir kuralı ifade edilirken yazılan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} . \frac{dt}{dz} . \frac{dz}{dx} \tag{5. 35}$$

eşitliğinde de bu notasyondan yararlanılır.

Türev alma işleminin ifade edilmesinde diferansiyel nesnesine ihtiyaç duyulması, bu nesnenin türev konusuna yönelik matematiksel dilin geliştirilmesinde kritik bir öneme sahip olduğunu göstermektedir. Ayrıca, *bir hareketlinin anlık hızını bulma* görev tipi için oluşturulan Şekil 3.T.2 lokal siti incelendiğinde bütün tekniklerin kullanımında diferansiyel nesnesinin ekolojik olarak devreye girdiği de görülmektedir. Çalışmanın bu bölümünde diferansiyel nesnesi, türev konusu için kritik önemi dikkate alınarak, Şekil 5.51 lokal sitindeki ekolojik ilişkiler yardımıyla analitik teknik kullanılarak açıklanmıştır.

Şekil 5.55'te diferansiyel kavramı fonksiyonun koordinat düzleminde çizilen grafiği üzerinde analitik teknik kullanılarak açıklanmıştır.



Şekil 5.55. *Analitik teknik kullanılarak türev-diferansiyel ilişkisinin açıklanması*

Şekil 5.55'te verilen dy ve dx diferansiyelleri $y = f(x)$ fonksiyonunun belirli aralıklardaki değişimini ifade eden reel sayılardır. Buna göre dx uzunluğu fonksiyonun $(x,\ x+dx)$ aralığındaki değişimini; dy uzunluğu ise $k_1, k_2, k_3, \dots$ kiriş eğimlerinin t doğrusunun eğim değerine yaklaşması sonucunda Δy aralığında ortaya çıkan değişimi ifade eder. Bu durumda t teğet doğrusunun eğimi,

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad (5.\ 36)$$

şeklinde ifade edilebilir. (5. 36) eşitliğinde içler-dışlar çarpımı yapıldığında dy diferansiyeli,

$$dy = f'(x)dx \qquad 5.\ 37)$$

olarak bulunur.

Şekil 5.51 lokal siti incelendiğinde gerek diferansiyel nesnesinin, gerekse teğet/eğim nesnelerinin doğru ve düzlem parçası (üçgen) nesneleri ile ekolojik bağ kurdukları görülmektedir. Bu ekolojik ilişkilerin diferansiyel nesnesinin açıklanmasında ne denli önemli olduğu, Şekil 5.55'te verilen grafik incelendiğinde daha iyi anlaşılmaktadır. Buna göre diferansiyel, teğet ve eğim nesnelerinin doğru nesnesi ile ekolojik ilişkilerinden yararlanılarak $\frac{dy}{dx}$ diferansiyel oranının aynı zamanda t teğet doğrusunun eğimini ifade ettiği belirlenmektedir. Ayrıca, dy ve dx uzunlukları aynı zamanda $\overset{\Delta}{CBH}$ üçgeninin dik kenar uzunluklarıdır. Bu durum düzlem parçası (üçgen) nesnesinin, diferansiyel nesnesi ile teğet ve eğim nesneleri arasında ekolojik bağ kurulmasına aracılık ettğini göstermektedir.

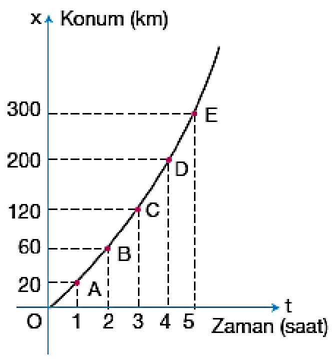
5.3.2.1.4. ***Ders kitaplarında bir hareketlinin anlık hızını bulma***

AY matematik ders kitabı incelendiğinde, türev kavramına öğretim programına uygun bir biçimde anlık hız ile ilişkilendirilerek giriş yapıldığı görülmüştür. Ders kitabında *bir hareketlinin anlık hızını bulma* görev tipine yönelik bir örneğe yer verilmiştir. Şekil 5.56'da cebirsel tekniğin analitik teknik ile birlikte kullanıldığı bu örnek yer almaktadır.

12.1.2.1. TÜREV KAVRAMI

Örnek

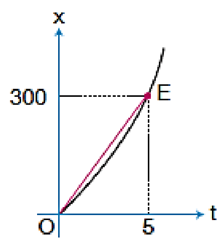
Yanda bir hareketlinin konum – zaman grafiği verilmektedir. Bu hareketlinin, zamana bağlı konumu $x(t) = 10t^2 + 10t$ fonksiyonu ile verildiğine göre bu hareketlinin belirli zaman aralıklarındaki ortalama hızını bulalım.



Çözüm

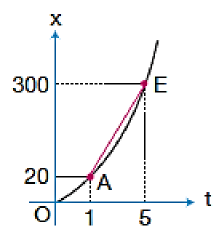
Bu aracın 0 ile 5. saatler arasındaki ortalama hızı

$$V_{ort} = \frac{x(5)-x(0)}{5-0} = \frac{300-0}{5} = 60\,\text{km/saat olur.}$$



1 ile 5. saatler arasındaki ortalama hızı

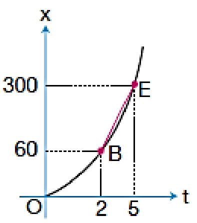
$$V_{ort} = \frac{x(5)-x(1)}{5-1} = \frac{300-20}{4} = 70\,\text{km/saat olur.}$$



Şekil 5.56. *Bir hareketlinin anlık hızını bulma görev tipine yönelik örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.55-57)*

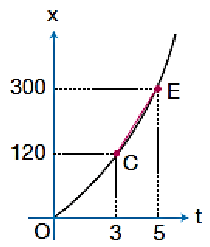
2 ile 5. saatler arasındaki ortalama hızı

$$V_{ort} = \frac{x(5) - x(2)}{5 - 2} = \frac{300 - 60}{3} = 80 \text{ km/saat olur.}$$



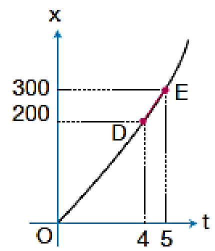
3 ile 5. saatler arasındaki ortalama hızı

$$V_{ort} = \frac{x(5) - x(3)}{5 - 3} = \frac{300 - 120}{2} = 90 \text{ km/saat olur.}$$



4 ile 5. saatler arasındaki ortalama hızı

$$V_{ort} = \frac{x(5) - x(4)}{5 - 4} = \frac{300 - 200}{1} = 100 \text{ km/saat olarak bulunur.}$$



Ortalama hız bulunurken konumdaki değişim ile zamandaki değişimin oranı hesaplanmaktadır.

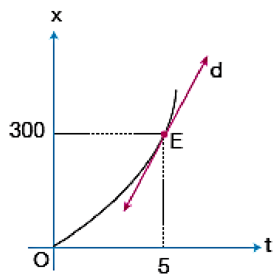
Şimdi bu aracın tam 5. saatteki anlık hızını bulmaya çalışalım.

$$\frac{x(5) - x(t)}{5 - t} = \frac{300 - (10t^2 + 10t)}{5 - t}$$

$$= \frac{-10t^2 - 10t + 300}{5 - t} \text{ elde edilir.}$$

Burada $\lim\limits_{t \to 5} \frac{-10t^2 - 10t + 300}{5 - t}$ limiti çözüldüğünde

$\lim\limits_{t \to 5} \frac{10 . \cancel{(5 - t)} . (t + 6)}{\cancel{5 - t}} = 110$ km/saat bulunur. Bu değer tam t = 5 teki anlık değişim oranı yani aracın t = 5 teki anlık hızıdır. Bu değer aynı zamanda t = 5 te yani E noktasında fonksiyonun grafiğine çizilen teğetin eğimidir.



d doğrusunun eğimi 110 dur.

Şekil 5.56. (Devam) *Bir hareketlinin anlık hızını bulma görev tipine yönelik örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.55-57)*

Şekil 5.56 incelendiğinde, ortalama hızdan hareket edilerek anlık hız açıklanırken analitik tekniğin kullanımına bağlı olarak kiriş ve teğet doğrularından yararlanıldığı görülmektedir. Türev kavramına girişte kritik nesne olarak belirlenen kiriş ve teğet nesnelerinin ekolojik ilişkilerine yer verilmiş olması, türev kavramının sezgisel bir yaklaşım ile açıklanmasına olanak sağlamıştır. Örneğin çözümünde cebirsel tekniğe de yer verilmesi sezgisel yaklaşım ile formel yaklaşım arasında geçiş yapılmasına olanak sağlamıştır. Öte yandan, Şekil 5.56'da grafiğe çizilen kirişlerin ve teğetin eğimlerinin bulunmasında dik üçgenlerden yararlanılmadığı görülmektedir. Bu durum Şekil 5.51 lokal sitindeki düzlem parçası (üçgen) nesnesinin devre dışı bırakılmasına bağlı olarak eğim nesnesinin ekolojik ilişkilerinde kopukluğa neden olmuştur. Buna göre, düzlem parçası (üçgen) nesnesinin devre dışı bırakılmasına bağlı olarak, ortalama hızdan anlık hıza geçişte eğim değerlerindeki değişimin grafik üzerinden incelenmesi güçleşmiştir.

BY matematik ders kitabı incelendiğinde türev kavramına *Bir Fonksiyonun Değişim Oranı* başlığı altında öğretim programına uygun bir biçimde anlık hız ile türev kavramı ilişkilendirilerek giriş yapıldığı görülmüştür. Ders kitabında *bir hareketlinin anlık hızını bulma* görev tipine yönelik 3 tane örneğe yer verildiği görülmüştür. İlk örneğin çözümünde cebirsel teknik ile nümerik teknik bir arada kullanılmış ve ardından analitik tekniğin kullanıldığı bilgilendirmeye yer verilmiştir. 2. örneğin çözümünde cebirsel teknik ile analitik teknik bir arada kullanılmıştır. Son örneğin çözümünde ise cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı görülmüştür. Şekil 5.57'de ders kitabında yer alan ilk örneğe ve sonrasında yapılan bilgilendirmeye yer verilmiştir.

1.2.1. Bir Fonksiyonun Değişim Oranı

Örnek

Bir doğru boyunca hareket eden bir parçacığın t saniyede aldığı yol, $s(t) = t^2 + 3t$ (metre) fonksiyonu ile modelleniyor. Buna göre,

a) Parçacığın $[5,6], [5, (5,5)], [5, (5,3)], [5, (5,2)], [5, (5,1)], [5, (5,01)], [5, (5,001)]$ zaman aralıklarındaki ortalama hızlarını bularak $t = 5$ anındaki hızını tahmin edelim.

b) Parçacığın $[5, 5+h]$ aralığındaki ortalama hızını bulup $h \to 0$ için limitini bulalım.

Şekil 5.57. *Bir hareketlinin anlık hızını bulma görev tipine yönelik örnek ve bilgilendirme (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.34-36)*

Çözüm

a) Ortalama hız, $V_{ort} = \dfrac{\text{Alınan yol}}{\text{Geçen toplam süre}} = \dfrac{\triangle s}{\triangle t} = \dfrac{s(t_n) - s(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}$ dir.

Aşağıdaki tabloyu incelediğimizde, zaman aralığı azaldıkça yani 5. saniyeye yaklaştıkça, ortalama hızın 13 m/sn ye yaklaştığı görülür.

$[t_1, t_2]$	$V_{ort} = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$[5, 6]$	$V_{ort} = \dfrac{6^2 + 3 \cdot 6 - (5^2 + 3 \cdot 5)}{6 - 5} = 14$
$[5, (5,5)]$	$V_{ort} = \dfrac{(5,5)^2 + 3 \cdot (5,5) - (5^2 + 3 \cdot 5)}{5,5 - 5} = 13,50$
$[5, (5,3)]$	$V_{ort} = \dfrac{(5,3)^2 + 3 \cdot (5,3) - (5^2 + 3 \cdot 5)}{5,3 - 5} = 13,30$
$[5, (5,2)]$	$V_{ort} = \dfrac{(5,2)^2 + 3 \cdot (5,2) - (5^2 + 3 \cdot 5)}{5,2 - 5} = 13,20$
$[5, (5,1)]$	$V_{ort} = \dfrac{(5,1)^2 + 3 \cdot (5,1) - (5^2 + 3 \cdot 5)}{5,1 - 5} = 13,10$
$[5, (5,01)]$	$V_{ort} = \dfrac{(5,01)^2 + 3 \cdot (5,01) - (5^2 + 3 \cdot 5)}{5,01 - 5} = 13,01$
$[5, (5,001)]$	$V_{ort} = \dfrac{(5,001)^2 + 3 \cdot (5,001) - (5^2 + 3 \cdot 5)}{5,001 - 5} = 13,001$

Tabloda $t = 5$ değerine sağdan yaklaştıkça V_{ort} değeri de 13 e yaklaşmaktadır. O hâlde parçacığın $t = 5$ saniye anındaki hızını da 13 m/sn olarak tahmin edebiliriz.

b) $[5, \ 5 + h]$ zaman aralığındaki ortalama hızı

$$V_{ort} = \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$$

$$= \frac{(5 + h)^2 + 3 \cdot (5 + h) - (5^2 + 3 \cdot 5)}{(5 + h) - 5}$$

$$= \frac{\cancel{25} + 10h + h^2 + \cancel{15} + 3h - \cancel{25} - \cancel{15}}{h} = \frac{h^2 + 13h}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(h + 13)}{\cancel{h}} = h + 13 \text{ olur.}$$

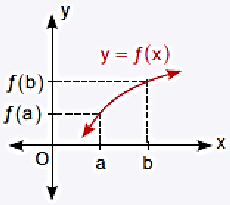
$$V_{ort} = \lim_{h \to 0} (h + 13) = 0 + 13 = 13 \text{ olur.}$$

Başka bir ifadeyle parçacığın $t = 5$ anındaki anlık hızı, 13 m/sn bulunur.

Şekil 5.57. (Devam) *Bir hareketlinin anlık hızını bulma görev tipine yönelik örnek ve bilgilendirme (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.34-36)*

Bilgi

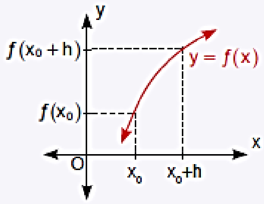
Yandaki grafikte $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ifadesine f fonksiyonunun $[a,b]$ ndaki **değişim oranı** denir.



Yanda f fonksiyonunun $[x_0, x_0+h]$ ndaki değişim oranı

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ dir.}$$



Burada $h \to 0$ için $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ değerine de f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki **anlık değişim oranı** denir.

Şekil 5.57. (Devam) *Bir hareketlinin anlık hızını bulma görev tipine yönelik örnek ve bilgilendirme (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.34-36)*

Şekil 5.57 incelendiğinde, örnek çözümünün a) bölümünde nümerik teknik kullanılarak anlık hız tahmininin yapıldığı, b) bölümünde ise bu tahminin cebirsel teknik kullanılarak doğrulandığı görülmektedir. *Bilgi* bölümünde ise analitik teknik kullanılarak anlık değişim oranına ilişkin genelleme yapılmıştır. Örneğin çözümünde analitik tekniğe yer verilmemesinin, kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin ekolojik ilişkilerinin yoksunluğuna bağlı olarak, anlık hız hesabına fonksiyon grafiği üzerinde somut bir yaklaşım ile giriş yapılmasını engellediği söylemek mümkündür. Ayrıca, *Bilgi* bölümünde analitik teknik kullanılarak anlık değişim oranı ifade edilirken kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılmadığı görülmektedir. Bu durum, yapılan bilgilendirmede analitik teknik kullanılmış olmasına rağmen, grafik üzerinden değerlendirme yapılarak anlık değişim oranının sezgisel bir yaklaşımla açıklanmasını engellemiştir.

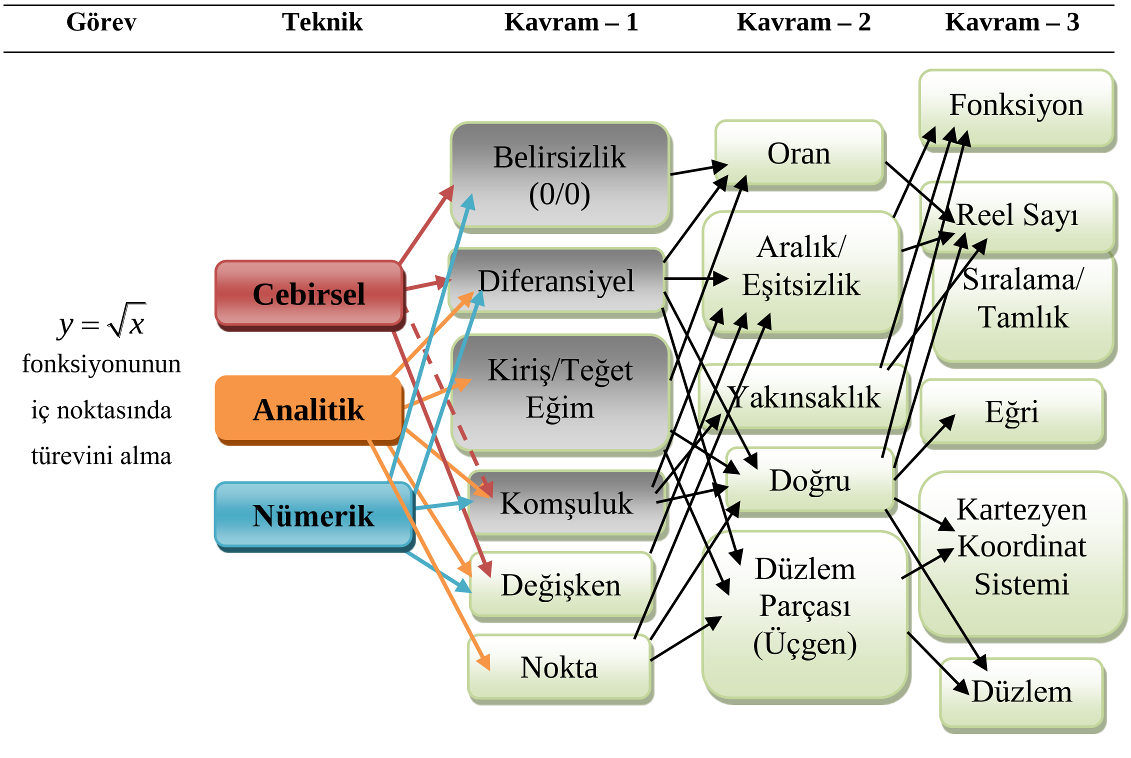
AY ve BY ders kitaplarının türev ve integral konuları incelendiğinde dx, dy, $df(x)$ $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d}{dx}f(x)$ notasyonları yaygın bir biçimde kullanıldığı halde dx, $df(x)$ veya dy ifadelerinin ne anlama geldiği, türev ve integral alma işlemleri ile ilgisinin ne olduğu veya diferansiyel alma işleminin nasıl yapıldığı ile ilgili herhangi bir açıklamaya yer verilmediği görülmüştür. Öte yandan Şekil 5.51 lokal siti incelendiğinde, diferansiyel nesnesinin bütün tekniklerin kullanımında devreye girdiği görülmektedir. Diferansiyel nesnesinin ekolojik ilişkileri değerlendirildiğinde, bu kavramın türev konusu içerisinde açıklanmasına engel oluşturabilecek bir durumun olmadığı da görülmektedir. Bu durumda, ekolojik bir engel bulunmadığı halde, türev alma işleminde kritik ekolojik görevler üstlenen diferansiyel nesnesine ders kitaplarında yer verilmemiş olmasının önemli bir ekolojik sorun olduğunu söylemek mümkündür.

5.3.2.2. *Fonksiyonun iç noktasında türev alma*

Bir fonksiyonun kritik olmayan bir iç noktasında türev alma işlemi yapılırken, sağdan ve soldan türevlerin birbirine eşit bir reel sayı olmasına bağlı olarak fonksiyonun bu noktada türevli olduğuna karar verilir. Buna göre, *bir hareketlinin anlık hızını bulma* görev tipinden farklı olarak iki taraflı türev alma işlemi yapılır. Bu durum, kullanılabilecek tekniklerin ekolojik ilişkilerinde *bir hareketlinin anlık hızını bulma* görev tipine göre farklılıkların ortaya çıkmasına neden olmayacaktır. Başka bir ifade ile bir fonksiyonun kritik olmayan bir iç noktasında türev alma işleminin yapılabilmesi için Şekil 5.51 lokal sitindeki ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulacağını söylemek mümkündür.

Bu bölümde örnek olarak $y=\sqrt{x}$ fonksiyonunun cebirsel ve analitik teknik kullanılarak bir iç noktasındaki türevi alınacaktır. Analitik tekniğin daha sade ve anlaşılır bir biçimde kullanılabilmesi için sadece teğet doğrusunun eğimi ifade edilirken düzlem parçası (dik üçgen) nesnesine yer verilecektir. Bu durumda, kirişlerin altına çizilen üçgenlerin küçülmelerine bağlı olarak noktaya dönüşmelerinden kaynaklanan belirsizlik durumu ortaya çıkmayacağı için oluşturulacak lokal sitte analitik tekniğin belirsizlik nesnesi ile ilişkilendirilmesine ihtiyaç duyulmayacaktır.

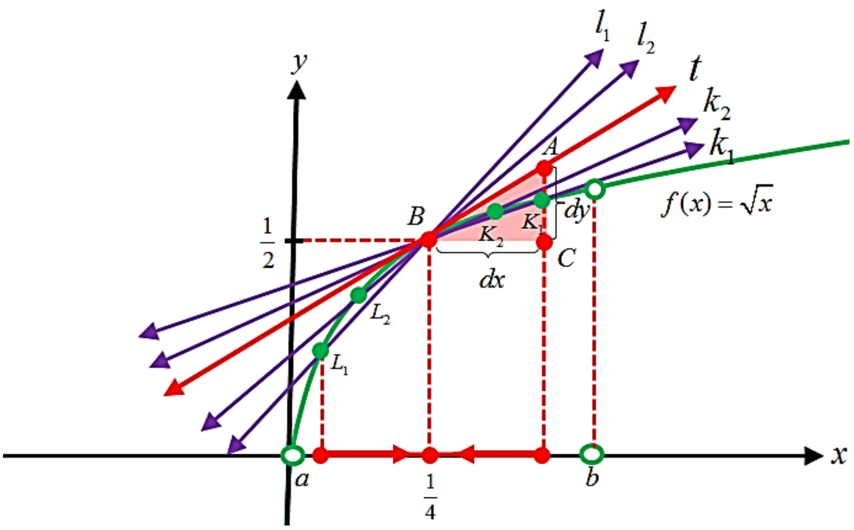
Şekil 5.58'de, $y=\sqrt{x}$ *fonksiyonunun iç noktasında türevini alma* görevi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir. Ardından Örnek 5.9'da, Şekil 5.58′de verilen lokal sitten yararlanılarak $y=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $x=\frac{1}{4}$ noktası için türevi, cebirsel ve analitik teknik bir arada kullanılarak bulunmuştur.



Şekil 5.58. *Fonksiyonun iç noktasında türev alma görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Örnek 5.9. $y=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $x=\frac{1}{4}$ için türevini bulma.

Çözüm Şekil 5.59'da, Şekil 5.58'de verilen ekolojik ilişkilerden yararlanılarak $y=\sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiği üzerinde $x=\frac{1}{4}$ noktasındaki türevi incelenmiştir.



Şekil 5.59 $y=\sqrt{x}$ *fonksiyonunun iç noktada türevini alma*

Şekil 5.59'daki grafiğe göre $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $[0,\,\infty)$ aralığında tanımlı olduğu görülmektedir. f fonksiyonu $\frac{1}{4}\in(a,\,b)$ olacak şekilde en az bir $(a,\,b)$ aralığında tanımlı ve süreklidir. Bu durumda $x=\frac{1}{4}$ noktası fonksiyonun iç noktasıdır. Fonksiyonun $x=\frac{1}{4}$ için türevli olabilmesi, sağdan ve soldan türevlerin eşit olmasını gerektirir. Grafiğe göre $(\frac{1}{4},\,b)$ aralığında x değerleri azalarak $\frac{1}{4}$ değerine yaklaştıkça, $K_1, K_2, \ldots$ noktalarından geçen sırasıyla $k_1, k_2, \ldots$ kiriş doğrularının eğim değerleri de giderek t doğrusunun $\frac{dy}{dx}$ eğim değerine yaklaşır. Benzer bir şekilde $(a,\,\frac{1}{4})$ aralığında x değerleri artarak $\frac{1}{4}$ değerine yaklaştıkça, $L_1, L_2, \ldots$ noktalarından geçen sırasıyla $l_1, l_2, \ldots$ kiriş doğrularının eğim değerleri yine t doğrusunun eğim değerine yaklaşır. Cebirsel teknik kullanarak t doğrusunun eğimi,

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1/4} =\lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{f(x)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{x-\frac{1}{4}} =\lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{4}}}{x-\frac{1}{4}} =\lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)} \qquad (5.\ 38)$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)}=1$$

olarak bulunur. Bu değer aynı zamanda $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $x=\frac{1}{4}$ noktası için türevidir.

5.3.2.2.1. *Ders kitaplarında fonksiyonun iç noktasında türev alma*

AY ders kitabı incelendiğinde *bir hareketlinin anlık hızını bulma* görev tipinin ardından bir *fonksiyonun iç noktasında türev alma* görevine yönelik bir örneğe yer verildiği görülmüştür. Cebirsel ve analitik tekniğin bir arada kullanıldığı bu örnek Şekil 5.60'ta verilmiştir.

Örnek

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki teğetinin eğimini bulalım.

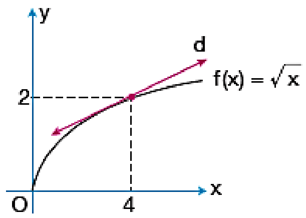
Çözüm

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$ limiti aradığımız cevaptır.

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$(x-4) = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$ olarak yazıldığında

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}}{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{4}$ bulunur.



d doğrusunun eğimi $\frac{1}{4}$ tür.

Şekil 5.60. *Fonksiyonun iç noktasında türev alma görev tipine yönelik örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.57-58)*

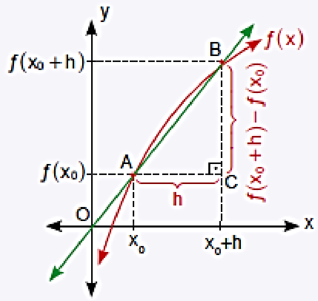
Şekil 5.60 incelendiğinde cebirsel teknik kullanılarak yapılan türev alma işleminin analitik teknik kullanılarak pekiştirilmesinin amaçlandığı söylenebilir. Örneğin çözümünde yer alan grafikte, kiriş doğrularına yer verilmeden, sadece teğet doğrusunun eğimi yardımıyla türev işleminin sonucunun belirlendiği görülmektedir. Şekil 5.58 lokal sitinde yer alan kiriş nesnesinin ekolojik ilişkilerine yer verilmemesi f fonksiyonunun sürekli olduğu $x = 4$ noktası için sağdan ve soldan türev işlemlerinin birbirine eşit olacağının fonksiyon grafiği üzerinde incelenmesini engellemiştir.

BY ders kitabı incelendiğinde, *bir hareketlinin anlık hızını bulma* görev tipine yönelik örneğin ardından bir fonksiyonun iç noktasında türev alma görev tipine yönelik bilgilendirme yapıldığı görülmüştür. Bilgilendirme sonrasında *fonksiyonun iç noktasında türev alma* görev tipine yönelik 6 tane örneğe yer verilmiştir. Bu örneklerin tamamında cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı belirlenmiştir. Şekil 5.61'de bilgilendirmenin yer aldığı bölüm ve bu görev tipine yönelik ilk örnek verilmiştir.

Bilgi

Bir x_0 sayısını ve $y = f(x)$ fonksiyonunu alalım. f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki anlık değişim oranını,

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ olarak tanımlamıştık.

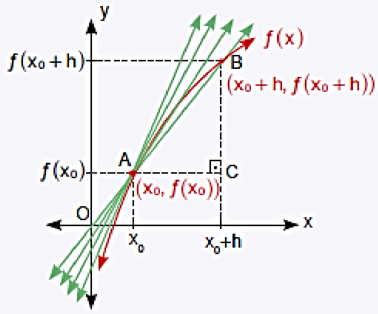


Yandaki grafikte $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ dan $x = x_0 + h$ noktasına kadar ortalama değişim oranı $(x_0,\ f(x_0))$ ve $(x_0 + h,\ f(x_0 + h))$ noktalarını birleştiren doğrunun eğimidir.

$$m_{AB} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}} \text{ dan}$$

$$m_{AB} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ dir.}$$

Yandaki grafikte h sıfıra yaklaştıkça yeşil renkli doğrular değişerek f fonksiyonunun x_0 noktasındaki teğeti durumuna gelir.

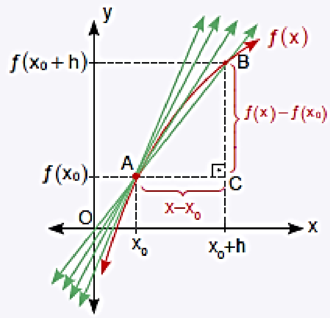


Buradan $A(x_0,\ f(x_0))$ noktasındaki teğetin eğimi

$m_t = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ile hesaplanır.

Yandaki grafikte f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki teğetinin eğimi,

$m_t = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ dır.



$x = x_0$ noktasındaki anlık değişim oranına f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki **türevi** denir ve $f'(x_0)$ veya $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ sembollerinden biri ile gösterilir. Buradan $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ veya } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ ile bulunur.}$$

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x = x_0 \in A$ noktasında türevinin olması için yukarıdaki limit değerlerinin var olması gerekir.

Örnek

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f(x) = x^4 \Rightarrow f'(-2),\ \ f'(0)$ ve $f'(1)$ değerlerini bulalım.

Şekil 5.61. *Fonksiyonun iç noktasında türev alma görev tipine yönelik bilgilendirme ve örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.37-38, 40)*

Çözüm

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^{4-1}$$
$$= 4x^3 \text{ tür.}$$

$$f'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 = 4 \cdot (-8)$$
$$= -32 \text{ olur.}$$

$$f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 4 \cdot 0$$
$$= 0 \text{ olur.}$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 = 4 \cdot 1$$
$$= 4 \text{ bulunur.}$$

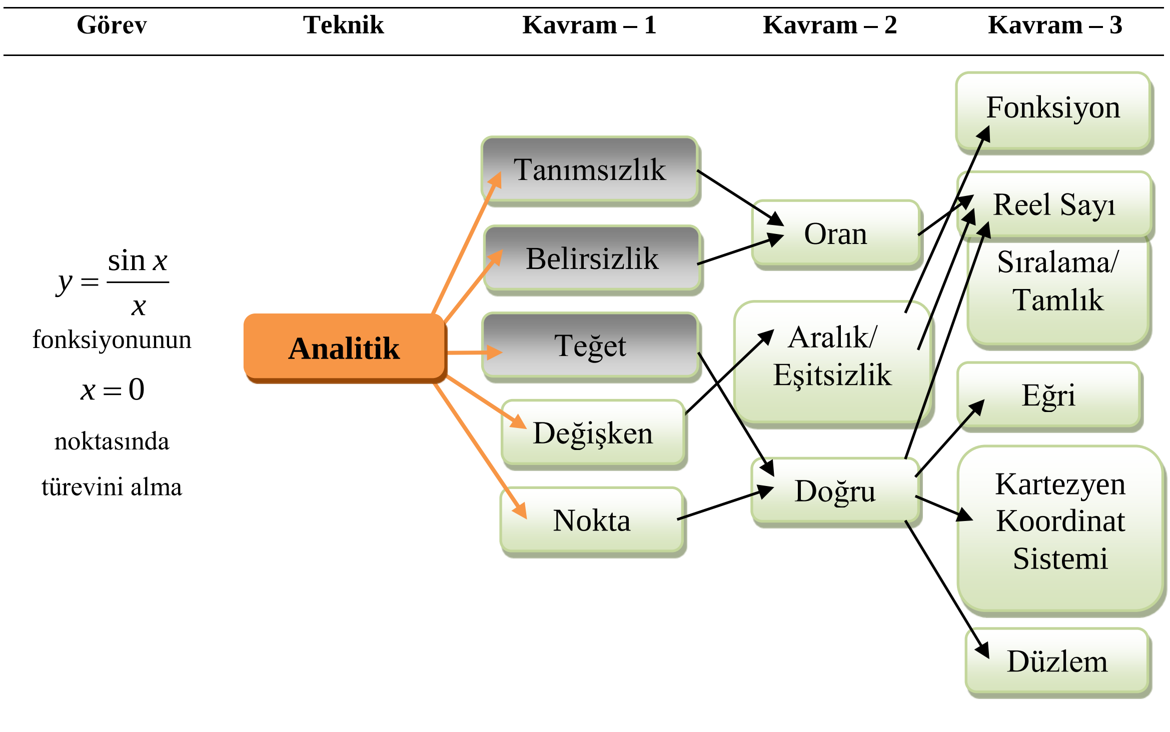
Şekil 5.61. (Devam) *Fonksiyonun iç noktasında türev alma görev tipine yönelik bilgilendirme ve örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.37-38, 40)*

Şekil 5.61'de yer alan bilgilendirmede bir fonksiyonun kritik olmayan bir iç noktasında türevinin nasıl alındığı analitik teknik kullanılarak açıklanmıştır. Bilgilendirmede yer alan fonksiyon grafikleri incelendiğinde, analitik teknik kullanılarak x_0 noktası için yalnızca sağdan türev alma işleminin yapıldığı görülmektedir. Şekil 5.58 lokal siti incelendiğinde bu durumun, kiriş ve komşuluk nesnelerinin doğru nesnesi ile ortak ekolojik ilişkilerinin fonksiyon grafiği üzerine eksik yansıtılmasından kaynaklandığı görülmektedir. Buna göre, fonksiyon grafiğine x_0 noktasının solundaki komşuluğunda yer alan noktalardan geçecek şekilde kiriş doğruları çizilmemesi, x_0 iç noktasına yalnızca sağından yaklaşılarak türev değerinin belirlenebileceği algısının oluşmasına neden olmaktadır. Ayrıca, örneğin çözümünde türev değerlerinin sağdan ve soldan türev alma işlemleri yapılmadan belirlendiği de görülmektedir. Görev tipine yönelik diğer örnekler incelendiğinde de cebirsel tekniğin benzer şekilde kullanıldığı görülmüştür. Bu durum, analitik tekniğin kullanımında karşılaşılan eksikliğin cebirsel teknik kullanılarak giderilmesini engellemiştir.

