RİEMANN MANİFOLDLARINDA KOMPAKTLIK TEOREMLERİ

Doktora Tezi

Yasemin SOYLU

Eskişehir, 2016

RİEMANN MANİFOLDLARINDA KOMPAKTLIK TEOREMLERİ

Yasemin SOYLU

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Murat LİMONCU

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Eylül, 2016

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Yasemin SOYLU'nun "Riemann Manifoldlarında Kompaktlık Teoremleri" başlıklı tezi .... tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

		Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof. Dr. Murat LİMONCU	....
Üye	:	Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ	....
Üye	:	Prof. Dr. Cumali EKİCİ	....
Üye	:	Doç. Dr. Hakan CEBECİ	....
Üye	:	Doç. Dr. Dursun IRK	....

Enstitü Müdürü

ÖZET

RİEMANN MANİFOLDLARINDA KOMPAKTLIK TEOREMLERİ

Yasemin SOYLU

Matematik Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eylül, 2016

Danışman : Prof. Dr. Murat LİMONCU

Bu tezde öncelikle özel bir metrik uzay olan Riemann manifoldların metrik yapısı ile ilgili temel tanımlar ve teoremler tanıtılmıştır. Enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyonu yardımıyla Myers tipi kompaktlık teoremleri kanıtlanmıştır. Daha sonra ikinci dereceden salınımlı lineer diferansiyel denklemler ve Riccati karşılaştırma teoremi verilmiştir. Riccati karşılaştırma teoremi kullanılarak yeni kompaktlık teoremleri elde edilmiştir. Tez boyunca elde edilen tüm kompaktlık teoremleri Ricci eğrilik tensörü üzerine yapılan bazı varsayımlar içermektedir.

Anahtar Sözcükler: Jeodezik, Metrik yapı, Varyasyonel hesap, Riccati karşılaştırma teoremi, Ricci eğrilik tensörü, Kompaktlık.

ABSTRACT

COMPACTNESS THEOREMS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

Yasemin SOYLU

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, September, 2016

Supervisor: Prof. Dr. Murat LİMONCU

In this thesis, first, basic definitions and theorems are introduced about Riemannian manifolds considered as a special metric space. With the aid of second variational of energy functional, Myers-type compactness theorems are proved. Next, linear second order oscillatory differential equations and Riccati comparison theorem are given. On using Riccati comparison theorem, new compactness theorems are acquired. Throughout the thesis all of the obtained compactness theorems contain specific assumptions concerning Ricci curvature tensor.

Keywords: Geodesic, Metric structure, Variational calculus, Riccati comparison theorem, Ricci curvature tensor, Compactness.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Murat LİMONCU'ya, bu çalışma süresince maddi ve manevi beni destekleyen sevgili eşim Adem SOYLU'ya ve her anımda yanımda hissettiğim aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yasemin SOYLU
Eylül 2016

28/09/2016

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Yasemin SOYLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
g	: Riemann metrik tensörü
(M,g)	: Riemann manifoldu
$T_p(M)$	: Teğet uzayı
$\chi(M)$	: Diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi
$\ell(\gamma)$	: γ eğrisinin yay uzunluğu
$\Omega(p,q)$	: $p \in M$'den $q \in M$'ye tüm diferansiyellenebilir eğri parçalarının kümesi
exp_p	: Eksponansiyel dönüşüm
U	: Normal komşuluk
$\mathcal{N}_\varepsilon(o)$	: $o \in M$ noktasının ε-komşuluğu
d	: Riemann uzaklık fonksiyonu
∇	: Levi-Civita koneksiyonu
$\nabla_V W$	: W vektör alanının V vektör alanı yönündeki kovaryant türevi
$E(\gamma)$	: γ eğrisinin enerji fonksiyoneli
$\overline{\gamma}$	: γ eğrisinin varyasyonu
R	: Riemann eğrilik tensörü
Ric	: Ricci eğrilik tensörü
$\mathrm{diam}(M)$	: M manifoldunun çapı
r	: Belirlenmiş bir $p \in M$ noktasından olan uzaklık fonksiyonu
$\mathcal{C}^\infty(M)$	: Diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$\mathcal{L}_V$	: V vektör alanının Lie türevi
V^*	: V vektör alanının metrik duali
C_p	: r uzaklık fonksiyonunun türevlenemediği noktaların kümesi
Hess	: Hessian operatörü
Δ	: Laplacian operatörü

1. GİRİŞ

Bağlantılı Riemann manifoldları bir metrik uzay olarak da düşünülebilir. Dolayısıyla bu metrik uzayın kompaktlığından bahsedebiliriz. Riemann manifoldlarında kompaktlık yaygın olarak eğrilikler üzerine yapılan kısıtlardan elde edilir. Özellikle Ricci eğriliği kullanılır. Bu konuyla ilgili Myers'ın 1941 yılında elde ettiği kompaktlık teoremi bilinen en önemli teoremdir. Myers Riemann manifoldu üzerinde Ricci eğriliğini pozitif bir sabit ile alttan sınırlandırarak manifoldun kompaktlığını elde etmiştir. Ayrıca manifoldun çapı için bir üst sınır bulmuştur [16]. Literatürde bu teorem birçok açıdan ele alınarak geliştirilmiştir [1, 4, 6–8, 14]. Daha sonraki yıllarda modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörleri kullanılarak, kompaktlık teoremleri bu tensörler üzerinden de elde edilmiştir [3, 11–13, 20, 23–25, 27, 28]. Örnek vermek istenirse modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörlerinden en bilineni,

$$\mathrm{Ric}_f := \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f \tag{1.1}$$

şeklinde verilen Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörüdür.

Tezde Riemann manifoldların metrik yapısıyla ilgili bazı temel tanım ve teoremlerin yanı sıra, Riemann geometride önemli bir yere sahip olan Hopf-Rinow teoremi de verilmiştir. Enerji fonksiyonelinin birinci ve ikinci varyasyon formülleri elde edilerek tam Riemann manifoldlar üzerinde ikinci varyasyon formülü yardımıyla bazı kompaktlık teoremleri kanıtlanmıştır. 1982 yılında Cheeger, Gromov ve Taylor'un ilk kez bir yuvar dışında Ricci eğrilik tensörü üzerine yaptıkları varsayım sonucunda elde ettikleri kompaktlık teoremi [4], Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü için genişletilmiştir.

Tezin devamında, Riemann manifoldlarda pek çok uygulama alanına sahip olan Bochner formülü verilmiştir. Daha sonra bu formül yardımıyla uzaklık fonksiyonunun Laplacianı için Riccati eşitsizliği elde edilmiştir. Riccati karşılaştırma teoremi sayesinde elde edilen kompaktlık teoremlerinden birisi Wang'ın 2014 yılında [24],

$$\mathrm{Ric}_{f,m} := \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f - \frac{\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f}{m-n} \tag{1.2}$$

ile verilen m-Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörünü kullanarak elde ettiği kompaktlık teoremidir. Bu çalışmada, Wang'ın teoremi ile doğrudan karşılaştırılabilen bir başka kompaktlık teoremi elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni teoremde

$$\mathrm{Ric}_{V,m} := \mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g - \frac{1}{m-n} V^* \otimes V^* \tag{1.3}$$

olarak tanımlanan $\mathrm{Ric}_{V,m}$ tensörü kullanılmıştır. Bu tensörde yer alan $\mathcal{L}_V$ ve V^* ifadeleri sırasıyla diferansiyellenebilir V vektör alanının Lie türevini ve metrik dualini göstermektedir. Ayrıca burada $m \geq n$ olup n manifoldun boyutudur. İkinci bir kompaktlık teoremi $\mathrm{Ric}_{V,m}$ tensörü üzerine yapılan başka bir varsayımdan elde edilmiştir. Bu teoremlerin kanıtında Riccati karşılaştırma teoreminden faydalanılmıştır.

Tezin son kısmında ise önceki bölümlerde verilen kompaktlık teoremlerinden daha farklı varsayımlar içeren bazı kompaktlık teoremlerine yer verilmiştir. Bunu yaparken ikinci dereceden lineer diferansiyel denklemlerin salınım koşullarından yararlanılmıştır. Dolayısıyla öncelikle bu salınım koşullarından bahsedilmiş ve bu koşullar yardımıyla elde edilen kompaktlık teoremleri verilmiştir. Bu teoremlerin kanıtında da Riccati karşılaştırma teoremi kullanılmıştır.

2. RİEMANN MANİFOLDLARIN METRİK YAPISI

Bu tezde, Riemann manifoldlarında kompaktlık teoremlerini çalışırken üçüncü mertebeden kovaryant birinci mertebeden kontravaryant eğrilik tensörünün

$$R(V,W)X = \nabla_V \nabla_W X - \nabla_W \nabla_V X - \nabla_{[V,W]} X \tag{2.1}$$

ile verilen tanımı kullanılacaktır. Burada V, W ve X herhangi vektör alanları ve ∇ Levi-Civita bağlantısıdır ([18], s. 74). Ricci eğrilik tensörü $\mathbf{C_1^1}$ büzülme operatörü yardımıyla

$$\mathrm{Ric} = \mathbf{C_1^1} R \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır. Herhangi bir koordinat sisteminde

$$\mathrm{Ric}(V,W) = \sum_{\mu} dx^{\mu}\big(R(\partial_\mu, V)W\big) \tag{2.3}$$

eşitliği ile verilir. İkinci mertebeden kovaryant bir simetrik $\mathcal{T}$ tensörü için $\mathcal{T} \geq f$ eşitsizliği

$$\mathcal{T} \geq f \quad \Leftrightarrow \quad \text{Her } V \text{ vektör alanı için } \mathcal{T}(V,V) \geq f g(V,V) \tag{2.4}$$

olarak karakterize edilir. Burada f Riemann manifoldu üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

Bağlantılı Riemann manifoldlarını bir metrik uzay olarak tanımlayabilmek için öncelikle jeodezik kavramını vermeliyiz. Bundan sonra (aksi bir durum belirtilmedikçe) Riemann manifoldu denildiğinde bağlantılı n-boyutlu Riemann manifoldunu anlayacağız.

2.1. Riemann Manifoldlarında Jeodezikler

Tanım 2.1.1. *(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\gamma : I \to M$ eğrisinin γ' teğet vektör alanı eğri boyunca paralel ise γ eğrisine bir jeodezik denir. Diğer bir ifadeyle jeodezikler ivmeleri sıfır olan eğrilerdir. Yani $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$' dır ([18], s. 67).*

Teorem 2.1.2. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $0 \in \mathbb{R}$'yi içeren bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı ve herhangi bir $v_p \in T_p(M)$ teğet vektörü için $\gamma(0) = p$ ve $\gamma'(0) = v_p$ olacak şekilde bir tek $\gamma : I \to M$ jeodeziği vardır ([18], s. 68).*

Tanım 2.1.3. *I, $\mathbb{R}$ üzerinde bir açık aralık olmak üzere $\gamma : I \to M$ jeodeziği, (M,g) manifoldunun daha geniş aralıklı bir jeodeziğine genişletilemiyorsa γ jeodeziğine maksimal jeodezik denir. Yani $I \subset J$ ve $\widetilde{\gamma} \mid_I = \gamma$ olacak şekilde hiçbir $\widetilde{\gamma} : J \to M$ jeodeziği yoksa γ maksimal jeodeziktir ([18], s. 68).*

Tanım 2.1.4. *Bir Riemann manifoldu üzerindeki her maksimal jeodeziğin tanım kümesi tüm reel sayılar kümesi ise (yani $I = \mathbb{R}$) bu Riemann manifolduna jeodezik olarak tamdır denir ([18], s. 68).*

Tanım 2.1.5 (Eksponansiyel Dönüşüm). *Riemann manifoldu üzerindeki bir $p \in M$ noktası için $\mathcal{G}_p$ kümesi*

$$\mathcal{G}_p := \{\alpha - maksimal\ jeodezikler \mid \alpha : I \to M,\ [0,1] \subset I,\ \alpha(0) = p\} \tag{2.5}$$

ve $\mathcal{D}_p$ kümesi de

$$\mathcal{D}_p := \{\gamma'(0) \in T_pM \mid \gamma \in \mathcal{G}_p\} \tag{2.6}$$

olarak tanımlansın. $p \in M$ noktasındaki eksponansiyel dönüşüm

$$\begin{array}{rcl} exp_p : \mathcal{D}_p & \to & M \\ \alpha'(0) & \mapsto & exp_p(\alpha'(0)) = \alpha(1) \\ \beta'(0) & \mapsto & exp_p(\beta'(0)) = \beta(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \tag{2.7}$$

olarak tanımlanır. Burada $\alpha, \beta, ... \in \mathcal{G}_p$'dir.

Eksponansiyel dönüşümü ile ilgili iki özellik aşağıda verilmiştir:
i) Bir $\gamma \in \mathcal{G}_p$ verildiğinde sıfırdan farklı öyle $k \in \mathbb{R}$'ler vardır ki $\sigma(s) := \gamma(ks)$ olarak tanımlanan (bu γ için bir parametre değişimidir) σ jeodeziği de $\mathcal{G}_p$'ye ait olur $\big($zaten her $k \in \mathbb{R}$ için $\sigma(0) = \gamma(k.0) = \gamma(0) = p$ sağlanıyor$\big)$. Dolayısıyla $\sigma'(0) \in \mathcal{D}_p$ teğet

vektörü "exp_p" dönüşümü altında

$$exp_p(\sigma'(0)) = \sigma(1) = \gamma(k.1) = \gamma(k) \tag{2.8}$$

dır. Öte yandan $\sigma'(s) = k\gamma'(ks)$ bulunur ve $\sigma'(0) = k\gamma'(0)$ olur. Bu durumda (2.8) eşitliğinden

$$exp_p(\sigma'(0)) = exp_p(k\gamma'(0)) = \gamma(k) \tag{2.9}$$

elde edilir.

ii) Bir $\gamma : [0,1] \subset I \to M$ jeodeziği verildiğinde $\gamma''(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$'dan dolayı her $t \in I$ için

$$\big(g(\gamma'(t), \gamma'(t))\big)(\gamma(t)) = g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = sabit = c \tag{2.10}$$

olur (bkz. [19], s. 116; [18], s. 65, Önerme 18). Dolayısıyla bu γ jeodeziğinin $\gamma(0) = p \in M$ ve $\gamma(1) \in M$ noktaları arasındaki yay uzunluğu ($\ell_{p,\gamma(1)}$)

$$\ell_{p,\gamma(1)} = \ell\big(\gamma|_{[0,1]}\big) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt = \sqrt{c} \tag{2.11}$$

dir. Ayrıca $t = 0$'da

$$g_{\gamma(0)}(\gamma'(0), \gamma'(0)) = g_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) = c \tag{2.12}$$

olmasından dolayı

$$\ell_{p,\gamma(1)} = \sqrt{c} = \sqrt{g_p(\gamma'(0), \gamma'(0))} = \|\gamma'(0)\|_p = \text{“}\gamma'(0)\text{ 'in } T_pM \text{ 'deki boyu”} \tag{2.13}$$

bulunur. Demek ki $exp_p(\gamma'(0)) = \gamma(1) \in M$ tanımından, "exp_p" dönüşümü altında $\gamma'(0) \in \mathcal{D}_p \subset T_pM$ teğet vektörünün gittiği $\gamma(1) \in M$ noktası öyle bir noktadır ki $\ell_{p,\gamma(1)} = \|\gamma'(0)\|_p$ eşitliği geçerli olur.

Teorem 2.1.6. *M Riemann manifoldu jeodezik olarak tam ise $\mathcal{D}_p = T_p(M)$'dir ([18], s. 71).*

Kanıt. M Riemann manifoldu jeodezik olarak tam olsun. Yani $I = \mathbb{R}$ olsun. $\mathcal{D}_p$ kümesinin tanımı gereği $\mathcal{D}_p \subset T_p(M)$ olduğu açıktır. Acaba $T_p(M) \subset \mathcal{D}_p$ midir? Bunu göstermek için herhangi bir $v_p \in T_p(M)$ teğet vektörünü alalım. v_p vektörü ile lineer bağımlı bir $z_p \in T_p(M)$ teğet vektörü alındığında, jeodeziklerin varlık-teklik teoreminden $\gamma(0) = p$ ve $\gamma'(0) = z_p$ olacak şekilde bir tek $\gamma : \mathbb{R} \to M$ jeodeziği vardır (Teorem 2.1.2). v_p ile z_p vektörleri lineer bağımlı olduklarından $v_p = kz_p = k\gamma'(0)$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{R}$ vardır. Şimdi $s \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sigma(s) := \gamma(ks)$ jeodeziğini tanımlayalım $\big($maksimal aralıklarımız $\mathbb{R}$ olduğu için her $k \in \mathbb{R}$ için $\sigma(s) := \gamma(ks)$ eşitliği anlamlıdır $\big)$. O halde $\sigma'(s) = k\gamma'(ks)$ olur ve $\sigma'(0) = k\gamma'(0) = v_p$ elde edilir. $\mathcal{D}_p$ kümesinin tanımı gereği $v_p \in \mathcal{D}_p$'dir. □

2.2. Riemann Manifoldlarında Metrik Yapı

Bağlantılı bir M Riemann manifoldu üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık kavramını vermek için öncelikle bu noktaları birleştiren eğri parçalarının yay uzunluğu formülünü vermeliyiz: $\gamma : [a, b] \to M$, M Riemann manifoldu üzerinde diferansiyellenebilir bir eğri parçası olmak üzere γ eğrisinin yay uzunluğu

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \qquad (2.14)$$

eşitliği ile tanımlıdır. Yay uzunluğu eğrinin yeniden parametrize edilmesi durumunda değişmemektedir. Böylece eğri birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrize edilebilir. Bu şekildeki eğrilere "*yay uzunluğu ile parametrize edilmiş eğriler*" denilmektedir. Her p, $q \in M$ nokta çifti için M Riemann manifoldu üzerindeki tüm diferansiyellenebilir eğri parçalarının kümesi

$$\Omega(p, q) = \{\gamma : [a, b] \to M,\ \gamma(a) = p,\ \gamma(b) = q\} \qquad (2.15)$$

olarak verilir. M manifoldu üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık, bu noktalardan geçen bütün eğrilerin uzunluklarının inflemumu olarak tanımlanmaktadır. Yani uzaklık fonksiyonu iki nokta arasındaki en kısa mesafeyi ölçmektedir. Bu fonksiyonun bir metrik olduğunu göstermeden önce bazı tanımları verelim:

Tanım 2.2.1. *Bir vektör uzayının bir S alt kümesi $\forall\ t \in [0,1]$ için*

$$v \in S \Rightarrow tv \in S \tag{2.16}$$

özelliğini sağlıyorsa bu küme 0 civarında yıldız şeklinde küme olarak adlandırılır ([18], s. 71).

Tanım 2.2.2. *$\widetilde{U}$, $T_p(M)$ teğet uzayının 0 noktasındaki yıldız şeklinde bir komşuluğu olsun. exp_p dönüşümü $\widetilde{U}$ komşuluğundan $p \in U \subset M$ komşuluğuna bir diffeomorfizm olmak üzere (bkz. [18], s. 71, Önerme 30) U komşuluğuna p noktasının bir normal komşuluğu denir ([18], s. 71).*

Tanım 2.2.3. *o noktası M Riemann manifoldu üzerinde bir nokta ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere*

$$\mathcal{N}_\varepsilon(o) = \{p \in M : d(o,p) < \varepsilon\} \tag{2.17}$$

kümesine $o \in M$ noktasının ε-komşuluğu denir ([18], s. 134).