5.3.2.3. *Tanımsızlığın olduğu noktada türev*

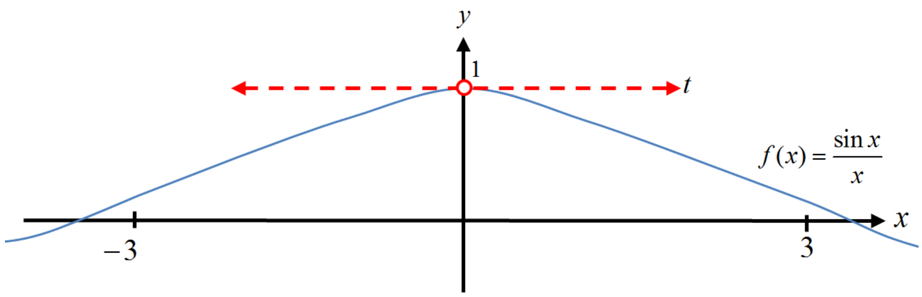
Bir fonksiyonun bir noktada türevli olabilmesi için öncelikle bu noktada tanımlı olması gerekir. Bu bölümde bir noktadaki tanımsızlığın o noktadaki türevsizliğe nasıl sebep olduğu, analitik teknik kullanılarak $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonu üzerinde incelenmiştir.

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında türevinin olmadığının açıklanabilmesi için fonksiyonun bu noktada tanımsız olduğunun ifade edilmesi gerekir. $x=0$ değeri f fonksiyonunda $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğine bağlı tanımsızlık durumu ortaya çıkardığı için bu aşamada, daha önce $\dfrac{0}{0}$ *belirsizliğinin olduğu noktada limit alma* görev tipinde de devreye giren, belirsizlik nesnesinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur. Ayrıca fonksiyon eğrisine $x=0$ noktasında teğet doğrusunun çizilemeyeceği; teğet, doğru ve eğri nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiler yardımıyla açıklanır. Analitik tekniğin kullanımına bağlı olarak devreye giren değişken ve nokta nesnelerinin ekolojik ilişkileri de dikkate alındığında *tanımsızlığın olduğu noktada türev* görev tipi için Şekil 5.62 lokal siti elde edilir.



Şekil 5.62. *Tanımsızlığın olduğu noktada türev görev tipi için analitik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Şekil 5.62 lokal sitindeki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevsiz olduğu Şekil 5.63'te analitik teknik kullanılarak gösterilmiştir.



Şekil 5.63. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *fonksiyonunun tanımsız olduğu noktada türevinin incelenmesi*

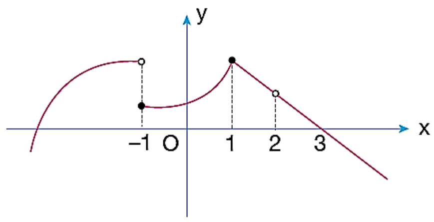
Şekil 5.62 lokal siti incelendiğinde doğru nesnesinin, teğet ve nokta nesnelerinin ortak üst nesnesi olduğu görülür. Noktaların bir araya gelerek doğruları oluşturması nokta ile doğru arasındaki ekolojik ilişkiyi; teğetin aynı zamanda özel bir doğru olması ise teğet ile doğru arasındaki ekolojik ilişkiyi açıklar. Teğet doğrusunu özel yapan durumun ne olduğu ise nokta ile teğet nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiye göre belirlenir. Buna göre, t doğrusunu teğet doğrusu yapacak özel durum, bu doğrunun fonksiyon eğrisinin yalnızca $(0, 1)$ noktasından geçiyor olmasıdır. f fonksiyonu bu noktada tanımsız olduğu için t'nin teğet doğrusu olabilmesi için gerekli olan şart gerçekleşmemektedir. $(0, 1)$ noktasında eğriye teğetin çizilemiyor olması $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevsiz olduğu anlamına gelir.

5.3.2.3.1. ***Ders kitaplarında tanımsızlığın olduğu noktada türev***

AY ders kitabı incelendiğinde *tanımsızlığın olduğu noktada türev* görev tipine, çalışmadaki görev tipi sırasına uygun bir biçimde, *Türev Süreklilik İlişkisi* başlığı altında iki örnekle yer verildiği görülmüştür. Her iki örneğin çözümünde de analitik tekniğin kullanıldığı görülmüştür. Şekil 5.64'te ilk örneğe yer verilmiştir.

Örnek

Yanda grafiği verilen f(x) fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların apsislerini bulalım.



Çözüm

Verilen grafik incelendiğinde fonksiyon, x = 2 de tanımlı olmadığından ve x = –1 de süreksiz olduğundan bu noktalarda türevli değildir. Ayrıca x = 1 noktasında fonksiyon sivri bir uç yaptığından bu noktada türevli değildir.

Şekil 5.64. $y = f(x)$ *fonksiyonunun tanımsız olduğu* $x = 2$ *noktasında türevinin incelenmesi (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.63)*

Şekil 5.64'te verilen fonksiyon grafiği ve grafiğin altında verilen açıklama incelendiğinde $x = 2$ noktasında tanımsızlığın türevsizliğe nasıl yol açtığı anlaşılamamaktadır. Şekil 5.62 lokal siti incelendiğinde ortaya çıkan bu ekolojik boşluğun teğet nesnesinin ekolojik ilişkilerine yer verilmemesinden kaynaklandığı görülmektedir. Bu durumda, teğet nesnesinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılarak fonksiyona $x = 2$ apsisli noktadan geçecek biçimde teğet çizilememesine bağlı olarak türevsizlik durumunun açıklanmasının ortaya çıkan ekolojik boşluğun giderilmesinde etkili olacağı söylenebilir.

BY ders kitabı incelendiğinde *tanımsızlığın olduğu noktada türev* görev tipine, süreklilik ile türevlilik kavramları arasındaki ilişki açıklandıktan sonra bir örnekle yer verildiği görülmüştür. Şekil 5.65'te yapılan açıklamaya ve cebirsel tekniğin kullanıldığı örneğe yer verilmiştir.

Bilgi

Bir fonksiyon bir noktada sürekli değilse, o noktada türevli de değildir.

Bir fonksiyon bir noktada türevli ise o noktada süreklidir. Bir fonksiyon bir noktada sürekli ise her zaman türevli olmayabilir.

Şekil 5.65. *Tanımsızlığın olduğu noktada türev görev tipine yönelik yapılan açıklama ve cebirsel tekniğin kullanıldığı örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.48)*

Örnek

$f(x)=\dfrac{3x+4}{x^2-3x+2}$ fonksiyonunun $x=1$ ve $x=2$ noktalarındaki türevlenebilirliğini bulalım.

Çözüm

Paydayı sıfır yapan değerler için fonksiyon tanımsız ve süreksiz olduğundan bu noktalarda fonksiyonun türevi yoktur.

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0$

$-2 \quad -1$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ veya $x-1=0 \Rightarrow x=1$ dir.

Buradan $x=1$ ve $x=2$ değerleri paydayı sıfır yapan değerlerdir.

Fonksiyon bu noktalarda tanımsız ve süreksiz olduğundan $x=1$ ve $x=2$ noktalarında fonksiyonun türevi yoktur

Bu nedenle $f(x)=\dfrac{3x+4}{x^2-3x+2}$ fonksiyonu $\mathbb{R}-\{1,2\}$ de türevlenebilirdir.

Şekil 5.65. (Devam) *Tanımsızlığın olduğu noktada türev görev tipine yönelik yapılan açıklama ve cebirsel tekniğin kullanıldığı örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.48)*

Şekil 5.65'te yer alan *Bilgi* bölümünde bir noktadaki süreksizliğin o noktada türevsizliğe neden olacağı belirtilmiştir. Ders kitabında bilgi bölümünün öncesindeki bölümler incelendiğinde süreksizliğin türevsizliği ortaya çıkarma nedeni ile ilgili bir açıklama yapılmadığı görülmüştür. Bu durum ders kitabında yapılan bilgilendirmenin teknolojilerine yer verilmediğini göstermektedir.

Şekil 5.65'te verilen örneğin çözümünde f fonksiyonu çarpanlarına ayrılmış ve ardından $x=1$ ve $x=2$ değerlerinin fonksiyonu tanımsız yapmasına bağlı olarak ortaya çıkan süreksizliğin türevsizliğe neden olduğu belirtilmiştir. Fakat, *Bilgi* bölümünde de olduğu gibi, süreksizliğin türevsizliği ortaya çıkarma nedeni açıklanmamıştır. Ortaya çıkan ekolojik boşluğun giderilmesinde cebirsel tekniğin analitik teknik kullanılarak desteklenmesinin etkili olacağı söylenebilir. Böylelikle teğet nesnesinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılarak bir noktadaki tanımsızlığın o noktadaki türevsizliğe neden olma durumu, Şekil 5.63'te de olduğu gibi, fonksiyon grafiği üzerinde sezgisel bir yaklaşım ile açıklanabilir.

4.3.2.4. *Limitin olmadığı noktada türev*

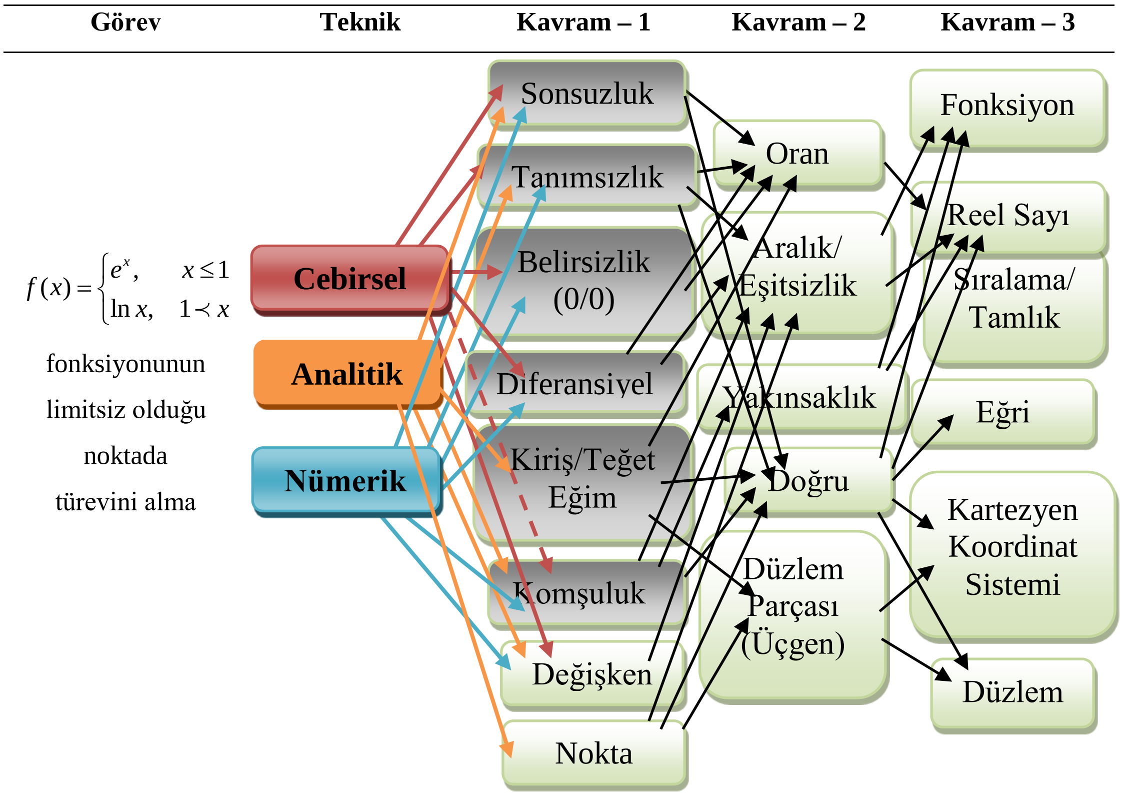
Bir fonksiyonun bir noktada türevli olabilmesi için bu noktada limitli olması gerekir. Bu bölümde bir noktadaki limitsizliğin o noktada türevsizliğe nasıl sebep olduğu analitik, nümerik ve cebirsel teknik bir arada kullanılarak $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 1 \\ \ln x, & 1\prec x \end{cases}$ fonksiyonunun kritik noktası üzerinde incelenmiştir.

$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 1 \\ \ln x, & 1\prec x \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun $x=1$ noktası için türevi incelenirken, bu noktadaki sağdan ve soldan türevlerinin bir reel sayıya ve birbirlerine eşit olup olmadığına bakılır. Bu durumda *fonksiyonun iç noktasında türev alma* görev tipi için gerekli olan ekolojik ilişkilerin bu görev tipi için de geçerli olacağı söylenebilir. Burada farklı olarak analitik tekniğin kullanımında daha sade ve anlaşılır bir grafik elde edilebilmesi amacı ile diferansiyel nesnesinin ekolojik ilişkilerine yer verilmemesi uygun görülmüştür. Ayrıca, $x=1$ noktası için sağdan türev değerinin belirlenmesi amacıyla yapılacak limit işleminin sonucunun,

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)-e}{h}=-\infty \qquad (5.\ 39)$$

şeklinde $-\infty$'a ıraksanmasına bağlı olarak sonsuzluk nesnesinin limit alma işleminde devreye giren ekolojik ilişkilerine de ihtiyaç duyulacağı söylenebilir. Buna göre cebirsel ve nümerik tekniğin kullanımında sonsuzluk nesnesinin oran nesnesi ile ekolojik ilişkisine ihtiyaç duyulur. Analitik tekniğin kullanımında ise çizilecek teğet doğrusu eğiminin $-\infty$'a ıraksamasına bağlı olarak sonsuzluk nesnesinin oran ve doğru nesnesi ile ekolojik ilişkileri devreye girer. (5. 39) eşitliğinde *fonksiyonun iç noktasında türev alma* görev tipinden farklı olarak $h=0$ değeri $\frac{a}{0}$ $(a\neq 0)$ tanımsızlık durumunun ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Bu durumda tanımsızlık nesnesinin limit alma işlemine bağlı olarak devreye giren ekolojik ilişkilerine de ihtiyaç duyulur. Buna göre tanımsızlık durumunun açıklanmasında bu nesnenin oran nesnesi ile ekolojik ilişkileri devreye girer. Fonksiyonun kritik noktasında sağdan veya soldan limit alma işlemleri için hangi parçasının kullanılacağı belirlenirken tanımsızlık nesnesinin aralık/eşitsizlik nesneleri ile ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur. Analitik tekniğin kullanımında (5. 39)'de yapılan limit işleminin sonucuna göre teğet doğrusunun eğiminin tanımsız olacağı ifade edilirken de tanımsızlık nesnesinin doğru nesnesi ile ekolojik ilişkileri devreye girer.

Şekil 5.66'da *limitin olmadığı noktada türev* görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir.



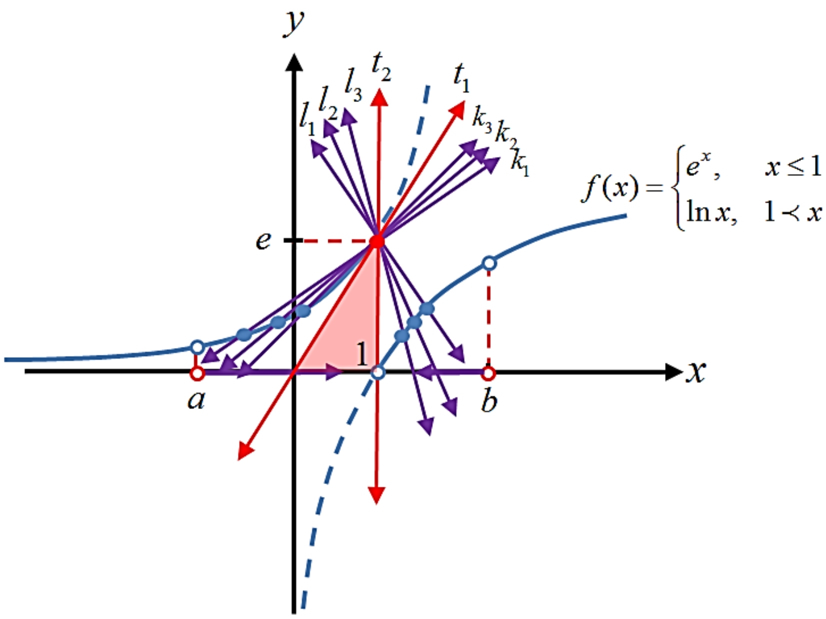
Şekil 5.66. *Limitin olmadığı noktada türev görev tipi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

f parçalı fonksiyonunun $x=1$ noktasında limitsiz olmasının bu noktadaki türeve etkisi Örnek 5.10 üzerinde analitik ve nümerik teknik kullanılarak incelenmiştir.

Örnek 5.10. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 1 \\ \ln x, & 1\prec x \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki türevini inceleme.

Çözüm Şekil 5.67'de, Şekil 5.66 lokal sitindeki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 1 \\ \ln x, & 1\prec x \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki türevi koordinat düzleminde incelenmiştir.

Şekil 5.67'deki grafiğe göre, f fonksiyonu $1\in(a,\,b)$ olacak şekilde bir $(a,\,b)$ aralığında tanımlıdır. Bu durumda $x=1$ noktasında türevin olabilmesi için fonksiyonun sağdan ve soldan türevli ve türev değerlerinin tek bir reel sayıya eşit olması gerekir.



Şekil 5.67. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \le 1 \\ \ln x, & 1 \prec x \end{cases}$ *fonksiyonunun limitsiz olduğu noktada türevinin incelenmesi*

Grafiğe göre, $(a, 1)$ aralığında x değerleri artarak 1 değerine yaklaştıkça kiriş doğrularının eğim değerleri de giderek t_1 doğrusunun eğim değeri olan e sayısına yaklaşmaktadır. Buna karşılık $(1, b)$ aralığında x değerleri azalarak 1 değerine yaklaştıkça, kiriş doğrularının eğim değerleri de sınırsızca azalmaktadır.

f fonksiyonuna $x=1$ noktasına sağından ve solundan çizilebilecek kirişlerin eğimlerinin belirli bir reel sayıya yaklaşıp yaklaşmadığı $f'(x_0)=\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ eşitliğinden hareketle nümerik teknik kullanılarak belirlenebilir. Bu durumda $x=1$ noktasına sağından çizilebilecek kirişlerin eğimlerinin belirlenebilmesi için

$$f'(1^+)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1^+}=\lim_{x \to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \tag{5. 40}$$

eşitliğine ihtiyaç duyulur. Buna göre, $x=1$ değeri için fonksiyonun $y=e^x$ parçası tanımlı olduğundan $f(1)=e^1=e$ olarak bulunur. Ayrıca $x \succ 1$ değerleri için fonksiyonun $y=\ln x$ parçası tanımlı olduğundan (5, 40) eşitliğinde $f(x)=\ln x$ olarak yazılır. Böylelikle nümerik teknik kullanılarak $x=1$ noktasına sağından çizilebilecek kirişlerin eğim değerleri,

$$y=\frac{\ln x-e}{x-1} \tag{5. 41}$$

eşitliği ile belirlenebilir.

$x=1$ noktasına solundan çizilebilecek kirişlerin eğimlerinin belirlenebilmesi için

$$f'(1^-)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1^-}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \tag{5. 42}$$

eşitliğine ihtiyaç duyulur. Buna göre $x \prec 1$ değerleri için fonksiyonun $y=e^x$ parçası tanımlı olduğundan (5. 42) eşitliğinde $f(x)=e^x$ olarak yazılır. Böylelikle nümerik teknik kullanılarak $x=1$ noktasına solundan çizilebilecek kirişlerin eğim değerlerinin,

$$y=\frac{e^x-e}{x-1} \tag{5. 43}$$

eşitliği ile bulunabileceği görülür.

Tablo 5.12'de (5. 41) ve (5. 43) eşitliklerinden yararlanılarak f fonksiyonuna $x=1$ noktasından geçecek şekilde çizilebilecek bazı kiriş doğrularının eğimleri verilmiştir.

Tablo 5.12. $y=\frac{e^x-e}{x-1}$ *ve* $y=\frac{\ln x-e}{x-1}$ *ifadesinin sırasıyla* $x\to 1^+$ *ve* $x\to 1^-$ *aldığı bazı değerler*

x	**1,1**	**1,01**	**1,001**	**1,0001**	**1,00001**	$x\to 1^+$
$y=\frac{\ln x-e}{x-1}$	$\approx -26,2291$	$\approx -271,818$	$\approx -2718,28$	$\approx -27182,8$	≈ -271828	$-\infty$
x	**0,9**	**0,99**	**0,999**	**0,9999**	**0,99999**	$x\to 1^-$
$y=\frac{e^x-e}{x-1}$	$\approx 24,7232$	$\approx 2,70473$	$\approx 2,71692$	$\approx 2,71821$	$\approx 2,71826$	e

Tablo 5.12 incelendiğind,e $x\to 1^+$ elde edilen eğim değerlerinin $-\infty$'a ıraksadığı görülmektedir. $x\to 1^-$ elde edilen eğim değerleri ise e sayısına yaklaşmaktadır. Bu durumda türev değerleri,

$$f'(1^+) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1^+} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - e}{x-1} = \frac{-e}{0^+} = -\infty \tag{5. 44}$$

$$f'(1^-) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1^-} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^x - e}{x-1} = e \tag{5. 45}$$

olarak bulunur. Bu sonuçlara göre, gerek $-\infty$ bir reel sayı olmadığı için gerekse elde edilen türev değerleri birbirine eşit olmadığı için f fonksiyonu $x=1$ noktasında türevsizdir.

5.3.2.4.1. *Ders kitaplarında limitin olmadığı noktada türev*

AY matematik ders kitabında *limitin olmadığı noktaada türev* görev tipine *Türev-Süreklilik İlişkisi* başlığı altında yapılan açıklamadan sonra 2 tane örnek ile yer verildiği görülmüştür. Her iki örnekte de analitik tekniğin tek başına kullanıldığı belirlenmiştir. Görev tipine yönelik ilk örneğe daha önce yer verildiği için (Bkz. Şekil 5.64) burada 2.örneğin çözümü değerlendirilecektir.

Şekil 5.68'de AY ders kitabında türev- süreklilik ilişkisine yönelik yapılan açıklama ve *limitin olmadığı noktada türev* görev tipine yönelik 2.örnek verilmiştir.

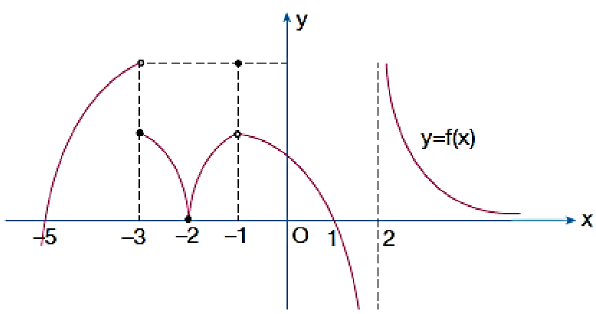
Türev - Süreklilik İlişkisi

Bir f(x) fonksiyonu $x = x_0$ noktasında türevli ise bu noktada süreklidir. Ancak f(x) fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında sürekli olması, bu noktada türevli olduğu anlamına gelmez.

f(x) fonksiyonu $x = x_0$ da sürekli değilse bu noktada türevli de değildir.

Örnek

Yanda grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun türevli olduğu aralıkları bulalım.



Şekil 5.68. *Türev- süreklilik ilişkisinin yer aldığı bölüm ve limitin olmadığı noktada türev görev tipine yönelik örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders kitabı, s.63-64)*

Çözüm

$x = -3$ ve $x = -1$ apsisli noktalarda f(x) fonksiyonu sürekli olmadığından, $x = -2$ apsisli noktada sivri bir uç yaptığından, $x = 2$ apsisli noktada ise tanımlı olmadığından $y = f(x)$ fonksiyonu türevli değildir.

Bu durumda fonksiyonun türevli olduğu aralıklar $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 2)$ ve $(2, \infty)$ dır.

Şekil 5.68. (Devam) *Türev- süreklilik ilişkisinin yer aldığı bölüm ve limitin olmadığı noktada türev görev tipine yönelik örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders kitabı, s.63-64)*

Şekil 5.68'de yer alan açıklamada sürekliliğin türevlilik için neden gerekli olduğuna yönelik teknolojilere yer verilmediği görülmektedir. Örneğin çözümünde de yapılan açıklamaya benzer bir şekilde $x = -3$ noktasındaki (limitsizliğe bağlı olarak ortaya çıkan) süreksizliğin bu noktadaki türeve nasıl etki ettiğine yönelik gerekli olan ekolojik ilişkilere yer verilmediği görülmektedir. Şekil 5.66 lokal siti incelendiğinde ortaya çıkan bu ekolojik boşluğun örneğin çözümünde kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin ekolojik ilişkilerine yer verilmemesinden kaynaklandığı görülmektedir. Buna göre, fonksiyon grafiğine çizilebilecek kiriş ve teğet doğruları yardımıyla $x = -3$ noktası için sağdan ve soldan türev değerlerinin birbirinden farklı olacağının gösterilmesinin, ortaya çıkan ekolojik boşluğun giderilmesinde etkili olabileceği söylenebilir.

BY matematik ders kitabında *limitin olmadığı noktada türev* görev tipine bir noktadaki süreksizliğin o noktadaki türeve etkisinin incelendiği örnekler arasında yer verildiği görülmüştür. Ders kitabında bu görev tipine yönelik 2 tane örneğe yer verilmiştir. Bu örneklerden birinde analitik teknik ile cebirsel teknik bir arada kullanılırken, diğer örnekte analitik teknik tek başına kullanılmıştır. Şekil 5.69'da cebirsel tekniğin analitik teknik kullanılarak desteklendiği ilk örnek verilmiştir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 2 \\ x^2 - 3, & x \geqslant 2 \end{cases}$ fonksiyonunun varsa $f'(2)$ değerini bulalım.

Çözüm

f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki soldan türevi

Şekil 5.69. *Limitin olmadığı noktada türev görev tipine yönelik örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.45)*

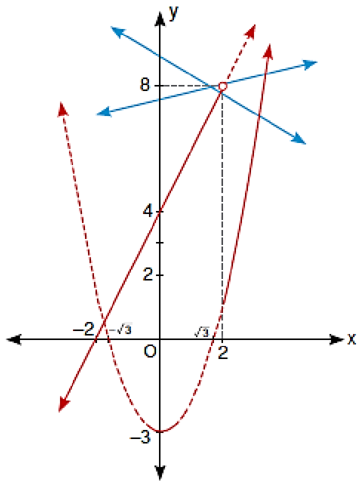
$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2(2+h)+4-(2 \cdot 2+4)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{4}+2h+\cancel{4}-\cancel{4}-\cancel{4}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2h}{h} = 2 \text{ olur.}$$

$x = 2$ noktasındaki sağdan türevi

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(2+h)^2 - 3 - (2^2 - 3)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{4 + 4h + h^2 - 3 - (4-3)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{1} + 4h + h^2 - \cancel{1}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + 4h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}}$$
$$= \lim_{h \to 0^+} (h+4) = 0 + 4 = 4 \text{ olur.}$$

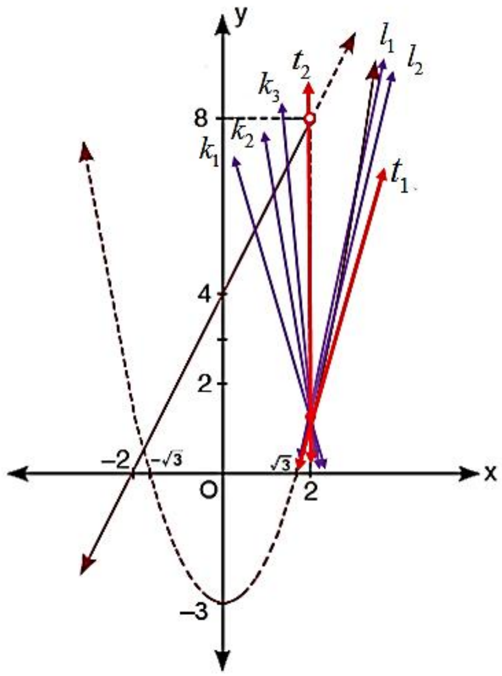
$f'(2^-) = 2$ ve $f'(2^+) = 4$ bulunur. Buradan $f'(2^-) \neq f'(2^+)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında türevi yoktur.

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir. $x = 2$ noktasında fonksiyon grafiğine iki farklı teğet çizilebilir. Teğetler farklı olduğundan eğimleri de farklıdır. Dolayısıyla fonksiyonun $x = 2$ noktasında türevi yoktur.



Şekil 5.69. (Devam) *Limitin olmadığı noktada türev görev tipine yönelik örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.45)*

Şekil 5.69'da fonksiyonun limitsiz olduğu $x = 2$ noktasında soldan türevinin hem cebirsel, hem de analitik teknik kullanılarak incelendiği görülmektedir. Örneğin çözümünde verilen grafikte, Şekil 5.66 lokal sitinde yer alan nokta, teğet, doğru nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerin hatalı yorumlanması sonucunda teğet doğruları yanlış çizilmiştir. Buna göre $x = 2$ noktası için soldan türev değerini veren teğetin eğimi, teğet doğrusu fonksiyonun tanımlı olduğu $(2, 1)$ noktasından geçmesi gerektiği yerde, fonksiyonun tanımsız olduğu $(2, 8)$ noktasından geçecek şekilde çizildiği için yanlış ifade edilmiştir. Bu hata, teğet doğrusunun y ekseni ile kesişmesine bağlı olarak $f'(2^-)$ türevinin bir reel sayıya eşit olabileceği algısına neden olmaktadır. Oysa ki teğet doğrusunun y eksenine paralel olacak şekilde çizilmesi sonucunda $f'(2^-)$ türevinin $-\infty$'a ıraksayacağının belirlenmesi gerekmektedir. Diğer teğet doğrusu da benzer şekilde $(2, 1)$ noktasından geçeceği yerde $(2, 8)$ noktasından geçecek şekilde çizildiği için $f'(2^+)$ türevi analitik teknik kullanılarak yanlış ifade edilmiştir. Şekil 5.70'te, kiriş nesnesinin ekolojik ilişkilerinden de yararlanılarak f fonksiyonuna tanımlı olduğu $x = 2$ noktasından geçecek şekilde teğet doğruları çizilmiştir.



Şekil 5.70. *f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevi için analitik tekniğin kullanımı*

Şekil 5.70 incelendiğinde, f fonksiyonunun tanımlı olduğu $x = 2$ noktasına sağından geçecek şekilde çizilebilecek $l_1, l_2, l_3, \ldots$ kirişlerinin eğim değerlerinin bir reel sayıya yaklaşmasına karşılık, solundan geçecek şekilde çizilebilecek $k_1, k_2, k_3, \ldots$ kirişlerin eğim değerlerinin $-\infty$'a ıraksayacağı görülmektedir. Bu durumda f fonksiyonunun $x = 2$ noktasında soldan türevi yoktur.

Örneğin cebirsel teknik kullanılarak yapılan çözümünde, teğetlerin çiziminde ortaya çıkan hatanın cebirsel yansıması görülmektedir. Cebirsel teknik kullanılarak yapılan türev alma işleminde, değişken nesnesinin aralık/eşitsizlik nesneleri ile ekolojik ilişkilerinin dikkate alınmamasına bağlı olarak türev değerleri yanlış hesaplanmıştır. Buna göre, $f(2)$ değeri fonksiyonun $\left[2,\infty\right)$ aralığında $y=x^2-3$ parçasının tanımlı olmasına bağlı olarak $f(2)=2^2-3=1$ şeklinde belirlenmesi gerektiği yerde, fonksiyonun $x=2$ için tanımsız olduğu parçası kullanılarak $f(2)=2.2+4=8$ şeklinde belirlenmiştir. Bu hataya bağlı olarak $\frac{0}{0}$ durumu ortaya çıkmıştır. Belirsizlik nesnesinin ekolojik ilişkilerinin de devreye girmesi ile birlikte $f'(2^-)=2$ olarak bulunmuştur. Yapılan hata giderildiğinde, belirsizlik yerine tanımsızlık nesnesinin ekolojik ilişkilerinin de devreye girmesi ile birlikte doğru sonuç,

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{8+2h-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h+7}{h}=2+\lim_{h\to 0^-}\frac{7}{h}=-\infty \qquad (5.\ 46)$$

olarak bulunur.

5.3.2.5. *Limitin olduğu, sürekliliğin olmadığı noktada türev*

Bir fonksiyonun bir noktada türevli olabilmesi için bu noktada sürekli olması gerekir. Bu bölümde, bir noktadaki limit değerinin o noktadaki fonksiyon değerine eşit olmamasına bağlı olarak ortaya çıkan süreksizliğin bu noktadaki türeve nasıl etki ettiği parçalı bir fonksiyonun kritik noktası üzerinde incelenmiştir.

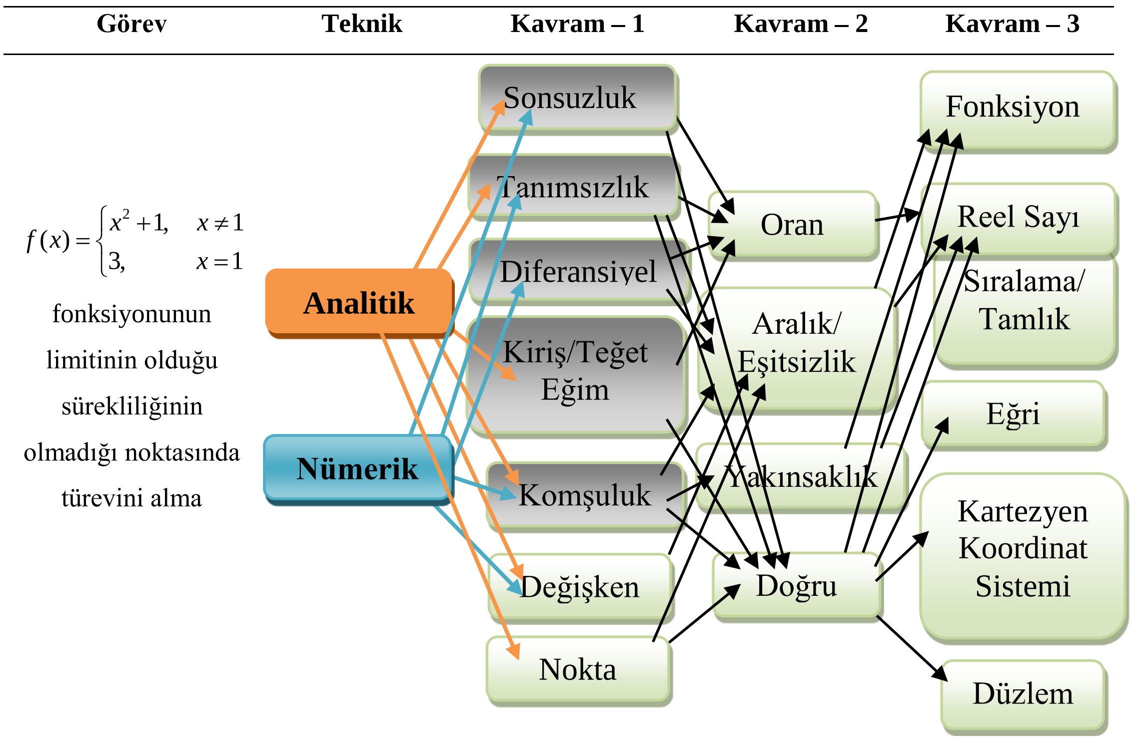
$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 1 \\ 3, & x=1 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun $x=1$ noktası için türevi incelenirken, bu noktadaki sağdan ve soldan türevlerin bir reel sayıya ve birbirlerine eşit olup olmadığına bakılır. Bu durumda, *limitin olmadığı noktada türev* görev tipi için gerekli olan ekolojik ilişkilerden büyük ölçüde yararlanılacağı söylenebilir. $x=1$ noktası için sağdan ve soldan türev değerinin belirlenmesi amacıyla yapılacak limit işlemleri,

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2+1-3}{h}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \qquad (5.\ 47)$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2+1-3}{h} = \frac{-1}{0^-} = \infty \tag{5. 48}$$

şeklinde yapılır. (5. 47) ve (5. 48)'de limit alma işlemi yapılırken, tanımsızlığın ortaya çıkmasına bağlı olarak, sıfır sayısına sağından ve solundan yaklaşıldığı görülmektedir. Başka bir ifadeyle, (5. 47) ve (5. 48)'de f fonksiyonunun kritik noktasında türevsiz olduğu nümerik teknik kullanılarak belirlenmiştir. Ayrıca, yapılan limit işlemlerinin sonuçlarının sonsuza ıraksadığı görülmektedir. Bu durumda f fonksiyonuna kritik noktasından geçecek biçimde çizilecek teğet doğrusunun eğimi (y eksenine paralel olmasına bağlı olarak) dik üçgen yardımıyla ifade edilemeyeceği için düzlem parçası (üçgen) nesnesinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılmayacaktır. (5. 47) ve (5. 48) limit işlemleri yapılırken sadece $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ tanımsızlığı ile karşılaşıldığı görülmektedir. Bu durumda *limitin olmadığı noktada türev* görev tipinden farklı olarak belirsizlik nesnesinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulmayacağı söylenebilir.

Şekil 5.71'de *limitin olduğu, sürekliliğin olmadığı noktada türev* görev tipi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir.

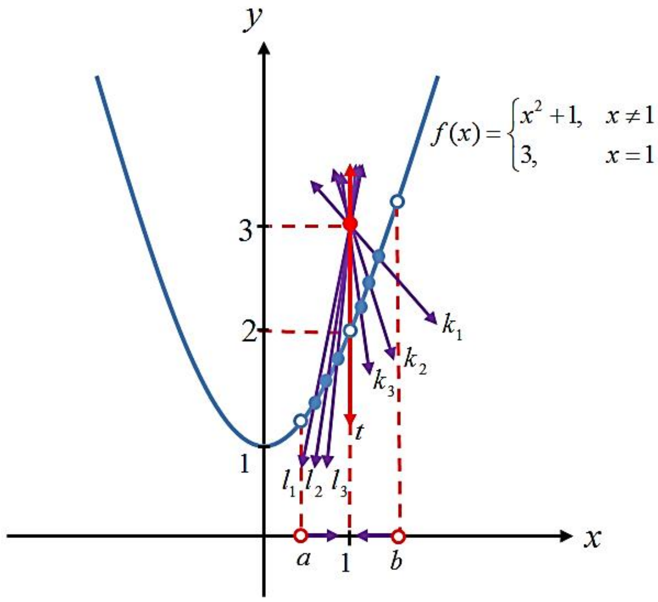


Şekil 5.71. *Limitin olduğu, sürekliliğin olmadığı noktada türev görev tipi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Fonksiyonun bir noktada limitli olduğu halde süreksiz olmasının o noktadaki türevi nasıl etkilediği Örnek 5.11 üzerinde analitik ve nümerik teknik kullanılarak incelenmiştir.

Örnek 5.11. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 1 \\ 3, & x=1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki türevini belirleme.

Çözüm Şekil 5.72'de, Şekil 5.71 lokal sitindeki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 1 \\ 3, & x=1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki türevi koordinat düzleminde incelenmiştir.



Şekil 5.72. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 1 \\ 3, & x=1 \end{cases}$ *fonksiyonunun limitli olup süreksiz olduğu noktadaki türevinin analitik teknik kullanılarak incelenmesi*

Şekil 5.72'de verilen grafiğe göre f fonksiyonu $1\in(a,\, b)$ olacak şekilde bir $(a,\, b)$ aralığında tanımlıdır. Bu durumda $x=1$ noktasında türevin olabilmesi için fonksiyonun sağdan ve soldan türevli ve türev değerlerinin tek bir reel sayıya eşit olması gerekir. Grafiğe göre $(a, 1)$ aralığında x değerleri artarak 1'e yaklaştıkça kiriş doğrularının eğimleri artarak ∞'a ıraksamaktadır. $(1, b)$ aralığında x değerleri azalarak 1'e yaklaştığında ise kiriş doğrularının eğim değerleri azalarak $-\infty$' a ıraksamaktadır. Sonuç olarak $-\infty$ ve ∞ birer reel sayı belirtmediği için f fonksiyonu $x=1$ noktasında türevsizdir. Bu sonuç, bir fonksiyonun bir noktada türevli olduğuna karar verilmesinde (eğim değerinin bir reel sayı olmamasına bağlı olarak) bu noktadan geçecek şekilde tek bir teğet doğrusu çizilebiliyor olmasının yeterli olmayacağını göstermektedir.

f fonksiyonunun $x=1$ noktasında sağdan ve soldan türevi Şekil 5.71 lokal sitinde verilen ekolojik ilişkiler yardımıyla elde edilebilen limit formülünden yararlanılarak,

$$f'(1^+) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1^+} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1-3}{x-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \tag{5. 49}$$

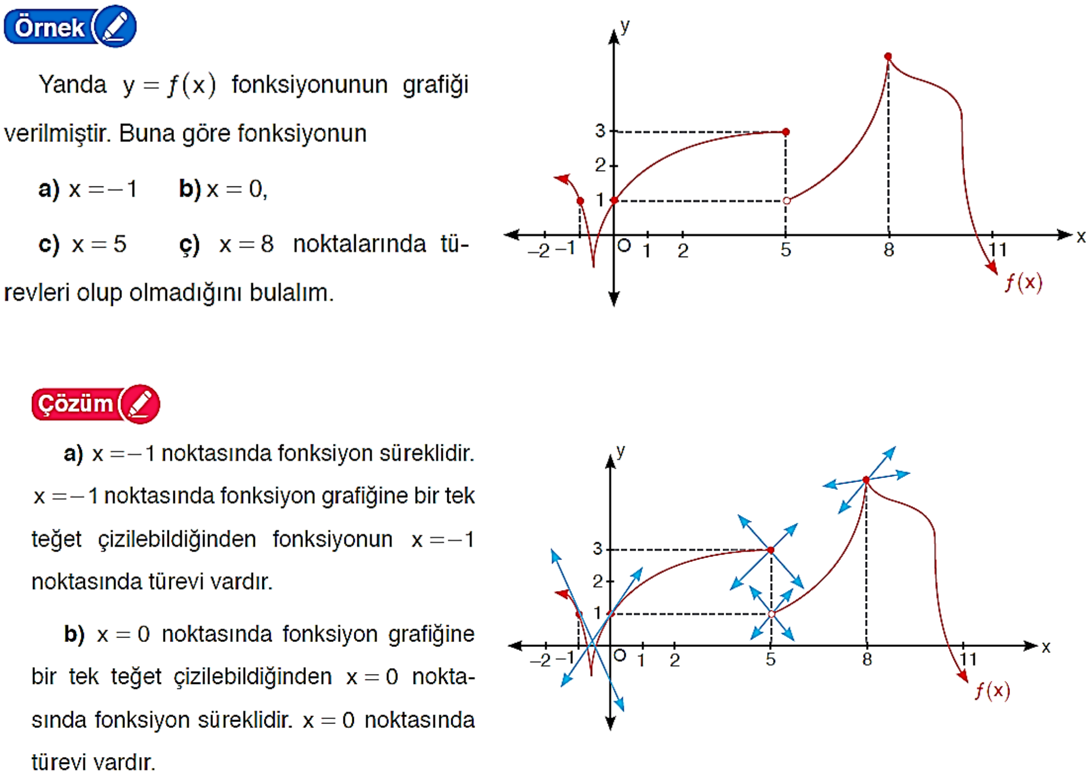
$$f'(1^-) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1^-} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1-3}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = \infty \tag{5. 50}$$

şeklinde de bulunabilir. (5. 49) ve (5. 50) eşitliklerinde yer alan $\frac{-1}{0^+} = -\infty$ ve $\frac{-1}{0^-} = \infty$ ifadeleri $x=1$ sayısının sırasıyla sağından ve solundan yaklaşacak şekilde nümerik değerler verilmesi sonucunda elde edilen oran değerlerinin $-\infty$ ve ∞'a ıraksayacağını göstermektedir. Bu durum (5. 49) ve (5. 50)'de yapılan limit alma işlemlerinde nümerik tekniğin kullanıldığını göstermektedir.

Ders kitaplarında limitin olduğu, sürekliliğin olmadığı noktada türev

AY ve BY ders kitapları incelendiğinde *limitin olduğu, sürekliliğin olmadığı noktada türev* görev tipine yönelik bir açıklamaya veya örneğe yer verilmediği görülmüştür. BY ders kitabında bu görev tipine yer verilmemiş olmasının sonsuzluk nesnesinin türev almadaki ekolojik ilişkilerinin dikkate alınmamasından kaynaklanan hatalı bir genelleme yapılmasına neden olduğu görülmüştür.

Şekil 5.73'te BY 12. sınıf matematik ders kitabında hatalı genellemenin yapıldığı örneğe yer verilmiştir.


Örnek

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre fonksiyonun

a) $x = -1$ **b)** $x = 0$,

c) $x = 5$ **ç)** $x = 8$ noktalarında türevleri olup olmadığını bulalım.

Çözüm

a) $x = -1$ noktasında fonksiyon süreklidir. $x = -1$ noktasında fonksiyon grafiğine bir tek teğet çizilebildiğinden fonksiyonun $x = -1$ noktasında türevi vardır.

b) $x = 0$ noktasında fonksiyon grafiğine bir tek teğet çizilebildiğinden $x = 0$ noktasında fonksiyon süreklidir. $x = 0$ noktasında türevi vardır.

Şekil 5.73. *Tek bir teğetin çizilebildiği her noktada fonksiyonun türevli olduğu dair genelleme (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.46)*

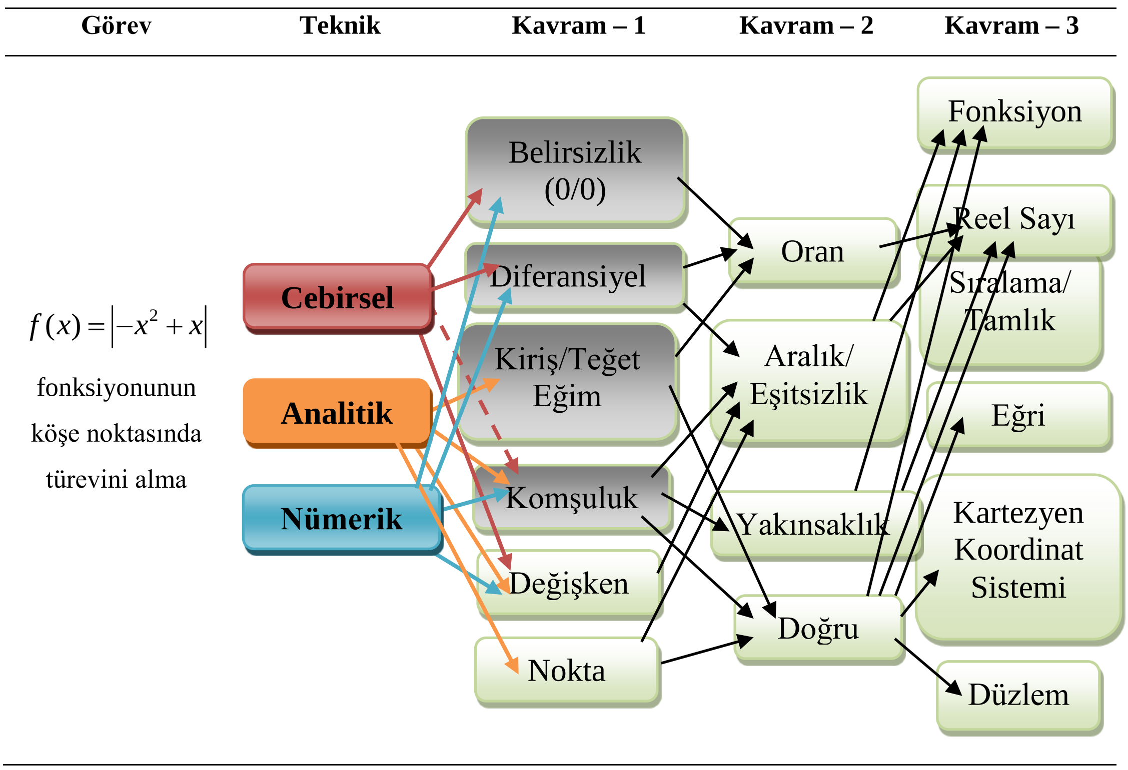
Şekil 5.73'te verilen örneğin çözümünde tek bir teğetin çizilebildiği her noktada fonksiyonun türevli olabileceği sonucuna varılabilen bir genelleme yapıldığı görülmektedir. Oysa ki, Örnek 5.11'de f fonksiyonuna $x=1$ noktasına sağından ve solundan yaklaşılmasına bağlı olarak elde edilen teğetlerin eğimlerinin birbirine eşit olmasının öncesinde, eğim değerleri birer reel sayıya eşit olmadığı için fonksiyonun $x=1$ noktasında türevsiz olduğuna karar verilmiştir. Şekil 5.71 lokal siti incelendiğinde, sonsuzluk nesnesi ile teğet-eğim nesnelerinin oran ve doğru nesneleri ile kurduğu ortak ekolojik ilişkilerinin bu aşamada ön plana çıktığı görülmektedir. Bu ekolojik ilişkiler, türevin incelendiği noktadan geçen tek bir teğet çizilebiliyor olmasına rağmen, teğet doğrusunun eğimini ifade eden oran değerinin sonsuza ıraksanmasına bağlı olarak türevsizlik durumunun ortaya çıkabileceğini göstermektedir.

5.3.2.6. *Köşe noktada türev alma*

Bir fonksiyonun bir noktada türevli olabilmesi için bu noktada sürekli olması gerekli olduğu halde yeterli değildir. Bu bölümde bir fonksiyonun köşe noktasının, fonksiyon bu noktada sürekli olduğu halde türevsizliğe nasıl neden olduğu $f(x)=\left|-x^2+x\right|$ fonksiyonunun kritik noktası üzerinde incelenmiştir.

$f(x)=\left|-x^2+x\right|$ mutlak değer fonksiyonunun köşe nokta olarak ifade edilen $x=1$ noktasındaki türevi incelenirken, bu noktada sağdan ve soldan türevlerinin bir reel sayıya ve birbirlerine eşit olup olmadığına bakılır. Bu durumda *fonksiyonun iç noktasında türev alma* görev tipi için gerekli olan ekolojik ilişkilerin bu görev tipi için de geçerli olacağı söylenebilir. Burada farklı olarak koordinat düzleminde daha sade ve anlaşılır bir şekil elde edilebilmesi amacıyla dik üçgenler yardımıyla diferansiyel oran gösterilmeyecektir. Bu durumda analitik tekniğin kullanımında diferansiyel ve düzlem parçası (üçgen) nesnelerinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulmayacağı söylenebilir.

Şekil 5.74'te *köşe noktada türev alma* görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir.



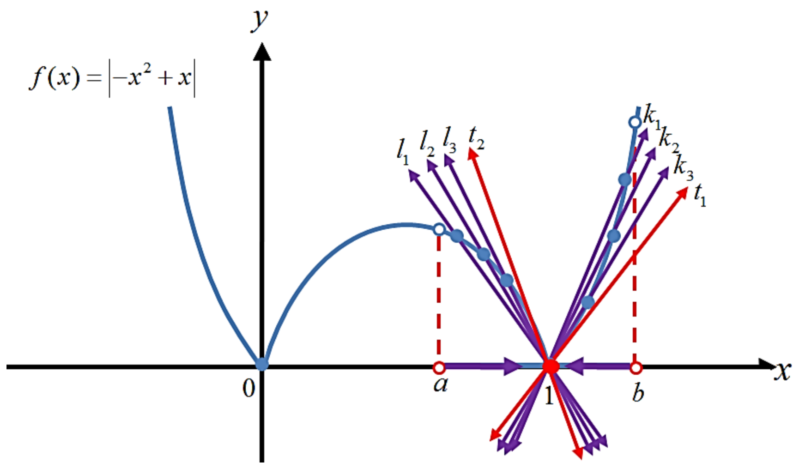
Şekil 5.74. *Köşe noktada türev alma görev tipi için cebirsel, analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Örnek 5.12'de bir fonksiyonun köşe noktasında türevsizliğin nasıl ortaya çıktığı

Şekil 5.74 lokal sitindeki ekolojik ilişkiler yardımıyla cebirsel ve analitik teknik bir arada kullanılarak incelenmiştir.

Örnek 5.12. $f(x)=\left|-x^2+x\right|$ fonksiyonunun $x=1$ noktasında türevlenebilirliğini inceleme.

Çözüm Şekil 5.75'te f fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki türevi koordinat düzleminde çizilen fonksiyon grafiği üzerinde analitik teknik kullanılarak incelenmiştir.



Şekil 5.75. $f(x)=\left|-x^2+x\right|$ *fonksiyonunun köşe noktadaki türevini analitik teknik kullanarak inceleme*

Şekil 5.75'teki grafiğe göre $(1,\ b)$ aralığında x değerleri azalarak 1'e yaklaştıkça, bu noktalardan geçen $k_1, k_2, \ldots$ kirişlerinin eğim değerleri giderek t_1 doğrusunun eğimine yaklaşmaktadır. Öte yandan, $(a,\ 1)$ aralığında x değerleri artarak 1'e yaklaştıkça, bu noktalardan geçen sırasıyla $l_1, l_2, \ldots$ kirişlerinin eğim değerleri giderek t_2 doğrusunun eğimine yaklaşmaktadır. $x=1$ noktasında sağdan ve soldan türevi alınırken eğimleri farklı olan iki teğet doğrusu elde edildiği için f fonksiyonunun $x=1$ köşe noktasında türevi yoktur.

Köşe noktadaki türevszlik durumunun cebirsel teknik ile gösterilebilmesi amacıyla f mutlak değer fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+x, & 0 \le x \le 1 \\ x^2-x, & x \prec 0 \ \ veya \ \ x \succ 1 \end{cases} \tag{5. 51}$$

şeklinde parçalı fonksiyon olarak yazılabilir (Mutlak değer fonksiyonun parçalı fonksiyona dönüştürülmesi aşamasında ortaya çıkan ekolojik ilişkilerin incelenebilmesi için Erdoğan (2006)'ın oluşturduğu cebirsel ve fonksiyonel sitten yararlanılabilir).

Cebirsel teknik kullanılarak sırasıyla t_1 ve t_2 doğrularınınn eğimi,

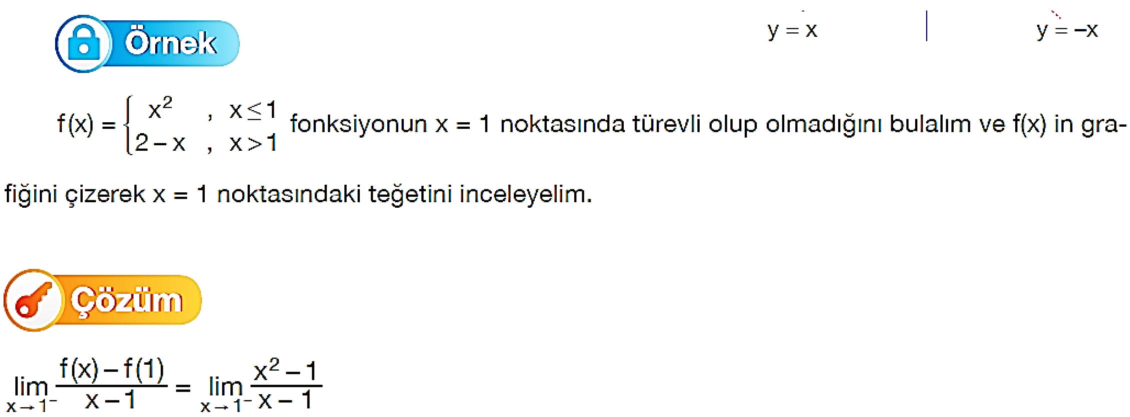
$$f'(1^+) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1^+} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+x-\left(-1^2+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x(1-x)}{x-1} = -1 \quad (5.52)$$

$$f'(1^-) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1^-} = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-x-\left(-1^2+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)}{x-1} = 1 \quad (5.53)$$

şeklinde bulunur. Bu sonuçlara göre, $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ olduğundan f fonksiyonunun $x=1$ noktası için türevi yoktur.

Ders kitaplarında köşe noktada türev alma

AY matematik ders kitabında *köşe noktada türev alma* görev tipine *Fonksiyonların Türevlenebilir Olması* başlığı altında 2 tane, *Türev Süreklilik İlişkisi* başlığı altında bir tane olmak üzere toplam 3 örnek ile yer verildiği görülmüştür. Bu örneklerin ilk 2'sinde cebirsel ve analik tekniğin bir arada, son örnekte ise analitik tekniğin tek başına kullanıldığı belirlenmiştir. Şekil 5.76'da iki tekniğin bir arada kullanıldığı 2.örneğe yer verilmiştir.



Şekil 5.76. *Köşe noktada türev alma görev tipi için bir örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.62-63)*

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$= 2$ olduğundan $f'(1^-) = 2$ dir.

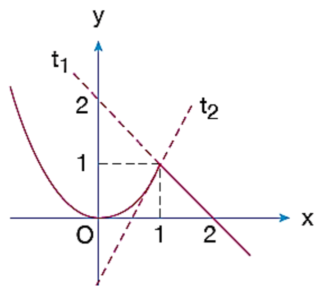
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2-x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1-x}{x-1}$$

$= -1$ olduğundan $f'(1^+) = -1$ dir.

$f'(1^-) \neq f'(1^+)$ olduğundan f(x) fonksiyonu x = 1 noktasında türevli değildir.

Grafikte de görüldüğü gibi x = 1 noktasında birden fazla teğet çizilebilmektedir. Bu noktada fonksiyonun grafiği sivri bir uç yaptığından türevi yoktur.



Şekil 5.76. (Devam) *Köşe noktada türev alma görev tipi için bir örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.62-63)*

Şekil 5.76 incelendiğinde, f fonksiyonunun köşe noktasında cebirsel teknik kullanılarak yapılan türev alma işlemlerinin analitik geometrik teknik kullanılarak desteklendiği görülmektedir. Örneğin çözümünde yer alan grafik incelendiğinde ise $x = 1$ köşe noktasında türev alma işlemi yapılırken kiriş nesnesinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılmadığı görülmektedir Şekil 5.74 lokal siti incelendiğinde kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin oran ve doğru nesneleri ile ekolojik ilişkilerinin olduğu görülmektedir. Bu ekolojik ilişkiler yardımıyla kiriş doğrularının fonksiyon grafiği üzerinde geçtikleri noktaların, teğetin geçtiği noktaya yaklaşmasına bağlı olarak kiriş doğrularının eğim değerleri teğet doğrusunun eğim değerine yaklaşmaktadır. Kiriş nesnesi böylelikle teğet doğrularının fonksiyon grafiğine nasıl çizildiğinin açıklanmasına ekolojik katkı sağlamaktadır. Bu durumda Şekil 5.76'daki örneğin çözümünde yer verilen grafikte kiriş doğrularının çizilmesi, t_1 ve t_2 teğet doğrularının eğim değerlerinde ortaya çıkan farklılığın anlamlandırılmasına da ekolojik katkı sağlamış olacaktır.

BY 12. sınıf matematik ders kitabı incelendiğinde *köşe noktada türev alma* görev tipine yönelik 2 tane örneğin yer aldığı görülmüştür. Bu örneklerin ilkinde cebirsel ve analitik teknik bir arada kullanılırken diğer örnekte sadece analitik tekniğe yer verilmiştir.

Şekil 5.77'de cebirsel ve analitik tekniğin bir arada kullanıldığı ilk örnek verilmiştir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 2x+4, & x<2 \\ 3x+2, & x \geqslant 2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki türevini bulalım.

Çözüm

f fonksiyonunun $x=2$ noktasında türevinin olması için soldan ve sağdan türevlerinin eşit olması gerekir.

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2(2+h)+4-(2\cdot 2+4)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{4}+2h+\cancel{4}-\cancel{4}-\cancel{4}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h}{h}=2 \text{ olur.}$$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(2+h)+2-(3\cdot 2+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{6}+3h+\cancel{2}-\cancel{6}-\cancel{2}}{h}$$

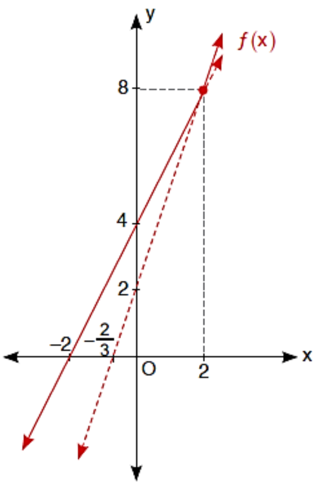
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}=3 \text{ olur.}$$

$f'(2^-)=2$ ve $f'(2^+)=3$ bulunur.

Buradan $f'(2^-)\neq f'(2^+)$ olduğundan fonksiyonun $x=2$ noktasında türevi yoktur.

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir. $x=2$ noktasında fonksiyon grafiğine çizilen teğetler doğruların grafikleri ile aynı olur.

Doğruların eğimleri $m_1=2$ ve $m_2=3$ olup eğimleri farklıdır. Fonksiyonun $x=2$ noktasında türevi yoktur.



Şekil 5.77. *Köşe noktada türev alma görev tipine yönelik cebirsel ve analitik tekniğin bir arada kullanıldığı örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.43-44)*

Şekil 5.77 incelendiğinde f fonksiyonunun köşe noktasında cebirsel teknik kullanılarak yapılan türev alma işlemlerinin analitik geometrik teknik kullanılarak desteklenmesinin hedeflediği anlaşılmaktadır. Örneğin çözümünde verilen grafik incelendiğinde, Şekil 5.74 lokal sitinde yer alan kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin ekolojik ilişkilerinin devre dışı bırakıldığı görülmektedir. Kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin yoksunluğundan kaynaklanan bu ekolojik boşluk, $x=2$ köşe noktasında teğet doğrularının eğim değerlerinde ortaya çıkan farklılığın grafik üzerinde incelenmesini engellemektedir. Bu durumun, analitik tekniğin cebirsel tekniğe olan ekolojik katkısının kısıtlanmasına neden olduğunu söylemek mümkündür.

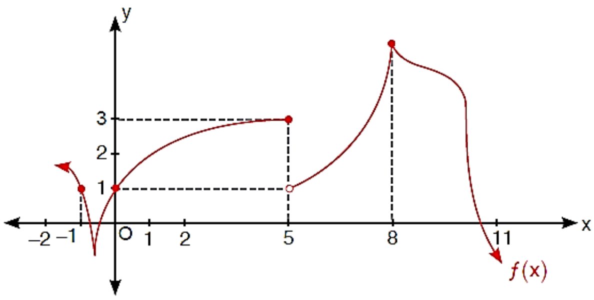
Şekil 5.78'de *köşe noktada türev alma* görev tipi ile ilgili BY ders kitabında yer alan 2.örnek verilmiştir.

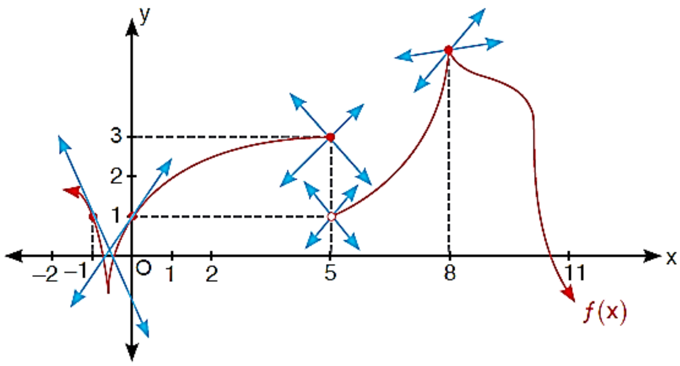
Örnek

Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre fonksiyonun

a) $x=-1$ **b)** $x=0$,

c) $x=5$ **ç)** $x=8$ noktalarında türevleri olup olmadığını bulalım.

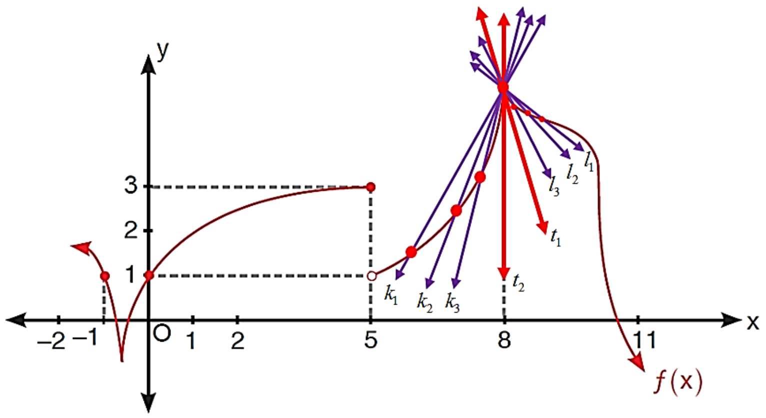




ç) $x=8$ noktasında fonksiyon süreklidir. $x=8$ noktasında fonksiyonun grafiğine birden fazla teğet çizilebildiğinden $x=8$ noktasında türevi yoktur.

Şekil 5.78. *Köşe noktada türev alma görev tipi için analitik tekniğin kullanıldığı bir örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.46)*

Şekil 5.78'de yer alan örneğin çözümü incelendiğinde f fonksiyonunun $x=8$ köşe noktasına teğetlerin olması gerekenden farklı eğim açıları ile çizildiği görülmektedir. Şekil 5.74 lokal siti incelendiğinde kiriş nesnesinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılarak bu hatanın giderilebileceği söylenebilir. Şekil 5.79'da, kiriş nesnesinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılarak f fonksiyonuna $x=8$ köşe noktasından geçen teğet doğruları çizilmiştir.



Şekil 5.79. *f fonksiyonunun $x=8$ köşe noktasında türevini alma görevi için analitik tekniğin kullanımı*

Şekil 5.79 incelendiğinde f fonksiyonunun $x=8$ köşe noktasına sağından geçecek şekilde çizilebilecek $l_1, l_2, l_3, \ldots$ kirişlerinin eğim değerlerinin bir reel sayıya yaklaşmasına karşılık, solundan geçecek şekilde çizilebilecek $k_1, k_2, k_3, \ldots$ kirişlerin eğim değerlerinin ∞'a ıraksayacağı görülmektedir. Bu durumda f fonksiyonunun $x=8$ noktasında soldan türevi yoktur. Buna karşılık Şekil 5.78'de teğet doğrusunun eğim değerinin bir reel sayıya yakınsamasına bağlı olarak f fonksiyonunun $x=8$ noktasında sağdan türevli olduğu görülmektedir.

5.3.2.7. *Fonksiyonun uç noktasında türev alma*

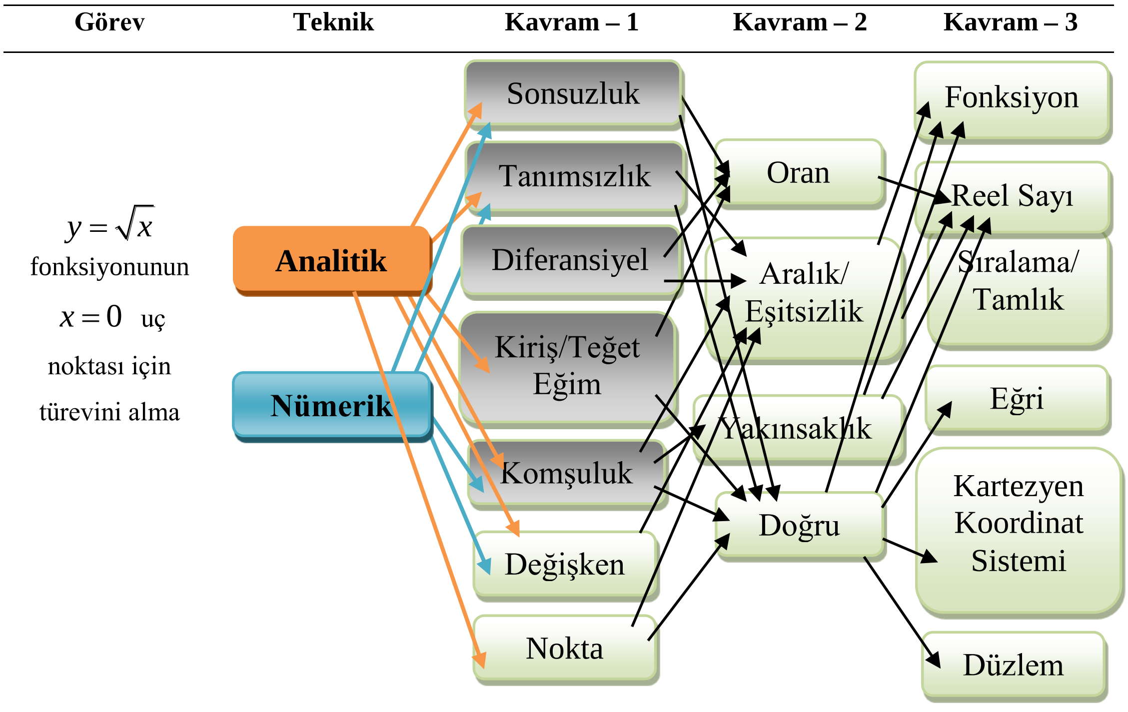
Bir fonksiyonun uç noktasında türev alma işlemi yapılırken, *fonksiyonun iç noktasında türev alma* görev tipinden farklı olarak, bu noktanın tanım aralığına göre yalnızca soldan veya yalnızca sağdan türevi alınır. Türev alma işleminin sonucu bir reel sayıya eşit oluyor ise fonksiyonun bu noktada, türevinin alındığı tarafa bağlı olarak, sağdan veya soldan türevli olduğuna karar verilir. *Fonksiyonun iç noktasında türev alma* görev tipinde de olduğu gibi, bir fonksiyonun uç noktasında süreksiz olması bu noktada türevsiz olduğunu gösterir. Bir fonksiyonun uç noktası köşe nokta olamayacağı için fonksiyonların uç noktaları için *köşe noktada türev alma* görev tipinden bahsedilmesi mümkün değildir. İç noktada türev alma işlemi ile uç noktada türev alma işlemi karşılaştırıldığında her iki görev tipinin gerçekleştirilmesinde benzer adımların atıldığı söylenebilir. Bu durumda, bu iki görev tipi gerçekleştirilirken devreye giren ekolojik ilişkilerin de benzerlik göstereceğini söylemek mümkündür.