Teorem 2.2.4. *p ve q noktaları bağlantılı M Riemann manifoldu üzerinde herhangi iki nokta olmak üzere*

$$\begin{aligned} d : M \times M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p,q) &\mapsto d(p,q) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \in \Omega(p,q)\} \end{aligned} \tag{2.18}$$

olarak tanımlanan Riemann uzaklık fonksiyonu aşağıdaki metrik aksiyomlarını sağlar ([18], s. 136):

i. $p \neq q \Rightarrow d(p,q) > 0$; $p = q \Leftrightarrow d(p,q) = 0$ *(pozitif tanımlılık),*

ii. $d(p,q) = d(q,p)$ *(simetri),*

iii. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ *(üçgen eşitsizliği).*

Kanıt. ***i***) $p \neq q$ olsun. M manifoldu Hausdorff olduğundan $q \notin U$ olacak şekilde $p \in M$ noktasının bir U normal komşuluğu vardır. Bu U normal komşuluğu p noktasının bir $\mathcal{N}_\varepsilon(p)$ ε-komşuluğunu içerir (bkz. [18], s. 134). ε-komşuluğu tanımından dolayı

$\widetilde{p} \in U$ noktaları için p noktasının ε-komşuluğu

$$\mathcal{N}_\varepsilon(p) = \{\widetilde{p} \in U : d(p, \widetilde{p}) < \varepsilon\} \tag{2.19}$$

kümesi ile verilir. Fakat, $q \in M$ ve $q \notin U$ olduğundan aynı zamanda $q \notin \mathcal{N}_\varepsilon(p)$ olur. q noktası $\mathcal{N}_\varepsilon(p)$ kümesinin elemanı olmadığı için $d(p,q) \geq \varepsilon > 0$ elde edilir.

ii) $\gamma : [a,b] \to M$ diferansiyellenebilir bir eğri parçası ($\gamma \in \Omega(p,q)$) ve h fonksiyonu

$$\begin{aligned} h : [a,b] &\rightarrow [a,b] \\ s &\mapsto h(s) = a + b - s \end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlı diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma} = \gamma \circ h : [a,b] &\rightarrow M \\ s &\mapsto \widetilde{\gamma}(s) = (\gamma \circ h)(s) = \gamma(h(s)) = \gamma(a + b - s) \end{aligned} \tag{2.21}$$

eğrisi γ eğrisinin bir yeniden parametrizasyonudur. Burada ayrıca

$$\widetilde{\gamma}(a) = \gamma(a + b - a) = \gamma(b) = q, \tag{2.22}$$

$$\widetilde{\gamma}(b) = \gamma(a + b - b) = \gamma(a) = p \tag{2.23}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $\widetilde{\gamma}$ eğrisi q noktasından p noktasına giden diferansiyellenebilir bir eğri parçasıdır. Şimdi $\widetilde{\gamma}$ eğrisinin uzunluğuna bakalım:

$$\begin{aligned} \ell(\widetilde{\gamma}) &= \int_a^b |\widetilde{\gamma}'(s)|\, ds = \int_a^b |(\gamma \circ h)'(s)|\, ds = \int_a^b |\gamma'(h(s)).h'(s)|\, ds \\ &= \int_a^b |-\gamma'(h(s))|\, ds = \int_a^b |\gamma'(h(s))|\, ds \end{aligned} \tag{2.24}$$

olmak üzere (2.24) eşitliğinde $h(s) = \tau$ değişken değişimi yapılırsa

$$\ell(\widetilde{\gamma}) = \int_a^b |\gamma'(h(s))|\, ds = -\int_b^a |\gamma'(\tau)|\, d\tau = \int_a^b |\gamma'(\tau)|\, d\tau = \ell(\gamma) \tag{2.25}$$

elde edilir. Bu durumda $\inf(\ell(\widetilde{\gamma})) = \inf(\ell(\gamma))$' dir. Yani $d(q,p) = d(p,q)$ elde edilir.

iii) $\gamma_1 \in \Omega(p,r)$ ve $\gamma_2 \in \Omega(r,q)$ olmak üzere $\gamma_1 : [a,c] \to M$, $\gamma_2 : [c,b] \to M$ eğrilerini alalım. Burada $c \in (a,b)$' dir. İnflemum tanımı gereği herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} d(p,r) &\leq \ell(\gamma_1) < d(p,r) + \varepsilon \\ d(r,q) &\leq \ell(\gamma_2) < d(r,q) + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.26}$$

eşitsizlikleri mevcuttur. $\gamma \in \Omega(p,q)$ eğrisi γ_1 ve γ_2 eğrilerinin birleşimi olarak alındığında

$$d(p,q) \leq \ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) < d(p,r) + d(r,q) + 2\varepsilon \tag{2.27}$$

elde edilir. $\varepsilon \to 0$ iken en fazla eşitlik durumu vardır. Sonuç olarak,

$$d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q) \tag{2.28}$$

dir. □

Tanım 2.2.5. *Bir Riemann manifoldu üzerinde p ve q noktalarını birleştiren bir σ eğri parçası $\ell(\sigma) = d(p,q)$ eşitliğini sağlarsa bu eğri parçası p noktasından q noktasına giden en kısa eğri parçasıdır. Böyle eğrilere "minimal eğri" (ya da segment) denilmektedir (Bu eğrilerden manifold üzerinde çok sayıda olabildiği gibi hiç olmayadabilir)([18], s. 136; [19], s. 123).*

Teorem 2.2.6. *$\gamma : [a,b] \to M$ eğri parçası M manifoldu üzerinde p ve q noktalarını birleştiren birim hızlı minimal bir eğri olmak üzere γ eğrisinin herhangi bir alt parçası da minimaldir ([18], s.136).*

Kanıt. Herhangi bir $t \in [a,b]$ alalım. $\gamma(a) = p$ ve $\gamma(b) = q$ olmak üzere uzaklık tanımından

$$d(p,\gamma(t)) \leq \ell(\gamma\mid_{[a,t]}) = \int_a^t |\gamma'(t)|\,dt = t - a \tag{2.29}$$

dir. Öte yandan γ eğrisi birim hızlı minimal eğri olduğundan

$$\begin{aligned} d(p,q) = \ell(\gamma) &= \int_a^t |\gamma'(t)|\,dt + \int_t^b |\gamma'(t)|\,dt \\ &\geq t - a + d(\gamma(t),q) \end{aligned} \tag{2.30}$$

dir. Buradan

$$d(\gamma(t), q) \leq d(p, q) - t + a \tag{2.31}$$

elde edilir. Ayrıca üçgen eşitsizliğinden

$$d(p, q) \leq d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) \tag{2.32}$$

yazılabilir. (2.31) eşitsizliği üçgen eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$d(p, q) \leq d(p, \gamma(t)) + d(p, q) - t + a \tag{2.33}$$

bulunur. Buradan

$$t - a \leq d(p, \gamma(t)) \tag{2.34}$$

dir. Böylece (2.29) ve (2.34) eşitsizliklerinden

$$d(p, \gamma(t)) = t - a \tag{2.35}$$

elde edilir. Bu durumda $\gamma\mid_{[0,t]}$ eğrisi bir minimal eğri parçası olur. □

Teorem 2.2.7. *M Riemann manifoldu üzerinde $p \in M$ noktasından $q \in M$ noktasına giden herhangi bir minimal eğri (segment) bir jeodeziktir ([18], s. 137; [19], s. 129).*

NOT: Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani, her jeodezik bir minimal eğri olmak zorunda değildir. Dolayısıyla biz minimal eğrilere yani segmentlere bu noktadan sonra "*minimal jeodezik*" diyeceğiz.

Şimdi Riemann geometrinin temel teoremlerinden birisi olan Hopf-Rinow teoremini ifade edelim:

Teorem 2.2.8 (Hopf-Rinow). *Bağlantılı bir M Riemann manifoldu için aşağıdaki koşullar denktir ([18], s. 138):*

1) M manifoldu metrik uzayı olarak tamdır, yani M üzerindeki her Cauchy dizisi yakınsaktır.

2) M manifoldu bir $p \in M$ noktasında jeodezik olarak tamdır, yani exp_p fonksiyonu $T_p(M)$ teğet uzayının tamamı üzerinde tanımlıdır.

3) M manifoldu jeodezik olarak tamdır.

4) M manifoldu Heine-Borel özelliğini sağlar, yani M manifoldunun her kapalı sınırlı alt kümesi kompakttır.

Kanıt. (4) $\Rightarrow$ (1): $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi M manifoldu üzerinde bir Cauchy dizisi olsun. O zaman $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlı olduğundan M manifoldunun bir alt kümesi tarafından içerilir. (4)'den dolayı M manifoldunun kapalı ve sınırlı alt kümeleri kompakt olduğundan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini içine alan kümenin kapanışı kompakttır. Kompakt kümelerde her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi olduğundan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi aynı zamanda bir Cauchy dizisi olduğundan kendisi de yakınsaktır. Bu şekilde M manifoldu üzerinde seçilen her Cauchy dizisi yakınsak olacağından M manifoldu metrik uzayı olarak tamdır.

(1) $\Rightarrow$ (3): M manifoldu metrik uzayı olarak tam olsun. $(a,b) = I \neq \mathbb{R}$, $b < \infty$ olacak şekilde, yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir $\gamma : I \to M$ maksimal jeodeziğini alalım. I aralığında artan bir dizi $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $j \to \infty$ iken $t_j \to b$ olsun. Bir metrik uzayda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisi olduğundan $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{R}$' de bir Cauchy dizisidir. Yani $\forall\ \varepsilon > 0$ için $k, j > N$ olmak üzere $|t_j - t_k| \to 0$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ vardır. γ birim hızlı olduğundan

$$d(\gamma(t_j), \gamma(t_k)) \leq \ell(\gamma\mid_{[t_i,t_k]}) = \int_{t_j}^{t_k} |\gamma'(t)|\, dt = |t_k - t_j| \to 0 \tag{2.36}$$

elde edilir. Bu ise $(\gamma(t_j))_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin M üzerinde bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (M,d) tam olduğundan her Cauchy dizisi yakınsaktır. Dolayısıyla $j \to \infty$ iken $\gamma(t_j) \to p$ olacak şekilde bir $p \in M$ noktası vardır. p noktasının bir U komşuluğunu alalım. Yeterince büyük $j \in \mathbb{N}$ için $\gamma(t_j) \in U$ ve $b - t_j < \varepsilon$ olsun. Jeodeziklerin varlık ve teklik teoreminden $\beta(0) = \gamma(t_j)$ ve $\beta'(0) = \gamma'(t_j)$ olacak şekilde M üzerinde bir tek $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ jeodeziği vardır. Öyle ki

$$\lim_{j\to\infty} \beta'(0) = \lim_{j\to\infty} \gamma'(t_j) \Rightarrow \beta'(0) = \gamma'(b) \tag{2.37}$$

dir. Tamlıktan dolayı $\beta'(0)$ iyi tanımlıdır. M tam olmasaydı p noktasına yaklaşmak mümkün olmazdı. $\gamma'(b)$ türevinin var olması, b noktasında sağ ve sol türevlerin var ve eşit olması demektir. Dolayısıyla β eğrisi b noktasını geçen değerler için de tanımlı olmalıdır. Aslında γ jeodeziğinin devamı şeklindedir. Yani, γ jeodeziği b noktasını geçen bir genişlemeye sahiptir. Ancak, jeodeziklerin tekliğinden ve γ maksimal jeodezik olduğundan bu durum I'nın maksimal aralık olması ile çelişir. Benzer şekilde γ jeodeziği soldan da genişletilebilir. γ jeodeziği bu şekilde genişletilmeye devam edildiğinde $I = \mathbb{R}$ elde edilir. Bu durumda M manifoldu jeodezik olarak tamdır.

(3) $\Rightarrow$ (2): M manifoldunun jeodezik olarak tam olması demek $\forall\, p \in M$ noktası için exp_p dönüşümünün $T_p(M)$ uzayının tamamı üzerinde tanımlı olması demektir. (2)'ye göre exp_p dönüşümü bazı p noktaları için $T_p(M)$ uzayının tamamı üzerinde tanımlıdır. Böylece $\forall\, p \in M$ noktası için sağlanan durum bazı $p \in M$ noktaları için zaten sağlanır.

(2) $\Rightarrow$ (4): Bir $p \in M$ noktası için exp_p dönüşümü $T_p(M)$ uzayının tamamı üzerinde tanımlı olsun. $K \subset M$ kapalı ve sınırlı bir alt küme olsun. Sınırlılıktan dolayı K kümesini içine alan bir $K \subset B(p,r) = \{x \in M : d(p,x) \leq r\}$ yuvarı vardır. $B(p,r)$ yuvarı $T_p(M)$ uzayındaki r-yarıçaplı kompakt yuvarın exp_p dönüşümü altındaki görüntüsüdür. Yani, $B(p,r) = exp_p(B(0,r))$' dir. exp_p dönüşümü bir difeomorfizm olduğundan $B(p,r)$ yuvarının kendisi de kompakttır. Bu durumda K kümesi kompakt bir kümenin kapalı alt kümesi olduğundan kompakttır. $\square$

Hopf-Rinow teoreminin önemli bir sonucu aşağıda verilmiştir:

Sonuç 2.2.9. *Bağlantılı bir M Riemann manifoldu tam ise M'nin herhangi iki noktası bir minimal jeodezik eğri parçası ile birleştirilebilir ([18], s. 138).*

Kanıt. $\mathcal{U} = \{q \in M : d(p,q) < \epsilon\}$, $p \in M$ noktasının bir normal ϵ-komşuluğu olsun. Eğer $q \in \mathcal{U}$ ise p noktasından q noktasına giden bir minimal jeodezik eğri vardır (bkz. [18], s. 134). O halde $q \notin \mathcal{U}$ olsun. Herhangi bir $0 < \delta < \epsilon$ için $T_p(M)$ teğet uzayındaki $\delta-$yarıçaplı kürenin görüntüsü p noktasındaki eksponansiyel dönüşüm altında $S_\delta = \{x \in M : d(p,x) = \delta\} \subset \mathcal{U}$ olacak şekilde bir kompakt kümedir. Yeterince küçük δ pozitif sabiti için bu küme bir küre olarak düşünülebilir (bkz. [18], s.

138). h fonksiyonu,

$$\begin{aligned} h : S_\delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto h(s) = d(s, q) \end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklinde tanımlanan sürekli bir fonksiyon olmak üzere S_δ kümesi kompakt olduğundan bir $m \in S_\delta$ minimum noktası vardır öyle ki

$$d(m, q) = \min \{d(x, q) : x \in S_\delta\} \tag{2.39}$$

dir. Burada amacımız; p noktasından m noktasına giden minimal jeodeziğin p noktasından q noktasına giden bir minimal jeodeziğe uzatılabileceğini göstermektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki iddiayı kanıtlayalım:

İddia: $d(p, m) + d(m, q) = d(p, q)$

Kanıt. $\alpha : [0, b] \rightarrow M$, $\alpha(0) = p$, $\alpha(b) = q$ olacak şekilde p noktasından q noktasına giden herhangi bir eğri olsun. $0 < a < b$ olmak üzere, α eğrisi böyle bir a değerinde S_δ kümesi ile karşılaşır. Yani $\alpha(a) \in \partial S_\delta$ 'dir. α eğrisinin $[0, a]$ ve $[a, b]$ aralıklarına kısıtlanmışları sırasıyla α_1 ve α_2 eğrileri olsun. Bu durumda

$$\ell(\alpha) = \ell(\alpha_1) + \ell(\alpha_2) \geq d(p, \alpha(a)) + d(\alpha(a), q) \tag{2.40}$$

dir. m noktası minimum nokta olduğundan

$$d(\alpha(a), q) \geq d(m, q) \tag{2.41}$$

eşitsizliği vardır. O halde yeterince küçük $\delta > 0$ için

$$\ell(\alpha) \geq d(p, m) + d(m, q) \tag{2.42}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı $\ell(\alpha)$ için bir alt sınırdır. Ancak alt sınırların en büyüğü değildir. Dolayısıyla uzaklık tanımı gereğince

$$\ell(\alpha) \geq d(p, q) \geq d(p, m) + d(m, q) \tag{2.43}$$

eşitsizliği vardır. Öte yandan, üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$d(p,q) \leq d(p,m) + d(m,q) \tag{2.44}$$

yazılır. Böylece son iki eşitsizlik birleştirildiğinde

$$d(p,q) = d(p,m) + d(m,q) \tag{2.45}$$

ifadesi elde edilir. $\square$

Şimdi başlangıç eğrisi $\gamma : [0,\delta] \to M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(\delta) = m$ olan birim hızlı bir $\gamma : [0,\infty) \to M$ jeodeziğini alalım. Hipotez gereği M manifoldu tam olduğundan γ eğrisi m noktasını geçecek şekilde genişletilebilir. γ eğrisinin p noktasından q noktasına giden bir minimal jeodezik olduğunu göstermemiz gerekiyor. Bunun için yeterince küçük t pozitif sayıları için

$$\mathcal{T} := \{t \in [0, d(p,q)] : d(p,q) = t + d(\gamma(t), q)\} \tag{2.46}$$

kümesini tanımlayalım. Eğer $d(p,q) \in \mathcal{T}$ olduğunu gösterirsek γ eğrisinin p noktasından q noktasına giden bir minimal jeodezik olduğunu göstermiş oluruz. Çünkü, $d(p,q) \in \mathcal{T}$ olursa $\mathcal{T}$ kümesinin tanımından

$$d(p,q) = d(p,q) + d(\gamma(d(p,q),q)) \tag{2.47}$$

yazılır. Buradan

$$d(\gamma(d(p,q),q)) = 0 \tag{2.48}$$

dır. Bu ise $\gamma(d(p,q)) = q$ olması ile mümkündür. Öte yandan, γ 'nın $[0, d(p,q)]$ aralığına kısıtlanmışı olan eğrinin uzunluğu

$$\ell(\gamma\,|_{[0,d(p,q)]}) = \int_0^{d(p,q)} |\gamma'(t)|\, dt = d(p,q) \tag{2.49}$$

dir. Yani $\gamma\,|_{[0,d(p,q)]}$ eğrisi minimaldir. Böylece p noktasından q noktasına giden birim hızlı minimal bir jeodezik bulunmuş olur. O halde $d(p,q) \in \mathcal{T}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\mathcal{T}$ kümesi kapalı ve boştan farklı olduğundan $t_0 \leq d(p,q)$ olacak şekilde bir en büyük elemana sahiptir. Eğer $t_0 = d(p,q)$ olursa $t_0 \in \mathcal{T}$ olduğundan $d(p,q) \in \mathcal{T}$ olur. Bu ise istenilen sonuçtur.

Varsayalım ki $t_0 < d(p,q)$ olsun. p noktası için alınan $\mathcal{U}$ komşuluğu gibi $\gamma(t_0)$ noktası için de bir $\mathcal{U}'$ normal komşuluğu alalım. p noktası için yapılan işlemler $\gamma(t_0)$ noktası için de tekrar edilirse $\delta' > 0$ için $\sigma : [0,\delta'] \to \mathcal{U}'$, $\sigma(0) = \gamma(t_0)$, $\sigma(\delta') = m'$ olacak şekilde birim hızlı bir minimal jeodezik eğri vardır. Öyle ki yukarıdaki iddia $\gamma(t_0)$ ve q noktalarına uygulandığında

$$d(\gamma(t_0), q) = d(\gamma(t_0), m') + d(m', q) \tag{2.50}$$

elde edilir. Ayrıca $t_0 \in \mathcal{T}$ olduğundan

$$d(p,q) = t_0 + d(\gamma(t_0), q) \tag{2.51}$$

dir. (2.50) denklemi (2.51) denkleminde yerine yazılırsa

$$d(p,q) = t_0 + d(\gamma(t_0), m') + d(m', q) \tag{2.52}$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(p,q) \leq d(p, m') + d(m', q) \tag{2.53}$$

dir. (2.52) eşitliği (2.53)'da yerine yazılırsa

$$t_0 + d(\gamma(t_0), m') + d(m', q) \leq d(p, m') + d(m', q) \tag{2.54}$$

ifadesi ve buradan da

$$t_0 + d(\gamma(t_0), m') \leq d(p, m') \tag{2.55}$$

bulunur. Tekrar üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$d(p, m') \leq d(p, \gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0), m') \tag{2.56}$$

elde edilir. γ birim hızlı eğri olduğundan $d(p, \gamma(t_0)) = t_0$'dır. (2.55) ve (2.56) eşitsizlikleri birlikte

$$d(p,m') = d(p,\gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0),m') = t_0 + d(\gamma(t_0),m') \tag{2.57}$$

eşitliğini verir. Böylece p noktasından $\gamma(t_0)$ noktasına giden $\gamma \mid_{[0,t_0]}$ jeodeziği ile $\gamma(t_0)$ noktasından m' noktasına giden σ jeodeziği birlikte bir minimal jeodezik oluştururlar. Yani bu iki eğrinin karşılaştıkları nokta olan $\sigma(0) = \gamma(t_0)$ noktasında eğriler diferansiyellenebilirdir (bkz. [18], s. 137). O zaman

$$m' = \sigma(d(\gamma(t_0),m')) = \gamma\big(t_0 + d(\gamma(t_0),m')\big) \tag{2.58}$$

dir. Bu durumda (2.52) denklemi tekrar yazıldığında

$$d(p,q) = t_0 + d(\gamma(t_0),m') + d(m',q) = t_0 + d(\gamma(t_0),m') + d\big(\gamma\big(t_0 + d(\gamma(t_0),m')\big),q\big) \tag{2.59}$$

elde edilir. Bu eşitlik $t_0 + d(\gamma(t_0),m') \in \mathcal{T}$ olduğunu gösterir. Bu t_0 'ın $\mathcal{T}$ kümesinin en büyük elemanı olması ile çelişir $\big(t_0 < t_0 + d(\gamma(t_0),m') \in \mathcal{T}\big)$. O halde t_0 en fazla $t_0 = d(p,q)$ olabilir. Bu da istenilen sonuçtur. □

2.3. Varyasyonel Hesaplamalar

Herhangi bir $\gamma \in \Omega(p,q)$ eğrisinin $E : \Omega(p,q) \to [0,\infty)$ enerji fonksiyoneli,

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b |\gamma'(t)|^2\, dt = \frac{1}{2}\int_a^b g(\gamma'(t),\gamma'(t))dt \tag{2.60}$$

şeklinde tanımlıdır. Varyasyonel hesaplamalarda $\ell(\gamma)$ yay uzunluğu fonksiyonelinin yerine $E(\gamma)$ enerji fonksiyoneli ile çalışılacaktır. Bunun nedeni; E 'nin kritik nokta teorisinin ℓ fonksiyonelininki ile çok yakından ilişkili olmasındandır. Ayrıca varyasyonel hesap işlemlerinde E fonksiyoneli ile çalışmak ℓ 'ye göre daha kolaydır. Burada öncelikle ℓ ve E fonksiyonellerinin aynı minimuma sahip olduklarını gösteren bir önerme verilecektir:

Önerme 2.3.1. *Sabit hızlı bir $\sigma \in \Omega(p,q)$ eğrisi $\ell : \Omega(p,q) \to [0,\infty)$ fonksiyonelini minimize ediyorsa aynı zamanda $E : \Omega(p,q) \to [0,\infty)$ fonksiyonelini de minimize eder. Tersine, $\sigma \in \Omega(p,q)$ eğrisi $E : \Omega(p,q) \to [0,\infty)$ fonksiyonelini minimize* *ediyorsa o zaman $\ell : \Omega(p,q) \to [0,\infty)$ fonksiyonelini de minimize eder ([19], s. 126).*

Kanıt. Buradaki işlemlerde E ve ℓ fonksiyonelleri için integral sınırlarının $a = 0$ ve $b = 1$ alınması kanıtın genelliğini bozmaz. Böylece $\gamma \in \Omega(p,q)$ herhangi bir eğri olmak üzere Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,.1\,dt &\leq \sqrt{\int_0^1 |\gamma'(t)|^2\,dt}\sqrt{\int_0^1 1^2\,dt} \\ &= \sqrt{\int_0^1 |\gamma'(t)|^2\,dt} \\ &= \sqrt{2E(\gamma)} \end{aligned} \tag{2.61}$$

bulunur. Eğer γ eğrisi $|\gamma'(t)| = c$ olacak şekilde sabit hızlı bir eğri ise yukarıdaki eşitsizlik eşitlik durumuna dönüşür, yani $\ell(\gamma) = \sqrt{2E(\gamma)}$ olur. Şimdi $\sigma \in \Omega(p,q)$, ℓ fonksiyonelini minimize eden sabit hızlı bir eğri olsun. $\gamma \in \Omega(p,q)$ herhangi bir eğri olmak üzere

$$E(\sigma) = \frac{1}{2}(\ell(\sigma))^2 \leq \frac{1}{2}(\ell(\gamma))^2 \leq E(\gamma) \tag{2.62}$$

dir. Böylece σ eğrisi E fonksiyonelini de minimize eder. Tersine $\sigma \in \Omega(p,q)$ eğrisi E fonksiyonelini minimize eden sabit hızlı bir eğri ve $\gamma \in \Omega(p,q)$ herhangi bir eğri olsun. Eğer γ sabit hızlı değilse eğrinin uzunluğu değişmeksizin γ eğrisi sabit hızlı bir $\tilde{\gamma}$ eğrisine yeniden parametrize edilebilir. Burada $\ell(\gamma) = \ell(\tilde{\gamma})$' dır. O halde

$$\ell(\sigma) \leq \sqrt{2E(\sigma)} \leq \sqrt{2E(\tilde{\gamma})} = \ell(\tilde{\gamma}) = \ell(\gamma) \tag{2.63}$$

elde edilir. Böylece σ eğrisi ℓ fonksiyonelini de minimize eder. □

Manifold tam olduğundan Hopf-Rinow teoreminin sonucundan (Sonuç (2.2.7)) biliyoruz ki manifold üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren birim hızlı bir σ minimal jeodeziği vardır. Öyleyse E'nin birinci varyasyonunu oluşturursak minimal jeodezik bu varyasyon ifadesini sıfır yapar. Bu minimal jeodezik E'nin ikinci varyasyonunda kullanıldığında ise sonuç negatif olmamalıdır. Bunları görmek için E'nin birinci ve ikinci varyasyon ifadelerini bulmalıyız:

2.3.1. Enerji fonksiyonelinin I. ve II. varyasyon formülleri

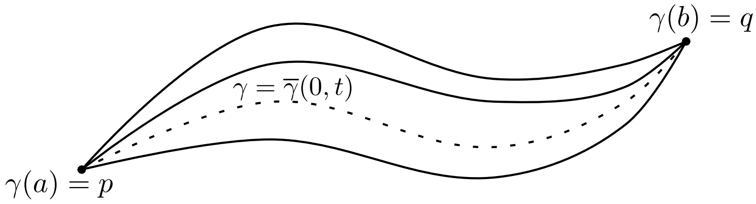
Tanım 2.3.2. *$\gamma : [a, b] \to M$ birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisi için*

$$\overline{\gamma}_0(t) \equiv \overline{\gamma}(0, t) = \gamma(t) \tag{2.64}$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} \overline{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] &\to M \\ (s, t) &\mapsto \overline{\gamma}(s, t) \end{aligned} \tag{2.65}$$

ile verilen diferansiyellenebilir dönüşüme γ eğrisinin bir varyasyonu denir [19].



Şekil 2.1. γ eğrisinin bir uygun varyasyonu

$[a, b]$ aralığından bir t elemanı alalım. O zaman $\overline{\gamma}_t : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ olacak şekilde alınan her bir t elemanı için $\overline{\gamma}_t$ eğrileri vardır. Bu eğrilerin hız vektörleri

$$V_t(s) := \frac{\partial \overline{\gamma}_t(s)}{\partial s} \tag{2.66}$$

dir. Herhangi bir $t \in [a, b]$ için $\overline{\gamma}_t$'nin bu hız vektörü "*varyasyon vektör alanı*" olarak isimlendirilir. Her $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ için $\overline{\gamma}(s, a) = \gamma(a)$ ve $\overline{\gamma}(s, b) = \gamma(b)$ ise γ 'nın varyasyonuna γ 'nın "*uygun varyasyonu*" denir (dikkat edilirse varyasyona ait tüm eğriler $\gamma(a) = p$ noktasından başlayıp $\gamma(b) = q$ noktasında biter). Ayrıca görülür ki $\overline{\gamma}$ varyasyonu, γ eğrisinin uygun bir varyasyonu ise $V_a(s) = V_b(s) = \mathbf{0}$'dır.

$\gamma : [a, b] \to M$ herhangi bir birim hızlı eğri olsun. γ eğrisinin herhangi bir varyasyonu $\overline{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ olarak verilsin. Birim hızlı γ eğrisinin varyasyon tanımı gereğince $(-\epsilon, \epsilon)$ aralığından alınan her s elemanı için

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}_s : [a, b] &\to M \\ t &\mapsto \overline{\gamma}_s(t) := \overline{\gamma}(s, t) \end{aligned} \tag{2.67}$$

olacak şekilde $\overline{\gamma}_s$ birim hızlı eğrileri vardır. Bu eğrilerin enerji fonksiyoneli

$$E(\overline{\gamma}_s) = \frac{1}{2}\int_a^b g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}_s(t)}{\partial t}, \frac{\partial\overline{\gamma}_s(t)}{\partial t}\right) dt \tag{2.68}$$

şeklindedir. Bu enerji fonksiyonelinin birinci varyasyon formülü aşağıdaki teorem ile verilir: **Not:** Teorem 2.3.3 ve Teorem 2.3.5'de (bu teoremlerin kullanıldıkları yerlerde de) denklemleri daha kısa yazmak için $\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}$ ve $\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}$ ifadeleri kullanılacaktır. Bu türev ifadeleri

$$\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s} = \frac{\partial\overline{\gamma}_t(s)}{\partial s} = V_t(s) \;\text{ ve }\; \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} = \frac{\partial\overline{\gamma}_s(t)}{\partial t} \tag{2.69}$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.3.3. *$\gamma : [a,b] \to M$ herhangi bir birim hızlı eğri olmak üzere γ eğrisinin bir varyasyonu $\overline{\gamma} : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ olsun. O zaman*

$$\frac{dE(\overline{\gamma}_s)}{ds} = -\int_a^b g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right) dt + g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\Big|_a^b \tag{2.70}$$

dir ([19], s. 127).

Kanıt. $\overline{\gamma}_s : [a,b] \to M$ eğrilerinin $\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}$ hız vektörleri $\overline{\gamma}_t : (-\epsilon,\epsilon) \to M$, $s \mapsto \overline{\gamma}_t(s)$ eğrisi üzerindeki vektör alanlarıdır. Dolayısıyla bir β eğrisi üzerindeki bir Z vektör alanının türevi $Z' = \nabla_{\beta'}Z$ olduğundan (bkz. [18], s. 65) (2.68) eşitliği ile verilen enerji fonksiyonelinin birinci türevi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\frac{dE(\overline{\gamma}_s)}{ds} &= \frac{d}{ds}\frac{1}{2}\int_a^b g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d}{ds} g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \left[g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\right] dt \\
&= \int_a^b g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right) dt \\
&= \int_a^b g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right) dt
\end{aligned} \tag{2.71}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikte $\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}$ ifadesi (bkz. [9], s. 97; [18], s.

123) kullanılmıştır. Buradan enerji fonksiyonelinin birinci varyasyonu

$$
\begin{aligned}
\frac{dE(\overline{\gamma}_s)}{ds} &= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} g\left(\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial t} \right) - g\left(\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial t} \right) \right] dt \\
&= g\left(\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial t} \right) \Bigg|_a^b - \int_a^b g\left(\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial t} \right) dt \qquad (2.72)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. □

Hopf-Rinow teoremi ile var olduğunu bildiğimiz σ minimal jeodeziğinin varyasyonunu ele alırsak aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

Önerme 2.3.4. *$\sigma \in \Omega(p,q)$ birim hızlı minimal bir jeodezik olsun. σ'nın bir varyasyonu ve bu varyasyonun $E(\overline{\gamma}_s)$ enerji fonksiyoneli alınırsa*

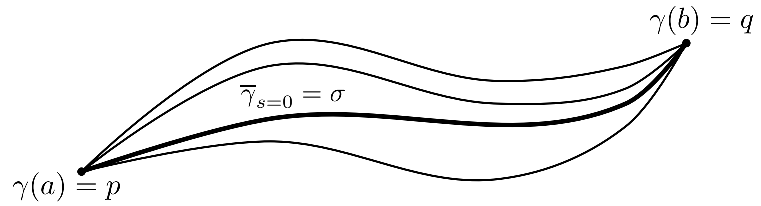
$$
\left.\frac{dE(\overline{\gamma}_s)}{ds}\right|_{s=0} = 0 \qquad (2.73)
$$

olur ([19], s. 128).

Kanıt. Enerji fonksiyonelinin birinci varyasyonu olan $\frac{dE(\overline{\gamma}_s)}{ds}$ ifadesinde $s=0$ alındığında $\overline{\gamma}_{s=0} = \sigma$ olduğundan (varyasyon tanımından) ve σ birim hızlı minimal jeodezik olduğu için

$$
\left.\frac{dE(\overline{\gamma}_s)}{ds}\right|_{s=0} = 0
$$

dir (bkz. Şekil 2.2). □



Şekil 2.2. σ birim hızlı minimal jeodeziğinin bir uygun varyasyonu

Hopf-Rinow teoremi ile var olduğunu bildiğimiz minimal jeodezik E enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyonunda kullanıldığında sonucun negatif olmaması gerektiğini daha önce belirtmiştik. Dolayısıyla E enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyon ifadesine ihtiyaç vardır:

Teorem 2.3.5. *$\gamma : [a,b] \to M$ eğrisi $\gamma(a) = p$ noktasından $\gamma(b) = q$ noktasına giden birim hızlı bir jeodezik eğri olmak üzere γ eğrisinin bir varyasyonu $\overline{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ olsun. O zaman enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyonu*

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\right|_{s=0} &= \left.\left[\int_a^b g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}\right) dt - \int_a^b g\left(R\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}\right) dt\right]\right|_{s=0} \\ &+ \left.\left(\left. g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\right|_a^b\right)\right|_{s=0} \end{aligned} \tag{2.74}$$

dir. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\right|_{s=0} &= \left.\left[\int_a^b g\left(\nabla_{\gamma'(t)}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\gamma'(t)}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}\right) dt - \int_a^b g\left(R\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \gamma'(t)\right)\gamma'(t), \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}\right) dt\right]\right|_{s=0} \\ &+ \left.\left(\left. g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \gamma'(t)\right)\right|_a^b\right)\right|_{s=0} \end{aligned} \tag{2.75}$$

olarak da yazılabilir. Burada $\dfrac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s} = V_t(s)$'dir. $s = 0$'da $\left.\dfrac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}\right|_{s=0} = V_t(0)$ olur ([19], s. 158).

Kanıt. Enerji fonksiyonelinin birinci varyasyon formülü

$$\frac{dE(\overline{\gamma}_s)}{ds} = -\int_a^b g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right) dt + \left. g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\right|_a^b \tag{2.76}$$

olarak hesaplanmıştı. Şimdi bu formül üzerinden tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2} &= -\frac{d}{ds}\int_a^b g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right) dt + \frac{d}{ds} \left. g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\right|_a^b \\ &= -\int_a^b \left[g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\right] dt \\ &+ \left. g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\right|_a^b + \left. g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\right|_a^b \end{aligned} \tag{2.77}$$

elde edilir. γ bir jeodezik ve $s = 0$ için $\overline{\gamma}(0,t) = \gamma(t)$ olduğundan

$$\left.\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right|_{s=0} = \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0 \tag{2.78}$$

eşitliği vardır. Bu eşitlikten dolayı yukarıdaki integral içindeki ilk terim $s = 0$ için sıfır olur. O halde,

$$\left.\frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\right|_{s=0} = \Bigg[-\int_a^b g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)dt + g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\Bigg|_a^b + g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\Bigg|_a^b\Bigg]\Bigg|_{s=0} \tag{2.79}$$

elde edilir. $\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}$ olduğundan (bkz. [9], s. 97; [18], s. 123)

$$\left[\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right] = \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} - \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s} = 0 \tag{2.80}$$

olur. (2.80) eşitliğinden dolayı (2.1) denklemi ile tanımlı Riemann eğrilik tensörü $\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}$ ve $\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} &= \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} - \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} - \nabla_{\left[\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right]}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} \\ &= \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} - \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.81}$$

şeklindedir. Buradan

$$\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} = R\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} + \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} \tag{2.82}$$

eşitliği yazılabilir. Böylece (2.82) ifadesi (2.79) integralinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\right|_{s=0} &= \Bigg[-\int_a^b g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, R\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} + \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)dt \\ &+ g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\Bigg|_a^b + g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\Bigg|_a^b\Bigg]\Bigg|_{s=0} \\ &= \Bigg[-\int_a^b g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, R\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)dt - \int_a^b g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)dt \\ &+ g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\Bigg|_a^b + g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\Bigg|_a^b\Bigg]\Bigg|_{s=0} \end{aligned} \tag{2.83}$$

elde edilir. (2.83) denkleminin sağ tarafında bulunan ikinci integral ifadesi

$$\begin{aligned}\int_a^b g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)dt &= \int_a^b \frac{d}{dt}g\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)dt \\ &- \int_a^b g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)dt \qquad (2.84)\end{aligned}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Bu eşitlik (2.83) denkleminde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\right|_{s=0} &= \left.\left[\int_a^b g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}\right)dt - \int_a^b g\left(R\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}\right)dt\right]\right|_{s=0} \\ &+ \left.\left(g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right)\Big|_a^b\right)\right|_{s=0} \qquad (2.85)\end{aligned}$$

elde edilir. (2.85) denklemindeki ilk integral teriminde $\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}$ eşitliği (bkz. [9], s. 97; [18], s. 123) kullanılmıştır. Ayrıca teoremde verilen $\overline{\gamma}$ varyasyonu için varyasyon tanımından $s = 0$'da $\overline{\gamma}(0,t) = \gamma(t)$ olduğundan (2.85) denklemindeki $\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}$ ifadeleri $s = 0$'da

$$\left.\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial\overline{\gamma}_s(t)}{\partial t}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial\overline{\gamma}(s,t)}{\partial t}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial\overline{\gamma}(0,t)}{\partial t}\right|_{s=0} = \frac{\partial\gamma(t)}{\partial t} = \gamma'(t) \qquad (2.86)$$

olur. Bu yüzden (2.85) eşitliği

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\right|_{s=0} &= \left.\left[\int_a^b g\left(\nabla_{\gamma'(t)}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \nabla_{\gamma'(t)}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}\right)dt - \int_a^b g\left(R\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \gamma'(t)\right)\gamma'(t), \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}\right)dt\right]\right|_{s=0} \\ &+ \left.\left(g\left(\nabla_{\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}}\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}, \gamma'(t)\right)\Big|_a^b\right)\right|_{s=0} \qquad (2.87)\end{aligned}$$

olarak yazılır. □

Enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyonundan ve eğriliklerden yararlanılarak tam Riemann manifoldlar için bazı kompaktlık teoremleri kanıtlanmıştır. Şimdiki kısımda bu kompaktlık teoremleri verilecektir.

2.4. İkinci Varyasyon Formülü Yardımıyla Elde Edilen Kompaktlık Teoremleri

Kompaktlık kavramı Riemann manifoldlarında temel bir kavram olmasına karşın bunun geometrik argümanlarla ilişkilendirilerek çalışılması oldukça ilginçtir. Bu konuyla ilgili en iyi bilinen çalışmaların başında 1941 yılında Myers'ın yapmış olduğu bir kompaktlık teoremi yer almaktadır [16]. Myers teoreminde, M Riemann manifoldunun

$$\mathrm{diam}(M) = \sup\{d(p,q) : p,q \in M\} \tag{2.88}$$

olarak tanımlanan (bkz. [18], s. 279) çapına da bir üst sınır getirmiştir:

Teorem 2.4.1 (Myers, 1941). *(M,g) n-boyutlu bir tam Riemann manifold olmak üzere her k pozitif sabiti için*

$$\mathrm{Ric} \geq (n-1)k > 0 \tag{2.89}$$

olsun. O zaman M manifoldu kompakttır ve manifoldun çapı

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}} \tag{2.90}$$

dır.

Kanıt. M manifoldu üzerinde herhangi iki nokta p ve q olsun. γ eğrisi,

$$\gamma : [0,\ell] \to M, \quad \gamma(0) = p,\ \gamma(\ell) = q \tag{2.91}$$

olacak şekilde p ve q noktalarını birleştiren ℓ uzunluklu birim hızlı bir minimal jeodezik eğri olsun $\big($$M$ manifoldu tam olduğundan Sonuç 2.2.7 'den böyle bir jeodeziğin varlığını biliyoruz$\big)$. γ eğrisinin $(n-1)$-tane uygun varyasyonunu ($i = 2, ..., n$ olmak üzere)

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}_i : (-\epsilon,\epsilon) \times [0,\ell] \ &\to\ M \\ (s,t)\ &\mapsto\ \overline{\gamma}_i(s,t) = \Big(s \sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)\phi_i^1(t), ..., s\sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)\phi_i^n(t)\Big) + \gamma(t) \end{aligned} \tag{2.92}$$

olarak alalım. Dikkat edilirse $s = 0$ noktasında $\overline{\gamma}_i(0,t) = \gamma(t)$ olur. Ayrıca uç noktaları varyasyonda yerine koyarsak $\overline{\gamma}_i(s,0) = \gamma(0) = p$ ve $\overline{\gamma}_i(s,\ell) = \gamma(\ell) = q$ elde edilir. Yani yapılan seçim uygun varyasyon tanımına uymaktadır. Bu seçim altında $\overline{\gamma}_i$ varyasyonlarının s değişkenine göre türevi alınırsa varyasyon vektör alanlarımız

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\gamma}_i}{\partial s} = (V_i)_t(s) &= \Big(\sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)\phi_i^1(t), ..., \sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)\phi_i^n(t)\Big) \\
&= \sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)\Big(\phi_i^1(t), ..., \phi_i^n(t)\Big) \\
&= \sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)E_i(t)
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

olarak elde edilir. $(\phi_i^1(t), ..., \phi_i^n(t))$ ifadesi $E_i(t)$ ortonormal çatı alanlarına karşılık gelecek şekilde seçilmiştir. Ayrıca görülüyor ki $(V_i)_0(s) = (V_i)_\ell(s) = 0$ eşitliği sağlanmaktadır.

NOT: Açık bir örnek $\mathbb{R}^3$ üzerinde şöyle verilebilir: $\psi(t)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\psi(a) = \psi(b) = 0$ olsun $\big($mesela $\psi(t) = (t-a)(t-b)\big)$. $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eğrisi alalım. β 'nın varyasyonları aşağıdaki gibi verilsin:

$$
\begin{aligned}
\overline{\beta}_1 : (-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] &\to \mathbb{R}^3 \\
(s,t) &\mapsto \overline{\beta}_1(s,t) = \psi(t)(s\sin(t), s\cos(t), 0) + \beta(t) \\
\overline{\beta}_2 : (-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] &\to \mathbb{R}^3 \\
(s,t) &\mapsto \overline{\beta}_2(s,t) = \psi(t)(-s\cos(t), s\sin(t), 0) + \beta(t) \\
\overline{\beta}_3 : (-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] &\to \mathbb{R}^3 \\
(s,t) &\mapsto \overline{\beta}_3(s,t) = \psi(t)(0, 0, s) + \beta(t)
\end{aligned}
\tag{2.94}
$$

Bu varyasyonlara bakıldığında $s = 0$ için her birinin $\overline{\beta}_i(0,t) = \beta(t)$ olduğu görülür. Öte yandan $\psi(a) = \psi(b) = 0$ olduğundan $\overline{\beta}_i(s,a) = \beta(a)$ ve $\overline{\beta}_i(s,b) = \beta(b)$ 'dir. Yani seçilen varyasyonlar gerçekten uygun varyasyonlardır. Bu durumda s değişkenine göre türev alınırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\beta}_1}{\partial s} &= (V_{\beta_1})_t(s) = \psi(t)\big(\sin(t), \cos(t), 0\big) = \psi(t)E_1(t) \\
\frac{\partial \overline{\beta}_2}{\partial s} &= (V_{\beta_2})_t(s) = \psi(t)\big(-\cos(t), \sin(t), 0\big) = \psi(t)E_2(t) \\
\frac{\partial \overline{\beta}_3}{\partial s} &= (V_{\beta_3})_t(s) = \psi(t)\big(0, 0, 1\big) = \psi(t)E_3(t)
\end{aligned} \tag{2.95}
$$

olur. Dikkat edilirse $\{E_1, E_2, E_3\} = \{(\sin(t), \cos(t), 0), (-\cos(t), \sin(t), 0), (0, 0, 1)\}$ vektör alanlarının ortonormal olduğu görülür.

Enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyonundan faydalanalım. Teorem 2.3.5'deki (2.75) ile verilen ikinci varyasyon formülünde $\dfrac{\partial \overline{\gamma}}{\partial s} = V_t(s)$ olduğu teoremde belirtilmişti. Öyleyse yukarıda verilen $\overline{\gamma}_i$ uygun varyasyonlarının enerji fonksiyonellerinin ikinci varyasyon ifadeleri taraf tarafa toplanırsa (yani i üzerinden toplam alınırsa) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2 E_i(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} &= \left(\sum_{i=2}^{n} \int_0^{\ell} g\Big(\nabla_{\gamma'(t)}(V_i)_t(s), \nabla_{\gamma'(t)}(V_i)_t(s)\Big)dt\right)\bigg|_{s=0} \\
&- \left(\sum_{i=2}^{n} \int_0^{\ell} g\Big(R\big((V_i)_t(s), \gamma'(t)\big)\gamma'(t), (V_i)_t(s)\Big)dt\right)\bigg|_{s=0} \\
&+ \left(\sum_{i=2}^{n} g\left(\nabla_{(V_i)_t(s)}(V_i)_t(s), \gamma'(t)\right)\bigg|_0^{\ell}\right)\bigg|_{s=0}
\end{aligned} \tag{2.96}
$$

Burada uygun varyasyonlar alındığı için uç noktalarda $(V_i)_0(s) = (V_i)_\ell(s) = 0$ olur. Dolayısıyla yukarıdaki integralin son terimi sıfıra eşittir. $(V_i)_t(s) = \sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)E_i(t)$ ifadesi (2.96) denkleminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2 E_i(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} &= \sum_{i=2}^{n} \int_0^{\ell} g\Big(\nabla_{\gamma'(t)} \sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)E_i(t), \nabla_{\gamma'(t)} \sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)E_i(t)\Big)dt \\
&- \sum_{i=2}^{n} \int_0^{\ell} g\Big(R\big(\sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)E_i(t), \gamma'(t)\big)\gamma'(t), \sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)E_i(t)\Big)dt
\end{aligned} \tag{2.97}
$$

bulunur. (2.92) ile verilen $\overline{\gamma}_i$ varyasyon seçimimizden dolayı, (2.93)'de elde edilen $(V_i)_t(s)$ varyasyon vektör alanlarımız s değişkenine bağlı değildir. Bu sebepten, (2.97) eşitliğinin sağ tarafında "$|_{s=0}$" notasyonuna gerek kalmamıştır. E_i vektör alanlarının paralelliğinden dolayı $\nabla_{\gamma'(t)}E_i(t) = 0$ olduğundan integral içerisindeki $\nabla_{\gamma'(t)} \sin\big(\frac{\pi}{\ell}t\big)E_i(t)$ teriminin eşiti

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'(t)} \sin\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)E_i(t) &= [\frac{d}{dt}\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)]E_i(t) + \sin\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)\nabla_{\gamma'(t)}E_i(t) \\ &= [\frac{d}{dt}\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)]E_i(t) + 0 \end{aligned} \tag{2.98}$$

şeklindedir. Bu ifade (2.97) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E_i(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} &= \sum_{i=2}^{n}\int_0^{\ell} g\Big([\frac{d}{dt}\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)]E_i(t), [\frac{d}{dt}\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)]E_i(t)\Big)dt \\ &- \int_0^{\ell}\sin^2\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)\mathrm{Ric}(\gamma'(t),\gamma'(t))dt \end{aligned} \tag{2.99}$$

elde edilir. Yukarıda $g(R(\gamma',\gamma')\gamma',\gamma') = 0$ eşitliği kullanılmıştır. Ayrıca teoremde verilen (2.89) varsayımı (2.99) denkleminde kullanılırsa

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E_i(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} \leq \int_0^{\ell}[\frac{d}{dt}\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)]^2\sum_{i=2}^{n} g(E_i(t),E_i(t))dt - (n-1)k\int_0^{\ell}\sin^2\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)dt \tag{2.100}$$

elde edilir. $\sum_{i=2}^{n} g(E_i(t),E_i(t)) = n-1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E_i(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} &\leq (n-1)\frac{\pi^2}{\ell^2}\int_0^{\ell}\cos^2\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)dt - (n-1)k\int_0^{\ell}\sin^2\Big(\frac{\pi}{\ell}t\Big)dt \\ &= \frac{(n-1)}{2\ell}[\pi^2 - k\ell^2] \end{aligned} \tag{2.101}$$

bulunur. Varsayalım ki (2.101) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terim

$$\pi^2 - k\ell^2 < 0 \tag{2.102}$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E_i(\overline{\gamma}_s)}{ds^2} < 0 \tag{2.103}$$

olur. Ancak bu bir çelişkidir. Çünkü biliyoruz ki γ jeodeziği minimal olduğundan her uygun varyasyon için $E(\overline{\gamma}_s)$ enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyonları ayrı ayrı $\dfrac{d^2E_i(\overline{\gamma}_s)}{ds^2} \geq 0$ olur. Bu yüzden yukarıdaki toplamları da

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E_i(\overline{\gamma}_s)}{ds^2} \geq 0 \tag{2.104}$$

olmalıdır. O halde (2.102) eşitsizliği geçerli olamaz.

$$\pi^2 - k\ell^2 \geq 0 \tag{2.105}$$

şeklinde olması gerekir. Buradan

$$\ell \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}} \tag{2.106}$$

sonucu bulunur. Herhangi iki $p, q \in M$ noktaları için (2.106) var olduğundan M manifoldu sınırlıdır. Manifoldun tam olduğu teoremde verildiğinden Hopf-Rinow teoremindeki (4). maddeden dolayı manifold kompakttır. $\square$

Burada *"Myers'ın teoreminde manifoldun çapı için bulunan üst sınır eşitlik durumunda nasıl bir sonuç verir?"* sorusunun akla geliyor olması çok doğaldır. 1975 yılında Cheng bu sorunun yanıtını aşağıdaki teorem ile vermiştir [5]:

Teorem 2.4.2 (Cheng, 1975). (M, g) *n-boyutlu bir tam Riemann manifold olmak üzere*

$$\mathrm{Ric} \geq (n-1)k > 0 \tag{2.107}$$

ve $\mathrm{diam}(M) = \dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$ *ise o zaman* M *manifoldu* S_k^n *küreye izometriktir.*

Literatürde Myers'ın teoremi pek çok açıdan ele alınarak geliştirilmiştir. Orijinal Ricci eğrilik tensörü için elde edilen sonuçlar modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörleri için de çalışılmaktadır. Bu çalışmalardan bahsetmeden önce öncelikle bazı modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörlerini tanıtalım:

i. $\widehat{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric} + \mathcal{L}_V g$,

ii. $\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f$ (Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü), *iii.* $\mathrm{Ric}_h^\alpha = \mathrm{Ric} - \mathrm{Hess}h - \dfrac{1}{\alpha} dh \otimes dh$ (α-Ricci eğrilik tensörü, $\alpha > 0$),

iv. $\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_V g - kV^* \otimes V^*$,

v. $\mathrm{Ric}_Z^m := \mathrm{Ric} - (\nabla Z)^\flat - \dfrac{1}{m-n} Z \otimes Z \quad (m \geq n)$,

vi. $\mathrm{Ric}_{f,m} = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}f - \dfrac{\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f}{m-n}$ ($m-$Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü, $m \geq n$).

Modifiye edilmiş bu eğrilik tensörlerinden (*iii*) numaralı α-Ricci eğrilik tensörü ilk kez 1997 yılında Qian tarafından tanımlanmıştır. Bu tensör Qian eğrilik tensörü olarak da bilinir. Qian çalışmasında bu eğrilik tensörü üzerine bir varsayımda bulunarak bir kompaktlık teoremi elde etmiştir [20]. Bu teorem aşağıda yer almaktadır:

Teorem 2.4.3 (Qian, 1997). *(M, g) n-boyutlu bir tam ve bağlantılı Riemann manifold olsun. $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve α, C pozitif sabitler olmak üzere*

$$\mathrm{Ric} - \mathrm{Hess}h - \frac{1}{\alpha} dh \otimes dh \geq (n-1)C > 0 \tag{2.108}$$

olsun. Bu durumda M manifoldu kompakttır ve manifoldun çapı

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{(n-1)C}} \sqrt{n + \alpha - 1} \tag{2.109}$$

dir.

2009 yılında Ruan yukarıdaki Qian'ın teoremini bir adım daha ileri taşıyarak eşitlik durumunun küre olduğunu elde etmiştir [21]. Ruan'ın teoreminde $\alpha = m - n$ ve $(n-1)C = (m-1)K$ alınmıştır. Böylece Qian'ın manifoldun çapı için bulduğu sınır $\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ şeklini almaktadır. Ruan'ın teoremi şu şekildedir:

Teorem 2.4.4 (Ruan, 2009). *(M, g) bir tam Riemann manifold olmak üzere*

$$\widetilde{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric} - \nabla\nabla h - \frac{1}{m-n} \nabla h \otimes \nabla h \geq (m-1)kg > 0 \tag{2.110}$$

ve

$$\mathrm{diam}(M) = \frac{\pi}{\sqrt{k}} \tag{2.111}$$

olsun. O zaman M manifoldu S_k^n küreye izometriktir. Dahası, burada h fonksiyonu $h(x) = (m-n)\ln \frac{\sin\sqrt{k}r}{\sqrt{k}}$ şeklinde tanımlı olup r fonksiyonu küre üzerinde tanımlı bir uzaklık fonksiyonudur.

Bu teoremde $m = n$ olduğunda $h \equiv 0$ ve $\widetilde{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric}$ olduğu görülmektedir. Böylece teorem Cheng'in küre teoremine indirgenmiş olur.

Modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörleri içerisinde en çok Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü olarak bilinen $\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f$ eğrilik tensörü dikkat çekmektedir. Bakry ve Emery bu tensörün difüzyon işlemleriyle ilişkisini geniş bir şekilde çalışmışlardır [2]. Ayrıca bu tensör çoğu farklı konuda doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Bazı λ sabitleri için $\mathrm{Ric}_f = \lambda g$ ile verilen denklem gradient Ricci soliton denklemi olarak bilinir. Bu denklem Ricci akış teorisinde önemli bir role sahiptir.

Şimdi modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörleri kullanılarak elde edilen bazı kompaktlık teoremlerini verelim. Bu teoremlerden birisi Fernández-López ve García-Río tarafından 2008 yılında elde edilmiştir [6]. Şöyle ki:

Teorem 2.4.5 (FL-GR, 2008). *(M, g) n-boyutlu bir tam Riemann manifold olsun. Bir V diferansiyellenebilir vektör alanı*

$$\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_V g \geq (n-1)C > 0 \tag{2.112}$$

ve $|V| \leq \gamma$ eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda M manifoldu kompakttır.

Daha sonra [11] numaralı çalışmada yukarıdaki teoremdeki Riemann manifoldunun çapına

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{(n-1)C}\left(\sqrt{2}\gamma + \sqrt{2\gamma^2 + (n-1)^2 C}\right) \tag{2.113}$$

şeklinde bir üst sınır bulunmuştur. 2009 yılında Wei ve Wylie tarafından elde edilen kompaktlık teoremi aşağıdaki gibidir [25]:

Teorem 2.4.6 (Wei-Wylie, 2009). *(M, g) tam ve bağlantılı n-boyutlu bir Riemann manifold ($n \geq 2$) olmak üzere*

$$\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f \geq (n-1)H \tag{2.114}$$

ve $|f| \leq k$ ise M manifoldu kompakttır ve manifoldun çapı

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} + \frac{4k}{(n-1)\sqrt{H}} \tag{2.115}$$

dir.

Limoncu'nun (iv) numaralı modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörünü kullanarak elde ettiği kompaktlık teoremi ise şu şekildedir [11]:

Teorem 2.4.7 (Limoncu, 2010). *(M, g) n-boyutlu bir tam Riemann manifold olsun. $k > 0$ olmak üzere bir V diferansiyellenebilir vektör alanı için*

$$\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_V g - kV^* \otimes V^* \geq (n-1)C > 0 \tag{2.116}$$

olsun. Bu durumda M manifoldu kompakttır ve manifoldun çapı

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{(n-1)C}} \sqrt{n - 1 + \frac{4}{k}} \tag{2.117}$$

dir.

Teorem 2.4.7'de V vektör alanı herhangi bir diferansiyellenebilir vektör alanı olup bir fonksiyonunun gradyantından gelmek zorunda değildir.

2012 yılında Limoncu yukarıda Wei ve Wylie tarafından elde edilen Teorem 2.4.6'daki aynı varsayımları kullanarak manifoldun çapı için elde edilen (2.115) üst sınırı ile karşılaştırılabilir bir sonuç bulmuştur [12]. Bu teorem aşağıda yer almaktadır:

Teorem 2.4.8 (Limoncu, 2012). *(M, g) tam ve bağlantılı n-boyutlu bir Riemann manifold ($n \geq 2$) olmak üzere*

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\phi \geq (n-1)H > 0 \tag{2.118}$$

ve $|\phi| \leq k$ ise M manifoldu kompakttır ve manifoldun çapı

$$\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}\sqrt{1+\frac{2\sqrt{2}k}{n-1}} \tag{2.119}$$

dir.

(2.119) üst sınırında k pozitif sabiti için

$$k > \frac{(n-1)\pi}{8}(\sqrt{2}\pi - 4) \tag{2.120}$$

eşitsizliği sağlandığında manifoldun çapı için bulunan üst sınır (2.115) üst sınırından daha keskin olmaktadır. Limoncu'nun bulmuş olduğu sonucu, 2016 yılında Tadano bir adım daha geliştirerek aşağıdaki teoremi elde etmiştir [23].

Teorem 2.4.9 (Tadano, 2016). *(M, g) tam ve bağlantılı n-boyutlu bir Riemann manifold ($n \geq 2$) olmak üzere*

$$\operatorname{Ric} + \operatorname{Hess} f \geq (n-1)Hg > 0 \tag{2.121}$$

ve $|f| \leq k$ ise M manifoldu kompakttır ve manifoldun çapı

$$\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}\sqrt{1+\frac{8k}{(n-1)\pi}} \tag{2.122}$$

dir.

Bu üst sınır k pozitif sabitine herhangi bir kısıt koymaksızın (2.115) üst sınırından daha keskindir.

1982 yılında Cheeger, Gromov ve Taylor'un yaptıkları çalışmada orijinal Ricci varsayımının ilk kez bir yuvar ($\forall\ r \geq r_0 > 0$) dışında kabul edildiği görülmektedir. Ayrıca varsayımın içinde $r(x) = d(p, x)$ uzaklık fonksiyonu da yer almaktadır [4].

Teorem 2.4.10 (CGT, 1982). *(M, g) n-boyutlu bir tam Riemann manifold ve $p \in M$ noktası belirlenmiş bir nokta olmak üzere $\forall\ r \geq r_0 > 0$ ve $\nu > 0$ için*

$$\operatorname{Ric}_M(x) \geq (n-1)\frac{\left(\frac{1}{4}+\nu^2\right)}{r^2} \tag{2.123}$$

olsun. O zaman M manifoldu kompakttır ve p noktasından olan çap

$$d_p < r_0 e^{\pi/\nu} \tag{2.124}$$

şeklindedir. Burada $r(x) = d(x,p)$ ile tanımlı $r : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, belirlenmiş $p \in M$ noktasından olan uzaklık fonksiyonudur.

Kanıt. q, M üzerinde bir nokta olmak üzere σ, p ile q noktalarını birleştiren ℓ uzunluklu birim hızlı bir minimal jeodezik eğri parçası olsun. Öyle ki $\sigma(0) = p$, $\sigma(\ell) = q$ ve $\ell > r_0$ dir. Ayrıca μ bir pozitif sabit olmak üzere ℓ uzunluğunu

$$\ell = r_0 e^{\mu\pi} > r_0. \tag{2.125}$$

olacak şekilde parametrize edelim. Gerçekte, her ℓ için $\mu = \frac{1}{\pi}\ln(\frac{\ell}{r_0})$ olacak şekilde bir μ sayısı bulunabilir. Birim hızlı bir minimal jeodezik eğri parçasının her alt parçası da bir minimal jeodezik eğri olduğundan eğri üzerinde öyle bir $\tilde{q}$ noktası vardır ki $d(\tilde{q},p) = d(p,\tilde{q}) = r_0$ ve $d(\tilde{q},q) = \ell - r_0$ dır. Böylece

$$\gamma(t) = \sigma|_{[r_0,\ell]}(t) \tag{2.126}$$

olacak şekilde σ eğrisinin birim hızlı bir minimal jeodezik alt eğri parçası elde edilir. Bu $\gamma : [r_0,\ell] \to M$ eğri parçası için $\gamma(r_0) = \sigma(r_0) = \tilde{q}$ ve $\gamma(\ell) = \sigma(\ell) = q$ dir. Şimdi $\{E_1 = \gamma', E_2, \ldots, E_n\}$ olacak şekilde γ eğrisi boyunca paralel ortonormal bir çatı alalım. $f \in \mathcal{C}^\infty([r_0,\ell])$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $f(r_0) = f(\ell) = 0$ olsun. Myers teoreminin kanıtında olduğu gibi enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyonundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} &= \sum_{i=2}^{n}\int_0^\ell g\Big(\nabla_{\gamma'(t)}V_i(t), \nabla_{\gamma'(t)}V_i(t)\Big)dt \\ &- \sum_{i=2}^{n}\int_0^\ell g\Big(R\big(V_i(t),\gamma'(t)\big)\gamma'(t), V_i(t)\Big)dt. \end{aligned} \tag{2.127}$$

denklemi elde edilir. Burada $V_i(t) = f(t)E_i(t)$ ifadesi (2.127) denkleminde yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} = \int_{r_0}^{\ell} \Big((n-1)f'^2(t) - f^2(t)\mathrm{Ric}(\gamma'(t),\gamma'(t))\Big)dt \tag{2.128}$$

denklemine ulaşılır. Aksi belirtilmedikçe, kısalık bakımından $\gamma(t)$, $f(t)$ ve $(r\circ\gamma)(t) = r(\gamma(t))$ ifadeleri

$$\gamma(t) \equiv \gamma, \;\; f(t) \equiv f \;\text{ ve }\; (r\circ\gamma)(t) = r(\gamma(t)) \equiv r \tag{2.129}$$

şeklinde gösterilecektir. Şimdi teoremde verilen (2.123) varsayımı kullanılırsa (2.128) denkleminden

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} \leq \int_{r_0}^{\ell} (n-1)\Big(f'^2 - \frac{(\frac{1}{4}+\nu^2)}{r^2}f^2\Big)dt \tag{2.130}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte (2.129) notasyonları göz önüne alınarak f fonksiyonu için

$$f(t) = \mu r_0\sqrt{r(\gamma(t))}\sin(\frac{1}{\mu}\ln\frac{r(\gamma(t))}{r_0}) \tag{2.131}$$

seçimini düşünelim [4]. Ayrıca burada $r = r(\gamma(t))$ değişken değişimi altında

$$\begin{aligned} dr &= \frac{d}{dt}\left(r(\gamma(t))\right)dt \\ &= \gamma'(r)dt \\ &= g(\nabla r, \gamma')dt \\ &= g(\gamma', \gamma')dt \\ &= dt \end{aligned} \tag{2.132}$$

eşitliği vardır. Buradaki gerçek, r uzaklık fonksiyonunun gradiyentinin integral eğrisinin γ birim hızlı minimal jeodezik eğri parçası olmasıdır. Böylece r uzaklık fonksiyonu γ üzerinde diferansiyellenebilirdir. Bu değişken değişimi

$$\frac{d}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{d}{dr} = \frac{d}{dr} \tag{2.133}$$

eşitliğini de verir. Buna ek olarak, $t = r_0$ ve $t = \ell$ için

$$r(\gamma(r_0)) = r(\tilde{q}) = d(p, \tilde{q}) = r_0 \tag{2.134}$$

ve

$$r(\gamma(\ell)) = r(q) = d(p, q) = \ell, \tag{2.135}$$

dir. (2.131) denklemi ile verilen f fonksiyonu ve $r = r(\gamma(t))$ değişken değişimi (2.130) eşitsizliğinde kullanıldığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0^2(n-1)} \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} \leq & -\int_{r_0}^{\ell} \nu^2\mu^2 \sin^2(\frac{1}{\mu}\ln\frac{r}{r_0})\frac{1}{r}dr \\ & + \int_{r_0}^{\ell}\left(\cos^2(\frac{1}{\mu}\ln\frac{r}{r_0}) + \frac{\mu}{2}\sin(\frac{2}{\mu}\ln\frac{r}{r_0})\right)\frac{1}{r}dr \end{aligned} \tag{2.136}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikte

$$u = \ln\frac{r}{r_0}, \tag{2.137}$$

değişken değişimi yapılırsa (2.125) denklemi ile tanımlanan $\ell = r_0 e^{\mu\pi}$ yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0^2(n-1)} \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} \leq & -\int_{0}^{\mu\pi} \nu^2\mu^2 \sin^2(\frac{1}{\mu}u)du \\ & + \int_{0}^{\mu\pi}\left(\cos^2(\frac{1}{\mu}u) + \frac{\mu}{2}\sin(\frac{2}{\mu}u)\right)du \end{aligned} \tag{2.138}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu intergal hesaplandığında

$$\frac{1}{r_0^2(n-1)} \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} \leq \frac{\mu\pi}{2}(1-\mu^2\nu^2) \tag{2.139}$$

elde edilir. Varsayalım ki (2.139) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terim

$$1 - \mu^2\nu^2 < 0 \tag{2.140}$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2} < 0$$

olur. Fakat γ bir minimal jeodezik olduğundan bu bir çelişki oluşturur. O halde (2.140) eşitsizliği

$$1 - \mu^2\nu^2 \geq 0 \tag{2.141}$$

olmalıdır. Buradan

$$\mu \leq \frac{1}{\nu} \tag{2.142}$$

elde edilir. $\ell = r_0 e^{\mu\pi}$ parametrizasyonu içerisine (2.142) eşitsizliği yazıldığında

$$\ell = r_0 e^{\mu\pi} \leq r_0 e^{\pi/\nu} \tag{2.143}$$

elde edilir. Bu durumda manifoldun sınırlı olduğu görülür. Manifold tam verildiğinden Hopf-Rinow teoremi gereği kompakttır.