Bu bölümde örnek olarak $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun uç noktasında türev alma işlemi yapılmıştır. $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun uç noktası için türevinin ne taraftan alınacağına karar verilmesinde fonksiyonun bu noktanın hangi tarafında tanımsız olduğunun belirlenmesi önem kazanır. Bu aşamada tanımsızlık nesnesinin aralık/eşitsizlik nesnesi ile ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur. Ayrıca, $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun türevi,

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty \qquad (5.\ 54)$$

şeklinde alındığında, limit alma işlemi yapılırken $\frac{a}{0}\ (a\neq 0)$ tanımsızlığının ortaya çıktığı görülmektedir. Ortaya çıkan bu tanımsızlık durumunun açıklanmasında bu nesnenin $\frac{a}{0}\ (a\neq 0)$ *tanımsızlığının olduğu noktada limit alma* görev tipinde devreye giren ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur. Analitik tekniğin kullanımında $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $(-\infty, 0)$ aralığındaki reel sayı değerleri için tanımsız olduğu ve buna bağlı olarak $x=0$ noktası için fonksiyona soldan yaklaşılamayacağı tanımsızlık ve değişken nesnelerinin komşuluk nesnesi ile ekolojik ilişkileri yardımıyla açıklanır. Nümerik teknik kullanılarak yapılan limit alma işleminin sonucunda elde edilen sonsuzluk, analitik teknikte fonksiyon eğrisine çizilen kirişlerin ve teğetin eğimleri ile ilişkilendirilir. Bu aşamada kiriş/teğet/eğim nesnelerinin oran ve doğru nesneleri ile ekolojik ilişkileri devreye girer. Çizilecek teğet doğrusunun eğim açısının dik olmasına bağlı olarak eğim değerinin tanımsız olması, tanımsızlık nesnesi ile doğru nesnesi arasındaki ekolojik ilişkiler yardımıyla açıklanır. Kiriş doğrularından elde edilen eğim değerlerinin bir reel sayıya yaklaşmak yerine sonsuza ıraksıyor olması, sonsuzluk, oran ve reel sayı nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerle açıklanır. Bu görev geçekleştirilirken teğet doğrusunun eğim açısının dik olmasına bağlı olarak dik üçgen yardımı ile dx ve dy uzunluklarının ifade edilmesi mümkün olmayacaktır. Bu nedenle, lokal sitte düzlem parçası (üçgen) nesnesine ihtiyaç duyulmayacaktır.

Şekil 5.80'de *fonksiyonun uç noktasında türev alma* görev tipi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir.

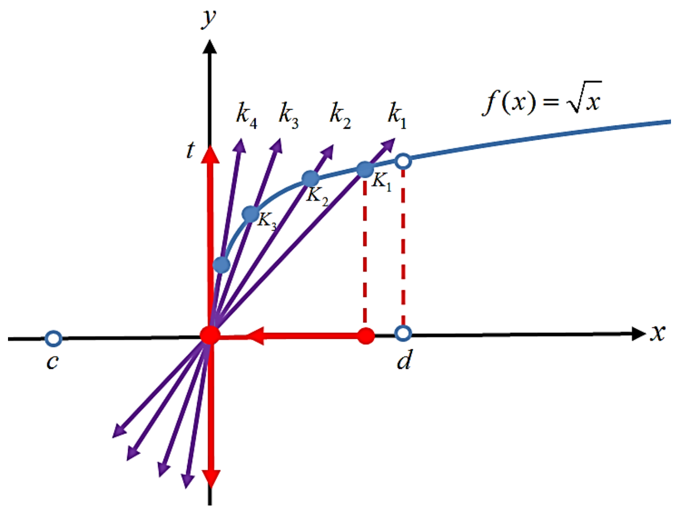


Şekil 5.80. *Fonksiyonun uç noktasında türev alma görev tipi için analitik ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Örnek 5.13'te $y=\sqrt{x}$ fonksiyonunun uç noktasındaki türevi Şekil 5.80 lokal sitindeki ekolojik ilişkiler yardımıyla analitik ve nümerik teknik bir arada kullanılarak incelenmiştir.

Örnek 5.13. $y=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktası için türevini inceleme.

Çözüm Şekil 5.81'de $y=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki türevi fonksiyon grafiği üzerinde incelenmiştir.



Şekil 5.81. $y=\sqrt{x}$ *fonksiyonunun sol uç noktasında türevini alma*

Şekil 5.81'deki grafiğe göre f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında tanımlı olduğu halde $(-\infty,0)$ aralığında tanımsızdır. Bu durumda $x=0$ apsisli nokta fonksiyonun sol uç noktası olup, fonksiyon herhangi bir $(c,0)$ aralığında tanımlı olmadığı için $x=0$ noktasında soldan türev incelenemez. Buna karşılık $(0,d)\subset[0,\infty)$ olacak şekilde bir $(0,d)$ aralığı mevcut olduğundan aynı değer için sağdan türev incelenebilir.

Grafiğe göre $(0,d)$ aralığında x değerleri azalarak sıfıra yaklaştıkça, $K_1,K_2,K_3,...$ noktalarından geçen sırasıyla $k_1,k_2,k_3,...$ kirişlerinin eğim değerleri de sürekli artarak sonsuza ıraksamaktadır. Bu durumda f fonksiyonuna $x=0$ noktasında bir t teğet doğrusu çizilebildiği halde, bu doğrunun eğimi bir reel sayıya eşit olmadığı için f fonksiyonunun $x=0$ noktasında sağdan türev yoktur. Ortaya çıkan türevsizlik durumu nümerik tekniğin kullanımına bağlı olarak,

$$f'(0^+)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0^+}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=\infty \qquad (5.55)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\dfrac{1}{0^+}=\infty$ ifadesi, sıfıra sağından yaklaşacak şekilde nümerik değerler verilmesi sonucunda elde edilen oran değerlerinin ∞'a ıraksayacağını göstermektedir.

5.3.2.7.1. *Ders kitaplarında fonksiyonun uç noktasında türev alma*

AY ders kitabı incelendiğinde *fonksiyonun uç noktasında türev alma* görev tipine yönelik bir açıklama veya örneğe yer verilmediği görülmüşür. BY ders kitabı incelendiğinde ise bu görev tipine yönelik bilgilendirme yapıldığı görülmüştür. *Bir Fonksiyonun Bir Aralıkta Türevli Olması* başlığı altında yer alan bilgilendirme bölümü Şekil 5.82'de verilmiştir.

> **Bilgi**
>
> Bir fonksiyon (a,b) nın her noktasında türevli ise ***f* fonksiyonu (a, b) nda türevlidir** denir.
>
> Bir fonksiyon (a, b) nın her noktasında türevli, x=a noktasında sağdan ve x=b noktasında soldan türevli ise "***f* fonksiyonu [a, b] nda türevlidir.**" denir.

Şekil 5.82. *Fonksiyonun uç noktasında türev alma görev tipine yönelik bilgilendirme (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.50)*

Bir fonksiyonun uç noktasında türevli olabilmesi için bu uç noktasında tek taraflı sürekliliğin olması gerekir. Buna göre Şekil 5.82'de belirtilen f fonksiyonunun $x = a$ noktasında türevli olabilmesi için bu noktada sağdan, $x = b$ noktasında türevli olabilmesi için bu noktada soldan sürekli olması gerekir. Şekil 5.82 incelendiğinde, *fonksiyonun uç noktasında türev alma* görev tipi açıklanırken süreklilik ile türev kavramları arasında ekolojik bağın kurulmadığı görülmektedir. Ders kitabının *Süreklilik* konu başlıklı bölümü incelendiğinde, ortaya çıkan bu ekolojik kopukluğun *uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tipine yer verilmemesinden kaynaklandığı görülmektedir.

Şekil 5.82 incelendiğinde, f fonksiyonunun uç noktalarındaki türevi belirlenirken $x = a$ noktası için neden yalnızca sağdan ya da $x = b$ noktası için neden yalnızca soldan türev alındığına yönelik gerekli teknolojilere de yer verilmediği görülmektedir. BY ders kitabının ilerleyen bölümleri incelendiğinde, bilgilendirmede ortaya çıkan bu ekolojik boşluğun giderilmesine yönelik bir örneğe rastlanmamıştır. Ders kitaplarında *fonksiyonun uç noktasında türev alma* görev tipinin gerçekleştirilmesine yönelik gerekli teknolojilere yer verilmemiş olmasının $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ gibi kapalı veya $f(x) = \sqrt{x}$ gibi yarı açık aralıkta tanımlı fonksiyonların türevlenebilirliğinin inceleneceği görevlerde yukarıda belirtilen ekolojik sorunların ortaya çıkmasına neden olabileceği söylenebilir.

5.3.2.8. ***Bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme***

Bir fonksiyonun türvlenebilirliği incelenirken fonksiyonun tanımlı olduğu bütün noktalarda türevli olup olmadığına bakılır. Türevlenebilirliğe fonksiyonun tanımlı olduğu noktalara göre karar verileceği değerlendirildiğinde, fonksiyonda tanımsızlığa neden olan noktaların belirlenmesinin önem kazanacağı söylenebilir. Bu aşamada tanımsızlığın nedenine göre tanımsızlık veya belirsizlik nesnelerinin daha önce limit alma işlemi yaparken de devreye giren ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur. Ardından fonksiyonun tanımlı olduğu kritik noktalarının olup olmadığı belirlenir ve bu noktalardaki türevliliği incelenir. Bu aşamada kritik noktanın özelliğine göre *limitin olmadığı noktada türev, limitin olduğu, sürekliliğin olmadığı noktada türev, köşe noktada türev alma, fonksiyonun uç noktasında türev alma* görev tipleri için devreye giren ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur.

Örneğin, $f(x)=\dfrac{x^4-x^3}{x-1}$ *fonksiyonunun türevlenebilirliğini inceleme* görevi gerçekleşirilirken ilk adımda fonksiyonun tanımsız olduğu nokta belirlenir.

1.Adım: $x=1$ için $f(1)=\dfrac{0}{0}\notin R$ olup fonksiyon tanımsızdır.

- *Bu adımda yapılan işlem daha önce Tablo 5.5'te $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğinin olduğu noktada limit alma görev tipi için yapılan prakseolojik analizin cebirsel ve nümerik teknikleri 1.adımlarında yer almaktadır. Bu durumda cebirsel veya nümerik teknik kullanılarak $x=1$ noktasındaki tanımsızlığın açıklanmasında $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ limitini alma görevinin lokal sitindeki (Bkz. Şekil 5.24) belirsizlik ve tanımsızlık nesnelerinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur. Analitik tekniğin kullanımında ise aynı lokal sitteki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak tanımsızlığın olduğu nokta fonksiyon grafiği üzerinde belirlenir.*

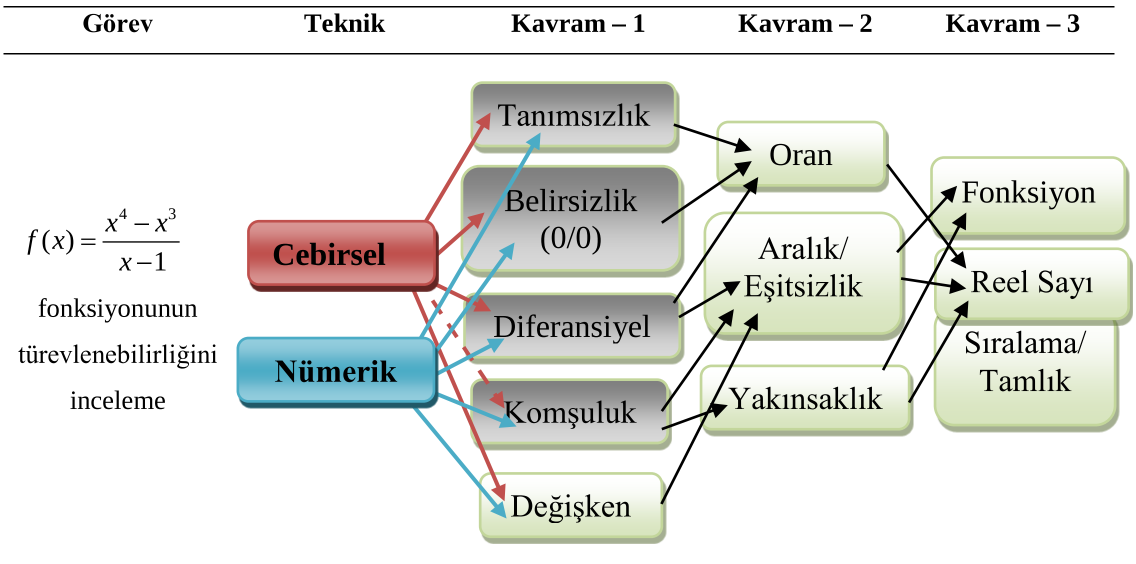
2.Adım: f fonksiyonunun tanım kümesinde özel olarak türevliliğin incelenmesini gerektirecek kritik bir nokta yoktur. Bu durumda,

$$\forall x_0 \in R-\{1\} \text{ için } f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0) \qquad (5\ .56)$$

eşitliği sağlanacağı için f türevlenebilir bir fonksiyondur.

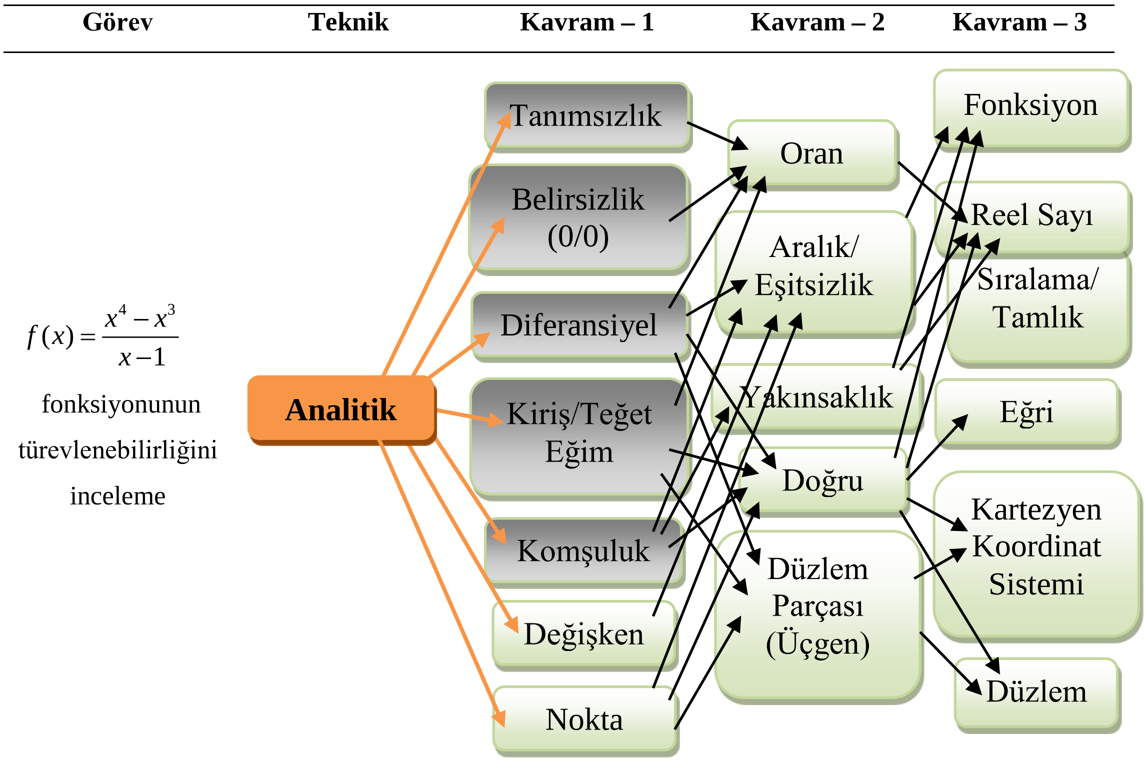
- *Kritik noktaların belirlenmesi ve bu noktalardaki türevlerin incelenmesine yönelik ekolojik ilişkiler daha önceki görev tiplerinde açıklanmıştır. Bu görev tipleri göz önünde tutulduğunda,* $f(x)=\dfrac{x^4-x^3}{x-1}$ *fonksiyonunun tanım kümesinde türevsizliğe neden olabilecek kritik bir noktanın olmadığı görülmektedir. Bu durumda, fonksiyonun iç noktasında türev alma görev tipi için ekolojik ilişkilerin yer aldığı* Şekil 5.58 *lokal siti yardımıyla* f *fonksiyonun tanım kümesindeki her* x_0 *elemanı için* (5. 56) *eşitliğinin sağlandığı belirlenir.*

Şekil 5.83'te $f(x)=\dfrac{x^4-x^3}{x-1}$ *fonksiyonunun türevlenebilirliğini inceleme* görevinin gerçekleştirilmesine bağlı olarak ihtiyaç duyulan ekolojik ilişkilerin yer aldığı cebirsel ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal site yer verilmiştir.



Şekil 5.83. *Bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme görev tipi için cebirsel ve nümerik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

Şekil 5.84'te $f(x)=\dfrac{x^4-x^3}{x-1}$ *fonksiyonunun türevlenebilirliğini inceleme* görevinin gerçekleştirilmesine bağlı olarak ihtiyaç duyulan ekolojik ilişkilerin yer aldığı analitik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit verilmiştir.



Şekil 5.84. *Bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme görev tipi için analitik tekniğin kullanımına yönelik lokal sit*

5.3.2.8.1. *Ders kitaplarında bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme*

AY ders kitabı incelendiğinde *bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme* görev tipine yönelik bir tane örneğin bulunduğu görülmüştür. Cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı bu örnek Şekil 5.85'te verilmiştir.

Örnek

$f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+1, & x<1 \\ bx^3+2 & , x\geq 1 \end{cases}$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için türevli olduğuna göre a ve b sayılarını bulalım.

Çözüm

f(x) fonksiyonunun türevli olabilmesi için öncelikle sürekli olması gerekir.

ax^2+2x+1 fonksiyonu ve bx^3+2 fonksiyonu, polinom fonksiyonlar olduğundan bu fonksiyonlar her noktada sürekli ve türevlidir.

Şekil 5.85. *Bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme görev tipine yönelik bir örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.63-64)*

Bu durumda türevliliğin bozulabileceği tek nokta x = 1 noktası olur. Bu noktada da fonksiyonun sürekli olması için

$\lim\limits_{x \to 1^-} (ax^2 + 2x + 1) = \lim\limits_{x \to 1^+} (bx^3 + 2) = f(1)$ olmalıdır.

$a + 2 + 1 = b + 2 \Rightarrow a + 1 = b$ .... (I) bulunur.

Fonksiyonun x = 1 de türevli olması için $f'(1^-) = f'(1^+)$ olması gerekir.

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{ax^2 + 2x + 1 - b - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{ax^2 + 2x + 1 - (a + 1) - 2}{x - 1} \qquad (b = a + 1)$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{ax^2 + 2x - a - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{a(x^2 - 1) + 2x - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{a(x - 1)(x + 1) + 2(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x - 1)}[a(x + 1) + 2]}{\cancel{x - 1}}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} [a(x + 1) + 2] = 2a + 2 \text{ dir.}$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{bx^3 + \cancel{2} - b - \cancel{2}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{b(x^3 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{b\cancel{(x - 1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{x - 1}} \lim_{x \to 1^+} b(x^2 + x + 1)$$

$= b \cdot (1 + 1 + 1) = 3b$ olur.

O hâlde, $2a + 2 = 3b$ .... (II) elde edilir.

(I) ve (II) ortak çözülürse

$2a + 2 = 3(a + 1) \Rightarrow 2a + 2 = 3a + 3$

$\Rightarrow a = -1$ olur.

Buradan da $b = -1 + 1 \Rightarrow b = 0$ bulunur.

Şekil 5.85. (Devam) *Bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme görev tipine yönelik bir örnek (AY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.63-64)*

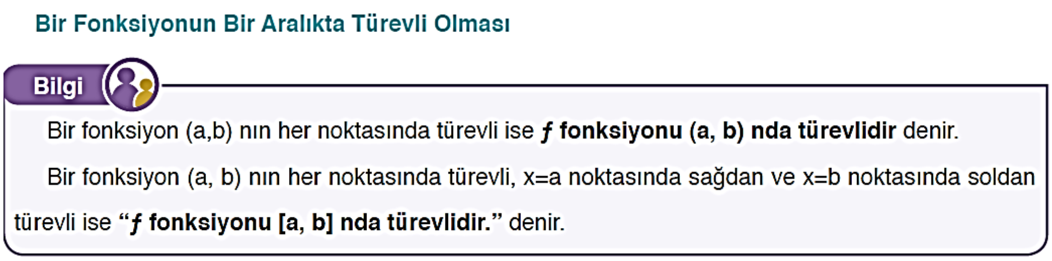
Şekil 5.85'teki örnekte f parçalı fonksiyonunun $\forall x \in R$ için türevli olması fonksiyonun türevlenebilir olduğunu göstermektedir. Örneğin çözümünde fonksiyonun kritik noktasında türevli olup olmadığı ayrıca incelenmiştir. Bu aşamada $x = 1$ noktası için sağdan ve soldan türev alma işlemleri yapılmıştır. Örneğin çözümünde sağdan ve soldan türev alma işlemlerinin fonksiyonun hangi parçaları üzerinde yapılacağına nasıl karar verildiğine yönelik bir açıklamaya yer verilmemiştir. Bu durum,

$$f'(1^-) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1^-} = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(ax^2 + 2x + 1) - b - 2}{x - 1} \tag{5. 57}$$

$$f'(1^+) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1^+} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(bx^3 + 2) - b - 2}{x - 1} \tag{5. 58}$$

eşitliklerinde yer alan $f(x)$ fonksiyonu yerine birbirinden farklı olan ax^2+2x+1 ve bx^3+2 ifadelerinin yazılma nedenine yönelik teknolojinin açıklanmasında ekolojik boşluğun ortaya çıkmasına neden olmuştur. *Bir parçalı fonksiyonun kritik noktasında türevinin incelenmesi* görevine yönelik ekolojik ilişkilerin yer aldığı Şekil 5.66 lokal siti incelendiğinde, bu ekolojik boşluğun ortaya çıkmasında tanımsızlık ve komşuluk nesneleri ile aralık/eşitsizlik nesneleri arasındaki ekolojik kopukluğun önemli bir rol oynadığını söylemek mümkündür. Bu nesneler arasındaki ekolojik ilişkilerden yararlanılarak; $x=1$ noktasında soldan türev alma işlemi yaparken gerekli olan $(x_0, 1)$ şeklindeki bir komşuluk için fonksiyonun $y=bx^3+2$ parçasının tanımsız olduğu, bu nedenle (5. 57)'de limit alma işlemi gerçekleştirilirken fonksiyonun en az bir $(x_0, 1)$ aralığında tanımlı olan $y=ax^2+2x+1$ parçasının kullanıldığı açıklanabilir. Benzer açıklamalara $x=1$ noktasında sağdan türev alma işlemi için de yer verilebilir. Böylelikle ortaya çıkan ekolojik boşluğun giderilmesine yönelik etkili bir adım atılmasına da imkan sağlanmış olur. Öte yandan, cebirsel tekniğin komşuluk nesnesi ile örtük ekolojik ilişkisinin olduğu değerlendirildiğinde, bu açıklamaların Şekil 5.66 lokal sitindeki ekolojik ilişkiler yardımıyla fonksiyon grafiği üzerinde analitik teknik kullanılarak desteklenmesinin faydalı olacağını söylemek mümkündür. Böylelikle tanımsızlık ve komşuluk nesneleri ile aralık/eşitsizlik nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerin grafik üzerinde somut bir yaklaşım ile incelenmesine olanak sağlanmış olur.

BY ders kitabı incelendiğinde *bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme* görev tipine *Fonksiyonun Bir Aralıkta Türevli Olması* başlığı altında çalışmadaki görev tipi sırasına uygun bir şekilde yer verildiği görülmüştür. Ders kitabında bu görev tipine yönelik bilgilendirmenin ardından 4 tane örneğe yer verilmiştir. Şekil 5.86'da bilgilendirme bölümü ve daha detaylı açıklamaların yapıldığı 2.örneğe yer verilmiştir.


Bir Fonksiyonun Bir Aralıkta Türevli Olması

Bilgi

Bir fonksiyon (a,b) nın her noktasında türevli ise **ƒ fonksiyonu (a, b) nda türevlidir** denir.

Bir fonksiyon (a, b) nın her noktasında türevli, x=a noktasında sağdan ve x=b noktasında soldan türevli ise **"ƒ fonksiyonu [a, b] nda türevlidir."** denir.

Şekil 5.86. *Bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme görev tipine yönelik bilgilendirme ve örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.50)*

Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 1 \\ x+1, & x \geqslant 1 \end{cases}$ fonksiyonunun türevli olduğu aralığı bulalım.

Çözüm

$x < 1$ için

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2+\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2xh+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0^-} (2x+h) = 2x+0 = 2x \text{ tir.}$$

$x < 1$ için fonksiyon türevlidir.

$$x > 1 \text{ için } f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(x+h)+1-(x+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{x+h+1-x-1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1 \text{ dir.}$$

$x > 1$ için de fonksiyon türevlidir. $x = 1$ için $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ olduğundan fonksiyon $x = 1$ noktasında türevli değildir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, 1)$ ve $(1, +\infty)$ nda türevlidir.

Şekil 5.86. (Devam) *Bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme görev tipine yönelik bilgilendirme ve örnek (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.50)*

Şekil 5.86'da yer alan *Bilgi* bölümünde bir fonksiyonun bir açık aralıkta veya bir kapalı araklıkta türevli olabilmesi için gerekli olan şartlar belirtilmiştir. Buna karşılık, *Bilgi* bölümünde türevlenebilirlik ifadesine yer verilmediği ve bir fonksiyonun türevlenebilir olması için gerekli olan şartlara değinilmediği görülmektedir. Örneğin, yapılan bilgilendirmede bir fonksiyonun tanımsız olduğu noktaların türevlenebilirliğine etki etmeyeceğine yönelik bir açıklama yer almamaktadır. Şekil 5.86'da yer alan örneğin çözümü incelendiğinde, bilgilendirmede tanımsızlık nesnesinin gözardı edilmesinden kaynaklanan bu ekolojik boşluğun giderilmesine yönelik bir adım atılmadığı görülmektedir. Örneğin çözümünde, "Bir fonksiyonun türevlenebilir olması için tanımlı olduğu bütün noktalarda türevli olması gerekir. f fonksiyonunun tanımsız olduğu bir reel sayı değerinin olmadığı görülmektedir. Bu durumda f fonksiyonunun türevlenebilir olması $\forall x \in R$ için türevli olmasını gerektirmektedir.'' şeklinde yapılabilecek bir açıklama ile bu ekolojik boşluğun giderilebileceğini söylemek mümkündür. Örneğin çözümünde, AY ders kitabında yer alan Şekil 5.85 örneğinde de olduğu gibi, f fonksiyonunun $x=1$ kritik noktasında sağdan ve soldan türevi alınırken kullanılacak fonksiyon parçalarına nasıl karar verildiğine yönelik bir açıklamaya yer verilmediği görülmektedir. Çözümün sonunda, *Bilgi* bölümüne benzer bir şekilde, *türevlenebilirlik* ifadesi kullanılmadan yalnızca fonksiyonun hangi aralıklarda türevli olduğu belirtilmiştir.

BY ders kitabının ilerleyen bölümleri incelendiğinde türevlenebilirlik kavramına ve türevlenebilirlik için gerekli olan ekolojik ilişkilere yer verilmemesine bağlı olarak ortaya çıkan ekolojik boşlukların bir sonraki konunun öğretimine de etki edebileceği görülmüştür. Bir sonraki konuda fonksiyonların türevlenebirliğine ihtiyaç duyulduğu bölümler Şekil 5.87'de verilmiştir.

1.2.3. Türevlenebilen İki Fonksiyonun Toplamının, Farkının, Çarpımının ve Bölümünün Türevi

Toplamın ve Farkın Türevi

Bilgi

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $x \in A$ gerçek sayısı için f ve g fonksiyonları türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ ve $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ tir.

Sonuç

$f_1, f_2, ..., f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $x \in \mathbb{R}$ sayısı için türevlenebilir olsun.

$(f_1 + f_2 + ... + f_n)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$ tir.

Çarpımın Türevi

Bilgi

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $x \in A$ gerçek sayısı için f ve g fonksiyonları türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere, $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ tir.

Sonuç

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f türevlenebilen bir fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$[c \cdot f(x)]' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x)$

$= c \cdot f'(x)$ olur.

Şekil 5.87. *Bir fonksiyonun türevlenebilirliğinin geçtiği bölümler (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.53 -55)*

Bölümün Türevi

Bilgi

$f,\ g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f ve g türevlenebilir iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ dir.

Şekil 5.87. (Devam) *Bir fonksiyonun türevlenebilirliğinin geçtiği bölümler (BY 12. Sınıf Matematik Ders Kitabı, s.53 -55)*

Şekil 5.87 incelendiğinde, ders kitabının önceki bölümlerinde bir fonksiyonun türevlenebilirliğine yönelik gerekli ekolojik ilişkilere yer verilmemesinin, iki fonksiyonun toplamının, farkının, çarpımının ve bölümünün türevi incelenirken türevlenebilir fonksiyonlara ihtiyaç duyulmasına bağlı olarak, ekolojik boşlukların ortaya çıkmasına neden olduğu görülmektedir.

5.3.2.9. *Bileşke fonksiyonun bir noktadaki türevini belirleme*

Öğretim programında *bileşke fonksiyonun bir noktadaki türevini belirleme* görev tipine yönelik kazanım şu şekildedir:

> **İki fonksiyonun bileşkesinin türevine ait kuralı (zincir kuralı) oluşturur ve bunu kullanarak türev hesabı yapar.** (MEB, 2013, s.46).

Bu kazanımda iki fonksiyonun bileşkesinin türevine ait kuralın zincir kuralı ile ilişkilendirilerek açıklanmasının öngörüldüğü anlaşılmaktadır. Çalışmada da türev hesabında etkili bir yaklaşım sağlayan zincir kuralının, öğretim programında öngörüldüğü şekilde, bileşke fonksiyonların türevinde işe koşularak ekolojik olarak işlevselliğinin sağlanması amaçlanmıştır. Bu yaklaşım doğrultusunda ortaya çıkan ekolojik ilişkilerin değerlendirilmesi amacıyla Örnek 5.14'te zincir kuralı yardımıyla bileşke fonksiyonun türevi alınmıştır.

Örnek 5.14. $f(x) = x^2$ ve $g(x) = \ln x$ olmak üzere $(f \circ g)'(x)$ türevini bulma.

Çözüm $f(x) = x^2$ ve $g(x) = \ln x$ fonksiyonları değişken değiştirme özelliği kullanılarak,

$$y = f(u) = u^2 \text{ ve } u = g(x) = \ln x \tag{5. 59}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda f ve g foksiyonlarının bileşkesi,

$$y = f(u) = f(g(x)) \tag{5. 60}$$

olarak yazılabilir. $y = f(u) = f(g(x))$ fonksiyonunun türevi zincir kuralı kullanılarak,

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \tag{5. 61}$$

şeklinde ifade edilebilir. Türev alma işlemleri yapıldığında,

$$\frac{dy}{du} = f'(u) = 2u \text{ ve } \frac{du}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} \tag{5. 62}$$

olarak bulunur. Türev işlemlerinden elde edilen sonuçlar (5. 61) eşitliğindeki yerlerine yazıldığında,

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) = 2u.\frac{1}{x} \tag{5. 63}$$

elde edilir. (5. 59) eşitlitliğindeki u fonksiyonu (5 63)'teki yerine yazıldığında bileşke fonksiyonun türevi,

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) = 2\ln x.\frac{1}{x} \tag{5. 64}$$

olarak bulunmuş olur.

Örnek 5.14'ün çözümü incelendiğinde, değişken değiştirme tekniği kullanılarak (5. 59) eşitliğinin elde edilmesi aşamasında cebir ve fonksiyon bilgisine ihtiyaç duyulacağı görülmektedir. (5. 60) eşitliğinde (5. 59)'daki eşitliklerden yararlanılarak bileşke fonksiyon elde edilmiştir. İki fonksiyonun bileşkesi oluşturulurken de yine cebir ve fonksiyon bilgisine ihtiyaç duyulur. Bu aşamaya kadar atılan adımlarda devreye giren ekolojik ilişkilerin belirlenebilmesi için Erdoğan (2006)'ın oluşturduğu cebirsel ve fonksiyonel sitten yararlanılabilir.

Erdoğan (2006)' ın cebirsel ve fonksiyonel siti değişken değiştirme tekniği ile bileşke fonksiyon kavramı arasında zengin ekolojik ilişkiler kurulabileceğini göstermektedir. Örneğin bu ekolojik ilişkilere göre $h(x) = x^2 + 4x + 1$ fonksiyonunun grafiği, $f(x) = x^2$ referans fonksiyonunun grafiğinden hareketle, değişken değiştirme tekniği kullanılıp bileşke fonksiyonların özelliklerinden yararlanılarak çizilebilmektedir. Buna göre, $h(x) = x^2 + 4x + 1$ fonksiyonu cebirsel ve fonksiyonel sitteki ekolojik ilişkiler yardımıyla $h(x)=(x+2)^2-3$ şeklinde ifade edilebilmektedir. Ardından $f(x)=x^2$ referans fonksiyonunun grafiğinin 3 birim aşağı ötelenmesi sonucunda $g(x)=x^2-3$ fonksiyonunun grafiği çizilmektedir. Değişken değiştirme yöntemi kullanılarak g fonksiyonu $g(u)=u^2-3$ olarak ifade edilmektedir. Bu durumda $u=k(x)=x+2$ olmak üzere h fonksiyonu da $h(x)=g(k(x))=(x+2)^2-3$ şeklinde bileşke fonksiyon olarak ifade edilebilmektedir. Buna göre $g(k(x))$ bileşke fonksiyonunun grafiği, g fonksiyonunun grafiği 2 birim sola kaydırılarak çizilebilmektedir.

(5. 61) eşitliğinde zincir kuralının kullanılmasına bağlı olarak hangi türevlerin alınması gerektiği ifade edilmiştir. (5. 62) eşitliklerinde ise,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (5.\ 65)$$

limit ifadesinden yararlanılarak elde edilebilen türev alma kuralları kullanılarak (5. 59)'daki fonksiyonların türevleri alınmıştır. Bu adımların atılmasına bağlı olarak devreye giren ekolojik ilişkilerin belirlenmesinde analiz global sitinden yararlanılabilir. Buna göre gerek (5. 61) eşitliğinde yer alan $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{du}$ ve $\frac{du}{dx}$ diferansiyel oranların, gerekse (5. 65) ifadesinin elde edilmesinde, *bir hareketlinin anlık hızını bulma* görev tipi için oluşturulan Şekil 5.51 lokal sitindeki ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur.

Örnek 5.14'ün çözümü bütünüyle değerlendirildiğinde; *bileşke fonksiyonun bir noktadaki türevini belirleme* görev tipine yönelik ekolojik analizin yapılabilmesi için analiz global siti ile cebirsel ve fonksiyonel sitin bir arada kullanılması gerektiği sonucu ortaya çıkmaktadır. Cebirsel ve fonksiyonel sitten bu görev tipi bağlamında yararlanılabilmesi, öğretim programının cebir ve fonksiyonlar çalışma alanı ile ilgili amaç, beklenti, kazanım ve kısıtlamalarının göz önünde tutulduğu bir değerlendirme sürecini gerektirmektedir. Çalışmanın kapsamı dışına çıkılmaması için ders kitaplarının bu görev tipi ile ilgili bölümleri değerlendirilmemiştir.

5.4. Türev Uygulamalarına Yönelik Kazanımların Değerlendirilmesi

Öğretim programında türevin uygulamaları konu başlığı altında yer alan kazanımlar şunlardır:

Verilen bir fonksiyonun bir noktadaki teğet ve normalinin denklemlerini bulur.
Bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları türevinin işaretine göre belirler.
Bir fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum, yerel maksimum, yerel minimum noktalarını açıklar ve bir fonksiyonun ekstremum noktalarını türev yardımıyla belirler.
Maksimum ve minimum problemlerinin modellenmesi ve çözümünde türevi kullanır.
Bir fonksiyonun grafiği üzerinde bükeylik ve dönüm noktası kavramlarını açıklar.
Fonksiyonların grafiğini çizerken türevi kullanır (MEB, 2013, s46-47)**.**

Bu kazanımlar; bir fonksiyonun bir noktadaki teğet ve normalinin denklemlerinin bulunmasında, fonsiyonların artan veya azalan olduğu aralıkların belirlenmesinde, maksimum ve minimum problemlerinin modellenmesinde ve çözümünde, fonksiyonların ekstremum noktalarının, iç bükey veya dış bükey oldukları aralıkların ve dönüm noktalarının belirlenmesinde, fonksiyon grafiklerinin çizilmesinde türev bilgisi kullanımının öngörüldüğünü göstermektedir. Analiz global siti tek başına bu uygulamalardan herhangi birinin ekolojik analizinin yapılması için yeterli değildir. Sıralanan bu görev tiplerinin ekolojik analizlerinin yapılabilmesi için analiz global siti ile beraber, analitik geometri çalışma alanı için oluşturulabilecek global site ve Erdoğan (2006)'ın oluşturduğu cebirsel ve fonksiyonel site ihtiyaç duyulur. Örneğin, bir fonksiyonun grafiğine bir noktada teğet olan doğrunun denkleminin bulunmasına yönelik görev tipinde teğet denkleminin oluşturulması için teğetin eğimine ihtiyaç duyulur. Eğimin bulunması aşamasında devreye giren ekolojik ilişkilerin belirlenebilmesi için analiz çalışma alanı için hazırlanan global sitten yararlanılabilir. (Eğim değerinin bulunması aşamasında devreye giren ekolojik ilişkilerin belirlenmesi amacıyla, çalışmada *bir hareketlinin anlık hızını bulma* görev tipi için de kullanılmış olan, Şekil 5.51 lokal sitinden yararlanılabilir.) Ardından bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemi yardımıyla teğet doğrusunun denklemi elde edilir. Doğru denkleminin elde edilmesi aşamasında analitik geometri çalışma alanı için oluşturulabilecek global site ihtiyaç duyulur.

Türev bilgisi yardımıyla bir fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıkların belirlenmesinde, öncelikle artanlık ve azalanlık kavramlarının açıklanması gerekir. Bu aşamada eşitsizlik kavramı ile fonksiyon kavramının ekolojik ilişkileri ön plana çıkar. Türev fonksiyonunun negatif değerler aldığı aralıklarda fonksiyonun azalan, pozitif değerler aldığı aralıklarda ise artan olduğuna karar verilir. Bu teknolojinin yerine getirilmesinde de yine eşitsizlik kavramının fonksiyon kavramı ile ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulur. Bu ekolojik ilişkilerin değerlendirilmesinde Erdoğan (2006)'ın oluşturduğu cebirsel ve fonksiyonel sitte yer alan ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur. Benzer şekilde, türev bilgisi yardımıyla bir fonksiyonun ekstremum veya dönüm noktalarının bulunmasında; öncelikle bu noktaların tanımlanması, ardından ekstremum veya dönüm noktalarının fonksiyonun aldığı değerlerle ilişkilendirilmesi gerekir. Bu adımların atılabilmesi için de yine cebirsel ve fonksiyonel sitte yer alan ekolojik ilişkilere ihtiyaç duyulur. Türev bilgisi yardımıyla fonksiyon grafiklerinin çizilmesinde ise türevin uygulamaları ile ilgili yukarıda açıklanan ekolojik ilişkilerden yararlanılır. Buna göre bir fonksiynun koordinat düzleminde grafiği çizilirken fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıkların, ekstremum veya dönüm noktalarının belirlenmesi gerekir. Bu adımlar atılırken ortaya çıkan ekolojik ilişkilerin incelenmesinde analiz global siti ile birlikte cebirsel ve fonksiyonel site ihtiyaç duyulur.

Sonuç olarak, türevin uygulamalarına yönelik ekolojik ilişkilerin incelenmesinde, *bileşke fonksiyonun bir noktadaki türevini belirleme* görev tipinde de olduğu gibi, analiz global siti tek başına yeterli olamayacağı için tez çalışması kapsamında bu alt başlıkla ilgili görev tiplerine yer verilmemiştir.

ALTINCI BÖLÜM

6. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

6.1. Sonuç ve Tartışma

Bu bölümde analiz global sitinden ve lokal sitlerden elde edilen sonuçlara iki ayrı başlık altında yer verilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre öğretim programı ve ders kitaplarında ortaya çıkan ekolojik sorunlar tartışılmıştır.

6.1.1. Analiz global siti ile ilgili sonuçlar ve tartışma

Yapılan incelemeler, analizin temel uğraşının reel sayılardaki değişim olduğunu göstermiş ve bu doğrultuda analiz global sitinin temel nesnesi *değişim* olarak belirlenmiştir. Analiz denilince akla her ne kadar limit, süreklilik, türev ve integral kavramları gelse de analiz global siti bu kavramların analizin uğraş konuları değil, reel sayılardaki değişimlerin incelenmesinde devreye giren temel araçlar olduğunu göstermiştir.

Bu sonuç fonksiyonlar üzerinde limit, türev ve integral hesabı yapma veya sürekliliği inceleme becerisinin temel alındığı bir öğretim yaklaşımı yerine, reel sayılar ve fonksiyonlardaki değişimin üzerinde yoğunlaşıldığı ve değişimlerin hesaplanmasında limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarının birer araç olarak işe koşulduğu bir yaklaşımın tercih edilmesinin analizin doğasıyla daha uyumlu olacağını göstermektedir. Bu nedenle, ortaokul yıllarından itibaren reel sayıların, denklemlerin, fonksiyonların ve problem durumlarının, niceliklerin değişimi odaklı olarak ele alınması, ilerleyen yıllarda analizin öğretimi için sağlam bir temelin oluşturulması açısından oldukça önemlidir. 2013 lise matematik öğretim programı incelendiğinde analiz öğretiminde bu yaklaşımın bazı işaretleri görülmektedir. Örneğin, öğretim programında 9. ve 10. sınıf düzeyindeki kazanımların bazılarında ortalama değişim hesabına yer verildiği görülmüştür. Böylelikle, 12. sınıf düzeyinde türev kavramının ortalama değişimden anlık değişime geçiş yapılarak öğretilmesi için bir altyapı oluşturulmuştur. 12. sınıf öğretim programının analiz konularına yönelik kazanımları incelendiğinde gerek limit, türev ve integral alma işlemlerinde, gerekse sürekliliğin incelenmesinde tablo ve grafik kullanımının teşvik edildiği görülmüştür (MEB, 2013). Öğretim programında tablo kullanımına işaret edilmesi, reel sayılardaki değişimlerin nümerik değerler yardımıyla; grafik kullanımına işaret edilmesi ise bu değişimlerin fonksiyon grafiği üzerinden incelenmesinin öngörüldüğünü göstermektedir. Ayrıca, öğretim programında öğrencilerden limiti türevi anlamada bir araç olarak kullanma davranışı göstermelerinin beklendiği ifade edilmiştir. Bu ifade, limite değişimin incelenmesinde bir araç olarak yer verilmesinin amaçlandığını göstermektedir. Bununla birlikte, limit ve süreklilik konularına ilişkin kazanımlar değerlendirildiğinde, bu kavramların reel sayılardaki değişimin incelenmesinde birer araç olarak nasıl kullanılabileceğine odaklanılması yerine, limit alma işlemlerinin nasıl yapılacağı ve bir fonksiyonun sürekliliğinin nasıl incelenebileceği üzerinde yoğunlaşıldığı görülmüştür. Bu durumda, analiz öğretiminin reel sayılardaki değişim üzerine inşa edildiğini söylemek mümkün değildir. Değişimin incelenmesinde hayati bir öneme sahip olan reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerine 12. sınıf matematik öğretim programında yer verilmemiş olması bunun bir başka önemli göstergesidir.

2018-2019 eğitim öğretim yılından itibaren uygulanmaya başlanan matematik öğretim programında, türev ve integral alma kurallarının sınırlandırıldığı ve buna karşılık fonksiyonlardaki değişimlerin incelenmesine olanak sağlayan analiz problemlerine ağırlık verildiği görülmektedir. Bu durum, yenilenen öğretim programında, analiz konularının öğretimi için analizin doğası ile daha uyumlu bir yaklaşımın benimsendiğine işaret etmektedir. Buna karşılık, 2013 öğretim programında da olduğu gibi, reel sayılardaki ve fonksiyonlardaki değişimin incelenmesinde büyük bir öneme sahip olan tamlık ve diferansiyel gibi kavramların yenilenen öğretim programında da yer almadığı dikkat çekmektedir (MEB, 2018). Bu durum, 2013 öğretim programında karşılaşılması muhtemel olan bazı ekolojik sorunlar ile yenilenen öğretim programında da karşılaşılabileceğini göstermektedir.

Limit konusunun öğretimine yönelik yapılan çalışmalar, bu kavramın ne olduğu ve fonksiyonlardaki değişimlerin incelenmesinde limit kavramının nasıl işe koşulduğu yönünde bir yaklaşım benimsenmesi yerine, limit alma işlemlerinin nasıl yapılacağına yoğunlaşılması sonucunda öğrenme eksikleri ve kavram yanılgılarının ortaya çıktığını göstermektedir (Williams, 1991; Brown, 2004; Özmantar ve Yeşildere, 2013). Brown (2004) bu durumun öğrencilerde, limit alma konusuna yönelik işlemsel becerilerin gelişmiş olmasına bağlı olarak, limiti anladıkları inancına sahip olmalarına neden olduğunu, buna karşılık öğrencilerin limit kavramının ne olduğu ve limit alma işlemlerine ne amaçla başvurulduğuna yönelik gerekli bilgiye sahip olmadıklarını belirtmiştir. Yapılan çalışmalar, limit değerine asla ulaşılamayacağı algısı ve bir noktadaki limitin fonksiyonun bu noktadaki görüntüsünden ibaret olduğu yanılgısının ortaya çıkmasında limit alma becerisinin temel alındığı bir öğretim yaklaşımının etkili olduğunu göstermiştir (Williams, 1991; Özmantar ve Yeşildere, 2013). Bingölbali (2013) analizin fizik, kimya, biyoloji ve mühendislikte değişim ile ilgili olguları incelemedeki önemine dikkat çekerek ülkemizde gerek lise, gerekse üniversite seviyesindeki ders kitaplarında türevin değişim kavramı temel alınmadan öğretilmesinin türev kavramının özünden kopuk bir öğretim yaklaşımının ortaya konulmasına neden olduğunu belirtmiştir. Bu durum, tez çalışmasından elde edilen sonuçlara paralel bir şekilde, analiz öğretiminde reel sayılar ve fonksiyonlardaki değişim üzerinde yoğunlaşıldığı ve değişimlerin hesaplanmasında limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarının birer araç olarak işe koşulduğu bir yaklaşımın tercih edilmesinin uygun olacağını göstermektedir.

Analiz global sitinde reel sayılardaki değişimlerin incelenmesi amacıyla kullanılabilen teknikler; cebirsel teknik, analitik teknik, sentetik teknik, nümerik teknik ve $\varepsilon-\delta$ tekniği olarak belirlenmiştir. Bu tekniklerin kullanımına bağlı olarak devreye giren ekolojik ilişkiler nümerik, cebir ve geometri olmak üzere 3 farklı alan arasındaki ekolojik ilişkilerin etkileşiminin gösterilmesi açısından oldukça önemlidir. Nümerik alan, analiz sitindeki sayısal değerlerin anlamının (çok küçük ve çok büyük sayılar ve bu sayılarla yapılan işlemler) açıklanmasında devreye girmektedir. Cebirsel alan bir yandan cebirsel işlemler, denklemler, fonksiyonlar, fonksiyon-denklem ilişkisi, fonksiyonlar üzerinde yapılan işlemlerde devreye girerken; diğer yandan limit, türev ve integral hesaplamalarının teknikleri boyutunda devreye girmektedir. Geometrik alan ise hem fonksiyon grafiği boyutunda analitik geometri olarak, hem de integral analizin bazı tekniklerinde (Riemann toplamı yardımıyla alan hesabında olduğu gibi) Öklid geometrisi olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bağlamda değerlendirildiğinde analiz global siti hem analizin zenginliğini ortaya koymakta, hem de analiz öğretiminin bu üç alan arasındaki ilişkilerin yapılandırılmasını gerektiren ne denli güç bir süreç olduğunu göstermektedir. Ayrıca, nümerik, cebirsel ve geometrik alanlardaki etkileşim, bu alanlar üzerindeki ekolojik ilişkilerin önceki sınıf düzeylerinden itibaren birbirleri ile ilişkilendirilerek yapılandırılması gerektiğini de göstermektedir.

Bergthold (1999) tez çalışmasında fonksiyonlardaki değişimlerin fonksiyon grafikleri ve nümerik değer tablolarından yararlanılarak farklı yollarla birlikte incelenmesinin limit kavramının anlamlandırılmasında büyük bir öneme sahip olduğunu belirtmiştir. Bergthold (1999)'un elde etmiş olduğu bu sonuç; nümerik, cebir ve geometri arasında etkileşim sağlanarak zengin ekolojik ilişkilerden yararlanılmasının limit kavramının öğretimi için faydalı olacağını göstermektedir. Porzio (1994) tez çalışmasında analiz öğretiminde farklı temsil biçimlerine bir arada yer verilmesinin analiz kavramlarının daha geniş bir bakış açısı kazandırılarak öğretilmesini destekleyeceğini ifade etmiştir. Çalışmada, analiz öğretiminde grafik, tablo ve matematiksel sembollerin bir arada kullanımının farklı temsiller arasında dönüşümler yapılmasına olanak sağlayarak kavramlar arasındaki ilişkilerin güçlendirilmesine olanak sağlayacağı belirtilmiştir. Bingölbali (2013) ise çoklu temsillerin kullanımına en çok ihtiyaç duyulan ve aynı zamanda en müsait olan kavramlardan birinin türev kavramı olduğuna dikkat çekmiştir. Bingölbali bu çalışmasında türev kavramının; fonksiyon grafiğine çizilen teğet doğrusu yardımıyla geometrik bir yaklaşım kullanılarak, fonksiyondaki değişim oranının limitinin alınması ile cebirsel bir yaklaşım kullanılarak veya nümerik değer tabloları yardımıyla anlık değişim oranı ifade edilerek açıklanabileceği belirtmiştir. Bingölbali (2013), öğrencilerin türevin çoklu gösterimleri arasındaki bağlantı ve ilişkileri kurmada yaşadıkları güçlüklere işaret ederek, çoklu temsil kullanımının türev kavramının açıklanmasında avantajlar sağlamasının yanı sıra dezavantajları da beraberinde getirdiğini ifade etmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, tez çalışmasından elde edilen sonuçlara paralel bir şekilde, analiz çalışma alanının nümerik, cebir ve geometri alanları ile etkileşim sağlayan zengin ekolojik ilişkiler barındırdığını, buna karşılık bu alanlar arasında etkileşim kurmanın ne denli güç bir süreç olduğunu göstermektedir.

Öğretim programı incelendiğinde, öğrencilerde matematiksel iletişim ve ilişkilendirme becerilerinin geliştirilmesine öğretim programının temel amaçları arasında yer verildiği görülmüştür. Analiz global sitinde yer alan tekniklerin kullanımına bağlı olarak devreye giren ekolojik ilişkiler değerlendirildiğinde; tanımsızlık, belirsizlik, sonsuzluk, asimptot, komşuluk, kiriş, teğet, eğim, diferansiyel, alan ve hacim nesnelerinin öğrencilerin analiz konularına yönelik matematiksel iletişim ve ilişkilendirme becerilerinin geliştirmelerinde kritik bir öneme sahip olduğu görülmüş ve bu nesnelere kritik nesneler adı verilmiştir. Bu nesnelerin ekolojik ilişkileri, analiz konularının ne derece zengin bir kavram ilişkisi üzerine inşa edilmesi gerektiğini göstermiştir. Analiz global siti ile öğretim programında yer alan kazanım ve açıklamalar karşılaştırıldığında kritik nesnelerden tanımsızlık, belirsizlik ve diferansiyele yer verilmediği görülmüştür. nesneleridir. Analiz global siti böylelikle analiz çalışma alanının nesnelerinin ve bu nesneler arasındaki ekolojik ilişkilerin bir bütün olarak değerlendirilmesine olanak sağlamıştır. Bu bağlamda analiz global sitinin analizin amacı, araçları ve kavramları hakkında bütüncül bir bakış açısı sunan etkin bir araç olduğu sonucuna varılmştır.

6.1.2. Lokal sitlerle ilgili sonuçlar ve tartışma

Bu bölümde limit, süreklilik ve türev konularına yönelik lokal sitlerdeki ekolojik ilişkiler temel alınarak öğretim programı ve ders kitaplarında belirlenen ekolojik sorunlar tartışılmıştır

6.1.2.1. *Limit ve süreklilik konuları kapsamında lokal sitlerle ilgili sonuçlar ve tartışma*

Limit alma işlemlerinin yapılmasına ve sürekliliğin incelenmesine yönelik görev tiplerinin lokal sitlerinde bağımsız değişkenin bir reel sayıya yaklaştırılması aşamasında reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerinin kilit bir rol üstlendiği görülmüştür. Lokal sitlere göre komşuluk nesnesinin yakınsaklık, aralık ve eşitsizlik nesneleri ile güçlü bir ekolojik bağ kurabilmesi için reel sayıların sıralama ve tamlık nesneleri ile ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulmaktadır. Buna göre, bir reel sayıya bu reel sayının komşuluğu olan aralıkta yaklaşılabilmesi için reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerine ihtiyaç duyulur. 12. sınıf matematik ders kitapları incelendiğinde limit konusuna, sayı doğrusu üzerinde bir reel sayının komşuluğundaki sayı değerleri yardımıyla yaklaşma kavramı açıklanarak giriş yapıldığı, yaklaşma kavramı açıklanmadan önce reel sayıların sıralama ve tamlık özelliğine değinilmediği, yaklaşma ve limit kavramının neden reel sayılar kümesi üzerinde incelendiği üzerine herhangi bir açıklamaya yer verilmediği görülmüştür. 12. sınıf öğretim programı incelendiğinde de ders kitaplarına benzer bir şekilde reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerine yer verilmediği ve bu özelliklerin limit alma işlemi için önemi üzerinde durulmadığı görülmüştür. Bu durumda, öğretim programında ve ders kitaplarında reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerine değinilmemesinin, komşuluk kavramının anlamlandırılması ve bu kavramın limit ve süreklilik ile ilişkilendirilmesinde ekolojik kopuklukların ortaya çıkmasına neden olabileceğini söylemek mümkündür.

Limit alma ve sürekliliğin incelenmesi görev tiplerine yönelik lokal sitler incelendiğinde, cebirsel tekniğin nümerik veya analitik teknik kullanılarak desteklenmesinin cebirsel tekniğin komşuluk nesnesi ile örtük ekolojik ilişkisinin pekiştirilmesi için gerekli olduğu görülmüştür. 12. sınıf matematik öğretim programı incelendiğinde, bu duruma paralel bir biçimde, limit ve süreklilik konularına yönelik kazanımların açıklamalarında nümerik ve analitik teknik kullanımının ön plana çıkarıldığı görülmüştür. Buna karşılık 12. sınıf matematik ders kitaplarında, öğretim programında öngörülenin aksine, limit ve süreklilik konularına ilişkin bazı görev tiplerinin bütün örneklerinde cebirsel tekniğe tek başına yer verildiği belirlenmiştir. Örneğin, AY 12. sınıf matematik ders kitabında *iç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tipine yönelik bütün örneklerin çözümlerinde cebirsel tekniğin tek başına kullanıldığı belirlenmiştir. Bu örneklerden bazılarında fonksiyonların kritik noktaları için sağdan ve soldan limit değerlerinin birbirine eşit olmadığı cebirsel teknik tek başına kullanılarak bulunmuş ve ortaya çıkan limitsizliğin bu noktalarda süreksizliğe neden olduğu belirtilmiştir. Örnek çözümlerinde nümerik tekniğe yer verilmemesi, limitsizliğin sürekliliğe olan etkisinin reel sayılardaki değişim temel alınarak incelenmesini engellemiştir. Analitik tekniğe yer verilmemesi ise limitsizliğin sürekliliğe olan etkisinin fonksiyondaki değişim temel alınarak geometrik nesnelerin ekolojik ilişkileri yardımıyla incelenmesini engellemiştir. Bu durumda, ders kitaplarındaki örneklerin çözümlerinde cebirsel tekniğe tek başına yer verilmesinin, komşuluk nesnesinin ekolojik ilişkilerinin örtük kalmasına bağlı olarak, limit ve süreklilik arasındaki ekolojik ilişkilerin değişim kavramı temel alınarak açıklanmasını engellediğini söylemek mümkündür.

Tanımsızlık ve belirsizlik durumlarında limit alma görev tipleri için oluşturulan lokal sitler incelendiğinde cebirsel ve nümerik tekniğin kullanımında limit alma işlemlerini tanımsızlık ve belirsizlik nesnelerinin ekolojik ilişkilerinin yönlendirdiği görülmüştür. Buna göre, $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ tanımsızlığının ortaya çıkması, limit alma işlemi yapılırken tanımsızlığın olduğu noktaya sağdan ve soldan nümerik değerler ile yaklaşma işlemi yapılmasına neden olmuştur. Belirsizlik durumlarında limit alma işlemlerinin yapılabilmesi için çarpanlara ayırma, paranteze alma, sadeleştirme yapma gibi cebirsel işlemler yapılarak belirsizliğin kaldırılmasına ihtiyaç duyulmuştur. Tanımsızlık ve belirsizlik nesnelerinin limit alma işlemlerinde üstlenmiş oldukları kritik ekolojik görevler dikkate alınarak limit alma işlemlerine geçilmeden önce tanımsızlık ve belirsizliğin nasıl ortaya çıktığı açıklanmıştır. Buna karşılık, 12. sınıf öğretim programı ve matematik ders kitapları incelendiğinde, tanımsızlık ve belirsizlik kavramları açıklanmadan tanımsızlık ve belirsizliğinin olduğu durumlarda limit alma işlemlerine geçildiği görülmüştür. Ders kitaplarında tanımsızlık kavramının açıklanmamış olması, tanımsızlık veya belirsizliğin olduğu noktalarda limit alma işlemleri yapılırken uygulanan cebirsel işlemlerin gerekçelerinin açıklanmasında ekolojik boşlukların oluşmasına neden olmaktadır. Başka bir ifadeyle, ders kitaplarında tanımsızlık ve belirsizlik kavramları açıklanmadan bu kavramların ekolojik ilişkilerinden yararlanılmasının, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının devreye girdiği görev tiplerinin teknolojilerinin açıklanmasında ekolojik boşlukların ortaya çıkmasına neden olabileceğini söylemek mümkündür.

Limit konusunun öğretimine yönelik yapılan çalışmalar sonucunda, tanımsızlık ve belirsizlik içeren limit durumlarında öğrencilerin; tanımsızlık ve belirsizliğin ne ifade ettiği, belirsizliğin kaldırılması için yapılan cebirsel işlemlerin gerekçelerinin neler olduğu, tanımsızlık halinde fonksiyonun nasıl hareket ettiği, tanımsızlık ve belirsizliğin ne anlama geldiği, tanımsızlık ve belirsizliğin arasındaki farkların neler olduğuna yönelik öğrenme güçlükleri çektikleri belirlenmiştir (Bergthold, 1999; Akbuluk ve Işık, 2005; Jordaan, 2005; Özmantar ve Yeşildere, 2013). Bu sonuçlar, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının açıklanmasının tanımsızlık veya belirsizliğin olduğu durumlarda limit alma görev tiplerinin teknolojilerinin gerçekleştirilmesinde ne denli kritik bir öneme sahip olduğunu göstermekte ve tez çalışmada elde edilen sonuçlar ile örtüşmektedir.

$\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ tanımsızlığının ve ∞ / ∞ belirsizliğinin olduğu durumlarda limit alma görev tipleri için oluşturulan lokal sitlerde analitik tekniğin kullanımına bağlı olarak asimptot nesnesine ihtiyaç duyulmuştur. 12. sınıf öğretim programı incelendiğinde ise asimptot kavramına türev konusunun son kazanımında, türev bilgisi yardımıyla fonksiyon grafiklerinin çizilmesi amacıyla yer verildiği görülmüştür. Ders kitapları incelendiğinde de öğretim programına paralel bir şekilde asimptot kavramına sadece türev konusunda yer verildiği görülmüştür. $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ tanımsızlığının ve ∞ / ∞ belirsizliğinin olduğu durumlarda limit alma görev tipleri için oluşturulan lokal sitlerde asimptot nesnesinin, komşuluğun ekolojik ilişkilerinin de devreye girmesi ile birlikte, sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık nesnelerinin fonksiyon grafiği üzerinde somut bir biçimde incelenmesine olanak sağladığı görülmüştür. Bu durum, matematiksel kavramların ekolojik görevlerini tam olarak yerine getirebilmelerinde öğretim programı ve ders kitaplarında bulundukları yerlerin de önemli olduğunu göstermektedir.

12. sınıf matematik ders kitapları incelendiğinde limit ve süreklilik konularına yönelik bazı görev tiplerine yer verilmemesine bağlı olarak türev konusuna yönelik bazı görev tiplerinde ekolojik boşlukların ortaya çıktığı görülmüştür. Örneğin, BY 12. sınıf matematik ders kitabının süreklilik konusunda *uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tipine yer verilmediği görülmüştür. Bu ekolojik boşluk, analiz global sitinin süreklilik ve türev temel araçları arasındaki ekolojik ilişkilerine yansıyarak *bir fonksiyonun türevlenebilirliğini inceleme* görev tipinin gerçekleştirilmesinde ekolojik boşluğun oluşmasına neden olmuştur. Buna göre, $[a, b]$ aralığında tanımlı olan bir f fonksiyonunun türevlenebilir olması için uç noktalarında sırasıyla sağdan ve soldan sürekli olması gerekmektedir. Ders kitabında *uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tipine yer verilmemesine bağlı olarak f fonksiyonun uç noktalarındaki türevlenebilirliği açıklanırken süreklilik ile türev kavramları arasında ekolojik bağ kurulamamıştır. Bu durum, öğretim programında yer alacak kazanımlar veya ders kitaplarında yer alacak görev tipleri belirlenirken, ilerleyen konulara ilişkin kazanım ve görev tiplerinin göz önünde tutulmasının ekolojik bütünlüğün sağlanması açısından önemli olduğu göstermektedir.

6.1.2.2. *Türev konusu kapsamında lokal sitlerle ilgili sonuçlar ve tartışma*

Çalışmada *bir hareketlinin anlık hızını bulma* görev tipi için oluşturulan lokal sitteki ekolojik ilişkiler değerlendirildiğinde, nümerik teknik ve cebirsel tekniğin kullanımında kritik nesnelerden komşuluk ve diferansiyel nesnelerinin ekolojik ilişkilerinin ön plana çıktığı belirlenmiştir. Analitik tekniğin kullanımında ise bu nesnelerin yanı sıra kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin ekolojik ilişkileri de devreye girmiştir. Üç teknik karşılaştırıldığında, analitik tekniğin geometrik nesnelerin de devreye girmesi ile birlikte, daha zengin ekolojik ilişkilerin ortaya çıkmasına olanak sağladığını söylemek mümkündür. 12. sınıf matematik ders kitapları incelendiğinde ise BY matematik ders kitabında ortalama hızların nümerik teknik tek başına kullanılarak bulunduğu, buna karşılık AY matematik ders kitabında nümerik tekniğin analitik teknik ile bir arada kullanıldığı görülmüştür. Analitik tekniğin kullanımında kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin ekolojik ilişkileri fonksiyon grafiği üzerinde somut bir yaklaşım ile ortalama hızdan anlık hıza geçiş yapılmasına olanak sağlamaktadır. Bu durumda, türev kavramına kiriş, teğet ve eğim nesneleri yardımıyla sezgisel bir yaklaşım ile giriş yapılabilmesi için AY 12. sınıf matematik ders kitabında olduğu gibi cebirsel ve nümerik tekniğin analitik teknik kullanılarak desteklenmesi büyük önem taşımaktadır.

Çalışmada türev konusuna yönelik görev tiplerinin lokal sitleri değerlendirildiğinde, diferansiyel nesnesine kritik ekolojik görevler düştüğü görülmüştür. Cebirsel ve nümerik tekniğin kullanımında diferansiyel nesnesinin oran nesnesi ile ekolojik ilişkisi ön plana çıkmıştır. Böylelikle türev kavramının bir fonksiyonun değişkenlerindeki değişim oranından hareketle açıklanmasına olanak sağlanmıştır. Analitik tekniğin kullanımında ise diferansiyel nesnesinin doğru nesnesi ile ekolojik ilişkisi ön plana çıkmıştır. Buna göre, kiriş doğruları ve teğet doğrusu yardımıyla, bir fonksiyonun değişkenlerindeki değişimin fonksiyon grafiği üzerinde incelenmesine olanak sağlanmıştır. 12. sınıf öğretim programının türev ve integral konularına ilişkin kazanımlarında diferansiyel kavramına ihtiyaç duyulduğu halde, bu kavramın ne olduğu, türev ve integral hesabı için ne ifade ettiğinin açıklanmasına yönelik bir yönergeye rastlanmamıştır. 12. sınıf matematik ders kitapları incelendiğinde ise türev ve integral notasyonlarında, zincir kuralının ifade edilmesinde, değişken değiştirme ve kısmi integrasyon yöntemleri ile integral hesabı yapılmasında diferansiyel kavramına ihtiyaç duyulduğu halde bu kavram ile ilgili herhangi bir açıklamaya yer verilmediği görülmüştür. Diferansiyel kavramına integral hesabında da ihtiyaç duyuluyor olması, türev kavramı ile integral kavramı arasında ekolojik bağ kurulmasında diferansiyel nesnesinin ekolojik ilişkilerine ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, öğretim programı ve ders kitaplarında diferansiyel nesnesine yer verilmemiş olmasının gerek türev kavramının açıklanmasında, gerekse türev ile integral konuları arasında iletişim kurulmasında ekolojik boşlukların ortaya çıkmasına neden olduğu görülmektedir.

Akkoç ve Kurt (2013) integral öğretimine yönelik bir çalışmada, türev ve integral kavramlarının anlaşılmasında büyük bir öneme sahip olan $\frac{dy}{dx}$ notasyonuna ilişkin yanılgılar yaşandığına dikkat çekmişlerdir. Bu çalışmada öğrencilerin; $\frac{dy}{dx}$ notasyonun anlamını bilmemelerine bağlı olarak $\frac{dy}{dx}$ ifadesini bir kesir gibi düşünerek sadeleştirme yaptıkları, türev almada kullanılan $\frac{dy}{dx}$ notasyonundaki dx ile integral kavramı için kullanılan $\int f(x)dx$ notasyonundaki dx arasında ilişki kuramadıkları belirtilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, tez çalışmasında elde edilen sonuçlara paralel bir biçimde, öğretim programında ve ders kitaplarında diferansiyel kavramına yer verilmemesinin türev kavramının açıklanmasında ve türev ile integral konuları arasında iletişim kurulmasında ekolojik boşlukların ortaya çıkmasına neden olabileceğini göstermektedir.

Türev konusuna yönelik görev tiplerinin lokal sitleri incelendiğinde, komşuluk nesnesinin; aralık/eşitsizlik, yakınsaklık ve reel sayı nesneleri ile ekolojik ilişkilerinin önemli bir yer tuttuğu görülmüştür. Buna göre, bir fonksiyonun tanımlı olduğu bir noktadaki türevi incelenirken, fonksiyonun türevin hesaplanacağı noktanın içinde yer aldığı en az bir aralıkta tanımlı olması gerektiği belirtilmiştir. Sonrasında, türevin alındığı noktanın komşuluğu olarak belirlenen aralıkta bu noktaya giderek yaklaşılmasına bağlı olarak ortalama değişimden anlık değişime geçiş yapılmış ve böylece türev değeri olan reel sayı belirlenmiştir. Limit, süreklilik ve türev konularına yönelik görev tiplerinin lokal sitleri incelendiğinde, komşuluk nesnesinin kritik ekolojik görevler üstlendiği görülmüştür. Bu durum, komşuluk nesnesine limit, süreklilik ve türev temel araçları arasında ekolojik bağ kurulmasında kritik ekolojik görevler düştüğünü göstermektedir. Buna karşılık 12. sınıf ders kitapları incelendiğinde komşuluk kavramı ile türev kavramı arasında yukarıda açıklanan bir şekilde ilişkilendirmeye yer verilmediği görülmüştür. Ortaya çıkan bu ekolojik boşluğun, komşuluk nesnesinin limit, süreklilik ve türev temel araçları arasında bağ kurulmasına yönelik ekolojik görevlerini yerine getirmesine engel olacağını söylemek mümkündür.