□

Yukarıdaki teoremin Myers'ın kompaktlık teoreminin bir genellemesi olduğu görülmektedir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak Cheeger, Gromov ve Taylor'un orjinal Ricci eğrilik tensörünü kullanarak elde ettikleri kompaktlık teoremi, Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü kullanılarak genelleştirilmiştir. Bu teorem aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.4.11. *(M, g) tam ve bağlantılı n-boyutlu bir Riemann manifold ve $r(x) = d(x, p)$ eşitliği ile tanımlı r foksiyonu belirlenmiş bir $p \in M$ noktasına göre uzaklık fonksiyonu olsun. $r(x) \geq r_0 > 0$ ve $\nu > 0$, $c \geq 0$ olmak üzere her $x \in M$ için $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu*

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}(\psi) \geq (n-1)\frac{(\frac{1}{4} + \nu^2)}{r^2} \tag{2.144}$$

ve

$$|\psi| \leq (n-1)c \tag{2.145}$$

eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda M manifoldu kompakttır ve $p \in M$ noktasından olan çap

$$\operatorname{diam}_p(M) \leq r_0 \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\Big(2c^2 + \frac{\pi^2\nu^2}{4} + 2c\sqrt{c^2 + \pi^2\nu^2\big(\frac{1}{4} + \nu^2\big)}\ \Big)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{2.146}$$

dir.

Yukarıdaki teoremde $c = 0$ alınırsa $\psi = 0$ olur. Böylece teorem Cheeger, Gromov ve Taylor'un orjinal Ricci eğrilik tensörü için elde ettiği teoreme dönüşür.

Kanıt. Bu teoremin kanıtı bir önceki teoremin kanıtına benzerdir. Yukarıdaki teoremdeki aynı argümanlar kullanıldığında

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} = \int_{r_0}^{\ell} \Big((n-1)f'^2(t) - f^2(t)\operatorname{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))\Big)dt \tag{2.147}$$

denklemi elde edilir. Burada teoremde verilen (2.144) varsayımı yerine yazılırsa (2.147) denkleminden

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} &\leq \int_{r_0}^{\ell} \Big((n-1)\Big(f'^2 - \frac{(\frac{1}{4}+\nu^2)}{r^2}f^2\Big) + f^2\big(\operatorname{Hess}(\psi)\big)(\gamma', \gamma')\Big)dt \\
&= \int_{r_0}^{\ell} \Big((n-1)\Big(f'^2 - \frac{(\frac{1}{4}+\nu^2)}{r^2}f^2\Big) + f^2 g(\nabla_{\gamma'}\nabla\psi, \gamma')\Big)dt \\
&= \int_{r_0}^{\ell}\Big((n-1)\Big(f'^2 - \frac{(\frac{1}{4}+\nu^2)}{r^2}f^2\Big) + f^2\gamma'\big(g(\nabla\psi, \gamma')\big)\Big)dt
\end{aligned} \tag{2.148}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada g metrik tensörünün paralelliği ve $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ eşitliği kullanılmıştır. (2.148) eşitsizliğinde yer alan $f^2\gamma'\big(g(\nabla\psi, \gamma')\big)$ ifadesinin eşiti

$$f^2\gamma'\big(g(\nabla\psi, \gamma')\big) = f^2\frac{d}{dt}\Big(g(\nabla\psi, \gamma')(\gamma(t))\Big) \tag{2.149}$$

dir. Son ifade

$$f^2\gamma'\big(g(\nabla\psi,\gamma')\big) = -2ff'g(\nabla\psi,\gamma') + \frac{d}{dt}\big(f^2 g(\nabla\psi,\gamma')\big). \tag{2.150}$$

olacak şekilde tekrar yazılabilir. Ayrıca burada

$$g(\nabla\psi,\gamma') = \gamma'(\psi) = \frac{d}{dt}\psi\big(\gamma(t)\big)(=\frac{d\psi}{dt}) \tag{2.151}$$

dir. Böylece (2.150) denklemi

$$\begin{aligned} f^2\gamma'\big(g(\nabla\psi,\gamma')\big) &= -2ff'\frac{d\psi}{dt} + \frac{d}{dt}\big(f^2 g(\nabla\psi,\gamma')\big) \\ &= 2\psi\frac{d}{dt}(ff') - 2\frac{d}{dt}(\psi ff') + \frac{d}{dt}\big(f^2 g(\nabla\psi,\gamma')\big) \end{aligned} \tag{2.152}$$

olur. (2.152) denkleminin her iki tarafının integrali alınırsa $f(r_0) = f(\ell) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{\ell} f^2\gamma'\big(g(\nabla\psi,\gamma')\big)dt &= \int_{r_0}^{\ell} 2\psi\frac{d}{dt}(ff')dt - 2\big(\psi ff'\big)\Big|_{r_0}^{\ell} + \big(f^2 g(\nabla\psi,\gamma')\big)\Big|_{r_0}^{\ell} \\ &= 2\int_{r_0}^{\ell}\psi\frac{d}{dt}(ff')dt \end{aligned} \tag{2.153}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan teoremde verilen $|\psi| \leq (n-1)c$ varsayımının kullanılması ile

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{\ell} f^2\gamma'\big(g(\nabla\psi,\gamma')\big)dt &\leq 2\int_{r_0}^{\ell}\Big|\psi\frac{d}{dt}(ff')\Big|dt \\ &= 2\int_{r_0}^{\ell}|\psi|\Big|\frac{d}{dt}(ff')\Big|dt \\ &\leq 2(n-1)c\int_{r_0}^{\ell}\Big|\frac{d}{dt}(ff')\Big|dt \end{aligned} \tag{2.154}$$

elde edilir. (2.154) eşitsizliği (2.148) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n}\frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} &\leq \int_{r_0}^{\ell}(n-1)\Big(f'^2 - \frac{(\frac{1}{4}+\nu^2)}{r^2}f^2\Big)dt \\ &+ 2(n-1)c\int_{r_0}^{\ell}\Big|\frac{d}{dt}(ff')\Big|dt \end{aligned} \tag{2.155}$$

bulunur. f fonksiyonu için

$$f(t) = \mu r_0 \sqrt{r(\gamma(t))} \sin(\frac{1}{\mu} \ln \frac{r(\gamma(t))}{r_0}) \tag{2.156}$$

seçimini düşünelim. (2.156) denklemi ile verilen f fonksiyonu ve $r = r(\gamma(t))$ değişken değişimi (2.155) eşitsizliğinde kullanıldığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0^2(n-1)} \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2 E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} &\leq \int_{r_0}^{\ell} \frac{(-\nu^2\mu^2)}{r} \sin^2(\frac{1}{\mu} \ln \frac{r}{r_0}) dr \\ &+ \int_{r_0}^{\ell} \frac{1}{r} \left(\cos^2(\frac{1}{\mu} \ln \frac{r}{r_0}) + \frac{\mu}{2} \sin(\frac{2}{\mu} \ln \frac{r}{r_0}) \right) dr \\ &+ 2c \int_{r_0}^{\ell} \frac{1}{r} \left| \frac{\mu}{2} \sin(\frac{2}{\mu} \ln \frac{r}{r_0}) + \cos(\frac{2}{\mu} \ln \frac{r}{r_0}) \right| dr \end{aligned} \tag{2.157}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikte

$$u = \ln \frac{r}{r_0}, \tag{2.158}$$

değişken değişimi yapılırsa (2.125) denklemi ile tanımlanan $\ell = r_0 e^{\mu\pi}$ yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0^2(n-1)} \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2 E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} &\leq \int_{0}^{\mu\pi} (-\nu^2\mu^2) \sin^2(\frac{1}{\mu} u) du \\ &+ \int_{0}^{\mu\pi} \left(\cos^2(\frac{1}{\mu} u) + \frac{\mu}{2} \sin(\frac{2}{\mu} u) \right) du \\ &+ 2c \int_{0}^{\mu\pi} \left| \frac{\mu}{2} \sin(\frac{2}{\mu} u) + \cos(\frac{2}{\mu} u) \right| du \end{aligned} \tag{2.159}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu intergal hesaplandığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0^2(n-1)} \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2 E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} &\leq \frac{\mu\pi}{2}(1 - \mu^2\nu^2) + 2c\mu\sqrt{\mu^2 + 4} \\ &= \frac{\mu}{2}\big(\pi - \pi\nu^2\mu^2 + 4c\sqrt{\mu^2 + 4}\big) \end{aligned} \tag{2.160}$$

elde edilir. (2.160) eşitsizliğinin sağ tarafındaki çarpan

$$\pi - \pi\nu^2\mu^2 + 4c\sqrt{\mu^2 + 4} < 0 \tag{2.161}$$

alınırsa enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyonu sıfırdan küçük olur. Fakat γ bir minimal jeodezik olduğundan bu bir çelişki oluşturur. Bu yüzden

$$\pi - \pi\nu^2\mu^2 + 4c\sqrt{\mu^2+4} \geq 0 \tag{2.162}$$

alınmalıdır. Bu eşitsizlik çözüldüğünde

$$\mu \leq \frac{2}{\pi\nu^2}\Big(2c^2 + \frac{\pi^2\nu^2}{4} + 2c\sqrt{c^2 + \pi^2\nu^2\big(\frac{1}{4}+\nu^2\big)}\ \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{2.163}$$

bulunur. Son olarak, $\ell = r_0 e^{\mu\pi}$ parametrizasyonu içerisine (2.163) eşitsizliği yazılırsa

$$\ell = r_0 e^{\mu\pi} \leq r_0 \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\Big(2c^2 + \frac{\pi^2\nu^2}{4} + 2c\sqrt{c^2 + \pi^2\nu^2\big(\frac{1}{4}+\nu^2\big)}\ \Big)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{2.164}$$

elde edilir. Böylece manifoldu sınırlı olduğu görülür. Teoremde manifold tam alındığından Hopf-Rinow teoreminden kompakttır. □

Tezde elde edilen bir diğer sonuç; Cheeger, Gromov ve Taylor'un teoreminin $\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_V g - \frac{1}{\alpha}V^* \otimes V^*$ modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörü kullanılarak bulunan aşağıdaki genellemesidir:

Teorem 2.4.12. *(M,g) tam ve bağlantılı n-boyutlu bir Riemann manifold ve $r(x) = d(x,p)$ eşitliği ile tanımlı r foksiyonu belirlenmiş bir $p \in M$ noktasına göre uzaklık fonksiyonu olsun. $r(x) \geq r_0 > 0$ ve $\nu > 0$, $\alpha > 0$ olmak üzere her $x \in M$ için diferansiyellenebilir bir V vektör alanı*

$$\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_V g - \frac{1}{\alpha}V^* \otimes V^* \geq (n-1+4\alpha)\frac{\big(\frac{1}{4}+\nu^2\big)}{r^2} \tag{2.165}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda M manifoldu kompakttır ve $p \in M$ noktasından olan çap

$$\mathrm{diam}_p(M) \leq r_0 e^{\pi/\nu} \tag{2.166}$$

dir.

Görülüyor ki bu teoremde elde edilen çap tahmini ile Cheeger, Gromov ve Taylor'un çap tahmini aynıdır.

Kanıt. Bu teoremin kanıtı önceki teoremin kanıtına benzer bir şekilde verilebilir. Benzer işlemler yapılıp teoremdeki varsayım kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} \quad &\leq \int_{r_0}^{\ell}\left((n-1)f'^2 - f^2(n-1+4\alpha)\frac{\left(\frac{1}{4}+\nu^2\right)}{r^2}\right)dt \\ &+ \int_{r_0}^{\ell}\left(2f^2\gamma'\big(g(V,\gamma')\big) - \frac{f^2}{\alpha}(g(V,\gamma'))^2\right)dt \qquad (2.167)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki $2f^2\gamma'\big(g(V,\gamma')\big)$ teriminin eşiti

$$2f^2\gamma'\big(g(V,\gamma')\big) = -4ff'g(V,\gamma') + \frac{d}{dt}\big(2f^2g(V,\gamma')\big) \qquad (2.168)$$

dir. (2.168) eşitsizliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^{\ell} 2f^2\gamma'\big(g(V,\gamma')\big)dt \quad &= \int_{r_0}^{\ell} -4ff'g(V,\gamma')dt + \big(2f^2g(V,\gamma')\big)\Big|_{r_0}^{\ell} \\ &= \int_{r_0}^{\ell} -4ff'g(V,\gamma')dt \qquad (2.169)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi , $P = -f'$ ve $T = fg(V,\gamma')$ eşitlikleri alınırsa Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\int_{r_0}^{\ell} -ff'g(V,\gamma')dt \quad \leq \quad \left(\int_{r_0}^{\ell} f'^2dt\right)^{1/2}\left(\int_{r_0}^{\ell} f^2\big(g(V,\gamma')\big)^2dt\right)^{1/2} \qquad (2.170)$$

bulunur. $A = 2\alpha\int_{r_0}^{\ell} f'^2dt \geq 0$ ve $B = \frac{1}{2\alpha}\int_{r_0}^{\ell} f^2\big(g(V,\gamma')\big)^2dt \geq 0$ olduğundan $\sqrt{AB} \leq \dfrac{1}{2}(A+B)$ eşitsizliği yardımıyla

$$\left(\int_{r_0}^{\ell} f'^2dt\right)^{1/2}\left(\int_{r_0}^{\ell} f^2\big(g(V,\gamma')\big)^2dt\right)^{1/2} \leq \int_{r_0}^{\ell}\left(\alpha f'^2 + \frac{1}{4\alpha}f^2\big(g(V,\gamma')\big)^2\right)dt. \qquad (2.171)$$

dir. (2.170) ve (2.171) eşitsizlikleri kullanılarak (2.169) eşitsizliği

$$\int_{r_0}^{\ell} 2f^2\gamma'\big(g(V,\gamma')\big)dt \leq \int_{r_0}^{\ell}\left(4\alpha f'^2f'^2 + \frac{f^2}{\alpha}\big(g(V,\gamma')\big)^2\right)dt \qquad (2.172)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (2.172) eşitsizliği (2.167) eşitsizliğinde yerine konulursa

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} \leq (n-1+4\alpha)\int_{r_0}^{\ell}\left(f'^2 - f^2\frac{\left(\frac{1}{4}+\nu^2\right)}{r^2}\right)dt. \tag{2.173}$$

elde edilir. Burada önceki teoremdeki ile aynı f fonksiyon seçimi yapılıp $\ell = r_0e^{\mu\pi}$ parametrizasyonu ve $u = \ln\frac{r}{r_0}$ değişken değişimi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1+4\alpha}\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} \quad &\leq \quad \int_0^{\mu\pi} r_0^2\left(\cos^2(\frac{1}{\mu}u) + \frac{\mu}{2}\sin(\frac{2}{\mu}u)\right)du \\ &\quad - \int_0^{\mu\pi} r_0^2\nu^2\mu^2\sin^2(\frac{1}{\mu}u)du \end{aligned} \tag{2.174}$$

bulunur. Bu ise

$$\frac{1}{n-1+4\alpha}\sum_{i=2}^{n} \frac{d^2E(\overline{\gamma}_s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} \leq r_0^2\frac{\mu\pi}{2}\left(1-\nu^2\mu^2\right). \tag{2.175}$$

eşitsizliğini sağlar. Varsayalım ki yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki terim

$$1-\nu^2\mu^2 < 0. \tag{2.176}$$

olsun. Bu durumda enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyonu sıfırdan küçük olur. Fakat γ bir minimal jeodezik olduğundan bu bir çelişki oluşturur. Bundan dolayı

$$1-\nu^2\mu^2 \geq 0. \tag{2.177}$$

alınmalıdır. Böylece

$$\mu \leq \frac{1}{\nu} \tag{2.178}$$

elde edilir. (2.178) eşitsizliği $\ell = r_0e^{\mu\pi}$ parametrizasyonunda yerine konulursa

$$\ell = r_0e^{\mu\pi} \leq r_0e^{\pi/\nu} \tag{2.179}$$

olur. Böylece Hopf-Rinow teoremi gereği manifold kompakttır. □

3. BOCHNER FORMÜLÜ-RİCCATİ KARŞILAŞTIRMA TEOREMİ

3.1. Bochner Formülü

Bu bölümde Riemann manifoldlarının çalışılmasında en temel araçlardan birisi olan Bochner formülünü elde edeceğiz. Bochner formülü uzaklık fonksiyonlarına uygulandığında ortalama eğrilik ve Laplacian karşılaştırma teoremleri, hacim karşılaştırma teoremleri gibi önemli araçların elde edilmesini sağlamaktadır. Bunların her biri alttan sınırlı Ricci eğriliğinin bir karakterizasyonunu vermek için kullanılabilir. Bu açıdan Bochner formülü pek çok uygulama alanına sahiptir.

Bir Riemann manifold üzerinde herhangi bir diferansiyellenebilir f fonksiyonu için

$$g(\nabla f, V) = V(f), \ \big(\mathrm{Hess}(f)\big)(V, W) = g(\nabla_V \nabla f, W) \text{ ve } \Delta f = tr(\mathrm{Hess}(f))$$

sırasıyla f fonksiyonunun gradyantı, Hessianı ve Laplacianı olmak üzere Bochner formülü aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 3.1.1 (Bochner formülü). *(M, g) bir Riemann manifold olmak üzere M manifoldu üzerinde diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu için Bochner formülü*

$$div(\nabla_{\nabla f} \nabla f) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + g(\nabla f, \nabla \Delta f) + |\mathrm{Hess}(f)|^2 \qquad (3.1)$$

eşitliği ile verilir.

Kanıt. M manifoldu üzerinde belirlenmiş bir p noktası alalım. X_i, $(i = 1, ..., n)$ ortonormal bir baz olmak üzere

$$g(X_i, X_j) = \delta_{ij}, \quad \nabla_{X_i} X_j(p) = 0 \qquad (3.2)$$

olsun. $g(\nabla f, \nabla f) = F$ ile gösterilmek üzere $p \in M$ noktasına göre hesaplama yapılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\sum_i g(\nabla_{X_i}\nabla F, X_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_i \Big[X_i g(\nabla F, X_i) - \underbrace{g(\nabla F, \nabla_{X_i}X_i)}_{=0}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sum_i X_i X_i(F) \\
&= \sum_i X_i g(\nabla_{X_i}\nabla f, \nabla f) \\
&= \sum_i X_i \mathrm{Hess}(f)(X_i, \nabla f) \\
&= \sum_i X_i \mathrm{Hess}(f)(\nabla f, X_i) \\
&= \sum_i X_i g(\nabla_{\nabla f}\nabla f, X_i) \\
&= \sum_i \Big[g(\nabla_{X_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f, X_i) + \underbrace{g(\nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla_{X_i}X_i)}_{=0}\Big] \\
&= \sum_i g(\nabla_{X_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f, X_i) \\
&= \sum_i g\big(R(X_i, \nabla f)\nabla f + \nabla_{\nabla f}\nabla_{X_i}\nabla f + \nabla_{[X_i,\nabla f]}\nabla f, X_i\big) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \sum_i g(R(X_i, \nabla f)\nabla f, X_i) + \sum_i g(\nabla_{\nabla f}\nabla_{X_i}\nabla f, X_i) + \sum_i g(\nabla_{[X_i,\nabla f]}\nabla f, X_i) \qquad (3.4)$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Böylece denklemde elde edilen ilk terimin $\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$ tanımı olduğu görülür. İkinci terim

$$\begin{aligned}
\sum_i g(\nabla_{\nabla f}\nabla_{X_i}\nabla f, X_i) &= \sum_i (\nabla f) g(\nabla_{X_i}\nabla f, X_i) - g(\nabla_{X_i}\nabla f, \nabla_{\nabla f}X_i) \\
&= (\nabla f)\sum_i g(\nabla_{X_i}\nabla f, X_i) - 0 \\
&= (\nabla f)(\Delta f) \\
&= g(\nabla f, \nabla(\Delta f)), \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

ve üçüncü terim

$$\begin{aligned}
\sum_i g(\nabla_{[X_i,\nabla f]}\nabla f, X_i) &= \sum_i \mathrm{Hess}(f)([X_i,\nabla f], X_i) \\
&= \sum_i \mathrm{Hess}(f)(\nabla_{X_i}\nabla f - \nabla_{\nabla f}X_i, X_i) \\
&= \sum_i \Big[\mathrm{Hess}(f)(\nabla_{X_i}\nabla f, X_i) - \mathrm{Hess}(f)(\nabla_{\nabla f}X_i, X_i)\Big] \\
&= \sum_i \mathrm{Hess}(f)(\nabla_{X_i}\nabla f, X_i) - 0 \\
&= \sum_i \mathrm{Hess}(f)(X_i, \nabla_{X_i}\nabla f) \\
&= \sum_i g(\nabla_{X_i}\nabla f, \nabla_{X_i}\nabla f) \\
&= |\mathrm{Hess}(f)|^2 \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

dır. Böylece bu üç terimin toplamı Bochner formülünü vermektedir. □

Bochner formülünde f fonksiyonunun seçiminde herhangi bir kısıtın olmaması bu formülü güçlü hale getirmektedir. Karşılaştırma geometrisinde çoğu sonuç f fonksiyonunun seçimi ile elde edilmektedir. Tam Riemann manifoldlarda karşılaştırma teoremlerinin başlangıç noktası Bochner formülüdür. Riccati karşılaştırma teoremlerini kullanmak için aşağıda tanımı verilen r uzaklık fonksiyonuna Bochner formülünü uygulamak yeterlidir. Böylece bir Riccati tipi diferansiyel denklem elde edilecektir.