Türev konusuna yönelik görev tiplerinin lokal sitleri incelendiğinde, analitik tekniğin kullanımında kiriş, teğet ve eğim nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerin türev kavramının açıklanmasında ve anlamlandırılmasında büyük bir önem taşıdığı görülmüştür. Buna göre kiriş doğruları, fonksiyonlardaki ortalama değişimin ifade edilmesinde ve ortalama değişimden anlık değişime nasıl geçildiğinin grafik üzerinde gösterilmesinde, teğet doğruları ise anlık değişimin grafik üzerinde ifade edilmesinde sezgisel bir yaklaşım sağlamıştır. Ders kitaplarında yer alan bazı örneklerin çözümlerinde kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılmadığı görülmüştür. Bu durum farklı görev tiplerine yönelik örneklerin çözümlerinde bazı ekolojik boşlukların ortaya çıkmasına neden olmuştur. Örneğin, AY 12. sınıf matematik ders kitabında yer alan bir örnekte, bir fonksiyonun grafiğinden yararlanılarak süreksiz olduğu bazı noktalarda türevli olup olmadığı incelenmiştir. Örneğin çözümünde analitik teknik kullanılıyor olmasına rağmen kiriş ve teğet doğrularından yararlanılmadan süreksizliğin türevsizliğe neden olduğu belirtilmiştir. Örneğin çözümünde kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin ekolojik ilişkilerine yer verilmemesi, bir noktadaki limitsizliğin veya süreksizliğin bu noktadaki türevi nasıl etkilediğinin fonksiyon grafiği üzerinde incelenmesini engellemiştir. Ortaya çıkan bu sonuç, farklı tekniklerin kullanımına bağlı olarak devreye giren kritik nesnelerin ekolojik ilişkilerinden yararlanılmasının, türev konusuna yönelik görev tiplerinin teknolojilerinin yerine getirilmesinde ne denli önemli olduğunu göstermiştir.

Orton (1983) öğrencilerin fonksiyonlardaki değişimleri anlamlandırma becerilerini araştırdığı bir çalışmasında, analitik düzlemde fonksiyon grafiğine çizilebilecek kiriş ve teğet doğrularının eğim değerleri yardımıyla ortalama değişimden anlık değişime geçiş yapılmasının, türev ile değişim kavramları arasında sezgisel bir yaklaşım kullanılarak ilişkilendirme yapılmasına olanak sağlayacağını ifade etmiştir. Çalışmada elde edilen sonuç, Orton (1983)'un elde ettiği bu sonuca paralel bir şekilde, kiriş, teğet ve eğim nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerin türev kavramının öğretiminde ne denli kritik bir rol oynadığını göstermektedir.

Türev temel aracı ile ilgili bazı görev tipleri için ders kitaplarında yer alan bazı örneklerin çözümlerinde hatalar tespit edilmiştir. Bu görev tipleri için oluşturulan lokal sitler değerlendirildiğinde, bu hataların siti oluşturan bazı nesneler arasındaki ekolojik ilişkilerin yanlış yorumlanmasından kaynaklandığı görülmüştür. Örneğin, BY 12. sınıf matematik ders kitabında yer alan bir örneğin çözümünde, grafiği verilen bir fonksiyona tanımsız olduğu noktadan geçecek şekilde teğet doğruları çizilerek süreksizliğin bu noktada türevsizliğe neden olduğu gösterilmiştir. Bu görev tipi için hazırlanan lokal sit incelendiğinde; örneğin çözümünde nokta, teğet, doğru nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerin yanlış yorumlanmasına bağlı olarak hata yapıldığı belirlenmiştir. Buna göre, nokta, teğet, doğru nesneleri arasındaki ekolojik ilişkiler gereği, bir fonksiyona çizilebilecek teğet doğrusu fonksiyonun tanımlı olduğu tek bir noktadan geçmelidir. Bu ekolojik ilişkilere göre bir fonksiyona tanımsız olduğu noktadan geçecek şekilde teğet çizilebilmesi mümkün değildir. Bu hata, bir fonksiyonun tanımsız olduğu bir noktada türevinin olabileceği şeklinde yorumlanabilecek başka bir hatanın ortaya çıkmasına neden olmuştur. BY 12. sınıf matematik ders kitabında yer alan bir başka örneğin çözümünde teğet, eğim, oran ve reel sayı nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilerin dikkate alınmamasından kaynaklanan hatalı bir genelleme yapıldığı belirlenmiştir. Bu örnekte, analitik düzlemde grafiği verilen bir fonksiyonunun kritik noktalarında türevli olup olmadığı incelenmişir. Örneğin çözümünde fonksiyon grafiğine teğetler çizilerek kritik noktalarda fonksiyonun türevsiz olduğuna karar verilmiştir. Yapılan açıklamada, grafik üzerinde tek teğetin çizilebildiği noktalarda fonksiyonun türevli, birden fazla teğetin çizilebildiği noktalarda ise türevsiz olacağı sonucuna varılan hatalı bir genelleme yapıldığı tespit edilmiştir. Oysa ki, teğet, eğim, oran ve reel sayı nesneleri arasındaki ekolojik ilişkilere göre eğim değerinin bir reel sayı olmadığı durumlarda, grafik üzerinde tek teğetin çizilebildiği noktalar için de fonksiyon türevsiz olabilmektedir. Bu durum, lokal sitlerde yer alan nesneler arasındaki ekolojik ilişkilerin eksik veya yanlış yorumlanmasının, örneklerin çözümlerinde karşılaşılan hatalara kaynak oluşturduğunu göstermektedir.

6.2. Öneriler

Çalışmadan elde edilen sonuçlar ışığında öğretim programlarında ve ders kitaplarında aşağıda ifade edilen önerilerin dikkate alınmasının, analiz konularının öğrenimi ve öğretiminde karşılaşılabilen ekolojik sorunların azaltılmasında etkili olacağı düşünülmektedir.

- Öğretim programında reel sayıların sıralama ve tamlık özelliklerine yer verilmesi ve ders kitaplarında komşuluk nesnesi ile reel sayıların sıralama ve tamlık özellikleri arasında ekolojik ilişki kurulması, komşuluk nesnesinin analiz çalışma alanı içindeki ekolojik görevlerini daha etkili bir biçimde yerine getirmesine katkı sağlayacaktır.
- Öğretim programında ve ders kitaplarında türev konusu içerisinde komşuluk nesnesinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılması, limit, süreklilik ve türev konuları arasında iletişim kurulmasına katkı sağlayacaktır.
- Lokal sitlerden elde edilen sonuçlar, ders kitaplarında tanımsızlık ve belirsizliğin olduğu durumlarda limit alma işlemleri yapılmadan önce bu kavramların açıklanmasının limit alma işlemleri gerçekleştirilirken atılan adımların gerekçelerinin açıklanmasına ekolojik katkı sağlayacağını göstermiştir.
- Asimptot kavramının tanımsızlık ve belirsizliğin olduğu durumlarda limit alma görev tiplerine ekolojik katkı sağlayabilmesi için bu kavrama türev konusu

yerine limit konusu içerisinde yer verilmesinin daha uygun olacağı görülmüştür.

- Öğretim programında yer alacak kazanımlar ve ders kitaplarında yer alacak görev tiplerinin, ilerleyen konularda ihtiyaç duyulabilecek ekolojik ilişkiler dikkate alınarak, ekolojik kopukluk oluşmasına imkan vermeyecek şekilde belirlenmesi büyük önem taşımaktadır. Örneğin, türev konusunda *fonksiyonun uç noktasında türev alma* görev tipi gerçekleştirilmeden önce süreklilik konusunda *uç noktadaki sürekliliğin incelenmesi* görev tipine yer verilmesi, türev ile süreklilik konuları arasındaki ekolojik bağın güçlendirilmesine olanak sağlayacaktır.
- Çalışmada oluşturulan lokal sitlerde cebirsel tekniğin komşuluk nesnesi ile örtük ekolojik ilişki kurabildiği görülmüştür. Bu durumun neden olduğu ekolojik boşluğun giderilebilmesi için cebirsel tekniğin komşuluk nesnesi ile güçlü ekolojik bağ kurabilen analitik teknik veya nümerik teknik ile desteklenmesi büyük önem taşımaktadır. Buna göre, örneklerin çözümlerinde öncelikle analitik veya nümerik tekniğin kullanımına yer verilmesi ardından cebirsel tekniğin kullanılması uygun görülmektedir. Böylelikle, fonksiyon grafikleri veya nümerik değerler yardımıyla komşuluk nesnesinin ekolojik ilişkilerinin güçlendirilmesi sağlanarak, cebirsel tekniğin tek başına kullanımına bağlı olarak ortaya çıkabilecek ekolojik boşluk engellenmiş olacaktır.
- Öğretim programında diferansiyel kavramına yer verilmesi, ders kitaplarında bu kavramın açıklanması ve diferansiyel kavramının ekolojik ilişkilerinden yararlanılması, türev kavramının açıklanmasına ve türev ile integral kavramları arasındaki iletişim ve ilişkilendirme becerilerinin geliştirilmesine katkı sağlayacaktır.
- Türev konusuna yönelik görev tiplerinin, analitik teknik kullanılarak yapılan çözümlerinde kiriş, teğet ve eğim nesnelerinin ekolojik ilişkilerinden yararlanılması, fonksiyonlarda ortalama değişimden anlık değişime nasıl geçildiğinin fonksiyon grafiği üzerinde incelenmesine olanak sağlamaktadır. Böylelikle, türev konusuna yönelik görev tiplerinde cebirsel veya nümerik teknik kullanılarak yapılan türev alma işlemlerinin sezgisel bir yaklaşım ile pekiştirilmesine olanak sağlanacaktır.
- Limit, süreklilik ve türev temel araçlarına yönelik ders kitaplarında yer alacak örnek çözümlerinin çalışma boyunca oluşturulan lokal sitlerdeki ekolojik

ilişkilerden yararlanılarak yapılandırılması, bu çözümlerde oluşabilecek ekolojik boşlukların ve kavramsal hataların azaltılmasına olanak sağlayacaktır.

- Öğretim programında analiz konularına *Türev* ve *İntegral* olmak üzere iki ana başlık altında yer verildiği görülmüştür. Türev başlığı altında *Limit ve Süreklilik, Türev* ve *Türevin Uygulamaları*; integral başlığı altında *Belirli ve Belirsiz İntegral* ve *Belirli İntegralin Uygulamaları* konuları yer almaktadır. Çalışmada *Türev* ana başlığı altında yer alacak bütün görev tipleri için lokal sitlerin oluşturulması hedeflenmiştir. *Türevin Uygulamaları* alt başlığında yer alan görev tipleri için lokal sitler oluşturulmak istenildiğinde, analiz global sitinde belirlenen ekolojik ilişkilerin tek başına yeterli olmayacağı, cebirsel ve fonksiyonel sitin yanı sıra analitik geometri çalışma alanı için oluşturulabilecek global site de ihtiyaç duyulacağı görülmüştür. Bu nedenle, çalışmada lokal sitleri oluşturulan görev tipleri *Limit ve Süreklilik* ve *Türev* konuları ile sınırlı tutulmuştur. Ders kitaplarında *Türevin Uygulamaları* alt başlığında yer alan görev tiplerine yönelik örneklerin ekolojik analizlerinin yapılabilmesi için analitik geometri çalışma alanına yönelik global sit inşa edilmesi önerilmektedir. Böylelikle, analiz global siti, cebirsel ve fonksiyonel sit ve analitik geometri global siti bir arada kullanılarak türev uygulamaları konusuna yönelik görev tipleri için lokal sitlerinin oluşturulması ve bu sitler yardımıyla ders kitaplarının değerlendirilmesine olanak sağlanacaktır. Analitik geometri çalışma alanı için oluşturulabilecek global sit ayrıca, lise öğretim programında yer alan analitik geometri (noktanın, doğrunun, çemberin analitiği) konularının ekolojik yapılandırılması amacıyla da kullanılabilecektir.
- Öğretim programının *İntegral* ana başlığı altında yer alan *Belirli ve Belirsiz İntegral* ve *Belirli İntegralin Uygulamaları* konularına ilişkin görev tiplerinin belirlenmesi, prakseolojik analizler yapılarak her bir görev tipi için devreye giren ekolojik ilişkilerin değerlendirilmesi ve her bir görev tipinin lokal siti yardımıyla ders kitaplarında yer alan örneklerin analiz edilmesi önerilmektedir. Böylelikle, bu çalışmada ders kitaplarının incelenmesi sonucunda belirlenen limit, süreklilik ve türev konularına yönelik ekolojik sorunların integral konusunun öğretimine olan etkisinin değerlendirilmesine olanak sağlanacaktır.
- Bu çalışmada MS, analiz çalışma alanı için ekolojik ilişkilerin incelenmesine olanak sağlayan bir model geliştirilmesi ve ders kitaplarının türev konusu

kapsamında ekolojik açıdan değerlendirilmesi amacıyla kullanılmıştır. MS bu amaçların yanı sıra öğretim programlarının yapılandırılması, öğretim faaliyetlerinin planlanması veya öğrenci davranışlarının ekolojik açıdan değerlendirilmesi gibi farklı amaçlar için de kullanılabilecek etkili bir modeldir. Örneğin, Erdoğan (2006) cebir ve fonksiyonlar öğrenme alanına ilişkin öğretmen ve öğrenci davranışlarının değerlendirilmesi amacıyla MS modelini kullanmış, öğrencilerde görülen öğrenme eksikliklerinin altında yatan ekolojik nedenleri oluşturduğu global sit ve lokal sitlerden yararlanarak ortaya koymuştur. Buna göre, analiz konularının öğrenimi ve öğretimine yönelik yapılabilecek farklı çalışmalarda, bu çalışmada oluşturulan MS’lerden yararlanılabilir.

KAYNAKÇA

Akar, G. K. (2013). Oran orantı kavram tanımları, rasyonel sayılar içerisindeki yeri ve doğrusallık kavramı ile ilişkisi. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A.Delice (Editörler), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s.111-126). Ankara: Pegem Akademi.

Akbulut, K. ve Işık, A. (2005). Limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkinliğinin incelenmesi ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 13(2), 497-512.

Akkoç, H. ve Kurt, S. (2013). İntegral kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve integral öğretimi. M.F. Özmantar, E.Bingölbali ve H.Akkoç (Editörler), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri (3.Baskı)* içinde (s.257 – 290). Ankara: Pegem Akademi.

Aktaş, M. C. (2014). Nitel veri toplama araçları. M. Metin (Editör). *Kuramdan uygulamaya eğitimde bilimselaraştırma yöntemleri* içinde (s.337-372). Ankara: Pegem Akademi.

Altun, M. (2010). *Matematik Öğretimi* (7. Baskı). Bursa: Alfa Aktüel Yayıncılık.

Arslan S. A. (2016). Didaktiğin antropolojik teorisi. E. Bingölbali, S.Arslan, İ.Ö.Zembat (Editörler) *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s.377-392). Ankara: Pegem Akademi.

Arslan, S. ve Çelik, D. (2013). Zor sanılan iki kavram: Limit ve süreklilik. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A.Delice (Editörler), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s.463-488). Ankara: Pegem Akademi.

Aztekin, S. (2013). Matematiksel bir kavram olarak sonsuzluk ve ötesi. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A.Delice (Editörler), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s.501-516). Ankara: Pegem Akademi.

Balcı, M. (2003). *Genel matematik* (2. baskı). Ankara: Balcı Yayınları.

Baştürk, S. ve Dönmez, G. (2011). Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 5(1), 225-249.

Bergthold, T. A. (1999). *Patterns of analytical thinking and knowledge use in students' early understanding of the limit concept.* Yayımlanmamış DoktoraTezi. University of Oklahoma.

Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Technology*, 29, 389-399.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Education, Science, and Technology*, 32(4), 487 – 500.

Bingölbali, E. (2013). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M.F. Özmantar, E.Bingölbali ve H.Akkoç (Editörler), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri (3.Baskı)* içinde (s.223 – 256). Ankara: Pegem Akademi.

Bozhüyük, M.E. (1984). *Genel topolojiye giriş (Uzaylar bilimi)*, Erzurum: Atatürk Üniversitesi Basımevi.

Brown, A. (2004). *Learner conceptions of the limit concept.* Yayımlanmamış dokrora tezi. University of Calgary, Alberta.

Cajori, F. (2014). *Matematik tarihi* (2.Basım). (Çev:D. İlalan). Ankara: ODTÜ Yayınları.

Calvo, C. (1997). *Bases para una propuesta dida´ctica sobre integrales.* Tesis de Maestrı´a. Barcelona: Universitat Auto`noma de Barcelona.

Camacho, M., and Depool, R. (2003). Using derive to understand the concept of definite integral. *International Journal for Mathematics Taching and Learning*, 1-16.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse (Oeuvres II.3).* https://archive.org/details/coursdanalyse00humbuoft/page/n6 (Erişim tarihi 09.12/.2017)

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage, Grenoble (2ème édition augmentée: 1991).

Chevallard, Y. (1992). A theoretical approach to curricula. *Journal fuer Mathematik-didaktik*, 13(2-3), 215-230.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Écologie et régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (Eds.), *Actes de la 11eécole d'été de didactique des mathématiques (pp.41-56)*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education.Research in Mathematics Education (CERME 4). 21-30. Universitat Ramon Llull, Barcelone.

Chevallard, Y., Arsac, G., Martinand, J.L., and Tiberghien, A. (1994). *La transposition didactique a l'épreuve*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

Cornu, B. (1991). Limits. D. Tall (Eds.), in *Advanced mathematical thinking* (s.153-166). Dordrect, The Netherlands: Kluwer Academic.

Creswell, J.W. (2012). *Educational research: Planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research (Fourth Edition),* Pearson Education Inc., Boston, MA.

Çakar, Ö. (2007). *Fonksiyonel analize giriş – 1.* A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları.

Çakıroğlu, E. (2013). Matematiksel kavramların tanımlanması. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A.Delice (Editörler), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s.1-14). Ankara: Pegem Akademi.

Çetinkaya, B., Erbaş, A.K. ve Alacacı, C. (2013). Değişim oranı olarak türev ve tarihsel gelişimi. M.F. Özmantar, E.Bingölbali ve H.Akkoç (Editörler), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri (3.Baskı)* içinde (s.529 – 556). Ankara: Pegem Akademi.

Davis, R. B., and Vinner, S. (1986). The notion of limit; some seemingly an avoidable misconception stages. *J. Math. Behav., 5*, 281–303.

Delice, A. ve Sevimli, E. (2010). Öğretmen adaylarının çoklu temsil kullanma becerilerinin problem çözme başarıları yönüyle incelenmesi: Belirli integral örneği. *Kuramdan Uygulamaya Eğitim Bilimleri (KUYEB),* 10 (1), 111-149.

Doğan, M. (2013). Nokta, doğru, doğru parçası, ışın, düzlem ve uzay kavramları. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A.Delice (Editörler), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s.198-220). Ankara: Pegem Akademi.

Doğan, A ve Şimşek, D. (2015). İki katlı integral konusunda lisans öğrencilerinin yanılgıları, öğrenme güçlükleri ve çözüm önerileri. *Uluslararası Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2, 84-95.

Dönmez, A. (2002). *Dünya matematik tarihi ansiklopedisi "Matemetiğin öyküsü ve serüveni'' Matematik sözlüğü Cilt-1*. İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları.

Duchet P., and Erdogan A. (2005). Pupil's autonomous studying: From an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis. In *CERME 4: Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Eli, J. A. (2009). *An exploratory mixed methods study of prospective middle grades teachers' mathematical connections while completing investigative tasks in geometry*. Unpublished PhD Thesis. Lexington: University of Kentucky.

Erdoğan, A. (2006). *Le diagnostic de l'aide a l'etude, en mathématiques analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en seconde.* Thèse de doctorat. Université Paris 7. Paris : IREM Paris 7.

Erdoğan, A. (2014). Conditions épistémiques de l'étude autonome des élèves relativement à l'algèbre et aux fonctions, en classe de Seconde française. *Recherche en didactique des mathmématiques,* 34 (2/3), 201-238.

Erdoğan, A. (2016). Didaktik durumlar teorisi. E. Bingölbali, S.Arslan, İ.Ö.Zembat (Editörler) *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s.393-411). Pegem Akademi. Ankara.

Erdoğan, A., Eşmen, E. ve Fındık, S. (2015). Ortaokul matematik ders kitaplarında matematik tarihinin yeri: Ekolojik bir analiz. *Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi,* 42, 49 – 69.

Erdoğan, A., Tanışlı, D. ve Fındık, S. (2015). Ondalık gösterimler ve yüzde konularına ilişkin öğretmen bilgilerinin prakseolojik analizi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu–2*'nda sunulan bildiri. Adıyaman: Adıyaman Üniversitesi.

Farah, L. (2015). *Étude et mise _a l'_étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales: point devue des étudiants, point de vue des professeurs.* Thèse de doctorat. Paris: Universite Paris. Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cite.

Fraenkel, J. R., and Wallen, N. E. (2000). *How to design and evaluate research in education.* New York:McGraw-Hill.

Göker, L. (1997). *Matematik tarihi ve Türk islam matematikçilerinin yeri*. Ankara: MEB.

Hacısalihoğlu, H.H., Hacıyev, A., Sabuncuoğlu, A., Brown, L. M., İbikli, E. ve Brown, S. (2000). *Türk Dil Kurumu Matematik Terimleri Sözlüğü*. Ankara: Bizim Büro Basımevi Yayın Dağıtım.

Heid, K.M. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer asa tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 3-25.

Jaffar, S. M., and Dindyal, J. (2011). Language-related misconceptions in the study of limits. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia and the 23rd biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers*, Alice Springs, pp. 390-397. Adelaide, SA: Aamt & Merga.

Jordaan, T. (2005). *Misconceptions o the limit concept in mathematics course for engineering students.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. University of South Africa.

Karasar, N. (2007). *Bilimsel araştırma yöntemi*. Ankara: Nobel Yayınları.

Leung, L. (2015). Validity, reliability and generalizability in qualitative research. *Journal of Family Medicine and Primary Care*, 4(3), 324-327.

Mario, R. (2012). *Conversion et influence des assujettissements au milieu scolaire dans l'étude autonome des mathématiques: comment les trés bons éléves de lycée étudien les mathématiques apres la classe. Observation anthropologique et suivi biographique de quelques cas exemplaires.* These de doctorat. Disponible sur. http://www.theses.fr/2012AIXM3001 (Erişim tarihi: 22.12.2017)

Merriam, S. B. (2013). Nitel vaka çalışması (E. Karadağ, Trans.). In S. Turan (Ed.), *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber* (3 ed.). Ankara: Nobel.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi (9,10,11 ve 12 .sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9,10,11 ve 12 .sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Mumcu, H.Y. (2018). Matematiksel ilişkilendirme becerisinin kuramsal boyutta incelenmesi: Türev kavramı örneği. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (Erken Görünüm),* 1 – 38.

Narlı, S. (2013). Bağıntı kavramı ve bu kavrama temel teşkil eden kavramlar. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A.Delice (Editörler), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s.309-328). Ankara: Pegem Akademi.

Nasibov, F. H. (2006). Reel değişkenli fonksiyonlar teorisinin müfredatı ve bilimler arasındaki yeri hakkında. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(2), 557-570.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM Publications.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235 – 250.

Osman, J. (2017). *Dünyayı değiştiren 100 fikir (6.Baskı)* (Çev: O. Düz). İstanbul: Kolektif.

Ostebee, A., and Zorn, P. (1997). *Calculus from graphical, numerical and symbolic points of view*. Fort Worth, TX: Saunders College Publishing.

Öncü, H. (1994). *Eğitimde ölçme ve değerlendirme*. Ankara: Matser Basım.

Özmantar, M. F. (2013). Sonsuzluk kavramı: Tarihsel gelişimi, öğrenci zorlukları ve çözüm önerileri. M.F. Özmantar, E.Bingölbali ve H.Akkoç (Editörler), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri (3.Baskı)* içinde (s.151 – 180). Ankara: Pegem Akademi.

Özmantar, M. F. ve Bozkurt, A. (2013). Tanımsızlık ve belirsizlik: Kavramsal ve geometrik bir inceleme. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A.Delice (Editörler), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s.437-462). Ankara: Pegem Akademi.

Özmantar, M. F. ve Yeşildere, S. (2013). Limit ve süreklilik konularında kavram yanılgıları ve çözüm arayışları. M.F. Özmantar, E.Bingölbali ve H.Akkoç (Editörler), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri (3.Baskı)* içinde (s.181 – 222). Ankara: Pegem Akademi.

Porzio, D. T. (1994). *The effects of differing technological approaches to calculus on students' use and understanding of multiple representations when solving problems.* Yayınlanmamış doktora tezi. Ohio State University, USA.

Rajoson, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique: trois études de cas.* Universite d'Aix-Marseille II, Faculte des Sciences de Luminy.

Rasslan, S., and Tall, D.O. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. A.D. Cockburn and E.Nardi (Eds), *Proceeding of the 26th Conference of the International Group for theOsychology of Mathematics Education*,Norwich, UK, 4, 89-96.

Reys, R. E., and Grouws, D. A (1975). Division involving zero: Some revealing thoughts from interviewing children. *School Science and Mathematics*, 78, 593-605.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.

Silvy, C. (2010). *Etude à l'aide de la notion de ''site mathématique local d'une question'' des effets possibles d'une innovation : les restitutions organisées de connaissances dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat S*. Thèse de doctorat. Université de Provence - Aix Marseille I.

Silvy, C., and Delcroix, A. (2009). Site mathématique d'une roc : Une nouvelle façon d'interroger un exercice ? *Annales De Didactique Et De Sciences Cognitives*, 14, 103-122.

Silvy, C., and Delcroix, A. (2012). Un outil pour organiser l'analyse d'un sujet de mathematiques. *REPERES*, 87, 59-78.

Silvy, C., Delcroix, A., and Mercier, A. (2013). Enquête sur la notion de ''pedagogical content knowledge'', interrogée à partir du ''site local d'une question''. *Éducation and Didactique*. 7(1), 33 – 58.

Sirotic, N., and Zaskis, R. (2007). Irrational numbers on the number line- where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4), 477-488.

Stein, S. K., and Barcellos, A. (2007). *Calculus ve Analitik Geometri* (Çev: B. Kuryel ve F. Balkan). İstanbul: Babil Yayınları.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31(3), 258-276.

Tall, D., and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tatar, E., Okur, M. ve Tuna, A. (2008). Ortaöğretim matematiğinde öğrenme güçlüklerinin saptanmasına yönelik bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 16(2), 507-516.

Thomas, G. B., Weir, M. D. and Hass, J. R. (2015). *Thomas kalkülüs cilt 1* (12.Baskı). (Çev. Ed.: M. Bayram). İstanbul: Pearson.

Ubuz, B. (1999). Genel matematikte (Calculus) öğrenci hataları. *Matematik Dünyası*, 8, 9-11.

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 20 (1), 113-137.

White, P., and Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 79-95.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 219-236.

Vale, C., McAndrew, A., and Krishnan, S. (2011). Connecting with the horizon: Developing teachers' appreciation of mathematical structure. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(3), 193-212.

Van de Walle, J. A. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (7th ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Van Vleck, E. B. (1916). Current tendencies of mathematical research. *Bulletin of The American Mathematical Society*, 23,1-13.

Yavuz, A. (2009). Problem çözümlerine prakseolojik yaklaşım. *Türkiye Sosyal Araştırmalar Dergisi*, 13(2), 93- 106.

Yavuz, İ. (2013). İntegral kavramı ve uygulama alanları. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A.Delice (Editörler), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s.557-572). Ankara: Pegem Akademi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10.Baskı). Ankara: Seçkin.

EKLER

EK-1. Reel Sayıların, Tanımsızlık, Belirsizlik ve Sonsuzluk Kavramlarının Tarihsel Gelişim Tablosu

Yüzyıl	Yıl	Matematikçi	Ülke	Konu	Açıklama	Kaynak[11] Sayfa
İ.Ö.	569- 475	Pisagor	Yunanistan	Reel Sayılar	Pisagor teoremi (bir dik üçgenin dik kenar uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir) ile irrasyonel sayıların ortaya çıkması, Pisagor ekolünün derin bir krize girmesine neden olmuşur. Bu yüzden irrasyonel sayıların keşfi matematiğin ilk önemli krizi olarak kabul edilir.	http://home.ku.edu.tr/~aulger/historyofmathematics.html
Sonsuz Küçükler/ Limit/İntegral		İ.Ö. 5. yüzyılda eski Yunanlılar alan hesabında tüketme yöntemini kullanmışlardır.				MÖS 402
İ.Ö.	450	Zenon	Yunanistan	Sonsuz Küçükler/	Sonsuz küçüklere giren ilk matematikçi Zenon'dur. Zenon'un 4 tane meşhur paradoksu vardır. İlk paradoksu şu şekildedir: Bir ok atıldığında hedefe varabilmesi için önce hedefle kendisi arasındaki uzaklığın orta noktasına varması gerekir. Orta noktaya varabilmesi için kendisi ile ilk orta noktanın ortasındaki (2. orta nokta) noktaya varması gerekir. Bu şekilde sonsuz kez yarılamaya devam edilirse ok hiçbir zaman hedefe varamaz ve hareketsiz kalır. Bu bizi sonsuz tane sayının toplamının hiçbir zaman sonlu bir sayı yapmayacağı fikrine götürür. Zenon bu paradoksu ile bir doğru parçasının	

[11] **Not:** Kaynak sütununda yer alan kısaltmalar hakkında bilgilendirme
- MÖS: Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi ''Matemetiğin öykübsü ve serüveni'' Matematik Sözlüğü Cilt-1 (Yazar: A. Dönmez)
- MT: Matematik Tarihi (Yazar: F. Cajori)
- TTGMK :Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar (Editörler: İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, A. Delice)

				Sonsuz Toplam/Limit	sonsuz kez bölünebilmesi fikrine karşı çıkmaktadır. 2.paradoksa göre Achilles önünde ilerleyen kaplumbağaya hiçbir zaman yetişez. Çünkü Achilles kaplumbağanın bulunduğu yere varınca kaplumbağa ilk bulunduğu noktadan ayrılmış olacaktır. Bu düşünce sonsuz kez tekrarlandığında kaplumbağa her zaman Achilles'in önünde olur. Diğer paradoksa göre atılan bir ok her an hareket halinde veya hareketsizdir. Çünkü eğer zaman bölünmezse ok hareket edemez. Hareket edebilseydi zaman bölünebilirdi.O zaman ok herhangi bir anda hareket edemez, olduğu yerde kalır. Son paradoksta ise bir zamanın yarısı aynı zamanın iki katına eşittir. Zenon'un bu paradoksları limit ve sonsuz toplamların matematiğe girmesine önder olmuştur.	MÖS 402-404
İ.Ö.	450	Bryson	Yunanistan	Sonsuzluk/ Sonsuz Küçükler/ Limit/İntegral	Antiphon'dan önce yaşamış ve onun gibi dairenin içine düzgün çokgenler çizerek dairenin yaklaşık alanını hesaplamıştır.	MÖS 409
İ.Ö.	440	Anaksagoras	Yunanistan	Reel Sayılar/ İrrasyonel Sayılar	Dairenin kareleştirilmesi probleminin çözümü için ilk girişimlerde bulunmuştur.	MÖS 445-478
İ.Ö.	430	Antiphon	Yunanistan	Sonsuzluk/ Sonsuz Küçükler/ Limit	Çevrelerin bulunmasında tüketme yöntemini kullanan ilk kişi olmuştur. Antiphon, çemberin içine köşe noktaları çember üzerinde olacak şekilde bir kare çizmiştir. Sonrasında karenin orta noktalarını belirleyerek düzgün sekizgen çizmiş ve bu işlemleri devam ettirerek elde ettiği düzgün çokgenin çevresini çemberin çevresine yaklaştığını belirlemiştir. Bu yöntem 17. yüzyılda yapılan limit hesabın geometrik benzeridir.	MÖS 402 ve 405
İ.Ö.	408-355			Sonsuzluk/	Antiphon'un alan hesabına benzer hesaplar yapmıştır.	MÖS 402

İ.Ö.	370	Eudoxus	Yunanistan	Sonsuz Küçükler/ Limit	Üçgensel bir bölgenin ağırlık merkezinin bulunması, dairenin alanı ile çevresi arasındaki oranın belirlenmesi, bir kürenin alanı ve hacminin hesaplanması gibi problemlerle ilgilenmiştir.	TTGMK 570
İ.Ö.	384 -322	Aristo	Yunanistan	Sonsuzluk	Aristo'nun düşünceleri matematikçilerin sonsuzluk kavramına bakışlarını yüzyıllar boyu etkilemiştir. Aristo sonsuzluğu herhangi bir aralığı sınırsız bir şekilde genişletme ya da bölme imkanını ifade eden bir potansiyel olarak tanımlamıştır.	TTGMK 512
İ.Ö.	300	Euclides	Yunanistan	Sonsuzluk/ Asal Sayılar	En büyük asal sayının bulunamayacağını ispatlamıştır.	MÖS 447
İ.Ö.	287-212	Archimedes	Yunanistan	Sonsuzluk/ Sonsuz Küçükler/ Limit	Antiphon'un hesabına benzer hesaplar yapmıştır. Dairenin alanının hesaplanması yaklaşımında ‘’limit’’ sözcüğü kullanılmadan limit kavramından yararlanmıştır. Bu hesap dairenin içerisine çokgenler yerleştirilerek alan hesabı yapmaya dayanır. Çokgenlerin kenar sayıları sonsuza yaklaştıkça, çokgenlerin alanlarının dairenin alanına yaklaştığı fikri limit kavramına dayanır.	MÖS 402 TTGMK 483
				İrrasyonel Sayılar	Archimedes, çokgenleri kullanarak dairenin çevresini ve alanını belirlemeye çalışmıştır. Bu hesaplama yöntemi ile pi sayısına oldukça yakın bir değer elde etmiştir.	MÖS 445-478
İrrasyonel sayılar	Bir karenin köşegen uzunluğunun kenarı ile ölçülemediği (yani modern tabirle $\sqrt{2}$ gibi sayıların irrasyonel olduğunu) ortaya atılmış ve ispatlanmıştır.					MÖS 477
1	50-100	Plütarkhos	Yunanistan	Reel Sayılar	Dairenin kareleştirilmesi probleminin çözümü için ilk girişimlerde bulunan Anaksagoras'ın bu çalışmalarının günümüze taşınmasında öncülük etmiştir.	MÖS 477
7	628	Brahmagupta	Hindistan	Reel Sayılar/Sıfır	Sıfır fikrini bir sayının kendisinden farkı olarak tanımlamıştır. Bir sayıya sıfırın eklenmesi veya sayıdan sıfırın çıkarılması sonucunda sayının değişmediğini, sıfırla çarpıldığında ise bu sayının	TTGMK 457

					sıfır olduğunu kendi eserinde belirtmiştir.	
7	598-670	Brahmagupta	Hindistan	Tanımsızlık/ Belirsizlik	○ Bir sayının sıfıra bölümünün sayı/sıfır şeklinde paydası sıfır olan bir kesir olduğunu, ○ Sıfırın bir sayıya bölümünün sıfır/ sayı şeklinde bir kesir veya sıfır olduğunu, ○ Sıfır/sıfırın sıfıra eşit olduğunu iddia etmiştir. Brahmagupta yukarıda verilen ifadelerden ilkinde ve üçüncüsünde yanılgıya düşmüştür.	TTGMK 457
8 - 9	750-850	Harizmi	Türk	Negatif Sayılar	Harizmi, cebir kitabında negatif sayılarla işlem kurallarını kullanmıştır. Fakat, denklem çözümlerinde köklerin negatif bir sayı olamayacağını ileri sürmüştür. Harizmi'nin bu sonuca varmasındaki en önemli neden, denklemlerin çözümünü geometrik yollarla buluyor olmasıdır.	MÖS 477
9	800-870	Mahavira	Hindistan	Tanımsızlık	Brahmagupta'nın hatasını görmüştür. Fakat, bir sayının sıfıra bölümünün o sayıya eşit olacağını belirterek, başarısız bir düzeltme yapmıştır.	TTGMK 457
12	1114-1185	Bhaskara	Hindistan	Tanımsızlık/Sonsuzluk	Bir sayının sıfır ile bölümünü ''sonsuz ve değişmez'' olarak nitelendirmiştir. Bhaskara'nın bu sonuca varmasında sıfır sayısını bu sayıya yakın, mümkün olabilecek en küçük sayı olarak düşünmesinin etkili olduğu görülmektedir. Çünkü bir sayının çok küçük bir sayıya bölümü ile sonsuz elde edilebilir.	TTGMK 457
13	1290	Giovanni Campano	İtalya	Reel Sayılar	Euclid'in kitabını tekrar yayımladığında, olmayana ergi metodu ile sonuçlanan bir devirli çıkarsama yöntemi ile altın oranın irrasyonel bir sayı olduğunu ispatlamıştır.	MT 170
14	1360	Oresme	Fransa	Sonsuz Küçükler	Sonsuz küçükler hesabında ikinci büyük adımı geometrik çalışmalarıyla Oresme atmıştır. Oresmi, bir katının yüzeyinin dikdörtgenimsi bölgelere bölünerek yüzölçümünün bulunabileceğini söyleyen matematikçilerdendir.	MÖS 410