Tanım 3.1.2. *(M, g) bir Riemann manifold olmak üzere bir $p \in M$ noktasına göre uzaklık fonksiyonu $\forall\ x \in M$ için $r(x) = d(x, p)$ olarak tanımlanır.*

γ eğrisi $p \in M$ noktasından $q \in M$ noktasına giden ℓ uzunluklu bir minimal birim hızlı jeodezik olsun. Öyleyse $\gamma(0) = p$ ve $\gamma(\ell) = q$' dır. Ayrıca

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2| \qquad (3.7)$$

dır. Bu durumda

$$r(\gamma(t)) = d(\gamma(t), p) = d(\gamma(t), \gamma(0)) = |t - 0| = t \qquad (3.8)$$

olur. Uzaklık fonksiyonu M üzerinde sürekli fakat türevlenebilir değildir $\big($**Not**: r uzaklık fonksiyonu Lipschitz'dir. Bu yüzden türevlenemediği noktalarda ölçüm sıfırdır$\big)$. $p \in M$ noktasına göre verilen $r(x) = d(x,p)$ uzaklık fonksiyonunun türevlenemediği noktalara $p \in M$'nin 'cut-locusu' denir ve C_p olarak gösterilir (r uzaklık fonksiyonu, $p \in M$ noktasında da türevlenemez. Kimi kaynaklarda p noktası cut-locusa dahil edilirken kiminde edilmez). Cut-locusa ait noktalar $p \in M$'den çıkan jeodeziklerin kesiştiği noktalardır. Önemli iki özellik; $\gamma(t) \in M$'lerin cut-locusa ait olmaması ve $M-(C_p \cup \{p\})$'de r'nin gradyantının yani ∇r vektör alanının integral eğrilerinin p noktasından çıkan minimal jeodezikler olmasıdır, yani her $t \in [0,\ell]$ için $\gamma'(t) = \nabla r|_{\gamma(t)}$ olmasıdır ([19], s. 116, s. 125).

Şimdi (3.1) eşitliği ile verilen Bochner formülünde f fonksiyonunun yerine r uzaklık fonksiyonunu alalım. Bu durumda, $M-(C_p \cup \{p\})$ üzerinde,

$$0 = div(\nabla_{\nabla r}\nabla r) = \mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r) + g(\nabla r, \nabla \Delta r) + |\mathrm{Hess}(r)|^2 \tag{3.9}$$

olur. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $|\mathrm{Hess}(r)|^2 \geq \dfrac{(\Delta r)^2}{n-1}$ bulunur. Bu eşitsizlik (3.9) denkleminde kullanılırsa

$$0 \geq \mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r) + g(\nabla r, \nabla \Delta r) + \frac{(\Delta r)^2}{n-1} \tag{3.10}$$

elde edilir. Elde edilen son denklem $M-(C_p \cup \{p\})$ üzerinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$0 \geq g\left(\nabla r, \nabla \frac{\Delta r}{n-1}\right) + \left(\frac{\Delta r}{n-1}\right)^2 + \frac{\mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r)}{n-1}. \tag{3.11}$$

Δr ile γ'nın bileşkesini alarak m fonksiyonunu

$$\begin{aligned} m : I &\;\to\; M-(C_p \cup \{p\}) \\ t &\;\mapsto\; m(t) := \big(\Delta r\big)(\gamma(t)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

olarak tanımlayalım. Burada $m(t)$ fonksiyonu γ eğrisi boyunca diferansiyellenebilirdir. (3.12) eşitliğinin her iki tarafının t değişkenine göre türevi alındığında

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m(t) &= \frac{d}{dt}\Big((\Delta r)(\gamma(t))\Big) \\
&= \gamma'(\Delta r|_{\gamma(t)}) \\
&= g_{\gamma(t)}\big(\nabla\Delta r|_{\gamma(t)}, \gamma'(t)\big) \\
&= g_{\gamma(t)}\big(\nabla\Delta r|_{\gamma(t)}, \nabla r|_{\gamma(t)}\big) \\
&= \big(g(\nabla r, \nabla\Delta r)\big)(\gamma(t)) \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

bulunur. $\gamma(t) \in M$ 'ler cut-locusa ait olmadığından (3.11) eşitsizliği $\gamma(t)$ jeodeziği boyunca geçerlidir. Bu sebepten (3.11) eşitsizliğinde, $m(t)$ fonksiyonu ve (3.13) eşitliği kullanılırsa $M - (C_p \cup \{p\})$ üzerinde

$$0 \geq g\left(\nabla r, \nabla\frac{\Delta r}{n-1}\right)(\gamma(t)) + \left(\frac{\Delta r}{n-1}\right)^2(\gamma(t)) + \left(\frac{\mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r)}{n-1}\right)(\gamma(t)) \qquad (3.14)$$

olur. Buradan $M - (C_p \cup \{p\})$ üzerinde geçerli olan

$$0 \geq \frac{d}{dt}\Big(\frac{m(t)}{n-1}\Big) + \left(\frac{m(t)}{n-1}\right)^2 + \frac{\mathrm{Ric}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1} \qquad (3.15)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.15) eşitsizliği elde edilirken aşağıda not edilen temel bilgiler de kullanılmıştır:

NOT: 1. h_1 ve h_2 M manifoldu üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\gamma(t) \in M$ noktaları için

$$(h_1.h_2)(\gamma(t)) = h_1(\gamma(t)).h_2(\gamma(t))$$

dir.

2. V, W diferansiyellenebilir vektör alanları ve $q \in M$ herhangi bir nokta olmak üzere

$$(\mathrm{Ric}(V, W))(q) = \mathrm{Ric}_q(V_q, W_q)$$

dir.

3.2. Riccati Karşılaştırma Teoremi

Teorem 3.2.1. *ℓ_1, ℓ_2, q_1, q_2 fonksiyonları $[a,b) \subseteq \mathbb{R}$ aralığında reel değerli, sürekli ve*

i) $\ell_2(t) \leq \ell_1(t)$, *her* $t \in [a,b)$

ii) $q_2(t) \leq q_1(t)$, *her* $t \in [a,b)$

özelliklerine sahip fonksiyonlar olsun. Eğer $[a,b)$ aralığı üzerinde

(1) $F'(t) + \ell_1(t)F^2(t) + q_1(t) \leq 0$

(2) $Y'(t) + \ell_2(t)Y^2(t) + q_2(t) \geq 0$

diferansiyel eşitsizlikleri geçerliyse ve $F(a) \leq Y(a)$ ise her $t \in [a,b)$ için $F(t) \leq Y(t)$ 'dir.

Kanıt. $[a,b)$ aralığı üzerinde

$$\psi(t) := \big(F(t) - Y(t)\big) \exp\left(\int_a^t \ell_2(\tau)\big(F(\tau)+Y(\tau)\big)d\tau\right) \tag{3.16}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. ψ 'nin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \big(F'(t) - Y'(t)\big) \exp\left(\int_a^t \ell_2(\tau)\big(F(\tau)+Y(\tau)\big)d\tau\right)\\
&+ \big(F(t) - Y(t)\big)\ell_2(t)\big(F(t)+Y(t)\big) \exp\left(\int_a^t \ell_2(\tau)\big(F(\tau)+Y(\tau)\big)d\tau\right)\\
&= \Big(F'(t) + \ell_2(t)F^2(t) - \big[Y'(t) + \ell_2(t)Y^2(t)\big]\Big) \exp\left(\int_a^t \ell_2(\tau)\big(F(\tau)+Y(\tau)\big)d\tau\right)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. *i)* ve *ii)* özelliklerinden ve sonra (1), (2) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\leq \Big(F'(t) + \ell_1(t)F^2(t) - \big[Y'(t) + \ell_2(t)Y^2(t)\big]\Big) \exp\left(\int_a^t \ell_2(\tau)\big(F(\tau)+Y(\tau)\big)d\tau\right)\\
&\leq \big(-q_1(t) + q_2(t)\big) \exp\left(\int_a^t \ell_2(\tau)\big(F(\tau)+Y(\tau)\big)d\tau\right)\\
&\leq \big(-q_1(t) + q_1(t)\big) \exp\left(\int_a^t \ell_2(\tau)\big(F(\tau)+Y(\tau)\big)d\tau\right)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

bulunur. Demek ki ψ fonksiyonu artmayandır. Dolayısıyla her $t \in [a, b)$ için $\psi(t) \leq \psi(a)$ olur. ψ fonksiyonunun tanımından $\psi(a) = F(a) - Y(a)$ elde edilir. Öyleyse teoremdeki $F(a) \leq Y(a)$ varsayımından $\psi(a) \leq 0$ bulunur. Bu durumda ($\psi(t) \leq \psi(a)$ olduğundan) $\psi(t) \leq 0$ 'dır, yani

$$\psi(t) = \big(F(t) - Y(t)\big) \exp\left(\int_a^t \ell_2(\tau)\big(F(\tau) + Y(\tau)\big) d\tau\right) \leq 0 \tag{3.19}$$

olur. Burada exponansiyel dönüşüm pozitif olduğundan $F(t) - Y(t) \leq 0$ olmalıdır. Böylece $F(t) \leq Y(t)$ elde edilir. □

3.3. Riccati Karşılaştırma Teoremi Yardımıyla Elde Edilen Kompaktlık Teoremleri

Bu bölümde Riccati karşılaştırma teoremi kullanılarak elde edilen bazı kompaktlık teoremleri verilecektir. Bu teoremlerden birisi 2012 yılında Limoncu tarafından tam Riemann manifoldlar üzerinde elde edilen bir kompaktlık teoremidir [12]:

Teorem 3.3.1 (Limoncu, 2012). *(M, g) tam ve bağlantılı n-boyutlu bir Riemann manifold olsun ($n \geq 2$). $r(x) = d(x, p)$ belirlenmiş bir $p \in M$ noktasına göre uzaklık fonksiyonu ve ϕ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\forall\, x \in M - \{p\}$ için*

$$\big(g(\nabla\phi, \nabla\phi)\big)(x) \leq \frac{K}{r^2(x)} \tag{3.20}$$

olsun. Eğer

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\phi \geq (n-1)H > 0 \tag{3.21}$$

ise M manifoldu kompakttır ve manifoldun p noktasından olan çapı

$$\mathrm{diam}_p(M) \leq \sqrt{4\sqrt{K} + n - 1}\,\frac{\pi}{\sqrt{(n-1)H}} \tag{3.22}$$

üst sınırına sahiptir. Burada K ve H pozitif sabitlerdir.

Yukarıdaki teoremde manifoldun çapı için elde edilen üst sınır manifoldun tamamı için geçerli değildir. Yani p noktasına göre verilen bir üst sınırdır. Üçgen eşitsizliği yardımıyla manifoldun tamamı için istenilen sonucun elde edilen üst sınırın iki katı olduğu kolayca görülebilir. Bu teoremin kanıtında

$$\tilde{\Delta} f = \Delta f - g(\nabla\phi, \nabla f) + F(f)$$

olacak şekilde modifiye edilmiş bir Laplacian operatörü tanımlanarak Riccati karşılaştırma argümanlarından faydalanılmıştır.

Bu konuyla ilgili bir diğer çalışma ise 2014 yılında Wang tarafından yapılmıştır. Wang bu çalışmasında m-Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü olarak bilinen

$$\mathrm{Ric}_{f,m} = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f - \frac{\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f}{m-n} \tag{3.23}$$

eğrilik tensörünü kullanmıştır [24]:

Teorem 3.3.2 (**Wang, 2014**)**.** *(M,g) tam ve bağlantılı n-boyutlu bir Riemann manifold olsun ($n \geq 2$). $r(x) = d(x,p)$ belirlenmiş bir $p \in M$ noktasına göre uzaklık fonksiyonu olmak üzere $\forall\, x \in M$ için*

$$\mathrm{Ric}_{f,m}(x) \geq -(m-1)\frac{K_0}{(1+r(x))^2} \tag{3.24}$$

olsun. Ayrıca K_0 sabiti için $K_0 < -\dfrac{1}{4}$ olsun. O zaman M manifoldu kompakttır ve manifoldun çapı

$$\mathrm{diam}(M) \leq 2(e^{2\pi/\overline{K}} - 1) \tag{3.25}$$

üst sınırına sahiptir. Burada $\overline{K} = \sqrt{-K_0 - \dfrac{1}{4}}$ 'dir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlardan birisi Wang'ın sonucuyla doğrudan karşılaştırılabilmektedir. Bu çalışmada $V = \nabla f$ alındığında m-Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörüne karşılık gelen

$$\mathrm{Ric}_{V,m} = \mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g - \frac{1}{m-n} V^* \otimes V^* \tag{3.26}$$

modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörü kullanılmıştır. $\mathcal{L}_V$ ve V^* sırasıyla diferansiyellenebilir V vektör alanının Lie türevini ve metrik dualini göstermektedir. Ayrıca

$m = n = \dim(M)$ durumunda V vektör alanı sıfır kabul edilir. Böylece $\mathrm{Ric}_{V,m}$ eğrilik tensörü orjinal Ricci eğrilik tensörüne dönüşür. (3.26) denklemi ile verilen Ricci eğrilik tensöründe V herhangi bir diferansiyellenebilir vektör alanı olup bir fonksiyonun gradyantından gelmek zorunda değildir. Sonuç olarak, manifoldun çapı için bulunan üst sınırın, Wang'ın elde ettiği (3.25) üst sınırı ile karşılaştırıldığında daha keskin olduğu görülmektedir. Şimdi bu teorem verilsin.

Teorem 3.3.3. *(M, g) tam ve bağlantılı n-boyutlu bir Riemann manifold olsun ($n \geq 2$). $\forall x \in M$ için $r(x) = d(x, p)$ belirlenmiş bir $p \in M$ noktasına göre uzaklık fonksiyonu olmak üzere diferansiyellenebilir bir V vektör alanı*

$$\mathrm{Ric}_{V,m}(x) \geq -(m-1)\frac{K_0}{(1 + r(x))^2} \tag{3.27}$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca K_0 sabiti için $K_0 < -\frac{1}{4}$ olsun. O zaman M kompakttır ve manifoldun çapı

$$\mathrm{diam}(M) \leq 2(e^{\pi/\overline{K}} - 1) \tag{3.28}$$

üst sınırına sahiptir. Burada $\overline{K} = \sqrt{-K_0 - \frac{1}{4}}$'dir.

Kanıt. $\widetilde{\Delta}$ modifiye edilmiş Laplacian operatörü

$$\widetilde{\Delta} f = \Delta f - g(V, \nabla f) \tag{3.29}$$

eşitliği ile verilsin. Bu eşitlikte verilen V vektör alanı teoremde verilen vektör alanı olup $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$'dir. (3.29) denkleminde f fonksiyonu, teoremde verilen r uzaklık fonksiyonu ile yer değiştirildiğinde ve ayrıca $\widetilde{m}(t) := \widetilde{\Delta} r(\gamma(t))$ olmak üzere

$$\widetilde{m}(t) = m(t) - g(V, \gamma'(t)) \tag{3.30}$$

denklemi elde edilir. Burada p, $q \in M$ olmak üzere $\gamma(t)$ eğrisi p noktasından q

noktasına giden minimal bir jeodeziktir. $M - \big(C_p \cup \{p\}\big)$ kümesi üzerinde

$$\begin{aligned} g\big(\gamma'(t), \nabla\widetilde{m}(t)\big) &= g\Big(\gamma'(t), \nabla m(t) - \nabla g(V, \gamma'(t))\Big) \\ &= g(\gamma'(t), \nabla m(t)) - g\big(\gamma'(t), \nabla g(V, \gamma'(t))\big) \\ &= g(\gamma'(t), \nabla m(t)) - \frac{1}{2}(\mathcal{L}_V g)(\gamma'(t), \gamma'(t)) \end{aligned} \tag{3.31}$$

dir. Diğer taraftan r uzaklık fonksiyonu için Bochner formülünden

$$0 \geq \mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) + \frac{1}{n-1}(m(t))^2 + g(\gamma'(t), \nabla m(t)) \tag{3.32}$$

eşitsizliği vardır. (3.31) ve (3.32) denklemleri bir araya getirilerek aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır:

$$0 \geq \mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_V g)(\gamma'(t), \gamma'(t)) + \frac{1}{n-1}(m(t))^2 + g(\gamma'(t), \nabla\widetilde{m}(t)) \tag{3.33}$$

(3.30) denklemi

$$m(t) = \widetilde{m}(t) + g(V, \gamma'(t)) \tag{3.34}$$

olarak yazılabilir. (3.34) denklemi (3.33) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_V g)(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &+ \frac{1}{n-1}\big(\widetilde{m}(t) + g(V, \gamma'(t))\big)^2 + g(\gamma'(t), \nabla\widetilde{m}(t)) \end{aligned} \tag{3.35}$$

elde edilir. Her a, b reel sayıları ve α pozitif reel sayısı için geçerli olan

$$(a \mp b)^2 \geq \frac{1}{\alpha+1}a^2 - \frac{1}{\alpha}b^2 \tag{3.36}$$

eşitsizliği kullanıldığında

$$\big(\widetilde{m}(t) + g(V, \gamma'(t))\big)^2 \geq \frac{1}{\alpha+1}(\widetilde{m}(t))^2 - \frac{1}{\alpha}(g(V, \gamma'(t)))^2 \tag{3.37}$$

ifadesi elde edilir. Burada $m > n$ durumunda

$$\alpha = \frac{m-n}{n-1} > 0, \tag{3.38}$$

alınırsa (3.37) eşitsizliği

$$\big(\widetilde{m}(t) + g(V, \gamma'(t))\big)^2 \geq \frac{n-1}{m-1}(\widetilde{m}(t))^2 - \frac{n-1}{m-n}(g(V, \gamma'(t)))^2 \tag{3.39}$$

ifadesine dönüşür. Böylece (3.39) eşitsizliği (3.35)'de yerine yazıldığında $M - \big(C_p \cup \{p\}\big)$ üzerinde aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned} 0 \;\geq\; & \mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_V g)(\gamma'(t), \gamma'(t)) + \frac{1}{m-1}(\widetilde{m}(t))^2 \\ & - \frac{1}{m-n}\big(g(V, \gamma'(t))\big)^2 + g(\gamma'(t), \nabla \widetilde{m}(t)). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Buradan

$$\begin{aligned} 0 \;\geq\; & \mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_V g)(\gamma'(t), \gamma'(t)) - \frac{1}{m-n}(V^* \otimes V^*)(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ & + \frac{d}{dt}(\widetilde{m}(t)) + \frac{1}{m-1}(\widetilde{m}(t))^2 \end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. $r(\gamma(t)) = r$ olmak üzere teoremdeki (3.27) varsayımı (3.41) eşitsizliğine uygulanırsa

$$0 \geq \frac{d}{dt}(\widetilde{m}(t)) + \frac{1}{m-1}(\widetilde{m}(t))^2 - \frac{(m-1)K_0}{(1+r)^2} \tag{3.42}$$

bulunur. Burada K_0 negatif olduğundan $-K_0 = |K_0| > 0$ eşitliği mevcuttur. Böylece (3.42) eşitsizliği

$$0 \geq \frac{d}{dt}(\widetilde{m}(t)) + \frac{1}{m-1}(\widetilde{m}(t))^2 + \frac{(m-1)|K_0|}{(1+r)^2} \tag{3.43}$$

şeklinde yazılabilir. Dahası

$$0 \geq \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{m-1}\widetilde{m}(t)\Big) + \Big(\frac{1}{m-1}\widetilde{m}(t)\Big)^2 + \frac{|K_0|}{(1+r)^2} \tag{3.44}$$

dir. Diğer taraftan

$$Y'(r) + (Y(r))^2 + \frac{|K_0|}{(1+r)^2} = 0 \tag{3.45}$$

olarak verilen Riccati diferansiyel denkleminin çözümünün

$$Y(r) = \frac{1}{2(1+r)}\left(1+\sqrt{4|K_0|-1}\cot\Big(\frac{\sqrt{4|K_0|-1}}{2}\ln(1+r)\Big)\right) \tag{3.46}$$

olduğu bilinmektedir. $m > n$ için

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+} r\Big(\frac{1}{m-1}\widetilde{m}(t)\Big) &= \lim_{r\to 0^+} r\left(\frac{1}{m-1}\Big(m(t) - g(V,\gamma'(t))\Big)\right) \\ &= \frac{n-1}{m-1} < 1 = \lim_{r\to 0^+} rY(r) \qquad (3.47)\end{aligned}$$

olduğundan dolayı Riccati karşılaştıma argümanları kullanılabilir. Böylece

$$\frac{1}{m-1}\widetilde{m}(t) \leq \frac{1}{2(1+r)}\left(1+\sqrt{4|K_0|-1}\cot\Big(\frac{\sqrt{4|K_0|-1}}{2}\ln(1+r)\Big)\right) \tag{3.48}$$

elde edilir. Burada $|K_0| > \frac{1}{4}$'dir. Şimdi teoremin kanıtını tamamlamak için bir varsayımda bulunalım: $q \in M$ herhangi bir nokta olsun. σ da $p \in M$'den $q \in M$'ye birim hızlı minimal bir jeodezik eğri olsun. Burada p noktası teoremde verilen noktadır. Varsayalım ki

$$d(p,q) > e^{2\pi/\sqrt{4|K_0|-1}} - 1 \tag{3.49}$$

eşitsizliği sağlansın. σ birim hızlı minimal bir jeodezik eğri olduğundan $\sigma\big(e^{2\pi/\sqrt{4|K_0|-1}} - 1\big) \in M$ noktası p' nin cut-locusunun dışında kalır. Yani,

$$\sigma\big(e^{2\pi/\sqrt{4|K_0|-1}} - 1\big) \in M - \big(C_p \cup \{p\}\big) \tag{3.50}$$

dir. Böylece r uzaklık fonksiyonu bu noktada diferansiyellenebilirdir. Şöyle ki bu noktada (3.48) eşitsizliğinin sol tarafı sabittir. (3.48) eşitsizliğinin sağ tarafı ise

$$r \to \left(e^{2\pi/\sqrt{4|K_0|-1}} - 1\right)^{-} \tag{3.51}$$

iken $-\infty$ olur. Bu bir çelişkidir. Çünkü herhangi bir sabit sayı $-\infty$'dan küçük kalamaz. Bu yüzden (3.49) varsayımı

$$\begin{aligned} d(p,q) &\leq e^{2\pi/\sqrt{4|K_0|-1}} - 1 \\ &= e^{\pi/\sqrt{-K_0-\frac{1}{4}}} - 1 \end{aligned} \tag{3.52}$$

şeklinde olmalıdır. M üzerinde herhangi iki nokta $p', q' \in M$ olmak üzere üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(p',q') &\leq d(p',p) + d(q',p) \\ &\leq 2\left(e^{\pi/\sqrt{-K_0-\frac{1}{4}}} - 1\right) \\ &= 2(e^{\pi/\overline{K}} - 1) \end{aligned} \tag{3.53}$$

dir. Bu durumda manifold sınırlı olur. Aynı zamanda M manifoldu tam alındığından Hopf-Rinow teoremi gereği manifold kompakttır. ☐

Teoremde elde edilen (3.28) üst sınırı ile Wang'ın elde ettiği (3.25) üst sınırını karşılaştırdığımızda

$$e^{\pi/\overline{K}} < e^{2\pi/\overline{K}}$$

eşitsizliğinden de açıkça görüldüğü gibi bulduğumuz sonuç Wang'ın sonucundan daha keskindir.