16-17	1540-1610	Ludolph van Ceulen	Hollanda	Reel Sayılar	Pi sayını 35 basamağa kadar hesaplayabilmiştir. Bu yüzden pi sayısına genellikle ‘’Ludolph’un sayısı’’ denilmektedir.	MT 171
16	1585	Stevin	Belçika	Reel Sayılar	Ondalık kesirleri ilk kez sistematik bir şekilde ele alan kişi Stevin’dır.	MT 176-177
16-17	1548-1620	Stevin	Belçika	Sonsuz Küçükler	Bazı geometrik şekillerin ağırlık merkezlerini bulmak için sonsuz küçükler hesabına, kendisinden önce yapılan çalışmalara göre daha modern bir bakış açısıyla yaklaşmıştır.	MÖS 410
17	1609	Kepler	Almanya	Sonsuz Küçükler	Gezegenlerle ilgili alan yasasını bulmuş ve sonsuz küçükler hesabına yaklaşmıştır. Alan yasasına göre, Güneş ile gezegeni birleştiren vektör, eşit zamanlarda eşit alanlar tarar.	MÖS 414
17	1617	Napier	İskoçya	Reel Sayılar	*Rabdologia* (1617) adlı eserinde ondalık kesirlerde virgülü, basamakları ayırmanın yanı sıra ondalık kesirleri çarparken ve bölerken kullanan ilk kişidir.	MT 178
16-17	1564-1642	Galileo	İtalya	Sonsuzluk	Aristo doktrinine karşı geliştirilen ilk argümanların Galileo ile başladığı kabul edilir. Galileo bir uzunluğa sonsuz küçük boşluklardan sonsuz sayıda eklenerek daha uzun bir uzunluk elde edilebileceğini ileri sürmüştür. Galileo doğal sayılar ile bu sayıların kareleri arasında bire-bir eşlemenin mümkün olduğunu belitmiştir. Böyle bir eşleme sonucunda doğal sayılar kümesi ile doğal sayıların karelerinden oluşan kümenin eşit elemana sahip olduğu sonucu ortaya çıkmıştır. Galileo, kendi adıyla bilinen bu paradokstan ‘’… daha büyük daha küçük ifadeleri sonsuz için uygulanamaz, bu ifadeler yalnızca sonlu miktarlar içindir.’’ sonucunu çıkarmıştır	TTGMK 512-513
Sonsuz Küçükler		17. yüzyılda Newton ve Leibniz kalkülüsün temellerini attıklarında hesaplamaların nasıl yapılacağı bilinmekte idi. Fakat bu dönemde sonsuz küçükler ile ilgili gerekli ispatlar yapılmamış ve sıkıntılar çözülmemiştir.				TTGMK 513
17	1598-1647	Cavalieri	İtalya	Sonsuzluk /Sonsuz	Sonsuz toplamlardan yararlanarak uzunluk, alan ve hacim hesapları yapmıştır. Bu hesaplamalar sonucunda; bir üçgenin alanının, üçgenle aynı	MÖS

				Toplamlar/İntegral	taban ve yükseklik uzunluğuna sahip paralelkenarın alanının yarısına eşit olduğunu göstermiştir.	414
17	1601-1665	Fermat	Fransa	Sonsuz Küçükler/ Diferansiyel	Fermat maksimum ve minimum kuralını bulurken günümüzde kullanılan sonsuz küçüklük ifadesi olan ‘‘ dx ’’ yerine ‘‘ e ’’ notasyonunu kullanmıştır.	MT 195
17	1638-1675	Gregory	İskoçya	Reel Sayılar/ Sonsuz Küçükler	Archimedes algoritmasını kullanarak, dairenin kareleştirilmesinin imkansız olduğunu ispatlamıştır.	MT 172
17	1630-1677	Barrow	İngiltere	Sonsuz Küçükler	Bir eğri ile bu eğri ile kesişen bir doğru arasında oluşturduğu benzer üçgenler yardımıyla sonsuz küçüklerle ilgili hesaplamalar yapmıştır. Bir araştırmacının (J.M. Child) iddiasına göre sonsuz küçükler hesabını ilk bulan kişi Barrow'dur.	MT 225
17	1642-1708	Seki Kowa	Japonya	Sonsuz Küçükler	Sonsuz küçükler hesabına yönelik büyük buluşları vardır.	MÖS 419
Sonsuz Küçükler		Newton ve Leibniz sonsuz küçükler hesabının bulunmasını sağlayan matematikçiler olarak kabul edilmektedir.				MT 249
17	1642-1727	Newton	İngiltere	Sonsuz Küçükler/ Diferansiyel	Newton analizi geliştirirken *sonsuz küçük'* adı verilen kavrama ihtiyaç duymuştur. Çünkü diferansiyel analiz her ikisi de *neredeyse sıfır* olan oranlara dayanır. Çok küçük olan bu sayıları Newton *fluxions (değişen – kararsız)* olarak adlandırmıştır.	TTGMK 483
				Sonsuz Küçükler/Türev	Newton ve Leibniz türevi, herhangi bir fonksiyonun değişkeninde son derece küçük bir değişim (dx) meydana geldiğinde, fonksiyonun kendisinde meydana gelen değişim ($f'(x)$) olarak tanımlamış ve $f'(x)=\dfrac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ şeklinde ifade etmiştir.	TTGMK 483
					Leibniz'da Newton gibi, analizi geliştirirken	

17	1684-1686	Leibniz	Almanya	Sonsuz Küçükler	*sonsuz küçük* adı verilen kavrama ihtiyaç duymuştur. Leibniz 1673 yılında İngiltere'ye gitmiş ve sonsuz küçükler üzerine çalışan Newton ve Barrow'un çalışmalarından yararlanmıştır. Leibniz'ın sonsuz küçükler üzerine yapmış olduğu çalışmalar 1684 ve 1686 yıllarında yayımlanmıştır.	MÖS 419
17	1646-1716	Leibniz	Almanya	Sonsuz Küçükler/ Diferansiyel	Leibniz eğriyi sonsuz küçüklükte kenardan oluşan sonsuz kenarlı bir çokgen olarak ele almış ve ardışık iki x değerinin çok küçük olan farkını ''diferansiyel'' (dx) olarak adlandırmıştır. Benzer şekilde x 'teki değişime karşılık gelen y 'deki değişimi ise dy ile göstermiştir.	TTGMK 483 ve 552
17	1686	Leibniz	Almanya	Sonsuz Küçükler	1686'da yayımlanan *Acta Eruditorum* adlı bilimsel dergideki çalışmasında dx, dy niceliklerini sonsuz küçük olarak nitelendirmiştir.	MT 246
Tanımsızlık/ Belirsizlik	Bu kavramlarla ilgili 17. yüzyıla kadar önemli gelişmelerin yaşandığını söylemek mümkün değildir. Belirsizlik konusunun çözümüne yönelik önemli bir adım L'Hopital kuralının bulunmasıyla atılmıştır.					TTGMK 458
17	1696	L'Hopital	Fransa	Belirsizlik	Yayımladığı analiz konularından oluşan kitabında $0/0$ ve ∞/∞ belirsizliklerinin olduğu durumlarda limit alma için kullanılan etkili bir yönteme yer verilmiştir.	TTGMK 458
18	1722	Takebe Kenko	Japonya	İrrasyonel Sayılar	1024 kenarlı düzgün çokgeni kullanarak pi sayısının yaklaşık değerini bulmuştur.	MÖS 419
18	1737	Euler	İsviçre	İrrasyonel Sayılar/ Sonsuz Küçükler	Günümüzde de kullanılan sürekli kesir gösterimi Euler'e aittir. Euler, matematik dünyasında sürekli kesirlerin babası olarak nitelendirilir.	MÖS 331
18	1685-1753	Berkeley	İngiltere	Sonsuz Küçükler	Berkeley, sonsuz küçükler kullanılırken dx 'in sıfırdan farklı sayılarak paydada kullanıldığı, sonrasında ise sıfıra eşitlendiği çelişkisine dikkat çekerek Newton ve Leibniz'ı eleştirmiştir.	TTGMK 484 ve 552-553
18	1717-1783	D'Alembert	Fransa	Sonsuzluk/ Limit	D'Alembert, analiz içinde limitler kuramını benimsemiş ve sonsuzu, sonlunun yaklaştığı ama hiçbir zaman ulaşamadığı bir limit olarak görmüştür.	MT 281

Sonsuz Küçükler		Newton ve Leibniz'in metotlarının başarısına rağmen, sonsuz küçük fikri 18. yüzyılda matematikçiler tarafından destek bulmamıştır. Bu karmaşa 19. yüzyıla kadar devam etmiştir. Bu durum Pisagor dönemindeki irrasyonel sayılar krizinden sonra matematiğin yaşadığı ikinci büyük kriz olarak kabul edilmektedir.				TTGMK 484
19	1781-1848	Bolzano	Çek Cum. (İtalyan asıllı)	Sonsuzluk	Bolzano, sonsuz kümelere ilk el atan matematikçidir. Bolzano, matematiksel olarak sonsuzluğun en uygun şekilde küme kavramı yardımıyla açıklanabileceğini düşünmüştür. Bolzan'nun küme teorisinin temellerinin atılmasında önemli katkıları olmuştur. Sonsuz kümeleri ilk kez Bolzano karşılaştırmaya çalışmıştır. Fakat Cantor gibi, elemanlarının özellikleri ne olursa olsun, kümelerin karşılaştırılabilmelerini sağlayan bir metot geliştirememiştir.	TTGMK 514
19	1851			Sonsuzluk	Bolzano, 1851 yılında yayımlanan *Sonsuzluğun Paradoksları* adlı kitabı ile sonsuzluk kavramının matematiğin bir çalışma konusu olarak ele alınabileceğine dair tartışmaları başlatmıştır.	
19	1821	Cauchy	Fransa	Limit/Sonsuzluk	Cauchy *Cours d'Analyse* isimli eserinde limit kavramını tartışmış ve limit kavramının bugünkü modern tanımını sözel olarak vermiştir. Aşağıdaki sözel tanım bu eserden alınmıştır. ''Bir değişkenin sayısal değerleri sürekli bir şekilde artıyorsa bu değişkenin limiti sonsuzdur deriz. Eğer değişken pozitif değerli ise ∞ ile, negatif değerli ise $-\infty$ ile gösteririz. ∞ ve $-\infty$ kavramları ''sonsuz çokluklar'' adı altında birleşir.''	TTGMK 484
				Sonsuz Küçükler	Cauchy, *Cours d'Analyse* isimli eserinde sonsuz küçük kavramını şu şekilde tanımlamıştır: ''Bir değişkenin sayısal değerleri sürekli bir şekilde (verilen her sayıdan küçük olacak şekilde) azalınca bu değişken ''sonsuz küçük'' adını alır (s.19).''	TTGMK 483
				İrrasyonel Sayılar/	Cauchy, *Cours d'Analyse* isimli eserinde (s.4) irrasyonel sayıların ona giderek daha fazla	MT

				Sonsuz Küçükler / Limit	yaklaşık değer veren birbirinden farklı kesirlerin limiti olduğunu belirtmiştir.	445
				Sonsuz Küçükler	Sonsuz küçükleri kullanmaya gerek olmadığını sonsuz küçükler olmadan da genel matematiğin açıklanabileceğini iddia etmiştir.	TTGMK 513
	1789-1857			Sonsuz Küçükler/ Süreklilik	Sürekliliği tanımlarken sonsuz küçükleri limiti sıfır olan bir değişken olarak ele almıştır.	TTGMK 513
				Belirsizlik	0^0, 0/0, ve sonsuz eksi sonsuz ifadelerinin de matematiksel olarak tanımlı olmadığını belirtmiştir. Bu kavrayış, limitte karşılaşılan belirsizlik formlarının günümüzde anlaşılan şekliyle uyum göstermektedir.	TTGMK 459
	1789 - 1857			Sonsuz Küçükler	Cauchy’nin limit ile ilgili çalışmaları daha sonra Weierstrass’ın (1815-1884) çalışmalarıyla birleşerek sonsuz küçük kavramından kaynaklanan krizin aşılmasında önemli bir rol oynamıştır.	TTGMK 484
Reel Sayılar/ Limit					İrrasyonel sayılar limit olarak tanımlandığında Cauchy’nin *Cours d’Analyse* adlı eserinde verdiği silsilede kırılma yaşanır. Bu nedenle irrasyonel sayıların limitlerinden bahsedilmeden önce aritmetiksel olarak tanımlanması gerekir. Bu tanımlama birbirinden bağımsız olarak hemen hemen aynı zamanda dört kişi (C.Méray, K.Weierstrass, R.Dedekind ve G.Cantor) tarafından gerçekleştirilmiştir.	MT 445
Sonsuzluk					19. yüzyılın ortalarına kadar matematikteki sonsuzluk kavramı ile ilgili anlayışlarda ve düşüncelerde köklü bir değişiklik olmamıştır.	TTGMK 512
Sonsuzluk/ Süreklilik					Genel matematik uzun süre herhangi bir fiili sonsuz büyüklük kullanılmadan limit işleminin tanımı ile geliştirilmiştir. Fakat matematikçiler sürekliliğin ya da reel doğrunun tam bir tarifini yapmaya çalıştıkça, matematiğin temelindeki sonsuzluk ile karşılaşmışlardır.	TTGMK 513
19	1882	Ferdinand van Lindemann	Almanya	İrrasyonel Sayılar	Lindemann, pi sayısının belirlenmesi için yapılan daireyi kareleştirme (daireyi kareye dönüştürme çizimi) probleminin çözümünün olanaksız olduğunu ispatlamıştır.	MÖS 445-478
19	1889	Guiseppe Peano	İtalya	Sayılar	Peano (1858-1932) 1889 yılında ortaya koyduğu 5 aksiyomluk kurgu ile sayı sistemini şöyle tanımlamıştır: 1.Sıfır bir sayıdır. 2. a bir sayı ise ardılı da bir sayıdır ve her sayının bir ardılı vardır.	MÖS

					3.Sıfır hiçbir sayının ardılı değildir. 4. Ardılları eşit olan iki sayı birbirine eşittir. 5. Bir E kümesi sıfır ve içerdiği her sayı ile birlikte ardılını da içeriyorsa E kümesi tüm sayıları içerir.	446
19	1815-1897	Weierstrass	Almanya	Reel Sayılar	Tam sayılardan hareketle reel sayıları oluşturma problemini ortaya atmıştır.	MÖS 445-478
				Sonsuz Küçükler	Sonsuz küçük kavramından kaynaklanan krizin aşılmasında önemli bir rol oynamıştır.	TTGMK 484
				İrrasyonel Sayılar	Napier logaritmasının tabanı olan e sayısının, Lindemann'ın buluşuna benzer özellik taşıdığını göstermiştir	MÖS 477
Sonsuzluk		Sonsuz niceliklerin ilk kez modern matematiğe yerleşmesi Cantor, arkadaşı Dedekind ve takipçilerinden Frege'nin çalışmalarıyla mümkün olmuştur.				TTGMK 514
19-20	1831-1916	Dedekind	Almanya	Reel sayılar	Weierstrass'ın ortaya attığı tam sayılardan hareketle reel sayıları oluşturma problemi üzerinde çalışmalar yapmıştır.	MÖS 445-478
				Sonsuz Küçükler	Reel sayıların inşası ile ilgili teorisinde sonsuz küçüklere gerek olmadığını ve sonsuz küçüklerin var olmadığını iddia etmiştir. Dedekind, reel sayıların sonsuz kümeler ile gösterilebileceğini fark ederek, sonsuzluk kavramını tanımlamanın en uygun şeklinin küme kavramı olduğu fikrini savunmuştur. Dedekind, böylece sonsuzluk ile ilgili çalışmaların farklı bir alana kaydırılmasını sağlayarak, küme teorisinin temellerinin atılmasında ve geliştirilmesinde önemli katkılar sağlamıştır.	TTGMK 513-514
				Reel sayılar	Cantor, Weierstrass'ın ortaya attığı tam sayılardan hareketle reel sayıları oluşturma problemi üzerinde çalışmalar yapmıştır. Cebirsel sayılar (kat sayıları tam sayı olan denklemin kökleri olan sayılar) kümesinin sayılabildiğini, üstün sayılar (kat sayıları tam sayı olan denklemin kökleri olamayan sayılar (örneğin pi sayısı)) kümesinin sayılamayacağını	MÖS 445-478

					kanıtlamıştır.	
19-20	1845-1918	Cantor	Almanya	Sonsuzluk	Küme teorisinin temellerinin atılmasında ve geliştirilmesinde çok önemli katkıları olmuştur. Cantor, matematiksel olarak sonsuzluğun en uygun şekilde küme kavramı yardımıyla açıklanabileceğini savunmuştur	TTGMK 514
				Sonsuzluk	1800'lerin sonlarına doğru yapmış olduğu çalışmalarla sonsuz kümelerin sonlu kümelerden çok farklı ve o zaman için olağan dışı sayılan özelliklere sahip olduğunu ortaya koymuştur. Cantor'a kadar bütün sonsuz kümeler denk kabul edilirken, küme teorisi ile sonsuzluğun farklı dereceleri olduğu gösterilmiştir.	TTGMK 514
20	1918-1974	Abraham Robinson	Waldenburg, Almanya doğumlu (Günümüzde Portekiz toprağı)	Sonsuz Küçükler	Sonsuz küçükler ile ilgili tutarlı bir yapı ortaya koymuştur. Robinson, 1960 yılında standart olmayan analizi açıklayarak sonsuzluk ile ilgili yeni bir çalışma alanı oluşmuştur.	TTGMK 514

EK-2. Analizin Tarihsel Gelişim Tablosu

Yüzyıl	Yıl	Matematikçi	Ülke/Kıta/Bölge	Konu	Açıklama	Kaynak Sayfa
İ.Ö.	1800'ler		Mısır	İntegral	İlk alan ve hacim hesaplamalarının izlerine Mısır'da kesik piramit üzerine yapılan çalışmalarda rastlanmıştır.	TTGMK 570
Limit / İntegral			İ.Ö.5. yüzyılda eski Yunanlı matematikçiler alan hesabında tüketme yöntemini kullanmışlardır.			MÖS 402
İ.Ö.	450	Zenon	Yunanistan	Komşuluk/Limit /Sonsuz Toplam	Sonsuz küçüklere giren ilk matematikçi Zenon'dur. Zenon'un 4 tane meşhur paradoksu vardır. İlk paradoksu şu şekildedir: Bir ok atıldığında hedefe varabilmesi için önce hedefle kendisi arasındaki uzaklığın orta noktasına varması gerekir. Orta noktaya varabilmesi için kendisi ile ilk orta noktanın ortasındaki (2. orta nokta) noktaya varması gerekir. Bu şekilde sonsuz kez yarılamaya devam edilirse ok hiçbir zaman hedefe varamaz ve hareketsiz kalır. Bu bizi sonsuz tane sayının toplamının hiçbir zaman sonlu bir sayı yapmayacağı fikrine götürür. Zenon bu paradoksu ile bir doğru parçasının sonsuz kez bölünebilmesi fikrine karşı çıkmaktadır. 2.paradoksa göre Achilles önünde ilerleyen kaplumbağaya hiçbir zaman yetişez. Çünkü Achilles kaplumbağanın bulunduğu yere varınca kaplumbağa ilk bulunduğu noktadan ayrılmış olacaktır. Bu düşünce sonsuz kez tekrarlandığında kaplumbağa her zaman Achilles'in önünde olur. Diğer paradoksa göre atılan bir ok her an hareket halinde veya hareketsizdir. Çünkü eğer zaman bölünmezse ok hareket edemez. Hareket edebilseydi zaman bölünebilirdi.O zaman ok	MÖS 402-404

					herhangi bir anda hareket edemez, olduğu yerde kalır. Son paradoksta ise bir zamanın yarısı aynı zamanın iki katına eşittir. Zenon'un bu paradoksları limit ve sonsuz toplamların matematiğe girmesine önder olmuştur.	
İ.Ö.	450	Bryson	Yunanistan	Limit / İntegral	Antiphon'dan önce yaşamış ve onun gibi içine düzgün çokgenler çizerek dairenin yaklaşık alanını hesaplamıştır.	MÖS 409
İ.Ö.	430	Antiphon	Yunanistan	Limit /İntegral	Alanların bulunmasında tüketme yöntemini kullanan ilk kişi olmuştur. Antiphon, çemberin içine köşe noktaları çember üzerinde olacak şekilde bir kare çizmiştir. Sonrasında karenin orta noktalarını belirleyerek düzgün sekizgen çizmiş ve bu işlemleri devam ettirerek elde ettiği düzgün çokgenin çevresini çemberin çevresine yaklaştığını belirlemiştir. Bu yöntem 17. yüzyılda yapılan limit hesabın geometrik benzeridir. Alanların bulunmasında tüketme yöntemini kullanan ilk kişi olmuştur.	MÖS 402 ve 405
İ.Ö.	408-355	Eudoxus	Yunanistan	Limit/İntegral	Antiphon'un alan hesabına benzer hesaplar yapmıştır.	MÖS 402
İ.Ö.	370				Üçgensel bir bölgenin ağırlık merkezini bulma, dairenin alanı ile çevresi arasındaki oranı belirleme, bir kürenin alanı ve hacmini hesaplama gibi problemlerle ilgilenmiştir.	TTGMK 570
İ.Ö.	287-212	Archimedes	Yunanistan	Limit/İntegral	Antiphon'un alan hesabına benzer hesaplar yapmıştır. Dairenin alanının hesaplanması yaklaşımında *limit* sözcüğünü kullanmadan limit kavramından yararlanmıştır. Bu hesap dairenin içerisine çokgenler yerleştirerek alanını hesaplamaya dayanır. Çokgenlerin kenar sayıları sonsuza yaklaştıkça çokgenlerin alanının dairenin alanına yaklaşması limit kavramı ile açıklanır.	MÖS 402 TTGMK 483
					Serilerden yararlanarak bir parabol kesmesinin	

				Seriler/İntegral	alanını hesaplamıştır. Archimedes, modern bir şekilde limit, integral ve integral alma yöntemlerini kullanmadan bu hesaplamayı yapmayı başarmıştır.	MÖS 409-410
İntegral		Ortaçağ döneminde bir cismin yüzölçümünün, dikdörtgenlerin alanlarının toplamının limiti gibi düşünülmesi integral hesabı için olumlu bir yaklaşım olmuştur.				MÖS 410
3	300	Pappus	Yunanistan	Türev	Maksimum-minimum problemlerinin kökeni Pappus'un çalışmalarına dayanır.	MÖS 416
10 -11	965-1040	İnb al-Haytham	Arap (Doğum yeri: Basra/Irak)	İntegral	Bir doğru ile sınırlanmış bir parabolün bu doğru etrafında döndürülmesinden oluşan cismin hacmini hesaplamıştır. Yaptığı hesap günümüzde yapılan $\int_{-a}^{a} (a^2 x^2)^2 dx$ integral hesabına benzemektedir.	TTGMK 570
11-12		Jehudah Barzillai	İspanya	İntegral	''Dünyada dikdörtgenden başka şekil yoktur .'' ifadesi Barzillai'ya aittir. Barzillai, bir katının yüzeyinin dikdörtgenimsi bölgelere bölünerek yüzölçümünün bulunabileceğini söyleyen matematikçilerden biridir.	MÖS 410
12-13	1135-1213	Şerafettin el-Tusi	İran veya Azerbaycan	Türev	Türev kavramına yönelik fikirlerin ilk kez ortaya atılması polinom fonksiyonların maksimum değerlerini bulma bağlamında Şerafettin el-Tusi'ye atfedilmektedir.	TTGMK 551
14	1360	Oresme	Fransa	Reel Sayılar/ Komşuluk	Sonsuz küçükler hesabında ikinci adımı geometrik çalışmalarıyla Oresme atmıştır. Oresme, bir katının yüzeyinin dikdörtgenimsi bölgelere bölünerek yüzölçümünün bulunabileceğini söyleyen matematikçilerden biridir.	MÖS 410
16-17	1548-1620	Stevin	Belçika	Reel Sayılar/ Komşuluk/Limit	Stevin, bazı geometrik şekillerin ağırlık merkezlerini bulmak için sonsuz küçükler hesabına daha modern bir bakış açısıyla yaklaşmıştır.	MÖS 410
Türev/İntegral		İntegralde 2.basamak dönemi 17. yüzyılın ilk yarısında başlar. 17. yüzyılda türev ve integralle ilgili iki önemli soruya cevap bulunmuştur. Bunlar; bir eğriye üzerindeki bir noktadan teğet çizimi ve eğri altında kalan sınırlı bölgenin alanının				MÖS

					hesaplanmasıdır.	402
				Limit	Limit kavramı matematik analizde bilinen anlamda 17. yüzyıldan itibaren kullanılmaya başlanmıştır.	TTGMK 482
				Analiz/ Analitik Geometri	Analitik geometrinin temelleri, bir noktanın aynı düzlemde kesişen iki doğrudan (eksenler ya da koordinatlar eksenleri) uzaklığı ile sıralı gerçek sayı çiftleri arasındaki ilişkinin önemini birbirlerinden bağımsız olarak kavrayan René Descartes ve Pierre de Fermat tarafından 17. yüzyılda Fransa' da atılmıştır. Descartes, bir yandan Eski Yunan'da gelişmiş geometri yöntemlerini, öbür yandan da kendi çağının cebir bilgisini derinlemesine incelemiş ve matematiğin bu iki dalını kendi amaçları açısından yetersiz ve soyut bulmuştur. Descartes, geometrinin biçimlerle uğraşırken kavrayışı geliştirecek yolları ihmal ettiğini, cebirin ise kuralların boyunduruğunda karanlık ve karmaşık bir sanata dönüştüğünü düşünerek analitik geometriyi keşfetmişir. Analitik geometri, bilgi yolunu tıkayan bu eksikliklerin giderilmesi amacıyla bu iki dalın birleştirilmesinin ürünüdür. Descartes, bir düzlemdeki noktaları birbirine dik iki eksene uzaklıklarıyla belirterek, geometride cebirsel yöntemlerden, cebirde ise geometriden yararlanma olanağını ortaya koymuştur. Fermat, René Descartes'tan bağımsız olarak, analitik geometrinin temel ilkesini bulmuştur. Fermat, 1629' da Eski Yunanlı geometrici Pergeli Apollonios'un Plane Loci (Düzlemsel Geometrik Yerler) adlı kayıp yapıtını yeniden düzenlmiş ve geometrik yerlerin (belirli bir niteliği olan noktalar kümesi) , cebirin bir koordinat sistemi aracılığıyla geometriye uygulanması yoluyla kolayca incelenebileceğini bulmuştur. Descartes da aynı yıllarda analitik geometrinin, iki değişkenli denklemler düzlemsel eğrileri tanımlar biçimindeki temel ilkesini bulmuştur. Fermat'ın *Düzlemlerin ve Katıların Geometrik Yerlerine Giriş* adlı kitabı ölümünden sonra 1679'da yayımlandığı için 1637'de Descartes'in *Geometri* adlı yapıtında ele alınan bu buluşa dayalı geometri, *kartezyen geometri* adıyla anılmaktadır. Sonuç olarak Descartes, Fermat ile birlikte cebiri geometri ile bütünleştirmeyi başarmıştır. Böylece, Greklerin geometri yardımıyla aritmetiği kavramak istemelerinin tersine, analitik geometri, aritmetik ve cebir sistemlerinin sonucunda ortaya koyulmuştur. Analitik geometri, sonraki yıllarda Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz'in geliştirdiği matematiksel analizin de temelini oluşturmuştur	Göker, L. (1997) Mat. Tarihi ve Türk İslam Matematikçilerinin Yeri Dehn, M. (1943) Analitik Geometri
17	1609	Kepler	Almanya	Reel Sayılar/ Komşuluk	Gezegenlerle ilgili alan yasasını bulmuş ve sonsuz küçükler hesabına yaklaşmıştır. Alan yasasına göre, Güneş ile gezegeni birleştiren vektör, eşit zamanlarda eşit alanları taramaktadır.	MÖS 414
17	1615	Kepler	Almanya	Reel Sayılar/ Komşuluk/ Sonsuzluk	*Stereometria Doliorum* adlı eserinde neredeyse unutulmuş bir fikir olan *sonsuz büyük ve sonsuz küçük* çoklukları yeniden uygulamaya geçirmiştir.	MT 191

17	1616	Kepler	Almanya	İntegral	Kepler aynı zamanda integralde 2.basamak dönemi matematikçilerindendir.	MÖS 402
17	1571-1630	Kepler	Almanya	Sonsuz Küçükler	Değişkenlerdeki küçük artışların, örneğin bir eğrinin y ekseni üzerindeki artma miktarının, maksimum ve minimuma yaklaştığında sıfıra gittiğini belirlemiştir.	MT 195
17	1598-1647	Cavalieri	İtalya	İntegral/ Sonsuz Toplamlar/ Sonsuz Küçükler	Bölünmezler yöntemi, antik Yunanlıların tüketme metodu ile Newton ve Leibniz'in limit alma metotları arasında bir yeri olan yöntemdir. Bu yönteme göre bir nokta bir doğrunun, bir doğruda bir yüzeyin bölünmezidir. Ayrıca her bölünmez hareket ederek kendisinden bir sonraki ve bir yüksek mertebedeki sürekliliği oluşturabilmektedir (hareket eden bir noktanın bir doğruyu oluşturabilmesi gibi). Böylece iki cismin ya da yüzeyin büyüklüğü , bir dizi düzlem ya da doğrunun toplanması suretiyle bulunabilmektedir (MT, 192) Cavalieri, 1635 yılında piyasaya sürdüğü eserinde bölünmezler yöntemini detaylı bir şekilde izah etmiş, sonsuz toplamlardan yararlanarak uzunluk, alan ve hacim hesapları yapmıştır. Bu yöntemi kullanarak bir üçgenin alanının aynı tabanlı ve yükseklikli paralelkenarın alanının yarısına eşit olduğunu bulmuştur (MÖS, 414). Bölünmezler yöntemi her ne kadar kullanışlı olsa da, yöntemin bilimsel bir dayanaği yoktur (MT, 192). Buna rağmen bu yöntem 50 yıl boyunca integral hesabı olarak kullanılmış ve bazı zor sorulara bu yöntem sayesinde çözüm bulunmuştur (MT, 193).	MÖS 414 MT 192-193
				İntegral	Cavalieri, integralde 2.basamak dönemi matematikçilerinden olup, Kepler'den sonra integral hesabına en çok yaklaşanlardan biridir.	MÖS 402- 414
					Cavalieri $y = x^n$ (n *doğal sayı*) eğrisinin altında kalan alanla ilgilenmiş ve bu alanı hesaplayabilmiştir.	TTGMK 570

17	1608-1647	Torichelli	İtalya	İntegral/ Sonsuz küçükler	Torichelli bölünmezler yöntemini kullanarak sikloitin alanının, dönen bir dairenin alanının üç katı olduğunun ispatını yapmıştır (MT, 193). Torichelli, Cavalieri gibi, $y = x^n$ $(n\ doğal\ sayı)$ eğrisinin altında kalan alanla ilgilenmiş ve bu alanı hesaplamayı başaranlardan biri olmuştur (TTGMK, 570).	MT 193 TTGMK 570
İntegral/ Sonsuz Küçükler	Fransa'da geometrinin hızla ilerleme kaydettiği dönemde Roberval, Fermat ve Pascal bölünmezler yöntemini kullanmış ve geliştirmişlerdir.					MT 193
17	1602-1675	Roberval	Fransa	Limit/İntegral	Bir eğri ile doğru arasında kalan bölgenin alanını sonsuz sayıda dikdörtgenin alanları toplamı olarak Cavalieri ile aynı dönemde bulmuştur.	MÖS 414
				İntegral/ Sonsuz küçükler	Torichelli'nin yapmış olduğu kareleştirme ispatını (bölünmezler yöntemini kullanarak sikloitin alanının, dönen bir dairenin alanının üç katı olduğunun ispatı) ondan birkaç yıl önce yapmıştır (MT, 193). Roberval bu yöntemle alan, hacim ve ağırlık merkezlerini hesaplamış; parabolü kareselleştirmeyi başarmıştır (MT, 194). Roberval $y = x^n$ $(n\ doğal\ sayı)$ eğrisinin altında kalan alanla ilgilenmiş ve bu alanı hesaplamayı başaranlardan biri olmuştur (TTGMK, 570).	MT 193-194 TTGMK 570
17	1638	Fermat	Fransa	Türev	Descartes (1596-1650) ile yaptığı yazışmalardan anlaşıldığına göre, Fermat maksimum ve minimum noktalarda bugünkü $f'(x) = 0$ haline eşdeğer bir durumun olduğunu görmüştür. Bu dönemlerde türev kavramı ve türev gösterimleri henüz yoktu.	MÖS 416
17	1601-1665	Fermat	Fransa	Türev	Polinom fonksiyonların grafiğinin maksimumunu, minimumunu ve teğetlerin eğimini bulma yöntemlerini kullanarak türev kavramına temel hazırlamıştır.	TTGMK 551
				Sonsuz Küçükler/	Fermat maksimum ve minimum kuralını bulurken günümüzde kullanılan sonsuz küçüklük ifadesi olan dx yerine e yi kullanmıştır. Fermat bunu	MT