Tezde elde edilen diğer bir teoremde ise yukarıdaki teoremden farklı olarak $\mathrm{Ric}_{V,m}$ Ricci eğrilik tensörüne yapılan varsayım değişmiş ve yeni bir kompaktlık teoremi elde edilmiştir. Bu teorem aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.3.4. *(M,g) tam ve bağlantılı n-boyutlu bir Riemann manifold olsun ($n \geq 2$). $\forall x \in M$ için $r(x) = d(x,p)$ belirlenmiş bir $p \in M$ noktasına göre uzaklık* *fonksiyonu olmak üzere diferansiyellenebilir bir V vektör alanı*

$$\mathrm{Ric}_{V,m}(x) \geq (m-1)\frac{4\nu^2\pi^2}{\Big(\nu + r(x)\Big)^4} \tag{3.54}$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman M manifoldu kompakttır ve manifoldun çapı

$$\mathrm{diam}(M) \leq 2\nu \tag{3.55}$$

üst sınırına sahiptir. Burada ν pozitif bir sabittir.

Kanıt. Bu teoremin kanıtı önceki teoremin kanıtına oldukça benzerdir. $m > n$ durumu ele alındığında ve önceki teoremdeki işlemler tekrar edildiğinde

$$\begin{aligned} 0 \;\geq\; & \mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_V g)(\gamma'(t), \gamma'(t)) - \frac{1}{m-n}(V^* \otimes V^*)(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ & + \frac{d}{dt}(\widetilde{m}(t)) + \frac{1}{m-1}(\widetilde{m}(t))^2 \end{aligned} \tag{3.56}$$

denklemine ulaşılır. Böylece teoremde verilen (3.54) varsayımı (3.56) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$0 \geq \frac{d}{dt}(\widetilde{m}(t)) + \frac{1}{m-1}(\widetilde{m}(t))^2 + (m-1)\frac{4\nu^2\pi^2}{(\nu+r)^4} \tag{3.57}$$

elde edilir. (3.57) eşitsizliği $1/(m-1)$ ile çarpılırsa

$$0 \geq \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{m-1}\widetilde{m}(t)\Big) + \Big(\frac{1}{m-1}\widetilde{m}(t)\Big)^2 + \frac{4\nu^2\pi^2}{(\nu+r)^4} \tag{3.58}$$

olur. Diğer taraftan

$$Y'(r) + (Y(r))^2 + \frac{4\nu^2\pi^2}{(\nu+r)^4} = 0 \tag{3.59}$$

şeklinde verilen Riccati diferansiyel denkleminin çözümü

$$Y(r) = \frac{2\nu\pi}{(\nu+r)^2}\cot\left(\frac{2\pi r}{\nu+r}\right) + \frac{1}{\nu+r} \tag{3.60}$$

dir. $m > n$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+} r(\frac{1}{m-1}\widetilde{m}(t)) &= \lim_{r\to 0^+} r\left(\frac{1}{m-1}\Big(m(t) - g(V, \gamma'(t))\Big)\right) \\
&= \frac{n-1}{m-1} < 1 = \lim_{r\to 0^+} rY(r) \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

olduğundan Riccati karşılaştırma argümanları kullanılarak $M - \big(C_p \cup \{p\}\big)$ üzerinde

$$\frac{1}{m-1}\widetilde{m}(t) \leq \frac{2\nu\pi}{(\nu+r)^2}\cot\left(\frac{2\pi r}{\nu+r}\right) + \frac{1}{\nu+r} \qquad (3.62)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi bir varsayımda bulunalım: $q \in M$ herhangi bir nokta olmak üzere σ eğrisi p noktasından q noktasına birim hızlı minimal bir jeodezik eğri olsun. Burada p noktası teoremde verilen noktadır. Varsayalım ki

$$d(p, q) > \nu \qquad (3.63)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman

$$\sigma(\nu) \in M - \big(C_p \cup \{p\}\big), \qquad (3.64)$$

gerçeğinden dolayı r uzaklık fonksiyonu bu noktada diferansiyellenebilirdir. Şöyle ki bu noktada (3.62) eşitsizliğinin sol tarafı sabittir. (3.62) eşitsizliğinin sağ tarafı ise $r \to \nu^-$ iken $-\infty$ olur. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden (3.63) varsayımı her $q \in M$ için

$$d(p, q) \leq \nu \qquad (3.65)$$

şeklinde olmalıdır. M üzerinde herhangi iki nokta $p', q' \in M$ olmak üzere üçgen eşitsizliğinden

$$d(p', q') \leq d(p', p) + d(q', p) \leq 2\nu \qquad (3.66)$$

bulunur. Bu durumda manifold sınırlı olur. Teoremde M manifoldu tam alındığından Hopf-Rinow teoremi gereği manifold kompakttır. $\square$

Tezin bundan sonraki kısmında tam Riemann manifoldlar üzerinde daha önce verdiğimiz kompaktlık teoremlerinde yer alan varsayımlardan daha farklı varsayımlar içeren bazı kompaktlık teoremleri verilecektir. Bu teoremlerin varsayımları ikinci dereceden lineer diferansiyel denklemler için elde edilmiş bazı salınım koşullarından yararlanılarak elde edilecektir. Bundan dolayı teoremlere geçmeden önce bu salınım koşullarından bahsedeceğiz.

4. İKİNCİ DERECEDEN SALINIMLI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde $r(t)$ ve $p(t)$ sürekli fonksiyonlar ve (a, ∞) aralığı üzerinde $r(t) > 0$ olmak üzere

$$(r(t)y')' + p(t)y = 0 \tag{4.1}$$

şeklinde verilen ikinci dereceden lineer diferansiyel denklemlerin bazı salınım koşullarından bahsedilecektir. Bu koşullar tam Riemann manifoldlar üzerindeki kompaktlık teoremlerinin elde edilmesinde önemli bir role sahiptirler.

Tanım 4.0.5. $(r(t)y')' + p(t)y = 0$ *şeklindeki bir diferansiyel denklemin* (a, ∞) *aralığı üzerindeki sıfırdan farklı her çözümü sonsuz sıfıra sahipse bu denkleme salınımlı denklem denir [22].*

1949 yılında Wintner, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde

$$\int_0^\infty p(t)dt = +\infty \tag{4.2}$$

koşulu altında

$$y'' + p(t)y = 0 \tag{4.3}$$

ikinci dereceden diferansiyel denkleminin salınımlı olduğunu elde etmiştir [26]. Burada $p(t)$ sürekli fonksiyonu üzerinde hiçbir işaret kısıtlaması yoktur. Eş zamanlı olarak Leighton, $r(t) > 0$, $a \leq t < +\infty$ olmak üzere

$$(r(t)y')' + p(t)y = 0 \tag{4.4}$$

diferansiyel denklemi için benzer bir sonuç bulmuştur [10]. Leighton'un teoremi şu şekildedir:

Teorem 4.0.6 (Leighton, 1949). *$r(t)$ ve $p(t)$ sürekli fonksiyonlar ve $(0,\infty)$ aralığı üzerinde $r(t) > 0$ olmak üzere*

$$\int_a^\infty \frac{dt}{r(t)} = +\infty \qquad ve \quad \int_a^\infty p(t)dt = +\infty \tag{4.5}$$

koşullarının her ikisi birden sağlansın. Bu durumda

$$(r(t)y')' + p(t)y = 0 \tag{4.6}$$

diferansiyel denklemi salınımlıdır.

Burada $r(t) = 1$ durumu Wintner'in teoremini vermektedir. 1955 yılında Moore, Wintner'in sonucunu aşağıdaki gibi genellemiştir [15]:

Teorem 4.0.7 (Moore, 1955). *A ya da B koşullarından herhangi birisi sağlandığında $(r(t)y')' + p(t)y = 0$ denklemi salınımlıdır:*
(A)

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{dt}{r(t)} &= +\infty \ \text{ ve } \ \lambda_1 < 1 \ \text{ icin} \\ \int_a^\infty p(t)g^{\lambda_1}(t)dt &= +\infty \ \text{ burada } \ g(t) = 1 + \int_a^t \frac{d\xi}{r(\xi)}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

(B)

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{dt}{r(t)} &< +\infty \ \text{ ve } \ \lambda_2 > 1 \ \text{ icin} \\ \int_a^\infty p(t)h^{\lambda_2}(t)dt &= +\infty \ \text{ burada } \ h(t) = \int_t^\infty \frac{d\xi}{r(\xi)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Moore'un aynı çalışmasında elde ettiği diğer salınım teoremi ise şu şekildedir:

Teorem 4.0.8 (Moore, 1955). *Eğer*

$$\frac{1}{4} < c \leq G(t) \leq d < +\infty \tag{4.9}$$

ya da

$$\frac{1}{4} < c \leq H(t) \tag{4.10}$$

koşulu sağlanırsa $(r(t)y')' + p(t)y = 0$ *denklemi salınımlıdır. Burada*

$$G(t) = \left(1 + \int_a^t \frac{d\xi}{r(\xi)}\right) \int_t^\infty p(\xi)d\xi \tag{4.11}$$

ve

$$H(t) = \int_t^\infty \frac{d\xi}{r(\xi)} \int_a^t p(\xi)d\xi \tag{4.12}$$

dir. Ayrıca $p(t) \geq 0$ *olursa* $G(t)$ *fonksiyonunun yukarıdan sınırlanmaya ihtiyacı kalmaz.*

Nehari 1957 yılında aşağıdaki salınım koşulunu elde etmiştir [17]. Şöyle ki:

Teorem 4.0.9 (Nehari, 1957). $y'' + p(x)y = 0$ *diferansiyel denklemi* (a, ∞) *aralığı üzerinde salınımlı olmayan bir denklem ve* $\beta > 1$, $0 \leq \alpha < 1$ *ise o zaman*

$$\begin{aligned}(x-a)^{1-\beta} \int_a^x (t-a)^\beta p(t)dt + (x-a)^{1-\alpha} \int_x^\infty (t-a)^\alpha p(t)dt \\ \leq \frac{\beta - \alpha}{4}\left(1 + \frac{1}{(\beta-1)(1-\alpha)}\right)\end{aligned} \tag{4.13}$$

dir. Burada $p(x) > 0$*'dır.*

Yukarıdaki teoremde (4.13) eşitsizliğinin sol tarafı negatif olmadığından bu eşitsizlik iki ayrı eşitsizlik olarak düşünülebilir. Bunlar $\alpha = 0$ için

$$(x-a)^{1-\beta} \int_a^x (t-a)^\beta p(t)dt \leq \frac{\beta^2}{4(\beta-1)}, \tag{4.14}$$

ve $\beta = 2$ için

$$(x-a)^{1-\alpha} \int_x^\infty (t-a)^\alpha p(t)dt \leq \frac{(2-\alpha)^2}{4(1-\alpha)} \tag{4.15}$$

şeklindedir.

4.1. Salınımlı Diferansiyel Denklemler Yardımıyla Elde Edilen Kompaktlık Teoremleri

Literatürde Myers'ın teoremi birçok yazar tarafından geliştirilerek yeni sonuçlar elde edilmiştir. 1957 yılında Ambrose, Myers'ın teoreminin bir genellemesini vermiştir [1]. Ambrose çalışmasında Myers'dan farklı olarak Ricci eğrilik tensörü üzerine konulan alt sınır koşulunun yerine, jeodezikler boyunca Ricci eğriliğinin integrali üzerine bir koşul getirmiştir. Bu koşul ikinci dereceden lineer diferansiyel denklemlerin salınım koşulundan gelmektedir. Ambrose'un çalışması aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.1.1 (Ambrose, 1957). *M bir tam Riemann manifold olmak üzere bir $p \in M$ noktasından çıkan her $\gamma : [0, \infty) \to M$ jeodeziği için*

$$\int_0^\infty \mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))dt = \infty \tag{4.16}$$

olsun. Bu durumda M manifoldu kompakttır.

Bu teoremin varsayımı Ricci eğriliğinin her yerde pozitif olmasını gerektirmez. Öte yandan teoremde kompaktlık sonucu elde edilmesine karşın manifoldun çapı ile ilgili bir üst sınır verilmemiştir. Şimdi bu teoremin kanıtını verelim:

Kanıt. Varsayalım ki M manifoldu kompakt olmasın ve $\gamma(t)$ jeodeziği $p \in M$ noktasından çıkan birim hızlı bir ray olsun. Yani $\gamma : [0, \infty) \to M$ jeodeziği $\gamma(0) = p$ olmak üzere her $t_1 \in [0, \infty)$ için

$$d(p, q) = d(\gamma(0), \gamma(t_1)) = |t_1 - 0| = t_1 \tag{4.17}$$

olacak şekilde birim hızlı bir jeodeziktir. $t \in [0, \infty)$ için $m(t) = \Delta r(\gamma(t))$ olsun. Biliyoruz ki $m(t)$ fonksiyonu γ jeodeziği boyunca

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m(t)}{n-1}\right) + \left(\frac{m(t)}{n-1}\right)^2 + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1} \leq 0 \tag{4.18}$$

eşitsizliğini sağlar. Öte yandan $t \in [0, \infty)$ için

$$y''(t) + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1} y(t) = 0 \tag{4.19}$$

şeklinde verilen ikinci dereceden diferansiyel denklemi ele alalım. Teoremde verilen

$$\int_0^\infty \mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))dt = +\infty \tag{4.20}$$

koşulundan dolayı (4.19) diferansiyel denklemi salınımlı olur (bkz. tezin 59. sayfası). O halde (4.19) diferansiyel denkleminin sıfıra denk olmayan (aşikar olmayan) her çözümünün sonsuz tane sıfırı vardır. $t_1,\ t_2 \in [0, \infty)$ olmak üzere t_1 ve t_2 sırasıyla bu denklemin ardışık iki sıfırı olsunlar (yani $y(t_1) = y(t_2) = 0$). Diğer taraftan, her $t \in (t_1, t_2)$ için

$$\mu(t) := \frac{y'(t)}{y(t)} \tag{4.21}$$

olarak tanımlanan $\mu(t)$ fonksiyonu

$$\mu'(t) + \mu^2(t) + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1} = 0 \tag{4.22}$$

Riccati denkleminin bir çözümüdür. $\mu(t)$'nin tanımından ve $y(t_1) = y(t_2) = 0$ olmasından

$$\lim_{t \to t_1^+} \mu(t) = \infty \tag{4.23}$$

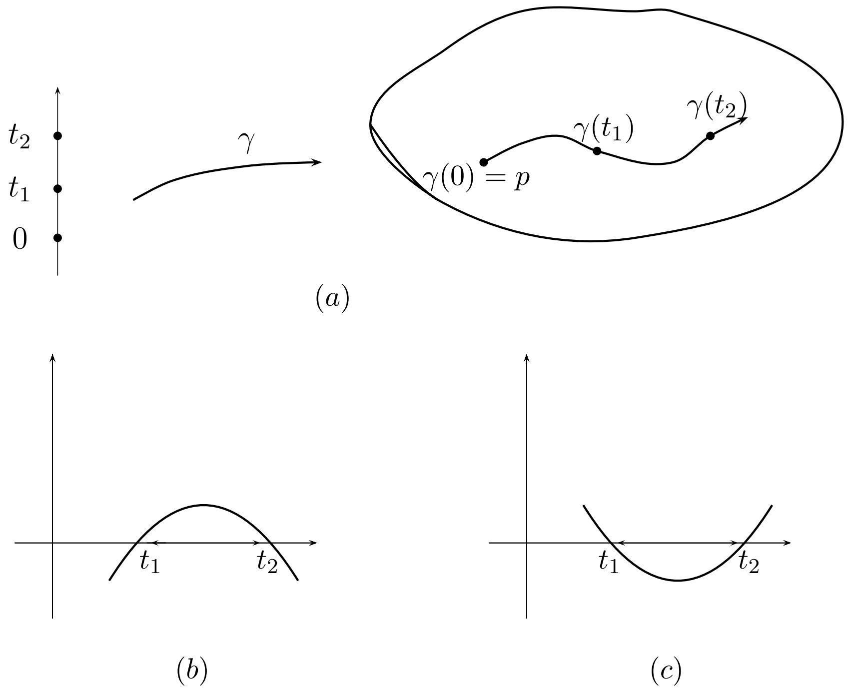
ve

$$\lim_{t \to t_2^-} \mu(t) = -\infty \tag{4.24}$$

olur (bkz. Şekil 4.1, s. 64).

Şimdi (4.18) ve (4.22) ifadeleri için Riccati karşılaştırma teoremini uygulayalım: γ jeodeziği üzerindeki her nokta cut-locus dışında olduğundan γ jeodeziği boyunca uzaklık fonksiyonu türevlenebilirdir. Dolayısıyla $t_1 \in (0, \infty)$ için

$$\frac{1}{n-1} m(t_1) = sabit \tag{4.25}$$



Şekil 4.1. (b) ve (c) durumlarının her ikisinde de $\lim_{t\to t_1^+}\mu(t) = \infty$ ve $\lim_{t\to t_2^-}\mu(t) = -\infty$ 'dir.

ve

$$\lim_{t\to t_1^+}\frac{1}{n-1}m(t) = \frac{1}{n-1}m(t_1) = sabit \tag{4.26}$$

dir. Aynı limit değerine $\mu(t)$ çözümü için bakılırsa

$$\lim_{t\to t_1^+}\mu(t) = \lim_{t\to t_1^+}\frac{y'(t)}{y(t)} = \infty \tag{4.27}$$

olduğu yukarıda elde edilmiştir. O zaman (4.26) ve (4.27) 'den

$$\lim_{t\to t_1^+}\frac{1}{n-1}m(t) \leq \lim_{t\to t_1^+}\mu(t) \tag{4.28}$$

yazılır. (4.28) nedeniyle yeterince küçük pozitif bir ε sayısı için $[t_1+\varepsilon, t_2)$ aralığında

$$\frac{1}{n-1}m(t_1+\varepsilon) \leq \mu(t_1+\varepsilon) \tag{4.29}$$

eşitsizliği geçerli olur. O halde Riccati karşılaştırma teoremi gereğince $[t_1+\varepsilon, t_2)$

aralığı üzerinde

$$\frac{1}{n-1}m(t) \leq \mu(t) \tag{4.30}$$

dir. Daha önce belittiğimiz gibi $\gamma(t)$ rayı üzerindeki noktalar cut-locusun dışındadır. Dolayısıyla $m(t) = \big(\Delta r\big)(\gamma(t))$ fonksiyonu t_2 noktasında tanımlıdır. Bu sebepten

$$\lim_{t\to t_2^-} \frac{1}{n-1}m(t) = \frac{1}{n-1}m(t_2) = sabit \tag{4.31}$$

olur. Aynı limitin $\mu(t)$ için

$$\lim_{t\to t_2^-} \mu(t) = -\infty \tag{4.32}$$

olduğu daha önce elde edilmişti $\big($**NOT**: Fakat bu durum, $\big($yani (4.31) ve (4.32) limit ifadeleri$\big)$ (4.30) eşitsizliği ile çelişir. Öyleyse γ jeodeziği bir ray değildir, bir minimal jeodeziktir. Başka bir deyişle $\gamma(t)$ jeodeziği $\gamma(0)$ ve $\gamma(t_2)$ arasında bir segmenttir$\big)$. Demek ki (4.30) eşitsizliği ve (4.32) limit ifadesinden dolayı "r" nin Laplacianı Δr, $\gamma(t_2)$ noktasında negatif yönde patlar yani

$$\lim_{t\to t_2^-} m(t) = \lim_{t\to t_2^-} (\Delta r)(\gamma(t)) = -\infty \tag{4.33}$$

olur. Böylece Hessian da negatif yönde patlar. Yani $\Delta r = tr(\text{hess}(r))$ olduğundan hess(r) simetrik lineer endomorfizmasının en az bir özdeğerinin $\gamma(t_2) \in M$ noktasında negatif yönde patlaması gerekir. Dolayısıyla $\gamma(t)$ minimal jeodeziğinin $\gamma(0) = p \in M$ noktasının bir conjugate (eşlenik) noktası vardır ([19], s. 50,139,140; [18], s. 270,271). p noktasından çıkan her γ rayı için bu prosedür geçerli olacağından dolayı p'den çıkan bu jeodeziklerin hepsinin (p'ye göre) bir conjugate noktası vardır. Ambrose'un [1] makalesindeki ilk lemmadan dolayı M manifoldunun sınırlı olduğu elde edilir. Teoremde M'nin tamlığı da verildiğinden Hopf-Rinow teoreminin (4). adımından dolayı manifold kompakttır. □

Ambrose tarafından elde edilen yukarıdaki teorem Galloway tarafından genelleştirilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuç aşağıda yer almaktadır [8].

Teorem 4.1.2 (Galloway, 1982). *M bir tam Riemann manifold olmak üzere bir $p \in M$ noktasından çıkan her $\gamma : [0, \infty) \to M$ jeodeziği ve bazı λ $(0 \leq \lambda < 1)$ değerleri için*

$$\int_0^\infty t^\lambda \mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))dt = \infty \tag{4.34}$$

integral ifadesi sağlansın. Bu durumda M manifoldu kompakttır.

Galloway teoremini kanıtlarken tezde daha önce verilen Moore'un salınım koşulundan faydalanmıştır. Galloway'in aynı çalışmasında negatif olmayan Ricci eğriliğine sahip manifoldlar için elde ettiği bir diğer teorem de şudur:

Teorem 4.1.3 (Galloway, 1982). $\mathrm{Ric} \geq 0$ *olsun. M bir tam Riemann manifold olmak üzere bir $p \in M$ noktasından çıkan $\gamma(0) = p$ olacak şekildeki her $\gamma : [0, \infty) \to M$ jeodeziği boyunca*

$$\int_{t_0}^\infty t^\lambda \mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))dt > (n-1)\frac{(2-\lambda)^2}{4(1-\lambda)}\frac{1}{t_0^{1-\lambda}} \tag{4.35}$$

koşulu sağlansın. O zaman M manifoldu kompakttır. Burada $t_0 > 0$ ve $0 \leq \lambda < 1$ 'dir.

Yukarıdaki teoremde Nehari'nin salınım koşulu kullanılmıştır. Nehari'nin teoreminde elde ettiği (4.15) eşitsizliğinde

$$a = 0, \quad \alpha = \lambda, \quad x = t_0 \ \ ve \ \ p(t) = \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1}$$

alınırsa Galloway'in teoremindeki (4.35) koşulu elde edilmektedir. Görülmektedir ki salınım koşulları göz önüne alınarak tam Riemann manifoldların kompaktlığı incelenebilmektedir.

Bu tez çalışmasında bazı salınım koşullarından yararlanılarak yeni kompaktlık teoremleri elde edilmiştir. Bu teoremlerin kanıtında Riccati karşılaştırma teoremi kullanılmıştır. Şimdi bu teoremleri verelim:

Teorem 4.1.4. *(M, g) n-boyutlu bir tam Riemann manifold olmak üzere bir $p \in M$ noktasından çıkan her $\gamma(t) : (0, \infty) \to M$ jeodeziği için*

$$\int_1^\infty e^{-2\sqrt{K}t}\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))dt = +\infty \tag{4.36}$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda M manifoldu kompakttır. Burada K herhangi bir pozitif sabittir.

Kanıt. Varsayalım ki M manifoldu kompakt olmasın ve $\gamma(t)$ jeodeziği p noktasından çıkan birim hızlı bir ray olsun. $t \in [0, \infty)$ için $m(t) = \Delta r(\gamma(t))$ olsun. Biliyoruz ki $m(t)$ fonksiyonu γ jeodeziği boyunca

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m(t)}{n-1}\Big) + \left(\frac{m(t)}{n-1}\right)^2 + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1} \leq 0 \tag{4.37}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada f kesin pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$F(t) := f(t)\frac{m(t)}{n-1} \tag{4.38}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (4.38) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$F'(t) = f'(t)\frac{m(t)}{n-1} + f(t)\frac{d}{dt}\Big(\frac{m(t)}{n-1}\Big) \tag{4.39}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.37) eşitsizliğinde $\frac{d}{dt}\Big(\frac{m(t)}{n-1}\Big)$ terimi yalnız bırakılıp (4.39) denkleminde yerine yazılırsa

$$F'(t) + f(t)\left(\frac{m(t)}{n-1}\right)^2 + f(t)\frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1} - f'(t)\frac{m(t)}{n-1} \leq 0 \tag{4.40}$$

bulunur. Bu eşitsizliği

$$\frac{d}{dt}\left(F(t) - \frac{f'(t)}{2}\right) + \frac{1}{f(t)}\left(F(t) - \frac{f'(t)}{2}\right)^2 + \psi(t) \leq 0 \tag{4.41}$$

olacak şekilde tekrar yazabiliriz. Burada $\psi(t)$ fonksiyonu,

$$\psi(t) = \frac{f''(t)}{2} - \frac{1}{4}\frac{(f'(t))^2}{f(t)} + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1}f(t) \tag{4.42}$$

dir. (4.41) eşitsizliğinde

$$\phi(t) := F(t) - \frac{f'(t)}{2} \tag{4.43}$$

tanımlaması yapılırsa eşitsizlik

$$\phi'(t) + \frac{1}{f(t)}\phi^2(t) + \psi(t) \leq 0 \tag{4.44}$$

şeklini alır. Görülüyor ki son eşitsizlik bir Riccati eşitsizliğidir. Burada f fonksiyonu, $K > 0$ olmak üzere $f(t) = e^{-2\sqrt{K}t} > 0$ olsun. Bu seçim $\psi(t)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\psi(t) = \left(K + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1}\right) e^{-2\sqrt{K}t} \tag{4.45}$$

elde edilir. Bu durumda (4.44) eşitsizliği

$$\phi'(t) + \frac{1}{e^{-2\sqrt{K}t}}\phi^2(t) + \left(K + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1}\right) e^{-2\sqrt{K}t} \leq 0 \tag{4.46}$$

olarak yazılır. Öte yandan $t \in [0, \infty)$ için

$$(e^{-2\sqrt{K}t}y'(t))' + \left(K + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1}\right) e^{-2\sqrt{K}t}y(t) = 0 \tag{4.47}$$

şeklinde verilen ikinci dereceden diferansiyel denklemi ele alalım. Teoremin

$$\int_1^\infty e^{-2\sqrt{K}t}\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))dt = +\infty, \tag{4.48}$$

koşulundan dolayı (4.47) diferansiyel denklemi salınımlı olur (bkz. tezin 60. sayfası). O halde (4.47) diferansiyel denkleminin sıfıra denk olmayan (aşikar olmayan) her çözümünün sonsuz tane sıfırı vardır. t_1, $t_2 \in [0, \infty)$ olmak üzere t_1 ve t_2 sırasıyla bu denklemin ardışık iki sıfırı olsunlar (yani $y(t_1) = y(t_2) = 0$). Diğer taraftan, her $t \in (t_1, t_2)$ için

$$\mu(t) = e^{-2\sqrt{K}t}\frac{y'(t)}{y(t)} \tag{4.49}$$

olarak tanımlanan $\mu(t)$ fonksiyonu

$$\mu'(t) + \frac{1}{e^{-2\sqrt{K}t}}\mu^2(t) + \left(K + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1}\right) e^{-2\sqrt{K}t} = 0 \tag{4.50}$$

Riccati denkleminin bir çözümüdür. $\mu(t)$'nin tanımından ve $y(t_1) = y(t_2) = 0$ olmasından

$$\lim_{t \to t_1^+} \mu(t) = \infty \tag{4.51}$$

ve

$$\lim_{t \to t_2^-} \mu(t) = -\infty \tag{4.52}$$

olur.

Şimdi (4.46) ve (4.50) ifadeleri için Riccati karşılaştırma teoremini uygulayalım: γ jeodeziği üzerindeki her nokta cut-locus dışında olduğundan γ jeodeziği boyunca uzaklık fonksiyonu türevlenebilirdir. Dolayısıyla $t_1 \in (0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} \phi(t_1) &= F(t_1) - \frac{f'(t_1)}{2} = f(t_1)\frac{m(t_1)}{n-1} - \frac{f'(t_1)}{2} \\ &= e^{-2\sqrt{K}t_1}\frac{m(t_1)}{n-1} + \sqrt{K}e^{-2\sqrt{K}t_1} \\ &= sabit \end{aligned} \tag{4.53}$$

ve

$$\lim_{t \to t_1^+} \phi(t) = \phi(t_1) = sabit \tag{4.54}$$

dir. Aynı limit değerine $\mu(t)$ çözümü için bakıldığında

$$\lim_{t \to t_1^+} \mu(t) = \lim_{t \to t_1^+} e^{-2\sqrt{K}t}\frac{y'(t)}{y(t)} = \infty \tag{4.55}$$

olduğu yukarıda verilmişti. O zaman (4.54) ve (4.55) 'den

$$\lim_{t \to t_1^+} \phi(t) \leq \lim_{t \to t_1^+} \mu(t) \tag{4.56}$$

elde edilir. Böylece yeterince küçük pozitif bir ε sayısı için $[t_1+\varepsilon, t_2)$ aralığında

$$\phi(t_1+\varepsilon) \leq \mu(t_1+\varepsilon) \tag{4.57}$$

olur. O halde Riccati karşılaştıma teoremi gereğince $[t_1+\varepsilon, t_2)$ aralığı üzerinde

$$\phi(t) \leq \mu(t) \tag{4.58}$$

dir. Aynı zamanda

$$\lim_{t\to t_2^-} \phi(t) = sabit \tag{4.59}$$

iken

$$\lim_{t\to t_2^-} \mu(t) = -\infty \tag{4.60}$$

olduğu yukarıda verilmişti. Ancak bu durum (4.58) ile çelişir. Demek ki γ jeodeziği bir ray değildir, bir minimal jeodeziktir. Teorem 4.1.1'in kanıtındaki aynı gerekçelerle M manifoldu sınırlı olur. Teoremde M'nin tamlığı da verildiğinden Hopf-Rinow teoreminden dolayı manifold kompakttır. □

Tezde elde edilen kompaktlık teoremlerinden bir diğeri aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.1.5. *(M,g) n-boyutlu bir tam Riemann manifold olmak üzere bir $p \in M$ noktasından çıkan her $\gamma(t) : (0,\infty) \to M$ jeodeziği için*

$$\frac{1}{t}\int_1^t s^2 \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(s),\gamma'(s))}{n-1} ds \geq c > \frac{1}{4} \tag{4.61}$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda M manifoldu kompakttır.

Kanıt. Bu teoremin kanıtında bir önceki teoremin kanıtındaki benzer işlemler yapılıp f fonksiyonu $f(t) = t^2$ şeklinde seçilirse

$$\phi'(t) + \frac{1}{t^2}\phi^2(t) + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t),\gamma'(t))}{n-1}t^2 \leq 0 \tag{4.62}$$

Riccati eşitsizliğine ulaşılır. Burada

$$(t^2 y'(t))' + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1} t^2 y(t) = 0 \tag{4.63}$$

şeklindeki diferansiyel denklemi ele alalım. Teoremdeki koşul nedeniyle bu denklemin salınımlı olduğu görülür. Önceki teoremin kanıtına benzer bir yaklaşımla

$$\mu(t) = t^2 \frac{y'(t)}{y(t)} \tag{4.64}$$

fonksiyonunun

$$\mu'(t) + \frac{1}{t^2}\mu^2(t) + \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{n-1} t^2 = 0 \tag{4.65}$$

denkleminin bir çözümü olduğu görülmektedir. Böylece (4.62) ve (4.65) ifadelerine Riccati karşılaştırma teoremi uygulanırsa $[t_1 + \varepsilon, t_2)$ aralığı üzerinde

$$\phi(t) \leq \mu(t) \tag{4.66}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada önceki teoremdekine benzer şekilde yukarıdaki eşitsizlikle çelişki elde edilir. Demek ki γ jeodeziği bir ray değildir, bir minimal jeodeziktir. Teorem 4.1.1'in kanıtındaki aynı gerekçelerle M manifoldu sınırlı olur. Teoremde M'nin tamlığı da verildiğinden Hopf-Rinow teoreminden dolayı manifold kompakttır. $\square$

Tezdeki orijinal Ricci eğrilik tensörü için elde edilen son teoremde Nehari'nin 1957 yılında elde ettiği salınım koşulu kullanılmıştır. Bu teorem şu şekildedir:

Teorem 4.1.6. $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)(t^2-1)g$ *olsun.* (M, g)*, n-boyutlu bir tam Riemann manifold olmak üzere bir* $p \in M$ *noktasından çıkan her* $\gamma(t)$ *jeodeziği için*

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\lambda} e^{-t^2} \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(s), \gamma'(s))}{n-1} dt > \frac{(2-\lambda)^2}{4(1-\lambda)} \frac{1}{t_0^{1-\lambda}} - C > 0, \tag{4.67}$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman M manifoldu kompakttır. Burada $t_0 > 0$, $C > 0$ ve $0 \leq \lambda < 1$'dir.

Yukarıdaki teoremin kanıtı önceki iki teoremdeki benzer işlemler tekrar edilerek kolayca elde edilebilir.

Bu konularda son yıllarda yapılan diğer çalışmaları da aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

2012 yılında Mastrolia, Rimoldi ve Veronelli tarafından çalışılmış bir kompaktlık teoreminde Ricci eğrilik tensörü negatif bir sabit ile alttan sınırlandırılmaktadır [14]. Bu teorem Galloway'in kompaktlık teoremlerinin bir genişlemesini vermektedir.

Teorem 4.1.7 (MRV, 2012). *M n-boyutlu bir tam Riemann manifold ve* $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)B^2$ *olsun* $(B \geq 0)$*.* $p \in M$ *olmak üzere* $p = \gamma(0)$ *noktasından çıkan her* $\gamma : [0, \infty) \to M$ *jeodeziği boyunca ya*

$$\frac{1}{n-1}\int_a^b t\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))dt > B\left\{b + a\frac{e^{2Ba}+1}{e^{2Ba}-1}\right\} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{4.68}$$

ya da

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1}\int_a^b t^{\lambda}\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))dt &> B\left\{b^{\lambda} + a^{\lambda}\frac{e^{2Ba}+1}{e^{2Ba}-1}\right\} \\ &+ \frac{\lambda^2}{4(1-\lambda)}\{a^{\lambda-1} - b^{\lambda-1}\} \end{aligned} \tag{4.69}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda M kompakttır. Burada $0 < a < b$ *ve* $\lambda \neq 1$*'dir.*

Not: Teorem 4.1.7'de "log" ile doğal logaritma fonksiyonu gösterilmektedir.

Son yıllarda Ambrose'un teoremi modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörlerine genişletilmiştir. Bu çalışmalardan birisi 2014 yılında Zhang tarafından Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü kullanılarak elde edilmiştir. Zhang bu çalışmasında Ambrose'un kanıtladığı kompaktlık teoremini Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü için bir ek koşul altında kanıtlamıştır [28].

Teorem 4.1.8 (Zhang, 2014). *M bir tam Riemann manifold olsun. Her* $x \in M$ *için* $d(x, p)$*, p noktasından x noktasına olan uzaklık fonksiyonu olmak üzere* $p \in M$ *noktasından çıkan her* $\gamma : [0, \infty) \to M$ *jeodeziği için*

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{Ric}_f(\gamma'(t), \gamma'(t))dt = \infty \tag{4.70}$$

ve

$$f(x) \leq C(d(x,p)+1) \tag{4.71}$$

olsun. O zaman M manifoldu kompakttır. Burada C herhangi bir sabittir.

Zhang bu teoremin kanıtında farklı bir yöntem kullanmıştır. Riccati eşitsizliğini ele alarak artan bir dizi yardımıyla kanıtını tamamlamıştır. Bu alanda yapılan bir diğer çalışma 2015 yılında Cavalcante, Oliveira ve Santos tarafından k-Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü

$$\mathrm{Ric}_f^k := \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}f - \frac{1}{k}\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f \tag{4.72}$$

ve Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü kullanılarak elde edilen kompaktlık teoremleridir [3]. Cavalcante, Oliveira ve Santos Ambrose'un teoremini ve Galloway'in 1979'da elde ettiği teoremini bu iki modifiye edilmiş Ricci eğrilik tensörü için genellemişlerdir. Bu teoremler sırasıyla aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.1.9 (COS, 2015). *M_f bir tam weighted manifold olmak üzere bir $p \in M_f$ noktasından çıkan her $\gamma(t)$ jeodeziği için*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \mathrm{Ric}_f^k(\gamma'(s), \gamma'(s))ds = \infty \tag{4.73}$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda M manifoldu kompakttır. Burada $k \in (0,\infty)$'dir.

Teorem 4.1.10 (COS, 2015). *M_f bir tam weighted manifold ve γ eğrisi boyunca*

$$\frac{df}{dt} \leq 0 \tag{4.74}$$

olsun. Bir $p \in M_f$ noktasından çıkan her $\gamma(t)$ jeodeziği için

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \mathrm{Ric}_f(\gamma'(s), \gamma'(s))ds = \infty \tag{4.75}$$

ise M manifoldu kompakttır.

Cavalcante, Oliveira ve Santos yukarıdaki teoremlerinin kanıtında Zhang'ın kullandığı yöntemi kullanmışlardır.

5. SONUÇ

Riemann manifoldlarının bir metrik uzay olarak nasıl tanımlandığı gösterilmiştir. Riemann manifoldlarının kompaktlığıyla ilgili teoremlere panoramik bir bakış verilmiştir. Bu konuda önemli bir yere sahip olan Myers ve Ambrose kompaktlık teoremleri ispatlanmıştır. Bu doğrultudaki diğer çalışmalara yer verilip, yeni kompaktlık teoremleri elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni teoremlerde Ricci tensörünün modifikasyonları yer almaktadır. Teoremlerin ispatlarında enerji fonksiyonelinin ikinci varyasyonu ve Riccati karşılaştırma teoremi kullanılmıştır. Ambrose'un teoremi Riccati karşılaştırma teoremi kullanılarak ispatlanmıştır. Elde ettiğimiz Ambrose tipindeki diğer teoremlerde de bu yöntem kullanılmıştır.

KAYNAKÇA

[1] Ambrose, W. (1957). A theorem of Myers. *Duke Math J.*, 24 (3), 345-348.

[2] Bakry, D., Émery, M. (1985). Diffusions hypercontractives. *In: Séminaire de probabilitiés XIX, Lect. Notes in Math.*, 1123, 177-206.

[3] Cavalcante, M.P., Oliveira, J.Q., Santos, M.S. (2015). Compactness in weighted manifolds and applications. *Results. Math.*, 68 (1), 143-156.

[4] Cheeger, J., Gromov, M., Taylor, M. (1982). Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds. *J. Differ. Geom.*, 17 (1), 15-53.

[5] Cheng, S.Y. (1975). Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. *Math. Z.*, 143 (3), 289-297.

[6] Fernández-López, M., García-Río, E. (2008). A remark on compact Ricci solitons. *Math. Ann.*, 340 (4), 893-896.

[7] Galloway, G.J. (1979). A generalization of Myers theorem and an application to relativistic cosmology. *J. Differ. Geom.*, 14 (1), 105-116.

[8] Galloway, G.J. (1982). Compactness criteria for Riemannian manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 84, 106-110.

[9] Lee, J.M. (1997). *Riemannian manifolds: An introduction to curvature.* New York: Springer.

[10] Leighton, W. (1949). Principal quadratic functionals and self-adjoint second-order differential equations. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 35 (4), 192-193.

[11] Limoncu, M. (2010). Modifications of the Ricci tensor and applications. *Arch. Math.*, 95 (2), 191-199.

[12] Limoncu, M. (2012). The Bakry-Emery Ricci tensor and its applications to some compactness theorems. *Math. Z.*, 271 (3), 715-722.

[13] Lott, J. (2003). Some geometric properties of the Bakry-Emery-Ricci tensor. *Comment. Math. Helv.*, 78, 865-883.

[14] Mastrolia, P., Rimoldi, M., Veronelli, G. (2012). Myers-type theorems and some related oscillation results. *J. Geom. Anal.*, 22 (3), 763-779.

[15] Moore, R.A. (1955). The behavior of solutions of a linear differential equation of second order. *Pasific J. Math.*, 5 (1), 125-145.

[16] Myers, S.B. (1941). Riemannian manifolds with positive mean curvature. *Duke Math J.*, 8 (2), 401-404.

[17] Nehari, Z. (1957). Oscillation criteria for second-order linear differential equations. *Trans. Amer. Mart. Soc.*, 85 (2), 428-445.

[18] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.* New York: Academic Press.

[19] Petersen, P. (2006). *Riemannian geometry.* (second edition). New York: Springer.

[20] Qian, Z. (1997). Estimates for weighted volumes and applications. *Quart. J. Math. Oxford*, 48 (2), 235-242.

[21] Ruan, Q. (2009). Two rigidity theorems on manifolds with Bakry-Emery Ricci curvature. *Proc. Japan Acad.*, 85 (6), 71-74.

[22] Swanson, C.A. (1968). *Comparison and oscillation theory of linear differential equations.* New York and London: Academic Press.

[23] Tadano, H. (2016). Remark on a diameter bound for complete Riemannian manifolds with positive Bakry-Émery Ricci curvature. *Differ. Geom. Appl.*, 44, 136-143.

[24] Wang, L.F. (2014). A Myers theorem via m-Bakry-Émery curvature. *Kodai Math. J.*, 37 (1), 187-195.

[25] Wei, G., Wylie, W. (2009). Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor. *J. Differ. Geom.*, 83 (2), 377-405.

[26] Wintner, A. (1949). A criterion of oscillatory stability. *Quart. Appl. Math.*, 7 (1), 115-117.

[27] Wylie, W. (2008). Complete shrinking Ricci solitons have finite fundamental group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136, 1803-1806.

[28] Zhang, S. (2014). A theorem of Ambrose for Bakry-Emery Ricci tensor. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 45 (3), 233-238.