				Diferansiyel	tanjantları çizmek için temel alma ve bir eğrinin verilen herhangi bir noktasındaki alt tanjantını hesaplamak için kullanmıştır.	195
17	1601-1652	Beaune	Fransa	Türev	Bir eğrinin özelliklerinin, o eğrinin tanjantından elde edilebileceğini söyleyen ilk matematikçilerdendir. Bu yöntem *ters tanjant metodu* olarak bilinmektedir.	MT 215
17	1623-1667	Pascal	Fransa	İntegral	Sıfırdan π ye kadar sinüs fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alanı yarım daireler yardımıyla hesaplamaya çalışmıştır.	TTGMK 570
				İntegral/ Sonsuz Küçükler	Pascal bölünmezler metodunda geçen *düz çizgiler toplamının* aslında *sonsuz küçük dikdörtgenlerin alanları toplamı* anlamına geldiğini belirtmiştir.	MT 197
17	1652	René de Sluze	Belçika	Türev	Maksimum ve minimum noktalarda türevin yatay olacağı René de Sluze ve Hudde tarafından verilmiştir.	MÖS 416
17	1655	Wallis	İngiltere	Limit	1655 senesinde basılan eserinde limit kavramını belli oranlardaki kesirleri dikkate alarak oluşturmuş, limit değerine doğru azalan, dolayısıyla aralarındaki farkın sonsuzda kaybolduğu yapılar kullanmıştır.	MT 220
				Süreklilik	Kepler’in süreklilik kanununu geliştirerek onu sağlam bir temele oturtmuştur.	MT 220
17	1658	Hudde	Hollanda	Türev	Maksimum ve minimum noktalarda türevin yatay olacağını kendisi ve René de Sluze tarafından verilmişti.	MÖS 416
17	1663	Barrow	İngiltere	Türev/İntegral	Türev kavramına ilk yaklaşan matematikçidir. İntegralin türevin tersi olduğunu farketmiş ancak alan hesaplamalarında bunu kullanmamıştır.	MÖS 416
	1630-1677			Sonsuz Küçükler	Bir eğri ile, bu eğri ile kesişen bir doğru arasında oluşturduğu benzer üçgenler yardımıyla sonsuz küçüklerle ilgili hesaplamalar yapmıştır. Bir araştırmacının (J.M. Child) iddiasına göre sonsuz küçükler hesabını ilk bulan kişi Barrow’dur.	MT 225
				Reel Sayılar/ Sonsuz Küçükler	Archimedes algoritması kullanarak, dairenin kareleştirilmesinin imkansız olduğunu	MT 172

					ispatlamıştır.	
17	1638-1675	James Gregory	İskoçya	İntegral	İntegralin temel teoremini bulmuştur. Bu teorem şöyledir: $f(x),\ [a,b]\ \text{aralığında sürekli olsun.}$ $\forall x\in[a,b]\ \text{için}\ F'(x)=f(x)\ \text{ise,}$ $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)\ \text{olur.}$	MÖS 420
				İntegral	İntegralde 3. dönem 17. yüzyılda Newton’un yaptığı çalışmalarla başlamıştır.	MÖS 402
				Türev	Fizik alanında çalışan bilim insanları (Newton ve Leibniz gibi) hızı sürekli değişen hareketli cisimlerin belli bir andaki hızının ne olduğu, belirli bir zaman aralığında ne kadar yol aldığı ve matematik alanında çalışan bilim insanlarının geometrik şekillerin analizini daha sistematik bir şekilde nasıl yapabilecekleri sorularına cevap aramışlardır. Bu sorulara cevap verilebilmesine yardımcı olacak sistematik yaklaşımların temeli analizi geliştiren iki bilim insanı Newton (1642-1727) ve Leibniz (1646-1716) tarafından atılmıştır.	TTGMK 551
				Diferansiyel Analiz	Diferansiyel analizin mucidinin Newton, analizin meyvelerini dünyaya ilk sunanın Leibniz olduğu kabul edilmektedir.	MT 249
17	1642-1708	Seki Kowa	Japonya	Reel Sayılar /Komşuluk	Sonsuz küçüklerin hesabına yönelik büyük buluşları vardır.	MÖS 419
				İntegral	İntegral hesabına yönelik büyük buluşları vardır.	MÖS 419
				Türev/İntegral	Newton ile beraber integralde 3.dönem başlamıştır. Türev ve integral konusunda en büyük buluşlar Newton’a aittir. 1665 yılında başladığı çalışmaları 1687 yılında *Principia* adlı kitabıyla yayımlsnmıştır. Newton fiziksel yöntemler ile türev ve integral kavramını açıklamıştır.	MÖS 402
				Komşuluk/ Limit	Newton’un ikinci kavramı limittir. Bu konudaki kitabı 1704 yılında yayımlanmıştır. Kitapta sonsuz küçükler üzerine yaptığı çalışmalara da yer vermiştir.	MÖS 419
				Sonsuz Küçükler	Newton ve Leibniz sonsuz küçükler hesabının bulunmasını sağlayan matematikçiler olarak kabul edilmektedir.	MT 227

17-18	1642-1727	Newton	İngiltere	Reel Sayılar / Komşuluk	Newton analizi geliştirirken *sonsuz küçük* adı verilen kavrama ihtiyaç duymuştur. Çünkü diferansiyel analiz her ikisi de *neredeyse sıfır* olan oranlara dayanır. Çok küçük olan bu sayıları Newton *fluxions(değişen – kararsız)* 'olarak adlandırmıştır.	TTGMK 483
				Diferansiyel /Türev	Newton ve Leibniz türevi, herhangi bir fonksiyonun değişkeninde son derece küçük bir değişme (dx) meydana geldiğinde, fonksiyonun kendisinde meydana gelen değişim ($f'(x)$) olarak tanımlamış ve $f'(x)=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ şeklinde ifade etmiştir.	TTGMK 483
				Türev / Seriler	Bir eğrinin oluşturduğu alana, apsisin zamanla doğru orantılı olarak arttığını varsayarak, sürekli değişen ordinat uzunluğunun değişim oranıyla bağlantılı olarak artan bir nicelik olarak bakmış ve türev için elde edilen ifadeyi, tek terimlilerden oluşan sonlu veya sonsuz bir seriye dönüştürmüştür.	MT 228
				Türev/ Sonsuz Küçükler	Newton *Quadrature of Curves* adlı eserinde kullandığıtürev yöntemi ile ilgili şu ifadelere yer vermiştir: ‘’Ben burada matematiksel nicelikleri çok küçük parçalardan oluşuyormuş gibi değil, sürekli bir hareketle tarif edilmiş olarak görüyorum. Çizgiler, parçaların yan yana konulmasıyla değil, noktaların sürekli hareketi ile tarif edilir ve oluşur. Alanlar, çizgilerin, cisimler ise alanların sürekli hareketinden elde edilir … Bunlar eşyanın tabiatına uygun olarak meydana gelir ve her gün cisimlerin hareketinde gözlemlenir… Türevler, istediğimiz ölçüde (quam proxime) değişkenlerin zaman içinde oluşturdukları eşit ve	MT 232-233

					mümkün olan en küçük artışlardır…’’	
				Türev/İntegral	Newton ve Leibniz bir eğrinin altında kalan alanın türevin tersi alınarak hesaplanabileceğini kanıtlamışlardır. Bu şekilde kolay bir hesaplama tekniği geliştirerek analizin sentetik geometriden bağımsız bir şekilde gelişmesini hızlandırmışlardır.	TTGMK 570
				Türev/Analiz	Newton'a göre analiz hareketi ve hızı anlamanın bir yoludur. Bu anlamda dinamik ve sürekli olan gerçek hayat durumlarını açıklar. Newton'un analizi düzgün ve sürekli bir şekilde değişen akışkanlar üzerinedir. Bu yaklaşıma göre tanımlanan akışkanların hızlarının oranı ya da akış hızındaki değişime günümüzde türev denilmektedir.	TTGMK 551
17	1675	Leibniz	Almanya	İntegral	Leibniz 29 Ekim 1975 tarihinde integral ile ilgili yeni notasyonu şu şekilde tanıtmıştır: ‘’ omn yerine $\int$ ve $omn.l$ (yani l'lerin toplamı yerine de $\int l$ kullanmak daha yararlı olacaktır.’’ Sonrasında da $\int x = \frac{x^2}{2}$, $\int (x+y) = \int x + \int y$ gibi basit integralleri vermiştir.	MT 243
17	1677	Leibniz	Almanya	Diferansiyel	11 Haziran 1677 tarihli bir makalede toplam, çarpım, bölüm, güç ve köklerin diferansiyeli için doğru kuralları vermiştir.	MT 245
17	1686	Leibniz	Almanya	Sonsuz Küçükler/ Diferansiyel	1686'da yayımlanan *Acta Eruditorum* adlı bilimsel dergideki çalışmasında dx, dy niceliklerini sonsuz küçük olarak nitelendirmiştir.	MT 246
17	1687	Newton	İngiltere	Türev	*Principia* adlı eserinin 1687'deki ilk baskısında türev tanımını sonsuz küçüklere dayandırmıştır.	MT 232
17	1687	Mochinaga ve	Japonya	İntegral	Dairenin alanını integral yöntemi ile	MÖS

		Ohashi			hesaplamışlardır.	419
17	1664-1690	Newton	İngiltere	İntegral	1664-1690 yılları arasında integral alma ile ilgili bazı özellikleri (bunlar arasında toplam şeklinde verilen fonksiyonların integrallerini ayrı ayrı integralleri alınarak toplama, bazı üstel fonksiyonların integralleri ile ilgili kurallar bulunmaktadır.) açık bir şekilde genelleştirerek ifade etmiştir.	TTGMK 570
17	1690	Bernoulli	İsviçre	İntegral	1690 yılında *Acta Eruditorum* bilimsel dergisindeki çalışmasında ilk kez integral kelimesini kullanmıştır.	MT 256-257
17	1696	L'Hopital	Fransa	Limit	Yayımladığı analiz konularından oluşan kitabında 0/0 ve ∞/∞ belirsizliklerinin olduğu durumlarda limit alma için kullanılan etkili bir yönteme yer vermiştir.	TTGMK 458
17-18	1646-1716	Leibniz	Almanya	Reel Sayılar /Komşuluk	Leibniz'de Newton gibi, analizi geliştirirken *sonsuz küçük* adı verilen kavrama ihtiyaç duymuştur.1673 yılında İngiltere'ye gitmiş sonsuz küçükler üzerine çalışan Newton ve Barrow'un buluşlarından yararlanmıştır. Leibniz'ın sonsuz küçükler üzerine yapmış olduğu çalışmalar 1684 ve 1686 yıllarında yayımlanmıştır.	MÖS 419
				Sonsuz Küçükler	Newton ve Leibniz sonsuz küçükler hesabının bulunmasını sağlayan matematikçiler olarak kabul edilmektedir. *Sonsuz küçük* kelimesi ilk kez Leibniz tarafından kullanılmıştır.	MT 227
				Türev/İntegral	Leibniz, integralde 2.basamak dönemi matematikçilerindendir. Leibniz, Newton'dan farklı olarak geometrik yöntemler ile türev ve integral kavramını vermiştir. Huygens, Gregoire de Saint Vincent, Pascal ve Cavalieri'nin çalışmalarından yararlanmıştır.	MÖS 402
					Newton ve Leibniz bir eğrinin altında kalan alanın türevin tersi alınarak hesaplanabileceğini kanıtlamışlardır. Bu şekilde kolay bir hesaplama	TTGMK

					tekniği geliştirilerek analizin geometriden bağımsız bir şekilde gelişmesini hızlandırılmıştır.	570
				Diferansiyel /Türev	Leibniz eğriyi sonsuz küçüklükte kenardan oluşan sonsuz kenarlı bir çokgen olarak ele almış ve ardışık iki x değerinin çok küçük olan farkını *diferansiyel* olarak adlandırmıştır. Leibniz, x 'teki değişime karşılık gelen y 'deki değişimi dy ile göstermiştir. Leibniz'in yaklaşımında türev, eğri üzerindeki bir (x, y) noktasındaki teğetin eğimi olan diferansiyellerin oranıdır. Newton ve Leibniz türevi, herhangi bir fonksiyonun değişkeninde son derece küçük bir değişme (dx) meydana geldiğinde, fonksiyonun kendisinde meydana gelen değişim ($f'(x)$) olarak tanımlamış ve $f'(x)=\dfrac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ şeklinde ifade etmişlerdir. Hem Newton hem de Leibniz'in yaklaşımında türev bir fonksiyon olarak düşünülmemekte, eğrinin eğiminin bir değişkene bağlı olarak hesaplanması bir oran olarak algılanmaktadır.	TTGMK 483 ve 552
				Türev	$\frac{x}{d}$ notasyonunu günümüzde kullanılan dx notasyonu ile değiştirmiştir.	MT 244
				Reel Sayılar/ Komşuluk	17. yüzyılda Newton ve Leibniz kalkülüsün temellerini attıklarında hesaplamaların nasıl yapılacağı bilinmekte idi. Fakat bu dönemde sonsuz küçükler ile ilgili ispatlar yapılmamış ve sıkıntılar çözülmemiştir.	TTGMK 513
				İntegral	İntegral hesabı Newton ve Leibniz'dan sonra hızla gelişmiştir. Özellikle Hopital ve Bernoulli'ler bu konuda önemli çalışmalar yapmışlardır.	MÖS 419
				Reel Sayılar/ Komşuluk	Newton ve Leibniz'in metotlarının başarısına rağmen, sonsuz küçük fikri 18. yüzyılda matematikçiler tarafından destek bulmamıştır. Bu karmaşa 19. yüzyıla kadar devam etmiştir. Bu durum Pisagor dönemindeki irrasyonel sayılar krizinden sonra matematiğin yaşadığı ikinci büyük kriz olarak kabul edilmektedir.	TTGMK 484
18	1722	Takebe Kenko	Japonya	Reel Sayılar/ Komşuluk	1024 kenarlı düzgün çokgeni kullanarak pi sayısının yaklaşık değerini bulmuştur.	MÖS 419

18	1736	Newton	İngiltere	Türev	Newton'un *Method of Fluxions* adlı eseri yazıldıktan tam elli yıl sonra 1736 yılında yayımlanmıştır. Bu eserde soyut cebirin temel direkleri olarak kabul edilebilecek iki mekanik problemin çözümüne yer verilmiştir. Bu problemler şunlardır: i) Uzaklık (tüm zamanlarda) sürekli olarak verildiğinde, hareketlinin herhangi bir zamandaki hzını bulma problemi, ii) hareket hızı sürekli verildiğinde, herhangi bir zamanda alınan yolu bulma problemi. Newton ilk problem için kendi çözümünü şu şekilde açıklamıştır: ''Değişkenlerin momentleri (zamanın sonsuz küçük parçalarındaki artışları ile sürekli, artan sonsuz küçük parçaları) onların artışlarının veya değişimlerinin hızıdır.'' Burada geçen *moment* kelimesi temelde Leibniz'in diferansiyelleridir. Newton ikinci problemin çözümünde türevin homojenliğini varsayarak çözümler yapmıştır. Çalışmada ayrıca maksima ve minimaların belirlenmesine de yer verilmiştir.	MT 229-232
18	1685-1753	Berkeley	İngiltere	Reel Sayılar/ Komşuluk	Sonsuz küçükler kullanılırken dx 'in sıfırdan farklı sayılarak paydada kullanıldığı, sonrasında ise sıfıra eşitlendiği çelişkisine dikkat çekerek Newton ve Leibniz'i eleştirmiştir.	TTGMK 484 ve 552-553
Analiz	Euler analitik analizin sentetik geometriden ayrılmasını sağlayarak onu bağımsız bir bilim dalı haline getirmiştir.Lagrange ve Laplace bu ayrıma uyarak yüksek analiz konusunda emek vermiş ve onu fevkalde bir düzeye eriştirmişlerdir.					MT 268
				Türev	Newton ve Leibniz'ın türev yaklaşımına getirdiği sorunları aşmak ve analize sağlam bir temel oluşturmak için Euler ve öğrencisi Lagrange türevi bir fonksiyon olarak değerlendirmiştir.	TTGMK 553
					Euler sonlu farklar ile ilgili analizi, *Institutiones Calculi Diferentialis* isimli eserinin ilk bölümlerinde geliştirmiş ve diferansiyel analizi	MT 276

18	1707-1783	Euler	İsviçre	Analiz	oluşturmuştur.	
					Euler'in analitik mekaniğe sarfettiği emek oldukça önemlidir. Whewell, ‘‘ Analize şimdi gururu olan genellik ve simetriyi kazandıran kişi, aynı zamanda mekaniği de analitik hale getiren kişidir; Euler'i kastediyorum.’’ diyerek Euler'in yapmış olduğu çalışmaların önemini vurgulamıştır.	MT 277
				İntegral/ Seriler	Sonsuz seriler konusu Euler sayesinde yeniden canlanmıştır. *Euler integrali* adı verilen integralin gelişimi ile belirli integraller teorisinin yaratılması Euler'in araştırmaları sayesinde olmuştur.	MT 275
18	1766	Euler	İsviçre	İntegral	1766'da *varyasyon hesabı* terimini ortaya atmış ve bu hesabı geliştirmeye çalışmıştır.	MT 290
18	1717-1783	D'Alembert	Fransa	Limit	Analiz içinde limitler kuramını benimsemiş, sonsuzu, sonlunun yaklaştığı ama hiçbir zaman ulaşamadığı bir limit olarak görmüştür.	MT 281
18	1799	Monge	Fransa	Analiz	Monge çığır açan *Géométrie Descriptive* adlı eserini yayımlamıştır. Bu eser ile birlikte geometrinin analizde dışlanmasına son verilmiştir.	MT 269
18	1800	Arbogaste	Fransa	Türev/İntegral	*Calcul des Dérivations* adlı eserinde türevlemeyi cebirsel bir fonksiyonun diferansiyel operatörü ile genelleştirilmesi olarak ifade etmiştir. Aynı çalışmada türevlenebilmenin mahiyetinin diferansiyelleme ile birlikte integral alma olduğuna da işaret etmiştir.	MT 288
				Türev	*Calcul des Dérivations* adlı eserde ilk defa işlem simgeleri nicelik simgelerinden ayrılmıştır. $\frac{dy}{dx}$ yerine kullanılan $D_x y$ notasyonu Arbogaste'e aittir.	MT 288
					Lagrange, türevin anlaşılmasında kullanılan sonsuz küçüklük, bir miktarın değişme hızı, hatta	

18-19	1736-1813	Lagrange	İtalya	Seriler/Türev	limit kavramlarını kullanmadan türevi tanımlama çabası gütmüş ve analizi genel anlamda fonksiyonlara indirgemiştir. Lagrange tüm fonksiyonların kuvvet serileri olarak gösterilebileceğinden yola çıkmış ve f fonksiyonunun belirli bir i değerindeki kuvvet serisinin açılımı olarak şu şekilde ifade etmiştir: $f(x+i)=f(x)+p(x)i+q(x)i^2+r(x)i^3+...$ Burada $p,q,r,...$ i ’den bağımsız x ’e bağlı yeni fonksiyonlardır. Lagrange elde ettiği seri açılımında i ’nin katsayısı olan $p(x)$ ’in $\frac{dy}{dx}$ ile tanımlanabileceğini göstermiştir. Yeni fonksiyon $p(x)$, eski fonksiyon $f(x)$ ’den türediği için bu fonksiyona *türetilmiş fonksiyon* adını vermiştir ve $f'(x)$ şeklinde göstermiştir Lagrange türev terminolojisini ve türev fonksiyonu gösterimini kullanan $(f', f'',...)$ ilk bilim insanıdır.	TTGMK 553
				İntegral	Varyasyon hesabının yaratılmasına Euler gibi katkıda bulunmuştur. Euler’in bıraktığı şekliyle varyasyon hesabı analitik temelden yoksunken, bu temel Lagrange tarafından atılmıştır.	MT 290
Türev					Analizin cebire indirgenmesi ve kuvvet serisi şeklinde yazılamayan fonksiyonların varlığının gösterilmesi gibi nedenlerden dolayı Lagrange’in türev tanımlamasında eksikler bulunmuştur.	TTGMK 553
Limit					Limit kavramının tanımı 19. yüzyılın ilk yarısına dayanır.	TTGMK 483 ve 553
Türev					Türev kavramının tanımı 19. yüzyılın ilk yarısına dayanır.	TTGMK 483 ve 553
İntegral/Seriler					Sonsuz seriler, diferansiyel ve integral hesabın bulunduğu dönemde önem kazanmıştır. Sonsuz seriler bu kadar popüler olmadan önce çok az kişi tarafından kullanılmıştır. Polonyalı Mengoli (1650) ve Mengoli bu alanda çalışma yapan matematikçilerdendir.	MT 206

19	1817	Bolzano	Çek Cum. İtalya asıllı	Limit	Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ilk kez Çek rahip Bernard Bolzano (1817) tarafından tanımlanmıştır. Ancak çalışmaları yaşarken tanınmadığı için limitin formel tanımı Cauchy'e dayandırılır.	TTGMK 484
19	1781-1848	Bolzano	Çek Cum. İtalya asıllı	Süreklilik	Sürekliliğin ilk modern formülasyonu ile Bolzano'nun çalışmalarında karşılaşılır. Bu çalışmada süreklilik şu şekilde ifade edilmiştir: ‘’ x in herhangi bir değeri için sürekli fonksiyon şundan başkası değildir: x herhangi bir değer olmak üzere, w istenildiği kadar küçük seçilerek, $f(x+w)-f(x)$ farkı verilen herhangi bir değerden küçük yapılabilir.’’	TTGMK 486
19	1821	Cauchy	Fransa	Reel Sayılar/ Komşuluk	Cauchy *Cours d'Analyse* adlı eserinde sonsuz küçük kavramını şu şekilde tanımlamıştır.: ‘’Bir değişkenin sayısal değerleri sürekli bir şekilde (verilen her sayıdan küçük olacak şekilde) azalınca bu değişken ‘’sonsuz küçük’’ adını alır (s.19).’’	TTGMK 483
				Komşuluk/Limit	$\varepsilon-\delta$ tanımı ilk kez Cauchy'nin *Cours d'Analyse* isimli eserinde yapılmıştır. Bu eserde ispatlanan teoremin ifadesi ‘’ x in büyüyen değerleri için $f(x+1)-f(x)$ farkı k gibi bir limite yakınsar.’’ şeklindedir. Bu teoremin ispatı şu şekilde yapılmıştır: ‘’ ε ile seçebileceğimiz en küçük sayıyı ifade edelim. Madem ki x in büyüyen değerleri $f(x+1)-f(x)$ farkının k gibi bir değere yakınsamasını sağlıyor, o halde öyle bir h değeri bulunabilir ki x 'ler h 'den büyük veya eşit olduklarında söz konusu fark her zaman	TTGMK 485

					$k-\varepsilon,\ k+\varepsilon$ aralığının içinde kalır.’’	
				Limit/Sonsuzluk	Cauchy *Cours d’Analyse* isimli eserinde limit kavramını tartışmış ve limit kavramının bugünkü modern tanımını sözel olarak vermiştir. Aşağıdaki sözel tanım bu eserden alınmıştır. ‘’Bir değişkenin sayısal değerleri sürekli bir şekilde artıyorsa bu değişkenin limiti sonsuzdur deriz. Eğer değişken pozitif değerli ise ∞ ile, negatif değerli ise $-\infty$ ile gösteririz. ∞ ve $-\infty$ kavramları *sonsuz çokluklar* adı altında birleşir.’’	TTGMK 484
				Limit	Cauchy *Cours d’Analyse* isimli eserinde (s.4) bir irrasyonel sayının ona giderek daha fazla yaklaşık değer veren birbirinden farklı kesirlerin limiti olduğunu belirtmiştir.	MT 445
Limit	İrrasyonel sayı limit olarak tanımlandığında Cauchy’nin *Cours d’Analyse* adlı eserinde ifade ettiği silsilede kırılma yaşanır. Bu nedenle irrasyonel sayıların limitlerinden bahsedilmeden önce aritmetiksel olarak tanımlanması gerekir. Bu tanımlama birbirinden bağımsız olarak hemen hemen aynı zamanda dört kişi (C.Méray, K.Weierstrass, R.Dedekind ve G.Cantor) tarafından gerçekleştirilmiştir.					MT 445
				Reel Sayılar/ Komşuluk	Cauchy’nin limit ile ilgili çalışmaları daha sonra Weierstrass’ın (1815-1884) çalışmalarıyla birleşerek sonsuz küçük kavramından kaynaklanan krizin aşılmasında önemli bir rol oynamıştır.	TTGMK 484
				Limit/Süreklilik	Fourier’in herhangi bir fonksiyonun trigonometrik serilerle ifade edilebileceği şeklindeki açıklaması Cauchy’nin *sürekli, limit değer ve fonksiyon* kavramlarını yeniden formülize etmesini sağlamıştır.	MT 470
19	1789 – 1857	Cauchy	Fransa	Limit/İntegral	Bir toplamın limiti olarak tanımlanan belirli integralin varlık kriterini belirlemiş, sürekli olan bir fonksiyon için böyle bir limitin her zaman var olduğunu göstermiştir.	MT 472
				Limit/Türev	Cauchy’nin tanımına göre f fonksiyonunun türevi, limitin olduğu durumlarda	TTGMK 484 ve 553-554

					$\lim_{i \to 0} \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ limitine eşittir ve $f\,'$ ile gösterilir.	
				İntegral	İntegral kavramı üzerinde çalışmıştır. Cauchy, integral kavramını karmaşık fonksiyonlara taşımıştır.	MÖS 419
					Cauchy kompleks değişkenlerin önemini anlayınca bu tip değişkenleri olan fonksiyonları derinlemesine ele almış ve böylelikle integrali kompleks alana taşımıştır.	MT 470
19	1826-1866	Riemann	Almanya	Limit/İntegral	Cauchy bir toplamın limiti olarak tanımlanan belirli integralin varlık kriterini belirlemiş, sürekli olan bir fonksiyon için böyle bir limitin her zaman var olduğunu göstermiştir. 19. yüzyılın ilk yarısına kadar integral daha çok türevin tersi olarak anlaşılmış ve kullanılmıştır. Bu durum sadece sürekli fonksiyonlar için doğru iken Riemann (1826 – 1866) *integrallenebilirlik* kavramını matematiğe kazandırmıştır. Riemann böylelikle bu kısıtlı düşüncenin aşılmasını sağlamanın yanında belirli integrali diferansiyel analiz ve türevin varlığından tamamen bağımsız bir temele oturtarak önemli bir devrimin gerçekleşmesini sağlamıştır. Bu durum sezgilerimizin erişebileceği tüm geometrik şekillerden üstün olabilecek alanların ve yay uzunluklarının değerlendirilmesine yol açmıştır.	MT 472
Komşuluk/ Limit/Türev					Cauchy'nin limiti sözel olarak ifade etmesi ve *sonsuz küçük* kavramını kullanması eksiklik olarak görülmüştür. Ayrıca Kleiner (2001), Cauchy'nin limitin $\varepsilon - \delta$ tanımında kullanılan her ve en az bir niceleyicilerinin anlam ve öneminin farkında olmamasından dolayı bir fonksiyonun noktasal ve düzgün sürekliliğini ve noktasal ve düzgün yakınsaklığını ayırt edemediğini ifade eder. Türevin tam olarak sağlam bir temele oturması için Weierstrass'ın yapmış olduğu limitin formel tanımına ihtiyaç duyulmuştur.	TTGMK 554
Süreklilik					Modern lineer süreklilik teorisi Cantor ve Dedekind tarafından ortaya atılmıştır.. Cantor ve Dedekind'in geliştirdikleri modern süreklilik ile teorik analiz sadece sayılarla ilgilenen düzen olarak değerlendirilmiştir. C.Méray, K.Weierstrass gibi matematikçilerin de benimsedikleri bu dönem matematiğin aritmetikleştirme süreci olarak değerlendirilmektedir.	MT 446

Komşuluk/Limit/ Süreklilik				Bugün kullanılan şekliyle limit ve sürekliliğin $\varepsilon-\delta$ tanımı ilk olarak Weierstrass tarafından yapılmıştır. Weierstrass, komşuluk, limit, süreklilik gibi analiz konuları üzerine yapmış olduğu çalışmalarını Bolzano, Abel ve Cauchy tarafından yapılan önceki çalışmaların üzerine inşa etmiştir.		TTGMK 486
19-20	1831-1916	Dedekind	Almanya	Süreklilik	Modern lineer süreklilik teorisi Cantor ve Dedekind tarafından geliştirilmiştir.	MT 446
19-20	1845-1918	Cantor				MT 446
19	1841	Weierstrass	Almanya	Komşuluk/Limit	Bugün kullanıldığı haliyle limitin $\varepsilon-\delta$ tanımı ilk olarak 1841'de Weierstrass tarafından yapılmıştır.	TTGMK 485
19	1861	Weierstrass	Almanya	Türev/Süreklilik	Belirli bir aralıkla sürekli olup, bu aralığın hiçbir noktasında türevi olmayan fonksiyon bularak önemli bir başarıya imza atmıştır.	MT 475
19	1815-1897	Weierstrass	Almanya	Limit	$\lim$ *ve* $\lim\limits_{x=x_0}$ gösterimini ilk kullanan kişidir.	TTGMK 485
				Süreklilik	Bugün kullanıldığı haliyle sürekliliğin $\varepsilon-\delta$ tanımı ilk olarak Weierstrass tarafından yapılmıştır.	TTGMK 486
20	1902	Lebesgue	Fransa	Süreklilik/İntegral	Riemann'ın belirli integral tanımı yeterince genel değildir. Bu durumu Van Vleck kısaca şu şekilde açıklamıştır: ''Riemann'ın integralinde sonlu, ancak sadece belirli dar kısıtlamalar altında sonsuz sayıda süreksizlik noktası bulunmakta idi. Her noktada süreksiz olan bir fonksiyonun, örneğin, integral aralığının her yerinde yoğun olan rasyonel noktalarda sıfıra ve aynı şekilde her yerde yoğun olan rasyonel noktalarda 1'e eşit olan bir fonksiyonun, Riemann anlamında integrali alınamaz idi.'' Lebesgue nokta kümeleri teorisi ile Riemann'ın belirli integral tanımının genelleştirilmesini sağlamıştır.	https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183423785
20	1905	John Gaston	İngiltere	Komşuluk/Limit	Ok işaretinin yaklaşma anlamında kullanımı ve ok işaretinin lim kısaltmasının altında yazımı ilk kez	TTGMK

		Leathem			Leathem’in *‘’Volume and Surface Integrals Used in Physics’’* (1905) isimli eserinde görülmüştür.	485
19-20	1842-1917	Darboux	Fransa	İntegral	Riemann’ın klasik integrali Darboux tarafından mükemmelleştirilmiş ve bu haliyle matematik camiasında nihai bir olgu olarak değerlendirilmiştir.	MT 455
Sonsuz Küçükler/ Analiz		Sonsuz küçükleri içeren sistemler üzerindeki çalışmalar Levi-Civita ve Paul du Bois-Reymond’un çalışmalarına (19. yüzyılın sonları ve 20. yüzyılın başları) kadar devam etmiştir. 20. yüzyılda sonsuz küçüklerin kalkülüs ve analiz için bir temel oluşturabileceği keşfedilmiştir. https://tr.wikipedia.org/wiki/Sonsuz_k%C3%BC%C3%A7%C3%BCk				http://www.wikiwand.com/tr/Sonsuz_küçük

EK-3. Öğretim Programında Türev Konusuna İlişkin Kazanımlar (MEB, 2013, s.46)

İD.12.1.2. Türev

Terimler: Değişim oranı, anlık değişim oranı, türev

Sembol ve Gösterimler: $f'(x), f''(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

İD.12.1.2.1. Fizik ve geometri modellerinden yararlanarak değişim oranı kavramını açıklar.

[☑] *Anlık değişim oranı kavramı açıklanarak, anlık değişim oranına türev denildiği belirtilir.*

[☑] *Verilen bir fonksiyonun bir noktadaki türev değeri ile o noktadaki teğetinin eğimi arasındaki ilişki incelenir.*

[☑] $f(x)=c$, $f(x)=x^2$ *fonksiyonlarının türevleri, türev tanımı kullanılarak hesaplatılır.*

[☑] $r \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $f(x)=x^r$, $f(x)=e^x$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\ln x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ *fonksiyonlarının türevleri kural olarak verilir.*

[☒] *Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri verilmez.*

İD.12.1.2.2. Bir fonksiyonun bir noktada ve bir aralıkta türevli olmasını inceler.

[☑] *Tanım kümesi açıkça belirtilmemiş bir fonksiyonun tanım kümesi olarak, fonksiyonun kuralının geçerli olduğu en geniş küme alınır.*

[☑] *Fonksiyonun türevli olmadığı noktalarla grafiği arasında ilişki kurulur.*

İD.12.1.2.3. Türevlenebilen iki fonksiyonun toplamının, farkının, çarpımının ve bölümünün türevine ait kuralları açıklar ve bunlarla ilgili uygulamalar yapar.

[☑] *Doğru boyunca hareket eden bir cismin, t zamanı içinde aldığı yol ile t anındaki hızı; t anındaki hızı ile t anındaki ivmesi arasındaki ilişki örneklerle incelenir.*

İD.12.1.2.4. İki fonksiyonun bileşkesinin türevine ait kuralı (zincir kuralı) oluşturur ve bunu kullanarak türev hesabı yapar.

İD.12.1.2.5. Bir fonksiyonun yüksek mertebeden türevlerini açıklar ve bulur.

EK-4. Öğretim Programında Limit ve Süreklilik Alt Başlığına İlişkin Kazanımlar (MEB, 2013, s.45)

SAYILAR ve CEBİR

İD.12.1. Türev

İD.12.1.1. Limit ve Süreklilik

Terimler: Bir noktada limit, sağdan limit, soldan limit, süreklilik

Sembol ve Gösterimler: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

İD.12.1.1.1. Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, soldan limiti ve sağdan limiti kavramlarını tablo ve grafik kullanarak örneklerle açıklar.

[☑] *Limit kavramı bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasından yola çıkılarak açıklanır.*

[☑] *Limit alma işlemi aşağıdaki durumlarla sınırlandırılır:*

- $c \in \mathbb{R}$ *için* $\lim\limits_{x \to a} c = c$
- $\lim\limits_{x \to a} x = a$, $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$
- $a \in \mathbb{R}$ *için* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^2 - 1}{x^2} = a$

[☑] *Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak fonksiyonların tablo ve grafik gösterimleri yardımıyla limit uygulamaları yaptırılır.*

İD.12.1.1.2. Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği kavramını açıklar.

[☑] *Fonksiyonun sürekliliği ancak tanım kümesindeki noktalarda araştırılır. Örneğin,* $f(x) = 1/x$ *fonksiyonunun* $x = 0$ *noktasındaki sürekliliğini tartışmak,* $x = 0$ *bu fonksiyonun tanım kümesinde yer almadığından anlamsızdır.*

[☑] *Fonksiyonun grafiği üzerinde sürekli ve süreksiz olduğu noktalar buldurulur.*

[☑] *Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak fonksiyonların tablo ve grafik gösterimi yardımıyla süreklilik uygulamaları yaptırılır.*